9.12

东哥

2021/1/11

1.购买燃油车的预期收益为 W1=1-X,电动车的预期收益为 W2 = X, 其中 X 是服从 [0, 1] 均匀分布的随机变量,可以理解为政策对电动车的倾斜程度。此外还可以 购买混合动力车 。 混合动力车可以看做实物期权， 期权价格为 F,是指购买了混 合动力车后，预期收益超过单一动力车最高预期收益的部分。 1.风险中性的人, 购买混合动力车的最优预期收益为多少? 2.风险厌恶的人, 效用函数假设为 U(w)= $\sqrt{\text{W,购买单-动力车的预期收益是多少?}}$ 3.比较 1 和 2 问中的期权价格，解释为什么存在价格的差异。

solution

假设效用函数为 $u(w)$

其中 $w_1(x) = 1 - x \quad ; \quad w_2(x) = x$

定义 $w(x) = \max\{w_1(x), w_2(x)\}$

$x \sim u(0,1), f(x) = 1, x \in (0,1); = 0,$ *其他*

购买燃油车的期望效用为

$$\begin{aligned} Eu_1 \quad &= \int_0^1 u\,[w_1(x)]f(x)dx \\ &= \int_0^1 u\,(1-x)dx \end{aligned}$$

购买电动车的期望效用：

$$Eu_2 = \int_0^1 u\,[w_2(x)]f(x)dx$$

购买混合动力车的期望效用，需要支付期权费 F

$$EU = \int_0^{\frac{1}{2}} u\,(1-x-F)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 u\,(x-F)dx$$

1)若为风险中性，不妨假设 $u(w) = x$

$Eu_1 = Eu_2 = \frac{1}{2}Eu = \frac{3}{4} - F$

购买混合动力车的条件为：

$Eu \geq \max\{Eu_1, Eu_2\}$

即 $F \leq \frac{1}{4}$

2)若为风险厌恶： $u(w) = \sqrt{W}$

$Eu_1 = \int_0^1 \sqrt{1-x}\, dx = \frac{2}{3} Eu_2 = \int_0^1 \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3} Eu = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x-F}\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{x-F}\, dx$

购买混合动力车的条件为：

$Eu \geq \max\{Eu_1, Eu_2\}$

即 $F \leq 0.294$

3）若政府/卖方有绝对势力，期权费会是 F 的上限

不妨假设 $F = F_{\max}$

在风险中性时 $F = 0.25$

在风险厌恶时为$F = 0.294$

可以看出，人民对风险的厌恶，使得实物期权费用上升，这也可解释现实中人们常利用期权来套保而不是投机。

2. (16 分) 假设一个封闭的小国中只月 A 和 B 两个部落，仕一个部落内人与人之间毫无差异，部落内的 生产与消费都由其首领统一决定。两个部落消费的商品都只有食品（F）和衣物（C）两种。两个部落的效用函 数分别为: $\mathrm{U_A(F_a, C_a) = F_a C_a, U_B(F_b, C_b) = F_b C_b}$ 假设今年 A 部落的收成为 20 单位食品和 10 单位衣物， 而 B 部落为 10 单位食品和 20 单位衣物。两个首领聚在一起讨论是否需要交换。

(1) 用 $\mathrm{P = P_4 P_c}$ 表示两个部落对于两种商品的各自需求。(4 分)

(2) 两个部落之间会发生交换吗? 运用食品的市场出清条件，找出均衡价格 P^"。(2 分)

（3）在价格水平 P*下，不用通过计算，你能直接回答衣物市场存在过度供给或者过度需求吗? 为什么?（2 分)

(4) 在价格水平 $\mathrm{P^*}$ 下，得到的是一个帕累托最优的分配吗? 为什么?（2 分）

(5) 如果世界价格水平为 $\mathrm{P < 1}$ ，哪个部落相对更加愿意对外开放？请提供相应的数字验证。(6 分)

solution :

居民效用最大化：

max: $u = F \cdot C$
st: $p_f \cdot F + p_c \cdot C = p_f \cdot W_F + p_c \cdot W_c$

朗格朗日函数：

$$\mathcal{L} = FC + \lambda\left[p_f \cdot W_F + p_c \cdot W_c - p_f \cdot F - p_c \cdot C\right]$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial F} = c - \lambda \cdot p_f = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial c} = F - \lambda \cdot p_c = 0 \end{cases}$$

解得：$\begin{cases} F = \frac{p_f \cdot W_F + p_c \cdot W_c}{2p_f} = \frac{W_F}{2} + \frac{W_c}{2p} \\ C = \frac{p_f \cdot WF + p_c \cdot W_c}{2p_c} = \frac{pW_F}{2} + \frac{W_c}{2} \end{cases}$

1)将 $(w_F^a, w_c^a) = (20,10), \left(w_F^b \cdot w_c^b\right) = (p, 20)$带入

$$\begin{cases} F_a = 10 + \dfrac{5}{p} \\ c_a = 10p + 5 \end{cases} \quad \begin{cases} F_b = 5 + \dfrac{10}{p} \\ c_b = 5p + 10 \end{cases}$$

2)两个部落会发生交换：

$$MRS_{F,C}^a = \frac{C_a}{F_a} = \frac{1}{2} \neq MRS_{F,c}^b = \frac{C_b}{F_b} = 2$$

均衡时，由下市场出清得：

$$F_a + F_b = 15 + \frac{15}{p} = 30$$

解得：$p^* = 1$

3）在$p^* = 1$在，市场不存在超额需求式供给

$p^* = 1$为瓦尔拉斯均衡，该状态下各市场均出清。

4）在

$p^* = 1$下，得到的是一个帕累托最优的排至，有福利经济学第一定理知，每一个瓦尔拉斯均衡的配置都是帕累托有效的。效用函数为凸函数。

5）若$p < 1$,部落 b 会更加愿意对外开放

$$\begin{aligned}\varDelta u = u_b - u_a &= F_b \cdot C_b - F_a \cdot C_a \\ &= \frac{75(1-p^2)}{p} > 0\end{aligned}$$

其实，从 $MRS_{F,b}$与 p 的大小关系也可以看出，b 更愿意开放

当$0 < P \leq \frac{1}{2}$时，只有 b 愿意开放

当$\frac{1}{2} < p < 1$时，a，b 都愿意开放，但 b 的意愿更强。

3. 市场需求函数为$p = \alpha - \beta q$, 企业 1 和企业 2 的博亦过程如下:

第一阶段：企业 1 决定边际成本 c 和固定成本 F, 但若企业 2 也进入市场的话，将与企业 1 一 样，边际成本为 c, 固定成本为 F 。

第二阶段：企业 2 决定是否进入市场。

第三阶段：若企业 2 不进入市场，企业 1 将是唯一的垄断厂商。但企业 2 若进入，两企业将达 到古诺均衡。

1） 对于任意给定的 c, F 至少为多少时才能使企业 2 不进入市场?

2） 企业 1 会选择什么样的 F 使企业 2 不进入?

3） 选择让企业 2 不进入是企业 1 的最优选择吗?

solution：

1）若企业 2 进入，利润最大化： $max\colon \pi_2 = (\alpha - \beta(q_1 + q_2)q_2 - cq_2 - F$

Foc: $\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = \alpha - c - \beta q_1 - 2\beta q_2 = 0$

反应函数 $q_2 = \frac{2-c}{2\beta} - \frac{1}{2} q_1$

同理可得：

$$q_1 = \frac{\alpha - c}{2\beta} - \frac{1}{2} q_2$$

解得：

$$\begin{cases} q_1^c = q_2^c = \dfrac{\alpha - c}{3\beta} \\ \pi_1^c = \pi_2^c = \dfrac{(\alpha - c)^2}{9\beta} - F \end{cases}$$

企业 1 利润最大化：

max: $\pi^m = (\alpha - \beta q_1)q_1 - cq_1 - F$

Foc: $$\frac{d\pi_1^m}{dq_1} = \alpha - c - 2\beta q_1 = 0$$

解得：

$$\begin{cases} q_1^m = \dfrac{\alpha - c}{2\beta} \\ \pi_1^m = \dfrac{(\alpha - c)^2}{4\beta} - F \end{cases}$$

1）对于任意 c，令企业 2 不进入的条件为：

$$\pi_2^c = \frac{(2 - c)^2}{9\beta} - F \leq 0$$

则 F 至少为：$\frac{(\alpha-c)^2}{9\beta}$

2）令企业 2 不进入，企业 1 第一阶段的目标是：

$\max_{c.\,F}$: $$\pi_1^m = \frac{(\alpha - c)^2}{4\beta} - F$$

st: $F \geq \frac{(\alpha-c)^2}{9\beta}$

拉格朗日函数：

$$\mathcal{L} = \frac{(\alpha - c)^2}{4\beta} - F + \lambda\left[F - \frac{(\alpha - c)^2}{9\rho}\right]$$

FOCs：$$\begin{cases} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial c} = \frac{-(\partial - c)}{2\beta} + \lambda \cdot \frac{2(\alpha - c)}{9\beta} = 0 \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F} = -1 + \lambda = 0 \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda} = F - \frac{(\partial - c)^2}{9\beta} = 0 \end{cases}$$

由于 $\lambda = 1 > 0$，故$F = \frac{(\alpha-c)^2}{9\beta}$

此时 $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial c} = -\frac{5}{18\beta}(\alpha - c) < 0$

因此：$c^* = 0$, $F^* = \frac{\alpha^2}{9\beta}$

3）有 2）知，企业 1 不让企业 2 进入时：

$$\pi_1^m = \frac{5\alpha^2}{36\beta}$$

若让企业 2 进入，则第一阶段

max: $\pi_1^c = \dfrac{(\alpha - c)^2}{9\beta} - F$

Foc: $= \dfrac{\partial \pi_2 c}{\partial c} = \dfrac{-2(\partial - c)}{q\beta} < 0$

$\dfrac{\partial \pi^c}{\partial F} \quad = -1 < 0$

故 $c^{**} = F^{**} = 0$

此时 $\pi_1^c = \frac{\alpha^2}{9\beta}$

由于$\Delta\pi = \pi_1^m - \pi_1^c = \frac{\alpha^2}{36\beta} > 0$

故企业 1 会选择不让企业 2 进入。