

10.15

None Leon

2021/1/27

1.阿贾克斯煤炭公司是该地区唯一的雇工公司。它可以雇佣任意数量的女工或男工。女性的供给曲线如下：

$$l_f = 100w_f$$

对男人来说

$$l_m = 9w_m^2$$

其中， w_f 和 w_m 分别是支付给女性和男性工人的小时工资率。假设阿贾克斯在一个完全竞争的市场上以每吨 5 美元的价格出售其煤炭，并且雇佣的每个工人（无论男女）每小时可以开采 2 吨。如果公司希望利润最大化，应该雇用多少男女工人，这两个群体的工资率是多少？阿贾克斯的矿山机械每小时能赚多少利润？这一结果与 Ajax 受到限制（比如说，受到市场力量的限制）根据其边际产品的价值向所有工人支付相同的工资相比，会有什么不同呢？

solution:

1)独买利润最大化

$$\max: \pi = pf(l_f + l_m) - w_f(l_f) \cdot l_f - w_m(l_m) \cdot l_m$$

将 $p = 5$, $f(l) = 2l$, $w_f l_f = \frac{l_f}{10}$ $w_m(l_m) = \frac{1}{3}\sqrt{l_m}$ 带入

$$\Rightarrow \max: \pi = 10(1f + \ln) - \frac{1}{100}l_f^2 - \frac{1}{3}l_m^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{FOC: } \begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial l_f} = 10 - \frac{1}{50}l_f = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial l_m} = 10 - \frac{1}{2}l_m^{\frac{1}{2}} = 0 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} l_f = 500 \\ l_m = 400 \end{cases} \quad \begin{cases} w_f = 5 \\ w_m = \frac{20}{3} \end{cases}$$

$$\pi = 11500$$

2) 若工资统一且 $w = MRPL = 10$

则

$$l_f = 1000, \quad l_m = 900, \quad \pi = 0$$

2. 假设你拥有一个杂货铺，并雇用一个人替你照看它。这个雇员的效用水平依赖于他能得到的工资 y 和他付出的努力水平 a : $U(y, a) = \sqrt{y} - a$; 他可选的努力水平有两种: $a = 3$ 或 $a = 0$; 假设这个雇员的保留效用是 0。你是一个风险中立者，目标是尽力使商铺营业额 x 达到最大。考虑以下情况下你的工资支付政策。

- 1) 雇员的努力 $a = 3$ 时，商铺营业额 $x = 270$: $a = 0$ 时， $x = 70$ ，你可以毫不费力地监视雇员的工作。
- 2) 商铺的营业结果与 (1) 的假设相同，但你无法知道雇员是怎样工作的。
- 3) 除了雇员的努力水平外，商铺的营业结果还受某些外在因素的影响。假设有三种可能的营业额: 0、100 和 400，而你和雇员都发现一定努力投入下实

现各种营业结果的概率存在以下规律:

	0	100	400
$a = 3$	0.2	0.4	0.4
$a = 0$	0.4	0.4	0.2

如果你看不到雇员的努力水平，你的最优激励契约是什么？

solution:

委托代理——离散型

- 1) 可观测 a

$$y(a) = \begin{cases} 9 & a = 3 \\ 0 & a = 0 \end{cases}$$

- 2) 不可观测 a , 可观测 x $y(x) = \begin{cases} 9 & x = 270 \\ 0 & x = 70 \end{cases}$

- 3) 不可观测 a , 且 x 受到外在因素影响

若激励雇员采取 $a = 3$, 则

$$\max: \pi = 200 - 0.2y_1 - 0.4y_2 - 0.4y_3$$

$$\begin{cases} 0.2\sqrt{y_1} + 0.4\sqrt{y_2} + 0.4\sqrt{y_3} - 3 \geq 0 (IR) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0.2\sqrt{y_1} + 0.4\sqrt{y_2} + 0.4\sqrt{y_3} - 3 \geq 0.4\sqrt{y_1} + 0.4\sqrt{y_2} + 0.2\sqrt{y_3} (IC) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = 200 - 0.2y_1 - 0.4y_2 - 0.4y_3 &+ \lambda [0.2\sqrt{y_1} + 0.4\sqrt{y_2} + 0.4\sqrt{y_3} - 3] \\ &+ u [0.2\sqrt{y_3} - 0.2\sqrt{y_1} - 3] \end{aligned}$$

$$\text{FOC:} \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_1} = -0.2 + \lambda \cdot \frac{0.1}{\sqrt{y_1}} - u \cdot \frac{0.1}{\sqrt{y_1}} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_2} = -0.4 + \lambda \cdot \frac{0.2}{\sqrt{y_2}} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_3} = -0.4 + \lambda \cdot \frac{0.2}{\sqrt{y_3}} + u \cdot \frac{0.1}{\sqrt{y_3}} = 0 \end{cases}$$

$$\text{k-T 条件} \begin{cases} \lambda[0.2\sqrt{y_1} + 0.4\sqrt{y_2} + 0.4\sqrt{y_3} - 3] = 0 \\ u[0.2\sqrt{y_3} - 0.2\sqrt{y_1} - 3] = 0 \end{cases}$$

若 $\lambda = u = 0$, 不成立

若 $u = 0, \lambda > 0$:
 $y_1 = y_2 = y_3 = 9, \quad \lambda = 6$, 成立

若 $\lambda = 0, u > 0$:, 不成立

若 $\lambda > 0, \quad \mu > 0$:

$\lambda = 18, \quad u = 6, \quad 2\sqrt{y_1} = \lambda - u < 0$ 不成立

综上: $y_1 = y_2 = y_3 = 9. \quad \pi = 191$

若采取激励雇员采取 $a=0$, 则:

$$\max: \pi = 200 - 0.4y_1 - 0.4y_2 - 0.2y_3$$

$$\begin{cases} 0.4\sqrt{y_1} + 0.4\sqrt{y_2} + 0.2\sqrt{y_3} \geq 0 (IC) \\ 0.4\sqrt{y_1} + 0.4\sqrt{y_2} + 0.2\sqrt{y_3} \geq 0.2\sqrt{y_1} + 0.4\sqrt{y_2} + 0.4\sqrt{y_3} - 3 \quad (IR) \end{cases}$$

$$\mathcal{L} = 200 - 0.4y_1 - 0.4y_2 - 0.2y_3 + \lambda[0.4\sqrt{y_1} + 0.4\sqrt{y_2} + 0.2\sqrt{y_3}] + u[3 + 0.2\sqrt{y_1} - 0.2\sqrt{y_3}]$$

$$\text{Foc:} \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_1} = -0.4 + \lambda \cdot \frac{0.2}{\sqrt{y_1}} + u \cdot \frac{0.1}{\sqrt{y_1}} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_2} = -0.4 + \lambda \cdot \frac{0.2}{\sqrt{y_2}} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_3} = -0.2 + \lambda \cdot \frac{0.1}{\sqrt{y_3}} - u \cdot \frac{0.1}{\sqrt{y_3}} = 0 \end{cases}$$

$$\text{K-T 条件:} \begin{cases} \lambda[0.4\sqrt{y_1} + 0.4\sqrt{y_2} + 0.2\sqrt{y_3}] = 0 \\ u[3 + 0.2\sqrt{y_1} - 0.2\sqrt{y_3}] = 0 \end{cases}$$

若 $\lambda = u = 0$, 不成立

若 $\lambda > 0$ 且 $u = 0$: $0.4\sqrt{y_1} + 0.4\sqrt{y_2} + 0.2\sqrt{y_3} = 0$

$\lambda = 2\sqrt{y_1} = 2\sqrt{y_2} = 2\sqrt{y_3} \Rightarrow y_1 = y_2 = y_3 = 0$ 不成立
 $\Rightarrow \lambda = 0$

若 $\lambda = 0$ 且 $u > 0$, 不成立

若 $\lambda > 0$ 且 $u > 0$, $4\sqrt{y_1} = 2\lambda + u$; $4\sqrt{y_2} = 2\lambda$, $2\sqrt{y_3} = \lambda - \mu$

$$\Rightarrow 0.4\sqrt{y_1} + 0.4\sqrt{y_2} + 0.2\sqrt{y_3} = 0 \quad (\lambda > 0)$$

$$\Rightarrow 0.5\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ 不成立}$$

综上: 最优工资方案为: $y_1 = y_2 = y_3 = 9$

此时雇员选择 $a = 3, E\pi = |q|, EU = 0$

3. 两个企业在市场上进行产量竞争, 市场反需求函数为 $p = a - bQ$, 企业的边际成本为 $c_1 = c_2 = c$; 请回答下列问题:

- 1) 若双方制定产量时, 无法观测对方的产量, 求均衡产量和利润。
- 2) 若企业 1 可以先宣布产量, 企业 2 将企业 1 的产量视为既定, 然后决定自己的产量, 求均衡产量和利润。
- 3) 记企业有两种策略, 先定产和后定产, 请写出该博亦的标准表达式; 求解纯战略纳什均衡。如果将该博亦重复进行 50 次, 子博亦精炼纳什均衡是什么?
- 4) 有人提出双方合作会更好。如果双方合作, 平分利润; 如果都不合作, 则最终达到古诺均衡; 求合作的情况下, 每个企业的产量和利润。会比不合作好吗?
- 5) 承接上问, 此时企业有两种策略, 合作和不合作。如果有十方合作, 另一方不合作, 那么合作方生产合作产量, 不合作方生产对应最优产量; 请写出该博亦的标准表达式。该博亦的纯战略纳什均衡是什么? 如果该博亦进行 100 次, 请问双方合作是可持续的吗?
- 6) 如果双方不知道该博亦要进行多少次, 只知道下一时期碰面的概率为 p , 那么此概率需要满足什么条件, 才能让双方在每次碰面时都选择合作成为子博亦精炼纳什均衡?

solution:

1) 古诺竞争

$$\max: \pi_1 = (a - bq_1 - bq_2)q_1 - cq_1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q_1 = \frac{a - c - bq_2}{2b} \\ q_2 = \frac{a - c - bq_1}{2b} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q_1^c = q_2^c = \frac{a-c}{3b} \\ \pi_1^c = \pi_2^c = \frac{(a-c)^2}{9b^2} \end{cases}$$

2) 斯塔克伯格竞争

$$q_2 = \frac{a-c-bq_1}{2b}$$

$$\max: \pi_2 = [a - bq_1 - bq_2(q_1)] \cdot q_1 - cq_1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q_1^s = \frac{a-c}{2b} \\ q_2^s = \frac{a-c}{4b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_1^s = \frac{(a-c)^2}{8b} \\ \pi_2^f = \frac{(a-c)^2}{16b} \end{cases}$$

3) 先 (H_1) 后 (H_2) 定产

标准表达式 $||| 2 ||| - | - - | - - - - - | - - - | ||| H_1 | H_2 || 1 | H_1 | (\pi_1^c, \pi_2^c) | (\pi_1^s, \pi_2^t) ||| H_2 | (\pi_1^t, \pi_2^s) | (\pi_1^c, \pi_2^c) |$ 纯策略 NE: $NE: (H_1, H_1)$ 即均选择先定产，最终形成古诺均衡。

若重复 50 次：则 SPN 为 $NE: (H_1, H_1)$ 重复 50 次

$$4) \text{ 合作时: } \max: \pi^m = [a - b(q_1 + q_2)](q_1 + q_2) - c(q_1 + q_2)$$

$$\Rightarrow Q^m = q_1 + q_2 = \frac{a-c}{2b}$$

$$\Rightarrow \pi_1^m = \pi_2^m = \frac{\pi^m}{2} = \frac{(a-c)^2}{8b}$$

$$\Rightarrow \pi_i^m > \pi_i^c$$

即合作优于不合作

5) 首先说明合作的不稳定:

$$\text{不妨令 } q_1 = \frac{a-c}{4b}$$

$$\text{此时 } \max: \pi_2 = (a - bq_1 - bq_2) \cdot q_2 - cq_2$$

$$Foc: \frac{d\pi_2}{dq_2} = \frac{3}{4}(a-c) - 2bq_2 = 0$$

$$\Rightarrow q_2 = \frac{3(a-c)}{8b}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi_2^B = \frac{9(a-c)^2}{64b} > \frac{\pi^m}{2} \\ \pi_1^N = \frac{3(a-c)^2}{32b} < \frac{\pi^m}{2} \end{cases} \quad (\pi_1^N < \pi_1^c)$$

标准表达式： c_1 表示合作， c_2 表示不合作

		2	
		c_1	c_2
1	c_1	$(0.5\pi^m, 0.5\pi^m)$	(π_1^N, π_2^B)
	c_2	(π_1^B, π_2^N)	(π_1^c, π_2^c)

纯策略 NE

(c_2, c_2) 即双方均不合作，形成古诺均衡

若重读 100，结果不改变。

6) 若上方下一阶段相遇的概率为 p

考虑如下冷酷战略：

开始时选择合作 (c_1)直到对方选择不会随后一直采取不合作 (c_2)

均不偏离的收益

$$\pi_1 = \pi_2 = \frac{\pi^m}{2} \sum_{t=0}^{\infty} p^t = \frac{\pi^m}{2(1-p)}$$

若有一方偏离，不妨假设 1 偏离 $\pi_1 = \pi_1^B + \pi_1^c \sum_{t=1}^{\infty} p^t = \pi_1^B + \frac{p}{1-p} \pi_1^c$

不偏离的条件为：

$$p^* \geq 0.49$$