10.3

None Leon

2021/1/25

1.假设社会上只有两个人。每人A的灭蚊需求曲线如下所示：

$$q_n = 100 - p$$

对于 personB，蚊虫控制的需求曲线如下所示：

$$q_b = 200 - p$$

1) 假设灭蚊是一种纯粹的公共产品，也就是说，一旦产生，人人都能从中受益。如果能以每单位 120 美元的固定边际成本生产，这项活动的最佳水平是多少？

2)如果把灭蚊工作交给私人市场，可能会产生多少？你的答案是否取决于每个人认为对方会做什么？

3)如果政府要生产出最佳数量的蚊虫控制，这将花费多少钱？如果个人要按照从蚊虫控制中获得的利益比例分摊这笔税款，那么应如何在个人之间分配这笔税款？

solution：

1）社会最优：

由于

$p_n = 100 - q$

$p_b = 100 - q$

纵向加总得到社会需求：

$p^{\text{social}} = 300 - 2q$

社会最优时：

$p^{\text{sociul}} = MC$

得：

$q^{\text{social}} = 90$

2）私人决策

由于$MC = 120 > 100$

则 $q_n = 0, \quad q_b = 80$

即 $q^{\text{private}} = 80$

3）政府管制：

当 $q = q^{\text{social}} = 90$时，政府支出为

$T = q^{\text{snaial}} \cdot MC = 10800$

税收分配：

T_n, T_b

由于按照所获福利的比例分担税收：

$$\begin{cases} \dfrac{T_n}{T_b} = \dfrac{\int_0^{90} p_n \, dq - T_n}{\int_0^{90} p_b \, dq - T_b} \\ T_n + T_b = 10800 \end{cases}$$

解得：

$T_n = 2828.6$

$T_b = 7971.4$

如果按照最高支付意愿来分配： 则

$q = 90$时

$p_n = 10, p_b = 110$

即每单位 h 支付 10 美颜，b 支付 110 美元。

2. 有 CRT 的生产经济考虑两个消费者i={A，B}，*一个公司（使用货物1 作为输入生产货物2）和两个货物*l={1，2}。消费者B拥有公司。Good 2 是基准 Good（即，$p2 = 1$）。考虑到消费者的偏好是由

$$u^A(x_1^A, x_2^A) = x_1^A + 4\sqrt{x_2^A} \quad \text{and } u^B(x_1^B, x_2^B) = x_1^B + 2\sqrt{x_2^B}$$

3. 而他们的禀赋

$$\omega^A = (4,12) \text{ and } \omega^B = (8,8)$$

4. 生产函数是$y2 = 3y1$。计算均衡价格和分配。

solution：

1）消费端

效用最大化：

$$\max: \quad u_A = x_1^A + 4\sqrt{x_2^A}$$
$$st: \quad px_1^A + x_2^A = 4p + 12$$
$$\max: U_B = x_1^B + 2\sqrt{x_2^B}$$
$$st: px_1^B + x_2^B = 8p + 8 + \pi$$
需求函数：
$$\begin{cases} x_1^A = \dfrac{4p + 12 - 4p^2}{p} \\ x_2^A = 4p^2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_1^B = \dfrac{8p + 8 + \pi - p^2}{p} \\ x_2^B = p^2 \end{cases}$$
2）生产端：
$$\max: \pi = y_2(y_1) - py_1 = (3 - p)y_1$$
Foc: $\frac{d\pi}{dy_1} = 3 - p$

因此：
$$y_1^d = \begin{cases} +\infty & 0 < p < 3 \\ [0, +\infty) & p = 3 \\ 0 & p > 3 \end{cases}$$
$$\pi = \begin{cases} +\infty & 0 < p < 3 \\ [0, +\infty) & p = 3 \\ 0 & p > 3 \end{cases}$$
3)市场出清：
$$x_1^A + x_1^B + y_1^d = 12$$
当 $0 < p < 3$时，不成立

当 $p > 3$时，得 $p = 2$，不成立

当$p = 3$时，得
$$y_1^d = \frac{25}{3}$$
此时：$(x_1^A, x_2^A, x_1^B, x_2^B) = \left(-4, 36, \frac{23}{3}, 9\right)$

由于 x_1^A有非负限制，故 x_1^A取角点解 $x_1^A=0$，则

$$y_1^d=\frac{13}{3}$$

但 $x_2^A+x_2^B>y_2+20$不符合

综上：不存在瓦尔拉斯均衡

note：若为纯交换经济，则存在瓦尔拉斯均衡 $p^*=2$

且由于拟线性偏好的缘故，契约曲线特殊。

3. 两个室友同时选择打扫寝室的努力程度 e_1 与 e_2, 他们的效用函数分别为:

$$u_1=k\ln(e_1+e_2)-(e_1)^2$$
$$u_2=\ln(e_1+e_2)-(e_2)^2$$

其中 $\ln(e_1+e_2)$ 代表痕室的清洁度, 它与打扫的努力程度成正比。假设寝室的清洁对两人的重要性并不一样，即 $k>1$ 。

1) 找出纯策略纳计均衡。

2）讨论两人的不同清洁倾向（即 k ）如何影响打扫的努力程度。

solution：

1）1 效用最大化：

max: $U_1=k\ln(e_1+e_2)-e_1^2$

Foc: $\frac{\partial U_1}{\partial e_1}=\frac{k}{e_1+e_2}-2e_1=0$

同理可得 2 的最优条件为：

$$2e_2=\frac{1}{e_1+e_2}$$

联立可解得：

$$\begin{cases} e_1^*=\dfrac{k}{\sqrt{2(k+1)}} \\ e_2^*=\dfrac{1}{\sqrt{2(k+1)}} \end{cases}$$

即 (e_1^*,e_2^*)为纯策略 NE

由于

$$\frac{de_1^*}{dk} = \frac{k+2}{2\sqrt{2}(k+1)^{3/2}} > 0$$

$$\frac{de_2^*}{dk} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{(k+1)^{3/2}} < 0$$

故 k 越大， e_1越大

e_2越小

2 搭便车的倾向随 k 的↑而↑