# 9.14

None Leon

2021/1/11

1.关于未来的不确定性，麦克斯·普尔曼正好生活在两个时期，$t=0,1$。让$ct \in \mathbb{R}$表示他在时期$t$*的消费*。Max 对两个时期消费流的偏好（以$t=0$计算）由函数表示

$$U(c_0, c_1) = u(c_0) + \delta E u(c_1)$$

其中，$\delta$是一个贴现因子，$u$（·）是一个递增且严格凹的效用函数，$E$运算符表示他对周期 t=1 中的事件的期望（在$t=0$）。为简单起见，还可以假设消费的边际效用是凸的，即，$u'' > 0$

假设最初没有不确定性。设$w0 \geq 0$为 Max 在第 0 阶段的收入，设$w1 \geq 0$为 Max 在第 1 阶段的收入。$Max$可以储蓄或借贷。让$s \in \mathbb{R}$表示他的储蓄（注意，如果他借款，$s$可能是负数），让$\rho$表示储蓄的总回报（即，$\rho = 1 + R$，其中，$R$是利率）。因此，他在第 0 阶段的消耗是$w1 -$，在第 1 阶段的消耗是$w1 + \rho s$在整个练习中假设内部解。

1)写出 Max 选择储蓄$s^*$为正的充要条件。

2) 假设$w1 = 0$，并且在 a 部分中找到的条件成立。找到一个关于相对风险厌恶系数 Max 的条件，这个条件对于$s^*$在$\rho 中（局部）增加是必要的和充分的$

3)现在假设 Max 在第一阶段的收入中面临不确定性。具体地说，假设他的第一阶段收入由$w1 + \tilde{x}$，给出，其中$w1 \geq 0$和随机变量$\tilde{x}$的预期值为$E$（$\tilde{x}$） $=0$。让$s^{**}$表示 Max 在这种情况下的新的最优储蓄。显示$s^{**} > s^*$。[提示：假设$s^{**} = s^*$，并使用 Jensen 不等式比较一阶条件。

solution

1)效用最大化：

$$\begin{aligned} \text{max:} \quad U &= \mu(c_0) + \delta u(c_1) \\ &= u(w_0 - s) + \delta \mu(w_1 + \rho s) \end{aligned}$$

由于 $\frac{du}{ds} = -u'(c_0) + \delta \rho u'(c_1)$

$$\frac{d^2u}{ds^2} = u''(c_0) + \delta \rho^2 u^n(c_1) < 0$$

故 $s^* > 0$的充要条件是：（正实根）

$u(0) > 0$　*即*　$\delta\rho u'(w_1) > u'(w_0)$

2）若 $w_1 = 0$:　$c_0 = w_0 - s$,　$c_1 = \rho s$

$$\begin{aligned}\frac{du}{ds} &= -u'(c_0) + \delta\rho u'(c_1) \\ &= -u'(w_0 - s) + \delta\rho u'(\rho s) = 0\end{aligned}$$

将上式去全微分：

$$u''(c_0)ds + \delta u'(c_1)d\rho + \delta\rho u'(c_1)d\rho s = 0$$

$$\Rightarrow \frac{ds}{dp} = -\frac{\delta u'(c_1) + \delta\rho s u'' c c_1)}{u''(c_0) + \delta\rho^2 u''(c_1)} > 0$$

$$\Rightarrow \quad \delta u'(c_1) + \delta c_1 u''(c_1) > 0$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{c_1 u''(c_1)}{u'(c_1)} < 1$$

$$\Rightarrow \quad R_R(c_1) < 1$$

3)期望效用最大化：

$$\max: Eu = \mu(c_0) + \delta Eu(u_1)$$

$$(\widetilde{w}_1 = w_1 + \bar{x}) = u(w_0 - s) + \delta Eu(\widetilde{w}_1 + \rho s)$$

$$\left(w_1^i = w_1 + x^i\right) = u(w_0 - s) + \delta \sum_{i=1}^{N} \pi_i\, u\left(w_1^i + \rho s\right)$$

假设 1 时刻存在 N 种状态，发生概率为 $\pi_i, \sum_{i=1}^{N} T_i = 1$

$$\begin{aligned}Foc: \frac{dEu}{ds} &= -u'(w_0 - s^{**}) + \delta \sum_{i=1}^{N} \pi_i\, u'\left(w_1^i + \rho s^{**}\right) \\ &= -u'(w_0 - s^{**}) + \delta Eu'(\widetilde{w}_1 + \rho s^{**}) \\ &= 0\end{aligned}$$

由 1）知：$-u'(w_0 - s^*) + \delta u'(w_1 + \rho s^*) = 0$

由于

$$\begin{aligned}Eu'(\widetilde{w}_1 + \rho S^{**}) &= \textstyle\sum_{i=1}^{N} \pi_i\, u'\left(w_1^i + \rho s^{**}\right) \\ &> u'\left[\textstyle\sum_{i=1}^{N} \pi_i \left(w_1^i + \rho s^{**}\right)\right] \\ &= u'[E(\widetilde{w}_1 + \rho s^{**})] \\ &= u'(w_1 + \rho s^{**})\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}0 = \tfrac{dEu}{ds}\,|_{s=s^{**}} &> -u'(w_0 - s^{**}) + u'(w_1 + \rho_S^{**}) \\ &= \tfrac{du}{ds}\,|_{s=s^{**}}\end{aligned}$$

则$s^{**} > s^{*}$

2. (20 分) 纯交换的完全竞争市场上两个消费者 A 和 B, 两种商品 X 和 Y，消费者 A 和 B 的效用函数分 别为 $\mathrm{U}(\mathrm{X_A}, \mathrm{Y_A}) = \mathrm{X_A}\mathrm{Y_A}$ 和 $\mathrm{U}(\mathrm{X_B}, \mathrm{Y_B}) = \ln\mathrm{X_B} + \alpha\ln\mathrm{Y_B}$ 其中, $(\mathrm{X_A}, \mathrm{Y_A})$ 分别为消费者 A 在 X, Y 上的消 $= \left\{\left(e_A^x, e_A^y\right), \left(e_B^x, e_B^y\right)\right\} =$

(1) 求竞争性市场均衡条件下的产品价格以及每个消费者的情说。

(2) 交易后，人们的效用水平上升了还是下降了? 为什么?

(3) 帕累托最优的资源分配方案，即契约曲线表达式。

(4) A 的效用函数变成 $\mathrm{U}(\mathrm{X_A}, \mathrm{Y_A}) = \beta\ln\mathrm{X_A} + \beta\ln\mathrm{Y_A}$, 那么 (1)~ (4) 的答案是否会发生变化? 为什么?

solution：

1）不妨设 $p_y = 1, p = p_x/p_y$

A,B 效用最大化：

$max: \quad u^A = x_A y_A \text{ st}: \quad p \cdot x_A + y_A = pe_A^x + e_A^y$

$$\begin{aligned} \max: \quad & u^B = \ln x_B + \alpha \ln y_B \\ st: \quad & p \cdot x_B + y_B = pe_B^x + e_B^y \end{aligned}$$

拉格朗日函数：

$$\begin{cases} \mathcal{L}_A = x_A y_A + \lambda\left[pe_A^x + e_A^y - p \cdot x_A - y_A\right] \\ \mathcal{L}_B = \ln x_B + \alpha \ln y_B + \lambda\left[pe_B^x + e_B^y - px_B - y_B\right] \end{cases}$$

$$\text{FOC:}\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial x_A} = y_A - \lambda p = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}_B}{\partial y_A} = x_A - \lambda = 0 \end{cases}$$

$$\text{FOC:}\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}_B}{\partial x_B} = \dfrac{1}{x_B} - \lambda p = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}_B}{\partial y_B} = \dfrac{\alpha}{y_B} - \lambda = 0 \end{cases}$$

$$\text{解得：}\begin{cases} x_A = \dfrac{pe_A^x + e_A^y}{2p} \\ Y_A = \dfrac{pe_A^x + e_A^y}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x_B = \dfrac{pe_B^x + e_B^y}{(\alpha+1)p} \\ Y_B = \dfrac{\alpha\left(pe_B^x + e_B^Y\right)}{(\alpha+1)} \end{cases}$$

竞争性均衡： $Y_A + Y_B = E^Y$

解得：$p = \frac{(\alpha+1)e_A^Y + 2e_B^Y}{(\alpha+1)e_A^x + 2\alpha e_B^x}$

2）当 $\alpha = 1$时， $p \equiv \frac{E^y}{E^x}$

初始禀赋的移动不改变均衡价格

当$\alpha \neq 1$是， $p = \frac{(\alpha+1)e_A^Y + 2e_B^Y}{(\alpha+1)e_A^x + 2\alpha e_B^x}$

随 $$的变化而变化

x,y 商品的总禀赋不变，x,y 市场的总需求恒等于总禀赋。

3）交易后人们的效用上升

又福利经济学第一定理知，竞争性均衡为帕累托有效，故效用会有所增加，至少剑比原来差

4）契约曲线：

max: $x_A y_A$

st: $\begin{cases} \bar{u}_B = \ln x_B + \alpha \ln y_B \\ x_A + x_B = E^x \\ y_A + y_B = E^Y \end{cases}$

$\mathcal{L} = x_A y_A + \lambda[\bar{u}_B - \ln(E^x - x_A) - \alpha \ln(E^y - y_A)]$

FOC: $\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_A} = y_A + \frac{\lambda}{E^x - x_A} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_A} = x_A + \frac{\partial \lambda}{E^y - y_A} = 0 \end{cases}$

解得： $x_A \cdot E^x - 2y_A E^y + (\alpha - 1)x_A y_A = 0 \ (0 \leq x_A \leq E^x)$

5）若 $u(x_A, y_A) = \beta \ln x_A + \beta \ln y_A \quad (\beta > 0)$

则以上结果不变，因为$u(x_A, y_A) = x_A y_A$仅仅是进行了正单调变换。

3.考虑下面的 Stackelberg 竞争。有两家公司。公司 1 是 Stackelberg leader 并首先选择其数量$q1 \geq 0$。公司 2 是 follower 并在观察公司 l 的选择后选择其数量$q2 \geq 0$。假设市场需求由$P\ left（q1，q2\ right） = a - q1 - q2$给出，其中$a > 0$ 。我们允许 对于负价格。让$ci > 0$为公司$i$的边际生产成本。假设$a > \max\{c1，c2\}$

1）如果企业 1 选择$q1 \leq a - c2$，那么企业 2 的最优数量是多少？、

2）如果企业 1 选择$q{1}>a-c{2}，$2 的最优数量是多少？

3) 假设$c1 > c2$和$2c1 - c2 < a$.企业 1 的最佳产出水平是多少？

4) *假设*c{1}<c{2}$和$2 c{2}-c{1}>a。厂商 1 的最佳产出水平是多少？

solution

企业 2 利润最大化：

$$\max: \pi_2 = (a - c_2 - q_1 - q_2)q_2$$

$$Foc: \frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = a - c_2 - q_1 - 2q_2 = 0$$

则企业 2 的反应函数为：

$$q_2 = \begin{cases} \dfrac{a - c_2 - q_1}{2} & q_1 \le a - c_2 \\ 0 & q_1 > a - c_2 \end{cases}$$

企业 1 利润最大化：

若 $q_1 > a - c_2$，　$q_2 = 0$，企业 1 垄断生产。

$$\max: \pi_1^m = (a - c_1 - q_1)q_1$$

$$Foc: \frac{d\pi_1^m}{dq_1} = a - c_1 - 2q_1 = 0$$

解得：　$q_1^m = \frac{a - c_1}{2} > a - c_2$

即$a < 2c_2 - c_1$

由于：$a > \max\{c_1, c_2\}$

则：$2c_2 - c_1 > \max\{c_1, c_2\}$

即$c_2 > c_1$

综上：$c_2 > c_1$ 且 $a < 2c_2 - c_1$时

$$q_1 = \frac{a - c_2}{2}, \quad q_2 = 0$$

II)若$q_1 \le a - c_2$，斯塔克伯格竞争：

此时

$a \ge 2c_2 - c_1$ 或 $c_2 \le c_1$

$$\max: \quad \pi_1^s = [a - c_1 - q_1 - q_2(q_1)]q_1$$
$$= \quad \frac{1}{2}(a - 2c_1 + c_2 - q_1)q_1$$

若$a < 2c_1 - c_2; q_1 = 0, q_2 = \frac{a - c_2}{2}$角点解

若 $\Rightarrow 2c_1 - c_2 > \max\{c_1, c_2\} \Rightarrow c_1 > c_2$

若 $a > 2c_1 - c_2; q_1 = \frac{a-2c_1+c_2}{2}, q_2 = \frac{a+2c_1-3c_2}{4}$

此时 $\begin{matrix} a - c_2 & \geq q_1 \\ \Rightarrow a \geq & 3c_2 - 2c_1 \end{matrix}$

由于 $(2c_1 - c_2) - (3c_2 - 2c_1) = 4(c_1 - c_2)$

若$c_1 > c_2$，则上是成立

若$c_1 < c_2 \begin{cases} a \geq 3c_2 - 2c_1，\textit{则上是成立} \\ a < 3c_2 - 2c_1 \end{cases}$

$c_1 < c_2 \begin{cases} a \geq 3c_2 - 2c_1 \\ a < 3c_2 - 2c_1, q_1 = a - c_2 - q_2 = 0 \end{cases}$

设事件$A: a < 2c_2 - c_1; B: \quad c_2 > c_1$

1）AB $q_1 = \frac{a-c_2}{2}, q_2 = 0$

2)A-B $q_1 = 0, q_2 = \frac{a-c_2}{2}$

3)1-AB $q_1 = \frac{a-2c_1+c_2}{2}; q_2 = \frac{a+2c_1-3c_2}{4}$

4)B-A

$$\begin{cases} a \geq 3c_2 - 2c_1: q_1 = \dfrac{a - 2c_1 + c_2}{2}; \quad q_2 = \dfrac{a + 2c_1 - 3c_2}{4} \\ a < 3c_2 - 2c_1: q_1 = a - c_2 \quad q_2 = 0 \end{cases}$$

图示