10.2

None Leon

2021/1/26

1. (20 分) 村里有 2 N 个居民，其中 N 个居民住在一区，每人养 q_1 只羊, 每 只羊成本为 c_1, N 个居民住在二区，每个人养 q_2 只羊，每只羊成本为 c_2 。每只羊 带来的收入是 200-q, q 是村里羊的总数。

   (1) (10 分) 找到博亦的纳什均衡下两个区域里每个居民养羊的数量，找出 社会效益最优选择下村子里羊的总量。

   (2) (5 分）当地政府为了达到社会效益的最优选择，对两个地区按照统一 标准征税，每只羊征收 t。计算税收标准 t, 以及对应的纳什均衡下两个区域里 每个居民的养羊数量。

   (3) (5 分) 如果当地政府只对第一区的居民征税，每只羊征税 t, 以达到社 会效益的最优。请计算税收标准 t, 以及对应的纳什均衡下两个区域里每个居民养羊的数量。

solution：

1）单独决策：

工区单个居民受益最大化：

max: $\pi_1 = [200 - N(q_1 + q_2)]q_1 - c_1 q_1$

$Foc: \frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = 200 - c_1 - 2Nq_1 - Nq_2 = 0$

得：$q_1 = \frac{200 - c_1 - Nq_2}{2N}$

同理得：$q_2 = \frac{200 - c_2 - Nq_1}{2n}$

则均衡时的数量为：

$$\begin{cases} q_1^* = \dfrac{200 - 2c_1 + c_2}{3N} \\ q_2^* = \dfrac{200 - 2c_2 + c_1}{3N} \end{cases}$$

社会最优：

max: $SW = N(q_1 + q_2)[200 - N(q_1 + q_2)] - N(c_1 q_1 + c_2 q_2)$

st: $q_1 \geq 0; \quad q_2 \geq 0$

$\exists \mu_1 \geq 0, \quad \mu_2 \geq 0$

$\mathcal{L} = N(q_1+q_2)[200 - N(q_1+q_2)] - N(c_1q_1+c_2q_2) + u_1q_1 + u_2q_2$

$Foc: \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = N[200 - c_1 - 2N(q_1+q_2)] + u_1 = 0$

$\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = N[200 - c_2 - 2w(q_1+q_2)] + u_2 = 0$

社会最优的产量分配决策取决于c_1, c_2大小

令

$c = \min\{c_1, c_2\}$

则 $q^{**} = \frac{200-c}{2}$

2）若对两个地区同时征税 t

则

$c_1' = c_1 + t; c_2' = c_2 + t$

由 1）知：

$$\begin{cases} q_1' = \dfrac{200 - 2c_1 + c_2 - t}{3N} \\ q_2' = \dfrac{200 - 2c_2 + c_1 - t}{3N} \end{cases}$$

若使 $N(q_1' + q_2') = q^{**}$

则 $t^* = \frac{200+3c-2c_1-2c_2}{4}$

此时$\begin{cases} q_1'^* = \frac{200-c-2c_1+2c_2}{4N} \\ q_2'^* = \frac{200-c-2c_2+2c_1}{4N} \end{cases}$

3）仅对工区居民征税：

$c_1'' = c_1 + t, \quad c_2'' = c_2$

由 1）知：

$$c_1' = c_1 + t; c_2' = c_2 tt$$

若使 $N(q_1'' + q_2'') = q^{**}$

则：$t^{**}=\frac{200-2(c_1+c_2)+3c}{2}$

得：$\begin{cases} q_1''^{*}=\frac{c_2-c}{N} \\ q_2''^{*}=\frac{200+c-2c_2}{2N} \end{cases}$

仅对单一舍去征税时，若 $c=c_2$即 $c_1>c_2$时， $q_1^{**}=0$，尽让效率更高的社区生产，与社会最优想法一致。

2. (共 25 分) 考虑一个罗宾逊孤岛模型。罗宾逊在岛上生产食品，生产函数为 $q=AL^{1/2}$, $A>0$, 其中 q 为 食品产量， L 是劳动力投入使用量，A 为外生参数。罗宾逊把每天 24 小时的时间在劳动（L）和休闲（R）之间 分配。罗宾逊的效用函数为 $U=\ln c+\ln R$, 其中 c 为食品的消费数量。

(1) (5 分) 写下该经济体在 q-R 空间的生产可行性前沿函数。该生产可能性集是凸集吗?

(2) (5 分) 请解出经济体最优的生产和消费。请问该资源分配方式可以通过完全竞争市场均衡实现吗? 如 果是，请求出市场均衡解（包括均衡价格和均衡数量）。设食品价格为 p，劳动力价格为 w。如果不是，请解释 为什么。 下面考虑生产函数 $q=AL^2$ 。

(3) (5 分) 写下此时该经济体在 q-R 空间的生产可行性前沿函数。该生产可能性集是凸集吗?

(4) (5 分) 请解出新生产函数下该经济体最优的生产和消费。请问该资源分配方式可以通过完全竞争市场 均衡实现吗? 如果是，请求出市场均衡解（包括均衡价格和均衡数量）。设食品的价格为 p，劳动力价格为 w。 如果不是，请解释为什么。

solution：

1）由于

$q=AL^{\frac{1}{2}},\quad L+R=24$

咋生产可能性前沿函数为：

$q=A(24-R)^{\frac{1}{2}}$

生产可能性集：

$q\le A(24-R)^{\frac{1}{2}}$

且：$\frac{dq}{dR}=-\frac{1}{2}A(24-R)^{-\frac{1}{2}}<0$

$$\frac{d^2q}{dR^2}=\frac{1}{4}A(24-k)^{-\frac{3}{2}}>0$$

则该生产可能性集不是凸集。

2）最优的生产和消费

max: $\quad U=\ln c+\ln R$

st: $\quad c=q$

$\quad\quad q=A(24-R)^{\frac{1}{2}}$

简化为

$$\max: U=\ln\left[A(24-R)^{\frac{1}{2}}\right]+\ln R$$

$$Foc: \frac{dU}{dR}=\frac{1}{R}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{24-R}=0$$

解得： $R^*=16, \quad q^*=C^*=2\sqrt{2}A$

完全竞争市场：

居民效用最大化 max: $\quad U=\ln C+\ln R$

st: $\quad p\cdot c=w(24-R)+\pi$

$$\Rightarrow\begin{cases}c=\dfrac{24w+\pi}{2p}\\ R=\dfrac{24w+\pi}{2w}\end{cases}\Rightarrow L^s=12-\frac{\pi}{2w}$$

企业利润最大化：

$$\max: \pi=p\cdot q-w\cdot L$$

$$\Rightarrow \quad L^d=\left(\frac{pA}{2w}\right)^2; \pi=\frac{p^2A^2}{4w}$$

市场出清： $\Rightarrow$

$$L^s=L^d$$

$$\left(\frac{p}{w}\right)^*=\frac{4\sqrt{2}}{A}$$

$$\Rightarrow \quad k^*=16; \quad c^*=q^*=2\sqrt{2}A$$

即竞争性市场能够达到社会最优的资源配置。

3）由于 $q=AL^2 \quad L+R=24$

则生产可能性前沿函数为：

$q = A(24 - R)^2$

生产可能性集： $q \leq A(24 - R)^2$

且 $\frac{dq}{dR} = -2A(24 - R) < 0$

$$\frac{d^2q}{dR^2} = 2A > 0$$

则该集合为凸集

4） 最优的生产和消费：

max: $U = \ln c + \ln R$

st: $c = q$

$q \quad = A(24 - R)^2$

简化为：

max: $U = \ln[A(24 - R)^2] + \ln R$

$$Foc: \frac{dU}{dR} = \frac{1}{R} - \frac{2}{24 - R} = 0$$

解得：$R^* = 8 \quad q^* = c^* = 256A$

完全竞争市场

$\pi = p \cdot A \cdot 596 - 24w$

效用最大化：

max: $U = \ln c + \ln R + \pi$

$st: p \cdot c = w(24 - R)$

$$\begin{cases} c = \dfrac{24w + \pi}{2p} \\ R = \dfrac{24w + \pi}{2w} \end{cases} \Rightarrow L^s = 12 - \frac{\pi}{2w}$$

利润最大化：

max: $\pi = p \cdot q - w \cdot L$

$$\text{FOC:} \begin{cases} \frac{d\pi}{dL} = 2APL - w = 0 \\ \frac{d^2\pi}{dL^2} = 2AP > 0 \end{cases} \Rightarrow L^d = 24$$

由于 $L^s = 12 - \frac{\pi}{2w} < 12 < L^d = 24$

在此情况下无法实现市场配置。

3. 考虑下列策略性博弈:

A

		2	
		L	R
1	U	(0,0,10)	(-5,-5,0)
	D	(-5,-5,0)	(1,1,-5)

B

		2	
		L	R
1	U	(-2,-2,0)	(-5,-5,0)
	D	(-5,-5,0)	(-1,-1,5)

每一格左边的数字是游戏 1 的得益，中间的数字为游戏者 2 的得益，右边的数字为游戏者 3 的得益。游戏者 3 的策略是先 A 矩阵或选 B 矩阵。

(1) 上述博亦中有几个纯策略纳什均衡？为什么? (5 分)

(2) 如果三个游戏者中可以有两个人结盟共同另一个人，会出现什么结果?（2 分）。在哪一个均衡结果中 没有人会有“结盟”动机? 为什么?（3 分）

solution

三个参与者——有限次完全信息静态博弈

1）纯策略 NE

(U,L,A)、(D,R,B)

(U,L,A)为纯策略

当 1,3 选 U,A 时，2 选 L,此时，其余参与者不偏离

(D,R,B)为纯策略 NE

当 1,3 选 D,R 时，2 选 R，此时，1,3 均不偏离。

2）若 1,2 结盟

UL UR DL DR

A	$(10,0)$	$(0,-10)$	$(0,-10)$	$(-5,2)$
B	$(0,-4)$	$(0,-10)$	$(0,-10)$	$(5,-2)$

若 1,3 结盟 UA DA UB DB

L	$(0,10)$	$(-5,-5)$	$(-2,-2)$	$(-5,-5)$
R	$(-5,-5)$	$(1,-4)$	$(-5,-5)$	$(-1,4)$

若 3,2 结盟 $LA \quad RA \quad LB \quad RB$

U	$(0,10)$	$(-5,-5)$	$(-2,-2)$	$(-5,-5)$
D	$(-5,-5)$	$(1,-4)$	$(-5,-5)$	$(-1,4)$

若 NE 为 (U,L,A)

由于 1,3 结盟，2，3 结盟也能够达成该结果，故无差异。

由于 1,2 结盟，只能达到 (B,DR)，此时 1 与 2 的收益低于 (U,L,A)故 1,2 不可能结盟。

若 NE 为 (D,R,B)

两两结盟均无差异。