8.19

None Leon

2021/2/4

1.在一个红济体中，产品 A 与产品 B 必须联合生产。所有企业使用完全相同的生产技术，每个 企业的总成本函数为: $\mathrm{c}(\mathrm{q_A}, \mathrm{q_B}) = 1 + \mathrm{q_A^2} + \mathrm{q_B^2}$, 其中， $\mathrm{q_A}$ 和 $\mathrm{q_B}$ 分别代表两种产品的产出量。需求方面，消费 者们对这两种产品的总需求函数分别为 $\mathrm{Q_A(P_A)} = 30 - \mathrm{P_A}$ 和 $\mathrm{Q_B(P_B)} = 40 - \mathrm{P_B}$。其中， $\mathrm{P_A}$ 和 $\mathrm{P_B}$ 分别代表两种 产品的市场价格。所有企业均为市场价格的“接受者”，且可以自由进出市场。请找出这两个产品的长期均衡价 格。

solution：

单个企业利润最大化

$\max: \pi = P_A \cdot q_A + P_B \cdot q_B - q_A^2 - q_B^2 - 1$

st: $\quad \pi \geq 0$

FOC: $\begin{cases} \dfrac{\partial \pi}{\partial q_A} = P_A - 2q_A = 0 \\ \dfrac{\partial \pi}{\partial q_B} = P_B - 2q_B = 0 \end{cases}$

即 $\begin{cases} q_A & = \frac{1}{2} P_A \\ q_B & = \frac{1}{2} P_B \end{cases}$

且 $\pi = q_A^2 + q_B^2 - 1 \geq 0$

长期均衡时 $\pi^* = 0$

设单个企业的产量/数量为为q_A^*, q_B^*，n^*

$$\begin{cases} (q_A^*)^2 + (q_B^*)^2 = 1 \\ (Q_A^*)^s = \dfrac{n^*}{2} p_A = (Q_A^*)^d = 30 - p_A \\ (Q_B^*)^s = \dfrac{n^*}{2} p_B = (2\beta)^\alpha = 40 - p_B \end{cases}$$

此处为均衡点的加总，而不是供给曲线的加总

解得 $\begin{cases} & n^* = 48 \\ p_A^* = 1.2 & Q_A^* = 28.8 \\ p_B^* = 1.6 & Q_B^* = 38.4 \end{cases}$

至此，本题求解完成。这应该是出题人的本意，若考察队市场均衡与市场结构的立即。但本题中的q_A^* 和$q_B^* = 1$ 都小于 1，非整数。这与现实不符，若加上整数限制，君合的结果又会如何？

若q_A^*，q_B^* 存在限制

产品 A 市场规模小于 B,从 A 开始分析：

无约束时，$0 < q_A^* < 1$,存在整数约束时， $q_A^{**} = 1$ 此时 $p_A = MC = 2q_A$ 知

$P_A = 2, \quad Q_A = 28, \quad n^{**} = 28$

当企业数量 $n^{**} = 28$时，产品 B 的市场总供给为 $Q_{13}^S = n^{**} q_B^S = 14P_B$

联立得： $q_B = \frac{4}{3}$

由于存在整数约束，此时 28 甲企业最小的产量为 $q_B^{**} = 1$，此时 B 的超额供给为 10.

故还有 10 甲企业企业进入市场，生产

$q_B' = 1, \quad q_A' = 0$

至此，A，B 市场均达到饱和，在进入无利润。

总上：存在整数约束，长期均衡时有 38 甲企业。

先进入的 28 家企业， $q_A' = q_B' = 1, \quad \pi' = 1$

后进入的 10 家企业， $q_A^2 = 0, \quad q_B^2 = 1, \pi^2 = 0$

市场价格： $P_A = P_B = 2$

note：本题的取整约束形成的市场结构类似于下面的情形。联合生产+取整约束+市场规模不同形成长期均衡时企业利润的分化，与市场形成的顺序有关。

2.假设市场上有A_1和A_2两个生产者，A_1先决定他的产量Q_1,A_2再决定他的产量 Q_2。。假设整个市场的需求曲线为$P = a - bQ$, 其中 $Q = Q_1 + Q_2$，并且对于这两个人来说，生产的单位成本均为 c。并且两个人的目标均为利 润最大化。试求:

1) Stakelberg 均衡时的每个生产者的产量、利润以及市场价格。

2) 假设现在市场中又出现了其他生产者 $A_3, A_4, \cdots A_N$, 总共 N 个竞争者，他们生产的单位成本均为 c。现在 A_1 仍先决定他的产量 Q_1, 其他 $\mathrm{N}-1$ 个生产者在观察到 Q_1 后，同时选择自己的产量, 并且每个人的目标仍为利润最大化。试问均衡时市场价格以及每个生产者的产量、利润都为多少？随着 N 趋向于无穷大, A_1 的“先发优势”是增强还是减弱了？

3) 假设有越来越多的生产者发现了“先发”的好处。现在有 M（M<N）个生 产者同时决定产量，而其他 N-M 个人在观测到他们的产量后再决定产量。 这时市场上的价格以及每个人的产量、利润均为多少?

solution：

1)A_2利润最大化：

$\max: \pi_2 = (a - bQ) \cdot Q_2 - c \cdot Q_2$

FOC:$\frac{\partial \pi_2}{\partial Q_2} = a - c - bQ_1 - 2bQ_2 = 0$

其反应函数为：

$$Q_2 = \frac{a - c - bQ_1}{2b}$$

A_1利润最大化：

$\max: \pi_1 = [a - bQ_1 - bQ_2(Q_1)] \cdot Q_1 - Q_1$

FOC:$\frac{\partial \pi_1}{\partial Q_1} = \frac{1}{2}(a - c - 2bQ_1) = 0$

解得：$\begin{cases} p^s = \frac{a+3c}{4} \\ a_1^s = \frac{a-c}{2b} \\ Q_2^s = \frac{a-c}{4b} \end{cases}$

$\pi_1^s = \frac{(a-c)^2}{8b} \pi_2^s = \frac{(a-c)^2}{16b}$

2)A_i利润最大化 ($i = 2 \cdots N$)：

$\max: \quad \pi_i = (a - bQ) \cdot Q_i - cQ_i$

Foc: $\frac{\partial \pi i}{\partial Qi} = a - bQ - bQ_i - c = 0$

由对城西知A_i的反应函数为：

$$Q_i = \frac{a - c - bQ_1}{Nb}$$

A_1利润最大化：

$\max: \pi_1 = [a - bQ_1 - b(Q_2 + \cdots + Q_N)]Q_1 - cQ_1$

$$Foc: \quad \frac{\partial \pi_1}{\partial Q_1} = \frac{1}{N}(a - c - 2bQ_i) = 0$$

解得：$Q_1^s=\frac{a-c}{2b}\quad Q_i^s=\frac{a-c}{2Nb}$

$\pi_1^S=\frac{(a-c)^2}{4Nb}\quad \pi_i^s=\frac{(a-c)^2}{4N^2b}\, p^s=\frac{a+(2n-1)c}{2N}\quad Q^s=\frac{2N-1}{N}\frac{a-c}{2b}$

当 $N\to+\infty$时，A_1的先发优势减弱，原因在于 N 增肌，跟随者的竞争更加激励，不断压低 p^s到 c，以至于即使 Q_1^s不变，π_1^s 也会随着其价格的下降而下降，且 $N\to+\infty$ 时A_1与其他平方市场。

在古诺模型中

$N\to+\infty$ 时，$p^c\to c$ N 个企业评分市场份额，即 $q_i^c\to\frac{Q^c}{N}$

综上：$N\to+\infty$时，斯塔克伯格模型趋向于完全竞争，但市场份额的划分是不同的。

3)N-M 个跟随者利润最大化：max:$\pi_i=(a-bQ)Q_i-cQ_i\quad (i=m+1\cdots N)$

$Foc:\frac{\partial\pi_i}{\partial Q_i}=a-bQ-bQ_i-c=0$

由对称性可知，追随者的反应函数为：$Q_i=\frac{a-c-b\overline{Q}}{(N-M+1)b}$

其中 $\overline{Q}$为 M 个领导者的总产量

M 个领导者进行完全竞争，利润最大化：

$$\max\pi_j=\left[a-b\bar{Q}-(N-M)bQ_i(\overline{Q})\right]Q_j-cQ_j$$

$(j=1,2\cdots\cdots M)$

FOC:$\frac{\partial\pi j}{\partial Qj}=\frac{1}{N-M+1}\quad\left(a-c-b\overline{Q}-bQ_j\right)=0$

由对称性知，单个领导者的产量为：$Q_j=\frac{a-c}{(M+1)b}\pi_j=\frac{(a-c)^2}{(m+1)(MN-M^2+N+1)b}$

其单个追随者的产量为：$Q_i=\frac{a-c}{(N-M+1)(M+1)b}$，$\pi_i=\frac{\pi_j}{N-M+1}$

$$产量博弈\begin{cases}同时博弈：古诺模型(完全竞争市场)\\ 序贯博弈\begin{cases}领导者+跟随者：进行斯塔克伯格博弈\\ 领导者+跟随者\begin{cases}各阶段：完全竞争\\ 整体：斯塔格伯格模型\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$