9.4

None Leon

2021/1/18

1. 年末农民的小麦收成有两种情况：好的情况发生概率为 0.8，收成 $y_1 = 10s^{0.5}$, s 为年初 他购买的种子数量; 坏的情况发生概率为 0.2 ，此时农民自身收成为 0，所有收入都来自保 险公司的赔付。保险公司只在坏的情况下对农民进行赔付, 对应年初农民购买的每一份保险, 保险公司赔付 1 公斤小麦。小麦种子的儡格为 1 元，保险的价格为 2 元，农民年初总共拥有 10000 元。

(1) 若农民的期望效用函数为 $U = \pi_1 \log(y_1) + \pi_2 \log(y_2)$, π_1, π_2 为好坏收成的概率，则此 时农民会购卖多少种子多少保险?

（2）若农民的效井函数为 $U = \min\{\log(y_1), \log(y_2)\}$, 则农民又会购买多少种子多少保险?

solution：

1）农民效用最大化：

$$\max: Eu = 0.8\ln y_1 + 0.2\ln y_2$$

$$\text{ST:} \begin{cases} y_1 = 10s^{\frac{1}{2}} \\ y_2 = F \\ s + 2F = 10000 \end{cases}$$

化简得： $Eu = 0.8\ln\left[10s^{\frac{1}{2}}\right] + 0.2\ln\left[5000 - \frac{1}{2}s\right]$

$$\text{FOC:} \frac{dEu}{ds} = \frac{0.4}{5} - \frac{0.1}{5000 - \frac{1}{2}s} = 0$$

解得：

$$s^* = \frac{20000}{3}$$

$$F^* = \frac{5000}{3}$$

2）农民效用最大化：

$$\max: \quad u = \min[\ln y_1, \ln y_2]$$

st：$\begin{cases} y_1 = 10S^{\frac{1}{2}} \\ y_2 = F \\ s + 2F = 10000 \end{cases}$

化简得：$u = \min\left[\ln\left(10s^{\frac{1}{2}}\right), \ln\left(5000 - \frac{1}{2}s\right)\right]$

最优条件为：

$$\ln\left(10s^{\frac{1}{2}}\right) = \ln\left(5000 - \frac{1}{2}s\right)$$

解得：

$$\begin{cases} s^{**} = 10200 - 200\sqrt{101} \doteq 8190 \\ F^{**} = 100\sqrt{101} - 100 \doteq 905 \end{cases}$$

2. 想象一下，吉列在西班牙的剃须刀片市场上拥有垄断地位。西班牙叶片的市场需求曲线为p（Q） $= 968 - 20Q$，，其中p是叶片的价格，Q是叶片的年需求量（单位：百万）。吉列有两个工厂，可以为西班牙市场生产刀片：一个在巴塞罗那，一个在马德里。巴塞罗那工厂的边际成本为$mc{1}\左（Q{1}\右）=8$，马德里工厂的边际成本为$mc{2}\左（Q{2}\右）=1+0.5q{2}$

1)找出吉列的利润最大化总产量（并表示为QT）和价格为西班牙市场的整体。

2)吉列将如何在巴塞罗那和马德里工厂之间分配产量？也就是说，QT的哪个部分应该来自$Q1$，哪个部分应该来自$Q2$？

3)假设吉列在巴塞罗那的工厂边际成本是 10 美分而不是 8 美分。也就是说，假设现在$mc{1}\left（Q{1}\right）=10$，而$mc{2}\left（Q{2}\right）$保持不变。你在 a 部分和 b 部分的答案会有什么变化？

solution：

1）产商的边际成本函数为：

$$MC(Q) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{2}Q & 0 < Q \leq 14 \\ 8 & Q > 14 \end{cases}$$

垄断厂商利润最大化：

$\max: \pi = Q^T(968 - 20Q^T) - c(Q^T)$

Foc: $\frac{d\pi}{dQ^T} = 968 - 40Q^T - MC(Q^T) = 0$

联立：$MR(Q^T) = MC(Q^T)$

解得： $Q^T = 24,\quad p^T = 488$

此时： $Q_1 = 10 \quad Q_2 = 14$

2）若 $MC_1 = 10. \quad MC_2 = 1 + \frac{1}{2}Q_2$

同理可得： $Q^T = 23.95 \quad p = 489$

$$\begin{cases} Q_1 = 5.95 \\ Q_2 = 18 \end{cases}$$

补充：MC_1为何值时，仅要利用工厂 2 生产

厂商的边际成本函数为：

$$MC = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2}Q & 0 < Q \leq 2c - 2 \\ c & Q > 2c - 2 \end{cases}$$

垄断厂商利润最大化：

$MR(Q^T) = MC(Q^T)$

临界点时： $968 - 40Q^T = 1 + \frac{1}{2}Q^T = c$

解得：

$c^* \doteq 12.94$

故当 $MC_1 \geq 12.94$时，仅利用企业 2 生产

3. (15 分) 考虑以下完全信息动态博奕。博奕的参与者为一个垄断性的上游企业 U 与一个垄断性的下游企业 D。在博亦的第一阶段，企业 U 以单位价格 $\mathbf{p_u}$ 向企 业 D 销售中间产品。在第二阶段，企业 D 把中间产品（一比一地）加工为最终 产品，并以单位价格 $\mathbf{p_d}$ 向消费者出售。假设企业 U 的生产成本为零，而企业 D 除购买中间产品的费用外亦无其它生产成本。最后，假设企业 D 面对的需求函 数为 $q(\mathbf{p_d}) = 1 - \mathbf{p_d}$。

(1) (3 分) 考虑博亦的第二阶段。给定上游企业的中间产品供给价格 $\mathbf{p_u}$ ，请求出下游企业关于最终产品的利润最大化定价。

(2) (5 分) 回到博亦的第一阶段。给定下游企业的利润最大化定价策略，请求 出上游企业的利润最大化定价（即子博亦精炼纳什均衡定价）。

(3) (2 分) 在均衡时，产生利润（即两个企业利润的加总）是多少？有多少最 终产品会销售给消费者?

(4) (5 分) 假设现在题中的上下游企业 U 和 D 合并为一个企业。请求出在此新的情形下，有多少最终产品会销售给消费者。与（3）中的情况对比，产业利润 与消费者福利有何变化?

solution

双重加价模型：

1）下游企业利润最大化：

$\max: \pi^d = \left(p_d - p_\mu\right)(1 - p_d)$

$Foc: \dfrac{d\pi^d}{dp^d} = 1 + p_u - 2p_d = 0$

解得： $p_d = \frac{1+p_u}{2} \quad q = \frac{1-p_u}{2}$

2）上游企业利润最大化：

$\max: \pi^u = p_u \cdot q$

$Foc: \dfrac{d\pi^u}{dp_u} = \dfrac{1}{2}(1 - 2p_u) = 0$

解得：

$p^u = \dfrac{1}{2}$

3）均衡时： $p_u = \frac{1}{2}, p_d = \frac{3}{4}, q = \frac{1}{4} \pi_u = \frac{1}{8}$， $\pi_d = \frac{1}{16}$， $\pi = \pi_d + \pi_u = \frac{3}{16}$

4）企业合并

利润最大化： max: $\pi = p(1 - p)$

FOC: $\frac{d\pi}{dp} = 1 - 2p = 0$

解得：

$p = \dfrac{1}{2}, \quad q = \dfrac{1}{2} \quad \pi = \dfrac{1}{4}$

与 3 相比 $\pi \uparrow$，cs $\uparrow (p \downarrow, q \uparrow)$

双重加价带来福利的损失

note：双重加价——产业链模型

第二阶段：

$$\begin{cases} \textit{下游企业的需求：} q^d = 1 - p^d \\ \textit{边际成本：} MC^d = p^u \\ \textit{边际收益：} MR = 1 - 2q^d \end{cases}$$

第一阶段：$\begin{cases} \textit{上游企业的需求：} q^u = \frac{1-p^u}{2} \textit{与下游企业} MR \textit{重合} \\ \textit{边际成本} MC^u = 0 \end{cases}$