9.24

None Leon

2021/1/20

1.　蜜蜂对果园有正的外部效应。假定养蜂人的成本函数为: $C_H(H) = H^2/100$，果园的成本函数为 $C_A(A) = A^2/100 - H$ 。蜂蜜和苹果各自在完全竞争的市场 上出售，蜂蜜的价格是 2，苹果的价格是 3。

1) 如果养蜂和果园独立经营，各自生产多少?

2) 如果合并，生产多少?

3) 社会最优的蜂蜜产量是多少？如果两个厂家不合并，那么如何补贴（数量补贴）养蜂人才能使其生产社会最优的产量?

solution：

1）独立经营：

$$\max: \pi_H = 2\mathrm{H} - \frac{\mathrm{H}^2}{100}$$

$$\max: \quad \pi_A = 3A - \frac{A^2}{100} + H$$

$$Foc: \begin{cases} \dfrac{d\pi_H}{dH} = 2 - \dfrac{H}{50} = 0 \\ \dfrac{d\pi_A}{dA} = 3 - \dfrac{A}{50} = 0 \end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases} H^* = 100 \\ A^* = 150 \end{cases}$$

2）合并：

$$\max: \pi = 2H - \frac{H^2}{100} + 3A - \frac{A^2}{100} + H$$

$$\text{Foc: } \begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial H} = 2 - \frac{H}{50} + 1 = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial A} = 3 - \frac{A}{50} = 0 \end{cases}$$

解得：$\begin{cases} H^{**} = 150 \\ A^{**} = 150 \end{cases}$

3）社会最优的养蜂量 $H^{**}=150$

若对养蜂人进行补贴，单位 H 补贴 t

$\max: \pi_H = 2H - \frac{H^2}{100} + t \cdot H$

$Foc: \frac{d\pi_H}{dH} = 2 + t - \frac{H}{50} = 0$

若$H=150$， 则 $t=1$ 即单位 H 补贴 1

2・假设股票市场有发生概率相等的两种状态，牛市或熊市，有两个投资策略不同的消费 者 a 和 b, 他们具有相同的效用函数 $u=\ln x$, x 代表消费者的股票价值 (单位: 万元)。 如果赶上牛市，消费者 a 和 b 的股票价值分别是 20 和 40 ， 如果赶上熊市，双方股票价 值分别 40 和 20 。请回答下列问题:

1）求消费者 a 和 b 的股票价值期望值和期望效用（用公式表示即可）。

2）结合画图和数学公式，简单分析两名消费者的交易动机。

3) 如果你来充当免费交易中介，你会为双方制定什么样的最优交易方案?

4) 如果熊市发生，消费者 b 的股票价值为 0，重新回答上一问。

5）从实际情况来看，股票市场兴衰显然是无法准确预知的，消费者对涨跌都有各自的 看法。记消费者 1 认为牛市发生的概率为 $p_1=\frac{1}{3}$, 消费者 2 认为牛市发生的概率为 $p_2=\frac{2}{3}$, 概率介于 0 与 1 之间。如果两种状态下的总課赋为（ 60,40)，求股票市场的契约曲线。

6) 如果消费者 b 效用函数为 $u=x$, 其他条件维持 5) 不变, 求均衡交易价格比的范围。

solution：

1）若

$$\begin{cases} e_A = (w_1^A, w_2^A) = (20,40) \\ e_B = (w_1^B, w_2^B) = (40,20) \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_A = \frac{1}{2}\ln x_1^A + \frac{1}{2}\ln x_2^A \\ U_B = \frac{1}{2}\ln x_1^B + \frac{1}{2}\ln x_2^B \end{cases}$$

存在帕累托改进的区域，有交易动机

均衡时的价格比：不妨假设 $p_2=1, p=p_1/p_2$

则$\begin{cases} x_1^A = \frac{20p+40}{2p} \\ x_2^A = \frac{20p+40}{2} \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1^B = \dfrac{40p+20}{2p} \\ x_2^B = \dfrac{40p+20}{2} \end{cases}$$

市场 1 出清： $x_1 A + x_1^B = 6$

$\Rightarrow \quad p^* = 1$

最优交易方案： 牛市时 B 给 A10 万元 熊市时 A 给 B10 万元

完全消除风险

2）若 $e_B = (w_1^B, w_2^B) = (40,0)$

则

$$\begin{cases} x_1^A = \dfrac{20p+40}{2p} \\ x_2^A = \dfrac{20p+40}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^B = 20 \\ x_2^B = 20P \end{cases}$$

$x_1^A + x_1^B = 6$

$\Rightarrow \quad p^* = \dfrac{2}{3}$

市场 1 出清： 最优交易方案： 牛市时 B 给 A20 万元 熊市时 A 给 B40/3 万元

此时双方共同承担风险

3）若$\begin{cases} U_A = \frac{1}{3}\ln x_1^A + \frac{2}{3}\ln x_2^A \\ U_B = \frac{2}{3}\ln x_1^B + \frac{1}{3}\ln x_2^B \end{cases}$

求契约曲线： $(w_1, w_2) = (60,40)$

$\max : U_A = \dfrac{1}{3}\ln x_1^A + \dfrac{2}{3}\ln x_2^A$

$st : \overline{U_B} = \dfrac{2}{3}\ln(60 - x_1^A) + \dfrac{1}{3}\ln(40 - x_2^A)$

拉格朗日函数：

$$\mathcal{L}=\frac{1}{3}\ln x_1^A+\frac{2}{3}\ln x_2^A+\lambda\left[\overline{U_B}-\frac{2}{3}\ln(60-x_1^A)-\frac{1}{3}\ln(40-x_2^A)\right]$$

$$\text{FOC:}\begin{cases}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_1^A}=\frac{1}{3x_1^A}+\lambda\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{60-x_1^A}=0\\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_2^A}=\frac{2}{3x_2^A}+\lambda\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{40-x_2^A}=0\end{cases}$$

解得： $160x_1^A=60x_2^A+3x_1^Ax_2^A$

$(0\le x_1^A\le 60)$

契约曲线过两个起始点，仅存在（100/3，100/3）处 B 承担所有风险，其他时刻均风险共担。

4）若 $U_B=\frac{2}{3}x_1^B+\frac{1}{3}x_2^B$

$$\begin{cases}x_1^A=\dfrac{Pw_1A+W_2^A}{3P}\\ x_2^A=\dfrac{2(Pw_1^A+W_2^A)}{3}\end{cases}$$

$$x_1^B=\begin{cases}\dfrac{pw_1^B+w_2^B}{p}\ {}_0<p<2\\ \left[0,\dfrac{pw_1^B+w_2^B}{p}\right]p=2\\ 0\end{cases}$$

$$x_2^B=\begin{cases}0 & 0<p<2\\ [0,pw_1^B+w_2^B] & p=2\\ pw_1^3+w_2^B & p>2\end{cases}$$

$$x_2^B=\begin{cases}0 & 0<p<2\\ [0,pw_1^B+w_2^B] & p>2\\ pw_1^B+w_2^B & p>2\end{cases}$$

当 $0<P<2$时， 市场 2 出清：

$x_2^A+x_2^B=40$

$$\Rightarrow\quad 0<p=\frac{60-w_2^A}{w_1^A}<2$$

$$\Rightarrow\quad 2w_1^A+w_2^A>60\quad(w_2^A<60)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{3}\le p<2$$

若 $p > 2$时，市场 1 出清：

$x_1A + x_2A = 60$

$\Rightarrow p = \frac{w_2^A}{180 - w_1^A} < 2$矛盾

若 $p = 2$时，市场 2 出清：

$$x_2^A + x_2^B = \left[\frac{2(pw_1^A + w_2^A)}{B}, pw_1^B + w_2^B + \frac{2(pw_1^A + w_2^A)}{3}\right]$$

$$= \left[\frac{2(pw_1^A + w_2^A)}{3}, 40 + 60p - \frac{pw_1^A + w_2A}{3}\right]$$

$$= \left[\frac{4w_1^A + 2w_2^A}{3}, 16 - \frac{2w_1^A + w_2^A}{3}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{4w_1^A + 2w_2^A}{3} \le 40 \le 160 - \frac{2w_1^A + w_2^A}{3}$$

$$\Rightarrow \quad 2w_1^A + w_2^A \le 60$$

综上：$\frac{1}{3} \le p \le 2$

$$\begin{cases} \textit{当}\ 0 \le \quad 2w_1^A + w_2^A \le 6, \textit{时}，p = 2，\textit{对应为内部} \\ \textit{当}\ 2w_1^A + w_2^A > 6\ \textit{时}, p = \frac{6_0 - W_2^A}{w_1^A}，\textit{对应角点解} \end{cases}$$

3. A 国居民对运动鞋的需求可以表示为: $Q = 13000 - 10P$, 其中 Q 为运动鞋的年需求量, 单位为万双：P 为运动鞋的价格，单位为元。 A 国运动鞋行业的市场供给曲线为: Q = 120P。

(1) 假设不存在进出口， A 国运动鞋市场的均衡价格和产量分别为多少?

（2） 现在假设 A 国政府实施了开放政策，A 国居民能够以 80 元每双的价格从国际市场 上购买同样品质的运动鞋。新的市场均衡是什么? A 过需要从国外进口多少双运动 鞋才能满足本国居民需求?

(3) 在 A 国运动鞋企业的游说下， A 国全国人民代表大会通过了一项进口税法案: 对每 双进口运动鞋征收 12.5% 的关税。此时的市场均衡是什么? 这一法案能为政府带来 多少税收收入? 与（2）中的均衡相比，消费者剩余和生产者剩余分别变动了多少? A 国的净福利 (消费者剩余+生产者剩余+政府收入) 增加了还是减少了? 增加/减少 了多少?

(4) 假设 A 国全国人民代表大会通过的法案不是对每双运动鞋征收 12.5% 的关税，而是 实施了 1300 万双的进口配额, 即每年最多允许进口 1300 万双运动

鞋。在此情况下, 重新回答（3）中的问题。并回答，如果 A 国政府打算把这一配额拍卖，最多能卖 多少钱?

solution：

1）国内市场均衡：

$$\begin{cases} Q^d = 13000 - 10p \\ Q^s = 120p \\ Q^d = Q^s \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p = 100 \\ Q = 12000 \end{cases}$$

2）对外开放 $p = 80$

国内供给 $Q^s = 9600$

国内需求： $Q^d = 12200$

进口： $Q^s f = Q^d - 2s = 2600$

3）对外开放：征税

税后价格： $p_t = (1+t)p = 90$

国内供给： $Q^S = 10800$

国内需求： $Q^d = 12100$

进口 $Q^s f = Q^d - 2s = 1300$

$$\begin{cases} \Delta cs & = -121500 \\ \Delta ps & = 102000 \\ T & = 13000 \\ \Delta sw & = \Delta cs + \Delta ps + T = -6500 \end{cases}$$

4）对外开放：配额

配额获得者能够以 80 元/双 从国外进口 1300 万双，再在国内以 $p(p \geq 80)$的价格售出，获利 $1300(p-80)$万元。

此时国内消费者对国内厂商的需求为：

$$\begin{cases} Q'_d = 11700 - 10p \quad \Rightarrow p = 90 \\ Q_s = 120p \end{cases}$$

即配额的价值为 $V = 13000$

可以看出，一定的税收与配额等价，即各个经济体的福利变化一样

但征税比配额更有效率，因为配额时会发生寻租行为。