8.27

None Leon

2021/2/3

1.两期生产经济。代表性家庭效用为$U=\frac{c_1^{\sigma}}{1-\sigma}+\beta\cdot\frac{c_2^{\delta}}{1-\sigma}$，第一期家庭拥有 k_1 ，做出消费决策(c_1,c_2)，投资鞠策 I,购买债券 b,利率为 r，两期的约束分别为：

$$\begin{cases} f(k_1)+b=c_1+I\left[1+\frac{\phi}{2}\left(\frac{I}{k_1}\right)^2\right] \\ f(k_2)-b(1+r)=c_2 \end{cases}$$

资本积累方程：$k_2=k_1+I \quad (I\geq 0)$

1)以 (c_1,c_2,k_1,I)表示家庭的跨期预算约束。

2)求出家庭最优决策的一阶条件。

3)定义 $q=1+\frac{3}{2}\phi\left(\frac{I}{k_1}\right)^2$，则 q 用生产函数 f 来表示的长城为？q 的经济学含义是什么？将 I 表示为$I(k_1,q)$并解释经济学含义。

solution:

1)两期预算约束中消去 b:

$c_1+\frac{c_2}{1+r}+I\left[1+\frac{\phi}{2}\left(\frac{I}{k_1}\right)^2\right]=f(k_1)+\frac{f(k_2)}{1+r}$

利用关键方程(资本积累方程)消去 k_2

$$c_1+\frac{c_2}{1+r}+I\left[1+\frac{\phi}{2}\left(\frac{I}{k_1}\right)^2\right]=f(k_1)+\frac{f(k_1+I)}{1+r}$$

即为跨期预算约束。

2)家庭效用最大化：

max: $\quad U=\frac{c_1^{\sigma}}{1-\sigma}+\beta\cdot\frac{c_2^{\sigma}}{1-\sigma}$

st: $\begin{cases} c_1+\frac{c_2}{1+r}+I\left[1+\frac{\phi}{2}\left(\frac{I}{k_1}\right)^2\right]=f(k_1)+\frac{f(k_1+1)}{1+r} \\ I\geq 0 \end{cases}$

拉格朗日函数：$\exists u\geq 0$，st

$$\mathcal{L} = \frac{c_1^\sigma}{1-\sigma} + \beta \cdot \frac{c_2^\sigma}{1-\sigma} + \lambda\left[f(k_1) + \frac{f(k_1+I)}{1+r} - c_1 - \frac{c_2}{1+r} - I\left(1+\frac{\phi}{2}\left(\frac{\bar{I}}{k_1}\right)^2\right)\right] + u \cdot I$$

$$\text{FOCs:}\begin{cases} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial c_1} = \frac{\sigma}{1-\sigma} c_1^{\delta-1} - \lambda = 0 \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial c_2} = \beta\frac{\sigma}{1-\sigma} c_2^{\sigma-1} - \lambda \cdot \frac{1}{1+r} = 0 \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial k_1} = \lambda\left[f'(k_1) + \frac{f'(k_1+1)}{1+r} + \phi\left(\frac{I}{k_1}\right)^3\right] = 0 \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial I} = \lambda\left[\frac{f'(k_1+1)}{1+r} - 1 - \frac{3}{2}\phi\left(\frac{I}{k_1}\right)^2\right] + \mu = 0 \end{cases}$$

化简得：

$c_1^{\sigma-1} = \beta c_2^{\sigma-1} \cdot (1+r)$【欧拉方程】

$c_1^{\sigma-1} = \beta c(2)^{\sigma-1} \cdot (1+r)]$【跨期消费的优化】

$[u'(c_1) = \beta u' c(c_2)(1+r)]$

$1+\frac{3}{2}\phi\left(\frac{I}{k_1}\right)^2 = \frac{f'(k_1+I)}{1+r}$方程左边是单位投资的边际成本，方程右边是单位投资的边际收益【跨期的投资优化】

注：$I\left[1+\frac{\phi}{2}\left(\frac{I}{k_1}\right)^2\right]$为使得资本存量增加 I 的必要投资额，$I \cdot \frac{\phi}{2} \cdot \left(\frac{I}{k_1}\right)^2$为投资的调整成本。

$$q = 1 + \frac{3}{2}\phi\left(\frac{I}{k_1}\right)^2 = \frac{f'(k_1+I)}{1+r}$$

经济学含义：均衡时，q 表示增加一单位 I 能够带来的$f(k_2)$的增量(贴现) $I = \sqrt{\frac{2k_1^2(q-1)}{3\phi}}$

由于$I \geq 0$ 即 $q \geq 1$ $q > 1$上式才有意义

经济学含义：上式表面，q>1 时，才会有正的投资，这其实就是托宾 q,表明只有单位投资所带来的产量增加的现值大于 1 时才会投资，否则直接购买企业的股票，不会投资。

2. 一个垄断厂商面临两种类型的消费者。第一类消费者的需求函数为 $p = 6 - 0.8p$, 第二类消费 者的需求函数为 $p = 12 - q$。某市场上共有第一类消费者 10 人，第二类消费者 20 人。该厂商的边 际成本始终为 3.

1)若厂商实行三级价格歧视，则对于两类消费者分别确定的价格和产量为多少?(5′)

2)若厂商对于首次进入市场的消费者一次性收取固定费用 F, 对于消费者按价格 p 收取费用。 若厂商需要保证两类消费者都能消费，那么最优的 F 和 p 是多少? 若厂商只需要保证一类消费者能 够消费，那么最优的 F 和 p 是多少?厂商会做出何种选择? $(15')$

solution：

1)三级价格歧视，利润最大化：

max: $\quad \pi=10(p_1-3)\left(\frac{15}{2}-\frac{5}{4}p_1\right)+20(p_2-3)(12-p_2)$

FOCs: $\begin{cases}\frac{\partial\pi}{\partial\rho_1} & =\frac{45}{4}-\frac{5}{2}P_1=0\\ \frac{\partial\pi}{\partial p_2} & =15-2P_2=0\end{cases}$

解得：$\begin{cases}p_1=\frac{9}{2}\\ p_2=\frac{15}{2}\end{cases}\begin{cases}q_1=\frac{15}{8}\\ q_2=\frac{9}{2}\end{cases}$

$\begin{cases}Q_1=\dfrac{75}{4}\\ Q_2=90\end{cases}$

2)二级价格歧视——两部定价——同时供应

利润最大化：

$$\max:\pi=\quad(p-3)\left[10\left(\frac{15}{2}-\frac{5}{4}p\right)+20(12-p)\right]$$
$$+30\cdot F$$

st: $\begin{cases}F=\min\{cs_1,cs_2\}\\ p<6\end{cases}$

化简后： max: $\pi=\frac{5}{2}(p-3)(126-13p)+\frac{75}{4}(6-p)^2$

FOC: $\frac{d\pi}{dp}=270-\frac{55}{2}p=0$

解得：$p=\frac{108}{11}>6$

故若要同时供应两个市场，则$P=6-\varepsilon\quad(\varepsilon\to 0^+)$

此时固定费用 $F=cs_1\doteq 0$

利润 $\pi\doteq 360$

二级价格歧视——两部定价——只供应单个市场

由于市场 2 的需求 $q = 12 - p$大于市场 1，且市场 2 的人数 20 高于 1，故只供应市场 2.

利润最大化：

$$\max: \pi = 20(p-3)(12-p) + 10(12-p)^2$$