# 10.6

None Leon

2021/1/26

1. (15 分 ) 假设有 A 和 B 两座城市,劳动人口均为 L,其产出为 $y_a = aLh_a, y_b = bLh_b$, $y_a$ 为城市 A 的产出,a 为 A 城市的技术效率, $h_a$ 为 A 城市劳动力人均教育水平。B 城市 的变量含义依次类推。每个城市政府可通过投入改革教育水平,A 城市把 L 名劳动 者教育到 $h_a$ 水平的总成本为 $cLh_{a,}$ 其中 c 为成本参数。$B$ 城市 的相应成本为 $cLh_b^2$ 。

(1)(5 分)A 城市政府选择教育水平 hhaa 来最大化当地净产出 $aLh_a - cLh_a^2$; B 城市政府选择教育水平 $h_b$ 来最大化当地净产出 $aLh_b - cLh_b^2$,求两座城市的最优教育水平。

(2)(5 分)假设因为 A 城市的技术效率高于 B 城市,即 a > b 。因此有 m 名 B 城市的劳 工在受到教育后移居到 A 城市,注意其教育程度 h_b 在迁移后不变。假设 B 城市在 决定教育投入时预见到了这一迁移行为,但无法向迁移的劳工收回 教育成本。迁移 后两地的产出为 $a(Lh_a + mh_b)$ 和 b $(Lh_b - mh_b)$ 。求两地的最 优教育水平。和(1)相 比,允许迁移后的最优教育水平有何变化?

(3)(5 分)假设中央政府介入教育,承担了教育成本,通过选择 $h_a$ 和 $h_b$ 来最大化两地的 总净产出,即 $a(Lh_a + mh_b) + b(Lh_b - mh_b) - cLh_a^2 - cLh_b^2$ 。求两地 最优教育水平。 和(1)相比,此种情况的最优教育水平有何变化?

solution:

1)A 城市净产出最大化：

$$\max: \pi_a = a \cdot L \cdot h_a - c \cdot Lh_a^2$$

$$Foc \quad = \frac{d\pi_a}{dh_a} = a \cdot L - 2c \cdot 2h_a = 0$$

$$\frac{d^2\pi a}{dha} = -2c \cdot L < 0$$

解得：

$$h_a^* = \frac{a}{2c}$$

同理

$$h_b^* = \frac{b}{2c}$$

2）允许迁移后 A 城市净产出最大化：

$\max\pi_a = a(L \cdot h_a + m \cdot h_b) - c \cdot Lh_a^2$

$$Foc:\quad \frac{d\pi_a}{dha} = a \cdot L - 2c \cdot Lh_a = 0$$
$$\frac{d\pi_a}{dh_a} = -2c \cdot L < 0$$

得： $h_a^{**} = \frac{a}{2c} = h^*a$

允许迁移后 B 城市净产出最大化：

$\max: \pi_b = b(L-m)h_b - c \cdot Lh_b^2$

$$Foc: \frac{d\pi_b}{dh_b} = b(L-m) - 2cLh_b = 0$$

$$\frac{d^2\pi_b}{dh^2b} = -2cL < 0$$

得 $h_b^{**} = \frac{b}{2c} \cdot \frac{L-m}{L} < h_b^*$

与 1）相比 $h_a^{**}$不变

$h_b^*$下降

$h_b^{**}$随 m 的上升而不断下降

3）中央政府最大化总净产出：

$\max: \pi = a \cdot (L \cdot h_a + m \cdot h_b) + b(L-m)h_b - c \cdot Lh_a^2 - c \cdot Lh_b^2$

$$\text{Foc:} \begin{cases} \frac{\partial\pi}{\partial h_a} = a \cdot L - 2 \cdot cLh_a = 0 \\ \frac{\partial\pi}{\partial h_b} = a \cdot m + b(L-m) - 2c \cdot Lh_b = 0 \end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases} h_a = \dfrac{a}{2c} = h_a^* \\ h_b = \dfrac{b}{2c} + \dfrac{a-b}{2c} \cdot \dfrac{m}{L} > h_b^* \end{cases}$$

与 1）相比 $h_a$不变， $h_b$上升，随着 m 的上升而不断上升，中央政府的行为激励了人口迁徙到生产率较高的地区，有利于社会总福利的上升。

2. (20 分 ) 在一个人 ( 既是消费者又是生产者 ) 的经济 $\varepsilon = \{X, Y, w\}$ 中，商品 1 和商品 2 在消费和生产 中分别满足下面的条件: $X = \{x \in R^2 \mid x_1 \geq 2, x_2 \geq$

0}, $Y = \{y \in R^2 \mid y_2 \le 2(-y_1)^2, y_1 \le 0\}$, 效用函数为 $U(x_1, x_2) = (x_1 - 2)x_2$, 初始资源京赋为 $w = (4,0)$ 。

(1) 对于价格

$$p = (p_1, \quad p_2) \in R^2$$

(2) 写出生产者问题并求解 最大化利润下的 $y_1$ 和 $y_2$

（2）假设财富满足 $w \ge 2p_1$, 对于

$$p = (p_1, \quad p_2) \in R^2$$

写出消费者问题并求解对 $x_1$ 和 $x_2$ 的需求量。

（3）现在假设财富取决于初始辣赋和利润，请推导出商品 1 的市场均衡条件。假如此时 $p_1 = 1, p_2$ 为多少?

(4) 请找出 $\varepsilon$ 的瓦尔拉斯均衡（还是令 $p_1 = 1$ )。

solution：

1）生产者利润最大化：

$$\begin{aligned} \max: \pi \quad &= P_2 y_1 - p_1(-y_1) \\ &= 2p_2 y_1^2 + p_1 y_1 \end{aligned}$$

$$Foc: \begin{cases} \dfrac{d\pi}{dy_1} = 4p_2 y_1 + p_1 \\ \dfrac{d^2\pi}{dy_1^2} = 4p_2 > 0 \end{cases}$$

则 $y_1 = -\infty, \quad y_2 = +\infty$

2）消费者效用最大化：

$$\begin{aligned} \max: \quad & U = (x_1 - 2)x_2 \\ \text{st:} \quad & P_1 x_1 + P_2 x_2 = w \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{w + 2p_1}{2p_1} \\ x_2 = \dfrac{w - 2p_1}{2p_2} \quad (w \ge 2p_1) \end{cases}$$

3）市场出清：

$x_1 + (-y_1) = 4$

由于 $x_1 \ge 2$ 则 $y_1 = -2$

此时，价格小于等于 4

若 $p_1=1$，则$p_2 \geq \frac{1}{4}$

4）瓦尔拉斯均衡：

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = -2 \\ y_2 = 8 \end{cases}$$

$$p^* = \frac{p_1}{p_2} \leq 4$$

帕累托最优：

max: $\quad U = (x_1 - 2)x_2$

st: $\quad x_1 + (-y_1) = 4$

$x_2 = y_2 = 2 \cdot (-y_1)^2$

$x_1 \geq 2 \quad ; \quad x_2 \geq 0$

$$Foc: \frac{dU}{dy_1} = 2(4y_1 + 3y_1^2) = 0$$

解得：$y_1 = -\frac{4}{3}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{8}{3} \\ x_2 = \dfrac{32}{9} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = -\dfrac{4}{3} \\ y_2 = \dfrac{32}{9} \end{cases}$$

说明完全竞争市场不能达到帕累托最优的配置。

若 $y_2 \leq 2\sqrt{-y_1}$，生产可能性集为凸集

$(y_1 \leq 0)$

上产端：

max: $\pi = 2p_2\sqrt{-y_1} - p_1(-y_1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = -\left(\dfrac{p_2}{p_1}\right)^2 \\ y_2 = \dfrac{2p_2}{p_1} \end{cases}$$

$$\pi = \frac{p_2^2}{p_1}$$

消费端：

max: $\quad U = (x_1 - 2)x_2$

st: $\quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = 4p_1 + \pi$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 + \dfrac{\pi}{2p_1} \\ x_2 = \dfrac{2p_1 + \pi}{2p_2} \end{cases}$$

市场出清：

$x_1 + (-y_1) = 4$

$$\Rightarrow p^* = \frac{p_1}{p_2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{10}{3} \\ x_2 = 2 \cdot \sqrt{\dfrac{2}{3}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = -\dfrac{2}{3} \\ y_2 = 2 \cdot \sqrt{\dfrac{2}{3}} \end{cases}$$

3．王刚和李红作为一个小组完成作业。该作业通过与否是按照小组来评判的。通过对二人 的效用都是 3，没通过的效用是 0。二人可以选不努力(N)，低努力(L)，和高努力(H)。对于李 红，三种努力的成本分别是 0，1，2; 对于王刚，三种努力的成本分别是 0，2，4。只有当 至 少一个人选择 H 或者两人都选择 L 时，小组才能顺利通过。

（1）写出所有博变策略矩阵，并找出所有纳什均衡。

（2）如果李红可以观察王刚的策略后再选择自己的，写出子博亦精炼纳什均衡。

（3）如果王刚可以先观察李红的策略，再选择自己的策略，求子博亦精炼纳什均衡。

(4) 王刚会更偏好哪一个策略?

solution：

1）博弈矩阵

左边为王刚，右边为李红

| | | Li | | |
|---|---|---|---|---|
| | | H | L | N |
| | H | (-1,-1) | (-1,2) | (-1,3) |
| W | L | (1,1) | (1,2) | (-2,0) |
| | N | (3,1) | (0,-1) | (0,0) |

纯策略 NE:

$(L, L), (N, H)$

混合策略 NE: 假设李红选择 H,L，N 的概率分别为：

$p_1, p_2, (1 - p_1 - p_2)(0 < p_1, p_2 - 1)$

则王刚在选择之间无差异：

$\pi_H = -1 \quad \pi_L = 2(p_1 + p_2) - 2 \quad \pi_N = 3p_1$

$\pi_H = \pi_L = \pi_N \Rightarrow p_1 = -\frac{1}{3} < 0$

故仅存在纯策略 NE

2)王刚先，李红后：

博弈树如下：左边表示王刚，右边表示李红

由逆向归纳法知：

$\text{SPNE} = \{N, (N, L, H)\}$

均衡结果为：$(N, H) = (3,1)$

$\text{SPNE} = \{L, (N, L, N)\}$

注均衡与均衡的结果不一样

3）李红先，王刚后 博弈树如下：左边表示王刚，右边表示李红

由逆向归纳法知： $\mathrm{SPNE} = \{N, (N, L, H)\}$

均衡结果为： $(L, L) = (2,1)$

4）综上：王刚更加青睐于自己的选择，即 2）中的策略。