8.5

None Leon

2021/2/4

一、一个消费者消费食油 x_1 和大米 x_2,一单位食油价格是 2 元加 1 单位粮票。一单位大 米价格是 1 元加 1 单位粮票。此人拥有 60 元钱和 30 张粮票。效用函数 $U(x_1, x_2) = x_1x_2 + 10x_2$

1) 当货币和粮票不能互换的情况下，画出可能的 x_1 和 x_2 消费集。求出最优消费量。

2)假若存在黑市交易，该消费者可以以一元钱买入或者卖出一单位粮票，在图上画出可 能消费集合。求出 x_1, x_2 最优消费量，请问该消费者会购买或者卖出多少粮票?

solution

1)货币与粮票不能兑换

效用最大化：

max: $U = x_1x_2 + 10x_2$

$st: 2x_1 + x_2 \leq 60\ x_1 + x_2 \leq 30$

方法 1：画图确定紧约束 $\Rightarrow x_1 + x_2 \leq 30$

拉格朗日函数：

$L = x_1x_2 + 10x_2 + \lambda(30 - x_1 - x_2)$

focs：

$$\text{Foc:} \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 + 10 - \lambda = 0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = 20 \end{cases}$$

方法 2：K-T 条件直接求解

构建拉个朗日函数：

$$\exists\lambda \geq 0, \mu \geq 0$$

$$L = x_1x_2 + 10x_2 + \lambda[30 - x_1 - x_2] + u[(60 - 2x_1 - x_2)$$

$$\text{Focs:} \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 - \lambda - \mu = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 + 10 - \lambda - 2\mu = 0 \end{cases}$$

$$K - T\text{:} \begin{cases} \lambda(30 - x_1 - x_2) = 0 \\ \mu(60 - 2x_1 - x_2) = 0 \end{cases}$$

a.当$\mu = 0$ 时， $\lambda = 10,\quad x_1 = 10\quad x_2 = 20$符合

b.当$\mu > 0$时，需要 $2x_1 + x_2 = 60$， 当 $\lambda > 0$时 $x_1 = 30.\quad x_2 = 0$即 $\lambda = -u$矛盾 ；当$\lambda = 0$时， $30 - x_1 - x_2 \geq 0 \Rightarrow x_1 \geq 30$矛盾

2)假设买入 t 单位粮票

预算约束为：

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 60 - t(0 \leq x_1 \leq 30 - 2t) \\ x_1 + x_2 = 30 + t(30 - 2t \leq x_1 \leq 30 + t) \end{cases}$$

a.当$t \leq 0$时：约束进一步收紧，效用小于无交易时

b.$t \geq 15$时，

$$\begin{cases} \text{max:}\quad U = x_1x_2 \\ \text{st: } 2x_1 + x_2 = 60 - t \end{cases}$$

$\Rightarrow\quad U(t) = \frac{(C_0 - t)^2}{8} \Rightarrow\quad t = 15\text{时}, U_{max} = 253.125$

c. $0 < t < 15$时.消费者通过买入粮票类拓展预算集，在这过程中充分利用货币与粮票。故最优的消费交点 A.因为选择预算线上的其他店都会造成粮票或货币的剩余。

$$\begin{aligned} U(x_1, x_2) &= (10 + x_1)x_2 \\ \Rightarrow\quad U(t) &= 3t(40 - 2t) \end{aligned}$$

令$\frac{dU(t)}{dt} = 6(20 - 2t) = 0$得$t^* = 10$

note： 1.如果相切于 B，则货币有剩余，多购买粮票来优化消费；若相切于 C,则粮票有剩余，少购买粮票来优化消费。 2.本题构造拉格朗日函数，利用库恩塔克条件比较麻烦，利用经济分析比较简单

$U^* = 300 > 253.125$

故$\begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = 30 \end{cases}$买入 10 单位粮票。

2.生产函数为$f(x_1, x_2) = x_1 x_2$，要素价格为w_1, w_2

1)求条件要素需求函数

2)求成本函数

3)成本函数是否存在规模效应

4)证：边际成本等于成本最小化中的拉格朗日乘子

solution：

1)成本最小化问题为：

min: $w_1 x_1 + w_2 x_2$ st: $x_1 x_2 \leq y$

构建拉格朗日函数：$\mathcal{L} = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \lambda[y - x_1 x_2]$

$$FOCs: \quad \frac{\partial L}{\partial x} = w_1 - \lambda x_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = w_2 - \lambda x_1 = 0$$

解得：

$$\begin{cases} x_1(w_1, w_2, y) = \sqrt{\dfrac{w_2}{w_1} y} \\ x_2(w_1, w_2, y) = \sqrt{\dfrac{w_1}{w_2} y} \end{cases}$$

2)成本函数为：

$c(w_1, w_2, y) = w_1 x_1(w_1, w_2, y) + w_2 x_2(w_1, w_2, y) = 2\sqrt{w_1 w_2} \cdot \sqrt{y}$

3)当$t > 1$时，由于$c(ty) = 2\sqrt{w_1 w_2}\sqrt{ty} < t \cdot 2\sqrt{w_1 w_2}\sqrt{y} = tc(y)$。则成本函数规模报酬递减，即生产的规模报酬递增。

note：生产的规模报酬分析

1.生产函数的齐次性 若$f(tx, ty) > tf(x, y) \Rightarrow$规模报酬递增

2 成本函数的齐次性 若$c(ty) < tc(y) \Rightarrow$规模报酬递增

3.平均成本函数的单调性

若$\frac{dAC(y)}{dy} < 0$　⇒规模报酬递增

$c(y)k$次齐次 $(0 < k < 1)$，则 $AC(y) = \frac{(y)}{y}(k-1)$次齐次，则 $\frac{dAC(y)}{\partial y} < 0$，平均成本递减。

4)由于 $c(y) = 2\sqrt{w_1 w_2}\sqrt{y}$

则$MC(y) = \frac{dc(y)}{dy} = \sqrt{w_1 w_2}y - \frac{1}{2}$

由 1)知

$$\lambda = \frac{w_1}{x_2} = \frac{w_2}{x_1} = \sqrt{w_1 w_2}y^{\frac{1}{-2}}$$

故

$$\lambda = mc(y)$$

即影子价格。

note:经济学解释：拉格朗日函数中的λ表示的是变化一个点位，目标函数变化的量，即$\lambda = \frac{\Delta 目标}{\Delta 约束}$本题中约束是产量，目标为成本，则表示产量变化一单位，成本变化的比例，也就是边际成本。$\lambda = mc(y)$。