8.8

None Leon

2021/2/4

1.已知某人效用函数 $u = \ln x + 9\ln y$, x 为每周消费食物的数量，y 为每周消费其他物品的数量，用 单位货币表示。每周收入 1000 元。对于食品消费，每周消费数量限制在 40 以下。

1)当食品价格为 P_x 时，求食品的消费数量，以及其他物品的消费量。

2)若 $P_x = 2$, 则食品的消费量是多少。其他物品对食品的边际替代率是多少？与价格比的大小关系？请 给出经济解释。

3)当 $P_x = 3$ 时，重新回答 (2)。

4)若市场上 $P_x = 2$, 而附近新开的超市由于食品新鲜的原因价格为 3, 消费者决定当食品消费数量大于 40 之后，才在超市购头食品。问此时的食品消费量为多少。

solution：

1)效用最大化问题： $\max: \mu = \ln x + 9\ln y \quad st: \quad px \cdot x + y \leq m$

拉格朗日函数为：

$\mathcal{L} = \ln x + 9\ln y + \lambda[m - Px \cdot x - y]$

FOCs:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \dfrac{1}{x} - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \dfrac{9}{y} - \lambda = 0 \end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases} x = \dfrac{m}{10p_x} \\ y = \dfrac{m}{9p_y} \end{cases}$$

由于 x 的消费不超过 40，故：

$$\begin{cases} x = 40 \\ y = 1000 - 40p_x \end{cases} \quad (0 \leq p_x \leq 2.5)$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{100}{p_x} \\ y = 900 \end{cases} \quad (p_x \geq 2.5)$$

2)当 $p_x = 2$时，x 的消费量为上限 40

此时 y 对 x 的边际替代率为：

$$\mathrm{MRS}_{x,y} = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{y}{9x} = \frac{23}{9} > \frac{P_x}{p_y} = 2$$

经济学解释：

$MRSx,y > \frac{Px}{Py}$ 说明消费者认为 P_x相对于P_y偏低，仍有购买 x 的欲望，但受到限制。

$\frac{MU_x}{P_x} > \frac{MU_y}{P_y}$，即单位货币带来的 x 的边际效用大于 y 的边际效用，倾向于增加 x 的购买。

3)当 $P_y = 3$时，x 的消费量为$frac1003$

此时 y 对 x 的边际替代率为：

$$MRS_{x,y} = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{y}{9x} = 3 = \frac{Px}{Py}$$

经济学解释：$\frac{MU_x}{P_x} = \frac{MU_y}{P_y}$，即单位货币带来的 x 的边际效用等于 y 的效用。消费者达到最优选择。

4)方法一：经济分析

当 P_{x}=2 时， x=40，此时消费者仍有购买 x 的欲望

由于 $MRS_{x,y} = \frac{23}{9} < 3$，故消费者不会再新开超市购买 x。

综上，x 的最优消费量为 40.

方法二：数理证明法

消费者的预算集为：

$$\begin{cases} 2x + y = 1000 & 0 < x \leq 40 \\ 3x + y = 1040 & x > 40 \end{cases}$$

当 $(P_x, P_y, m) = (2,1,1000)$时， x=50>40 不符合

当$(P_x, P_y, m) = (2,1,1040)$时， $x = \frac{104}{3} \doteq 34.67 < 40$不符合

故消费者最优选择为 $A(40,920)$(次优解)

2.某垄断企业由两个工厂构成，工厂 I 的生产函数为 $y_1 = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$, 工厂 II 的生产函数为 $y_2 = x_1^{\beta} x_2^{1-\beta}$, 其中 x_1 和 x_2 为两种要素的投入数量， α 与 β 为常数。如果要素市场为完全竞争市 场， r_1 和 r_2 为两种要素的价格，则该企业的成本函数如何？

solution：

1)首先求工厂 1,2d 的成本函数

工厂 1 成本最小化：

$$\min: \quad r_1 x_1 + r_2 x_2$$
$$\text{st}: \quad y_1 = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$$

拉格朗日函数：

$$\mathcal{L} = r_1 x_1 + r_2 x_2 + \lambda(y_1 - x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha})$$

$$FOCs: \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = r_1 - \lambda \partial x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha} = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = r_2 - \lambda(1-\alpha) x_1^{\alpha} x_2^{-\alpha} = 0$$

解得： $c_1(y) = \alpha^{-\alpha}(1-\alpha)^{\alpha-1} r_1^{\alpha} r_2^{1-\alpha} \cdot y_1 = A \cdot y_1$

同理：$c_2(y) = \beta^{-\beta}(1-\beta)^{\beta-1} r_1^{\beta} r_2^{1-\beta} \cdot y_1 = A \cdot y_2$

2)再求厂商的成本函数

若$A > B$， $MC_1 = A > MC_2 = B$ 故此时全部利用工厂 2 生产更加，此时 $c(y) = \beta^{-\beta}(1-\beta)^{\beta-1} r_1^{\beta} r_2^{1-\beta} \cdot y$

当 $A < B$时， $MC_1 = A < MC_2 = B$

此时全部利用工厂 1 生产更加，此时 $c(y) = \alpha^{-\alpha}(1-\alpha)^{\alpha-1} r_1^{\alpha} r_2^{1-\alpha} y$

当 $A = B$时，无差异

综上： $c(y) = \min\{A, B\} \cdot y$

其中 $\begin{cases} A = \alpha^{-\alpha}(1-\alpha)^{\alpha-1} r_1^{\alpha} r_2^{1-\alpha} \\ B = \beta^{-\beta}(1-\beta)^{\beta-1} r_1^{\beta} r_2^{1-\beta} \end{cases}$

3.生产函数 $Q = f(K, L) = AK^{\alpha} L^{\beta} \quad (A > 0, \alpha + \beta = 1, 0 < \alpha < 1)$，要素价格分别为 r, w.

证明：

1)该生产函数满足欧拉定理

2)拓展线为通过远点的射线

3)资本、劳动的产出弹性分别为 $\alpha.\beta$

4) $MRTS_{K,L}$ 只取决于$\frac{L}{K}$，并随 $\frac{L}{K}$的增加而增。

5)若为完全竞争市场，厂商资本与劳动的成本占比分别为 $\alpha.\beta$

proof：

1)欧拉定理

$f(K,L) = K \cdot MPK + L \cdot MPL$

$$MPK = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k} = \alpha A K^{\alpha-1} L^{\beta}$$

$$MPL = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = \beta A K^{\alpha} L^{\beta-1}$$

$K \cdot MPK + L \cdot MPL = (\alpha+\beta) K^{\alpha} L^{\beta} = f(K,L)$

2)生产的拓展线为 K-L 平面上最优决策的连线，厂商的最优决策满足

$MRTS_{K,L} = \frac{MPK}{MPL} = \frac{r}{w}$ 即 $K = \frac{\alpha w}{\beta r} \cdot L$

即生产的拓展线通过原点的射线。

3)要素 x 的产出弹性： $E_x = \frac{dQ/Q}{dx/x}$

资本、劳动的产出弹性为 $E_k = \frac{dQ/Q}{dk/k} = \frac{dQ}{dk} \cdot \frac{k}{Q} = MPK \cdot \frac{K}{Q} = \alpha$

同理 $E_L = \frac{dQ}{dL} \cdot \frac{L}{Q} = MPL \cdot \frac{L}{\alpha} = \beta$

4) $MRTS_{K,L} = \frac{MPK}{MPL} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{L}{K}$

故 $MRTS_{K,L}$只取决于 $\frac{L}{K}$,并随之的增而增。

5)完全竞争市场： $w = MPL \quad r = MPK$

厂商成本最小化：

$$\begin{aligned} &\text{min: wL+rK} \\ &\text{st: } Q = AK^{\alpha} L^{\beta} \end{aligned}$$

拉格朗日函数：

$$\mathcal{L} = wL + rk + \lambda\left[\alpha - Ak^{\alpha} L^{\beta}\right]$$

解得：

$$\begin{cases} K = A^{-1}\alpha^{\beta}\beta^{-\beta}w^{\beta}r^{-\beta} \cdot Q \\ L = A^{-1}\alpha^{-\alpha}\beta^{\alpha}w^{-\alpha}\alpha^{2} \cdot Q \end{cases}$$

$$c(Q) = A^{-1}\alpha^{-\alpha}\beta^{-\beta}r^{\alpha}w^{\beta} \cdot \alpha$$

资本成本份额：$\alpha_k = \frac{r \cdot K}{c(\alpha)} = \alpha$

劳动成本份额：$\alpha_L = \frac{w \cdot L}{c(\alpha)} = \beta$