10.15

None Leon

2021/1/27

1.阿贾克斯煤炭公司是该地区唯一的雇工公司。它可以雇佣任意数量的女工或男工。女性的供给曲线如下：

$$l_f = 100w_f$$

对男人来说

$$l_m = 9w_m^2$$

其中，wf和wm分别是支付给女性和男性工人的小时工资率。假设阿贾克斯在一个完全竞争的市场上以每吨 5 美元的价格出售其煤炭，并且雇佣的每个工人（无论男女）每小时可以开采 2 吨。如果公司希望利润最大化，应该雇用多少男女工人，这两个群体的工资率是多少？阿贾克斯的矿山机械每小时能赚多少利润？这一结果与 Ajax 受到限制（比如说，受到市场力量的限制）根据其边际产品的价值向所有工人支付相同的工资相比，会有什么不同呢？

solution:

1)独买利润最大化

$\max: \pi = pf\left(l_f + l_m\right) - w_f\left(l_f\right) \cdot l_f - w_m(l_m) \cdot l_m$

将 $p = 5, \quad f(l) = 2l, \quad w_f l l_f = \frac{l_f}{10} \quad w_m(l_m) = \frac{1}{3}\sqrt{l_m}$带入

$\Rightarrow \max: \pi = 10(1f + \ln) - \dfrac{1}{100} l_f^2 - \dfrac{1}{3} l_m^{\frac{3}{2}}$

FOC: $\begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial l_f} = 10 - \frac{1}{50} l_f = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial l_m} = 10 - \frac{1}{2} l_m^{\frac{1}{2}} = 0 \end{cases}$

解得：$\begin{cases} l_f = 500 \\ l_m = 400 \end{cases} \quad \begin{cases} w_f = 5 \\ w_m = \frac{20}{3} \end{cases}$

$\pi = 11500$

2）若工资统一且 $w = MRPL = 10$

则

$l_f = 1000, \quad l_m = 900 \quad , \quad \pi = 0$

2. 假设你拥有一个杂货铺，并雇用一个人替你照看它。这个雇员的效用水平依赖于他能 得到的工资 y 和他付出的努力水平 a: $U(y,a)=\sqrt{y}-a$; 他可选的努力水平有两种: $a=3$ 或 $a=0$; 假设这个雇员的保留效用是 0 。你是一个风险中立者，目标是尽力使商铺营业 额 x 达到最大。考虑以下情况下你的工资支付政策。

1) 雇员的努力 $a=3$ 时，商铺营业额 $x=270$: $a=0$ 时，$x=70$，你可以毫不费力地监 视雇员的工作。

2) 商铺的营业结果与（1）的假设相同，但你无法知道雇员是怎样工作的。

3) 除了雇员的努力水平外，商铺的营业结果还受某些外在因素的影响。假设有三种可 能的营业额: 0 、100 和 400，而你和雇员都发现一定努力投入下实现各种营业结果的 概率存在以下规律:

	0	100	400
$a=3$	0.2	0.4	0.4
$a=0$	0.4	0.4	0.2

如果你看不到雇员的努力水平，你的最优激励契约是什么?

solution：

委托代理——离散型

1）可观测 a

$$y(a)=\begin{cases}9 & a=3\\0 & a=0\end{cases}$$

2）不可观测 a,可观测 x $y(x)=\begin{cases}9 & x=270\\0 & x=70\end{cases}$

3）不可观测 a，且 x 受到外在因素影响

若激励雇员采取 $a=3$，则

$\max: \pi = 200-0.2y_1-0.4y_2-0.4y_3$

$\begin{cases}0{,}2\sqrt{y_1}+0.4\sqrt{y_2}+0.4\sqrt{y_3}-3\ge 0(IR)\\0{,}2\sqrt{y_1}+0.4\sqrt{y_2}+0.4\sqrt{y_3}-3\ge 0.4\sqrt{y_1}+0.4\sqrt{y_2}+0.2\sqrt{y_3}(IC)\end{cases}$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}=200-0.2y_1-0.4y_2-0.4y_3 \quad &+\lambda\left[0.2\sqrt{y_1}+0.4\sqrt{y_2}+0.4\sqrt[4]{y_3}-3\right]\\&+u\left[0.2\sqrt{y_3}-0.2\sqrt{y_1}-3\right]\end{aligned}$$

FOC: $\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_1} = -0.2 + \lambda \cdot \frac{0.1}{\sqrt{y_1}} - u \cdot \frac{0.1}{\sqrt{y_1}} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_2} = -0.4 + \lambda \cdot \frac{0.2}{\sqrt{y_2}} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_3} = -0.4 + \lambda \cdot \frac{0.2}{\sqrt{y_3}} + u \frac{0.1}{\sqrt{y_3}} = 0 \end{cases}$

k-T 条件 $\begin{cases} \lambda\left[0.2\sqrt{y_1} + 0.4\sqrt{y_2} + 0.4\sqrt{y_3} - 3\right] = 0 \\ u\left[0.2\sqrt{y_3} - 0.2\sqrt{y_1} - 3\right] = 0 \end{cases}$

若 $\lambda = u = 0$，不成立

若 $\begin{matrix} u = 0, \lambda > 0: \\ y_1 = y_2 = y_3 = 9, \quad \lambda = 6 \end{matrix}$，成立

若 $\lambda = 0. u > 0:$，不成立

若 $\lambda > 0, \quad \mu > 0:$

$\lambda = 18, \quad u = 6, \quad 2\sqrt{y}_1 = \lambda - u < 0$不成立

综上：$y_1 = y_2 = y_3 = 9. \quad \pi = 191$

若采取激励雇员采取 a=0，则：

$\max: \pi = 200 - 0.4y_1 - 0.4\mathrm{y}_2 - 0.2\mathrm{y}_3$

$\begin{cases} 0.4\sqrt{y_1} + 0.4\sqrt{y_2} + 0.2\sqrt{y_3} \geq 0 (IC) \\ 0.4\sqrt{y_1} + 0.4\sqrt{y_2} + 0.2\sqrt{y_3} \geq 0,2\sqrt{y_1} + 0.4\sqrt{y_2} + 0.4\sqrt{y_3} - 3 \quad (IR) \end{cases}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = 200 - 0.4y_1 - 0.4y_2 - 0.2y_3 \quad &+\lambda\left[0.4\sqrt{y_1} + 0.4\sqrt{y_2} + 0.2\sqrt{y_3}\right] \\ &+u\left[3 + 0.2\sqrt{y_1} - 0.2\sqrt{y_3}\right] \end{aligned}$$

Foc: $\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_1} = -0.4 + \lambda \cdot \frac{0.2}{\sqrt{y_1}} + u \cdot \frac{0.1}{\sqrt{y_1}} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_2} = -0.4 + \lambda \cdot \frac{0.2}{\sqrt{y_2}} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_3} = -0.2 + \lambda \frac{a_1}{\sqrt{y_3}} - u \cdot \frac{0.1}{\sqrt{y_3}} = 0 \end{cases}$

K-T 条件：$\begin{cases} \lambda\left[0.4\sqrt{y_1} + 0.4\sqrt{y_2} + 0.2\sqrt{y_3}\right] = 0 \\ u\left[3 + 2.2\sqrt{y_1} - 0.2\sqrt{y_3}\right] = 0 \end{cases}$

若 $\lambda = u = 0$，不成立

若$\lambda > 0$ 且 $u = 0$: $\quad 0.4\sqrt{y_1} + 0.4\sqrt{y_2} + 0.2\sqrt{y_3} = 0$

$\lambda = 2\sqrt{y_1} = 2\sqrt{y_2} = 2\sqrt{y_3} \quad \begin{matrix} \Rightarrow y_1 = y_2 = y_3 = 0 \\ \Rightarrow \lambda = 0 \end{matrix}$不成立

若$\lambda = 0$且$u > 0$，不成立

若$\lambda > 0$且$u > 0$，$4\sqrt{y_1} = 2\lambda + u; 4\sqrt{y_2} = 2\lambda, 2\sqrt{y_3} = \lambda - \mu$

$\Rightarrow 0.4\sqrt{y_1} + 0.4\sqrt{y_2} + 0.2\sqrt{y_3} = 0 \quad (\lambda > 0)$

$\Rightarrow \quad 0.5\lambda = 0 \quad \Rightarrow \lambda = 0$不成立

综上：最优工资方案为：$y_1 = y_2 = y_3 = 9$

此时雇员选择$a = 3, E\pi = |q|, EU = 0$

3. 两个企业在市场上进行产量竞争，市场反需求函数为$p = a - bQ$，企业的边际成本为$c_1 = c_2 = c$; 请回答下列问题:

1）若双方制定产量时，无法观测对方的产量，求均衡产量和利润。

2) 若企业 1 可以先宣布产量, 企业 2 将企业 1 的产量视为既定，然后决定自己的产量, 求均衡产量和利润。

3) 记企业有两种策略，先定产和后定产，请写出该博弈的标准表达式; 求解纯战略纳什 均衡。如果将该博弈重复进行 50 次，子博弈精炼纳什均衡是什么?

4) 有人提出双方合作会更好。如果双方合作，平分利润; 如果都不合作，则最终达到古 诺均衡; 求合作的情况下，每个企业的产量和利润。会比不合作好吗?

5) 承接上问，此时企业有两种策略，合作和不合作。如果有十方合作，另一方不合作, 那么合作方生产合作产量，不合作方生产对应最优产量; 请写出该博弈的标准表达式。 该博弈的纯战略纳什均衡是什么? 如果该博弈进行 100 次, 请问双方合作是可持续的吗?

6）如果双方不知道该博弈要进行多少次，只知道下一时期碰面的概率为p, 那么此概 率需要满足什么条件，才能让双方在每次碰面时都选择合作成为子博弈精炼纳什均衡?

solution：

1）古诺竞争

$\max: \pi_1 = (a - bq_1 - bq^2)q_1 - cq_1$

$$\Rightarrow \begin{cases} q_1 = \dfrac{a - c - b_2}{2b} \\ q_2 = \dfrac{a - c - bq_1}{2b} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q_1^c = q_2^c = \dfrac{a-c}{3b} \\ \pi_1^c = \pi_2^c = \dfrac{(a-c)^2}{9b^2} \end{cases}$$

2）斯塔克伯格竞争

$$q_2 = \frac{a-c-b_1^q}{2b}$$

$\max: \pi_2 = [a - bq_1 - bq_2(q_1)] \cdot q_1 - cq_1$

$$\Rightarrow \begin{cases} q_1^s = \dfrac{a-c}{2b} \\ q_2^s = \dfrac{a-c}{4b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_1^s = \dfrac{(a-c)^2}{8b} \\ \pi_2^f = \dfrac{(a-c)^2}{16b} \end{cases}$$

3）先 (H_1) 后 (H_2)定产

标准表达式 | | | 2 | | |— |—- |————- |——- | | | | H_1 | H_2 | | 1 | H_1 | (π_1^C, π_2^C) | (π_1^S, π_2^T) | | | H_2 | (π_1^T, π_2^S) | (π_1^c, π_2^c) | 纯策略 NE: $NE: (H_1, H_1)$ 即均选择先定产，最终形成古诺均衡。

若重复 50 次：则 SPN 为 $NE: (H_1, H_1)$重复 50 次

4）合作时： $\max: \pi^m = [a - b(q_1 + q_2)](q_1 + q_2) - c(q_1 + q_2)$

$$\Rightarrow \quad Q^m = q_1 + q_2 = \frac{a-c}{2b}$$

$$\Rightarrow \quad \pi_1^m = \pi_2^m = \frac{\pi^m}{2} = \frac{(a-c)^2}{8b}$$

$\Rightarrow \pi_i^m > \pi_i^c$

即合作优于不合作

5）首先说明合作的不稳定：

不妨令 $q_1 = \frac{a-c}{4b}$

此时 $\max: \pi_2 = (a - bq_1 - bq_2) \cdot q_2 - cq_2$

$$Foc: \frac{d\pi_2}{dq_2} = \frac{3}{4}(a-c) - 2bq_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad q_2 = \frac{3(a-c)}{8b}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi_2^B = \dfrac{9(a-c)^2}{64b} > \dfrac{\pi^m}{2} \\ \pi_1^N = \dfrac{3(a-c)^2}{32b} < \dfrac{\pi^m}{2} \quad (\pi_1^N < \pi_1^c) \end{cases}$$

标准表达式：C_1 表示合作，C_2表示不合作

		2	
		c_1	c_2
1	c_1	$(0.5\pi^m, 0.5\pi^m)$	(π_1^N, π_2^B)
	c_2	(π_1^B, π_2^N)	(π_1^c, π_2^c)

纯策略 NE

(c_2, c_2)即双方均不合作，形成古诺均衡

若重读 100，结果不改变。

6）若上方下一阶段相遇的概率为 p

考虑如下冷酷战略：

开始时选择合作 (c_1)直到对方选择不会随后一直采取不合作 (c_2)

均不偏离的收益

$$\pi_1 = \pi_2 = \frac{\pi^m}{2}\sum_{t=0}^{\infty} p^t = \frac{\pi^m}{2(1-p)}$$

若有一方偏离，不妨假设 1 偏离 $\pi_1 = \pi_1^B + \pi_1^c \sum_{t=1}^{\infty} p^t = \pi_1^B + \frac{p}{1-p}\pi_1^c$

不偏离的条件为：

$p^* \geq 0.49$