9.22

None Leon

2021/1/20

1.渔民在太湖用网箱养鱼。一个网箱的成本是 1000 元，鱼的价格是 10 元/ kg, 每个网箱的平均产 量为 $q = 500 - n$, 其中 n 为湖中网箱的总数。试求:

1） 若所有渔民都可以自由地在太湖用网箱养鱼，求均衡时湖中网箱个数。

2）若由一个公司经营太湖中网箱养鱼业，求均衡时湖中的网箱个数。

3）在第 1 问的条件下，若政府对网箱征税，何种税能使社会总福利最大化?

solution：

1）自由养鱼：

均衡时：

$\pi(n^*) = 10(500 - n^*) - 1000 \geq 0$

$\pi(n^* + 1) = 10(500 - n^* - 1) - 1000 < 0$

解得：

$n^* = 400$

2）公司经营：

$\max: \pi = 10\mathrm{n}(500 - n) - 1000n$

FOC:$\frac{d\pi}{dn} = 4000 - 20n = 0$

解得：

$n^{**} = 200$

3）若对网箱征税：单位网箱征 t

则均衡时： $\pi(n) = 10(500 - n) - 1000 - t \geq 0$

$\pi(n + 1) = 10(500 - n - 1) - 1000 - t < 0$

解得 $399 - \frac{t}{10} < n \leq 400 - \frac{t}{10}$

$n = [n^{**}] = 200$

则： $1990 < t \le 2000$

若不强调整数约束，则取 t=2000

2. (15 分) Fiday 和 Robinson 可以消费商品 1 和 2, 两人的效用函数分别为 $\mathrm{U^F} = (10 + \mathrm{x_1^F})(20 + \mathrm{x_2^F})$ 和 $\mathrm{U^R} = \mathrm{lnx_1^R} + \mathrm{lnx_2^R}$, 两种商品的总资源諒赋为 $(\mathrm{w_1}, \mathrm{w_2}) = (30,20)_0$

(1) 以清晰的图形表示帕托最优分配的轨迹。

（2）在哪个（或哪些）资源亭赋点 $\mathrm{p} = (1,1)$ 为瓦尔拉斯均衡点?

(3) 假设 $(\mathrm{w_1^F}, \mathrm{w_2^F}) = (8,0)$, 这是一个帕累托最优的分配吗？在此条件之下，请解出均衡的的价格比。

(4) 如果 $(\mathrm{w_1^F}, \mathrm{w_2^F}) = (3,4)$, 瓦尔拉斯均衡的价格比是多少?

(5) 总资源京赋不变的情况下，随着 Robinson 的京赋变化，该经济的均衡价格比会在什么范围内变化?

solution:

1)内部解：

max: $\quad U^F = (10 + x_1^F)(20 + x_2^F)$

$\bar{U}^R = \mathrm{ln}x_1^R + \mathrm{ln}x_2^R$

$x_1^F + x_1^R = 30 \; x_2^F + x_2^R = 20$

拉格朗日函数：

$$\mathcal{L} = (10 + x_1^F)(20 + x_2^F) + \lambda[\bar{U}^R - \ln(30 - x_1^F) - \ln(20 - x_2^F)]$$

$$\text{FOC:} \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1^F} = 20 + x_2^F + \lambda \cdot \frac{1}{30 - x_1^F} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2^F} = 10 + x_1^F + \lambda \cdot \frac{1}{20 - x_2^F} = 0 \end{cases}$$

解得： $x_2^F = x_1^F - 10 \quad (10 \le x_1^F \le 30)$

角点解：

$x_2^F = 0$ 且$0 \le x_1^F \le 10$

2）当 $p = (1,1)$时，F 与 R 的需求分别为：

$$\begin{cases} x_1^F = \dfrac{e_1^F + e_2^F + 10}{2} \\ x_2^F = \dfrac{e_1^F + e_2^F - 10}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^R = \dfrac{e_1^R + e_2^R}{2} \\ x_2^R = \dfrac{e_1^R + e_2^R}{2} \end{cases}$$

由禀赋约束知： $x_2^F \geq 0 \Rightarrow e_1^F + e_2^F \geq 10$

则 $p = (1,1)$对应的内部解区域为：

$e_1^F + e_2^F \geq 10(0 \leq e_1^F \leq 30)$

实际上整个内部解对应的价格均为： $p = (1,1)$

对于任意角点解区域， $p = (1,1)$就能达到，见 5）

综上： $p = (1,1)$对应所有的禀赋点。

3）

$(w_1^F, w_2^F) = (8,0)$是帕累托最优分配，此时为角点解均衡，无交易，但 $p = \frac{p_x}{p_y}$应满足一定的条件。

$$\frac{10}{11} = MRS_{1,2}^R \leq p = \frac{p_x}{p_y} \leq MRS_{1,2}^F = \frac{10}{9}$$

4） $(w_1^F, w_2^F) = (3,4)$时，此时对应角点解的区域。

$$\begin{cases} x_1^F = \dfrac{pw_1^F + w_2^F + 20 - 10p}{2p} = \dfrac{24 - 7p}{2p} \\ x_2^F = \dfrac{pw_1^F + w_2^F + 10p - 20}{2} = \dfrac{13p - 16}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^R = \dfrac{Pw_1^R + w_2^R}{2p} = \dfrac{27p + 16}{2p} \\ x_2^R = \dfrac{pw_1^R + w_2^R}{2} = \dfrac{27p + 16}{2} \end{cases}$$

若能达到角点解均衡：

$$\begin{cases} 0 \leq x_1^F \leq 10 \Rightarrow \dfrac{8}{9} \leq P \leq \dfrac{24}{7} \\ x_2^F \leq 0 \Rightarrow p \leq \dfrac{16}{13} \\ 30 \leq x_2^k \leq 20 \Rightarrow \dfrac{16}{33} \leq p \leq \dfrac{16}{13} \\ x_2^R \geq 20 \Rightarrow p \geq \dfrac{8}{9} \end{cases}$$

综上：$\frac{8}{9} \leq p \leq \frac{16}{13}$

数值比较：

$$\frac{16}{27} \leq \frac{20}{27} \leq \left(\frac{8}{9}\right) \leq |k| \leq\leq \left(\frac{16}{13}\right) \leq \frac{20}{13} \leq \frac{24}{13}$$

5）均衡价格比的范围：

内部解均衡：

$p = p_x \mid p_y = 1$

角点解均衡：

$$0 \leq x_1^F = \frac{pw_1^F + w_2^F + 20 - 10p}{2p} \leq 10$$

$$x_2^F = \frac{pw_1^F + w_2^7 + 10p - 20}{2} \leq 0$$

$$20 \leq x_1^R = \frac{pw_1^R + w_2^R}{2p} \leq 30$$

$$x_2^R = \frac{pw_1^R + w_2^R}{2} \geq 20$$

$$\Rightarrow \quad \frac{20 + w_2F}{30 - w_1F} \leq p \leq \frac{20 - w_2^F}{10 + w_1^F}$$

$(0 \leq w_1^F + w_2^F \leq 10, \quad w_1^F \geq 0, \quad w_2^F \geq 0)$

故 $\frac{2}{3} \leq p \leq 2$

3. 重评古诺模型。在寡头市场中， 其反需求函数为：
$$p(q) = \frac{a}{1 + bQ}$$
4. 其中 $Q = q_1 + q_2$ 为加总产出, $a, b > 0$.平均成本和边际成本相同为 c, 满足 $0 \leq c < a$。

1)求出最优的反应函数，并解释

2）对于什么样 q_2 值使得厂商 1 的反应函数的斜率等于 0

3)求解均衡产出。

solution：

1）企业 1 利润最大化：

$$\max: \pi_1 = \left(\frac{a}{1+bQ} - c\right) q_1$$

$$Foc: \frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = \frac{a}{1+b_Q} - c - \frac{ab_1}{(1+b_Q)^2} = 0$$

反应函数为：

$$\begin{cases} q_1(q_2) = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{a}{c}}\sqrt{1+bq_2} - q_2 - \frac{1}{b} \\ q_2(q_1) = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{a}{c}}\sqrt{1+bq_1} - q_1 - \frac{1}{b} \end{cases}$$

2）令 $\frac{dq_1(q_2)}{dq_2} = \sqrt{\frac{a}{c}\frac{1}{2\sqrt{1+bq_2}}} - 1 = 0$

得： $q_2 = \frac{a-4c}{4bc}$

$$\begin{cases} a \geq 4c\text{时，存在} \\ a < 4c\text{时，不存在} \end{cases}$$

3）联立反应函数得：

$$\begin{cases} q_1(q_2) = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{a}{c}}\sqrt{1+bq}_2 - q_2 - \frac{1}{b} \\ q_2(q_1) = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{a}{c}}\sqrt{1+bq_1} - q_1 - \frac{1}{b} \end{cases}$$

由对称性知：

$q_1^* = q_2^* = 1$

$\Rightarrow b^2(a-4c)q^* + 2b(a-2c)q^* + (a-c) = 0$

$$\Rightarrow \quad q^* = \frac{\sqrt{ac} - (a-2c)}{b(a-4c)}$$

4）反应函数

$$q_2(0) = \frac{1}{b}\left(\sqrt{\frac{a}{c}} - 1\right) > 0$$

由 2）知： $a > 4c$时存在极大值

$a \leq 4c$时不存在极大值

$$\frac{d^2 q_2}{dq_1^2} = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{c}{a}}(1+bq_2)^{-\frac{3}{2}} < 0$$

$\lim_{q_1 \to +\infty} q_2(q_1) = -\infty$