9.17

None Leon

2021/1/14

1. (15 分) 某决策人在面临消费的不确定性时，追求事前的期望效用最大化，其初始财富为 w，事后效用 奢 A: 输赢概率均为 0.5，赢的回报为 2，输的损失为 1 。 奢 B: 输赢概率均为 0.5 ，赢的回报为 101，输的损失为 2。 请证明: 如果此决策人对于任意 $w \in$ [100，200]均拒绝参与“奢 A”, 即对任意 w ∈ [100, 200]有 0.5u(w − 1) +0.5u(w + 2) < u(w), 那么当 w = 101 时， 他会拒绝参与“奢 B”, 即 u(•) 满足 0.5u(99) + 0.5u(202) < u(101)

proof：因势利导——不等式情形

由于

$$\frac{1}{2}U(w-1)+\frac{1}{2}U(w+2)<U(w) \quad (100 \leq W \leq 200)$$

则：$\sum_{w=100}^{200} U\,(w) > \frac{1}{2}\sum_{w=100}^{200} U\,(w-1) + \frac{1}{2}\sum_{w=100}^{200} U\,(w+2) + \frac{1}{2}\sum_{100}^{200} U\,(w) + \frac{1}{2}[U(201)+U(202)-U(100)-U(101)]$

则：
$$\begin{aligned} U(99)+U(202)+U(201) \quad &< U(200)+U(100)+U(101) \\ &< U(201)+U(101)+U(b1) \end{aligned}$$

$< U(201)+U(101)+U(101)$ 因此 $U(99)+U(202)<2U(101)$

2. 经济中存在两种商品, 其数量分别用 x_1, x_2 来表示, 消费者 L 的效用函数为 $U_L = x_1^L + x_2^L$, Z 的效用函数为 $U_Z = \min\{x_1^Z, x_2^Z\}$, L 和 Z 拥有的商品初始凉赋分别为 $L{:}\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$, $\quad Z:\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$, 记 p_1 和 p_2 分别为两种商品的价格。求解

1) 在埃奇沃思盒中画出这一情形;
2) p_1 和 p_2 之间的均衡关系是什么?什么是均衡分配?
3) 如果 Z 的效用函数是 $U_L = x_1^Z + 3x_2^Z$, 均衡价格比是多少?
4) 如果 Z 的效用函数是 $U_L = \max\{x_1^Z, x_2^Z\}$, 均衡价格比是多少?
5) 如果 Z 的效用函数是 $U_L = x_1^Z x_2^Z$ ，均衡价格比是多少?

solution：

交换经济中的一般均衡主要涉及两个变量：效用函数的类型以及总课赋的比 例。两者共同影响最终形成的竞争性均衡以及契约曲线的形状。大致可分为以下 组合: 全替代 完全互补 $C-D$ Stone-Geary Ex/Ey=1 拟线性 最大值 特殊效用 Ex/Ey>1

$p=\frac{p_x}{p_y}\frac{a}{b}U=ax+by$

1.完全替代+完全互补——本题

1）契约曲线

$$\begin{cases}U_A=x_A+y_A\\U_B=\min\{x_B,y_B\}\end{cases}$$

契约曲线： $Y_A=X_A(0\le X_A\le E_x)$

$$Y_A=\begin{cases}X_A+E_Y-E_X & E_X-E_Y\le X_A\le Ex\\0 & 0\le X_A\le E_XE_Y\end{cases}$$

2）瓦尔拉斯均衡

1）内点解：

$Y_A=X_A+E_Y-E_X$

若 $P=\frac{P_X}{P_Y}=1$：

$$\begin{cases}X_B=Y_B=\dfrac{Pe_x^B+e_Y^B}{P+1}\Rightarrow\\X_A,Y_A\textit{任意组合}\end{cases}$$

此时能够达到均衡状态

若 $p=p_X/p_Y\neq 1$

$$\begin{cases}X_B=Y_B=\dfrac{p\cdot e_x^B+e_Y^B}{P+1}\\X_A=Y_A=0\quad（令X_A=0）\end{cases}$$

$\Rightarrow X_A+X_B$ 不一定等于 E_X

$\Rightarrow$ 非均衡

2）角点解：

$Y_A=0$

若$p=\frac{p_x}{p_y}>1$，则$x_A=0$，为非均衡

若 $p=\frac{p_X}{p_Y}\in[0,1]$，则为均衡状态，无交易 【注意此时可能取到 0，但还是无交易】

3）效用函数中的参数问题

$$\begin{cases}U_A = aX_A + bY_A \\ U_B = \min\{cX_B, dY_B\}\end{cases}$$

参数的比例与 E_X/E_Y 有一定的替代关系

例如

$U_A = X_A + Y_A$ $U_B = \{2X_B, Y_B\}$ $Ex/Ey = 1$

2 完全替代+完全替代——本题

$\begin{cases}U_A = X_A + Y_A \\ U_B = X_B + 3Y_B\end{cases}$

契约曲线

E_0为初始禀赋，阴影区域为帕累托改进的部分，m-n 为可能达到的帕累托最优，$o_A - n — o_B$折线为契约曲线

瓦尔拉斯均衡

$(p = p_x/p_Y)$

$0 < p < \frac{1}{3}$ 此时 $Y_A = Y_B = 0$ $\Rightarrow$非均衡

$p > 1$ 此时，$x_A = x_B = 0$ $\Rightarrow$非均衡

$\dfrac{1}{3} \leq p \leq 1$

取等号性，其中一人以一定的比例任意组合，能达到均衡

不取等号：$\begin{cases}X_A = \frac{pe_X^A + e_Y^A}{p} & ; \quad Y_A = 0 \\ X_B = 0 & ; \quad Y_B = Pe_X^B + e_Y^B\end{cases}$

能够到达角点解均衡

$\frac{1}{3} < p < 1$时：

$\begin{cases}A: \quad E_0 \to E_A \\ B: \quad E_0 \to E_B\end{cases}$，退而求其次取$E_B$

3.完全替代与最大值

$\begin{cases}U_A = X_A + Y_A \\ U_B = \max\{X_B, Y_B\}\end{cases}$

契约曲线

E_0, E_1为初始禀赋，阴影区域为帕累托改进区域，$m_i - n_i$为可能达到的帕累托最优，四边为契约曲线

瓦尔拉斯均衡

若$p = \frac{p_X}{p_Y} \neq 1$，假设其大于 1

$$\begin{cases} X_A = X_B = 0 \\ Y_A = Pe_X^A + e_Y^A \\ Y_B = Pe_X^B + e_Y^B \end{cases} \Rightarrow$$

此时达不到角点解均衡

$p > 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} A: \quad E_0 \to E_A' \\ B: \quad E_0 \to E_B' \end{cases}$$

$$\begin{cases} A: E_A' \to E_A'' \\ B: E_B' \to E_B'' \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 非均衡

若$p = 1$

A 以一定比例任意组合，足够能够达到角点解均衡，均衡点位 A 或 B.

3、圆形城市，周长为 1。企业的进入成本为f，边际成本为c。厂商进行 两阶段博亦：第一阶段决定是否进入; 第二阶段进入后均匀分布，进行 价格博亦。消费者的单位交通成本为 t。

(1) 第二阶段的均衡价格

(2) 第一阶段的均衡数量

(3) 社会最优的均衡数量

solution:

1)第二阶段价格竞争

假设院上等距分布 n 个厂商，间距为$\frac{1}{n}$， ∀取第 i 个企业进行分析。

有对称性知：

$P_{i-1} = P_{i+1} = P_j$

则企业 i 的任一段需求 x 应满足

$$p_i + tx = p_j + t\left(\frac{1}{n} - x\right)$$

解得总需求：

$$D_i = 2x = \frac{1}{n} + \frac{P_j - P_i}{t}$$

利润最大化： $\max: \pi_i = (p_i - c)p_i - f$

$$Foc: \frac{\partial \pi_i}{\partial p_i} = \frac{1}{t}\left[p_j + c + \frac{t}{n} - 2p_i\right] = 0$$

由对称性解得：$p_i^* = p_j^* = c + \frac{t}{n}$

2）第一阶段均衡的条件：

$$\pi_i^* = \frac{t}{n^2} - f = 0$$

即$n^* = \sqrt{\frac{t}{f}}$

若$\pi_i^* > 0$，则会有企业进入获得正利润

3）社会最优的数量

$$sw = cs + ps - T$$

由于总需求恒定，则 cs+ps 不变，中央计划者目标为：

$$\min: T = 2n\int_0^{\frac{1}{2n}} t \cdot x dx + nf$$

$$Foc: \frac{\partial T}{\partial n} = f - \frac{t}{4n^2} = 0$$

解得：

$$n^{**} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{t}{f}} < n^*$$