# 10.17

None Leon

2021/1/27

1.按照示例 16.5 中描述的劳动力市场博弈的精神，假设公司的总收入函数如下所示

$$R = 10l - l^2$$

工会的效用只是工资总额的函数：

$$U(w, l) = wl$$

1)例 16.5 中描述的两阶段博弈中的纳什均衡工资契约是什么？

2)表明替代工资契约$w' = l' = 4$比（a）部分中确定的契约具有帕累托优势。

3)在什么条件下，第（b）部分所描述的合同作为一个亚博弈完美均衡是可持续的？

solution

博弈过程：

第一阶段：工会提出工资价格

第二阶段：企业雇佣劳动

1）逆向归纳法：

企业利润最大化：

max: $\pi = 10L - L^2 - wL$ Foc : $\frac{d\pi}{dL} = 10 - w - 2L = 0 \Rightarrow \quad L = 5 - \frac{1}{2}W$

工会效用最大化：

max: $U(w, l) = w \cdot L(w) = w\left(5 - \dfrac{1}{2}w\right)$

Foc: $\frac{dU}{dw} = 5 - w = 0$

解得： $w = 5, l = 2.5$

2）当 $(w, l) = (5,2.5)$时

$\pi = 6.25; U = 12.5$

当 $(w', l') = (4,4)$时

$\pi' = 8 > \pi$ ; $U' = 16 > 0$

故

$(w'l')$优于$(w, l)$

3）无限次重复博弈：

冷酷战略：

工会开始选择 $w = 4$，若 $l \neq 4$ 则以后选择 $w = 5$

企业：若 $w = 4$则 $l = 4$ 若工会偏离，则一直选 $l = 2.5$

不偏离收益：

$$\begin{cases} \pi = 8\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t = \dfrac{8}{1-\delta} \\ U = 16\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t = \dfrac{16}{1-\delta} \end{cases}$$

若厂商偏离$(L = 3)$：

$$\begin{cases} \pi = 9 + 6.25\sum_{t=1}^{\infty}\delta^t = 9 + \dfrac{6.25\delta}{1-\delta} \\ U = 12 + 12.5\sum_{t=1}^{\infty}\delta^t = 12 + \dfrac{12.58}{1-\delta} \end{cases}$$

厂商不偏离的条件：

$$\frac{8}{1-\delta} \geq q + \frac{6.25\delta}{1-\delta}$$

$\Rightarrow \delta \geq 0.36$

note 帕累托最优的配置

$\max: \pi = 10l - l^2 - wl$ st: $\bar{U} = w \cdot l$

$f = 10(-l^2 - w(+\lambda[\bar{v} - wl]$

$$Foc: \begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial l} = 10 - 2l - w - \lambda w = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} = -l - \lambda l = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $L^* = 5$

w 不影响帕累托最优的状态，知影响工会与企业的利润分成。

2. 代理人对委托人的贡献为

$$y = a + \varepsilon, \quad \left(\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)\right)$$

3. 委托人与代理人都对风险中立。只是代理人的努力成本函数为

$$C(a) = ma^2 (m > 0)$$

4. 问：

(1) 若委托人与代理人签订一个线性合约 $w = s + by$。代理人会采取什么样的" $a$ “?” $a$ " 会怎样随 $b$ 而发生变动? " $a$ "会如何随 $m$ 而变动?

(2) 现在假定，代理人是风险规避型的，其效用函数为 $u(x) = -e^{-rx}$ 。 证明：在最优线性契约中，激励系数 $b^*$ 必满足

$$b^* = \frac{1}{1 + 2mr\sigma^2}$$

solution：

线性契约：

1）代理人风险中性

代理人期望收益最大化：

max: $EV_1 = E(w) - c(a) = s + ab - ma^2$

$$\Rightarrow \quad a^* = \frac{b}{2m}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial a^*}{\partial b} = \dfrac{1}{2m} > 0\text{：}b\text{越大，}a\text{越大} \\ \dfrac{\partial a^*}{\partial m} = -\dfrac{b}{2m^2} < 0\text{：}m\text{越大，}a\text{越小} \end{cases}$$

2）代理人风险厌恶： $u(x) = -e^{-rx}$

收入 $w \sim N(s + ba, b^2\sigma^2)$

代理人期望收益最大化：

max: $\quad EV_1 = (s + ba) - \dfrac{1}{2} r(b^2\sigma^2) - ma^2$

期望效用最大化等价于 $CE = u - \frac{1}{2} r\sigma^2$最大化

FOC: $\quad Foc\text{:} \quad \frac{\partial EV_1}{\partial a} = b - 2ma = 0$

$\Rightarrow \quad a^* \quad = \frac{b}{2m}$

委托人期望收益最大化：风险中性

max: $EV_0 = E(y-w) = (1-b)a - s$

st: $\max EV_0 = (s+ba) - \frac{1}{2}r(b^2\sigma^2) - ma^2 \quad (IC)$

$$s + ba - \frac{1}{2}rb^2\sigma^2 - ma^2 \geq 0 \quad (IR)$$

ic 可化为： $a^* = \frac{b}{2m}$

ir 取等号并结合 ic 可得：

$$S = \frac{1}{2}rb^2\sigma^2 - \frac{b^2}{4m}$$

$$\max_b: EV_0 = \frac{(1-b)\cdot b}{2m} - \frac{1}{2}rb^2\sigma^2 + \frac{b^2}{4r^2}$$

Foc: $\frac{dEV_0}{db} = \frac{1}{2m} - \frac{b}{2m} - r\sigma^2 b = 0$

$$\Rightarrow b^* = \frac{1}{1+2mr\sigma^2}$$

3.某拍卖行对一个古代瓷器进行拍卖，目前有 $n$ 个竞拍者，每个竞拍者对此瓷器的估价 为 $v_i$。出价最高者获得此瓷器并支付对应的叫价，如果存在多个出价最高的竞拍者，则 重新竞价。回答下列问题:

1) 如果每个竞拍者决定按策略 $b_i = kv_i$ 进行叫价，并且只知晓其他人的估价服从 [0,1] 上 的均匀分布，求纯战略纳什均衡; 最终谁会获得这个瓷器?

2) 如果只存在两个竞拍者，各自对拍卖物的估价记为 $v_1$ 和 $v_2$， $v_1 < v_2$, 并且彼此知晓， 证明: 叫价高于自身对拍卖物的估价为弱劣战略，并求纯战略纳什均衡，最终谁会获得 这个瓷器?

3) 如果只存在 $n$ 个竞拍者, $v_1 < v_2 < v_3 < \cdots < v_n$, 并且彼此知晓，求纯战略纳什均衡，此 时是否存在有人叫价高于估价的可能?最终谁会获得这个瓷器?

solution：

1）对任意竞拍者 i，竞拍成功的概率为：

$p_i = p\{b_i > b_1; b_i > b_2 \cdots b_i > b_n\}$

$= \prod_{j\neq i}^{n} p\left\{b_i > b_j\right\}$（设相互独立）

$$= \sum_{j\neq i}^{n} p\left\{v_j < \frac{1}{k}b_i\right\}$$

$$=\left(\frac{b_i}{k}\right)^{n-1}$$

则 i 期望收益最大化：

$$\begin{aligned}\max:\pi_i &= p_i(v_i-b_i)+(1-p_i)\cdot 0\\ &=\left(\frac{b_i}{k}\right)^{n-1}(V_i-b_i)\end{aligned}$$

$$Foc:\frac{d\pi_i}{db_I}=\frac{1}{k^{n-1}}\cdot[(n-1)b_i^{n-2}v_i-nb_i^{n-1}]=0$$

得：

$$b_i=\frac{n-1}{n}v_i$$

则纯策略 NE 为 $(b_1^*\cdots b_n^*)=\left(\frac{n-1}{n}V_1,\dots\frac{n-1}{n}V_n\right)$

最终估价最高的人获得瓷器。

2） $V_1<V_2$

首先证 $b_i>v_i$为弱占优策略

当 $b_2>v_2$:$\begin{cases}b_1>v_2: 0+b_2<b_1 & \text{对 2 无差异}\\ b_1\le v_2; \quad b_2\le v_2 & \text{优于} b_2>v_2\end{cases}$

$\Rightarrow \quad b_2>v_2$为弱占优策略

$b_1>v_1$

当 $b_1>v_1$:$\begin{cases}b_2>b_1: \quad 0<b_1+b_2 & & \text{对 1 无差异}\\ v_1\le b_2 \quad \angle b_1: & 0<b_1<b_2 & \text{对 1 无差异}\\ b_2<v_1 \quad <b_1: & & b_2<b_1\angle v_1 \text{优于} b_1>v_1\end{cases}$

$\Rightarrow b_1>v_1$为弱占优

所以 $b_1\le v_1 \quad b_2\le v_2$

$b_1<v_1$非均衡

此时 1 与 2 不断调整价格，以获取瓷器

$b_1=v_1$，此时 $b==v_1+\varepsilon(\varepsilon\to 0^+)$获得瓷器，利润最大化

综上

$NE:(b_1^*,b_2^*)=(v_1,v_1+\varepsilon)$

优于 $\varepsilon \to 0^+$，最高价拍卖的均衡结果收敛域 VICKery 拍卖，估价搞的获得拍卖品，并支付第二高的报价。

若单纯的看看 NE,一下策略为 NE

$\{(b_1^*, b_2^*) \mid v_1 < b_1^* < v_2, b_2^* = b_1^* + \varepsilon, \quad \varepsilon \to 0^+\}$

但上述策略在实际拍卖中出现并不合理， $b_1 > v_1$为弱劣战略，若 $b_2 < b_1$则 1 会亏损，一般拍卖者不会冒险，者也是若占优策略 NE 带来的 NE 多重新的后果，故在一般的拍中只会让证明一个最合理的 NE.

解决上述多重性的方法为逐项甲醛拍卖，而非一般的密封投标式拍卖，此时 $(v_1, v_1 + \varepsilon)$就会出现。

3） $v_1 < v_2 \cdots < v_n$

由 2)知 $b_i > v_i (i = 1,2 \cdots n)$为弱劣战略，但咋某些策略租借中，也可能构成 NE

以 n=3 为例，简要说明： $(b_1^*, b_2^*, b_3^*) = (b_1^*, v_2, v_2 + \varepsilon)$

其中 $v_1 < b_1^* \leq v_2, \quad \varepsilon \to 0^+$

给定 $b_2^* = v_2, b_3^* = v_2 + \varepsilon$

此时 $0 \leq b_2 < b_3^*$无差异，故可行

给定$b_1^*$， $b_3^* = v_2 + \varepsilon$

此时$0 \leq b_2 < b_3^*$ 无差异，故$b_2 = v_2$可行

规定$b_1^*$，$b_2^*$

此时$b_3^* = v_2 + \varepsilon$最优

综上 $(b_1^*, b_2^*, b_3^*)$为纯策略 NE

当 $n \geq 3$时，出策略 NE 中可能出现 $b_i > v_i$的情况，但并非所有 i 均衡出现这种情况。