8.26

None Leon

2021/2/3

1.在两商品的空间里，求证：

1)若一种商品的需求自价格弹性为单位弹性，则该商品的价格 (p_1) 变动不会 对另一种商品需求 (x_2) 产生任何影响

2)若一种商品的需求是富于弹性的，则另一种商品 $({}^{x}2)$ 是这种商品 (x_1) 的替 代品。

3)若一种商品的需求是缺之弹性的，则另一种商品 $({}^{x}{}_2)$ 是这种商品 (x_1) 的补 充品。

proof:

预算约束： $p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 = I$

上式对价格p_1求导：

$$x_1 + p_1 \frac{\partial x_1}{\partial p_1} + p_2 \cdot \frac{\partial x_2}{\partial p_1} = 0$$

化简得：

$$x_1 \left[1 + \frac{p_1}{x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial p_1}\right] + p_2 \cdot \frac{\partial x_2}{\partial p_1} = 0$$

即 $x_1[1 - |\varepsilon_1|] + p_2 \cdot \frac{\partial x_2}{\partial p_1} = 0$

1)若 $|\varepsilon| = 1$，则 $\frac{\partial x_2}{\partial p_1} = 0$

2)若 $|\varepsilon| > 1$， 则$\frac{\partial x_2}{\partial p_1} > 0$，替代品

3)若 $|\varepsilon| < 1$， 则$\frac{\partial x_2}{\partial p_1} < 0$ 互补品

note:弹性专题

1.两种加总

恩格尔加总

推导： $p_x \cdot x + p_y \cdot y = I$

对收入 I 求导

$p_x \cdot \frac{\partial x}{\partial I} + p_y \cdot \frac{\partial y}{\partial I} = 1$

$\Rightarrow \quad \frac{p_x \cdot x}{I} \cdot \frac{I}{x} \cdot \frac{\partial x}{\partial I} + \frac{p_y \cdot y}{I} \cdot \frac{I}{y} \cdot \frac{\partial y}{\partial I} = 1$

$\Rightarrow \quad S_x \cdot e_{x,I} + S_y \cdot e_{y \cdot I} = 1$

意义：x,y 不可能全为奢侈品 $e_{x,I} > 1.$ e$_{g,I} > 1$ 与 $\quad s_{x}+\operatorname{s_y}=1$相矛盾

古诺加总：

推导：$p_x \cdot x + p_y \cdot y = I \Rightarrow \quad x + P_x \cdot \frac{\partial x}{\partial p_x} + p_y \cdot \frac{\partial y}{\partial p_x} = 0$

$\Rightarrow \quad x + x \cdot e_x \cdot px + \frac{p_y \cdot y}{p_x} \cdot e_y \cdot p_x = 0$ $\Rightarrow \quad s_{x}+s_{x} \cdot e_{x \cdot} \cdot p_{x}+\operatorname{s_y} \cdot e_y \cdot p_{x}=0$ $\Rightarrow \quad s_x \cdot e_x \cdot p_x + s_y \cdot e_y \cdot p_x = -s_x$

意义：

s_x, e_x, p_x 表示 p_x变动导致的 x 份额变动的比例

s_y, e_y, p_x 表示 p_x导致的 y 份额变动的比例

由于

$s_x \cdot e_x \cdot p_x + s_y \cdot e_y \cdot p_x = -s_x \leq 0$

故p_x的直接效应大于交叉效应

2.斯拉斯基方程——弹性形式

推导：

$$\frac{\partial x}{\partial p_x} = \frac{\partial x^h}{\partial p_x} - \frac{\partial x}{\partial I} \cdot x$$

$\Rightarrow \quad \frac{p_x}{x} \cdot \frac{\partial x}{\partial p_x} = \frac{p_x}{x} \cdot \frac{\partial x^h}{\partial p_x} - \frac{\partial x}{\partial I} \frac{I}{x} \cdot \frac{P_x \cdot x}{I}$

$\Rightarrow \quad e_x \cdot p_x = e_{x^h, p_x} - s_x \cdot e_{x \cdot I}$

意义：

$$\begin{cases} x 的支出份额很小时(s_x)\\ x 的收入弹性很小时(e_{x,I})\end{cases}\to 收入效应可忽略\to e_x,p_x 等价于 e_{x^h},p_x$$

2. $(20')$ 一个垄断厂商，成本为 0. 面临两个市场，学生市场和非学生市场。每位学生的需求函数 为 $q = 100 - 2p$, 每位非学生的需求函数为 $q = 100 - p$。学生数量为 x, 非学生数量为 y.

1)如果统一定价，求均衡价格。每个学生的消费量是多少？每个非学生的消费者是多少? $(6')$ 2. 如果实行三级价格歧视，求两个市场的价格。每个学生消费量是多少? 每个非学生消费是多 少? $(7')$

2)从社会最优角度来说，统一定价和价格歧视哪个好?给出论证过程。 $(7')$

solution:

1)统一定价——同时供应两个市场

厂商利润最大化：

max: $\pi_1 = p \cdot x(100 - 2p) + p \cdot y(100 - p)$

FOC: $\frac{d\pi_1}{dp} = x(100 - 4p) + y(100 - 2p) = 0$

解得： $p = \frac{50(x+y)}{2x+y} < 50$

每个学生的消费量 $q^s = \frac{100x}{2x+y}$

每个非学生消费量 $q^n = \frac{50(3x+y)}{2x+y}$

企业的利润为： $\pi_1 = \frac{2500(x+y)^2}{2x+y}$

统一定价——只供应大市场

利润最大化：

max: $\pi_n = y \cdot p^n(100 - p^n)$

FOC: $\frac{d\pi_n}{dp^n} = y(100 - 2p^n) = 0$

解得： $p^n = 50 \quad q^n = 50$

此时能做到只供应大市场

利润： $\pi_n = 2500\text{y}$

由于 $\Delta\pi = \pi_1 - \pi_n = \frac{2500x^2}{2x+y} > 0$

综上：统一定价时，厂商同时供应两个市场 $p = \frac{50(x+y)}{2x+y}$

$q^s = \frac{100x}{2x+y}$; $\quad q^n = \frac{50(3x+y)}{2x+y}$

2)三级价格歧视

利润最大化： $\max: \pi_2 = xp^s(100-2p^s) + yp^n(100-p^n)$

FOCs: $\begin{cases} \frac{\partial \pi_2}{\partial p^s} & = x(100-4p^s) = 0 \\ \frac{\partial \pi_2}{\partial \rho^n} & = x(100-2p^n) = 0 \end{cases}$

解得： $\begin{cases} p^s = 25 \\ q^s = 50 \end{cases} \quad \begin{cases} p^n = 50 \\ q^n = 5^\circ \end{cases}$

利润为： $\pi_2 = 1250x + 2500y$

3)福利比较分析：

方法 1：

统一定价时的社会福利：

$sw_1 = cs_1 + ps_1$

$= \frac{2500xy^2}{(2x+y)^2} + \frac{1250x(3x+4)^2}{(2x+y)^2} + \frac{2500(x+9)^2}{2x+y}$

三级价格歧视时的社会福利： $\begin{aligned} sw_2 & = cs_2 + ps_2 \\ & = 625x + 1250y + 1250x + 2500y \\ & = 1815x + 3750y \end{aligned}$

由于 $\Delta sw = sw_1 - sw_2 = \frac{625xy}{2x+y} > 0$

故统一定价时社会福利更高。

方法 2：

结论：线性需求时，且 $MC = c$时，统一定价与三级价格歧视的总供给量相等(三级价格歧视时同时供应所有市场)

社会福利最大化：

max:$sw = x\int_0^{q^s} p^s\,(q)dq + y\int_0^{q^n} p^n\,(q)dq - c(xq^s + yq^n)$ st: $\quad xq^s + yq^n = \overline{Q}$

拉格朗日函数：

$$\mathcal{L} = x\int_0^{q^s} p^s\,(q)dq + y\int_0^{q^n} p^n\,(q)dq - c(xq^s + yq^n) + \lambda[\bar{Q} - xq^s - yq^n)$$

FOCs: $\begin{cases}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^s} = xp^s(q^s) - (c+\lambda)x = 0\\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^n} = y \cdot p^n(q^n) - (c+\lambda)y = 0\end{cases}$

解得：当 $p^n(q^n) = p^s(q^s)$时，即统一价格时，社会福利最大

3. 一个城市有两家报纸, 每一家报纸的需求由自己和对手的定价决定。两家报纸的需求 函数分别为 $q_1 = 21 - 2p_1 + p_2$ 和 $q_2 = 21 - 2p_2 + p_1$ 。印刷和分发额外一份报纸的边际成本 等于增加一个读者对于广告收入的贡献, 因此边际成本可以看成为零。每家报纸都认为 对方的价格独立于自己的价格选择。如果两家报纸达成协议, 以联合利润为目标而定价, 请问各自的价格将要上升多少?

solution：

1)单独价格决策：

企业 1,2 利润最大化：

$$\begin{cases}\max: \pi_1 = P_1(21 - 2p_1 + p_2)\\ \max: \pi_2 = P_2(21 - 2p_2 + p_1)\end{cases}$$

反应函数：

$$\begin{cases}p_1 = \frac{21}{4} + \frac{1}{4}p_2\\ p_2 = \frac{21}{4} + \frac{1}{4}p_1\end{cases}$$

均衡时：

$$\begin{cases}p_1 = p_2 = 7\\ q_1 = q_2 = 14\\ \pi_1 = \pi_2 = 98\end{cases}$$

2)联合决策

利润最大化： $\max: \pi = p_1(21 - 2p_1 + p_2) + p_2(21 - 2p_2 + p_1)$

FOCs: $\begin{matrix}\frac{\partial \pi}{\partial p_1} & = 21 - 4p_1 + 2p_2 = 0\\ \frac{\partial \pi}{\partial p_2} & = 21 - 4p_2 + 2p_1 = 0\end{matrix}$

均衡时： $\begin{cases}p_1 = p_2 = 10.5\\ q_1 = q_2 = 10.5\\ \pi_1 = \pi_2 = 110.25\end{cases}$

3)联合决策时：价格上升，产量下降，利润上升。

4)分析原因：注意与 8.25 第 3 题比较

两种产品为替代品

$$\begin{cases} q_1 = 21 - 2p_1 + p_2 \\ q_2 = 21 - 2p_2 + p_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial q_1}{\partial p_2} > 0 \\ \dfrac{\partial q_2}{\partial p_1} > 0 \end{cases}$$

古诺价格博弈时，战略互补。

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{21}{4} + \dfrac{1}{4}p_2 \\ p_2 = \dfrac{21}{4} + \dfrac{1}{4}p_1 \end{cases}$$

联合决策：

竞争缓和，价格相应提高 $q \downarrow . \pi \downarrow$## Including Plots

You can also embed plots, for example:

`{r pressure, echo=FALSE} plot(pressure)`

Note that the `echo = FALSE` parameter was added to the code chunk to prevent printing of the R code that generated the plot.