9.29

None Leon

2021/1/20

1. （20 分）某一公共产品，有许多完全竞争的企业生产。其边际成本均为 1 。有两个消费者，其购买 x 单 位而得到的好处 (用货币衡量) 分别是 $\sqrt{x}$ 和 $2\sqrt{x}$ 。两消费者分别购买了 x_1 和 x_2 。由于公共产品的特殊性，每 个消费者的使用量均为 x_1+x_2。这个产品的支出占整个消费支出的很少部分，所以产生的“收入效应”可以忽略 不计。

（1）每个消费者在市场机制下的购买量。

（2）市场均衡下的资源配置是否为帕累托有效。说明理由。

solution：

1）市场机制

1 的效用最大化： $\max: U_1=\sqrt{x}-x_1$

$st: \quad x_1 \geq 0$

2 的效用最大化

$\max: U_2=2\sqrt{x}-x_2$

$st: x_2 \geq 0$

拉格朗日函数：

$\mathcal{L}_1=\sqrt{x}-x_1+\lambda_1 x_1$

$\mathcal{L}_2=2\sqrt{x}-x_2+\lambda_2 x_2$

FOC: $\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial x_1}=\frac{1}{2\sqrt{x}}-1+\lambda_1=0$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial x_2}=\frac{1}{\sqrt{x}}-1+\lambda_2=0$$

当 $x_1=x_2=0$时

$\lambda_1>0, \lambda_2>0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2 \rightarrow -\infty$矛盾

当 $x_1>0, x_2>0$时：

$\lambda_1=\lambda_2=0 \Rightarrow \sqrt{x}=2\sqrt{x}$矛盾

当 $x_2 = 0, x_1 > 0$时：

$\lambda_2 = 0, \lambda_1 > 0 \Rightarrow x = 1, \lambda_1 = -\frac{1}{2}$矛盾

当 $x_1 = 0, x_2 > 0$时：

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}, \lambda_2 = \frac{1}{2}$符合

综上：

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{4}$$

2）帕累托最优：

$$\begin{aligned} \max: \quad & U_1 = \sqrt{x} - z_1 \\ st: \quad & \overline{U}_2 \geq 2\sqrt{x} - x_2 \end{aligned}$$

$$\mathcal{L} = \sqrt{x} - x_1 + \lambda\left[\overline{U_2} - 2\sqrt{x} + x_2\right]$$

$$\text{FOC:}\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1 - \lambda \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \lambda\left[1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right] = 0 \end{cases}$$

解得： $x^* = \frac{9}{4}$

故市场均衡下的配置不是帕累托最优。

2. 考察一个纯交换经济，此经济只有两个消费者 A, B 和两种商品 X, Y。A 和 B 的效用函数定 义如下:

$$U_A(X_A, Y_A) = 3X_A + 5Y_A$$
$$U_B(X_B, Y_B) = 9X_B + 2Y_B$$

3. 这个经济的总京赋为 $X_A + X_B = 10, \quad Y_A + Y_B = 10.$

1） 请给出完全竞争均衡的定义。

2）请给出 Pareto 最优配制的定义。

3）请给出这个经济所有可能的 Pareto 最优配制。

4）假如初始财富配制为 A, B 各拥有 5 单位的 X 和 Y, X 和 Y 的价格比为 $\frac{P_X}{P_Y}$, 当经济达到 完全竞争均衡时，这个价格比例能否大于 1? 为什么?

5）假设条件如上问所述，那么这个价格比能否小于 1? 为什么?

solution：

$U_A = 3X_A + 5Y_A \; U_B = 9X_B + 2Y_B$

1）首先求帕累托最优配置

$(x, y) = (10,10)$

契约曲线：

$X_A = 0 \quad (0 \le Y_A \le 10) \cup Y_A = 10(0 \le X_A \le 10)$

2）瓦尔拉斯均衡：

不妨假设 $p = p_x/p_y, p_y = 1$

首先求 A,B 的需求：

$$x_A = \begin{cases} \frac{pe_X^A + e_Y^A}{p} & 0 < p + \frac{3}{5} \\ \left[0. \frac{pe_x^A + e_Y^A}{p}\right] & p = \frac{3}{5} \\ 0 & P > \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$y_A = \begin{cases} 0 & 0 < p < \frac{3}{5} \\ \left[0, pe_x^A + e_y^A\right] & p = \frac{3}{5} \\ pe_X^A + e_Y^A & p > \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$x_B = \begin{cases} \frac{pe_X^B + e_Y^B}{p} & 0 < p < \frac{9}{2} \\ \left[0, \frac{pe_x^B + e_y^B}{p}\right] & p = \frac{q}{2} \\ 0 & p > \frac{q}{2} \end{cases}$$

$$y_B = \begin{cases} 0 & 0 < p < \frac{9}{2} \\ \left[0, pe_x^B + e_y^B\right] & p = \frac{9}{2} \\ pe_x^B + e_y^B & p > \frac{q}{2} \end{cases}$$

讨论可能的瓦尔拉斯均衡

当 $0 < p < \frac{3}{5}$时：

$Y_A + Y_B = 0 < e_Y = 10$，非均衡

当 $p > \frac{9}{2}$时：

$x_A + x_B = 0 < e_x = 10$，非均衡

当 $\frac{3}{5} < p < \frac{9}{2}$时：

市场出清 $Y_A + Y_B = Pe_X^A + e_Y^A = 10$ 价格

$$\Rightarrow \frac{3}{5} < p = \frac{10 - e_Y^A}{e_X^A} < \frac{9}{2}$$

$\Rightarrow 9e_X^A + 2e_Y^A > 20$ 且 $3e_X^A + 5e_Y^A < 50$

$\Rightarrow \begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} x_B = 10 \\ y_B = 0 \end{cases}$ 可达到帕累托最优配置。

当 $p = \frac{3}{5}$时，

市场出清：

$$y_A + y_B = \left[0, \frac{3}{5} e_X^A + e_Y^A\right]$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq 10 \leq \frac{3}{5} e_x^A + e_y^A$$

$$\Rightarrow \quad 3e_X^A + 5e_Y^A \geq 50$$

$\Rightarrow \begin{cases} x_B = \frac{3e_B^X + 5 - e_B^Y}{3} \\ y_B = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_A = 10 - x_B \\ y_A = 10 \end{cases}$ 可能均衡

当$p = \frac{9}{2}$时

市场出清$x_A + x_B = \left[0, \frac{9e_X^B + 2e_Y^B}{9}\right]$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq 10 \leq \frac{9e_X^B + 2e_Y^B}{9}$$

$$\Rightarrow \quad 9e_X^A + 2e_Y^A \leq 20$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_A = 0 & x_B = 10 \\ y_A = \frac{9}{2} e_x^A + e_y^A & y_B = 10 - Y_A \end{cases}$$

可能的配置

当 $(e_X^A, e_Y^A) = (5,5)$时

$$\Rightarrow \quad 9e_X^A + 2e_Y^A > 20, 3e_X^A + 5e_Y^A < 50$$

$\Rightarrow \quad p^* = \frac{10-e_y^A}{e_x^A} = 1$均衡价格

⇒均衡配置

$(x_A, y_A, x_B, y_B) = (0,10,10,0)$

3. 英国前首相温斯顿.丘吉尔曾在写给一位将军的信中写道： 我希望你严肃认真地考虑毒气战这一问题。在第一次世界大战中，每个士丘 都使用毒气作战, ⋯ ... (但在二战中） 为什么德军不曾使用毒气呢? 我们很难确 定这种行为是否处于其良心上的质忌或偏好。 ... ... 他们不对我们使用每气战的 唯一原因在于他们害怕曹到报复。能对他们造成伤害的就是对我们有利的。 下面我们利用博亦论的观点对丘吉尔的论述进行分析。假设英军和德军都 如果其中一方选择不使用，不使用方效用为-6, 使用方效用为 3 ; 如果两 方都不使用每气, 他们效用都是 0。
1) 列出英德两军的支付矩阵
2) 找出所有的纯策略纳什均衡和混合策略纳什均衡
3) 如果德军采用了先进的每气技术，使得自己独自使用每气时英军的效用 变为-10 (其他情形下效用不变)。 此时谁具有占优策略, 找出占优策 略队及此时的纳什均衡。

solution:

1)支付矩阵：Y 表示使用，N 表示不使用，左边表示英国

		G	
		Y	N
B	Y	(-8,-8)	(3,-6)
	N	(-6,3)	(0,0)

2）纯策略

$NE: (Y, N), (N, Y)$

混合策略 $NE: \left(\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right), \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)\right)$

价格 B,G 使用 Y 的概率分别为 $\theta, \gamma (0 < \theta, \gamma < 1)$

B 使用 Y 时：

$\pi_B^Y = -8\gamma + 3(1-\gamma)$

B 使用 N 时：

$\pi_B^N = -6\gamma$

无差异性： $\pi_B^Y = \pi_B^N \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{3}{5}$

同理得： $\theta = \frac{3}{5}$

3）德军改良技术

支付矩阵

		G	
		Y	N
B	Y	(-8,-8)	(3,-6)
	N	(-10,3)	(0,0)

此时 B 具有占优策略 Y

占优策略 $NE: (Y, N)$