9.1

None Leon

2021/1/6

1.在一自由市场，一商贩的效用函数为 $u(\omega)=\ln\omega,\omega$ 代表收入。他每天的收入为 200 元， 但按规定应交纳 50 元固定税费。市场监管人员按 10% 的概率抽查。被抽中肯定能被查清是否已缴 税。偷税者将被罚款。

1)为了打击偷税，市场监管人员需要决定罚款额至少应为多少?

2)假定该商贩还有其他与该市场无关的随机收入，即各以 50% 的概率获得 100 元和 300 元，那 么你对第一问中的回答是否有变化? 如果有，请给出。

solution:

1)缴税的效用 $u_1=\ln150$

不交税的期望效用：

$$Eu_2=90\%\ln200+10\%\text{lln}(200-F)$$

罚款额应该使得：

$$u_1\geq Eu_2$$

即最低罚款额应该满足：

$$\ln150=90\%\ln200+10\%\ln(200-F)$$

解得 $F=188.7$

2)缴税的期望效用：

$$Eu_1=50\%\ln450+50\%\ln250$$

不缴税的期望效用

$$\begin{aligned}Eu_2&=50\%[90\%\ln500+10\%\ln(500-F)]\\&+50\%[90\%\ln300+10^2\text{lln}(300-F)]\end{aligned}$$

罚款额应使得：

$$Eu_1\geq Eu_2$$

即最低罚款额应该满足：

$$Eu_1=Eu_2\quad(F<300)$$

解得：F=264.2

2.一果农来集市上贩卖苹果，由于他的苹果品种特殊，口味独特，因此很难在市场上找 到可替代的苹果。现在有两类消费者（大娱和小鲜肉）都喜欢上了这种口味的苹果，每 位大娱对该苹果的需求函数为 $q_1 = 8 - p$, 每位小鲜肉对该苹果的需求函数为 $q_2 = 20 - p$ ， 记大娱的人数比例为 k, 该果农的成本函数为 $C(Q) = 2Q$ 。请回答下列问题:

1)该果农为了最大化利润，对两类群体分别定价，求利润最大化时的定价。

2)若该果农区分不了大娱和小鲜肉，求利润最大化时的定价。

3) 若果农决定采取这样一种价格策略，以总价格 A_1 销售给每位大娱 q_1 数量的苹果，总 价格 A_2 销售给每位小鲜肉 q_2 数量的苹果，求最优的价格策略 (A_1, q_1) 和 (A_2, q_2) 。

solution:

1)三级价格歧视：

利润最大化：

$max: \pi = k(p_1 - 2)(8 - p_1) + (1 - k)(p_2 - 2)(20 - p_2)$

FOCs： $\begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial p_1} = k(10 - 2p_1) = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial p_2} = (1 - k)(22 - 2p_2) = 0 \end{cases}$

解得： $\begin{cases} p_1^m = 5 \\ p_2^m = 11 \end{cases}$ $\begin{cases} \pi_1^m = 9k \\ \pi_2^m = 81(1 - k) \end{cases}$

2)无法区分市场，统一定价

若同时供应两个市场

利润最大化：

$\max: \pi = (p - 2)[k(8 - p) + (1 - k)(20 - p)]$

FOC: $\frac{d\pi}{dp} = 22 - 12k - 2p = 0$

解得：$p = 11 - 6k$

i)当 $0 \leq k < \frac{1}{2}$ 时， $p > 8$，此时若同时供应 $p = 8 - \varepsilon. (\varepsilon \to 0^+)$

利润 $\pi = 72(1 - k) < \pi_2^m$

此时只会选择供应市场 2， $p = 11$

2)当$\frac{1}{2} \le k \le 1$时， $p \le 8$，此时若同时供应，$p = 11 - 6k$，利润$\pi = 81\left(1 - \frac{2}{3}k\right)^2$

当$\frac{1}{2} \le k < \frac{3}{4}$时， $\pi < \pi_2^m$只供应市场 2

当$\frac{3}{4} \le k < 1$时， $\pi \ge \pi_2^m$同时供应两个市场

$$\begin{cases} 0 \le k < \dfrac{3}{4}\text{：}\textit{企业仅供应市场}\,1\text{，}p = 11 \\ \dfrac{3}{4} \le k < 1\text{：}\textit{企业同时供应两个市场}\text{，}p = 11 - 6k \end{cases}$$

3)二级价格歧视——组合定价(A,q)

企业利润最大化：

$\max: \pi = k(A_1 - 2q_1) + (1 - k)(A_2 - 2q_2)$

st：

IR(参与约束)：$A_1 = \frac{1}{2}q_1(16 - q_1)$ IC(激励约束)：$\frac{1}{2}q_2(40 - q_2) - A_2 = \frac{1}{2}q_1(40 - q_1) - A_1$

化简得： $A_1 = \frac{1}{2}q_1(16 - q_1)$

$$A_2 = \frac{1}{2}q_2(40 - q_2) - 12q_1$$

$$\pi = (18k - 12)q_1 - \frac{1}{2}kq_1^2 + (1 - k)q_2\left(18 - \frac{1}{2}q_2\right)$$

FOCs: $\begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial q_1} = 18k - 12 - kq_1 = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial q_2} = (1 - k)(18 - q_2) = 0 \end{cases}$

解得： $\begin{cases} q_1 = \frac{18k - 12}{k} \quad (q_1 \ge 0) \\ q_2 = 18 \end{cases}$

i)当 $0 \le k \le \frac{2}{3}$时，不供应小市场

此时

$(A_1, q_1) = (0,0)$ $(A_2, q_2) = (198,18)$

ii)当 $\frac{2}{3} < k \le 1$时，同时供应两个市场

此时

$(A_1, q_1) = \left(\frac{6(6-k)(3k-2)}{k^2}, \frac{18k-12}{k}\right)(A_2, q_2) = \left(\frac{144+18k}{k}, 18\right)$

注：IR 与 IC 约束

这类约束可以分为 2 类 4 个

IR 参与约束：两类消费者购买优于不购买

$$\begin{cases} cs_1 = \int_0^{q_1} p_1(q_1)dq - A_1 \geq 0 \\ cs_2 = \int_0^{q_2} p_2(q_2)dq - A_2 \geq 0 \end{cases}$$

IR 激励约束：两类消费者都不会选择对方的(A, q)

$$\begin{cases} \int_0^{q_1} p_1(q_1)dq - A_1 \geq \int_0^{q_2} p_1(q_2)dq - A_2 \\ \int_0^{q_2} p_2(q_2)dq - A_2 \geq \int_0^{q_1} p_2(q_1)dq - A_1 \end{cases}$$

化简后只有两个不等式可取等号：

$$\begin{cases} cs_1 = \int_0^{q_1} p_1(q_1)dq - A_1 = 0(IR) \\ \int_0^{q_2} p_2(q_2)dq - A_2 = \int_0^{q_1} p_2(q_1)dq - A_1(IC) \end{cases}$$

均衡结果分析

无论k取何值，大市场的供应量q_2不变，成为顶端不扭曲

随着k增大，小市场的供应量q_1上升，因为小市场的利润逐渐不容忽视。

3.一个城市有两家报纸, 每一家报纸的需求由自己和对手的定价决定。两家报纸的需求 函数分别为$q_1 = 21 - 2p_1 + p_2$ 和 $q_2 = 21 - 2p_2 + p_1$ 。印刷和分发额外一份报纸的边际成本等 于增加一个读者对于广告收入的贡献，因此边际成本可以看成为零。每家报纸都认为对 方的价格独立于自己的价格选择。如果第一家报纸率先定价，那么求均衡价格、产量及
各自利润。

solution：

逆向归纳法：

跟随者利润最大化

max: $\pi_2 = p_2(21 - 2p_2 + p_1)$

FOC: $\frac{\partial \pi_2}{\partial p_2} = 21 - 4p_2 + p_1 = 0$

反应函数

$$P_2 = \frac{21}{4} + \frac{1}{4}P_1$$

领导者利润最大化：

max: $\pi_1 = p_1[21 - 2p_1 + p_2(p_1)]$

FOC: $\frac{d\pi}{dp_1} = 0$

解得：

$$\begin{cases} P_1 = \frac{15}{2} \\ P_2 = \frac{57}{8} \end{cases}, \quad \begin{cases} q_1 = \frac{105}{8} \\ q_2 = \frac{57}{4} \end{cases}, \quad \begin{cases} \pi_1 = \frac{1575}{16} \\ \pi_2 = \frac{3249}{32} \end{cases}$$

以及：$\begin{cases} R_2: \quad P_2 = \frac{21}{4} + \frac{1}{4}P_1 \\ \bar{\pi}_\iota: \quad P_2 = \frac{\bar{\pi}_1}{P_1} + 2p_1 - 21 \end{cases}$