9.16

None Leon

2021/1/14

1.关于被国税局审计的不确定性，考虑外生收入为$y > 0$的纳税人，其面临的税率为t，，其中$0 < t < 1$。她被要求向政府报告收入水平x，并根据报告纳税，即tx。如果纳税人是诚实的，她将报告$x = y$，但她可能会通过报告较低的收入 $0 \leq x < y$*来作弊*。让$z = y - x$代表收入被低估的金额。政府不知道真正的收入是多少，必须通过审计和处罚制度来强制执行。假设纳税人所知的执行政策是以概率p*审计报告*，其中$0 < p < 1$。假设p是常数，因此独立于x。如果有审计，我们假设政府总是知道这个人的真实收入y。如果纳税人被发现作弊，除了逃税外，她还必须为每一美元的逃税收入支付罚款θ。假设纳税人是风险厌恶型的，这意味着她的效用u（x）在收入上是增加的和凹的，并且她使预期效用最大化。

1)对于任何z，其中$0 \leq z < y$，写出纳税人在两种可能情况中的每一种情况下将获得的收入：如果有审计和如果没有审计（请注意，消费者的选择变量是z）。

2) 计算出最低价值t，这样她就不会选择作弊了。

3)假设纳税人选择$z^* > 0$。证明了最优值z^*在被审计的概率，p和被罚款的概率，θ中都减小。[提示：使用隐函数定理。

4） 你能证明z^*随税率t*单调变化吗*？如果你不能给出一个明确的答案，用纳税人的预期效用最大化问题从 a 部分提供一个解释，一方面增加新台币如何提高作弊的动机，另一方面减少这些动机。

solution:

不欺诈：

税后收入

$y_0 = (1 - t)y$

税后效用

$u_0 = u(y_0)$

欺诈：

税后收入分布：$\begin{pmatrix} p & 1-p \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$

其中：$\begin{cases} y_1 = (1-t)y - \theta z \\ y_2 = f - tx = (1-t)y + tz \end{cases}$

期望效用：

$Eu_1 = pu(y_1) + (1-p)u(y_2)$

当 $t=0$，即不征税时，居民会选择逃税，此时的 t 即为最小的 t

比较静态分析：

期望效用最大化：

$\max: Eu_1 = Pu(y_1) + (1-p)u(y_2)$

$\frac{dEu_1}{dz} = -\theta p u'(y_1) + t(1-p)u'(y_2) = 0$

$z^* = z^*(p, \theta, t)$

对一阶条件取全微分得：

$[-\theta^2 p u''(y_1) - t^2(1-p)u''(y_2)]dz^*$

$= [-tu'(y_2) - \theta u'(y_1)]dp$

$+[-pu'(y_1) + \theta p z^* u''(y_1)]d\theta$

$+\left[u'(y_2)(1-p) + t(1-p)u''(y_2)(z^* - y) + \theta p y u''(y_1)\right)dt$

i) $\frac{\partial z^*}{\partial p} < 0, \frac{\partial z^*}{\partial \theta} < 0$

即审查的概率 p 越小，惩罚力度θ 越小，z 越大，即 $x = y - z$ 6 越小，欺诈程度越大。

$\frac{\partial z^*}{\partial t}$不确定

一方面：$t\uparrow$会诱使居民逃避税力度 $z\uparrow$

另外一方面：$t\uparrow$会使被审查时损失↑，从而使 $z\downarrow \Rightarrow \frac{\partial z^*}{\partial t}$

2. 在一个纯粹交换的完全竞争市场上有两个消费者，A 和 B，两种商品，X 和 Y。交换初始，A 拥有 3 个单位的 X, 2 个 Y，B 有 1 个 X 和 6 个 Y。 他们 的效用函数分别为: $U(X_A, Y_A) = X_A Y_A$, $U(X_B, Y_B) = X_B Y_B$∘求:

1) 市场竞争均衡的（相对）价格和各人的消费量。

2) 表示帕累托最优分配的契约线的表达式。

3) 其它条件相同，如果 A 的效用函数为 $U(X_A, Y_A) = X_A + Y_A$, 求一般均衡价格和契约线。

4) 其它条件相同，如果 A 的效用函数为 $U(X_A, Y_A) = \min(X_A, Y_A)$, 求一般均衡价格和契约线。

solution：

$u_A = x_A y_A \; u_B = x_B y_B$

求竞争性均衡，不妨假设 $p_y = 1, p = p_x/p_y$

i)效用最大化：

$\max: u_A = x_A y_A \text{ st}: px_A + y_A = pe_x^A + e_Y^A$

拉格朗日函数：

$$\mathcal{L} = x_A y_A + \lambda\left[pe_x^A + e_y^A - px_A - y_A\right]$$

$$\text{FOC}: \begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_A} = y_A - \lambda p = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_A} = x_A - \lambda = 0 \end{cases}$$

解得：$\begin{cases} x_A = \frac{pe_x^A + e_y^A}{2p} \\ y_A = \frac{pe_x^A + e_y^A}{2} \end{cases}$

同理：$\begin{cases} x_B = \frac{pe_x^B + e_y^B}{2p} \\ y_B = \frac{pe_x^B + e_y^B}{2} \end{cases}$

ii)x 市场出清：

$$x_A + x_B = \frac{pe_x + e_y}{2p} = e_x$$

解得：

$$p^* = \frac{e_y}{e_x}$$

此时瓦尔拉斯均衡价格只与总禀赋有关，而与禀赋的初始分配无关。

iii） $\left(e_x, e_y\right) = (4,8)$时， $p^* = 2$

2)契约曲线：

$\max: u_A = x_A \cdot y_A$

$$\begin{cases} u_B = x_B \cdot y_B \\ x_A + x_B = e_x \\ y_A + y_B = e_y \end{cases}$$

拉格朗日函数：$\mathcal{L} = x_A y_A + \lambda\left[u_B - (e_x - x_A)\left(e_y - y_A\right)\right]$

FOC:$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_A} = y_A + \lambda\left(e_y - y_A\right) = 0 \ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_B} = x_A + \lambda(e_x - x_A) = 0$

解得：$x_A = \frac{e_x}{e_y} \cdot y_A \quad (0 \le x_A \le e_x)$

带入参数得：

$$x_A = \frac{1}{2} y_A (0 \le x_A \le 4)$$

3)小结：

若 A、B 均为 c-d 效用函数，且 A 对 x,y 的支出份额α, β与 B 相同，则:

瓦尔拉斯均衡只与总禀赋有关

契约曲线为链接对角线的直线

若不相同，则p^*变化，契约曲线为连接对角的曲线。

note：9.14 2 ——国发 2016-4

2）

$u_A = x_A + y_A; u_B = x_B y_B$

特殊效用函数可能会产生内点解，具体要看总禀赋的比例

契约曲线：

首先利用微积分求内点解

max: $u_A = x_A + y_A$

st: $u_B = (e_x - x_A)(e_Y - y_A)$

拉格朗日函数：

$$\mathcal{L} = x_A + y_A + \lambda[u_B - (e_x - x_A)(e_Y - y_A)]$$

$$\text{FOC: } \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_A} = 1 + \lambda\left(e_y - y_A\right) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_A} = 1 + \lambda(e_x - x_A) = 0 \end{cases}$$

解得：$x_A = y_A + e_x - e_y$

若 $e_x = e_y$，契约曲线为 $x_A = y_A$，链接对角，此时无角点解

若 $e_x \neq e_y$，则 $x_A = y_A + e_x - e_y$为内点解。

其次利用图示法求角点解

也可以利用 K-T 条件，不过不直观且讨论复杂，若 U 不可微则不能使用。

$e_x > e_y$ 图形 $e_x < e_y$ 图形

瓦尔拉斯均衡

求瓦尔拉斯均衡时，需要考虑两个问题：

什么样的初始禀赋能够达到内点解、角点解

不同的初始禀赋对应着什么样的均衡价格

内点解所对应的禀赋以本题为例

若均衡价格不为 1，则 A 只选择单种商品，不为内点解

若均衡价格为 1，则x_A, y_A任意搭配，不容易确定，以 B 为研究中心

此时：

$$x_B = y_B = \frac{e_x^B + e_y^B}{2}$$

由禀赋约束：$0 < x_B < e_x$，$0 < y_B < e_y$

得：$0 < e_x^B + e_y^B < 8$

或 $e_x^A + e_y^A > 4$

则角点解对应的初始禀赋为：

$0 < e_x^A + e_y^A < 4$

p^*如何随初始禀赋的变化而变化

i)$e_x^A + e_y^A > 4: p^* = 1$，内点解

ii）

$0 < e_x^A + e_y^A < 4$角点解

若 $0 < p < 1$，则 $y_A = 0$ 此时为非均衡，不在契约曲线上

$(**)$

若 $p > 1$，则$x_A = 0, \quad y_A = pe_x^A + e_y^A$

A 的禀赋约束：

$y_A = pe_x^A + e_y^A \le 4$

$$\Rightarrow \quad 1 < p \le \frac{4 - e_y^A}{e_x^A}$$

若 B 到达角点解均衡，则不应使 B 的最优选择落在内部区域，而应该在外部，退而求次选择角点解。

由于 $y_B = \frac{pe_x^B + e_y^\beta}{2} > \frac{e_x^B + e_y^\beta}{2} > 4$

故仅使 $x_B = \frac{pe_x^B + e_y^B}{2p} \ge 4$即可

若小于 4 则为非均衡

则

$$1 < p \le \frac{e_y^B}{8 - e_x^B} = \frac{8 - e_y^A}{4 - e_x^A}$$

综上： $1 \le p \le \min\left\{\frac{4 - e_x^A}{e_y^A}, \frac{8 - e_y^A}{4 - e_x^A}\right\}$

3) $u_A = \min\{x_A, y_A\} \quad u_B = x_B y_B$

契约曲线：

max:min$\{x_A, y_A\}$

st: $\quad u_B = (e_x - x_A)(e_y - y_A)$

优化条件为： $x_A = y_A$

若$e_x = e_y$，只有内点解

若$e_x \ne e_y, x_A = y_A$为内点解，且存在角点解

E_1, E_2, E_1', E_2'均为达不到的均衡，

E_1, E_2均没有帕累托改进的区域，为帕累托最优。

瓦尔拉斯均衡

内点解所对应的禀赋以 $e_x < e_y$为例

当且仅当 $e_x^A = e_x$ 且 $e_x \le e_y^A \le e_y$时，不能实现内点均衡：

E_1, E_2, E_3 均攥在帕累托改进的区间，都可以取角点解， E_4 不存在改进可能， E_4'，为角点解

瓦尔拉斯均的价格：

内点解：

$$\begin{cases} x_A = \dfrac{pe_x^A + e_y^A}{1+p} \\ y_A = \dfrac{pe_x^A + e_y^A}{1+p} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_B = \dfrac{pe_x^B + e_y^B}{2p} \\ y_B = \dfrac{pe_x^B + e_y^B}{2} \end{cases}$$

利用市场出清求出 p^*

角点解：此时即为均衡状态，无需交易。

3.回想一下 15.5 的例子中线性海滩上的 Hotelling 竞争模型。$为简单起见，假设冰淇淋摊只能位于直线段的两端（分区禁止在海滩中间进行商业开发）。这个问题要求你分析一个涉及产品扩散的进入阻止策略。

1)考虑子游戏，公司a有两个冰激凌摊，一个在海滩的两端，B *和*a$一起位于右端点。这个子博弈的纳什均衡是什么？提示：伯特兰竞争在正确的终点接踵而至。

2)如果b必须降低Kb的进入成本，考虑到A公司处于市场的两端，并且在进入后仍然存在，它会选择进入吗？

3)A的产品扩散策略可信吗？或者，在 B 美元进入市场后，A 美元会退出市场的右端吗？为了回答这些问题，将A的利润与A在左边有一个摊位，并且B和A都在右边有摊位的情况进行比较，将A在左边有一个摊位，而B在右边有一个摊位的情况进行比较（因此B的进入将A从市场的右边挤出）。

solution:

1)企业 B 无进入成本

若企业 A 不从右端退出

企业 A 与 B 在右端形成伯川德模型

右端与左端形成 Hotelling 模型

右端 $p_B = p_A^2 = c \quad ; \quad \pi_B = \pi_A^2 = 0$

左端需求 x 需满足

$$p_A' + tx^2 = c + t(1-x)^2$$

则： $x = \frac{c+t-p_A'}{2t}$，假设 $|p_1 - p_2| < t$，保证需求为正。

企业 A 利润最大化：

$$\max: \pi_A = \pi_A^1 + \pi_A^2 = (p_A^1 - c) \cdot x$$

$$\text{Foc:} \frac{d\pi_A}{dp_A'} = \frac{1}{2t}[2c + t - 2p] = 0$$

解得：

$$p_A' = c + \frac{t}{2}$$

$$\pi_A = \frac{t}{8}$$

若企业 A 从右端退出：Hotelling 模型

企业 A 的需求应满足

$$p_A + tx^2 = p_B + t(1-X)^2$$

$$x = \frac{t + P_B - P_A}{2t}$$

企业 A,B 利润最大化： $\begin{cases} \max: \pi_A = (p_A - c) \cdot x \\ \max: \pi_B = (p_B - c)(1-x) \end{cases}$

$$\text{FOC} \begin{cases} \frac{\partial \pi_A}{\partial p_A} = \frac{1}{2t}(t + p_B + c - 2p_A) = 0 \\ \frac{\partial \pi_B}{\partial p_B} = \frac{1}{2t}(t + p_A + c - 2p_B) = 0 \end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases} p_A = p_B = c + t \\ \pi_A = \pi_B = \frac{t}{2} > \frac{t}{8} \end{cases}$$

综上：企业 A 从右端退出，企业 B 进入

A,B 在城市两端进行 Hotelling 竞争

2）若存在进入成本k_B

若企业 A 不退出，则企业 B 进入后进行伯川德竞争。$\pi_B = -k_B < 0$，企业 B 选择不进入，企业 A 获得垄断利润。由于 π_A^m 大于 Hotelling 模型的利润，故 A 的扩散战略可信。

市场需求未知，无法求出π_A^m，但肯定大于$\pi_A = \frac{t}{2}$

综上：若存在进入成本，则企业 A 的扩散战略可信，企业 Az 战略两个端点，企业 B 不进入。