9.8

None Leon

2021/1/14

1. 假设明天的世界有两种状态，晴天或雨天。消费者丙在明天的課赋是确定的，等于 y_1 碗 热干面。雨天时, 他的京赋 y_2 是随机的, 有一半的概率为 y_H 碗，一半的概率为 y_L 碗, $y_H > y_L$。丙的偏好是 $U = \min\{E(c_1), E(c_2)\}$, c_1 和 c_2 代表明天在晴天和雨天两种状态下分别消费的热 干面数量，E 是基于今天信息的数学期望。公司 C 在今天的期货市场上交易两个状态下的热 干面期货，价格为 p_1 和 p_2 。消费者可以选择以 p_1 的价格向公司 C 买晴天时的一碗热干面期 货，即今天付出 p_1, 如果明天是晴天，则公司 C 提供一碗热干面; 如果明天为雨天，则公司 C 不提供。消费者也可以以 p_1 的价格向公司 C 出售晴天的一碗热干面期货，即今天消费者收 到 p_1。如果明天为晴天，则消费者提供一碗热干面，如果明天为雨天，则消费者不提供。 p_2 以此类推。消费者在今天没有任何課赋, 在明天的两种状态下, $c_1 = y_1 + x_1, c_2 = y_2 + x_2$。数量为正值的 x_1 和 x_2 代表今天购买的热干面期权，数量为负值的 x_1 和 x,代表今天出售的热干 干面期权。

回答下列问题:

(1) 写出在今天的期货市场上的预算约束。

(2) 求 x_1 的表达式。

(3) x_1 一定是负的吗?

(4) 若 p_1, p_2 均翻倍，对 x_1 有何影响?

solution:

由于明天为雨天时收入不确定，为了消除收入波动风险，消费者利用期权来消除风险。

今天没有收入，故利用期权进行的操作可称为套期保值。

1)今天七万市场上的预算约束为：

$p_1x_1 + p_2x_2 = 0$

2)效用最大化：

max: $u = \min\{E(c_1), E(C_2)\}$

st：$\begin{cases} E(c_1) = y_1 + x_1 \\ E(c_2) = E(y_2) + x_2 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) + x_2 \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = 0 \end{cases}$

FOC: $E(c_1) = E(c_2)$

解得： $x_1 = \frac{p_2(y_1+y_2-2y_1)}{2(p_2+p_1)}$

3) x_1 不一定为负，取决 $E(y_2)$与 y_1的大小

$$\begin{cases} E(y_2) > y_1 \quad x_1 > 0,. \quad x_2 < 0，\textit{将雨天的禀赋转至晴天} \\ E(y_2) < y_1 \quad x_1 < 0. \quad x_2 > 0，\textit{将晴天的禀赋转移至雨天} \\ E(y_2) = y_1 \quad x_1 = x_2 = 0，\textit{不用转移} \end{cases}$$

4)若 p_1, p_2 翻倍，则 x_1不变

$$x_1(2p_1, 2p_2) = \frac{p_2(y_1 + y_2 - 2y_1)}{2(p_2 + p_1)}$$

note：本题的几个精彩之处

1.效用用函数

$u = \min[E(c_1), E(c_2)]$

总体来看，该消费者不想承担一丁点的消费波动，只想 $E(c_1) = E(c_2)$，极端的风险厌恶，这一假设实际上简化了本题，本题未给出晴天、雨天两种状态发生的概率。因为这对该消费者并不重要。从而将本题的波动重心放在y_2上，大大简化了分析。

部分来看，任何一种状态的效用为 $Eu = E(c)$，这是线性偏好，也就是常说的风险中性。若无整体假设，依据 VNM 效用函数：

$$\begin{aligned} Eu \quad &= \gamma_{晴} u[E(c_1)] + \gamma_{雨}\, u[E(c_2)] \\ &= \gamma_{晴} E(c_1) + \gamma_{雨}\, E(c_2) \end{aligned} \text{[完全替代]}$$

本题实际上是双重波动，状态波动+各种状态收入波动，但通过效用函数的假设简化了。

2.期权市场

本题的期权市场与现实中不同。现实中时在当期签订会约，到期交割，不见设计当前的其午安交易，也涉及到期的实物讲义。本题实则简化了这一点，仅在当期有现金交易。简化了预算约束。

2.降低成本投资考虑一个具有反需求函数p（q） $= a - BQ$*的垄断者*。垄断者做出两个选择：在降低成本上投资多少，a，生产多少，q。如果垄断者在降低成本上

投资a单位，他的（常数）单位生产成本是c（a） $= c-\beta\sqrt{a}$，其中，$c>0$是初始边际成本，β表示降低成本投资的有效性。这意味着

$$c'(A)=-\frac{\beta}{2\sqrt{A}}<0 \quad \text{and} \quad c''(A)=-\frac{\beta}{2(A)^{3/2}}>0$$

（也就是说，投资于降低成本会降低垄断者的单位生产成本，但降低的速度会减慢）。为了简单起见，我们可以假设$a>c$和$b>beta^2/2$

1）不受管制的垄断者得到了垄断者选择的一阶条件。

2）第一个最好的选择是将垄断者的选择与一个仁慈的社会规划者的选择进行比较，后者可以同时控制q和a（"第一个最好"的比较）。解释你的结果。

3) 次优假设社会规划者可以控制成本降低技术的投资，A，但不能控制q（即，他可以实施"次优"政策）。特别是，假设社会规划者选择A，然后垄断者选择q。将您的结果与第b部分中的结果进行比较，在第b部分中，监管者同时选择A和q来执行第一个最佳策略.

solution：

1）垄断企业利润最大化：

max: $\pi^m=(a-bq)\cdot q-(c-\beta\sqrt{A})q-A$

$$\begin{aligned}\text{max:}\quad sw &= cs+\pi \\ &=(a-bq)q-(c-\beta\sqrt{A})q-A+\frac{1}{2}bq^2\end{aligned}$$

$$\text{FOC:}\begin{cases}\frac{\partial sw}{\partial q}=a-c+\beta\sqrt{A}-bq=0\\ \frac{\partial sw}{\partial A}=\frac{\beta}{2\sqrt{A}}q-1=0\end{cases}$$

$$\text{解得：}\quad\begin{cases}q^*=\frac{2(a-c)}{2b-\beta^2}\\ A^*=\frac{\beta^2(a-c)^2}{(2b-\beta^2)^2}\end{cases}$$

2）一级最优：

sw 最优化：

$(w^*, r_1^*, r_2^*)=(6,8,8)$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\pi^m}{\partial q}=a-c+\beta\sqrt{A}-2bq=0\\ \dfrac{\partial\pi^m}{\partial A}=\dfrac{\beta}{2\sqrt{A}}q-1=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} q^m = \dfrac{2(a-c)}{4b-\beta^2} \\ A^m = \dfrac{\beta^2(a-c)^2}{(4b-\beta^2)^2} \end{cases}$$

解得：$\begin{cases} q^* = \frac{2(a-c)}{2b-\beta^2} \\ A^* = \frac{\beta^2(a-c)^2}{(2b-\beta^2)^2} \end{cases}$

中央计划者既考虑企业又考虑居民，q，A 均上升，投资 A 的边际成本为 1，带来的收益为：

$$\begin{cases} \text{central planner:} \quad MR_1 + MU_1 = MC \\ \qquad \text{firm :} \qquad\qquad MR_2 = MC \end{cases}$$

边际收益表现为递减：

$A_1 > A_2$

3）二级最优：

第二阶段厂商利润最大化：

$\max_q: \pi = (a-bq)q - (c-\beta\sqrt{A})q - A$

$Foc: \quad \dfrac{\partial \pi}{\partial q} = a - c + \beta\sqrt{A} - 2bq = 0$

反应函数：

$$q = \frac{a-c+\beta\sqrt{A}}{2b}$$

第一阶段中央计划者社会福利最大化：

$$\begin{aligned} \max_A: \quad sw \quad &= \frac{1}{2}bq^2(A) + [a-c+\beta\sqrt{A} - bq(A)]q(A) - A \\ &= \frac{3(a-c+\beta\sqrt{A})^2}{8b} - A \end{aligned}$$

Foc: $\frac{dsw}{dA} = \frac{3\beta(a-c+\beta\sqrt{A})}{8b\sqrt{A}} - 1 = 0$

解得：

$$\begin{cases} A^{**} = \dfrac{a\beta^2(a-c)^2}{(8b-3\beta^2)^2} \\ q^{**} = \dfrac{4(a-c)}{8b-3\beta^2} \end{cases}$$

一级最优和二级最优比较：

i） $A^* > A^{**}$ ；$q^* > q^{**}$

ii）市场无摩擦时，中央计划者能实现资源配置的最优状态，市场存在摩擦时只能实现次优状态。

iii）A 会给厂商带来两种效应，一方面降低边际成本，另一方面增加投资成本 A,故企业不会自发地选择社会最优的 A^*，与中央计划者博弈的过程中，确实会受到约束，但依然存在市场势力。

3. 某垄断产品供应商下面有两个零售商，零售商的批发价为 w, 两零售商的销售价格 为 r_1 和 r_2 ，两零售商面临的需求函数分别为 $q_1 = 12 - 2r_1 + r_2, q_2 = 12 - 2r_2 + r_1$。首先，供 应商宣布批发价 w, 然后两零售商同时宣布销售价 r_1 和 r_2 ，最后，消费者进行购买。假 设两零售商有足够的库存，随时补充。

求“子博亦完美”的均衡批发价和零售价格。

solution：

零售商价格博弈：

$$\max: \pi_1 = (r_1 - w)(12 - 2r_1 + r_2)$$

$$Foc: \frac{\partial \pi_1}{\partial r_1} = 12 - 4r_1 + r_2 + 2w = 0$$

得反应函数： $r_1 = \frac{1}{4}(12 + 2w + r_2)$

由对称性得：

$$r_2 = \frac{1}{4}(12 + 2w + r_1)$$

解得： $r_1^* = r_2^* = \frac{12+2w}{3}$

供应商利润最大化：

$$\max: \quad \pi = w[q_1(w) + q_2(w)]$$

$$Foc: \frac{d\pi}{dw} = \frac{4}{3}(12 - 2\mathrm{w}) = 0$$

解得： $w^* = 6$

则子博弈金莲纳什均衡为