

## 8.29

None Leon

2021/2/3

1. 一个小商贩在小车上售卖两种商品，冰激凌和汽水。他认为未来一周高温和气温正常的概率相等。此小商贩对收入的效用为  $u(w) = \sqrt{w}$ 。如果他全部售卖冰激凌，则如果未来一周发生高温，收入为 2500 元；如果气温正常，收入为 400 元。如果他全部售卖汽水，则如果未来一周发生高温，收入为 1600 元；如果气温正常，收入为 900 元。

1) 该小贩应怎样组合冰激凌和汽水的售卖比例  $\alpha$  和  $1 - \alpha$ ，使得期望效用最大？

2) 有一个保险给只卖冰激凌的商贩设立。保险的保费为每周 400 元。如果气温不高（即气温正常），则保费赔付 800 元。这个小商贩是否应该购买此保险并只售卖冰激凌，还是应该不买保险保持（1）中两种商品的售卖比例？

solution:

1) 高温时，商贩的收入为：

$$w_H = 2500\alpha + 1600(1 - \alpha) = 1600 + 900\alpha$$

气温正常时，商贩的收入为：

$$w_L = 400\alpha + 900(1 - \alpha) = 900 - 500\alpha$$

期望效用最大化：

$$\max: EU_0 = \frac{1}{2}\sqrt{1600 + 900\alpha} + \frac{1}{2}\sqrt{900 - 500\alpha}$$

$$\text{FOC: } \frac{dEU_0}{d\alpha} = \frac{5}{2} \left[ \frac{9}{\sqrt{16+9\alpha}} - \frac{5}{\sqrt{9-5\alpha}} \right] = 0$$

解得：

$$|\alpha^* = 0.52$$

2) 若购买保险只售卖冰淇淋：

$$\begin{aligned} EU_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{2500 - 400} + \frac{1}{2}\sqrt{400 + 800 - 400} \\ &= 5(\sqrt{21} + \sqrt{8}) \end{aligned}$$

若保持 1) 中的选择：

$$EU_0 \doteq 5(\sqrt{20.68} + \sqrt{6.4})$$

由于

$$\begin{aligned}\Delta EU &= EU_1 - EU_0 \\ &= 5[\sqrt{21} - \sqrt{20.68} + \sqrt{8} - \sqrt{6.4}] > 0\end{aligned}$$

故商贩会选择购买保险，只售卖冰淇淋。

note: 若存在保险市场，商贩的最优 $\alpha$ 会发生变化，但本题为了降低难度并未考察。

2. 果发院里有一家咖啡厅，服务对象为老师（T）和学生（S）两个群体。由于院子处于兰花岛上，与外界隔着未名之湖，交通不便，从而咖啡厅在师生群体之间形成了垄断的市场力量。老师群体的需求曲线是  $P = 100 - 2Q$ ，学生群体的需求曲线是  $P = 40 - Q$ ，咖啡厅没有固定成本，边际成本为常数  $c$ 。

1)求整个咖啡消费市场的需求曲线和边际收益曲线（MR）。

2)当  $c=10$ ，咖啡厅不实施价格歧视，咖啡按单一价格销售，咖啡厅追求利润最大，应将咖啡定价为多少？此时老师和学生两个群体各自的消费量是多少？

3)当  $c=25$ ，咖啡厅不实施价格歧视，咖啡按单一价格销售，咖啡厅追求利润最大，应将咖啡定价为多少？此时老师和学生两个群体各自的消费量是多少？

4)当  $c = 25$ ，咖啡厅实施三级价格歧视，对老师和学生两个群体收取不同的咖啡单价，学生可凭借学生卡得到低价的优惠（假定学生不会代老师购买咖啡，老师也不会请学生喝咖啡）。咖啡厅为了追求最大利润,应该对老师和学生分别如何定价？

5)当  $c$  在什么范围内，实行价格歧视（允许使用学生证优惠）比实行单一定价所造成的市场总消费（老师的消费+学生的消费）更高？

6)当  $c$  在什么范围内，实行价格歧视（允许使用学生证优惠）比实行单一定价所带来的市场总剩余（咖啡厅的生产者剩余+老师的消费者剩余+学生的消费者剩余）更高？

solution:

1)市场的总需求为:

$$Q = \begin{cases} Q^T = 50 - \frac{1}{2}p & 40 < p \leq 100 \\ Q^T + Q^S = 90 - \frac{3}{2}P & 0 < P \leq 40 \end{cases}$$

边际收益曲线为:

$$MR = \frac{d(p \cdot Q)}{dQ} = \begin{cases} 100 - 4Q & 40 < p \leq 10 \\ 6 - \frac{4}{3}Q & 0 < p \leq 40 \end{cases}$$

2)统一定价：同时供应

利润最大化

$$\max: \pi = (p - c) \left( 90 - \frac{3}{2}p \right)$$

$$\text{FOC: } \frac{d\pi}{dp} = 90 + \frac{3}{2}c - 3p = 0$$

解得：

$$p = 30 + \frac{1}{2}c$$

$$c = 10 \quad p = 35, \quad \pi = 937.5$$

统一定价：只供应大市场

利润最大化：

$$\max: \pi = (p - c) \left( 50 - \frac{1}{2}p \right)$$

$$\text{FOC: } \frac{d\pi}{dp} = 50 + \frac{1}{2}c - p = 0$$

$$\text{解得: } p = 50 + \frac{1}{2}c > 40$$

$$\text{当 } c = 10 \text{ 时, } p = 55. \quad \pi = 1012.5$$

故此时价格为 P=55,只供应教师。

$$Q^T = 22.5, Q^S = 0$$

3)统一定价：同时供应

当  $c = 25$  时,  $p = 42.5 > 40$ 。故同时供应的最优选择条件不满足，取次优解：  
 $P = 40 - \varepsilon (\varepsilon \rightarrow 0^+)$

实际上,  $c \geq 20$  时, 统一定价的  $p \geq 40$ , 同时供应两个市场并非最优。

统一定价：供给单一市场

$$\pi \doteq 450 \quad p \geq 40$$

$$c = 25 \text{ 时, } p = 62.5, \quad \pi = 703.125$$

综上  $c = 25$  时,

$$p = 62.5. \quad Q^T = 18.75 \quad Q^S = 0$$

4)三级价格歧视

利润最大化:

$$\max: \pi = (p^T - c) \left( 50 - \frac{1}{2} p^T \right) + (p^S - c)(40 - p^S)$$

$$\text{FOCs: } \begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial p^T} = 50 + \frac{1}{2} c - p^T = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial p^S} = 40 + c - 2p^S = 0 \end{cases}$$

当  $c = 25$  时:

$$p^T = 62.5 \quad p^S = 32.5$$

5)三级价格歧视时的总消费:

$$Q_1 = Q_1^T + Q_1^S = 45 - \frac{3}{4} c$$

统一价格时的总消费:

若只供应单一市场:

$$Q_2 = Q_1^T < Q_1$$

同时供应两个市场:

$$Q_2 = Q_2^T + Q_2^S = \left( 35 - \frac{1}{4} c \right) + \left( 10 - \frac{1}{2} c \right) = 45 - \frac{3}{4} c = Q_1.$$

综上:

$Q_1 > Q_2$  的条件为:统一定价时厂商只供应大市场

$$\text{同时供应的利润: } \pi_1 = \frac{3}{2} \left( 30 - \frac{1}{2} c \right)^2$$

$$\text{只供给大市场的利润: } \pi_2 = \frac{1}{2} \left( 50 - \frac{1}{2} c \right)^2$$

$$\text{令 } \Delta \pi = \pi_2 - \pi_1 > 0$$

$$\text{解得: } 40 - 20\sqrt{3} < c < 40 + 20\sqrt{3}$$

若  $c \geq 40$  则小市场不供应, 此时  $Q_1 = Q_2$

综上: 当  $40 - 20\sqrt{3} < c < 40$  时, 有  $Q_1 > Q_2$

6)由 5)知:

$$\begin{cases} \text{当 } 0 < c \leq 40 - 20\sqrt{3} \text{ 时, 统一定价同时供应: } sw_1 < sw_2 \\ \text{当 } 40 - 20\sqrt{3} < c < 40 \text{ 时, 统一定价只供应大市场: } SW_1 > SW_2 \\ \text{当 } c > 40 \text{ 时, 不供应小市场: } SW_1 = SW_2 \end{cases}$$

综上：当  $40 - 20\sqrt{3} < c < 40$  时，三级价格歧视的福利大于统一定价的福利

其实最后两问时同一个问题的不同问法。

note：若大小市场的垄断价格分别：  $p_H^m \cdot p_L^m$

大小市场的最高价格分别为：  $a, b$

统一定价的最优价格为：  $\bar{p} (p_L^m < \bar{p} < p_H^m)$

当  $p_H^m < b$  时，此时统一定价必定同时供应

当  $p_H^m \geq b$  时，若  $\bar{p} < b$ ，则同时供应；若  $\bar{p} \geq b$ ，仅供应大市场。

上述结论只有当大市场份额小于等于小市场时成立，若大市场份额更大，则仅供应大市场的概率更大。