9.30

None Leon

2021/1/20

1.某个村子里有 n 个村民和一笔财富 w, 这笔财富会在其中 k 个村民中平均分配(k ≤ n, 分到钱的人可以自己决定用多少钱来修路，多少钱用来私人消费，每个村民都具有柯布道格 拉斯效用函数 $\mathrm{U}_i(\mathrm{H},\mathrm{X_i}) = \mathrm{H}^{0.5}\mathrm{X_i^{0.5}}$, 其中 $\mathrm{H} = \sum_{i=1}^{k} h_i$ 为每个人修路的长度总和，一人修路，全村 受益，x_i 为第 i 个村民的私人消费。假设公路和私人消费的单价均为 1 。求:

（1）在均衡条件下，这个村子最后修路修了多长?（假设有内点解）

（2）最优的修路长度随着参与分配这笔财富的村民数 k 发生什么变化?为什么?

3.对于某一起盗切案件有 k 个目击证人。每个目击证人可以选择告发盗穷犯，也可以选择不告 发。由于目击证人都很忙，因此选择告发会带来一些不便，但是将罪犯绳之以法又是大家希望看到 的结果。对于每个目击证人而言，罪犯被抓获产生的效用为 4; 而罪犯逃脱的效用为 0. 目击证人告 发罪犯本身会带来 1 的负效用。 罪犯被抓获的充要条件是有人告发罪犯。

1). 求出所有的纯战略纳什均衡。(6’)

2). 若只有两个目击证人, 求出混合战略纳什均衡。(7’)

3). 在 k 个日击证人的情况下，混合战略纳什均衡具有对称性，求此均衡，并求出罪犯被抓获的 概率。(7’)

solution:

1)任意分到钱的村民 i 的效用最大化：

$$max: U_i = H^{\frac{1}{2}} x_i^{\frac{1}{2}}$$

st: $\quad H_i + X_i = \frac{w}{k}$

拉格朗日函数：

$$\mathcal{L} = H^{\frac{1}{2}} x_i^{\frac{1}{2}} + \lambda\left[\frac{w}{k} - H_i - x_i\right]$$

$$\text{FOC:} \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \frac{\partial U_i}{\partial x_i} - \lambda = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial H_i} = \frac{\partial U_i}{\partial H} - \lambda = 0 \end{cases}$$

解得：

$x_i = H \quad (\forall i = 1,2,\cdots k)$

加总：$H^* = \frac{w}{k+1}$，其中 $H_i^* = \frac{W}{k(k+1)}$

2）社会最优的 H

假设社会福利函数为：

$$SW = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i U_i(H, X_i)$$

st: $\quad P_H \cdot H + P_x \cdot \sum_{i=1}^{k} x_i = w$

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i U_i(H, x_i) + \lambda \left[w - p_H \cdot H - p_x \sum_{i=1}^{k} x_i \right]$$

$$\text{FOC:}\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \lambda_i \frac{\partial U_i}{\partial x_i} - \lambda p_x = 0 \quad (\forall i = 1,2\cdots k) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial H} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial V_i}{\partial H} - \lambda p_H = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda_i = \frac{\lambda P_x}{\partial U_i / \partial x_i}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial U_i / \partial H}{\partial U_i / \partial x_i} = \frac{p_H}{p_x}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{k} M\,RS_{H,x_i} = \frac{p_H}{p_G}$$

其中 $\sum_{i=1}^{k} M\,RS_{H,x_i} = \frac{p_H}{p_x}$，即为公平品供给的萨缪尔森条件，从该条件可以看出，与竞争性商品的供给不同，公平的供给为纵向加总

左边

$\sum_{i=1}^{k} M\,RS_{H,X_i}$表示村民对于 H 的相对报价之和，右边为市场的均衡条件

本题中 $U_i(H, x_i) = H^{\frac{1}{2}} x_i^{\frac{1}{2}}, p_H = p_G = 1$

解得：$\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial U_i / \partial H}{\partial U_i / \partial Y_i} = \frac{\sum_{i=1}^{k} X_i}{H} = 1$

故 $H^{**} = \frac{w}{2}$

note：

财富的平均分配人数会影响到竞争性均衡时的 H^* 数量

由 1）知

$$H^* = \frac{w}{k+1}，\quad H_i^* = \frac{w}{k(k+1)}$$

由于 $\frac{dH_i^*}{dk} < 0$

故 $\frac{dH^*}{dk} < 0$

即得到财富的人越多，搭便车的行为越严重。

财富的初始分配会影响到竞争性均衡时的 H^* 数量

假设初始财富分配为

$$(w_1, w_2 \dots . w_k)\left(\sum_{i=1}^{k} w_i = w\right)$$

max: $\quad U_i = U_i(H, X_i)$

st： $\quad p_H \cdot H_i + p_x \cdot X_i = w_i$

$H_i \geq 0$

$\mathcal{L} = U_i(H, X_i) + \lambda[w_i - p_H H_i - p_x \cdot x_i] + \mu H_i$

$$\text{FOC:}\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial H_i} = \frac{\partial U_i}{\partial H} - \lambda p_H + \mu = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \frac{\partial U_i}{\partial x_i} - \lambda p_x = 0 \\ \mu \cdot H_i = 0 \end{cases}$$

以 C-D 函数为例说明： $U_i = H^\alpha x_i^{1-\alpha}$ 其中 $k = 2$

$$\begin{cases} MRS_{H,x_i} = \frac{p_N}{p_G} \quad (i = 1,2) \\ p_H \cdot H_i + p_x \cdot X_i = w_i \end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases} A^* = \dfrac{2}{2-\alpha}\dfrac{w}{p_H} \\ H_1^* = \dfrac{w_1-(1-\alpha)w_2}{(2-\alpha)p_H} \\ H_2^* = \dfrac{w_2-(1-\alpha)w_1}{(2-\alpha)p_H} \end{cases}$$

若 1,2 均为内点解

此时 H^*受到指数的影响，而不收到 (w_1, w_2)的初始分配影响，也就是强调内部解的原因

若角点解 ∃

不妨假设 $w_1 < (1-\alpha)w_2$

即 $H_1^* = 0$

此时 $H^* = \frac{\partial W_2}{P_H}$

由于 $\frac{\partial W_2}{P_H} - \frac{\alpha}{2-\alpha}\frac{w}{p_H} = \frac{\alpha}{P_H}[(1-\alpha)w_2 - w_1] > 0$

即 H^*上升

说明初始分配越极端，

H^* 越接近 H^{**}

当$w_2 \to w$时，

$$H^* \to \frac{\partial w}{p_H} = H^{**}$$

2.假设鲁滨逊漂流记生产和消费鱼（F）和椰子（C）。假设在某一时期内，他决定工作 200 个小时，对这段时间是钓鱼还是采集椰子漠不关心。罗宾逊的鱼产量由

$$F = \sqrt{l_F}$$

椰子生产

$$C = \sqrt{l_C}$$

其中，lF和lC是捕鱼或采集椰子所花费的小时数。因此，

$$l_C + l_F = 200$$

鲁宾逊漂流记对鱼和椰子的效用由

$$\text{utility } = \sqrt{F \cdot C}$$

1） 如果罗宾逊不能与世界其他地方进行贸易，他将如何选择分配他的劳动力？F*和*C的最佳水平是什么？他的效用是什么？椰子鱼的价格是多少？

2）假设现在贸易已经开放，罗宾逊可以以$pF/pC = 2/1$ *的价格比交易鱼和椰子。* 如果罗宾逊继续生产（a）部分的F和C数量，一旦有机会交易，他会选择消费什么？他的新效用水平将是什么？

3） 如果罗宾逊调整产量以利用世界价格优势，你对（b）部分的回答会有什么变化？

4）将第（a）、（b）、和（c）部分的结果制成图表

solution：

1）生产可能性边界

$F^2 + c^2 = 200$

鲁滨逊效用最大化：

max: $\quad U = \sqrt{F \cdot c}$

st: $\quad F^2 + c^2 = 200$

$\mathcal{L} = \sqrt{F \cdot c} + \lambda[200 - F^2 - c^2]$

FOC: $\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F} = \frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{F}} - 2\lambda F = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c} = \frac{\sqrt{F}}{2\sqrt{c}} - 2\lambda c = 0 \end{cases}$

解得： $F^* = c^* = 10\ u^* = 10$

$RPT_{F,c} = 1$

2）维持禀赋 $(w_F, w_c) = (10,10)$

效用最大化，令 $p = P_F/P_c$

max: $\quad U = \sqrt{F \cdot c}$

st: $2 \cdot F + c = 30$

$\mathcal{L} = \sqrt{F \cdot c} + \lambda[30 - 2F - c]$

FOC: $\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F} = \frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{F}} - 2\lambda = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c} = \frac{\sqrt{F}}{2\sqrt{c}} - \lambda = 0 \end{cases}$

解得：

$F = 7.5 \quad c = 15$

$U = 10.61$

3）天正生产计划

效用最大化：

$\max : U = \sqrt{F \cdot c}$

$st: 2F + C = 2\mathrm{wF} + \mathrm{wC}\ \mathrm{w}_F^2 + \mathrm{w}_c^2 = 200$

$\mathcal{L} = \sqrt{F \cdot c} + \lambda[2w_F + w_c - 2F - c] + \mu[200 - w_F^2 - w_c^2]$

FOC:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial F} = \dfrac{\sqrt{c}}{2\sqrt{F}} - 2\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial c} = \dfrac{\sqrt{F}}{2\sqrt{c}} \quad - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_F} = 2\lambda - 2\mu w_F = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_c} = \lambda - 2\mu w_c = 0 \end{cases}$$

解得：$W_F^{**} = 4\sqrt{10} \quad W_c^{**} = 2\sqrt{10}$

$F^{**} = \dfrac{5}{2}\sqrt{10} \quad c^{**} = 5\sqrt{10}$

$U^{***} \doteq 11.18$

3.对于某一起盗切案件有 k 个目击证人。每个目击证人可以选择告发盗穷犯，也可以选择不告 发。由于目击证人都很忙，因此选择告发会带来一些不便，但是将罪犯绳之以法又是大家希望看到 的结果。对于每个目击证人而言，罪犯被抓获产生的效用为 4; 而罪犯逃脱的效用为 0. 目击证人告 发罪犯本身会带来 1 的负效用。 罪犯被抓获的充要条件是有人告发罪犯。

1). 求出所有的纯战略纳什均衡。(6’)

2). 若只有两个目击证人, 求出混合战略纳什均衡。(7’)

3). 在 k 个日击证人的情况下，混合战略纳什均衡具有对称性，求此均衡，并求出罪犯被抓获的 概率。(7’)

solution：

1）求纯策略 NE

令 $s=1$表示告发， $s=0$表示不告发

纯策略 $(s_1,\dots s_k)=(0.\dots 0)$即无一人告发

$\forall$目击者 i，给定 $s_{-i}=0,\quad \pi(s_i=1)=3\quad \pi(s_i=0)=0$

故 $\forall i$会偏离 $s_i=0$ ，选择 $s_i=1$

即 $(s_1\dots s_k)=(0,\cdots 0)$不是纯策略。

纯策略 2：仅有 1 人告发，不妨假设 $s_i=1,s_{-i}=0$

$\forall$选择 $s_j=0$的目击者而言

给定 $s_i=1,s_{-i}=0$

$\pi\left(s_j=0\right)=4,\pi(s_i=1)=3$

$\forall j$不会偏离

$s_{-i}=0$

$\pi(s_i=0)=0,\pi(s_i=1)=3$ ，i 也不会偏离

纯策略 3： 对于高发这而言：给定存在其他告发者的情况$\pi(s=1)=3,\pi(s=0)=4$故会偏离

即：高发这不小于 2 不是纯策略 NE

综上：纯策略 NE 有 k 个，分别为

$s_1=(s_1,\cdots,s_k)=(1,0,\dots,0)\vdots s_k=(s_1,\dots s_k)=(0,0,\dots,1)$

3）当 $k=2$时，求混合策略

支付矩阵：

		B	
		1	0
A	1	(3,3)	(3,4)
	0	(4,3)	(0,0)

假设 A,B 选择 $s=1$ 的概率分别为 θ,γ

$(0<\gamma,\theta<1)$

当 $s_A=1$时

$E\pi_A'=3$

当 $s_A = 0$时

由无差异性： $E\pi_A^0 = 4\gamma$

得： $E\pi_A^1 = E\pi_A^0$

得： $\gamma = \frac{3}{4}$

由对称性知：

$$\gamma^* = \theta^* = \frac{3}{4}$$

即混合策略 NE: $NE: (s_A, s_B) = \left(\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)\right)$

3)假设有 k 个目击者，求混合策略 NE

假设 i 选择 $s_i = 1$的概率为

$p_i(0 < p_i < 1, i = 1,2 \dots k)$

当 $s_i = 1$时，

$E\pi_i' = 3$

当 $s_i = 0$时

$$E\pi_i^0 = 4\left[1 - \prod_{j \neq i} (1 - p_j)\right]$$

由无差异性知：

$E\pi_i^0 = E\pi_i'$

由对称性知：

$p_1 = p_2 = \cdots = p_k = p$

解得： $p^* = 1 - 4^{\frac{1}{1-k}}$

综上：混合策略 NE 为： $(s_1, \cdots s_k) = [(p^*, 1 - p^*) \cdots (p^*, 1 - p^*)]$

囚犯被抓的概率为：

$q^* = 1 - (1 - p^*)^k = 1 - 4^{\frac{k}{1-k}}$