8.6

None Leon

2021/2/4

1. B 城的市民有两种出行方式：公共交通和私家车。为鼓励绿色出行, B 城补贴市民的公共交通花销，其补贴力度为原价格的 50%。即本需要花费 $\mathbf{p_1}$ 元/公里的线路在补贴后只需要花费 $0.5\mathrm{p}_1$ 元/公里即可。假设 B 城的市民平均每月出行的公共交通通勤里程为 x_1 公里，私家车里程为 x_2 公里。私家车出行的成本 为 p_2 元/公里。市民从出行中获得的效用为 $\mathrm{u}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2)=\mathrm{x}_1^{0.2}\mathrm{x}_2^{0.8}$。现有专家提出, 为缓解高峰时段公共交通运力不足，建议取消公共交通价格补贴，使得价格恢 复为 p_1 元/公里。但这样会使市民的出行效用降低，所以建议每月给每一位市民 一笔固定的收入补贴 s 元。政府的目标是花最少的钱使市民的效用在补贴前后 无差异。

1) 为了使得市民的效用水平在补贴方式改变前后没有差异，s 最少应 为多少?

2) 改为固定收入补贴之后市民选择的出行方式 x_1 和 x_为多少?

3) 哪一种补贴方式对政府的财政负担较小，价格补贴还是固定收入补 贴？差异为多少元?

3.某竞争性厂商有两个工厂，各自的成本函数是 $c_1(y_1)=2y_1^2+90, c_2(y_2)=6y_2^2+40$ 。如 果该厂商生产 32 单位产品，那么:

1) 每间工厂应该生产多少产品?

2) 厂商的总成本函数是多少?求出规模报酬区间。

solution:

市民的效用最大化问题为：

max: $U(x_1,x_2)=x_1^{0.2}x_2^{0.8}\ st: \quad p_1x_1+p_2x_2=m$

拉格朗日函数为：

$$\mathcal{L}=x_1^{0.2}x_2^{0.8}+\lambda[m-p_1x_1-p_2x_2]$$

$$\text{Focs:}\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x_1}=0.2x_1^{-0.8}x_2^{0.8}-\lambda p_1=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2}=0.8x_1^{0.2}x_2^{-0.2}-\lambda p_2=0\end{cases}$$

解得：$\begin{cases} x_1 = \frac{m}{5p_1} \\ x_2 = \frac{4m}{6p_2} \end{cases}$

$$V(P_1, P_2, m) = \left(\frac{m}{5P_1}\right)^{\frac{1}{5}} \left(\frac{4m}{5P_2}\right)^{\frac{4}{5}}$$

1)a.价格补贴下$(p_1, p_2, m) = \left(\frac{p_1}{2}, p_2, m\right)$

市民的间接效用函数： $U_1 = \left(\frac{2m}{5P_1}\right)^{\frac{1}{5}} \left(\frac{4m}{5P_2}\right)^{\frac{4}{5}}$

b.固定补贴下$(p_1, p_2, m) = (p_1, p_2, m + s)$

市民间接效用函数： $U_2 = \left(\frac{m+s}{5p_1}\right)^{\frac{1}{5}} \left(\frac{4(m+s)}{5p_2}\right)^{\frac{4}{5}}$

两者之间无差异，则 $U_1 = U_2$

即至少补贴为 $s^* = \left(2^{\frac{1}{5}} - 1\right) \cdot m$

2)固定补贴下 $(p_1, p_2, m) = (p_1, p_2, m + s^*)$

则最优选择为：
$$\begin{aligned} (x_1, x_2) &= \left(\frac{m+5^*}{5p_1}, \frac{4(m+s^*)}{5p_2}\right) \\ &= \left(\frac{2^{\frac{1}{5}}m}{5p_1}, \frac{2^{\frac{11}{5}}m}{5p_2}\right) \end{aligned}$$

3)价格补贴下的支出： $T_1 = \frac{p_1}{2} x_1 = \frac{1}{5} m$

固定收入补贴下的支出为$T_2 = s = (2^{\frac{1}{5}} - 1) \cdot m$

由于$\varDelta T = T_1 - T_2 = \left(1.2 - 2^{\frac{1}{5}}\right) \mathrm{m} \doteq 0.05 \mathrm{~m} > 0$

故固定收入补贴下政府的补贴复旦更小，差额为$\varDelta T$

2 生产函数为 $y = f(x_1, x_2, x_3) = \left[x_1^{\rho} + (\min\{x_2, x_3\})^{\rho}\right]^{\frac{1}{\rho}}$ 三种投入要素的价格为 w_1, w_2, w_3，求成本函数。

solution：

由于成本函数表示既定产量下的最优要素选择. $y = \left[x_1^{\rho} + min\{x_2, x_3\}^{\rho}\right]^{\frac{1}{\rho}}$ 则最优情况下，$x_2 = x_3$

成本最小化问题为：

min: $C = w_1x_1 + (w_2 + w_3)x_2$ st: $y = \left[x_1^{\rho} + x_2^{\rho}\right]^{\frac{1}{\rho}}$

拉格朗日函数： $L = w_1x_1 + (w_2 + w_3)x_2 + \lambda\left[y - \left(x_1^{\rho} + x_2^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}}\right]$

Focs: $\frac{\partial L}{\partial x_1} = w_1 - \lambda\frac{1}{\rho}\left(x_1^{\rho} + x_2^{\rho}\right)^{\frac{1-\rho}{\rho}} \cdot \rho x_1^{\rho-1} = 0$ $\frac{\partial L}{\partial x_2} = w_2 + w_3 - \lambda\frac{1}{\rho}\left(x_1^{\rho} + x_2^{\rho}\right)^{\frac{1-\rho}{\rho}} \cdot \rho x_2^{\rho-1} = 0$

解得： $\frac{w_1}{w_1+w_3} = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\rho-1}$

联合生产函数 $y = (x_1\rho + x_2\rho)^{\frac{1}{\rho}}$得：

$$x_1 = \frac{w_1^{\frac{1}{\rho-1}}}{[w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + (w_2 + w_3)^{\frac{\rho}{\rho-1}}]^{\frac{1}{\rho}}} \cdot y$$

$$x_2 = \frac{(w_2 + w_3)^{\frac{1}{\rho-1}}}{[w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + (w_2 + w_3)^{\frac{\rho}{\rho-1}}]^{\frac{1}{\rho}}} \cdot y$$

$$c(y) = [w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + (w_2 + w_3)^{\frac{\rho}{\rho-1}}]^{\frac{\rho-1}{\rho}} y$$

3.某竞争性厂商有两个工厂，各自的成本函数是 $c_1(y_1) = 2y_1^2 + 90, c_2(y_2) = 6y_2^2 + 40$ 。如 果该厂商生产 32 单位产品，那么:

1) 每间工厂应该生产多少产品?
2) 厂商的总成本函数是多少?求出规模报酬区间。

solution:

1)厂商的成本最小化问题为：

$$\begin{aligned} \text{min:} \quad & c_1(y_1) + c_2(y_2) \\ \text{st:} \quad & y_1 + y_2 = y \quad (y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0) \end{aligned}$$

构建拉格朗日函数：

$$L = 2y_1^2 + 90 + 6y_2^2 + 40 + \lambda(y - y_1 - y_2)$$

$$\text{Focs:} \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial y_1} = 4y_1 - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y_2} = 12y_2 - \lambda = 0 \end{cases}$$

解得：$\begin{cases} y_1 = \frac{3}{4}y \\ y_2 = \frac{1}{4}y \end{cases}$

由于$y = 32$,即工厂 1 生产 24 单位产品，工厂 2 生产 8 单位产品。

2)厂商的成本函数为：

$$\begin{aligned} c(y) \quad &= c_1\left(\frac{3}{4}y\right) + c_2(\frac{1}{4}y) \\ &= \frac{3}{2}y^2 + 130 \end{aligned}$$

平均成本 $AC(y) = \frac{c(y)}{y} = \frac{3}{2}y + \frac{130}{y}$

令 $\frac{dAC(y)}{dy} = \frac{3}{2} - \frac{130}{y^2} = 0$

得$y = \sqrt{\frac{260}{3}} \doteq 9 - 3$

故：

当 $y \in (0,9,3)$时，生产的规模报酬递增

当$y \in (9.3, +\infty)$时，生产的规模报酬递减

当$y = 9.3$时，生产的规模报酬不变