10.14

None Leon

2021/1/26

1.服装商卡尔在一个孤岛上拥有一家大型服装厂。卡尔的工厂是大多数岛民唯一的就业来源，因此卡尔扮演着一个独裁者的角色。服装工人的供给曲线如下所示：

$$l = 80w$$

其中，l是雇佣的工人数量，w是他们的小时工资。假设卡尔的劳动需求（边际收入产品）曲线由下式给出

$$l = 400 - 40MRP_l$$

1)卡尔将雇用多少工人来实现利润最大化，他将支付多少工资？

2)假设现在政府实施了覆盖所有服装工人的最低工资法。卡尔现在会雇佣多少工人，如果最低工资定在每小时 4 美元，会有多少人失业？

3)用图表表示你的结果。

4)垄断下的最低工资与完全竞争下的最低工资相比，结果有何不同？（假设最低工资高于市场价值。）

solution：

1）独买

均衡的条件

$MRPL = MEl$

其中 $MRPL = 10 - \frac{1}{40}l$

$MEC = \dfrac{d(wl)}{dl} = \dfrac{l}{40}$

得：$\begin{cases} l = 200 \\ w = \frac{l}{80} = 2.5 \end{cases}$

厂商利润最大化：

产品市场完全竞争

$\max: \pi = p \cdot Q(L) - w(L)L$

$$Foc:\frac{d\pi}{dL}=p\cdot\frac{dQ}{dL}-w-\frac{dw}{dL}\cdot L$$

$\Rightarrow\quad P\cdot MPL=MEL$

产品市场垄断

$\max:\pi=p[Q(L)]\cdot Q(L)-w(L)\cdot L$

$$Foc:\frac{d\pi}{dL}=\frac{dp}{dQ}\cdot\frac{dQ}{dL}\cdot Q+p\cdot\frac{dQ}{dL}-w-\frac{dw}{dL}\cdot L=0$$

$\Rightarrow\quad MRPL=MEL$

2）独买情形下的最低工资

若 $(W_{\min}=4)$则

$W_{\min}=4>\frac{10}{3}$

$L^d=240,L^s=320$

失业人数 $\varDelta L=L^s-L^d=80$

π^m的性质

3）劳动市场完全竞争情况下的最低工资

均衡时

$$\begin{cases}L^d=400-40\mathrm{MRPL}\\L^S=80\mathrm{W}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}L=\dfrac{800}{3}\\W=\dfrac{10}{3}\end{cases}$$

若 $W\geq W_{\min}=4$ 则 $L=240,W=4$

独买：最低工资制度使 $L\uparrow,W\uparrow$

完全竞争：最低工资制度使 $L\downarrow,W\uparrow$

但两种情况都存在失业。

2.经济有两个人，安和巴塞洛缪，每个人都有效用函数

$$u^A(x^A,l^A)=x^Al^A\text{ and }u^B(x^B,l^B)=x^Bl^B$$

其中，x表示消费品，l表示休闲时间。此外，安拥有这个经济体中唯一的一家公司，有 20 个小时的时间投入到工作$\left（L^{A}\right$或休闲 $\left（L^{A}\right)$，或者$20=L^A+L^A$，而巴塞洛缪没有

经济中的资产（可怜的丈夫！），但有 30 个小时的时间，或$30 = L^B + L^B$。Ann 的公司使用 Cobb-Douglas 生产技术生产的单位价值为x，工时为$x = \sqrt{L}$，，其中L相当于$L^a + L^B$

1)求 PEAs.

2）求 WEAs.

3）你在 2）中部分找到的 WEA 是 PEAs 的一部分吗？

solution:

1)帕累托最优的配置：

max:　$U_A = x_A l_A$

$$\text{st:}\begin{cases} U_B = x_B l_B \\ x_A + x_B = \sqrt{L} \\ L + l_A + l_B = 50 \end{cases}$$

拉格朗日函数

$$\mathcal{L} = x_A l_A + \lambda\left[\overline{U_B} - x_B l_B\right] + \mu_1\left[\sqrt{L} - x_A - x_B\right] + u_2[\quad 50 - L - l_A - l_B]$$

$$\text{Foc:}\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_A} = l_A - u_1 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_B} = -\lambda l_B - u_1 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_A} = x_A - u_2 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_B} = -\lambda x_B - u_2 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = u_1 \cdot \frac{1}{2\sqrt{L}} - u_2 = 0 \end{cases}$$

均衡条件

$$\frac{x_A}{l_A} = \frac{1}{2\sqrt{L}} = \frac{x_1}{l_B}$$

$$\Rightarrow \frac{x_A + x_B}{l_A + l_B} = \frac{x}{50 - L} = \frac{1}{2\sqrt{L}}$$

$$\Rightarrow \quad PEA: \quad (x, L, l_A + l_B) = \left(\sqrt{\frac{50}{3}}, \frac{50}{3}, \frac{100}{3}\right)$$

2）瓦尔拉斯均衡的配置

消费端：

$\max: U_A = x_A l_A$ st: $\quad p \cdot x_A = w \cdot (20 - l_A) + \pi$

$\max: U_B = x_B l_B$ st: $\quad p \cdot x_B = w(30 - l_B)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_A = \dfrac{20w + \pi}{2p} \\ l_A = \dfrac{20w + \pi}{2w} \end{cases} \quad \begin{cases} x_B = \dfrac{30w}{2p} \\ l_B = \dfrac{30w}{2w} \end{cases}$$

生产端：

$$\max: \pi = p \cdot \sqrt{L} - w \cdot L$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} L^d = \dfrac{p^2}{4w^2} \\ \pi = \dfrac{p^2}{4w} \end{cases}$$

劳动市场出清：

$L^d = (20 - l_A) + (30 - l_B)$

$$\Rightarrow \left(\frac{p}{w}\right)^* = \sqrt{\frac{200}{3}}$$

$$\Rightarrow \quad L = \frac{50}{3}, \quad x = \sqrt{\frac{50}{3}}$$

$$\begin{cases} x_A = \dfrac{11}{12}\sqrt{6} \\ l_A = \dfrac{55}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_B = \dfrac{3}{4}\sqrt{6} \\ l_B = 15 \end{cases}$$

3）成立

3.两家企业在同一个市场进行古诺竞争，市场反需求函数为 $p = 10 - Q$, 每家企业的 边际成本为 1。

1）求古诺均衡价格、均衡产量和企业利润。

2) 如果两家企业在该市场上每两年竞争一次，但企业之间的竞争次数是无限的，能否 构造一个 SPNE 战略，使得双方平分垄断产量 q^m 是一个稳定的结果?

3) 如果两家企业还在另一个市场进行无限期的古诺竞争，但每年只竞争一次，市场反 需求函数为$p = 9 - Q$ 。企业想要同时在两个市场上达成合谋，那公贴现因子δ应该满足 什么条件?

solution

1）古诺竞争

max: $\pi_1 = (10 - q_1 - q_2)q_1 - q_1$ $Foc: \frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = q - 2q_1 - q_2 = 0$

同理：

$$q_2 = \frac{1}{2}(q - q_1)$$

解得 $q_1^c = q_2^c = 3 \quad p = 4$

$\pi_1^c = \pi_2^c = 9$

2）首先计算合谋的产量以及卡特尔的不稳定性

max: $\quad \pi = (10 - q) \cdot q - q$
$\quad \Rightarrow \quad q^m = 4.5 \quad , \quad \pi^m = 20.25$

若平分产量，假设 $q_1 = \frac{q^m}{2} = 2.25$

此时 2 的最优产量为：

max: $\quad \pi_2 = (10 - q_2 - 2.25) \cdot q_2 - q_2$

$\Rightarrow q_2^* = 3.375. \quad \pi_2^* = 11.39 > \dfrac{\pi^m}{2}$

$\Rightarrow \pi_1 = 7.59$

其次构造 SPNE 的战略

冷酷战略：

开始生产 $\frac{q^m}{2} = 2.25$，直到对方选择

$q^* = 3.375$ 一直选 $q^c = 3$

均不偏离时的利润

$$\pi_i = \frac{\pi^m}{2}(1 + \delta^2 + \delta^4 + \cdots) = \frac{10.125}{1 - \delta^2}$$

$(i = 1,2)$

若一反偏离：不妨假设 1 偏离

$$\pi = 11.39 + 9(\delta^2 + \delta^4 + \cdots) = 11.39 + \frac{9\delta^2}{1-\delta^2}$$

$$\pi_2 = 7.59 + 9(\delta^2 + \delta^4 + \cdots) = 7.59 + \frac{9\delta^2}{1-\delta^2}$$

不偏离的条件为：

$$\frac{10.125}{1-\delta^2} \geq 11.39 + \frac{9\delta^2}{1-\delta^2}$$

$\Rightarrow \delta^* \geq 0.73$

本题利用古诺均衡产量进行惩罚，当然也可利用更大的产量，此时δ更小

3）市场 2 达成合谋的 SPNE

冷酷战略：开始生产 $\frac{q^m}{2} = 2$ 直到对方生产 $q^* = 3$

一直生产 $q^c = \frac{8}{3}$

均不偏离时的利润为：

$$\pi_i = \frac{\pi^m}{2}(1 + \delta + \delta^2 + \cdots) = \frac{8}{1-\delta} \quad (i = 1,2)$$

若有一方偏离：不妨假设 1 偏离：

$\pi_1 = 9 + \frac{64}{9}(\delta + \delta^2 + \cdots) = 9 + \frac{64}{9} \cdot \frac{\delta}{1-\delta} \pi_2 = 6 + \frac{64}{9}(8 + \delta^2 + \cdots) = 6 + \frac{64}{9} \quad \frac{\delta}{1-\delta}$

不偏离的条件

$$\frac{\delta}{1-\delta} \geq 9 + \frac{64}{9} \cdot \frac{\delta}{1-\delta}$$

$\Rightarrow \delta^* \geq 0.53$

综上：若想维持两个市场的合谋，在既定 SPNE 之下 $\delta \geq 0.53$