8.4

None Leon

2021/2/4

1.CT 公司有大量的年轻员工有 3 岁以下的幼儿，一个代表性员工小梁每周收入为 2000 元，她需要在购买托幼服务时间 d 和消费商品 c 中进行选择，以最大化自己的效用。其效用函数的形式为$u_k(c,d)=c^3d$.市面上每小时托幼服务的价格为$p_d=24$元，每单位消费品的价格为$p_c=2$元。

CT 公司考虑一箱措施帮助有孩子的员工，以达到增加员工福利和延长员工工作时间的目的。公司需要在以下三项措施之间进行选择：

第一项措施：给有三岁以下孩子的员工每周$g=400$元的额外补贴。

第二项措施：公司给员工买的每小时托幼服务时间支付 4 元补贴。

第三项措施：公司在办公楼开办托儿所。开办成本为每小时每个孩子 23 元，公司向每个孩子征收托幼费每小时 18 元。如果选择公司托儿所，小梁每周能节约 4 小时接送孩子的时间。

假设增加的托幼服务和节约的接送时间都用于加班(托幼服务四舍五入到整数)，同时假设小梁跟采用其他措施相比较多出来的每小时加班时间，大致等于自己的该选择的最优消费品数列增加 10 单位，同时给公司增加 10 元的收入。

亲根据上述情况回答以下问题：

1)这三项措施下，小梁的最优消费水平和购买的托幼服务时间分别是多少？

2)从小梁的角度，这三项措施哪种更好？为什么？

3)从公司运营成本的角度，这三种措施哪种更好？为什么？

假如由于突发事件的冲击，公司必须要对托幼机构加强监管，每小时托幼成本提高 1 元，同时为了避免员工抱怨，托幼费用不能提高。

4)此种情况下，公司的选择会有所变化吗？为什么？

5）这个事件冲击的结果，会给员工带来多大的影响呢？(可直接列出公式，不用计算出结果)

solution

1)员工的最优选择

员工效用最大化

$$\max: u(c,d) = c^3 d$$

$$st: p_c \cdot c + p_d \cdot d = m$$

拉格朗日函数： $L = c^3 d + \lambda[m - p_c \cdot c - p_d \cdot d]$

$$\text{Focs:} \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial C} & = 3c^2 d - \lambda P_c = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial d} & = c^3 - \lambda P_d = 0 \end{cases}$$

解得： $\begin{cases} c = \frac{3m}{4p_c} \\ d = \frac{m}{4p_d} \end{cases}$

当$(P_c, P_d, m) = (2,24,2000)$时 $c = 750$, $\quad d = \frac{125}{6} \doteq 21$

2)补贴下的最优选择

a.每周补贴 400 元

由于 $(p_c . p_d, m') = (2,24,2400)$

$c = 900$, $\quad d = 25$ 托幼时间增加 4 小时，增 c 增加 40，公司增加 40 元收入，则 $c = 940$, $\quad d = 25$

$T_1 = 360$

b.对托幼服务补贴 4 元 $(p_c, p_d', m) = (2,20,2000)$ 则 $c = 750, d = 25$， 托幼时间增加 4 小时，增 c 增加 40，公司增加 40 元收入，则 $c = 790$, $\quad d = 25$

公司成本： $T_2 = 60$

c.开办托儿所，成本为 23 元/h,收费 18 元/h 由于 $(p_c, p_d'', m) = (2,18,2000)$ 则 $c = 750, d = 28$ 托幼时间增加 7 小时，增 c 增加 110，公司增加 110 元收入，则 $c = 860$, $\quad d = 28$

公司成本： $T_3 = 30$

d.开办托儿所，成本 24 元/h,收费 18 元/h $c = 860 \quad d = 28$

公司成本 $T_4 = 58$

3)公司的最优选择以及对员工的影响

a.无论是托儿所的成本是 23 还是 24，公司都开办托儿所且收费不变，则对员工没有影响

b.对员工而言，三种方式的效用分别为：

$U_1 = 940^3 \cdot 25$

$U_2 = 190^3 \cdot 25$

$U_3 = 860^3 \cdot 28$

则 $U_1 > U_3 > U_2$，更加青睐现金补贴

note：现金补贴最大程度拓展了预算约束。托儿所与价格补贴类似，不过节约的接送时间进一步增阿基了效用，当托儿所成本为 24 时，相当于公司给于 6 元补贴，所以仍然会选择公司开办的托儿所，而不是 4 元的价格补贴。

2.生产函数为 $Q = aA^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}C^{\frac{1}{4}}, P_A = 1, P_B = 9. P_C = 8$

1)求长期总成本函数，平均成本函数，边际成本函数

2)若短期 C 为固定要素，求短期总成本函数、平均成本函数、边际成本函数和平均可变成本函数。

3)证明：

LTC 是 STC 的包络线

LAC 是 SAC 的包络线

solution：

1)长期成本分析：

成本最小化：

min: $LTC = P_A \cdot A + P_B \cdot B + P_C \cdot C$
st: $Q = aA^{\alpha}B^{\beta}C^{\gamma}$

拉格朗日函数：$L = P_A \cdot A + P_B \cdot B + P_c \cdot C + \lambda\left[Q - aA^{\alpha}B^{\beta}C^{\gamma}\right]$

Focs:

$$\frac{\partial L}{\partial A} = P_A - \lambda a\alpha A^{\alpha-1}B^{\beta}C^{\gamma} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial B} = P_B - \lambda a\beta A^{\alpha}B^{\beta-1}C^{\gamma} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial C} = P_c - \lambda a\gamma A^{\alpha}B^{\beta}C^{\gamma-1} = 0$$

解得：$LTC = \frac{5}{2}\left(\frac{6Q}{a}\right)^{\frac{4}{5}} LAC = \frac{LTC}{Q} = \frac{5}{2}\left(\frac{6}{a}\right)^{\frac{4}{5}} \cdot Q^{-\frac{1}{5}} LMC = \frac{dLTC}{dQ} = 2\left(\frac{6}{a}\right)^{\frac{4}{5}} \alpha^{-\frac{1}{5}}$

2)短期成本最小化：

$$\min: \quad STC = P_A \cdot A + P_B \cdot B + P_c \cdot \bar{C}$$
$$\text{st:} \quad Q = aA^\alpha B^\beta \bar{C}^\gamma$$

拉格朗日函数：$\mathcal{L} = P_A \cdot A + P_B \cdot B + P_c \cdot \bar{C} + \lambda\left[Q - aA^\alpha B^\beta \bar{C}^\gamma\right]$

$$\text{Focs:} \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial A} & = P_A - \lambda a\alpha A^{\alpha-1}\beta^\beta \bar{C}^\gamma = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial B} & = \rho_B - \lambda a\beta A^\alpha B^{\beta-1}\bar{c}^\gamma = 0 \end{cases}$$

解得：$STC = P_c \cdot \bar{c} + (\alpha+\beta)\left[\alpha^{-\alpha}\beta^{-\beta}P_A^\alpha P_B^\beta \frac{\alpha}{a\bar{c}^\gamma}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$

可以套用第一问的公式

$Q = a \cdot \bar{c}^\gamma A^\alpha \beta^\beta$

$= a' A^\alpha B^\beta$

$$\Rightarrow \quad STC = (\alpha+\beta)\left[\frac{Q}{a'}\alpha^{-\alpha}\beta^{-\beta}P_A^\alpha P_B^\beta\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} + FC$$

其中 $FC = P_c \cdot \bar{C}$

带入得: $STC = \frac{6}{a}\bar{c}^{-\frac{1}{4}}Q + 8\bar{c}$

$$SAC = \frac{6}{a}\bar{c}^{-\frac{1}{4}} + \frac{8\bar{c}}{Q}$$

$$\text{SMC} = \frac{6}{a}\bar{c}^{-\frac{1}{4}}$$

$$SAVC = \frac{6}{a}\bar{c}^{-\frac{1}{4}}$$

3) a.LTC 是 STC 的包络线

令 $\frac{dSTC}{d\bar{C}} = 8 - \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{a} \cdot \bar{c}^{-\frac{5}{4}} = 0$

求出 $\bar{c}^* = \left(\frac{3Q}{16a}\right)^{\frac{4}{5}}$ 带入 STC 得：$\text{STC}(\bar{c}^*) = \frac{5}{2}\left(\frac{6\alpha}{a}\right)^{\frac{4}{5}} = LTC$

b.LAC 是 SAC 的包络线

令 $\frac{dSAC}{d\bar{C}} = \frac{8}{\alpha} - \frac{3}{La}\bar{C}^{-\frac{5}{4}} = 0$ 得 $\bar{c}^{**} = \left(\frac{3\alpha}{16a}\right)^{\frac{4}{5}}$ 带入得：

$$\text{SAC}(\bar{c}^{**}) = \frac{5}{2}\left(\frac{6}{a}\right)^{\frac{4}{5}}Q^{-\frac{1}{5}} = LAC$$

思考：为何$\bar{c}^{**}=\bar{c}^{*}$？？