8.17

None Leon

2021/2/4

1.$u = xy + y \quad, p_x, p_y, I$(足够大)

1)求马歇尔需求函数、间接效用函数和支出函数

2)验证 slutsky 方程

3)x 与 y 是总互补品还是总代替品

4)若$(p_x, p_y, I) = (1,1,100)$，求最优消费，若 p_x上涨到 2。求 x 的替代、收入效应。

3.(15′) 一个市场中有两个企业，他们生产相同的产品。假定每一个企业生产的单位成本是 c, 并 且固定成本为 0, 市场的逆需求函数为 $p = a - bq$, 其中 q 是行业产量。考虑政府管制该市场价格 时的情况。规定价格不能高于 p^* 。

1)若 $p^* \geq \frac{1}{3}(a + 2c)$, 写出每一个企业的最优反应函数，计算纳什均衡。

2)若 $c \leq p^* \leq \frac{1}{3}(a + 2c)$, 写出每一个企业的最优反应函数，计算纳什均衡。

solution:

效用最大化：

$$\begin{aligned} \text{max:} \quad & u(x, y) = (x + 1)y \\ \text{st:} \quad & p_x \cdot x + p_y \cdot y = I \end{aligned}$$

拉格朗日函数：

$$\mathcal{L} = (x + 1)y + \lambda[I - P_x \cdot x - P_y \cdot y]$$

$$Focs: \quad \frac{\mathcal{L}}{\partial x} = y - \lambda P_x = 0$$
$$\frac{\mathcal{L}}{\partial y} = x + 1 - \lambda P_y = 0$$

解得：$\begin{cases} x = \frac{I - p_x}{2p_x} \\ y = \frac{I + P_x}{2p_y} \end{cases}$

间接效用函数：$V(p_\pi, p_y, I) = \frac{(I + p_x)^2}{4p_x \cdot p_y}$

支出函数：

$$E(p_x,p_y,v)=2\sqrt{p_x\cdot p_y\cdot u}-p_x$$

2)希克斯需求函数为：

$$\begin{cases} x^h & =\dfrac{\partial E}{\partial p_x}=\sqrt{\dfrac{p_y\cdot U}{p_x}}-1 \\ y^h & =\dfrac{\partial E}{\partial p_y}=\sqrt{\dfrac{p_x\cdot U}{p_y}} \end{cases}$$

验证：$\frac{\partial x}{\partial p_x}=\frac{\partial x^h}{\partial p_x}-\frac{\partial x}{\partial I}\cdot x$

$$\frac{\partial x}{\partial p_x}=-\frac{I}{2p_x^2};\quad \frac{\partial x}{\partial I}=\frac{1}{2p_x}$$

$$\frac{\partial x^h}{\partial p_x}=-\frac{1}{2p_x}\cdot\sqrt{\frac{p_y\cdot U}{p_x}}$$

则 $\frac{\partial x}{\partial p_x}=\frac{\partial x^h}{\partial p_x}-\frac{\partial x}{\partial I}\cdot x$

3) 由于 $\begin{cases}\frac{\partial x}{\partial p_y}=0\\ \frac{\partial y}{\partial p_x}=\frac{1}{2p_y}>0\end{cases}$

则 y 相当于 x 即非总互补品也非总替代品，两者无关，x 相当于 y 是总替代品。

note：替代和互补

1.需求函数：总替代与总互补

由 slutsky 分解知，利用马歇尔需求时。$\frac{\partial x}{\partial p_y}$同时包含替代效应与收入相应。由于收入相应的影响。x 与 y 的总替代/互补关系非对称，优势会出现含糊不清的情况，例如本题中 $\frac{\partial x}{\partial p_y}=0$ 而 $\frac{\partial y}{\partial p_x}>0$

2)希克斯需求函数：净替代与净互补

对称性：$\frac{\partial x^h}{\partial P_y}=\frac{\partial y^h}{\partial p_x}$

证明$\begin{cases} x^h = \frac{\partial E}{\partial P_x} \Rightarrow \frac{\partial x^h}{\partial P_y} = \frac{\partial^2 E}{\partial P_x \cdot P_y} \\ y^h = \frac{\partial E}{\partial P_g} \Rightarrow \frac{\partial y^h}{\partial P_x} = \frac{\partial^2 E}{\partial P_x \cdot P_y} \end{cases}$

由 slustsky 分解知，$\frac{\partial x^h}{\partial p_y}$只包含替代效应。故称为总替代/互补，由对称性知，x 与 y 的关系明确，要么相互替代，要么相互互补。

4)当$(p_x, p_y, z) = (1,1,100)$时

x 与 y 的最优消费为：$\begin{cases} x = 49.5 \\ y = 50.5 \end{cases}$

$U_0 = 2550.25$

当 $(p_x', p_y, z) = (2,1,100)$时，

$\begin{cases} x = 24.5 \\ y = 51 \end{cases}$

$U_1 = 1300.5$

利用 slutsky 分解：

替代效用$\Delta x^s \quad = x(p_x', p_y, I') - x(p_x, p_y, I) = -12.625$

其中 $I' = I + \Delta P_x \cdot x(p_x, p_y, I) = 149.5$

收入相应：$\Delta x^I \quad = x(p_x', p_y, I) - x(p_x', p_y, I') = -12.375$

利用希克斯分解：

替代效应：$\Delta x^s \quad = x^h(p_x', p_y, U_0) - x^h(p_x, p_y, U_0) \doteq -14.79$

收入相应：$\Delta x^I \quad = x^h(p_x', p_y, V_1) - x^h(p_x', p_y, V_1) = -10.21$

2.一个完全竞争、成本不变行业中有很多个厂商，它们的长期成本函数均为其 中

$$c = q^3 - 8q^2 + 48q$$

q 是单个厂商的产量，市场对该产品的需求函数为 $D^d = 720 - 10p$, 其中 Q^d 是行业的总产量。

1)求该产品的长期均衡产量和均衡价格;

2)均衡时该行业将有多少厂商?

3)若政府决定对该行业进管制，将产品价格限定为 P=43。允许厂商自由 进入和退出，则此时市场均衡时还有多少企业?

4)若政府通过竞争性投标方式对该行业进行管制，政府目标是将该行业 厂商精简至 20 家，故用竞争性投标方式出售 20 份许可证，所以获得 许可证的 20 家厂商将形成新的均衡, 求此时产品的均衡价格？每份许 可证的均衡价格

solution:

1)完全竞争，成本不变的行业长期供给为： $p=LMC=LAC_{\min}=32$

联立市场需求 $Q^d=720-10p$

得： $Q^*=400, \quad p^*=32$

单个厂商的均衡产量为： $q^*=4$

均衡时的厂商数量为： $n^*=\frac{Q^*}{q^*}=100$

note：

$$\begin{cases}\textit{短期均衡}：p^*,Q^* \\ \textit{长期均衡}：p^{**},Q^{**},n^{**}\end{cases}$$

note：市场供给曲线专题

1.供给曲线的实质

表面上看，供给曲线表示给定价格下厂商的意愿供给数量。实际上，经济学进行的是资源优化，供给曲线上的每一点代表的是市场可能形成的均衡状态。在完全竞争的市场中。厂商无法控制价格，给定的 p 是需求曲线变化所带来的。

2.市场短期供给曲线：单个厂商供给的横向加总

在短期，企业的数量不变， $Q^s=\bar{n}\cdot q^s$。单个厂商按照利润最大化$+\ \pi\geq -F$的原则进行生产，形成 q^s曲线，加总后形成 Q^s。

Q^s上的每一点都是可能实现的短期均衡，具体要看 Q^d。

3.市场长期供给曲线

1)并非单个厂商供给的横向加总

在长期，企业数量可变 $Q^s=n\cdot q^s$。单个厂商依据 $P=LMC+\pi\geq 0$进行生产。从而形成吱声的长期供给，但该长期供给中而 $\pi>0$ 的部分，若直接加总，则市场的长期供给中也存在 $\pi>0$ 的部分。而这非长期均衡，故不应该出现在市场的长期供给曲线上。$\pi_i=0$。 在D给定时，长期均衡为了一个点，改点由单个厂商(n)供给曲线中 $\pi_i=0$的点加总而来，当 D 裱花是，会有新的厂商进步，形成新的长期均

衡点，该新均衡点有单个厂商(n_1)供给曲线中 $\pi_i = 0$的点加总而来，故行业长期供给曲线去的仅仅是$\pi_i = 0$的加总，而非整体的加总。

2)行业成本与单个厂商成本

单个厂商的成本函数是由生产技术所决定的，在完全竞争市场中讨论单个厂商的生产时一般假定要素价格不变。但当讨论长期均衡的时候，n 的变化势必带来要素需求的变化，这就引入行业成本的概念。

长期 D 变化——n 变化——要素价格变化——单个厂商生产函数的变化——利润为 0 的变化——长期均衡点的变化——形成长期供给曲线

2)若价格限定为$\bar{p} = 43$

则市场需求为：$Q^{**} = 290$

此时单个厂商的最优决策为：

$\max\pi = 43.9 - q^3 + 8q^2 - 48q$

FOC:$\frac{d\pi}{dq} = 0, SOC: \frac{d^2\pi}{dq^2} < 0$

解得： $q^{**} = 5\ n^{**} = \frac{Q^{**}}{q^{**}} = 58$

note：此时单个厂商存在正利润，为何没有新的厂商进入？

$\bar{p}$限定为 43，若新进入一个厂商，厂商根据 $p = MC$决策，最优产量为 5，但此时剩余需求为 0，故市场已饱和， $n^{**} = 58$

3)若通过许可证的方法限定 $n^{***} = 20$

此时单个厂商的需求为$q^d = \frac{Q^d}{20} = 36 - \frac{1}{2}p$

利润最大化 max:$\pi = p(q^d) \cdot q^d - c(q^d)$

FOC: $\frac{d\pi}{dq_d} = 0, SOC: \frac{d^2\pi}{dq_d^2} = 0$

解得 $q = 6.412\ q = 6$(q=7 时利润较小)

此时 $p^{***} = 60$

单个企业的利润为$\pi^{***} = 144$

故许可证的价格为 114

note：为何许可证的价格为 144

若不发放许可证，自由竞争是单个企业的利润为 0，故政府发放许可证是一定不能使得厂商的处境变差，故 P=144。当然这里只是理想的状态，现实中往往控制 P 使得厂商获得社会平均社会报酬，例如出租车行业。

3.(15′) 一个市场中有两个企业，他们生产相同的产品。假定每一个企业生产的单位成本是 c, 并 且固定成本为 0, 市场的逆需求函数为 $p = a - bq$, 其中 q 是行业产量。考虑政府管制该市场价格 时的情况。规定价格不能高于 p^* 。

1)若 $p^* \geq \frac{1}{3}(a+2c)$, 写出每一个企业的最优反应函数，计算纳什均衡。

2)若 $c \leq p^* \leq \frac{1}{3}(a+2c)$, 写出每一个企业的最优反应函数，计算纳什均衡。

solution：

企业 1 利润最大化：

max: $\pi_1 = (a - c - bq_2 - bq_1)q_1$

Foc: $\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = a - c - bq_2 - 2bq_1 = 0$

得反应函数：$\begin{cases} q_1(q_2) = \frac{a-c-bq_2}{2b} \\ q_2(q_1) = \frac{a-c-bq_1}{2b} \end{cases}$

由于 $p \leq p^*$ 即 $q \geq \frac{a-p^*}{b}$

当 $p = \frac{1}{3}(a+2c)$时， $q = \frac{2(a-c)}{3b}$

当$P = c$时， $q = \frac{a-c}{b}$

1)当 $p^* \geq \frac{1}{3}(a+2c)$时，

$$q = q_1 + q_2 \geq \frac{u - p^*}{b}$$

$A\left(\frac{p^*-c}{b}, \frac{a+c-2p^*}{2b}\right) B\left(\frac{a-c}{3b}, \frac{a-c}{3b}\right)$

2)当 $q_2 \geq \frac{a-c}{b}$ 时， $q_1 = 0$

当$\frac{a+c-2p^*}{2b} \leq q_2 \leq \frac{a-c}{b}$ 时， $q_1 = \frac{a-c-2q_2}{2b}$

当$0 \leq q_2 \leq \frac{a+c-2p^*}{2b}$时 $q_1 \geq \frac{a-p^*}{b} - q_2 \geq \frac{a-c-2p_2}{2b}$

$\pi_1 = (a - c - bq_2 - bq_1)q_1$

即在 $\left(0, \frac{a-c-bq_2}{2b}\right)\pi_1$单增

$\left(\frac{a-c-bq_i}{2b},+\infty\right)\pi_1$单增

则 $q_1=\frac{a-p^*}{b}-q_2$

综上： $q_1(q_2)=\begin{cases}0 & q_2\geq\frac{a-c}{b}\\ \frac{a-c-2p_2}{2b} & \frac{a+c-2p^\pi}{2b}\leq q_2\leq\frac{a-c}{b}\\ \frac{a-p^*}{b}-q_2 & 0\leq q_2\leq\frac{a+c-2f^*}{2b}\end{cases}$

$$q_2(q_1)=\begin{cases}0 & q_1\geq\frac{a-c}{b}\\ \frac{a-c-2p_1}{2b} & \frac{a+c-2p^\pi}{2b}\leq q_1\leq\frac{a-c}{b}\\ \frac{a-p^*}{b}-q_1 & 0\leq q_1\leq\frac{a_{+c-2}p^*}{2b}\end{cases}$$

2)当 $c\leq p^*\leq\frac{1}{3}(2+2c)$时，

$$q=q_1+q_2\geq\frac{a-p^*}{b}$$

由对称性，不妨值分析企业的产量决策

$A\left(\frac{p^*-c}{b},\frac{a+c-2p^*}{2b}\right)B\left(\frac{a-c}{3b},\frac{a-c}{3b}\right)$

所以有： $q_1=\begin{cases}0 & q_2>\frac{a-c}{b}\\ \frac{a-c-bq_2}{2b} & \frac{a+c-2p^*}{2b}<q_2\leq\frac{a-c}{b}\\ \frac{a-p^*}{b}-2_2 & q_2\leq\frac{a+c-2p^*}{2b}\end{cases}$

$$q_2(q_1)=\begin{cases}0 & q_1\geq\frac{a-c}{b}\\ \frac{a-c-2p_1}{2b} & \frac{a+c-2p^x}{2b}\leq q_1\leq\frac{a-c}{b}\\ \frac{a-p^*}{b}-q_1 & 0\leq q_1\leq\frac{a+c-2\vec{p}}{2b}\end{cases}$$