8.11

None Leon

2021/2/4

1.消费者的效用为$U(q_1,q_2)=\ln q_1+q_2$，$P_2=1$，对商品 1 征收从价税，$p_1'=p_1(1+t)$，收入为 m。

1)求q_1,q_2的马歇尔需求函数以及间接效用函数。由于收入很低($m\leq 1$)，居民抱怨政府税收，政府因此出台两项措施：

2)将税率变为$t-a(0<a<t)$，求间接效用函数

3)若不改变税率，而是将所征税收返还给居民，求此时的间接效用函数。

4)何种情况下会选择第一种政策？

solution:

1)效用最大化问题：
$$\begin{aligned} \max: &\quad U=\ln q_1+q_2 \\ st: &\quad p_1(1+t)q_1+q_2=m \end{aligned}$$

构建拉格朗日函数：

$$\mathcal{L}=\ln q_1+q_2+\lambda[m-p_1(1+t)q_1-q_2]$$

FOCs：$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_1}=\frac{1}{q_1}-\lambda p_1(1+t)=0$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_2}=1-\lambda=0$$

解得：$\begin{cases} q_1=\frac{1}{P_1(1+t)} \\ q_2=m-1 \end{cases}$

若 $m>1$则：

$$\begin{cases} q_1=\dfrac{1}{p_1(1+t)} \\ q_2=m-1 \end{cases}$$

$$V=m-1-\ln p_1(1+t)$$

$$0<m\leq 1$$

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{m}{p_1(1+t)} \\ q_2 = 0 \end{cases}$$

$$V = \ln \frac{m}{p_1(1+t)}$$

2)若 $m \le 1$，且税率降为 $t - a(0 < a < t)$

此时间接效用函数为： $V_1 = \ln \frac{m}{p_1(1+t-a)}$

3)若 $m \le 1$，且税率保持不变

若$m + T^* = m + tP_1 q_1^* > 1$，此时 $q_1^* = \frac{1}{p_1(1+t)}$， $q_2^* = m + T^* - 1$

得 $T^* = \frac{t}{1+t}$ 即 $\frac{1}{1+t} < m < 1$=时

$$V_2 = m - \frac{1}{1+t} - \ln P_1(1+t)$$

若 $m + T^* = m + tp_1 q_i^* < 1$，此时 $q_1^* = \frac{m+T^*}{p_1(1+t)}$， $q_2^* = 0$ 得：

$T^* = mt$ 即 $0 < m < \frac{1}{1+t}$ 此时 $V_3 = \ln \frac{m+T*}{P_1(1+t)} = \ln \frac{m}{P_1}$

4)当 $0 < m < \frac{1}{1+t}$时：

$$V_1 = \ln \frac{m}{p_1(1+t-a)} < V_3 = \ln \frac{m}{P_1}$$

居民选择政策 2.

当 $\frac{1}{1+t} < m < 1$时：

若$V_1 - V_2 = \frac{1}{1+t} - m + \ln \frac{m(1+t)}{1+t-a} \ge 0$

则居民选择证词 1，此时 $1 + t - m(1+t)e^{m-\frac{1}{1+t}} < a < t$

综上，居民选择政策 1 的条件为： $1 + t - m(1+t)e^{m-\frac{1}{1+t}} < a < t$

2.(15′) 成本函数为 $C(Q) = F + \frac{1}{2}aQ^2$, 其中 A, F 为正常数。

1) 求规模报酬区间。

2)供给函数。

3)需求函数为 $P = A - bQ$ ，其中 A, b 均为正常数。均衡时只有一个企业，且是价格接受者，求 均衡唯一时的条件，及均衡产量和均衡价格。

solution:

1)成本函数为： $c(Q) = F + \frac{1}{2}aQ^2$

平均成本为： $AC(Q) = \frac{1}{2}aQ + \frac{F}{Q}$

令 $\frac{dAC(Q)}{dQ} = \frac{1}{2}a - \frac{F}{Q^2} = 0$

求得：$a = \sqrt{\frac{F}{Q^2}}$

故当 $0 < Q < \sqrt{\frac{2F}{\alpha}}$时，规模报酬递增

当$Q = \sqrt{\frac{2F}{a}}$时，规模报酬不变

当$Q > \sqrt{\frac{2F}{a}}$时，规模报酬递减

2)短期：

厂商在生产时追求利润最大化： $P = MC(Q) = aQ$

同时由于存在固定成本 F:可以选择退出或不进入

$\pi \geq -F, 即 \quad P \geq AVC(Q)$

综上：短期供给函数为： $Q^s = \frac{P}{a}$

长期：

厂商在生产时追求利润最大化： $P = MC(Q) = aQ$

同时长期无固定成本： $\pi \geq 0$ 即 $P \geq AC(Q)$

综上：长期供给函数为： $Q^s = \frac{p}{a} \quad (p \geq \sqrt{2aF})$

3)若均衡时只有一个企业，且为价格接受者。

此时： $Q^s = Q^d$

得： $p^* = \frac{a \cdot A}{a+b} \quad Q^* = \frac{A}{a+b}$

均衡唯一性的条件为： 只有一个企业：$\pi^* = \frac{aA^2}{2(a+b)^2} - F \geq 0$

存在两个企业时： $\pi^{**} < 0$

若市场中存在两个企业：$\begin{cases} Q^S & = \frac{2P}{a} \quad (P \geq \sqrt{2aF}) \\ p & = A - bQ^d \end{cases}$

解得：$p^{**} = \frac{a \cdot A}{a+2b} Q^{**} = \frac{2A}{a+2b}$

单个企业的利润为：$\pi^{**} = \frac{aA^2}{2(a+2b)^2} - F < 0$

故均衡唯一的条件为：$\frac{aA^2}{2(a+2b)^2} < F \leq \frac{aA^2}{2(a+b)^2}$

note：此时形成的市场结构成为自然垄断。该种自然垄断形成的原因在于规模报酬不变得点 $\sqrt{\frac{F}{2a}}$过大，使得一家独大。

3.考虑一个由两家企业组成的寡头垄断行业，市场需求为 $p = 10 - Q$ 给出。这 两家企业的成本函数分别为 $C_1 = 4 + 2Q_1$， $C_2 = 3 + 3Q_2$。

1) 若两家企业合谋追求利润最大化, 总的产量水平是多少？市场价格是多少? 各自生产的量以及利润是多少?

2) 若两家企业追求各自利润最大化，利用古诺模型，各自生产多少？各自利润是多少？市场价格是多少？并写出各自的反应函数。

3) 若合谋是违法的，但收购不违法。企业 1 会出多少钱收购企业 2？

solution:

1)合谋利润最大化：

max: $\pi = (10 - Q_1 - Q_2)(Q_1 + Q_2) - 2Q_1 - 3Q_2 - 7$ st: $Q_i \geq 0 \quad (i = 1,2)$

拉格朗日函数：$\exists \quad \mu_i \geq 0 \quad (i = 1,2)$

$\mathcal{L} = (10 - Q_1 - Q_2)(Q_1, Q_2) - 2Q_1 - 3Q_2 - 7 + u_1 Q_1 + \mu_2 Q_2$

FOCs: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_1} = 8 - 2Q_1 - 2Q_2 + \mu_1 = 0$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_2} = \quad 7 - 2Q_1 - 2Q_2 + u_2 = 0$

K-T 条件：$ { u_i } Q_i=0 (i=1,2)$

若 $Q_1 > 0, Q_2 > 0$，即 $u_1 = u_2 = 0$

此时一阶条件矛盾，不符合

当$Q_1 = 0$时，即 $u_1 \geq 0$

此时 $u_2 = \mu_1 + 1 > 0 \Rightarrow Q_2 = 0$不符合

当 $Q_2=0$时，即 $\mu_2\geq 0$

此时，$Q_1=4,\quad p=6.\quad u_2=1,\quad u_1=0$符合

综上：合谋是仅企业 1 生产，此时 $p=6.Q=4$

$\pi_1=12,\quad \pi_2=-3$

2)古诺模型：

企业 1、2 的利润最大化决策为： $\max{:}\,\pi_1=(10-Q_1-Q_2)\cdot Q_1-2Q_1-4$
$\max{:}\,\pi_2=(10-Q_1-Q_2)Q_2-3Q_2-3$

Focs: $\frac{\partial\pi_1}{\partial Q_1}=8-2Q_1-Q_2=0\,\frac{\partial\pi_2}{\partial Q_2}=7-2Q_2-Q_1=0$

反应函数为：

$R_1(Q_2)=\frac{8-Q_2}{2}\,R_2(Q_1)=\frac{7-Q_1}{2}$

解得：$\begin{cases}Q_1^c=3\\Q_2^c=2\end{cases}$

$\begin{cases}\pi_1^c=5\\\pi_2^c=1\end{cases}$

$p=5$

3)若企业收购企业 2，企业 1 的垄断利润为 $\pi_1^m=12$

企业 2 同意被收购的前提是收购后的净收益至少不比古诺模型的差。

古诺模型： $V_2=\pi_2^c=1$

被收购 $V_2'=T-3$

则企业 1 被收购价格为 $T=4$

收购后企业 1 的净收益为 $V_1=\pi_1^m-T=8>\pi_1^c$

因此交易能够进行。

note：为何不是企业 2 收购企业 1？

企业 2 的垄断利润为 $\pi_2^m=6.25$

古诺竞争是企业 1 的收益为 $V_1=\pi_1^c=5$

收购后企业的收益为 $v_1'=T'-4$

则 $T'=9$

此时企业 2 的净收益为 $V_2'' = \pi_2^m - T' = -2.75 < \pi_2^c$

此时交易不会进行。