8.24

None Leon

2021/2/3

1. 在一个封闭的村庄中惟一的产品是玉米，由于土地的原因好收成与坏收成交替出 现，今年的收成是 1000 公斤，明年的收成是 150 公斤，这个村庄与外界没有贸易。玉米可 以储存但是老鼠会吃掉 25%, 村民的效用函数是 $u(c_1, c_2) = c_1 c_2, c_1$ 是今年的消费, c_2 是 明年的消费。

1) 画出跨时期预算曲线，指出截距位置。

2) 村民今年消费幅是多少?

3) 老鼠会吃掉多少?

4)村民明年消费多少?

5) 如果考虑后年，且纹用函效为 $u(c_1, c_2, c_3) = c_1\, c_2 c_3, c_3$ 是后年的消费，求解问题 (2)~ (4)。

solution:

1)若 $u = c_1 c_2$，则效用最大化：

$$\begin{aligned} \max \quad & u = c_1 c_2 \\ \text{st}: \quad & c_1 + s_1 = 1000 \\ c_2 \quad & = 150 + (1 - 25\%) s_1 \end{aligned}$$

合并约束约束$c_1 + \frac{c_2}{0.75} = 1000 + \frac{150}{0.75}$

构建拉格朗日函数：

$$\mathcal{L} = c_1 c_2 + \lambda \left[1000 + \frac{150}{0.75} - c_1 - \frac{10}{0.75} \right]$$

$$\text{FOCs:} \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1} = c_2 - \lambda = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_2} = c_1 - \frac{\lambda}{0.75} = 0 \end{cases}$$

解得： {

.

$(0 \le C_1 \le 1000, 150 \le C_2 \le 900)$

其中第一年储蓄 $S_1 = 400$， 耗子吃掉 $0.25 S_1 = 100$

2)若 $u = c_1c_2c_3$，则效用最大化：

$$\begin{aligned} \max: \quad & \mu = c_1c_2c_3 \\ st: \quad & c_1 + s_1 = 1000 \\ c_2 + s_2 \quad & = 150 + (1-25\%)\mathrm{s}_1 \\ c_3 \quad & = 1000 + (1-25\%)\mathrm{s}_2 \end{aligned}$$

合并预算约束：

$$c_1 + \frac{c_2}{1-25-k} + \frac{c_3}{(1-25/b)^2} = 1000 + \frac{150}{(1-25!)} + \frac{1000}{(1-252)^2}$$

$$\begin{cases} 0 \le c_1 \le 1000 \\ 0 \le c_2 \le 900 \\ 1000 \le c_3 \le 1675 \end{cases}$$

拉格朗日函数：$f = c_1C_2C_3 + \lambda\left[1000 + \frac{150}{(1-25\%)} + \frac{1000}{(1-25\%)^2} - \left(c_1 + \frac{c_2}{1-25\%} + \frac{c_3}{(1-25\%)^2}\right)\right]$

$$\text{FOCs:} \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1} = c_2c_3 - \lambda = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_2} = c_1c_3 - \frac{\lambda}{1-25\%} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_3} = c_1c_2 - \frac{1}{(1-25\%)^2} = 0 \end{cases}$$

解得：$c_1 \doteq 992.59$ ； $c_2 \doteq 744.44$

$c_3 = 558.33$不符合

故均衡应该为角点解：$c_3 = 1000$

此时：$c_1 = 60.$ $c_2 = 450$

储蓄：$S_1 = 400$ ； $S_2 = 0$

老鼠吃掉：$(1-25\%)(S_1 + S_2) = 100$

2. 在一个出租车市场上，每辆车每趟活的经营成本（MC）为 5 元，每天可以拉 20 趟活, 对出租车的需求函数为 $\mathrm{D(p)} = 1200 - 20\mathrm{p}$

1)求每趟活的均衡价格、出车次数和出租车个数。

2) 需求函数改变为: $\mathrm{D(p)} = 1220 - 20\mathrm{p}$, 如果政府给原有的司机每人发一个经营牌照, 出租 车个数不变，则均衡价格和利润为多少?

3) 设一年出车 365 天，人们对未来收益的年折现率 r=10%，牌照值多少钱？出租车所有 者们愿出多少钱阻止多发一个牌照?

solution：

1)均衡时，单个出租车的利润为 0

此时： $p = MC = 5$

需求：$D = 1100$

出租车数量：$n = \frac{D}{20} = 55$

2)若$D(p) = 1220 - 20P$

由于供给：$S = 1100$

均衡条件：$D = S$

解得：$p = 6$

则每辆车每天的利润为$\pi = (p - MC) \cdot 20 = 20$

3)牌照的价值：

$$V = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{365 \cdot \pi}{(1+r)^t} = 80300$$

若发放 56 个牌照

供给： $s = 1120$

需求$D = 1220 - 20P$

均衡时$P = 5.\quad \pi = 0$

则每个出租车所有者最多愿出$V = 80300$阻止政府多发一个牌照。

3.某一市场需求函数如下

$$p = 100 - 0.5(q_1 + q_2)$$

在该市场上只有两家企业，它们各自的成本函数为

$$c_1 = 5q_1, c_2 = 0.5q_2^2$$

1)在斯塔克博格模型中，谁会成为领导者? 谁会成为追随者?

2)该市场最后的结局是什么? 为什么?

solution：

在斯塔克伯格模型中，产量领导者通过先生产一定数量的产量抢占市场份额，这种威胁是可信的，因为一旦生产就带来沉没成本。这就是所谓的先发优势。

不过上述先发优势存在的前提是领导者具有一定的成本优势，若 Q 较大时并不成本优势，则可能出现 $\pi^{\text{Leader}} < \pi^{\text{follower}}$ $\pi^{\text{Leader}} < 0$。另外一方面，具有相对成本优势的更随着可以发挥优势，生产较大的又来攻击领导者，从而使得领导者利润小于 0.

古诺竞争的结果

企业 1,2 利润最大化：

$\max:\pi_1 = \left[100 - \frac{1}{2}(q_1 + q_2)\right]q_1 - 5q_1$ $\max:\pi_2 = \left[100 - \frac{1}{2}(q_1 + q_2)\right]q_2 - \frac{1}{2}q_2^2$

反应函数：

$$\begin{cases} q_1 = 95 - \dfrac{1}{2}q_2 \\ q_2 = 50 - \dfrac{1}{4}q_1 \end{cases}$$

均衡时：$\begin{cases} q_1^c = 80 \\ q_2^c = 30 \end{cases}$ $\begin{cases} \pi_1^c = 3200 \\ \pi_2^c = 900 \end{cases}$ $p^c = 45$

企业 1 为领导者：

企业 2：$q_2 = 50 - \frac{1}{4}q_1$

企业 1：$\max:\pi_1 = \left[100 - \frac{1}{2}q_1 - \frac{1}{2}q_2(q_1)\right]q_1 - 5q_1$

均衡：$\begin{cases} q_1^s = \frac{280}{3} \\ q_2^s = \frac{80}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} \pi_1^s = 3266.67 \\ \pi_2^5 = 711.11 \end{cases}$ $p^s = 40$ $q_1 = 95 - \frac{1}{2}q_2$ $\max:\quad \pi_2 = \left(100 - \frac{1}{2}q_1(q_2) - \frac{1}{2}q_2\right)q_2 - \frac{1}{2}q_2^2$

企业 2 为领导者：

企业 1：$q_1 = 75 - 0.5q_2$

企业 2：$max:\pi_2 = (100 - 0.2q_1(q_2) - 0.5q_2)q_2 - 0.5q_2^2$

均衡：$\begin{cases} q_1^s = 77.5 \\ q_2^s = 35 \end{cases}$ $\begin{cases} \pi_1^s = 3003.125 \\ \pi_2^s = 918.75 \end{cases}$ $p^s = 43.75$

1)由上述分析知，企业 1,2 均想成为领导者，以获取更高的利润。两者通过产量策略阻止堆场成为领导者

若企业 2 为领导者

此时企业 1 可以通过调整产量使得，$\pi_2 < 0, \pi, \geq 0$

$$\begin{cases}\pi_1 = \left(95 - \dfrac{1}{2}q_1 - \dfrac{1}{2}q_2\right)q_1 \geq 0 \\ \pi_2 = \left(100 - \dfrac{1}{2}q_1 - q_2\right) \cdot q_2 < 0\end{cases}$$

$\Rightarrow \quad 200 - 2q_2 < q_1 \leq 190 - q_2 \Rightarrow \quad q_2 > 10$

此时企业 2 利润最大化：

$$\max: \quad \pi_2 = \left[100 - \frac{1}{2}q_1(q_2) - \frac{1}{2}q_2\right]q_2 - \frac{1}{2}q_2^2$$
$$0 \leq q_2 \leq 10$$

解得：$\begin{cases}q_2 = 10 \quad \pi_1 = 4050 \\ q_1 = 90 \quad \pi_2 = 450 < \pi_2^F\end{cases}$

即企业 1 可以通过产量策略使得企业 2 不想成为领导者。

若企业 1 成为领导者：

此时企业 2 可通过调整产量使得，$\pi_2 \geq 0,\quad \pi_1 < 0\ q_2 = 50 - \frac{1}{4}q_1$

此时：$\begin{cases}\pi_1 = \left(95 - \frac{1}{2}q_1 - \frac{1}{2}q_2\right)q_1 < 0 \\ \pi_2 = \left(100 - \frac{1}{2}q_1 - 9_2\right) \cdot q_2 \geq 0\end{cases}$

$\Rightarrow \quad 190 - q_1 < q_2 \leq 100 - \dfrac{1}{2}q_1$

$\Rightarrow \quad q_1 > 180$

此时企业 1 利润最大化：

$$\max: \quad \pi_1 = \left[100 - \frac{1}{2}q_1 - \frac{1}{2}q_2(q_1)\right] - 5q_1$$
$$\text{st}: \quad 0 \leq 9_1 \leq 180$$

解得：

$$\begin{cases}q_1 = \dfrac{280}{3} \\ q_2 = \dfrac{80}{3}\end{cases}\begin{cases}\pi_1 = 3266.67 \\ \pi_{12} = 711.11\end{cases}$$

即企业 2 不能通过产量策略使得企业 1 不想成为领导者。

综上：企业 1 为领导者，企业 2 为跟随者。

2)博弈矩阵

		2	
		L	F
1	L	(3200,900)	(3566.67,711.11)
	F	(3003.125,918.75)	(3200,900)

有限次博弈：(L, L) 古诺均衡

无限次博弈：有可能是(L, F)，斯塔克伯格均衡，关键看贴现δ,冷酷策略。