8.7

None Leon

2021/2/4

1.假定市场有甲、乙两个消费者以及两种商品 X_1 和 X_2,X_1 代表珀饼， x_2 代表其他商品。 假定甲乙二人具有相同的偏好: $U(X_1, x_2) = X_1^{0.5}X_2{}^{0.5}$, 其中 X_1 的价格 P_1 为 10 元， x_2 的价格 P_2 为 1 元，甲乙二人均有 $I = 100$ 元的收入。消费者乙有一张商品 X_1 的折扣券，该折扣券只能 使用一次，可以按 50%的折扣购买任意数量的商品 X_1, 甲没有折扣券。

（1）试求甲乙二人的最优消费决策。

（2）甲若向乙购买折扣券，他最高愿意支付多少钱给乙？

（3）乙最低索取多少钱才会转让自己的折扣券?

（4）甲乙之间能否达成交易?

2.一个企业有三个车间, 各自的成本函数为

$TC_1 = 4x_1 + x_1^2$

$TC_2 = 4x_2 + 2x_2^2$

$TC_3 = 6x_3$

问: 当此企业要生产 8 单位产品时, 应如何分配产量使其成本最小?

solution：

消费者效用最大化：

$$\begin{aligned} &\max: U = x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} \\ &\text{st:} \quad p_1x_1 + p_2x_2 = I \end{aligned}$$

拉格朗日函数：

$$L = x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} + \lambda[1 - p_1x_1 - p_2x_2]$$

FOCs：

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{1}{2}x_1^{-\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} - \lambda p_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{1}{2}x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{-\frac{1}{2}} - \lambda p_2 = 0$$

解得：

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{I}{2P_1} \\ x_2 = \dfrac{I}{2P_2} \end{cases}$$

间接效用函数为：

$$V = \frac{I}{2\sqrt{p_1 p_2}}$$

1)对于家而言 $(p_1, p_2, I) = (10,1,100)$

最优决策为 $(x_1, x_2) = (5,50)$

对于而言 $(p_1, p_2, \quad) = (5,1,100)$

最优决策为 $(x_1, x_2) = (10,50)$

2)假设甲的最高出价为$V_{甲}$，即保证购买消费券的效用至少和购买前一样。

购买前： $V_{甲} = 5\sqrt{10}$

购买后： $(p_1, p_2, I) = (5,1,100 - T_{甲})$

$V'_{甲} = \dfrac{100 - T_{甲}}{2\sqrt{5}}$

令$V_{甲} = V_{甲}'$得：

$T_{甲} = 100 - 50\sqrt{2} \doteq 29.3$元

即甲最多愿支付 29.3 元购买折扣券。

3)假设乙的最高卖价为$T_{乙}$,使得售出后的效用至少与售出前一样

出售前：$V_{乙} = 10\sqrt{5}$

出售后：$(p_1, p_2, I) = (10,1,100 + T_2)$

$V'_{乙} = \dfrac{100 + T_{乙}}{2\sqrt{10}}$

令$V_{乙} = V_{乙}'$得

$T_{乙} = 100\sqrt{2} - 100 = 41.4$元

即乙的最低索取价格为 41.4 元

4)由于 $T_{乙} > T_{甲}$，所以该交易不会达成。

若 $T_{乙} < T_{甲}$，则交易可能达成。但决堤的交易价格视为围着讨价还价的能力而定，设计纳什讨价还价模型。

2.一个企业有三个车间, 各自的成本函数为

$TC_1 = 4x_1 + x_1^2$

$TC_2 = 4x_2 + 2x_2^2$

$TC_3 = 6x_3$

问: 当此企业要生产 8 单位产品时, 应如何分配产量使其成本最小?

solution：

方法一：分析求解

企业成本最小化问题为：

$$\begin{aligned} \text{min:} \quad & TC_1 + TC_2 + TC_3 \\ \text{st:} \quad & x = x_1 + x_2 + x_3 \end{aligned}$$

拉格朗日函数为：

$$\mathcal{L} = 4x_1 + x_1^2 + 4x_2 + 2x_2^2 + 6x_3 + \lambda[x - x_1 - x_2 - x_3]$$

Focs：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathcal{L}}{\partial x_1} = 4 + 2x_1 - \lambda = 0 \\ \dfrac{\mathcal{L}}{\partial x_2} = 4 + 4x_2 - \lambda = 0 \\ \dfrac{\mathcal{L}}{\partial x_3} = 6 - \lambda = 0 \end{cases}$$

企业的决策全责是比较各工厂的边际成本。

由于

$$MC_1 = 4 + 2x_1 \quad MC_2 = 4 + 4x_2, \quad MC_3 = 6$$

1)当 $0 \leq x < \frac{3}{2}$时，仅利用工厂 1、2 生产的 MC 更小

此时令 $MC_1 = MC_2$ 得 $x_1 = 2x_1$

成本为： $c(x) = 4x + \frac{2}{3}x^2$

2)当 $x \geq \frac{3}{2}$时，超过$\frac{3}{2}$的部分利用工厂 3 生产更优。此时， $x_1 = 2x_2 = 1,\quad x_3 = x - \frac{3}{2}$

成本： $c(x) = 6x - \frac{3}{2}$

综上：企业的成本函数为：

$$c(x) = \begin{cases} 4x + \dfrac{2}{3}x^2 & 0 \leq x < \dfrac{3}{2} \\ 6x - \dfrac{3}{2} & x \geq \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

当 $x = 8$时， $c(x) = 46.5$，其中 $x_1 = 1,\quad x_2 = \frac{1}{2},\quad x_3 = \frac{13}{2}$

方法二：K-T 条件直接求解

企业成本最小化问题为：

$$\begin{aligned} \text{min:}\quad & TC_1 + TC_2 + \Gamma C_3 \\ \text{St:}\quad & x = x_1 + x_2 + x_3 \\ & x_i \geq 0 \quad (i = 1,2,3) \end{aligned}$$

拉格朗日函数： $\exists \mu_i \geq 0$使得：

$$\mathcal{L} = 4x_1 + x_1^2 + 4x_2 + 2x_2^2 + 6x_3 + \lambda[x - x_1 - x_2 - x_3] - \sum_i \mu_i x_i, i = 1,2,3$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 4 + 2x_1 - \lambda - \mu_1 = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 4 + 4x_2 - \lambda - \mu_2 = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_3} = 6 - \lambda - \mu_3 = 0 \end{cases}$$

KT 条件 $\mu_i x_i = 0 \quad (i = 1,2,3)$

此时分类讨论 $\mu_i = 0$ 与 $u_i \geq 0$，总共 8 中情况，化简讨论：以x_i为研究中心比较方便，而不是μ_i

（i）若 x_1=0, 即 $\mu_1 \geq 0$

此时 $\mu_2 = \mu_1 + 4x_2 \geq 0 \Rightarrow x_2 = 0$， $\mu_3 = \mu_1 + 2 \geq 0 \Rightarrow x_3 = 0$不符合

（ii）若 x_2=0, 即 $\mu_2 \geq 0$

此时 $\mu_1 = \mu_2 + 2x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 = 0$， $\mu_3 = 2 + u_2 \geq 0 \Rightarrow x_3 = 0$不符合

即 $x_1 > 0. \quad x_2 > 0, \quad u_1 = 0. \quad \mu_2 = 0$

(iii）若 x_3=0, 即 $\mu_3 \geq 0$ 此时$\lambda \leq 6$，$0 < x_1 \leq 1$，$0 < x_2 \leq \frac{1}{2}$， $0 < x \leq \frac{3}{2}$ 由于 $x_1 = 2x_1$，则$c(x) = 4x + \frac{1}{3}x^2$

(iv）若 x_3>0, 即 $\mu_3 = 0$ 此时$\lambda = 6. \quad x_1 = 1. \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = x - \frac{3}{2} > 0$

$x > \frac{3}{2}$时. $\quad c(x) = 6x - \frac{3}{2}$

综上：$c(x) = \begin{cases} 4x + \frac{2}{3}x^2 & 0 < x \leq \frac{3}{2} \\ 6x - \frac{3}{2} & x > \frac{3}{2} \end{cases}$

3.x,y 的生产函数分别为$x = \sqrt{L_x}, \quad y = \sqrt{L_y}$ 其中劳动力总量为固定的$\bar{L}$

1)求生产可能性边界，是否存在范围经济？

2)若$x = L_x^2, \quad y = L_y^2$，回答第 1)问

3)比较范围经济与规模经济

solution:

$$\begin{cases} x = \sqrt{L_x} \\ y = \sqrt{L_y} \\ L_x + L_y = \bar{L} \end{cases} \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = \bar{L}$$

推出 $x^2 + y^2 = \bar{L}$

即为生产函数的边界。

由于 $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} < 0$

$$\frac{dy^2}{d^2x} = \frac{-x^2 - y^2}{y^3} < 0$$

故存在范围经济。

2)由

$$\begin{cases} x = L_x^2 \\ y = L_y^2 \\ L_x + L_y = \bar{L} \end{cases} \Rightarrow \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = \bar{L}$$

得生产可能性边界：$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{y}{x}} < 0$

由于 $\frac{dy^2}{d^2x} = \frac{1}{2x} + \frac{y^{\frac{1}{2}}}{2x^{\frac{3}{2}}} > 0$

故不存在范围经济。

note：集合与函数凹凸性的区别

1.集合的凹凸性

凸集是指任意链接集合内的两点，两点连线的所有元素属于该集合。

本题为例：

集合 1：$x^2 + y^2 \leq \bar{L}$，凸集

集合 2：$\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \bar{L}$，凹集

2.经济学的凹凸性(专指中文教材)

凸函数：凸向原点的函数

$f[tx_1 + (1-t)x_2] > tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$

$f''(x) > 0$(可微)

三者是等价的(与数学中的定义恰好相反)

以本题的生产函数为例

1) $x^2 + y^2 = \bar{L}$ 凹函数

2) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \bar{L}$ 凸函数

3.两者的关系

集合的边界由函数组成，可以说函数的凹凸性决定了集合的凹凸性。当然这与集合的定义有关。

例如：生产可能性的边界为 $x^2 + y^2 = a^2$

1)若定义 $x^2 + y^2 \leq a^2$为生产可能性集，则该集合为凸集。

2)若定义 $x^2 + y^2 \geq a^2$为生产可能性集合，则该集合为非凸集。

3)规模经济与范围经济

a.规模经济是指单一产品生产的概念，范围经济是指多产品联合生产的概念

两者之间没有绝对的关系，要具体问题具体分析。

b.本题中 $x=\sqrt{L_x}$, $y=\sqrt{L_y}$时规模报酬递减，但具有范围经济。原因在于仅一种生产要素，且 MPL 递减，故搭配生产更加效率。