9.3

None Leon 东哥

2021/1/6

1. 某“理性人”在面临不确定条件下的选择时，表现为“风险庆恶”。考虑如下决策问题，该人 需要从 A 地乘坐交通工具到 B 地参加某个活动，有两种交通工具可以选择，一种是乘坐地铁，用时 60 分钟; 另 一种是驾车，由于可能遭遇堵车，用时可能是 40 分钟或 78 分钟，概率各为 0.5 。该人使用以上两种交通方式的 支出和舒适程度均相同。请问根据以上信息，你是否可以确定这个人将如何选择交通工具? 请详细说明理由。

solution

假设效用函数为 $u(t)$

用时越长，效用越低：$u'(t) < 0$ 、

风险厌恶：$u''(t) < 0$

坐地铁

$U_1 = U(60)$

驾车 $EU_2 = \frac{1}{2}U(40) + \frac{1}{2}U(78)$

由于 $\frac{1}{2}U(40) + \frac{1}{2}U(78) < U\left(\frac{40+78}{2}\right) = U(59)$

故 U_1 与EU_2大小关系不确定

因此不能确定该人将如何选择交通工具

note:

1.风险类型的判别：

风险厌恶——更倾向于确定性的东西

琴生不等式： $U(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) > \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v(x_i)$

→ $U(x)$凹凸性

→ $U''(x) < 0$

2.风险类型的进一步刻画

$U(x)$可进行正单调变换

$\frac{v(x)=\beta u(x)}{\beta>0} \to u''(x)$ 仅能刻画风险类型，而无法刻画风险厌恶程度。$u''(x)$知可取符合，不可取大小

利用比值消除β的影响$\to R_A(x)=-\frac{u''(x)}{u'(x)}$,也可用 $R_R(x)$

$\to R_A(x)$能够刻画风险程度，而不受正单调变换的影响。

2.小工具市场有男女两类消费群体, 男性消费者的总需求为 $x_m(p)=a-Q_m p$, 女性消费 者的总需求为 $x_w(p)=a-Q_w p$, 这里 $Q_m>Q_w$, 每个小工具成本为 c 。

1) 假定小工具市场是竞争性的，求市场均衡价格和产量。

2）假定厂商 A 是该小工具的垄断厂商，若该厂商被禁止采取“歧视”政策，那么最优 定价是多少? 在怎样的条件下，男性、女性有严格正的消费量?

3) 厂商 A 既定产出为 X,它应该如何在男性、女性市场中分配产量以最大化社会福利?

4) 对允许厂商 A 进行价格歧视的情况进行分析。

solution：

1)完全竞争市场： $p=c$

此时 $\begin{cases}x_m=a-\mathrm{Q}_c\\x_w=a-Q_c\end{cases}$

2)统一定价：只供应大市场

利润最大化

max: $\pi=(p^w-c)(a-Qw\cdot p^w)$

FOC:$\frac{d\pi}{dp^w}=a+Q_w\cdot c-2Q_w\cdot p^w=0$

解得：

$$p^w=\frac{a+Q_w\cdot c}{2Q_w}$$

利润：$\pi^w=\frac{(a-Q_w\cdot c)^2}{4Qw}$

统一定价——全部供应

利润最大化：

$\max : \pi=(p-c)(a-Q_w p+a-\operatorname{Q_m} p)$

FOC:$\frac{d\pi}{dp} = 2a + (Q_m + Q_w) \cdot c - 2(Q_w + Q_m)p = 0$

解得： $p = \frac{2a+(Q_m+Q_w)c}{2(Q_w+Q_m)}$

$$\pi = \frac{[2a - (Q_w + Q_m)c]^2}{4(Q_w + Q_m)}$$

当 $a \leq Q^w \cdot c$时，两个市场都供应。

当$Q^w \cdot c < a \leq Q^m \cdot c$时，只供应大市场。

当$Q^w \cdot c < a \leq Q^m \cdot c$时， $Q^m \cdot c < a \leq \frac{Q_m(Q_m+Q_w)c}{2Q_w}$，此时供应大市场

当 $\frac{a}{Q^m} < p < p^w$时：

若$a > \frac{Q_m(Q_m+Q_w)C}{2Q_w}$，此时 $2Q_w \leq Q_m$

有 $p < \frac{Q}{Q^m} < p^w$

若 $\pi^w - \pi = \frac{(a-Q_w \cdot c)^2}{4Q_w} - \frac{[2a-(Q_w+Q_m)c]^2}{4(Q_w+Q_m)} > 0$，则只供应大市场

若 $\pi^w - \pi < 0$，则同时供应。

若$2Q_w > Q_m$， $a < \frac{Q_m Q_w c}{2Q^w - Q_m} p < \frac{a}{Q^m} < p^w$，此时同时供应。

3)社会福利最大化：

$$\max: \quad sw = \int_0^{x_m} p\,(x_m)dx + \int_0^{x_w} p\,(x_w)dx - cx$$
$$\text{st:} \quad x_m + x_w = x$$

拉格朗日函数： $\mathcal{L} = \frac{1}{2Q_m} \quad x_m(2a - x_m) + \frac{1}{2Q_w} x_w(2a - x_w) - c(x_m + x_w) + \lambda(x - x_m - x_w)$

$$\text{FOCs:} \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_m} = \frac{1}{2Q_m}(2a - 2x_m) - c - \lambda = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_w} = \frac{1}{2Q_w}(2a - 2x_w) - c - \lambda = 0 \end{cases}$$

$$\text{解得：} \begin{cases} x_m = \frac{a(Q_w-Q_m)+Q_m x}{Q_m+Q_m} \\ x_w = \frac{a(Q_m-Q_w)+Q_w x}{Q_m+Q_w} \end{cases}$$

当 $0 \leq x \leq \frac{(Q_m-Q_w)a}{Q_m}$时，

$$\begin{cases} x_m = 0 \\ x_w = x \end{cases}$$

4)三级价格歧视

利润最大化：

$$\max: \pi = (p^w - c)(a - Q_w p) + (p^m - c)(a - Q_m p)$$

FOCs:

$$\frac{\partial \pi}{\partial p^w} = a + Q_w \cdot c - 2Q_w p = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial p^m} = a + Q_m \cdot c - 2Q_m \cdot p = 0$$

解得：

$$\begin{cases} p^w = \dfrac{a + Q_w \cdot c}{2Q_w} \\ \pi^w = \dfrac{(a - Q_w \cdot c)^2}{4Q_w} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p^m = \dfrac{a + Q_m \cdot c}{2Q_m} \\ \pi^m = \dfrac{(a - Q_m \cdot c)^2}{4Q_m} \end{cases}$$

3. 假设一下竞争性市场上有 $N(N \geq 2)$ 家生产相同产品的企业。企业之间进行价格竞争的博亦。 企业 i 的生产总成本是 c_{iq_i}, 其中 q_i 是产量。市场上的总需求是 Q, 消费者总是从出价低的厂商那购买产品。当 有几家企业同时报出最低价时，总需求 Q 在不同企业之间平分。

1)）假定 $c_i = c, i = 1,2, \dots, N$, 请找出纯策略的纳什均衡。

2)假定 $c_1 < c_2 \leq c_j, \quad j = 3, \quad \cdots, N$, 请证明纯策略的纳什均衡不存在。

3)假定 $c_1 < c_2 \leq c_j, \quad j = 3, \dots, N$, 但是消费者有一定的品牌忠诚度：如果多个企业同时报出相同 最低价，消费者总是从指数 $(i = 1,2, \dots, N)$ 最低的那个企业那里购买产品。例如，企业 1 和企业 2 同时报出 最低价格，消费者会从企业 1 那里购买所有 Q 产量的产品。请找出纯策略的纳什均衡。

solution

1)存在唯一纳什均衡：$(p_1 \dots p_N) = (c \dots c)$

首先证 NE 的存在性

对于任意企业 i，给定 $p_j = c \quad (j \neq i)$

则有 $\begin{cases} p_i < c. & \pi_i < 0 \\ p_i > c & \pi_i = 0 \\ p_i = c & \pi_i = 0 \end{cases} \Rightarrow p_i = c$ 为若占优策略。

$\Rightarrow (p_1 \cdots p_n) = (c \cdots c)$ 为 NE。

其次证明 NE 的唯一性：$(p_1 \cdots p_N)$
即证明$\forall P_i$ 均不能出现 $p_i < 0$ 与 $p_i > 0$

若$\exists p_i < c$，则$\pi_i < 0$非最优策略

$\Rightarrow (p_1 \dots p_n)$ 中不会出现 $p_i < 0$

若 $\exists p_i > c$，假设 $P_{(1)}$ 为最低出价，$P_{(2)}$ 为次低出价 $(P_{(2)} > P_{(1)})$

若$P_{(1)} > c$：则 $P_i = P_{(1)} - \varepsilon$ 时获得整个市场 $\pi_i \uparrow$

若 $P_{(1)} = c$，则出价 $P_{(1)}$的企业均出价$P_i = P_{(2)} - \varepsilon$ 平分市场 $\pi \uparrow$ 偏离 $P_{(1)} = c$

$\Rightarrow (p_1 \cdots p_N)$不会出现 $P_i > 0$

$\forall p_i = c$即为唯一的 NE

2)成本：$c_1 < c_2 \leq c_3 \quad \cdots \leq c_N$

策略：$(P_1 P_2 \dots P_N)$

以企业 1 为研究中心

$p_1 < c_1 : \pi_1 < 0$

$P_1 > C_2 \quad$:此时$P_i = P_{(1)} - \varepsilon$获取整个市场，促使企业 1 降价，非均衡

$c_1 \leq P_1 \leq c_2$:

$\begin{cases} P_2 < C_2: \text{若} P_1 = P_2 + \varepsilon，\pi_2 < 0, \text{故} p_2 < c_2, \text{非均衡} \\ P_2 > C_2: \text{企业 1 定价} P_1 = P_2 + \varepsilon，\text{企业 2 定价} P_2 = P_2 + \varepsilon，\text{此时} p_2 > c_2 \text{非均衡} \\ P_2 = C_2: \text{此时} P_1 = P_2 + \varepsilon，\text{给定} p_2 = c_2，\text{企业 1 定价} p_1 = c_2 - \varepsilon_1 \varepsilon > \varepsilon_1 > 0，\text{非均衡} \end{cases}$

综上p_1没有一个纯策略，即无纯策略 NE

$(p_1 \cdots \cdot p_N) = (c_2, c_2, c_3 \cdots \cdots c_n)$为唯一的纯策略 NE.

存在性：

给定：$(p_2 \dots p_n) = (c_2 \cdots c_n)$

此时$p_1 = c_2$，π_i取最大，故 $p_1 = c_2$为最优策略

给定 $(p_1, p_2 \dots p_{t-1}, p_{i+1} \dots p_N) = (c_1, c_2, c_{i-1}, c_{i+1} \dots c_N)$

$\begin{cases} p_i < c_2，\pi_i < 0 \\ p_i \geq c_2，\pi_i = 0 \end{cases}$

此时 $p_i = c_i$ 为弱占优策略，$(\forall i \neq 1)$ $(C_1, C_2 \dots\dots C_N)$为 NE

唯一性：

$p_1 < c_1$:　$\pi_1 < 0$，此时为非均衡策略

$p_1 > c_2$: $p_2 = p_1 - \varepsilon$获取正利润，促使企业 1 降价，循环往复，故为非均衡状态。

$c_1 \leq p_1 < c_2$，此时为非均衡状态

$p_1 = c_2$:

$\begin{cases} 若 p_2 < c_2，\pi_2 < 0 \\ p_2 > c_2，企业 1 定价 p_2 = p_1，企业 2 定价 p_2 = p_1 - \varepsilon，直至降到 c_2 \end{cases}$ $\pi_2 < 0$ $p_1 = p_2$ $p_2 = p_1 - \varepsilon.$ c_2

综上：$(p_1 \dots p_N) = (c_1, c_2 \dots c_N)$为唯一 NE