10.19

None Leon

2021/1/27

1. (20 分) 竞争性市场下有一个买者和一个卖者，卖者的边际成本为常数，MC = 10 。买者购买第 q 个单. 位产品的边际收益为 MR = 210 一 q。买者和卖者共同决定交易价格 p 。在此交易价格下，交易量为买者愿意买的 和卖者愿意卖出量中的最小者。

(1) 用 p 和 q 表示买者和卖者的利润函数。

(2) p 和 q 在什么条件下使买者和卖者的利润和最大?

（3）若卖方选择交易价格，求最优条件下各自的利润。

(4) 若买方选择交易价格，求最优条件下各自的利润。

solution：

1）买者的利润函数：

$$\pi^b = \int_0^q (210 - q)dq - pq = (210 - p)q - \frac{1}{2}q^2$$

卖者的利润函数 $\pi^s = (p - 10)q$

2）利润函数之和最大化：

$$\max: \pi = \pi^b + \pi^s = 200q - \frac{1}{2}q^2$$

$$Foc: \frac{d\pi}{dq} = 200 - q = 0$$

解得：

$$q^* = 200, \quad p^* = 10$$

3）卖方选择交易价格：

$$\max: \pi^s = (p - 10) \cdot q$$

$$\text{st}: \pi^b = (210 - p)q - \tfrac{1}{2}q^2 = 0$$

$$\Rightarrow \max_p: \pi^s = (p - 10)(420 - 2p)$$

$\Rightarrow \begin{cases} p^* = 110 \\ q^* = 200 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \pi^s = 20000 \\ \pi_b = 0 \end{cases}$

4）买方选择交易价格：

$\max: \pi^b = (210-p)\cdot q - \frac{1}{2}q^2$

st: $\begin{cases} \pi^s = (p-10)q = 0 \\ p \geq 10 \end{cases}$

$\Rightarrow p^* = 10 \quad q^* = 200$

$\Rightarrow \begin{cases} \pi_b = 20000 \\ \pi_s = 0 \end{cases}$

2. 考虑下列基本的代理人模型

$$y = k\cdot\alpha + \varepsilon \quad \left(\varepsilon \sim N(0,\sigma^2)\right)$$

3. 这里，y 为代理人对委托人的贡献，α 是代理人的努力程度，$k>0$ 为参数(k 可代表委 托人为代理人所创造的工作环境与技术装备，**k** 越高，则给定 **α** 会产生更大的贡献。)。求解：

(1) 假定委托人与代理人之间签订一个线性合约: $\mathbf{w} = s + b\mathbf{y}$, 代理人会采取什么行动? 代理人的行动“ $\boldsymbol{\alpha} "$ 会如何随 **b** 而发生变化? 代理人的行动会如何随 **k** 而发生变动?

(2) 现在假定代理人的效用函数形式为

$$u(x) = -e^{-rx}$$

(3) 又假定代理人的努力成本函数为 $\mathbf{C}(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\alpha^2$

证明，最优线性契约中的激励系数 $\mathbf{b}^*$ 必满足

$$b^* = \frac{k^2}{k^2 + r\sigma^2}$$

solution：

1）线性契约：

不妨假设代理人风险中性且

$c'(\alpha) > 0. c''(\alpha) > 0$

$\max_\alpha: E(w) = 5 + bk\alpha - c(\alpha)$

st: $s + bk\alpha - c(\alpha) \geq 0$

Foc: $c'(\alpha^*) = bk$

$\Rightarrow c''(\alpha^*)d\alpha^* = bdk + kdb$

$$\Rightarrow \frac{\partial \alpha^*}{\partial b} = \frac{k}{c''(\alpha^*)} > 0$$
$$\frac{\partial \alpha^*}{\partial k} = \frac{b}{c''(\alpha^*)} > 0$$

故 α^*随 k，b 的上升而上升

假设非负约束满足

2）若 $u(x) = -e^{-rx}, c(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha^2$

委托人收益最大化：设为风险中性

max: $E\pi = (1-b)k\alpha - s$

st: max: $\pi_1 = EU(w) - c(\alpha)$

$$= s + bk\alpha - \frac{1}{2}rb^2\sigma^2 - \frac{1}{2}\alpha^2$$

$$s + bk\alpha - \frac{1}{2}rb^2\sigma^2 - \frac{1}{2}\alpha^2 \geq 0$$

对 IC 约束简化：

$\alpha^* = bk$

对 IR 约束简化： $s^* = \frac{1}{2}b^2(r\sigma^2 - k^2)$

委托人收益最大化：

$$\max_b: E\pi = (1-b)bk^2 - \frac{1}{2}b^2(r\sigma^2 - k^2)$$

$$Foc: \frac{dE\pi}{db} = (1-2b)k^2 - b(r\sigma^2 - k^2)$$

$$\Rightarrow \quad b^* = \frac{k^2}{k^2 + r\sigma^2}$$

3. 烂孩子定理在《论家庭》（剑桥，马萨诸塞州：哈佛大学出版社，1981 年）中，诺贝尔奖获得者加里·贝克尔提出了他著名的烂孩子定理，作为潜在的烂孩子（玩家 1）和孩子的父母（玩家 2）之间的连续博弈。孩子先移动，选择一个动作r，影响他自己的收入$\gamma_1[\gamma'_1(r) > 0]$和父母的收入$\gamma_2[\gamma'_2(r) < 0]$。后来，父母搬家了，给孩子留下了 1 美元的遗产。孩子只关心他自己的效用，$U_1(\gamma_1 + L)$，但是父母最大化$U_2(\gamma_2 - L) + \alpha U_1$，$\alpha > 0$反映了父母

对孩子的利他主义。证明在子博弈完美均衡中，即使孩子没有利他意图，他也会选择最大化$\gamma_1+\gamma_2$的r值。提示：首先对父级问题应用反向归纳，这将给出一个隐式确定L^*的一阶条件；虽然找不到L^*的显式解决方案，但可以使用隐式函数规则找到子级第一阶段优化问题-中所需的L^*相对于r的导数。

solution：

1）父母效用最大化：

$\max: \pi_p = U_2(\gamma_2 - L) + 2v_1(\gamma_1 + L)$

$Foc: \dfrac{d\pi_p}{dL} = -U_2'(r_2 - L) + \alpha U_1'(\gamma_1 + L) = 0$

$\Rightarrow \quad \partial U_1'(x_1 + L) = U_2'(Y_2 - L)\ (*)$

2）孩子效用最大化： $\max: \pi_c = U_1[\gamma_1(r) + L(r)]$

$Foc: \quad \dfrac{d\pi_c}{dr} = U_1'(\gamma_1 + L)\cdot(\gamma_1'(r) + L'(r)) = 0$

$\Rightarrow \quad \gamma_1'(r) + L'(r) = 0 \quad (**)$

3）*式对 r 求导得：

$\partial U_1''(\gamma_1 + L)\cdot(\gamma_1'(r) + L'(r)) = U_2''(\gamma_2 - L)(\gamma_2'(r) - L'(r))$

由**式可知：

$\gamma_1'(r) + L'(r) = 0$

$\Rightarrow \gamma_2'(r) - L'(r) = 0$

$\Rightarrow \quad \gamma_1'(r) + \gamma_2'(r) = 0$

$\Rightarrow$ 盖子的最终目标是选择 r 最大化 $r_1(r) + r_2(r)$