10.8

None Leon

2021/1/25

1. (25 分)某市正规划新建一个音乐会场地。假设城市中有两个居民:小丽(L) 和小贾 (J)。居民的个人捐赠将成为建造该场地经费的惟一来源。假设两位居民对于私有 品 (x_i) 和场地总尺寸 (S) 的效用函数为 $u_i(x_i,S)=\frac{1}{2}\ln x_i+\frac{1}{2}\ln S$,场地总尺寸即为其总 座位数 S,等于由小丽和小贾各自捐赠的座位数之和,即: $S=S_L+S_J$。小丽的收入为 200,小贾的收入为 100。假设私有品和座位数的单 价都为 1。

(1)(5 分)如果政府不干预的话,该场地将会建造多少座位?其中多少是由小 丽捐赠的?多少是由小贾捐赠的?

(2)(5 分)总座椅数的社会最优解是多少?如果你的答案与(1)不同,请解释原因。

现在,假设一个座位的价格从 1 变为 P_S,而私有品的价格仍为 1,在改变价格 的同时,小 丹和小贾的收入按照如下方式相应改变:当价格变为 P_S 时,小丽和 小贾的预算约束增 加了 C_L 和 C_J, 其中 $C_L=(P_S-1)S_L, C_J=(P_S-1)S_J$。增加 后的预算约束称为补偿预算 约束。

(3)(5 分)写下小丹和小贾的补偿预算约束的表达式。你觉得它们为什么被称作"补偿的"?

(4)(10 分)通过需求曲线的纵向加总,求出社会最优解。

i)按如下方式推导 S 的逆需求曲线:

a.满足补偿约束运算的前提下,最大化小丽和小贾的需求曲线。注意,在求导之前,不要代入 C_L 和 C_J 的表达式。

b.对于小丹和小贾,求解 S_L 和 S_J 作为 P_S 的自变量的函数形式。请使用你在 i)中得到的 结果推导社会需求曲线。

ii)回到 $P_S=1, P_x=1$ 的初始设定。请通过使社会需求曲线与社会供给曲线 (即场地座位的边际成本) 相等,找到座椅数的社会均衡数量。和(2) 结果相比,是否不同?

solution:

1）单独决策，效用最大化：

$$\max: \quad U_i=\frac{1}{2}\ln x_i+\frac{1}{2}\ln S$$
$$\text{st:} \quad x_i+s_i=m_i$$

$$L=\frac{1}{2}\ln x_i+\frac{1}{2}\ln s+\lambda[m_i-x_i-s_i]$$

$$\text{FOC:}\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x_i}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x_i}-\lambda=0\\ \frac{\partial L}{\partial s_i}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}-\lambda=0\end{cases}$$

解得： $s_i+s=m_i \quad (i=1,2)$

加总得 $s^*=100$

其中$S_J=0 \quad S_L=100$

2）社会最优

方法 1：定义发

$$\max: \quad U_J=\frac{1}{2}\ln x_J+\frac{1}{2}\ln S$$

$$st:\begin{cases}\bar{U}_L=\frac{1}{2}\ln x_L+\frac{1}{2}\ln S\\ x_J=100-S_J\\ x_L=200-x_L\end{cases}$$

$$L=\frac{1}{2}\ln\left(100-S_J\right)+\frac{1}{2}\ln\left(S_J+S_L\right)+\lambda\left[\bar{U}_2-\frac{1}{2}\ln(200-S_L)-\frac{1}{2}\ln\left(S_J+S_L\right)\right]$$

$$\text{FOC:}\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial S_J}=-\frac{1}{2}\frac{1}{100-S_J}+\frac{1}{2}\frac{1}{S_J+S_L}-\lambda\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{S_J+S_L}=0\\ \frac{\partial L}{\partial S_L}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{S_J+S_L}+\lambda\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{200-S_L}-\lambda\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{S_J+S_C}=0\end{cases}$$

解得： $S^{**}=S_L+S_J=150>S^*=100$

个人决策存在搭便车行为，导致 s 供不应足

方法 2：利用社会福利函数

假设

$SW=\lambda_L U_L+\lambda_J U_J$

其实与 λ_L,λ_J无关

$$\max: \quad SW=\lambda_L\left[\frac{1}{2}\ln x_L+\frac{1}{2}\ln s\right]+\lambda_J\left[\frac{1}{2}\ln x_J+\frac{1}{2}\ln s\right]$$

st:　$x_L + x_J + s = m_L + m_J$

$$L = \lambda_L\left[\frac{1}{2}\ln x_L + \frac{1}{2}\ln s\right] + \lambda_J\left[\frac{1}{2}\ln x_J + \frac{1}{2}\ln s\right] + \lambda[300 - x_L - x_J - s]$$

$$\text{FOC:}\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x_L} = \lambda_L \cdot \frac{1}{2x_L} - \lambda = 0\\ \frac{\partial L}{\partial x_J} = \lambda_J \cdot \frac{1}{2x_J} - \lambda = 0\\ \frac{\partial L}{\partial s} = (\lambda_L + \lambda_J) \cdot \frac{1}{2s} - \lambda = 0\end{cases}$$

解得：

$x_L + x_J = s = 150$

3）补偿性预算约束：

$$\begin{cases}x_L + p_s \cdot S_L = m_L + c_L\\ x_J + p_s \cdot S_J = m_J + c_J\end{cases}$$

由于 s 价格的改变，通过增加 c 使得 L 与 J 能够消费原来的消费束，故称为补偿性的预算约束。

4）效用最大化：

$$\max: U_L = \frac{1}{2}\ln x_L + \frac{1}{2}\ln S$$

st: $x_L + P_s \cdot S_L = m_L + c_L$

$\Rightarrow$　$p_s(s_L + s) = m_L + c_L$

带入化简得：

$$p_s = \frac{200 - s_c}{s}$$

同理可得：

$$P_s = \frac{100 - S_J}{S}$$

纵向加总：

$$P_s = \frac{200 - S_L}{S} + \frac{100 - S_J}{S} = \frac{300 - S}{S}$$

即社会需求曲线

与 2）对比

若 $P_s = 1$ 解得：$S = S_L + S_J = 150$，即社会最优

2. 川普与希拉里由于不愿意合作将工作拖到了最后 10 小时，已知川普每小时可以完成 2 页书面报告, 4 页幻灯片，希拉里每小时可以完成 4 页书面报告，2 页幻灯片。

(1) 画出最后 10 小时川普的生产可能性边界（以书面报告为横轴）。

(2) 画出最后 10 小时希拉里的生产可能性边界（以书面报告为横轴）。

(3) 若两人合作，画出最后 10 小时两人（合作 ） 的生产可能性边界（以书面报告为横轴）。 若两人的工作量最后都变成 10 页书面报告和 10 页幻灯片。

(4) 若两人合作，是少多少小时可完成?

(5) 川普固执地不愿合作，若他一个人完成这 10 页书面报告和 10 页幻灯片，最少多少小时可完成?

(6) 产生 (4) 和 (5) 之间完成时间差异的原因是什么?

solution：

1）图形

2）图形

3）图形

$P_T = P_H = 10; \quad B_T = B_L = 10$

4）若合作

最优化时：川普完成 p，希拉里完成 B

耗时 $t = 5 \cdot h$

5）若川普不合作：

耗时：

$$t = \frac{P_T}{4} + \frac{B_T}{2} = 7.5h$$

6）差异的愿意：合作能够发挥比较优势

3. 请用博亦树的方式表示下面的博亦，并求出该博亦的均衡。 博亦者：一个原告和一个被告 博变规则如下:

1）原告决定是否指控被告，指控的成本为 C;

2) 原告提出一个无协商余地的赔偿金额 $S > 0$

3）被告决定接受或拒绝原告的要求;

4) 如果拒绝原告，原告则决定是放弃还是上法庭，自己的成本（律师费）是 P ，给被告 带来的诉公成本是 D;

5) 如果被告上法庭，原告以 R 概率胜诉并获赔偿 $X(RX<P)$, 若败诉则什么也得不到。

solution：

1）首先构建博弈树：

2）逆向归纳法求 SPNE

$\left\{\begin{array}{ll}\text { Step III } & -c>R x-P-c \Rightarrow 原告不上诉\\ \text { step II } & -s<0\Rightarrow 原告拒绝\\ \text { step I } & 0>-c \quad \Rightarrow 不指控\end{array}\right.$

综上：SPNE 为：

$$\begin{cases}\text{stepI: } \textit{原告不指控} \\ \text{step II: } \textit{无论原告是否质控，均拒绝（若不指控时接受，} s>c, \textit{原告不会painless，不能保证SPNE为} \\ \text{step III: } \textit{若被告拒绝，则原告不上诉；若不，则原告上诉与不上诉均可}\end{cases}$$

假设 $s>c$