10.22

None Leon

2021/1/28

1. 完全竞争行业中，一个典型厂商的生产函数为 $q=\sqrt{kl}$,　k 代表资本数量，代表该 厂商的劳动力仲用量，资本数目固定仕 25 单位，资本和劳动力的价格均为 1 , 市场反 需求函数为 $P=1004-Q$,　P 为产品价格，Q 为总需求量。

1）如果产品价格 $P=4$，求均衡时 厂商数目、产量和利润。此时，每个厂商使用多少 劳动力?

2) 如果产品价格 $P=4$, 劳动力价格为 w, 不考虑其他厂商，求解该厂商的劳动力要素 需求。

solution：

1）首先求单个厂商的供给

厂商成本最小化：

$$
\begin{aligned}
\min c &= 25 + L \\
st: q &= 5\sqrt{L}
\end{aligned}
$$

成本函数$c(q)=25+\frac{1}{25}q^2$

完全竞争市场单个厂商的供给

$$p=MC=\frac{2}{25}q$$

$$\Rightarrow q^s=\frac{25}{2}p \quad (p\geq 0)$$

其次求行业的均衡

若 $p=4$;　$Q^d=1000 \cdot q^s=50$

则$n=\frac{Q^d}{q^5}=20$

此时$L^d=100; \pi=75$

2)厂商利润最大化

$$\begin{aligned}\max:\pi &= 4\cdot Q(L) - w\cdot L - 25 \\ &= 20\sqrt{L} - w\cdot L - 25\end{aligned}$$

$$Foc:\frac{d\pi}{dL} = \frac{10}{\sqrt{L}} - w = 0$$

解得： $L^{d} = \frac{100}{w^{2}}$

2. 考虑下列模型: 代理人行动有三种: $E = \{e_1, e_2, e_3\}$; 利润 π 的结果只有两种: $\pi_H = 10$ 或 $\pi_L = 0$ 。高水平的 π_H 取决于努力水平 e, 具体的概率为: $P\{\pi_H \mid e_1\} = \frac{2}{3}, P\{\pi_H \mid e_2\} = \frac{1}{2}, P\{\pi_H \mid e_3\} = \frac{1}{3}$; 代理人的努力成本为 $C(e_1) = \frac{5}{3}$, $C(e_2) = \frac{8}{5}$, $C(e_3) = \frac{4}{3}$, 效用函数为 $u(w) = \sqrt{w}$ 且代理人的保留效用为 0 。请回答下列问题:

1）当努力水平可观测时，什么是最优契约?

2) 证明: 若努力水平不可观测，则 e_2 是不会被代理人付诸实施的。 $g(e_2)$ 至少为多少 能使 e_2 被代理人付诸实施?

3) 假定 $C(e_1) = \sqrt{8}$, 且 $P\{\pi_H \mid e_1\} = x \in (0,1)$, 如果努力水平可观测，那么什么是当 $x \to 1$ 时的是优契约?

solution：

若 e 可观测：

委托人期望收益最大化

$$\max_{w_i, e_i} E\pi = p\{\pi_H \mid e_i\}.\pi_H + p\{\pi_L \mid e_i\}\cdot\pi_L - w_i$$

st: $\sqrt{w_i} - g(e_i) = 0$

将 e_1、e_2、e_3对应的收入代入得：

$$\begin{cases} e\text{选择}_1 & : E\pi = \dfrac{35}{9} \\ \text{选择}e_2 & : E\pi = \dfrac{61}{25} \\ \text{选择}e_3 & : E\pi = \dfrac{14}{9} \end{cases}$$

综上 $W = \begin{cases} \frac{25}{9} & \text{若}e = e_1 \\ 0 & \text{若}e \neq e_1 \end{cases}$

2）若 e 不可观测

委托人期望收益最大化：

$\max_{w_H,w_L}: E\pi = P\{\pi_H \mid e_i\} \cdot (\pi_H - w_H) + P\{\pi_L \mid e_i\} \cdot (\pi_L - w_L)$

st: $\max_{ei}: E\pi_1 = P\{\pi_H \mid e_i\}\sqrt{w_H} + P\{\pi_L \mid e_i\}\sqrt{w_2} - g(e_i)$

$P\{\pi_H \mid e_i\}\sqrt{w_H} + P\{\pi_L \mid e_i\}\sqrt{w_L} - g(e_i) \geq 0$

首先对 IC 机制进行分析：

$$\begin{cases} E\pi_1(e_1) = \dfrac{2}{3}\sqrt{w_A} + \dfrac{1}{3}\sqrt{w_L} - \dfrac{5}{3} \\ E\pi_1(e_2) = \dfrac{1}{2}\sqrt{w_H} + \dfrac{1}{2}\sqrt{w_L} - \dfrac{8}{5} \\ E\pi_1(e_3) = \dfrac{1}{3}\sqrt{w_H} + \dfrac{2}{3}\sqrt{w_L} - \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

由于 $\frac{1}{2}[E\pi_1(e_1) + E\pi_1(e_3)] - E\pi_1(e_2) > 0$

则说明 $E\pi(e_2)$不是三者中的最大值

故

$e = e_2$非代理人的最优选择

如何调控 $g(e_2)$ 使得 $e = e_2$可能为代理人最优选择？

当上式取

$\leq$号时，即 $g(e_2) \leq 1.5$ 时， $e = e_2$可能为代理人最优选择

当 $E\pi_1(e_1) \geq E\pi_1(e_3)$时，即

$\sqrt{w_H} - \sqrt{w_L} \geq 1$

代理人选择

$e^* = e_1$

委托人优化问题为：

$\max: E\pi = \dfrac{2}{3}(10 - w_H) - \dfrac{1}{3}w_L$

st: $\begin{cases} \sqrt{w_H} - \sqrt{w_L} \geq 1 \\ \frac{3}{3}\sqrt{w_H} + \frac{1}{3}\sqrt{w_L} - \frac{5}{3} \geq 0 \end{cases}$

st: $\begin{cases} \sqrt{w_H} - \sqrt{w_L} \geq 1 \\ \frac{3}{3}\sqrt{w_H} + \frac{1}{3}\sqrt{w_L} - \frac{5}{3} \geq 0 \end{cases}$

$$L=\frac{20}{3}-\left(\frac{2}{3}w_H+\frac{1}{3}w_L\right)\quad +\lambda\left[\sqrt{w_H}-\sqrt{w_L}-1\right]$$

$$+u\left[\frac{3}{3}\sqrt{w_H}+\frac{1}{3}\sqrt{w_L}-\frac{5}{3}\right]$$

Foc: $\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial w_H}=-\frac{2}{3}+\frac{\lambda}{2\sqrt{w_H}}+\frac{u}{3\sqrt{w_H}}=0\\ \frac{\partial L}{\partial w_L}=-\frac{1}{-3}-\frac{\lambda}{2\sqrt{w_L}}+\frac{u}{6\sqrt{w_2}}=0\end{cases}$

解得：$\begin{cases}w_H^*=4\\ w_L^*=1\end{cases}\quad E^*\pi=\frac{11}{3}$

当 $E\pi_1(e_1)<E\pi_1(e_3)$，即 $\sqrt{w_H}-\sqrt{w_L}<1$ 代理人选择 $e^*=e_3$

委托人的最优化问题为：

$$\max: E\pi=\frac{1}{3}(10-w_H)-\frac{2}{3}\mathrm{w}_L$$

st: $\begin{cases}\sqrt{w_L}-\sqrt{w_H}<1\\ \frac{1}{3}\sqrt{w_H}+\frac{2}{3}\sqrt{w_L}-\frac{4}{3}\geq 0\end{cases}$

$\mathcal{L}=\frac{10}{3}-\left(\frac{1}{3}w_H+\frac{2}{3}w_L\right)\quad +\lambda[1-\sqrt{w_H}+\sqrt{w_L}]$
$+u\left[\frac{1}{3}\sqrt{w_H}+\frac{3}{3}\sqrt{w_L}\frac{-4}{3}\right]$ 解得：$\begin{cases}w_H^*=\frac{4}{3}\\ w_L^*=\frac{4}{3}\end{cases}\quad E^*\pi=\frac{14}{9}$

综上：最优契约为：$\begin{cases}w_H=4\\ w_L=1\end{cases}$

代理人选择 $e^*=e_1$

3）若 $g(e_1)=\sqrt{8}$

$P\{\pi_H\mid e_1\}=x\in(0,1)$

且 e 可观测

若委托人希望代理人选择 e_1，则

$\max: E\pi=x\cdot 10-w_1$

st： $\sqrt{w_1}-g(e_1)\geq 0$

$$\Rightarrow\begin{cases}w_1=8\\ E\pi=10x-8\end{cases}$$

$\Rightarrow$

若 $x\to 1$，则 $E\pi\to 2<\frac{61}{25}$

故委托人的最优契约为：

$$w=\begin{cases}\frac{64}{25} & e=e_2\\ 0 & e\neq e_2\end{cases}$$

3.考虑一下下面的“重复”斯塔克伯格双寡头垄断，一个长期的公司扮演

针对许多短期公司，其中每一个是在市场上只有一个日期，而

在整个游戏过程中，长期的公司仍然在市场上。在每个日期**t**，首先，短

运行公司设置其数量xt；，然后，知道xt，长期公司设置其数量yt；，然后

每个人都以$pt=1-$（$xt+yt$）的价格出售自己的商品。边际成本都是 0。短期

公司的利润最大化，这产生于 t。长期公司的现值最大化

在其利润流中，贴现率为$\delta=0.99$.在每个日期开始时，之前采取的行动都是众所周知的。

（1） 如果只有有限多个日期，即$t\in\{0,1,\ \cdots,\ t\}$，那么子博弈的完美均衡是什么

（2） 现在考虑无限重复的游戏。找到子博弈的完美均衡。

在均衡博弈的路径上，即在给定策略的情况下，以正概率发生的偶然事件中，$xt=1/4$和$yt=1/2$。

（3） 你能找到一个子博弈的完美均衡吗，在均衡博弈的路径上，每 t$xt=yt=1/4$？

solution：

首先来看单期斯塔克伯格的 NE

短期厂商

$$\max:\pi_x=(1-x-y)x\Rightarrow\quad x=\tfrac{1-y}{2}$$

长期厂商：

$$\max:\quad \pi_y=(1-x-y)\cdot y$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{4}\\ y=\frac{1}{2}\end{cases}\quad\begin{cases}\pi_x=\frac{1}{16}\\ \pi_y=\frac{1}{8}\end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{long-run firm:} \quad y_t = \dfrac{1}{2} \quad (\forall t = 0,1,\cdots \cdot T) \\ \text{short-run firm:} \quad x_t = \dfrac{1-y_t}{2} \end{cases}$$

1）有限次重复博弈

SPNE:单次 NE 重复 T 次

$$\begin{cases} x_t = \dfrac{1-y_t}{2} \\ y_t = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad (t = 0,1,2 \ldots .)$$

2）无限重复博弈

无限重复博弈的 SPNE 很多，一般只考虑两种此类及一个定理

冷酷策略与以牙还牙

无名氏定理

$(x_t, y_t) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ 在任意一期构成 NE，故该策略重复无限次为 NE

策略

$$(x_t, y_t) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)(t = 0,1,2 \cdots)$$

若使

$(x_t, y_t) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$为 SPNE

考虑如下冷酷战略：

短期厂商：开始生产

$$x_t = \frac{1}{4}$$

如若 $y_t = \frac{1}{4}$则 $x_{t+1} = \frac{1}{4}$

t+1 时刻的短期厂商能够观察到 t 期对手行为

若 $y_t = \frac{1}{2}$ 则 $x_{t+i} = 1 \quad (i = 1,2 \cdots)$

长期厂商

若 $x_t = \frac{1}{4}$ 则 $y_t = \frac{1}{4}$

若 $x_t \neq \frac{1}{4}$ 则 $y_{t+i} = 1 - x_{t+i} \quad (i = 0,1,2 \cdots)$

若均不偏离：

$$\pi_L = \frac{1}{8}\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t = \frac{1}{\delta(1-\delta)}$$

$$\pi_s = \frac{1}{8}$$

若长期厂商在 T 时刻偏离：生产 $y_T = \frac{3}{8}$， $\pi_T = \frac{5}{64}$

$$\pi_L' = \frac{1}{8}\sum_{t=0}^{T-1}\delta^t + \frac{9}{64}\delta^T$$

$$\Rightarrow \frac{d\pi_L'}{dT} = \frac{1}{8}\delta^T \ln\delta \frac{1-9\delta}{8(1-\delta)}$$

当 $\delta > \frac{1}{9}$时 在 $T = 0$时刻偏离

此时

$$\pi_L - \pi_L' = \frac{9\delta - 1}{8(1-\delta)} > 0$$

故不会偏离

综上： $\delta > \frac{1}{9}$，该冷酷战略为 SPNE