10.1

None Leon

2021/1/25

1.钢铁厂 : $C_s = 0.5Q_s^2$, 每生产一单位产生两单位大气污染物, $a_s = 0.1e_s^2$; 煤炭发电厂: $C_c = 0.2Q_c^2$, 每生 产一单位产生一单位大气污染物, $a_c = 0.2e_c^2$ 。全地区一万人, 每个居民由于大气污染物在健康上所需花费的成本 a_s、a_c 分别为钢铁厂与煤炭发电厂减排的成本， e_s、e_c 分别为钢铁厂与煤炭发电厂的减排量，每个厂商的最终排 放量为生产过程中大气污染物的产生量减去减排量。

(1) 政府不管制的情况下，产量、减排量、大气污染的社会成本是多少?

(2) 社会福利最优情况下，产量、减排量、大气污染的社会成本是多少?

（3）政府采取两种政策，对企业的每单位污染物排放量征税 t 或是对企业相对于管制情况下减少的排放量 补贴 s，为了使污染物排放量达到社会最优时的排放量，t 和 s 分别应是多少?

(4) 政府强制要求企业减少 X 比例的排放量，使得总排放量达到社会最优的污染排放量，则此时产量、减 排量、社会成本是多少?

(5) 政府开放污染物排放指标交易市场，且政府将污染权免费分派给两个企业，总量为达到社会最优的污 染排放量，钢铁厂和煤炭发电厂分派的比例分别为 b 和 $1-b$ ，则污染权的交易价格是多少?

solution:

1)政府不管制

钢管厂与煤炭发电厂利润最大化：

$$\begin{cases}\max: \pi_s = Q_s - 0.5Q_s^2 - 0.1e_s^2 \\ \max: \pi_c = 0.5Q_c - 0.2Q_c^2 - 0.2e_c^2\end{cases}$$

$$\text{FOC:}\begin{cases}\frac{\partial \pi_s}{\partial Q_s} = 1 - Q_s = 0 \\ \frac{\partial \pi_s}{\partial e_s} = -0.2e_s = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \pi_c}{\partial Qc} = 0.5 - 0.4Q_c = 0 \\ \dfrac{\partial \pi_c}{\partial e_c} = -0.4e_c = 0\end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases}Q_s = 1\\ e_s = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}Q_c = 1.25\\ e_c = 0\end{cases}$$

则 $p = 2Q_s + Q_c - e_s - e_c = 3.25$

大气污染社会成本：

$c = 2p \cdot 10^{-5} \cdot 10^4 = 0.65$

2）社会最优：

$$\begin{aligned}\max: SW = (Q_s - 0.5Q_5^2 - 0.1e_5^2) + (0.5Q_c - 0.2Q_c^2 - 0.2e_c^2)\\ -0.2(2Q_s + Q_c - e_s - e_c)\end{aligned}$$

FOC:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial SW}{\partial Q_s} = 1 - Q_s - 0.4 = 0\\ \dfrac{\partial SW}{\partial Q_c} = 0.5 - 0.4Q_c - 0.2 = 0\\ \dfrac{\partial SW}{\partial e_s} = -0.2e_s - 0.2 = 0\\ \dfrac{\partial SW}{\partial e_c} = -0.4e_c + 0.2 = 0\end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases}Q_s^* = 0.6\\ e_s^* = 1\end{cases}$$

$$\begin{cases}Q_c^* = 0.75\\ e_c^* = 0.5\end{cases}$$

$p^* = 2a_s^* + a_c^* - e_s^* - e_c^* = 0.45$

$c^* = 0.2p^* = 0.09$

3）对每单位排放量征税 t

钢铁厂与煤炭发电厂利润最大化：

$$\begin{cases}\max: \pi_s = Q_s - 0.5Q_s^2 - 0.1e_s^2 - t(2Q_s - e_s)\\ \max: \pi_c = 0.5Q_c - 0.2Q_c^2 - 0.2e_c^2 - t(Q_c - e_c)\end{cases}$$

FOC:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \pi_s}{\partial Q_s}=1-Q_s-2t=0\\ \dfrac{\partial \pi_s}{\partial e_s}=-0.2e_s+t=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \pi_c}{\partial Q_c}=0.5-0.4Q_c-t=0\\ \dfrac{\partial \pi_c}{\partial e_c}=-0.4e_c+t=0\end{cases}$$

若使 $p=2Q_s+Q_c-e_s-e_c=3.25-14t=0.45$

$\Rightarrow t^*=0.2$

对相对于不管制情况下减少的排放量补贴 s

钢铁厂与煤炭发电厂利润最大化：

$$\begin{cases}\max:\pi_s=Q_s-0.5Q_s^2-0.1e_s^2+s\cdot e_s\\ \max:\pi_c=0.5Q_c-0.2Q_c^2-0.2e_c^2+s\cdot e_c\end{cases}$$

FOC: $\begin{cases}\frac{\partial \pi_s}{\partial Q_s}=1-Q_s=0\\ \frac{\partial \pi_s}{\partial e_s}=-0.2e_s+s=0\end{cases}$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \pi_c}{\partial Q_c}=0.5-0.4Q_c=0\\ \dfrac{\partial \pi_c}{\partial e_c}=-0.4\mathrm{e}_c+s=0\end{cases}$$

若使：$p=2Q_s+Q_c-e_s-e_c=3.25-7.5s=0.45$

$\Rightarrow s^*\doteq 0.373$

4）强制要求减排 x 比例

钢铁厂与煤炭发电厂利润最大化：

$$\begin{cases}\max:\pi_s=Q_s-0.5Q_s^2-0.1e_s^2\quad(e_s=x\cdot 2Q_s)\\ \max:\pi_c=0.5Q_c-0.2Q_c^2-0.2e_c^2\quad(e_c=x\cdot Q_c)\end{cases}$$

FOC:

$$\begin{cases}\dfrac{d\pi_s}{dQ_s}=1-Q_s-0.8x^2Q_s=0\\ \dfrac{d\pi_c}{dQ_c}=0.5-0.4Q_c-0.4x^2Q_c=0\end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
p &= 2Q_s + Q_c - e_s - e_c \\
\text{若使} \quad &= \frac{2(1-x)}{1+0.8x^2} + \frac{1.25(1-x)}{1+x^2} \\
&= 0.45
\end{aligned}
$$

解得：

$x^* = 0.8$（估计个大概率就行）

5）产权交易市场：设价格为 r

钢铁厂与煤炭发电厂利润最大化：

$$
\begin{cases}
\max: \pi_s = Q_s - 0.5Q_s^2 - 0.1e_s^2 - r(2Q_s - e_s - 0.45b) \\
\max: \pi_c = 0.5Q_c - 0.2Q_c^2 - 0.2e_c^2 - r(Q_c - e_c - 0.45(1-b))
\end{cases}
$$

FOC:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \pi_s}{\partial Q_s} = 1 - Q_s - 2r = 0 \\
\dfrac{\partial \pi_s}{\partial e_s} = -0.2e_s + r = 0
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \pi_c}{\partial Q_c} = 0.5 - 0.4Q_c - r = 0 \\
\dfrac{\partial \pi_c}{\partial e_c} = -0.4e_c + v = 0
\end{cases}
$$

若使 $p = 2Q_s + Q_c - e_s - e_c = 3.25 - 14r = 0.45$

$\Rightarrow \quad r^* = 0.2$与初始分配比例 b 无关

科斯定理成立。

2.在鲁里塔尼亚有两个地区，A和B。*两个地区生产*x*和*y*两种商品。区域*A$的生产函数如下所示：

$$
x_A = \sqrt{l_x}
$$
$$
y_A = \sqrt{l_y}
$$

这里，lx和ly分别是投入到x和y生产中的劳动力数量。区域A的总可用劳动力为 100 个单位；即，

$$
l_x + l_y = 100
$$

对区域B使用类似的表示法，生产函数如下所示

$$x_B = \frac{1}{2}\sqrt{l_x}$$
$$y_B = \frac{1}{2}\sqrt{l_y}$$

在B地区还有 100 个劳动力单位：

$$l_x + l_y = 100$$

1）计算a和B区域的生产可能性曲线。

2）如果鲁里塔尼亚的生产要在A和b地区之间有效分配（假设劳动力不能从一个地区转移到另一个地区），必须具备什么条件？

3）计算 Ruritania 的生产可能性曲线（再次假设劳动力在区域之间不流动）。如果 x*总产量为*12，$Ruritania$*能生产多少*y？提示：A图形分析在这里可能有一些帮助。

solution：

1）A,B 的生产可能性边界：

$$\begin{cases} x_A^2 + y_A^2 = 100 \\ x_B^2 + y_B^2 = 25 \end{cases}$$

2）当且仅当 $RTS_{X,Y}^A = RTS_{X,Y}^B$时，要素的分配是有效率的。即

$$\frac{y_A}{x_A} = \frac{y_B}{x_B}$$

可以理解为整个国家的 P_x/P_Y很定，适用于 A,B 两个地区，

$RTS_{X,Y}^A = \frac{P_X}{P_Y} = RTS_{X,Y}^B$市场机制。

3）国家的总生产可能性边界：

$$\begin{cases} x_A^2 + y_A^2 = 100 \\ x_B^2 + y_B^2 = 25 \\ \dfrac{x_A}{x_B} = \dfrac{y_A}{y_B} \text{生产有效率} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 225$$

故当 $x = x_A + x_B = 12$时，

$$y = y_A + y_B = 9$$

note：

令 $\frac{x_A}{x_B} = \frac{y_A}{y_B} = \lambda$

$\Rightarrow \quad x = (1+\lambda)x_B \quad ; \quad y_A = (1+\lambda)y_B$

$\Rightarrow \quad \lambda(x_B^2 + y_B^2) = 100 \Rightarrow \lambda = 4$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = (1+\lambda)^2(x_B^2 + y_B^2) = 225$

3.小李和小王同时想过一座小桥，但小桥只能容纳一人通过。每人面临两种策略可以选 择: 一是过桥 (G), 二是等待 (W) 。如果两人想同时通过，那势必发生争斗，对每人造成成本 $C(C>0)$, 然后胜者通过此桥。每人获胜的概率各为 1/2 。如果两人相互谦让，那么每人需付出谦 让而造成的延误成本为 $D(D>0)$ ，最后两人靠扬硬币的方式决定谁过 (扬硬币成本忽略不计)。假 定 $C>D>0$ 。小李和小王分别要 t_L 和 t_W 代表了一人等待另一个人过桥的时间成本 (比如 t_L 代表 了小王等待小李过桥的时间成本)

1)请写出本博亦的支付矩阵。在计算参与人的成本时可不计入他本人过桥的时间成本。

2)找出纯策略和混合策略的纳什均衡，说明这些均衡的出现如何取决于 C, t_L, t_W 的取值。

3) 社会最优 C 值是多少？请说明理由。

solution：

1）左边表示小李的成本，右边表示小王的成本

		W_a	
		G	W
L_i	G	$(c+0.5t_W, c+0.5t_L)$	$(0, t_L)$
	W	$(t_W, 0)$	$(D+0.5, D+0.5t_L)$

2）纯策略 NE

当 $c \geq \frac{1}{2}t_L$且 $c \geq \frac{1}{2}t_W$时：

(G, w)、(w, G)

当 $\frac{1}{2}t_W < c < \frac{1}{2}t_L$时

(w, G)

当$\frac{1}{2}t_L < c < \frac{1}{2}t_W$时

(G, w)

当$c<\frac{1}{2}t_L$ 且 $c<\frac{1}{2}t_W$时：

(G,G)

混合均衡 NE

假设 L_i, W_a选择 G 的概率分别为

$\gamma,\theta(0<\gamma,\theta<1)$

当 $L_{i} $选择 G 时：

$$E\pi_G=\theta\cdot\left(c+\frac{1}{2}t_W\right)$$

当 $L_{i} $选择 W 时：

$$E\pi_w=\theta t_W+(1-\theta)\left(D+\frac{1}{2}t_W\right)$$

由无差异性： $E\pi_G=E\pi_W$

$$\Rightarrow\quad \theta^*=\frac{D+\frac{1}{2}t_W}{C+D}$$

同理可得： $\gamma^*=\frac{D+\frac{1}{2}t_L}{C+D}$

由 $0<\theta,\gamma<1$得：

$C>\frac{1}{2}t_W$ 且 $C>\frac{1}{2}t_L$时，存在混合策略 NE

混合策略为$\big((\theta^*,1-\theta^*),(\gamma^*,1-\gamma^*)\big)$

其实由 wilson 奇数定理可判断仅第一条存在混合均衡。

3）社会最优要求总成本最小化

由于$(w,w)\succ(G,G)$，且仅选择 (G,G)时，包含 c，故社会最状态与 C 无关。