10.7

None Leon

2021/1/25

1. (20′) 城市早上有 6000 人上班。可以选择两条路：环路和中心市区。走环路需要 45 分钟但是不 堵车。走中心市区不堵车时 20 分钟，堵车时花费时间为 $\left(20+\frac{N}{100}\right)$ 分钟，其中 N 为选择走市区的 人数。

(1). 如果两条路都不收取任何费用，那么均衡时有多少人走中心市区? (5′)

(2). 如果政府决定通过限制走中心市区的人数来实现最小化所有人花费的总时间。政府每天随 机抽取一部分人走中心市区，其他人则走环路。那么政府选择抽取的最优人数是多少？

(3). 如果政府打算通过征收费用来实现最小化所有人花费的总时间。对每个走中心市区的人收 取相同的固定费用 F ，然后将收取的所有费用水平分配给所有 6000 个人。假设时间对于第 i 个人 的价值为 $W_i=15-\frac{i}{1000}$, 其中 $i=1,2,\ldots,6000$ 。求最优的固定费用 F 。

(4). 以上三种方法哪种最优？解释其最优的原因。

solution：

1）若均不收费，均衡时

$$45=20+\frac{N}{100}$$

$$\Rightarrow N=2500$$

即 2500 人走中心市区

2）政府最小化总支出

$$\min: \quad T=\left(20+\frac{N}{100}\right)N+45(6000-N)$$

$$Foc: \frac{dT}{dN}=20+\frac{N}{100}+\frac{N}{100}-45=0$$

解得： $N=1250$

即政府抽取的最优人数为 1250

3）最优的固定费用应使得 $N=1250$ ↑居民对于两者无差异

走市中心的成本

$$C_1=\left(15-\frac{N}{1000}\right)\left(20+\frac{100}{N}\right)+F-\frac{NF}{6000}$$

走环路的成本

$$C_2=\left(15-\frac{N}{1000}\right)\cdot 45-\frac{(N-1)F}{6000}$$

当 $c_1=c_2$时，

$F\doteq 171.9$

4）若以总花费时间为评价标准

管制优于不管制，1）中均不收费最差，2—3）中均最小化总花费时间，但 3）中通过收费的选择机制要优于 2）中政府的随机抽取。

2. (15’) 在一个两种投入品 z_1 和 z_2 与两种产出品 q_A 和 q_B 的经济中，他们的技术分 别是， $q_A=\sqrt{z_{A1}Z_{A2}}, q_B=(\sqrt{z_{B1}}+\sqrt{z_{B2}})^2$

1). 假设 z_1 和 z_2 的价格分别是 r_1 和 r_2, 在均衡时 $(r_1,r_2)=\left(1,\frac{1}{4}\right)$, 且两种商品都生产, 求出均衡的产出时两种商品的价格比率 p_A/p_B 。

2). 若经济的副赋是 $(z_1,z_2)=(100,900)$, 那么投入品价格比率 r_1/r_2 改变的可能区间是什么? 同时求出可能的价格产出比率 p_A/p_B 的变化区间。

solution：

1）首先求出 A,B 的成本函数：

min: $r_1 z_{A_1}+r_2 z_{A_2}$

$st: q_A=\sqrt{z_{A_1}z_{A_2}}$

$$\Rightarrow\begin{cases}z_{A_1}=r_1^{-\frac{1}{2}}r_2^{\frac{1}{2}}\cdot q_A\\ z_{A_2}=r_1^{\frac{1}{2}}r_2^{-\frac{1}{2}}q_B\end{cases}$$

$$\Rightarrow C_A=2r_1^{\frac{1}{2}}r_2^{\frac{1}{2}}q_A$$

min: $r_1 z_{B_1}+r_2 z_{B_2}$

st: $q_B=\left(\sqrt{z_{B_1}}+\sqrt{z_{B_2}}\right)^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_{B_1} = \dfrac{r_2^2}{(r_1+r_2)^2} q_B \\ z_{B_2} = \dfrac{r_1^2}{(r_1+r_2)^2} q_B \end{cases}$$

$$\Rightarrow c_B = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \cdot q_B$$

均衡时：

$$\frac{p_A}{p_B} = \frac{MC_A}{MC_B} = \frac{2(r_1+r_2)}{\sqrt{r_1 r_2}} = 5$$

2）令 $r = \frac{r_1}{r_1}$

由禀赋约束知：市场出清时

$$\begin{cases} z_{A_1} + z_{B_1} = \dfrac{1}{\sqrt{r}} q_A + \dfrac{1}{(1+r)^2} q_B = 100 \\ z_{A_2} + z_{B_2} = \sqrt{r} \cdot q_A + \dfrac{r^2}{(1+r)^2} q_B = 900 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q_A = \dfrac{100(r^2-9)}{r^{\frac{1}{2}}(r-1)} \geq 0 \\ q_B = \dfrac{100(1+r^2)(q-r)}{r(r-1)} \geq 0 \end{cases}$$

解得：

$3 \leq r \leq 9$

则 $\frac{p_A}{p_B} = \frac{2(1+r)}{\sqrt{r}} \in \left[\frac{8}{3}\sqrt{3}, \frac{20}{3}\right]$

3.一个博亦的支付矩阵如表所示:

			2	
		X	Y	Z
	A	(18; 4)	(8; 12)	(15; 10)
1	B	(4; 6)	(6; 7)	(14; 8)
	C	(6; 8)	(4; 2)	(6; 11)

其中，A、B、C 是游戏者 1 的策略，X、Y、Z 是游戏者 2 的策略。

1). 求纳什均衡，并简要说明理由。

2). 若该博亦是 1 先动的序贯博亦，即 1 做出决策后 2 根据 1 的决策进行选择。求纳什均衡，并简要说明理由。

3). 若 1 可以在 2 决策后再修改自己的选择，求纳什均衡，并简要说明理由。

solution：

1）纯策略 NE:

(A, Y)

混合策略 NE:j 假设 2 选 X,Y 的概率为 $p_1 p_2 (1-p_1-p_2)(0<p_i<1, i=1,2)$

由无差异性知：

选 A 时： $E'_A = 18p_1 + 8p_2 + 15(1-p_1-p_2)$

选 B 时： $E'_B = 4p_1 + 6p_2 + 14(1-p_1-p_2)$

则 $E'_A = E'_B \Rightarrow 3p_1 + p_2 + 1 = 0$不符合

综上：仅存在唯一的纯策略均衡 $NE \quad (A, Y)$ 且 A 的 1 为占优策略

2）动态博弈中的 NE:将拓展式转化为战略

1 的行为分析：

由于 A 为 1 的占优策略，故 1 选择必定选择是 A

2 的行为分析：

当 1 选择 A 时，2 选择 Y，(A, Y)即为均衡的结果，而在非均衡路径上 2 的选择不影响 NE,会影响到 SPNE

综上：NE 为

$\{A, (Y, S_B, S_C)\}$

其中 $(S_B, S_c = x, y, z)$

3）同修改策略：相当于 2 先决策

第一阶段：

1 可选择任何策略，不影响第三阶段的修改，第二、三极端的子博弈为：2 先选择，3 后选择

首先剔除 2 的 x 战略

当 2 选择 Y 时

此时均衡结果为 (Y, A)，非均衡路径上的决策不影响 1.同时也不会使得 2 偏离

当 2 选择 z 时

此时均衡结果为 (z, A)，此时 1 的策略为

(s_1, s_2, A)，当 $S_2 = A$时，2 不会偏离选择 Y,当

$S_2 \neq A$时，2 不会偏离

即二、三阶段的 NE 为

$\{Y, (S_1, A, S_3)\} \quad (S_1, S_3 = A, B, C)$

$\{z, (s_1, s_2, A)\} \quad (s_1 = A, B, C; s_2 = B, C)$

综上：整个的博弈 NE 为：

第一阶段：

1 ∀选择 A/B/C

第二阶段：对于 1 的选择，2 选择 Y 或 Z

第三阶段：对于 2 的选择，1 的策略为：

$(s_1, A, s_3) \quad (s_1 s_3 = A, B, C)$ 或 $(S_1, S_2, A) \quad (S_1 = A, B, C; S_2 = B, C)$