8.13

None Leon

2021/2/4

1.$u(x,y)=\min\{x,y\}$, $p_x>0$, $p_y=1$, $m=100$

1)求最优消费

2)若政府征收收入税，税率为$\alpha(0<\alpha<1)$， 当 x 的价格从 p_x' 变到 $(t\le p_x)$时，求居民在 x 市场上消费者剩余的变化。

3)若政府对 x 征收从量税$t(t<p_x)$,政府分目标是最大化税收收入。求最优化的 t 以及此时的居民效用。

solution:

效用最大化：

max: $u(x,y)=min\{x,y\}$ st: $P_x\cdot x+P_y\cdot y=m$

解得：$\begin{cases} x=\frac{m}{p_x+p_y} \\ y=\frac{m}{p_x+p_y} \end{cases}$

1)当 $(P_x,P_y,m)=(P_x,1{,}100)$时

$$\begin{cases} x=\dfrac{100}{p_x+1} \\ y=\dfrac{100}{p_x+1} \end{cases}$$

2)若征收收入税，则 $(p_x,p_y,m)=(p_x,1{,}100(1-\alpha))$

在 x 的消费变为 $x_1=\frac{100(1-\alpha)}{p_x+1}$

若 x 的价格由p_x变为p'_x。 则 $\begin{aligned}\Delta CS &=\int_{p_x'}^{p_x}\frac{100(1-\alpha)}{p_x+1}dp_x \\ &=100(1-\alpha)\ln\frac{p_x+1}{p_x'+1}\end{aligned}$

3)若征收从量税，则 $(p_x,p_y,m)=(p_x+t,1{,}100)$

此时 x 的消费为 $x_2=\frac{100}{p_x+t+1}$

政府最大化税收： $\max: T=\frac{100t}{P_x+t+1}\quad (t\le P_x)$

由于 $\frac{dT}{dt}=\frac{100(p_x+1)}{p_x+t+1}>0$

故当 $t^*=p_x$时，有

$$T_{\max}=\frac{100P_x}{2p_x+1}$$

此时居民效用为： $u=\frac{100}{1+2p_x}$

2.有一项生产技术为 $q=[\min\{2l,2k\}]^{\frac{1}{2}}$, 资本 k 和劳动 l 的价格均为 1 。某一厂商若购头此项专利技术，则在专利的有效期内可垄断该产品市场，有效期过后，任何厂商都可以生产该产品。市场对该产品的反需求函数为 $p=1000-1.5q$.

1)求该产品的要素需求函数和成本函数。

2) 该厂商最多愿意出多少钱购买此技术?

3) 若政府对该产品征税 50% 的从价税，该厂商愿出多少钱购买此项技术?

solution：

1)由于由于$q=[\min\{2l,2k\}]^{\frac{1}{2}}$

最优时：$q=\sqrt{2l}=\sqrt{2k}$

故条件要素需求为：$k=l=\frac{1}{2}q^2$

成本函数为：$c(q)=wl+rk=q^2$

2)购买此技术时，垄断厂商的利润为：

$\max: \pi^m=(1000-1.59)q-q^2$

FOC:$\frac{d\pi^m}{dq}=1000-5q=0$

解得： $q^m=200, p^m=700, \pi^m=100000$

故厂商最多愿意出 100，000 购买此项技术

3)若对产品征收 50%的从价税 此时 $p^d=1.5p_s=1000-1.5q$

垄断厂商的利润为： $\begin{aligned}\max:\quad d\pi &= p_s\cdot q-q^2\\ &=\frac{1}{1.5}(1000-1.5q)\cdot q-q^2\end{aligned}$

FOC$\frac{d\pi}{dq}=\frac{2000}{3}-4q=0$

解得：$\begin{cases} q^m = \frac{500}{3} \\ p_d^m = 750 \\ p_s^m = 500 \end{cases}$

厂商的利润为 $\pi^m = \frac{500000}{9}$

故厂商最多愿意出$\frac{500000}{9}$购买此项技术。

note：可以证明厂商或消费者征从价税均衡产量不变，即使在垄断的市场结构中。

3.衡量行业集中度的一个重要指标是芬达尔指数，其表达式为

$$H = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^2$$

，其中 α_i 为各企业的市场份额。考虑采用古诺竞争的企业，设市场总产量为 Q，价格为 p ，需求价格弹性为 ε, π_i 为企业 i 的利润，每个企业都有不变的边际成本 c_i 。

1) 证明：市场总利润与总销售额之比等于芬达尔指数与需求弹性之比，即

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} \pi_i}{pQ} = \frac{H}{\varepsilon}$$

2) 2)(10′) 证明:

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \left(\frac{p - c_i}{p}\right) = \frac{H}{\varepsilon}$$

proof：任意企业i的利润最大化：

max: $\pi_i = p(Q) \cdot q_i - c_i q_i \quad (i = 1,2 \cdots N)$

FOC:$\frac{d\pi_i}{dq_i} = p(Q) + \frac{dP(Q)}{dQ} \cdot q_i - c_i = 0$

化简整理得：$p(Q)\left[1 + \frac{dp}{dQ} \cdot \frac{Q}{p} \cdot \frac{q_i}{2}\right] = c_i$

即 $\frac{p - c_i}{p} = \frac{\alpha_i}{\varepsilon}$

则 $\frac{\sum_{i=1}^{N} \pi_i}{pa} = \frac{pQ - \frac{N}{i=1} a q_i}{pQ}$

$= 1 - \sum_{i=1}^{N} \frac{c_i \alpha_i}{p} = 1 - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \left(1 - \frac{\alpha_i}{\varepsilon}\right) = \frac{H}{\varepsilon}$

2)由 1)知 $\frac{p - c_i}{p} = \frac{\alpha_i}{\varepsilon} \quad (i = 1,2 \cdots N)$

$$\begin{aligned} & \textstyle\sum_{i=1}^{N} \partial_i \left(\frac{p-C_i}{p}\right) \\ \text{则} = \; & \textstyle\sum_{i=1}^{N} = \alpha_i \cdot \frac{\alpha_i}{\varepsilon} \\ = \; & \frac{H}{\varepsilon} \end{aligned}$$

note： $L_i = \frac{P-C_i}{P}$称为企业 i 的勒纳指数，衡量企业的市场势力，在古诺竞争中 $L = \frac{\alpha_i}{\varepsilon}$与$\alpha_i$相关，说明份额越大，市场势力越大。而份额又与边际成本有关，总是 mc_i越小， α_i越大，市场势力越大。