# 9.18

None Leon

2021/1/18

1.投资于两种不同的资产一个投资者有冯诺依曼-摩根斯坦效用函数$u$（$c$） = $-e^{-\alpha c}$，$c$是消费，其中$\alpha > 0$.[39]世界上有两种状态，分别标为 1 和2，，这两种状态的可能性相同。有两种（相当极端的）资产，一种在状态 1 具有吸引力，另一种在状态 2 具有吸引力：

-资产 1 在状态 1 产生一个消费单位，而在状态 2 则没有。

资产 2 在状态 1 不产生任何收益，在状态 2 只产生一个消费单位。

-第一项资产的价格是$\pi 1$，而第二项资产的价格是$\pi 2$，为简单起见$\pi 1+\pi 2=1$。投资者从两项资产的
w*单位捐赠开始，但寻求平衡她的投资组合，以最大限度地提高他的预期效用。用*x{1}*表示他获得的第一项资产的单位数，用*x{2}$表示第二项资产的单位数。

1）提出了投资者期望效用最大化问题。

2）找到效用最大化是购买资产 1 和 2：$x1$和$x2$。

3)资产持有量如何随参数$\alpha$变化？解释。

4)投资者的风险厌恶与财富水平如何互动？多敏感,这个结果符合效用函数的规定吗？

3.有一个小贩在香山山道上出售一种只有他能编织的工艺品。周围有一定的群众在围观。 这个小贩没有固定成本，但编织一个工艺品的成本是 5。他们的反需求函数是 $p(x_1)=60-4x_1, p(x_2)=40-\frac{2}{3}x_2$ (1) 求小贩的是优定价。 （2）假设有两个消费者，第一个的反需求函数是 $\mathrm{p}(\mathrm{y}_1)=125-30\mathrm{y}_1$， $\mathrm{p}(\mathrm{y}_2)=25-2\mathrm{y}_2$ 并且这个小 贩实行“量大从优”的政策。即设定一个购买量 $x$, 当购买量大于 $x$ 的时候价格是 $\mathrm{p}_2$, 购买量 小于 $x$ 的时候，价格是 $p_1$， $p_2<p_1$ 。求这个购买限制量 $x$ 和两个价格 $p_0$ (提示: 在这个限制 量 $x$ 下，第一个消费者会以 $p_1$ 购买小于 $x$ 的量，第二个消费者会以 $p_2$ 购买大于 $x$ 的量）

solution:

1)期望效用最大化：

$$\max: Eu=-\frac{1}{2}e^{-\alpha x_1}-\frac{1}{2}e^{-\alpha x_2}$$

$$st: \pi_1 x_1+\pi_2 x_2=(\pi_1+\pi_2)w=w$$

拉格朗日函数：

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{2}e^{-\alpha x_1}-\frac{1}{2}e^{-\alpha x_2}+\lambda[w-\pi_1x_1-\pi_2x_2]$$

FOC: $\begin{cases}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_1}=\frac{1}{2}\alpha e^{-\alpha x_1}-\lambda\pi_1=0\\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_2}=\frac{1}{2}\alpha e^{-\alpha x_2}-\lambda\pi_2=0\end{cases}$

解得：$\begin{cases}x_1=w+\frac{\pi_2}{\alpha}\ln\frac{\pi_2}{\pi_1}\\ x_2=w+\frac{\pi_1}{\alpha}\ln\frac{\pi_1}{\pi_2}\end{cases}$

2）比较静态分析：$\begin{cases}\frac{dx_1}{d\alpha}=-\frac{\pi_2}{\alpha^2}\ln\frac{\pi_2}{\pi_1}\\ \frac{dx_2}{d\alpha}=-\frac{\pi_1}{\alpha^2}\ln\frac{\pi_1}{\pi_2}\end{cases}$

若 $\pi_1=\pi_2=\frac{1}{2}$

此时 $x_1=x_2=w$，即不存在交易，此时两种转台的概率之比等于两种资产的价格之比，消费者能够实现两期消费的无波动，由于初始 $x_1^0=x_2^0=w$，故不用参与交易（联想公平保险时的投保 edu）

若 $0\le\pi_1<\frac{1}{2}<\pi_2\le1$

此时 $x_1>w>x_2$，且 $\frac{dx_1}{d\alpha}<0,\frac{dx_2}{d\alpha}>0$ 此时 $\frac{p_1}{p_2}=1>\frac{\pi_1}{\pi_2}$，类似于保险市场的非公平定价，消费者认为 $\pi_2$ 偏高。因此更多购买 $x_1$，但随着 $\alpha\uparrow$，消费者平滑的意愿 \$ \$，即分享厌恶程度 \$ \$，使得 $x_1\downarrow$

3）风险厌恶程度 $R_A(c)=-\frac{u''(c)}{u'(c)}=\alpha$

绝对风险厌恶程度恒定，即风险厌恶程度，不随收入的↑而↑或↓

2. 假设在纯交换经济中，有两个消费者小李和小赵，两种产品 1 和 2 。李和赵的效用函数分别为 $U_L=\min(x_1^L,x_2^L)$ 和 $U_z=\min\left(x_1^Z,\sqrt{x_2^Z}\right)$ 。小李的初始亭赋为 (30,0), 小 赵的初始禀赋为 (0,20) 。求:

1) 这一经济的均衡。

2) 若小李的初始禀赋为 (5,0), 均衡价格比是多少?小李的效用相对于禀赋为 (30,0) 时 有何变化?

solution：

$$\begin{cases}U_l=\min\left(x_1^l,x_2^l\right)\\ U_z=\min\left(x_1^z,\sqrt{x_2^z}\right)\end{cases}$$

1. $E(x_1,x_2)=(30,20)$

1)契约曲线

$p_1>0\; p_2>0$

2）瓦尔拉斯均衡：

$$\begin{cases} x_1^l=x_2^l \\ x_1^z=\sqrt{x_2^z} \end{cases} \quad \Rightarrow 非均衡$$

初始禀赋 $E_0$，价格

$p=\frac{p_1}{p_2}$（$p_1>0$ 且 $p_2>0$）

$l{:}\, E_0\to E_L \quad \Rightarrow z{:}\, E_0\to E_z$

$p_1=0\; p_2>0$

$$\begin{matrix} l{:} & E_0\to E_1-E_2 \\ z{:} & E_0\to E_3-E_4 \end{matrix} \Rightarrow E_1-E_3 为均衡配置$$

$P_1>0, P_2>0$

$$\begin{cases} l{:} & E_0\to E_l \\ z{:} & E_0\to E_z \end{cases} \Rightarrow 非均衡$$

综上：通过对整个区域的分析，契约曲线对应 1）中的区域，且均衡价格为 $p_1=0, p_2>0$ 。

$p_1=0.\quad Dz_1\le 0$即存在 1 的超额供给，这源于两者效用函数以及禀赋的特殊性。

3）本题

$e_L(30,0), e_z(0,20)$

$p_1>0, p_2>0$，非均衡

$p_1=0, p_2>0$，君合配置

$p_1=0, p_2>0$

$p_1>0, p_2=0$

此时：$\begin{cases} x_1^l=30 \\ x_2^l=30>E_2=20 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1^z=0 \\ x_2^z=[0,20] \end{cases}$$

市场 1 存在超额需求，非均衡

为何此时 L 退至 (30,20)的角点解不合理？

瓦尔拉斯均衡允许$ED_i < 0$ 的情况，此时 $p_i = 0$ ，即存在过剩资源，但不允许 $ED_i > 0$ ，此时供不应求。 $p_i > 0$为不应是 0

2. $E(x_1, x_2) = (5{,}20)$

契约曲线

瓦尔拉斯均衡

若$p_1 > 0$且 $p_2 > 0$，令 $p = \frac{p_1}{p_2}$

$$\begin{cases} x_1^l = x_2^l = \dfrac{pe_1^l + e_2^l}{p+1} \\ px_1^z + x_2^z = pe_1^z + e_2^z \\ x_1^z = \sqrt{x_2^z} \\ x_1^z + x_1^z = 5 \end{cases}$$

均衡点为 $A(0.5，0.5)$

此时 $x_1^l = x_2^l = \frac{pe_1^l + e_2^l}{p+1} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow p = \frac{1 - 2e_2^l}{2e_1^l - 1} > 0$$

$\Rightarrow \quad e_1^l > \frac{1}{2}$ 且 $0 < e_2^l < \frac{1}{2}$ 或 $0 < e_1^l < \frac{1}{2}$ 且 $e_2^l > \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \exists p_i = 0$的区域为：

$$\left\{(e_1^L, e_2^L) | 0 < e_1^2 < \frac{1}{2}, e_2^L > \frac{1}{2}, e_1^2 > \frac{1}{2}, 0 < e_2^L < \frac{1}{2}\right\}$$

若$p_2 = 0$或$p_1 = 0$

若 $p_2 = 0, p_1 > 0$

$$\begin{cases} l: \quad E_1 - E_l \\ z: \quad Ez - E_3 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad Ez - E_l$为均衡配置

若 $p_1 = 0, p_2 > 0$

$$\begin{cases} l: \quad E_0 \to E_4 \\ z = \quad E_0 \to E_5 - E_6 \end{cases} \Rightarrow \textit{非均衡}$$

剩余区域同样可验证 $\forall p_1, p_2 \geq 0$为非均衡。

$e_l(5,0), e_z(0,20)$

若 $p_1 > 0, p_2 > 0.$

此时$\begin{cases} x_1^l = x_2^l = \frac{5p}{p+1} \\ px_1^z + x_2^z = 20 \quad \Rightarrow p^* = \frac{1}{9} \\ x_1^z = \sqrt{x_2^z} \\ x_1^l + x_1^z = 5 \end{cases}$

若 $p_2 = 0, p_1 > 0$，此时

$\begin{cases} l: \quad E_0 \to E_1 - Q_z \textit{无差异} \\ \qquad (E_1 - \alpha_z) \\ z: \quad Q_z - E_0 \textit{无差异} \end{cases}$

$\Rightarrow \quad Q_z - E_1$为均衡配置

若 $p_1 = 0, p_2 > 0$

$\begin{cases} L: \quad O_L - E_0 \textit{无差异} \\ z: \quad E_0 \to E_1 - O_L \end{cases}$

$\Rightarrow$均衡配置$O_L - E_1$

若考虑实际情况，则 $p_1 = 0, p_2 > 0$不符合，因为 $e_1 < e_2$。商品 1 相对稀缺，不应是 $p_1 = 0$ 而是 $p_2 = 0$，不过从一般均衡分析，此时确实存在帕累托最优的配置。

3.有一个小贩在香山山道上出售一种只有他能编织的工艺品。周围有一定的群众在围观。 这个小贩没有固定成本，但编织一个工艺品的成本是 5。他们的反需求函数是 $p(x_1) = 60 - 4x_1, p(x_2) = 40 - \frac{2}{3}x_2$

(1) 求小贩的是优定价。

（2）假设有两个消费者，第一个的反需求函数是 $\mathrm{p(y_1) = 125 - 30y_1}$， $\mathrm{p(y_2) = 25 - 2y_2}$ 并且这个小 贩实行“量大从优”的政策。即设定一个购买量 $x$, 当购买量大于 $x$ 的时候价格是 $\mathrm{p_2}$, 购买量 小于 $x$ 的时候，价格是 $p_1$， $p_2 < p_1$ 。求这个购买限制量 $x$ 和两个价格 $p_0$ (提示: 在这个限制 量 $x$ 下，第一个消费者会以 $p_1$ 购买小于 $x$ 的量，第二个消费者会以 $p_2$ 购买大于 $x$ 的量）

solution：

两类消费者的需求曲线存在内部交点，与不存在内部点的情况相比，此时不能严格地区分市场，定价方式也更加复杂。

1）由于群众微观，故无法区分消费者类型。此时只能定一个价格。

若同时供应：

$\max: \pi = (p-5)\left(15-\frac{1}{4}p+60-\frac{3}{2}p\right)$

st: $p \leq 40$

Foc:$\frac{d\pi}{dp}=\frac{335}{4}-\frac{7}{2}p=0$

解得：$p^* = 23.92 < 40$符合

此时利润

$\pi^* \doteq 627$

若只供应第一类消费者 $\max: \pi = (p-5)\left(15-\frac{1}{4}p\right)$

$\mathrm{st}: p \geq 40$

Foc：$\frac{d\pi}{dp}=\frac{75}{4}-\frac{1}{2}p<0 \quad (p \geq 40)$

$\pi_{\max} = 175 < \pi^*$

综上：小贩的最优定价为：23.92

2)通过设定一个 x，使得 1 以 $p_1$ 购买 $x_1$ ，2 以 $p_2$购买 $x_2$，从而区分了不同类型的消费者，此时存在 3 个问题。

在消费者已被区分的前提下，最优化的 $p_1, p_2$应该定为多少？

为何此时能够通过设定一个 x 区分消费者？

最优的 x 应该满足什么条件？

若已经被区分，最优的定价同三级价格歧视的情况

此时能够通过设定 x 区分的原因在于两者的需求函数存在内部交点。若不存在，则无法通过设定 x 区分，而只能通过二级价格歧视中的组合定价。

不存在内部交点时，在无法区分的情况下若直接实行三级价格歧视，则 1 会选择 $p_2$，购买 $q_2'$。若此时入本题一样设定 x,则无效，因此 1 可以选择 $q_1$以 $p_2$的价格，此时 1 的消费者剩余依然上升。

当存在内部交点时，在无法区分的情况下若直接实行三级价格歧视，则 1 会选择 $p_2$购买 $x_2'$，2 不会像着偏离，措辞是设定 $x_1 < x < x_2$，使得 1 只能以 $p_2$购买大于 x 的部分。

$$\begin{cases} x_1 < x \leq x_2', & \textit{无约束作用} \\ x_2' < x < x_2, & \textit{可能有约束作用} \end{cases}$$

随着 x 的增加，1 的消费者剩余会下降。

最优的 x 应该使得：1 以 $p_1$的价格购买 $x_1$的消费者剩余与以价格

$p_2$购买 x 的消费者剩余无差异。

首先求三级价格歧视时定价。

利润最大化：

$$\max:\pi=(p_1-5)\left(\frac{25}{6}-\frac{1}{30}p_1\right)+(p_2-5)\left(\frac{25}{2}-\frac{1}{2}p_2\right)$$

$$\text{FOC:}\begin{cases}\frac{\partial\pi}{\partial p_1}=\frac{25}{6}-\frac{1}{30}p_1-\frac{1}{30}p_1+\frac{1}{6}=0\\ \frac{\partial\pi}{\partial p_2}=\frac{25}{2}-\frac{1}{2}p_1-\frac{1}{2}p_1+\frac{5}{2}=0\end{cases}$$

解得：$\begin{cases}p_1=75\\ p_2=15\end{cases}$

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{5}{3}\\ x_2=5\end{cases}$$

此时 $CS_1=\frac{125}{3}$

x 应满足$\frac{22}{6}<x<5$

若 1 以 $p_2=15$购买 x 单位，则：

$$\begin{aligned}cs_1' &=\int_0^x(125-30x_1-15)\,dx_1\\ &=10x-15x^2\end{aligned}$$

令$CS_1=CS_1'$，解得： $x=6.93$或 0.4

此时不存在这样的 x 能够区分市场。

题目会议的问题，若延用 1）中的需求函数，则存在

若 $p(x_1)=60-4x_1\quad p(x_2)=40-\frac{2}{3}x_2$

此时：

$$\begin{cases}p_1=32.5\\ p_2=22.5\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_1=6.875\\ x_2=26.25\end{cases}$$

解得：$x_2'=9.375$

$$cs_1' = \int_0^x (60 - 4x_1 - 9.375)\, dx_1$$

$$CS_1 = 94.53125$$

$$x = 10.75$$

综上： $p_1 = 32.5, \quad p_2 = 22.5, \quad 10.75 < x < 26.25$