10.16

None Leon

2021/1/27

1.环球皮草位于巴芬岛克莱德，在全世界销售高品质的皮草蝴蝶结，每件售价 5 美元。毛皮领结（q）的生产函数由下式给出

$$q = 240x - 2x^2$$

其中x是每周使用的毛皮数量。毛皮仅由丹的贸易站提供，该站通过雇佣爱斯基摩人捕猎者以每天 10 美元的价格获得。丹的毛皮周生产函数如下

$$x = \sqrt{l}$$

其中，l表示爱斯基摩人每周使用的时间天数。

1)在一个准竞争的案例中，Universal Fur 和 Dan 的交易站都是毛皮的价格接受者，均衡价格px是多少，将交易多少毛皮？

2)假设丹是一个垄断者，而环球皮草继续是一个价格接受者。毛皮市场将出现什么样的均衡？

3)假设 Universal Fur 充当一个单声主义者，而 Dan 充当一个价格接受者。平衡会是什么？

4)用图表表示你的结果，并讨论在普华永道和丹之间的双边垄断谈判中可能出现的均衡类型。

solution:

1)均为价格的接受者：

U 公司利润最大化：

$\max: \pi_u = 5(240x - 2x^2) - p_x \cdot x$

Foc: $\frac{d\pi_v}{dx} = 1200 - 20x - p_x = 0$

$$\Rightarrow \quad x^d = 60 - \frac{1}{20}p_x$$

D 公司利润最大化： max: $\pi_D = p_x \cdot \sqrt{l} - 10l$

$$Foc: \frac{d\pi_p}{dl} = p_x \cdot \frac{1}{2\sqrt{l}} - 10 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^s = \frac{1}{20} p_x$$

均衡时： $x^d = x^s$

$$\Rightarrow \quad p_x = 600$$

$x = 30, \quad l = 900$

2）D 为垄断者，U 为价格接受者

$$x^d = 60 - \frac{1}{20} p_x \Rightarrow p_x = 1200 - 20x$$

D 公司利润最大化：

$$\max: \pi_D = x(l)[1200 - 20x(l)] - 10l$$

$$\text{Foc:} \frac{d\pi_D}{dL} = 1200 \cdot \frac{1}{2\sqrt{L}} - 30 = 0$$

$$\Rightarrow l \quad = 400; x = 20$$
$$p_x = 800$$

3）u 为垄断者，D 为价格接受者

$$x^s = \frac{1}{20} p_x \Rightarrow p_x = 20x^s$$

U 公司利润最大化：

$$\max: \pi_v = 5(240x - 2x^2) - 20x^2$$

$$Foc: \quad \frac{d\pi_0}{dx} = 1200 - 60 \cdot x = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = 20, \quad p_x = 400, \quad l = 400$$

4）U 与 D 均为垄断厂商

此时 $x = 20. \quad 400 \leq P_x \leq 800,$

p_x的具体数值取决于 U 与 D 的讨价还价能力

2）对应 D 具有完全议价权

3）对应 U 具有完全议价权

2.在一个民事赔偿中，原告将聘请某律师为代理。案件可能的结果有两种，即原告获得的赔偿可 的概率为 1/e, 而结果 $y_2 = 10000$ 出现的概率为 $1 - 1/e$ 。律师采用努力程度 e 的成本为 $c(e) = e^2 + 700$, 其中 700 为律师的固定成本。原告付给律师的费用可以与案件吻判冲结果有关，记为（w_1, w_2），其中两个变量分别代表 两种

判决结果下支付的律师费。律师和原告均为风险中性。在这个博奕中，原告首先提出一个律师费支付方案， 律师决定是否接受。如果不接受，原告放弃聘请律师，并接受结果 $y_1 = 8000$: 如果接受，即形成聘用合同关系， 律师选择其努力程度。案件的判决结果实现后，原告根据合同支付律师费。

(1) 如果原告能够观察和验证律师的工作努力程度，并且可以将其写入合同，请找出原告的最优支付方案。 (8 分)

(2) 如果原告不能观察律师的工作努力程度，请找出原告的最优支付方案。(12 分)

solution：

1）若 e 可观测，则 $w = w(e)$

原告最大化期望收益，规定 e

$$\max: E\pi = 10000\left(1-\frac{1}{e}\right) + 8000\frac{1}{e} - w$$

$$\text{st:} \quad w - e^2 - 700 \geq 0$$

$$\Rightarrow \max: E\pi = 10000(1-e) + 8000\frac{1}{e} - e^2 - 700$$

$$\text{Foc:} \frac{dE\pi}{\text{de}} = 2000 \cdot \frac{1}{\text{e}^2} - 2\text{e} = 0$$

$$\Rightarrow \quad e^* = 10 \quad ; \quad w^* = 800$$

最优合同为：

$$\begin{cases} w & = \begin{cases} 800 & e \geq 10 \\ 0 & 1 \leq e < 10 \end{cases} \\ E\pi & = 9000 \end{cases}$$

2）若 e 不可观测，则 $w = w(x)$

设计合同使得律师选择 e^*

$$E\pi = 10000\left(1-\frac{1}{e^*}\right) + 8000\frac{1}{e^*} - \left(1-\frac{1}{e^*}\right)w_1 - \frac{1}{e^* w_2}$$

$$st: \quad \left(1-\frac{1}{e^*}\right)w_1 + \frac{1}{e^*}w_2 - (e^*)^2 - 700$$
$$\geq \left(1-\frac{1}{e}\right)w_1 + \frac{1}{e}w_2 - e^2 - 700$$

$$\left(1-\frac{1}{e^*}\right)w_1 + \frac{1}{e^*}w_2 - (e^*)^2 - 700 \geq 0 \quad (IR)$$

首先对 IC 机制进行简化

令 $f(e)=\left(1-\frac{1}{e}\right)w_1+\frac{1}{e}w_2-e^2-700$ 在 $e^*=10$处取最大值

$\Rightarrow f'(e)=\dfrac{w_1-w_2}{e^2}-2e=0$

$\Rightarrow w_1-w_2=2000$

其次简化整体优化条件：

$\max: E\pi=9800-\dfrac{9}{10}w_1-\dfrac{1}{10}w_2$

st: $\begin{cases} w_1-w_2=2000 \\ \frac{9}{10}w_1+\frac{1}{10}w_2-800\geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} w_1=1000 \\ w_2=-1000 \end{cases}; \quad E\pi=9000$

3. 一个卖者有不可分割的单位某种物品出售。有两个潜在的买家进行二级拍卖。第一个买 家对出售物的评价是 V_1, 第二个买家对出售物的评价是 V_2, 且这两个评价对他们来说是共同知识。

1)写出这个博亦的标准表达式。

2)证明: 对每一个买家，报价等于他们对于出售物的评价是一个弱占优战略。

3)论证每个买家的报价等于出售物的评价是这个博变的一个纳什均衡。在这个均衡之中，哪一 个买家得到出售物?

4)在这个博亦中，还存在其他纳什均衡吗? 如果存在，则在这些均衡之中，哪个买家最终得到 出售物?

solution：

1）假设买着 i 的报价为 $\b_i(i=1,2)$ ，收益为 $\pi_i(i=1,2)$

$$\pi_1=\begin{cases} v_1-b_2 & b_1>b_2 \\ \dfrac{1}{2}(v_1-b_1) & b_1=b_2 \\ 0 & b_1<b_2 \end{cases}$$

$$\pi_2=\begin{cases} V_2-b_1 & b_2>b_1 \\ \dfrac{1}{2}(v_2-b_2) & b_2=b_1 \\ 0 & b_2<b_1 \end{cases}$$

2）3）证明：$(b_1,b_2)=(V_1,V_2)$为弱占优策略 NE

给定 $b_2 = V_2$，证

$b_1 = V_1$为弱占优战略

若 $v_1 < v_2$

$$\pi_1 = \begin{cases} V_1 - b_2 > 0 & b_1 \geq b_2 \\ 0 & b_1 < b_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad b_1 = V_1$为弱占优战略

若 $V_1 > V_2$

$$\pi_1 = \begin{cases} V_1 - b_2 > 0 & b_1 > b_2 \\ 0 & b_1 \leq b_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad b_1 = v_1$为若占优战略

若 $V_1 = V_2$

$$\pi_1 = \begin{cases} v_1 - b_2 < 0 & b_1 > b_2 \\ 0 & b_1 \leq b_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow b_1 = v_1$为弱占优战略

同理

给定 $b_1 = v_1$，$\quad b_2 = v_2$为弱占优战略

综上 $(b_1, b_2) = (v_1, v_2)$为弱占优战略 NE

均衡结果：

若 $v_1 > v_2$，则 1 得到商品

若 $v_1 < v_2$，则 2 得到商品

$v_1 = v_2$，则一人一半

4）当 $v_1 < v_2$时

$b_1 < v_1$为非均衡

此时 $b_2 = b_1 + \varepsilon \quad (\varepsilon > 0)$即可获取正利润，买家 1 可通过加价 $b_1' = b_2 + \varepsilon'(\varepsilon' > 0)$ 获取正利润

$b_1 > v_2$

若 $b_2 \geq b_1$，均亏损

若$v_1 < b_2 < b_1$，买家 1 亏损，偏离

若 $b_2 \leq v_1$，则买家 2 弱占优，买家 1 盈利不偏离

$v_1 < b_1 \leq v_2$时 同理

$b_2 > b_1$为弱占优策略，

b_1弱占优策略

当 $v_1 > v_2$时，同理

当 $v_1 = v_2 = v$时

当$b_1 < v$：非均衡

当 $b_2 > v$时，b_1，b_2为弱占优策略

$b_1 > v: b_2 < v$成立

综上

$$\begin{cases} V_1 < V_2\text{：}\textit{其他策略NE为} \\ \{(b_1, b_2) \mid b_1, v_2, b_2 \leq v_1 \quad v_1 < b_1 \leq v_2, b_2 > b_1\} \\ v_1 > v_2\text{：}\textit{其他策略均衡为} \\ \{(b_1, b_2) \mid b_2 > v_1, b_1 \leq v_2 \quad v_2 < b_2 \leq v_1, b_1, x b_2\} \\ v_1 = v_2\text{：}\textit{其他策略均衡为} \\ \quad \{(b_1, b_2) \mid \quad b_1 < v < b_2 \quad b_2 < v < b,\} \end{cases}$$