8.3

None Leon

2021/2/4

1.新冠疫情下，经济下滑，为了刺激消费，各地出台一系列的措施。假设 $u(x, y) = \ln x + \ln y, \quad p_x = p_y = 1, \quad m = 100$

1)A 市发放价值 100 元的x商品消费券，写出新的预算约束并求最优选择。

2)B 市发放 100 元现金，写出新的预算约束并求最优选择。

3)C 市对 x 商品给于 50%的价格优惠，写出新的预算约束并求最优选择。

4)D 市对前 50 单位的 x 商品给于 50%的价格优惠，写出新的预算约束并求最优选择。

solution：

1)无任何补贴下的最优化选择

效用最大化

$$\max u(x, y) = \ln x + \ln y$$

$$st: \quad p_x \cdot x + p_y \cdot y \leq m$$

构建拉格朗日函数：

$L = \ln x + \ln y + \lambda\left(m - p_x \cdot x - p_y \cdot y\right)$

Focs: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x} - \lambda \cdot p_x = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y} - \lambda \cdot p_y = 0$

解得：$\begin{cases} x = \frac{m}{2px} \\ y = \frac{m}{2py} \end{cases}$

当$p_x = p_y = 1, \quad m = 100$时，$\begin{cases} x = 50 \\ y = 50 \end{cases}$

2)补贴价值 100 元的 x 商品券

预算线约束：

$\begin{cases} y = 100(0 \leq x < 100) \\ x + y = 200 \end{cases}(100 \leq x \leq 200)$

效用最大化

$$\max: u(x,y) = \ln x + \ln y$$
$$st: \quad x + y \le 200$$

(带入检验法) 解得： $x = 100, \quad y = 100$满足条件。即最优消费位于$A(100,100)$

3)100 元的现金补贴

预算约束线： $x + y = 200$

最优的选择仍旧是 $A(100,100)$

*与商品券相比较： 1)预算集扩大：选择范围更广

2)虽不影响 $u(x,y) = \ln x + \ln y$的选择

但影响$u(x,y) = \ln x + 2\ln y$等的选择

3)相比较于等量的商品券，现金补贴更优，给于了消费者更多的选择空间。

4）总体折扣

预算线约束： $\frac{1}{2}x + y = 100$

由于 $p_x = p_y = 1, \quad m = 100$

最优选择为 $(x,y) = (100,50)$

5)部分折扣

预算线约束：

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + y = 100(0 \le x - 50) \\ x + y = 125 \end{cases} (50 \le x \le 100)$$

最优选择

当$p_x = \frac{1}{2}, \quad p_y = 1, \quad m = 100$时，$\begin{cases} x = 100 > 50 \\ y = 50 \end{cases}$不符合

当$p_x = p_y = 1, \quad m = 125$时，$\begin{cases} x = 62.5 \\ y = 62.5 \end{cases}$符合

综上，最优选择为 $(x,y) = (62.5,62.5)$

2.生产函数为 $Y = [AK^\rho + BL^\rho]^{\frac{1}{\rho}}$,K 与 L 的价格分别为 r,w，短期资本固定为$\bar{k}$,长期可变($\rho \le 1$且$\rho \ne 0$).

1)求短期总成本函数

2)求长期总成本函数

3)证明：长期总成本函数是短期成本函数的包络线

solution：

成本最小化：

$$\min \quad SC = wL + \gamma\bar{k}$$

$$st: \quad y = [A\bar{K}^{\rho} + BL^{\rho}]^{\frac{1}{\rho}}$$

解得短期成本函数为$SC = wB^{-\rho}[A\bar{K}^{\rho} - y^{\rho}]^{\frac{1}{\rho}} + r\bar{K}$

1)SC 分为两个部分，其中固定成本为$\gamma\bar{K}$，可变成本为$wB^{-\frac{1}{\rho}}[A\bar{K}^{\rho} - y^{\rho}]^{\frac{1}{\rho}}$，注意到$\bar{K}$同时影响固定成本与可变成本，而不是仅仅影响固定成本。

2)$\bar{k}$通过影响k/L的比例来影响刻板成本部分。

2)长期成本函数

成本最小化：

min:

$$LC = wL + \gamma k$$

st

$$: \quad y = [Ak^{p} + BL^{\rho}]^{\frac{1}{\rho}}$$

构建拉格朗日函数：

$$L = wL + rk + \lambda\left[y - (Ak^{\rho} + BL^{\rho})^{\frac{1}{\rho}}\right]$$

Focs: $\frac{\partial f}{\partial L} = w - \lambda\left(Ak^{\rho} + BL^{\rho})^{\frac{1}{\rho}} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot B\rho L^{\rho-1} = 0\right.$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k} = r - \lambda(AK^{\rho} + BL^{\rho})^{\frac{1}{\rho}} \cdot \frac{1}{\rho} A\rho k^{\rho-1} = 0$$

解得：$LC = \left[A^{\frac{1}{1-\rho}} r^{\frac{\rho}{\rho-1}} + B^{\frac{1}{1-\rho}} w^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right]^{\frac{\rho-1}{\rho}} \cdot y$

3)LC 是 SC 的包络线

令$\frac{\partial SC}{\partial \bar{k}} = \frac{\partial\left[WB^{-\frac{1}{\rho}}[A\bar{k}^{\rho}-y^{p}]^{\frac{1}{\rho}}+r\bar{k}\right]}{\partial \bar{k}} = 0$

求出 k^*，并带入到 SC 得：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{sc}(k^*) \quad &= \left[A^{\frac{1}{1-\rho}} r^{\frac{\rho}{\rho-1}} + B^{\frac{1}{1-\rho}} w^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right]^{\frac{\rho-1}{\rho}} \cdot y \Bigg) \\
&= LC
\end{aligned}
$$

所以长期成本是短期成本的下包络线。