# 9.11

None Leon

2021/1/11

1.决策中的不确定性考虑初始利润为$\pi 0 = 15$，成本函数为$\c（q）=10+q^{2}$的企业。该企业销售产品的价格根据以下概率分布随机分布：

$$\tilde{p} = \begin{cases} p_H = \$8 & \text{with probability } 1/2 \\ p_L = \$2 & \text{with probability } 1/2 \end{cases}$$

其中波浪号（~）反映价格水平是一个随机变量。

1）如果公司经理的效用函数是

$$u(\tilde{\pi}) = E[\tilde{\pi}] - \frac{1}{9}\operatorname{Var}(\tilde{\pi})$$

确定企业的最优生产水平，以及由此产生的均衡利润。

2)现在考虑一下公司经理的效用函数是由$u$（$\pi$） $= E[\pi]$描述的。现在的最优生产水平和相应的均衡利润是多少？

3） 若 $f = 2$ 时情况又如何?

solution：

期望利润为：
$$\begin{aligned} E(\pi) &= E(\pi_0 + \tilde{p}q - q^2 - 10) \\ &= E(\tilde{p})q - q^2 + 5 \\ &= 5q - q^2 + 5 \end{aligned}$$

利润的方差为：
$$\begin{aligned} \operatorname{Var}(\tilde{\pi}) &= \operatorname{Var}(\pi_0 + \tilde{p}q - q^2 - 10) \\ &= \operatorname{Var}(\tilde{p})q^2 \\ &= [E(\tilde{p}^2) - E^2(\tilde{p})] \cdot q^2 \\ &= 9q^2 \end{aligned}$$

1）若 $u(\tilde{\pi}) = E(\tilde{\pi}) - \frac{1}{9}\operatorname{var}(\tilde{\pi})$

效用最大化： $\max: u(\tilde{\pi}) = 5q - 2q^2 + 5$

$$Foc: \frac{du(\tilde{\pi})}{dq} = 5 - 4q = 0$$

解得： $q^* = \frac{5}{4}\mu(\tilde{\pi}) = 8.125$

2)若 $u(\tilde{u}) = E(\tilde{u})$

效用最大化：

$$\max: u(\tilde{\pi}) = 5q - q^2 + 5$$

$$Foc: \frac{du(\tilde{\pi})}{dq} = 5 - 2q = 0$$

解得：$q^{**} = \frac{5}{2}$，此时 $u(\tilde{\pi}) = 11.25$

不确定状态下的特殊效用函数

1.CARA 效用函数：$R_A$不变

$$\begin{aligned} u(w) &= -e^{-Aw} \\ \Rightarrow R_A &= -\frac{\mu''(w)}{\mu'(w)} = A \end{aligned}$$

2.若 $w \sim N(u, \sigma^2)$

期望效用为：

$$\begin{aligned} E[u(w)] &= E(-e^{-A\omega}) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} - e^{-Aw} f(w) dw \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} - e^{-Aw} \frac{1}{\sqrt{2\lambda}\sigma} e^{-\frac{(w-\mu)^2}{-2\sigma^2}} dw \\ &= -e^{-A\left(u - \frac{1}{2}A\sigma^2\right)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-2\sigma^2} dW \\ &= -e^{-A\left(\mu - \frac{1}{2}A\sigma^2\right)} \end{aligned}$$

单调变换：

$$E[u(w)] = u - \frac{1}{2}A\sigma^2$$

这就是二次效用函数的来源。

3 分析

若 $A > 0 \Rightarrow$风险厌恶

$$\Rightarrow E[u(w)] = u - \frac{1}{2}A\sigma^2 < E(w) = u$$

$\Rightarrow \frac{1}{2}A\sigma^2$可以看成是 CE

$\Rightarrow$ 保险公司最多收取 $\frac{1}{2}A\sigma^2$的保费。

2. (15′)$a$ 和 $b$ 两人，在纯交换经济中,

$$U_a = \ln x_1^a + 2\ln x_2^a$$
$$U_b = \ln x_1^b + 2\ln x_2^b$$

3. 若初始京赋为 $a$: (9,3), $b$: (12,6), 求:

1）超额需求函数，并验证瓦尔拉斯定律。

2）均衡价格。

3）若总初始京赋为 (21,9) , 求契约曲线。

solution：

1）效用最大化：不妨假设$p_1=p, p_2=1$ $\begin{aligned}\max: &\quad u=\ln x_1+2\ln x_2\\ \text{st:} &\quad px_1+x_2=p_{w_1}+w_2\end{aligned}$

拉格朗日函数：

FOCs: $\mathcal{L}=\ln x_1+2\ln x_2+\lambda[pw_1+w_2-px_1-x_2]$

FOCs: $\begin{cases}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_1}=\frac{1}{x_1}-\lambda p=0\\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_2}=\frac{2}{x_2}-\lambda=0\end{cases}$

解得：

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{pw_1+w_2}{3p}\\ x_2=\dfrac{2(pw_1+w_2)}{3}\end{cases}$$

1）将 $a(9,3), b(12,6)$代入得：

$ED_1=x_1^a+x_1^b-w_1=\frac{3}{p}-14$ $ED_2=x_2^a+x_2^b-w_2=14p-3$

验证瓦尔拉斯定律：

$\forall(p_1,p_2)$

$$p_1ED_1+p_2ED_2=p\left(\frac{3}{p}-14\right)+(14p-3)=0$$

2)瓦尔拉斯均衡：

$ED_1=ED_2=0$

令$ED_1=0$得： $p=\frac{3}{14}$

故瓦尔拉斯均衡的价格比为：

$$\frac{p_1^*}{p_2^*}=p=\frac{3}{14}$$

n-1 个市场出清，则第 n 个市场一定出清。

3）求契约曲线

$\max: u_a = \ln x_1^a + 2\ln x_2^a$
$st: \bar{u}_b = \ln x_1^b + 2\ln x_2^b$

$$x_1^a + x_1^b = 21$$
$$x_2^a + x_2^b = 9$$

拉格朗日函数：$\mathcal{L} = \ln x_1^a + 2\ln x_2^a + \lambda[\bar{u}_b - \ln(21 - x_1^a) - 2\ln(9 - x_2^a)]$

$$\text{Foc: } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1^a} = \frac{1}{x_1^a} + \lambda \cdot \frac{1}{21 - x_1^a} = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2^a} = \frac{2}{x_2^a} + 2\lambda \cdot \frac{1}{9 - x_2^a} = 0$$

解得：$x_2^a = \frac{3}{7} x_1^a$

故契约曲线为：$x_2^a = \frac{3}{7} x_1^a \quad (0 \le x_1^a \le 21)$

3.有一个产业，厂商 1 已经进入该产业，厂商 2 观察厂商 1 的产量来决定自己是否进入产 业以及相应的生产规模。市场的反需求函数为 $p = 56 - 2q$, 厂商的成本函数分别为厂商 1 为：$C_1(q_1) = 20q_1 + f$, 厂商 2: $C_2(q_2) = 20q_2 + f$, 其中 $f$ 为固定成本。

1）给定厂商 1 的产量 $q_1$，求厂商 2 的产量 $q_2$ 及利润 $\pi_2$ 。

2） 如果厂商 2 要求利润 $\pi_2$ 严格大于零才会进入该市场，那么厂商 1 预计到厂商 2 对 $q_1$ 的反应 时，是允许厂商 2 进入该市场还是采取追制措施阻止 2 进入? 设 $f = 18$ 。

solution

1）厂商 2 最优决策：

$\max: \pi_2 = (56 - 2q_1 - 2q_2)q_2 - 20q_2 - f$

$$Foc: \frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = 36 - 2q_1 - 4q_2 = 0$$

解得：

$$q_2 = \frac{18 - q_1}{2}$$

$$\pi_2 = \frac{(18 - q_1)^2}{2} - f$$

2)若厂商 2 不进入，则厂商 1 为垄断厂商。

$$\max: \pi_1^m \quad = (56-2q_1)q_1 - 20q_1 - f$$
$$= 2(18-q_1)q_1 - f$$

$$Foc: \frac{d\pi_1^m}{dq_1} = 36 - 4q_1 = 0$$

解得：$q_1^m = 9, \quad \pi_1^m = 162 - f$

若厂商进入，厂商 1 为产量领导者：

$$\max: \quad \pi^S \quad = [56 - 2q_1 - 2q_2(q_1)]q_1 - 20q_1 - f$$
$$= (18 - q1)q_1 - f$$

$$Foc: \frac{d\pi^s}{dq_1} = 18 - 2q_1 = 0$$

解得：$q_1^s = q. \quad \pi_1^s = 81 - f$

企业 2 利润为 0 的分界点为：$\pi_2 = \frac{(18-q_1)^2}{2} - f = 0$

得：$q_1^* = 18 - \sqrt{2f}(18 + \sqrt{2f}\,舍去)$

当 f=2 或 18 时，$\pi_1^m(18-\sqrt{2f}) > \pi_1^m(18+\sqrt{2f})$，故不会再 $18+\sqrt{2f}$处遏制

若 $f = 18, q_1^* = 12$

由于 $q_1^* > q_1^m$

且 $\pi_1^m(q_1^*) = 126 > \pi_1^s(q_1^s) = 63$

故采取进入搁置战略。生产$q_1^* = 12$，企业 2 不进入。

若$f = 2, q_1^* = 16$

由于$q_1^* > q_1^m$

且$\pi_1^m(q_1^*) = 62 < \pi_1^s(q_1^s) = 79$

此时进行斯塔伯格竞争。

note：

进入阻止、遏制、容纳分析

1.基本概念与假设

1）基本假设：

线性需求

$p = a - bq$

$mc_1 = c_1 \geq mc_2 = c_2$ 存在固定成本 F

企业 1 为在位者，企业 2 考虑是否进入

2)基本概念

进入阻止： 企业 1 生产$q_1^m$使得企业 2 不进入

进入遏制：企业 1 生产$q_1^*$刚好使得 $\pi_2 = 0$

进入容纳：允许企业 2 进入，进入进行斯塔克伯格竞争

为何使得 $c_1 \geq c_2$ ?

当 $c_1 \geq c_2$时，在位者没有成本优势，这样分析才更有意义，此时： $q_1^s \leq q_1^m$，即斯塔克伯格的产量小于等于产量垄断的产量。

2 企业 1 策略分析

1)企业 2 的利润函数

$$\pi_2 = \frac{(a - c_2 - bq_1)^2}{4b} - F$$

若 $q_1 \geq q_1^*$，则企业 2 不进入

若$0 < q_1 < q_1^*$，则企业 2 进入

企业 2 的利润函数

$$\begin{cases} \pi^m = (a - c_1 - bq_1^m)q_1^m - F \\ \pi_1^s = \dfrac{1}{2}(a - 2c_1 + c_2 - bq_1^s)q_1^s - F \end{cases}$$

3 策略分析

1）若 $q_1^* < q_1^m$：进入阻止，此时企业 1 选择垄断产量 $q_1^m$ 就能阻止进入。

2）若 $q_1^m < q_1^*$ ，进行遏制式容纳

若 $\pi_1^s(q_1^s) \leq \pi_1^m(q_1)$，则进行遏制

若上产$q_1^*$的利润 $\pi_1^m(q_1) \geq$ 斯塔格伯格的 $\pi_1^s(q_1^s)$ ，则企业 1 生产 $q_1^*$ 以遏制企业 2，此时达不到 $\pi_1^m(q_1^m)$，但也优于 $\pi_1^s(q_1^s)$

若 $\pi_1^s(q_1^s) > \pi_1^m(q_1^*)$：进入容纳

此时进入容纳为最优策略，进行斯塔格伯格竞争。

比较静态分析：

$c_1$，$c_2$的影响

$c_1 \geq c_2$保证了分类的多样性

随着$\Delta c = c_1 - c_2 \uparrow$，在位厂商的优势＄＄，此时进入容纳策略的可能性＄＄

F 的影响

随着 F 上升，潜在厂商的优势下降，此时进入阻止策略可能上升。＄＄＄＄