8.14

None Leon

2021/2/4

1.效用函数为$u(x_1,x_2)=\min\{3x_1+x_2,x_1+3x_2\}$，其中$p_1>0,p_2>0$.

1)画出代表$u(x_1,x_2)=20$的无差异曲线

2)求出收入拓展线以及x_1,x_2 的恩格尔曲线

3)求出x_1,x_2的马歇尔需求函数

4)当 $\frac{p_1}{p_2}$满足什么条件是，必有 $x_1^*=0$

5)$\frac{p_1}{p_2}$ 满足什么条件是，必有 $x_1^*=0$

6)若 $x_1^*>0,x_2^*>0$，则最优点处 $\frac{x_1^*}{x_2^x}$为何值？均衡点是否唯一。

solution: 1)由于

$$u(x_1,x_2)=\begin{cases}3x_1+x_2 & x_1<x_2\\ x_1+3x_2 & x_1>x_2\end{cases}$$

则 $u(x_1,x_2)=20$的无差异曲线如图

2)收入拓展线

当$0<\frac{p_1}{p_2}<\frac{1}{3}$时， $x_1=\frac{m}{p_1};x_2=0$

$$\begin{cases}\text{收入拓展线：} x_2=0\\ x_1\text{的恩格尔曲线：} m=p_1\cdot x_1\\ x_2\text{的恩格尔曲线:} x_2=0\end{cases}$$

当 $\frac{p_1}{p_2}=\frac{1}{3}$时

$$x_1=\left[\frac{m}{p_1+p_2},\frac{m}{p_1}\right];x_2=\left[0,\frac{m}{p_1+p_2}\right]$$

$$\begin{cases}\text{收入拓展线：} x_2\le x_1\text{的区域}\\ x_1\text{的恩格尔曲线：} m=p_1x_1\text{与}m=(p_1+p_2)x_1\text{之间的区域}\\ x_2\text{的恩格尔曲线:} x_2=0\ \text{与}m=(p_1+p_2)x_2\text{之间的区域}\end{cases}$$

当

$\frac{1}{3}<\frac{p_1}{p_2}<3$时， $x_1=x_2=\frac{m}{p_1+p_2}$

$$\begin{cases} 收入拓展线：x_1=x_2 \\ x_1的恩格尔曲线：m=(p_1+p_2)x_1 \\ x_2的恩格尔曲线: m=(p_1+p_2)x_2 \end{cases}$$

当 $\frac{p_1}{p_2}=3$时

$$x_1=\left[0,\frac{m}{P_1+P_2}\right];x_2=\left[\frac{m}{p_1+P_2},\frac{m}{p_2}\right]$$

$$\begin{cases} 收入拓展线：x_1\le x_2区域 \\ x_1的恩格尔曲线：x_1=0\ 与m=(p_1+p_2)x_1之间的区域 \\ x_2的恩格尔曲线: m=(p_1+p_2)x_2与m=p_2x_2之间的区域 \end{cases}$$

当 $\frac{p_1}{p_2}>3$时

$$\begin{cases} 收入拓展线：x_1=0 \\ x_1的恩格尔曲线：x_1=0 \\ x_2的恩格尔曲线: m=p_2x_2 \end{cases}$$

3)

$$\begin{cases} 当\ 0<\dfrac{p_1}{p_2}<\dfrac{1}{3}\ 时，x_1=\dfrac{m}{p_1};x_2=0 \\ 当\dfrac{p_1}{p_2}=\dfrac{1}{3}\ 时，x_1=\left[\dfrac{m}{p_1+p_2},\dfrac{m}{p_1}\right];x_2=\left[0,\dfrac{m}{p_1+p_2}\right] \\ 当\dfrac{1}{3}<\dfrac{p_1}{p_2}<3\ 时，x_1=x_2=\dfrac{m}{p_1+p_2} \\ 当\dfrac{p_1}{p_2}=3\ 时，x_1=\left[0,\dfrac{m}{P_1+P_2}\right];x_2=\left[\dfrac{m}{p_1+P_2},\dfrac{m}{p_2}\right] \\ 当\dfrac{p_1}{p_2}>3\ 时，x_1=0;\quad x_2=\dfrac{m}{p_2} \end{cases}$$

此时

$$x_1=\begin{cases} \dfrac{m}{p_1}，\ 0<p_1/p_2<\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{m}{p_1+p_2}\dfrac{m}{p_1}，\ p_1/p_2=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{m}{p_1+p_2}，\ \dfrac{1}{3}<p_1/p_2<3 \\ [0,\dfrac{m}{p_1+p_2}，\ p_1/p_2=3 \\ 0，\ p_1/p_2>3 \end{cases}$$

$$x_2=\begin{cases}\dfrac{m}{p_2}，0 & < p_2/p_1 <\frac{1}{3}\\ & \left[\dfrac{m}{p_1+p_2},\dfrac{m}{p_2}\right]，p_2/p_1=\dfrac{1}{3}\\ \dfrac{m}{p_1+r_2}，\dfrac{1}{3}<p_2/p_1 & <3\\ & \left[0,\dfrac{m}{p+p_2}\right]，p_2/p_1=3\\ & 0，p_2/p_1>3\end{cases}$$

4)由马歇尔需求函数知：

$$\begin{cases}当\dfrac{p_1}{p_2}>3\ 时，x_1^*=0\\ 当\dfrac{p_1}{p_2}=3\ 时，x_1^*可能为0\end{cases}$$

5)由马歇尔需求知

$$\begin{cases}当0<\dfrac{P_1}{p_2}<\dfrac{1}{3}时，x_2^*=0\\ 当\dfrac{p_1}{p_2}=\dfrac{1}{3}时，x_2^*有可能为0\end{cases}$$

6)

$$\begin{cases}当\dfrac{1}{3}<\dfrac{p_1}{p_2}<3\ 时，x_i^*>0.\quad x_2^*>0.\quad \dfrac{x_1^*}{x_2^*}=1，\exists x_1^*>0.\quad x_2^*>0.\quad \dfrac{\chi_1^*}{x_2^*}\geq 1，均衡点唯一\\ 当\dfrac{p_1}{p_2}=\dfrac{1}{3}时，均衡点不唯一\\ 当\dfrac{p_1}{p_2}=3\ 时，\exists x_1^*>0.\quad x_2^*>0\quad 0<\dfrac{x_1^*}{x_2^*}\leq 1，均衡点不唯一\end{cases}$$

2. 假如一个经济中有 100 个消费者, 大家的偏好是完全一样的。他们中消费两种商品, x 与y, 并且他们的偏好可以用效用函数 $U(x,y)=x+2.94\ln y$ 来表示。商品 x 由国际市场提供, 且价格为 1 。商品 y 只由该经济自己生产。该红济中有 48 个技术完全一样的企业可以生产 y。它们的生 产函数都是 $y=\sqrt{x_1x_2}$。生产要素 x_1 与 x_2 的价格分别是 4 元与 1 元，短期内 x_2 被固定在 1 的水 平上。 请问:

1)在短期，市场的均衡价格是多少？ 每个厂商生产多少? 每个厂商的利润是多少?

2)在长期，市场的均衡价格是多少? 市场的总产量是多少? 有多少厂商进行生产?

solution：

消费者效用最大化：

max $\quad U(x,y)=x+2.94\ln y \quad st: \quad x+p\cdot y=m$

拉格朗日函数：$\mathcal{L}=x+2.94\ln y+\lambda[m-x-py]$

y 的需求为：$y^d=\begin{cases}\frac{2.94}{P} & (m\geq 2.94)\\ \frac{m}{P} & (0<m<2.94)\end{cases}$

Y 的总需求为 $Y^d=\begin{cases}\frac{294}{p} & (m>2.94)\\ \frac{100m}{p} & (0<m<2.94)\end{cases}$

1)短期 $\bar{x}_2=1$，生产函数为 $y=\sqrt{x_1}$，故$x_1=$的条件要素需求为 $x_1=y^2$，此时成本函数为：$c(y)=4y^2+1$

单个企业的供给为$y^s=\frac{p}{8} \quad (p\geq 0)$

行业的供给为$y^s=6p(p\geq 0)$

当$m\geq 2.94$时，

均衡时有：$y^d=y^s$

解得：

$p^*=7 \quad Y^*=42$

则单个企业的产量和利润分别为：$y^*=\frac{7}{8}, \quad \pi^*=\frac{33}{16}$

当 $0<m<2.94$时

均衡时 $y^d=y^s$

解得：$p^*=\frac{5}{3}\sqrt{6m} \quad y^*=10\sqrt{6m}$

则单个企业的产量和利润分别为$\begin{cases}y^*=\frac{5}{24}\sqrt{6m}\\ \pi^*=\frac{25}{24}m-1\end{cases}$

note:此时单个企业的利润可能小于 0，但是大于-1，短期内生产仍会继续。

2)长期成本最小化 $\begin{array}{ll}\text{min:} & 4x_1+x_2\\ \text{st:} & y=\sqrt{x_1x_2}\end{array}$

拉格朗日函数：

$\mathcal{L}=4x_1+x_2+\lambda\left(y-\sqrt{x_1x_2}\right)$

解得：$c(y)=4y$

当 $m \geq 2.94$时，长期均衡时有： $p^{**} = MC = 4$，此时产量为： $y^{**} = 73.5$ 长期均衡时企业利润为 0，企业的数量 $N \to +\infty$ ，单个企业产量为 $y^{**} \to 0$

note：从短期到长期的过程中，由于单个企业利润 $\pi > 0$。故不断由企业进入市场，以获去正的利润，直到 $\pi = 0$ ，由于 mc 是恒定的，故均衡时 $y \to 0, N \to +\infty$

当$0 < M < 2.49$时，长期均衡有 $p^{**} = MC = 4$，此时产量：$y^{**} = 25m$，企业数量为 $N \to +\infty$ 单个企业产量为 $y^{**} \to 0$。