10.21

None Leon

2021/1/27

1. 垄断厂商的生产函数为 $Q=\sqrt{L}$, L 为劳动力使用量，劳动力市场为完全竞争市场， 劳动力价格为 w, 市场反需求函数为 $P=100-Q$ 。请回答下列问题:

1）该垄断厂商对劳动力要素需求是什么?

2）如果经济体存在 33 个行业，每个行业都有一个垄断厂商，其他条件不变，劳动力 反供给函数为 $w=16+L$ ，求均衡时的劳动力价格 w 。

3) 考虑只有一个垄断厂商的情况，如果劳动力市场存在买方垄断，求劳动力价格 w。

4) 如果所有劳动力组成垄断性工会组织，该组织追求经济租金最大化，求最优劳动力 价格 w 。此时，该垄断厂商的劳动力使用量是多少?

3. 将题 5 中的谈判博至重复无穷次。令 $s^*=\frac{1}{1+\delta^\circ}$ 游戏者 1 一直会提出 $(s^*, 1-s^*)$ 这一方案, 只有当 $s\geq\delta s^*$ 时才接受 $(s,1-s)$ 。游戏者 2 一直会提出 $(1-s^*,s")$的方案, 只有当 $(1-s)\geq\delta s^*$ 时才会接受 $(s,1-s)$ 。 证明：上述俠人的策略是一个纳什均衡;并且这个纳什均衡是子博变完美的。

solution：

1）垄断厂商利润最大化：

$$\max_L \pi=[100-2(L)]\cdot Q(L)-WL$$

$$Foc:\frac{d\pi}{dL}=50\cdot\frac{1}{\sqrt{L}}-1-w=0$$

劳动力需求函数：

$$l^d=\frac{2500}{(w+1)^2}$$

2）劳动力总需求为： $L^d=33\cdot L^d=33\cdot\frac{2500}{(w+1)^2}$

劳动力总供给为：

$$L^s=w-16$$

均衡时 $L^d = L^s$

解得：

$w = 49$

3）劳动力市场买方垄断：

垄断厂商利润最大化：

$$\max: \pi = [100 - Q(L)]Q(L) - w(L) \cdot L$$

$$Foc: \frac{d\pi_1}{dL} = \frac{50}{\sqrt{L}} - 1 - 16 - 2L = 0$$

解得：$\begin{cases} L^* = 4 \\ w^* = 20 \end{cases}$

4）

$$独买 \to 工会三大目标\begin{cases} 就业量最大 \\ 总工资最大化 \\ 经济租金最大化 \end{cases}$$

此时工会为垄断者，类似于垄断厂商，售卖劳动

就业量最大化$\begin{cases} L^d = \frac{2500}{(w+1)^2} \\ L^s = w - 16 \\ L^d = L^s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1^* \doteq 21 \\ k_1^* \doteq 5 \end{cases}$

总工资最大化：

$$\max: \pi_1 = wL = \left(\frac{50}{\sqrt{L}} - 1\right) L (L \le L_1^*)$$

$$\text{Foc}: \frac{d\pi}{dL} = \frac{25}{\sqrt{L}} - 1$$

取角点解：$\begin{cases} w_2^* = w_1^* = 21 \\ L_2^* = L_1^* = 5 \end{cases}$

经济租金最大化：

$$\max: \pi_1 = wL - c(L)$$

$$= \left(\frac{60}{\sqrt{L}} - 1\right) \cdot L - \int_0^L (16 + t) dt$$

$$F_0 c: \frac{d\pi_1}{dL} = \frac{25}{\sqrt{L}} - L - 17 = 0$$

解得：

$$\begin{cases} w_3^* \doteq 36.6 \\ L_3^* \doteq 1.8 \end{cases}$$

2. 团队努力增加一个团队的规模，创建一个联合产品可能会削弱激励，正如这个问题将说明的那样。[11]假设n合作伙伴一起产生$R = e1 + \cdots + en$的收入；这里ei是合作伙伴i的努力，花费$c\ left$（$ei\ right$） $= ei^2/2$来发挥作用。

1）如果每个合作伙伴获得相等的收入份额，则计算平衡努力和盈余（收入减去努力成本）。

2）计算均衡努力和平均盈余，如果只有一个伙伴得到一份。是集中还是分散？

3）返回到（1）部分，并对每个合伙人的盈余取n的导数。每个合伙人的盈余是增加还是减少，单位是n？随着n的增加，限额是多少？

4）一些评论员说，员工持股计划（employee stock ownership plans）是有益的，因为它能激励员工努力工作。你对第（3）部分的回答是关于员工持股计划对现代企业的激励性质的吗？现代企业可能有成千上万的员工？

solution：

1）利润平均分配，单个 i 收益最大化：

$$\max: \quad sw_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i}{n} - \frac{e^2 i}{2}$$

$$Foc: \frac{\partial \delta w_i}{\partial e_i} = \frac{1}{n} - ei = 0$$

解得： $e_i^* = \frac{1}{n} \quad (i = 1,2 \cdots n)$

则 $R = 1; sw = 1 - \frac{1}{2n}$

$$sw_i = \frac{2n-1}{2n^2}$$

2）仅 1 人获得收益，假设为 1 则 $e_j^* = 0 \quad (\forall j \neq i)$

$$\max: \quad sw_i = \sum_{i=1}^{n} e_i - \frac{1}{2} e_i^2$$

$$Foc: \frac{dsw_i}{de_i} = 1 - e_i = 0$$

解得：

$e_i^* = 1,\quad sw_i = \dfrac{1}{2}$

$R = 1,\quad sw = \dfrac{1}{2}$

从社会福利的角度看，利润平均分配优于集中分配。

3）由于$\frac{dsw_i}{dn} = \frac{1-n}{n^3}$

当$n \geq 1$时

δw_i随着 n 的上升而下降

且 $\lim_{n\to\infty} sw_i = 0$

4）由于 $\frac{dsw}{dn} = \frac{1}{2n^2} > 0$

故随着 $n\uparrow$ sw↑

因此员工持股计划对公司整体有利，尽管单个员工的收益会因此而稀释。

一方面存在激励效应，另外一方面存在搭便车的行为，需要设计其他的相应机制来解决这一问题。

3. 将题 5 中的谈判博至重复无穷次。令 $s^* = \frac{1}{1+\delta}$。游戏者 1 一直会提出 $(s^*$, $1-s^*)$ 这一方案, 只有当 $s \geq \delta s^*$ 时才接受 $(s, 1-s)$ 。游戏者 2 一直会提出 $(1-s^*$, s")的方案, 只有当 $(1-s) \geq \delta s^*$ 时才会接受 $(s, 1-s)$ 。 证明：上述两人的策略是一个纳什均衡;并且这个纳什均衡是子博变完美的。

proof：

1）首先证明该策略组合为 NE

给定 1 的策略

当 2 提出 $(1-s^*, s^*) = \left(\frac{\delta}{1+\delta}, \frac{1}{1+\delta}\right)$时，由于 $s = \frac{\delta}{1+\delta} \geq \delta \cdot s^*$，故 1 会接受 2 的题意，不回偏离该策略

给定 2 的策略

当 1 提出 $(s^*, 1-s^*) = \left(\frac{1}{1+\delta}, \frac{\delta}{1+\delta}\right)$时， 由于 $(1-s) = \frac{\delta}{1+\delta} \geq \delta \cdot s^*$ ，故 2 不回偏离该策略

综上该策略组合为 NE

2)其次证明该策略为 SPNE

思路：无限博弈，无法利用逆向归纳法

⇒从定义出发：SPNE 在任意子博弈中均为 NE

⇒该博弈的子博弈分为两类

I:从参与者 1 开始子博弈 $(t = 2k-1)$

II：从参与者 2 开始的子博弈 $(k = 1,2\cdots)$

I 与 II 都有无数个，若存在 SPNE,则要求策略使用与两种情况，即报价相同，且接受拒绝的条件相同

首先看 I

假设 1 的报价为 $s_1 \in [m, M]$，即假设存在多个 SPNE

$$\begin{cases} t = 2k-1 & :1\ \text{报价} \quad (s_1, 1-s_1) \\ t = 2k-2 & : \quad 2\ \text{报价} \quad (\delta_1 s_1, 1-\delta_1 s_1) \\ t = 2k-3 & ; \quad 1\ \text{报价} \quad [1-\delta_2[1-\delta_1 s_1), \delta_2(1-\delta_1 s_1)] \end{cases}$$

⇒ $s_1 = 1 - \delta_2(1-\delta_1 s_1)$ 报价相同

⇒ $s_1^* = \frac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}$存在且唯一

同理分析 II

综上：该策略为 SPNE

均衡的结果：

$t = 1$时，报价

$$\left(\frac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}, \frac{\delta_2(1-\delta_1)}{1-\delta_1\delta_2}\right)$$

2 接受

当 $\delta_1 = \delta_2 = \delta$时

$$s^* = \frac{1}{1+\delta}$$

note：

该定理被称为 Rubinstein 定理：即存在无限期轮流出价模型中，存在唯一的 SPNE,均衡的结果为

$$\left(\frac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}, \frac{\delta_2(1-\delta_1)}{1-\delta_1\delta_2}\right)$$

该博弈 ∃多个 NE:

策略：

1 总报价 (1,0)，拒绝 2 的任何 $s_1 < 1$的报价

2 总报价 (1,0)，拒绝 1 任何 $S_2 > 0$ 的报价。

非 SPNE:

考虑一天非均衡路径

参与人 2 的报价 $(m, 1-m)(\delta - m < 1)$

若 1 拒绝，下一阶段报价 (1,0)，相当于现阶段的 δ，故非最优

δ_1, δ_2对均衡的影响

$$\begin{cases} s_1^* = s_1^*(\delta_1, \delta_2) = \dfrac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2} \\ s_2^* = s_2^*(\delta_1, \delta_2) = \dfrac{\delta_2(1-\delta_1)}{1-\delta_1\delta_2} \end{cases}$$

耐心优势：

$\frac{\partial s_1^*}{\partial \delta_1} > 0$ 且 $\frac{\partial S_2^*}{\partial \delta_2} > 0$

先发优势：

$$\begin{cases} \delta_2 = 0 \quad : (s_1^*, s_2^*) = (1,0) \\ \delta_1 = 0 \quad : \quad (s_1^*, s_2^*) = (1-\delta_2, \delta_2) \end{cases}$$

即使 1 毫无耐心，由于先出价， s_1^*不会为 0，除非 $\delta_2 = 1$，即 2 非常有耐心。