9.10

None Leon

2021/1/11

1. 两个居民生活在同一社区。房屋的价值都是 W 万元。每个人房子发生火灾的 概率是 P,并且相互独立,损失是 L 万元。有下述两种情况:

(一):两个人独立承担风险。

(二):二人签一份风险共担协议,发生火灾后,会收到来自另一人的 $0.5L$ 的 补偿。

(1)给出每种情况下每个人房屋财产的价值及对应的概率,并求出在 A、 B 两 种情况下的房屋期望值。

(2)如果二人是风险中性的话,证明上述两个方案对于这两个人来说没有差异。

(3)如果二人是风险厌恶的话,证明风险共担方案会更受偏好。

3.股票互换的古诺考虑的是一个古诺双寡头垄断，其线性反向需求曲线p（q）$= a-q$，，其中q表示总产出。两个公司都有一个共同的固定边际成本$c>0$，，其中c满足$a>c$。假设公司做了$gamma$的股权交换，这样每个公司i在公司j的利润中得到一份$0<\gamma \le 1/2$，其中$j \neq i$

1)求古诺平衡输出，$\左（q{1}^{C}，q{2}^{C}\右）$。

2)在$\gamma=0$和$\gamma=1/2$.的条件下，评估平衡输出qi^{C}。

3) 确定qi^{c}在$\gamma 中是增加还是减少$?

4)找到均衡利润，π^{c}，，并确定它们是在$\gamma 中增加还是减少$?

solution:

1)方案一下房屋的价值分布：

$$W \sim \begin{pmatrix} p & 1-p \\ w-L & w \end{pmatrix}$$

$$Ew_1 = w - pl$$

方案二下房屋的价值分布：

$$\mathrm{W} \sim \begin{pmatrix} p^2 & 2p(1-p) & (1-p)^2 \\ w-2 & w-\frac{1}{2}L & w \end{pmatrix}$$

$Ew_2 = w - pl$

2)两种方案下的期望效用

$Eu_1 = pu(w-l) + (1-p)u(W)$

$$Eu_2 = p^2u(w-L) + 2p(1-p)u\left(w - \frac{1}{2}l\right) + (1-p)^2u(w)$$

若为风险中性; $Eu_1 = u(Ew_1) = u(w-pl)$

$Eu_2 = u(Ew_2) = u(w-pl)$

$\Rightarrow \quad Eu_1 = Eu_2$两种方案无差异。

若为风险厌恶：

$$Eu_2 - Eu_1 = \begin{array}{l} p(p-1)u(w-L) + 2p(1-p)u\left(w-\frac{1}{2}l\right) \\ +p(p-1)u(w) \end{array} = p(1-p)\left[2u\left(w-\frac{1}{2}l\right) - u(w) - u(w-l)\right]$$

由于 $\begin{aligned} \frac{1}{2}u(w) + \frac{1}{2}u(w-l) &< u\left[\frac{1}{2}w + \frac{1}{2}(w-l)\right] \\ &= u\left(w - \frac{1}{2}l\right) \end{aligned}$

则$Eu_2 > Eu_1$，偏好风险共担。

2。为简单起见，假设厂商的产出出q满足$q<\alpha/\max{j}\left{124;\ beta{j}\right}.$（您将在第 2)部分中使用此条件）

1）如果每个工厂 j 的$\beta j > 0$，那么两个工厂的产量应该如何分配？

2）如果每个工厂 j 的$\beta j < 0$，那么两个工厂之间的产量应该如何分配？

3）如果某些植物的$\beta j > 0$，而另一些植物的$\beta i < 0$？

solution:

$$\begin{cases} AC_i &= \alpha + \beta_i q_i \quad (q_i \geq 0) \\ C_i &= \alpha q_i + \beta_i q_i^2 \\ MC_i &= \alpha + 2\beta_i q_i \end{cases}$$

成本最小化：$\begin{array}{ll} \min: & \sum_{i=1}^{N} C_i\,(q_i) \\ st: & \sum_{i=1}^{N} q_i = q \end{array}$

$q_i \geq 0 \quad (i = 1,2,\cdots N)$

拉格朗日函数：

$\exists u_i \geq 0. \quad \lambda \geq 0$使得

$$\mathcal{L}=\sum_{i=1}^{N}\left(C_i(q_i)+\lambda\left[q-\sum_{i=1}^{N}q_i\right]-\sum_{i=1}^{n}u_i\,q_i\right.$$

$$\text{Foc:}\begin{cases}\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}=ua(q_i)-\lambda-u_i=0\\ \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda}=q-\sum_{i=1}^{N}q_i=0\quad(i=1,2\cdots N)\\ k-T\text{条件}:\quad u_iq_i=0\end{cases}$$

1) $\forall\beta_i>0\quad(i=1,2\cdots\cdot N)$

$\forall q_i=0$ 不符合 $q>0$

$\exists q_i=0$ 不妨设$q_i=0,q_j>0$

$q_i=0\quad\Rightarrow\mu_i\geq 0,\quad\alpha=\lambda+u_i$
$\alpha_j>0\quad\Rightarrow\mu_j=0,\quad\alpha+2\beta_jq_j=\lambda+\mu_j$

$\Rightarrow\quad 2\beta_jq_j=u_j-u_i=-u_i>0$，

$\Rightarrow\quad u_i<0$矛盾

$$\forall q_i>0,\quad\frac{\frac{1}{\beta_i}}{\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\beta_i}}\cdot q\quad(i=1,2\cdots\cdot N)$$

$\forall\beta_i<0\quad(i=1,2,\dots,N)$

经济学解释：任意的AC_i单增，规模报酬递减，通过分散生产降低总成本。

2)$\forall\beta_i<0\quad(i=1,2\cdots\cdot N)$

此时$AC\downarrow$，应该倾向于集中生产，发挥规模报酬递增的优势，由于 $q<\frac{\alpha}{\max|\beta_i|}$，故仅使用 $|\beta_i|$ 最大的车间进行生产，若 $q>\frac{\alpha}{\max|\beta_i|}$ 取由 $|\beta_i|$ 最大的工厂有生产上限，这时应综合考虑产量的分配。

可以理解为自然垄断行业，只会时最有效率的一家垄断企业垄断整个市场。注：此时使用拉格朗日分析不方便，因为不像$\forall\beta_i>0$为内点解，此时为角点解均衡，而且还可能出现 $MC_i=\lambda<0$的情况。

3)β_i 符合不确定 $(i=1,2\cdots N)$

首先排除$\beta_i>0$的工厂

其次选择$\beta_i<0$ 的工厂中 $\max|\beta_i|$ 的生产全部的产品，与 $\forall\beta_i<0$一样。

3.股票互换的古诺考虑的是一个古诺双寡头垄断，其线性反向需求曲线p（q） $=$ $a-q$，，其中q表示总产出。两个公司都有一个共同的固定边际成本$c>0$，，其中c满足$a>c$。假设公司做了$gamma$的股权交换，这样每个公司i在公司j的利润中得到一份$0<\gamma\leq 1/2$，其中$j\neq i$

1)求古诺平衡输出，$\左（q{1}^{C}，q{2}^{C}\右）$。

2)在$\gamma=0$和$\gamma=1/2$.的条件下，评估平衡输出qi^C。

3) 确定qi^c在$\gamma 中是增加还是减少$?

4)找到均衡利润，π^c，，并确定它们是在$\gamma 中增加还是减少$?

solution：

1)企业 1 利润最大化：

max:$\pi_1=(1-\gamma)(a-c-q_1-q_2)q_1+\gamma(a-c-q_1-q_2)q_2$

Foc:$\frac{\partial\pi}{\partial q_1}=(1-\gamma)(a-c-2q_1-q_2)-\gamma q_2=0$

反应函数为： $q_1=\frac{a-c}{2}-\frac{1}{2(1-\gamma)}q_2$

同理可得： $q_2=\frac{a-c}{2}-\frac{1}{2(1-\gamma)}q_1$

解得： $q_1^c=q_2^c=\frac{(1-\gamma)(a-c)}{3-2\gamma}$

企业 i 的初始利润为$\pi_i^0=(a-c-i)q_i$，通过互换利润得到新的利润（股票市场大家相互持有对方的股权）， $\pi_i^1=(1-\gamma)(a-c-q)q_i+\gamma(a-c-q)q_i$

2) $\gamma=0$ 时： $q_1^c=q_2^c=\frac{a-c}{3}$此时为标准的古诺均衡。

$\gamma=\frac{1}{2}$时：$q_1^c=q_2^c=\frac{a-c}{4}$

此时为合谋是的结果，原因在于$\gamma=\frac{1}{2}$时两者互换的收益为总收益的一半，即达到合谋的市场结构。

3)由于 $\frac{dq_i^c}{d\gamma}=\frac{-(a-c)}{(3-2r)^2}<0$

随着γ的增加， q_i^c会不断下降

4) $\pi_i^c=\frac{(1-\gamma)(a-c)^2}{(3-2\gamma)^2}$

由于$\frac{d\pi_i^c}{d\gamma}=\frac{(1-2\gamma)(a-c)^2}{(3-2\gamma)^3}$

则当 $\gamma \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 时， π_i^c 随着γ增加而增加

当$\gamma \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 时 π_i^c 随着 γ增加而减少

此时 $\pi_i^c(\gamma)_{\max} = \pi_i^c\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(a-c)^2}{8}$，即合谋。