# 9.5

None Leon

2021/1/7

{r setup, include=FALSE} knitr::opts_chunk$set(echo = TRUE)

1.在决定在非法地点停车时，任何个人都知道获得罚单的概率是$p$，而收到罚单的罚款是$f$。假设所有个体都是风险规避者（即，$U''$（$W$）$<0$，W 是个体的财富按比例提高被抓概率，还是按比例提高罚款，对违法停车会起到更有效的震慑作用？提示：使用泰勒级数近似值$U$（$W-f$）=$U（W）-fu^{\prime}（W）+\left（f^{2}/2\ right）U^{\prime\prime}（W）$

solution

假设 f 或者 p 增加的比例均为 t ($t>1$)

若 p 增加 t 倍，期望效用为：

$$\begin{aligned} Eu_1 &= tPu(w-f)+(1-tp)u(w) \\ &= u(w)-tpfu'(n)+\frac{1}{2}tpf^2u''(w) \end{aligned}$$

若 f 增加 t 倍，期望效用为：

$$\begin{aligned} Eu_2 &= Pu(w-tf)+(1-P)u(w) \\ &= u(w)-tPfu'(w)+\frac{1}{2}t^2Pf^2u''(w) \end{aligned}$$

由于 $Eu_1-Eu_2=\frac{1}{2}tPf^2u''(w)(1-t)>0$

故罚金 f 增加 t 倍更加有效。

note：风险规避系数的推导

1.两种风险规避系数$\begin{cases} R_A(w)=-\frac{u''(w)}{u'(W)} \\ R_R(w)=-\frac{w\cdot u''(w)}{u'(w)} \end{cases}$

2.绝对风险规避系数

1)方法 1：相对简单，易于立即

初始财富 w,参与一项赌博，以 p 获取 $h(h>0)$，以$(1-p)$的概率失去 h，对于风险厌恶程度不同的人而言，要求的 p 不同，如何准确刻画呢？

参与条件：

$$
\begin{aligned}
Eu &= pu(w+h)+(1-p)u(w-h) \\
&= p\left[u(w)+u'(w)h+\frac{1}{2}u''(w)h^2\right] \\
&+(1-p)\left[u(w)-u'(w)h+\frac{1}{2}u''(w)h^2\right] \\
&= u(w)+(2p-1)u'(w)h+\frac{1}{2}u''(w)h^2
\end{aligned}
$$

令 $u(w)=Eu$

$$\Rightarrow \quad p=\frac{1}{2}+\frac{h}{4}\left[-\frac{u''(w)}{u'(w)}\right]$$

$\Rightarrow p$ 与 $\frac{-u''(w)}{u'(w)}$正相关

$\Rightarrow$ 定义 $R_A(w)=\frac{-u''(w)}{u'(w)}$

$R_A(w)$ 越大，p 越大，越厌恶风险。

2)方法 2:相对复杂

初始财富 w,未来不确定，有 s 中状态，状态 s 发生的概率为 $\pi_s$,收入变为$w+h_s$,其中 $\sum_{s=1}^{S}\pi_s h_s=0$ 即$E(h)=0$ 。保险公司提供完全保险。投保人最多愿意支出的金额 p 与风险厌恶程度有关，该如何精确衡量呢？

投保$u(w-p)$

不投保
$$
\begin{aligned}
Eu &= \sum_{s=1}^{\xi}\pi_s u(w+h_s) \\
&= E[u(w+h)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E[u(w+h)] &= E\left[u(w)+u'(w)h+\frac{h^2}{2}u''(w)\right] \\
&= u(w)+u'(w)E(h)+\frac{E(h^2)}{2}u'(w) \\
&= u(w)+\frac{\operatorname{var}(h)}{2}\cdot u''(w)
\end{aligned}
$$

$u(w-p)=u(w)-pu'(w)$

令 $E[u(w+h)]=u(w-P)$

$$\Rightarrow p=\frac{\operatorname{var}(h^2)}{2}\left[\frac{-u''(w)}{u'(w)}\right]$$

$\Rightarrow \quad p$ 与 $R_A(w)=\frac{-u''(w)}{u'(w)}$正相关

3)几点说明

平新桥书上省略了不投保部分的等式，所以比较难以理解

为何 $u(w-p)$ 只展开至一阶项，因为展开两项就得不到简练的表达式。

$\operatorname{Var}(h)=E(h^2)-E^2(h)=E(h^2)$，尼克尔森课后题有说明这一点

3.相对风险规避系数 $R_R(w)$

将 2 中的绝对变化 h 变为相对变化量，即 $\Rightarrow \begin{array}{l} U(w+h) \rightarrow \cup\, [w(1+h)] \\ h'=w\cdot h \end{array}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow p \quad &=\frac{1}{2}+\frac{h'}{4}\left[-\frac{u''(w)}{u'(w)}\right] \\ &=\frac{1}{2}+\frac{h}{4}\left[-\frac{wu''(w)}{u'(w)}\right]\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad R_R(w)=\frac{-wu''(w)}{u'(w)}$$

$$E(u[w(1+h)])=u[w(1-p)]$$

$$\Rightarrow u(w)+\frac{E(h^2)}{2}w^2\cdot u''(w)=u(w)-P_w u'(w)$$

$$\Rightarrow \quad p=\frac{\operatorname{var}(h^2)}{2}\left[\frac{-wu''(w)}{u'(w)}\right]$$

2.耐用品垄断：租赁与销售考虑一个两阶段的游戏，垄断公司想出售耐用品，如土地。[23]耐久性商品只能持续两个时期，之后就会过时。这两个时期之间货物没有贬值。折扣系数$\delta$对于所有消费者和公司都是相同的。逆需求函数由$p=1-Q$给出，其中$Q$表示总产出。假定生产是无成本的。转售市场是存在的，因为在第一阶段购买商品的消费者可能希望在第二阶段转售（或租赁）商品。

1)在每一个案例中，第一个卖得好的时期就是第一个卖得好的时期。

i)从第二阶段开始，为垄断者建立利润最大化问题，在给定需求函数$p2=1-q1-q2$的情况下，选择一个生产水平$q2$，确定利润最大化的产出$q2$；然后确定第二阶段的市场价格$p2$和利润$pi2$。

ii)考虑到第二阶段垄断的均衡价格，$p2$，第一阶段的需求是$p{1}=\left（1-q{1}\right）+\delta p{2}$，这直观地表示消费者在第一阶段为商品支付的意愿是由消费者分配给该商品的当前值给出的（在需求函数中捕获，$1-q1$）加上明天商品的贴现价值（如果当前消费者以$p2$的价格在第二阶段租赁商品，则会产生贴现

价值）。在给定第一阶段需求的情况下，建立了垄断者的利润最大化问题，其选择变量为$q1$，其目标函数不仅考虑了第一阶段利润，还考虑了第二阶段利润的折现值$\delta\pi2$。确定$q1$，随后的价格$p1$，以及两个时期的总体利润。

iii)表明均衡价格随时间而下降（即，$p1 > p2$）。

2)出租货物现在考虑到垄断者在每个时期租赁（即出租）货物。找到均衡价格和产出。从垄断中找到好的利润。[提示：租赁时

它的商品，即垄断者在给定时间段内的利润$t$独立于其他时间段的价格（即，$pt$和$pk$是独立的），其中$k \neq t.$]

3)利润比较使用你在 a 部分和 b 部分的结果，是租赁利润，$\pi L$，高于还是低于销售商品的利润，$\pi S$？

solution

1)出售商品

第二期利润最大化：

$$\max: \pi_2 = (1 - q_1 - q_2) \cdot q_2$$

$$Foc: \frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = 1 - q_1 - 2q_2 = 0$$

$$解得：\begin{cases} q_2 = \frac{1-q_1}{2}; p_2 = \frac{1-q_1}{2} \\ \pi_2 = \frac{(1-q_1)^2}{4} \end{cases}$$

第一期最优决策：

$$\begin{aligned} \max: \quad \pi^s &= \pi_1 + \delta\pi_2 \\ &= [(1 - q_1) + \delta p_2(q_1)]q_1 + \delta\pi_2(q_1) \end{aligned}$$

$$\text{Foc}: \frac{d\pi^s}{dq_1} = \left(1 + \frac{\delta}{2}\right)(1 - 2q_1) + \frac{\delta}{2}(q_1 - 1) = 0$$

解得：

$$q_1 = \frac{2}{4 + \delta}$$

综上：

$$p_1 = \frac{(2 + \delta)^2}{2(4 + \delta)}; q_1 = \frac{2}{4 + \delta}$$

$$p_2 = \frac{2 + \delta}{2(4 + \delta)}; q_2 = \frac{2 + \delta}{2(4 + \delta)}$$

$$p_2 = \frac{2+\delta}{2(4+\delta)};\, q_2 = \frac{2+\delta}{2(4+\delta)}$$

$$\pi_1 = \frac{(2+\delta)^2}{(4+\delta)^2}; \quad \pi_2 = \frac{(2+\delta)^2}{4(4+\delta)^2}$$

$$\pi^s = \pi_1 + \delta\pi_2 = \frac{(2+\delta)^2}{4(4+\delta)} \quad (0 \le \delta \le 1)$$

两期比较：

$p_1 > p_2 \quad ; \quad q_1 > q_2$

2)出租商品

t 期利润最大化 $(t = 1,2)$

max: $\pi_t = p_t(1 - p_t)$

Foc: $\frac{d\pi_t}{dp_t} = 1 - 2p_t = 0$

解得：$p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$

故 $q_1 = \frac{1}{2}$

由于机器无磨损，故 $q_2 = 0$第二期生产 0，但出租量仍为 1/2.

$$\pi^L = \pi_1 + \delta\pi_2 = \frac{1+\delta}{4}$$

3)出售与出租的比较

由于 $\begin{aligned} \pi^L - \pi^S &= \frac{1+\delta}{4} - \frac{(2+\delta)^2}{4(4+\delta)} \\ &= \frac{\delta}{4(4+\delta)} > 0 \end{aligned}$

故：出租由于出售

2.耐用品和跨时价格歧视 现在假设消费者能够在若干阶段享受某一耐用品。这样消费者今天 愿意购买该商品的价格就取决于他们明天能够购买它的价格的预期、因为今天的购买是明天购买的一种（不完全的）替代。我们首先建立一个 能够说明主要观点的简单的两阶段模型。我们证明，只要可行、耐用品 的制造者宁愿出租而不是出售它。我们然后考察跨时价格歧视的一般问 题，及其最极端形式，所谓的科斯猜想。这个猜想（现在是结论）断 言，当其价格调整的间隙收攻为零时，一个无限耐用品的生产者损失了 他的全部垄断力量。正如我们将要看到的，这一结论一定要由下面事实 限定，即在许多情况下，垄断者能够夺回他的某些垄断力量。我们然后 考察跨时价格歧视对垄断者选择商品的耐用性的意义。

1. 出租与出售 当一种商品（例如计算机或复印机）为耐用品时，它的生产者就有 者宁可出租以避免与出售相关联的跨时可信任问题。有两个阶段: $t = 1,2$ 。在 1 期生产和使用的商品能在 2 期再次使用，而没有贬值。为了 简化，假设在 2 期以后，该商品变得过时（被新产品取代），这样就没 有对它的需求了。模型和观点很容易一般化到没有变得过时的情况。为 了简化计算，假设生产该商品的成本为零，所以垄断者在各阶段可以愿 意生产多少就生产多少，而不产生任何成本。垄断者和消费者有贴现因 子 $\delta = 1/(1+r)$，其中 $r$ 是利率。对这种商品在每一阶段的消费（利用） 需求是 $D(p) = 1 - p$。垄断者有两种选择权: (1) 在每一阶段出租商品和;（2）在每一阶 段出售。在后一情况下，存在再销售市场，第一阶段购买的商品在第二 阶段可以再易手。在每一阶段，商品的拥有者如果愿意，可以出租给其 他消费者。

比较以下两种选播:

(1) 假设垄断者把定出租。他在每一阶段 $t$ 的价格是大化 $p_t D(p_t)$ 。 垄断者要价 $p_1 = p_2 = 1/2$. 这样他在 1 期生产 $q_1 = 1/2$, 在 2 期生产 $q_2 = 0$ (由于没有损耗)。他的跨时利润的当前贴现值是 $\Pi' = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\delta = \frac{1}{4}(1+\delta)$

(2) 假设垄断者费定出售。1 期出售的数量在 2 期的市场上被“再 （最大化他的利浑)。伴随价格 $p_2$ 是指所提供的总数量（ $(q_1 + q_2)$ 等于 者选授 $q_2$ 以求解

$$\max_{q_2}(g_2(1 - q_1 - q_2)$$

(3) 从中，我们确定 $q_2 = (1 - q_1)/2.2$ 期的利润就是 $(1 - q_1)^2/4$ 。o 现在我们考察第一阶段。耐用品买方愿意支付的价格（不管他们是 自己使用还是出租）取决于他们对 2 期市场价格的预期。令 $p_2^{\mathrm{a}}$ 为该预 期价格。消费者愿意支付 $(1 - q_1) + \delta p_2^n$, 因为当前出租价格是 $1 - q_1$ 。 因此，我们有

$$p_1 = (1 - q_1) + \delta p_2^n$$

(4) 为了完成这个模刑，我们假设消费者正确预期到 2 期的要价： $p_2^A = p_2$ 。从中已知 $q_1$, 他们希望生产者在 2 期捉供 $q_2 = (1 - q_1)/2$ 的相应价 格为

$$p_2 = 1 - q_1 - \left(\frac{1 - q_1}{2}\right) = \frac{1 - q_1}{2}$$

(5) 因此，我们得出

$$p_1 = (1 - q_1) + \delta\left(\frac{1 - q_1}{2}\right) = (1 - q_1)\left(1 + \frac{\delta}{2}\right)$$

(6) 特别要注意，在价格 $p_1$ 时的需求的数量低于茎斷者承诺自己在 2 期不 生产时的情况（在这种情况下， $p_1 = (1 - q_1)(1 + \delta)$ ）。还要注意第一 阶段价格一定超过第二阶段价格。这样垄断者选择 $q_1$ 以最大化，即

$$\Pi^* = \max_{q_1}\left[q_1(1-q_1)\left(1+\frac{\delta}{2}\right)+\delta\frac{(1-q_1)^2}{4}\right]$$

(7) 留给读者核实

$$q_1 = 2/(4+\delta)$$
$$p_1 = \frac{(2+\delta)^2}{2(4+\delta)} < \frac{1+\delta}{2}$$

(8) 以及更重要的， $\Pi^8 < \Pi'$ 。由于这一最后的不等式，柴断者宁可出租。

2. 科斯问题“使市场泛滥”（实际上，他这样做了）时，消费者（或投突者）就不会 准备在 1 期支付高价格。(同样地，柴断者会通过引人新款式使 1 期被购买的商品过时。）为了简化，考察由有单位需求的连续消赏者构成的 线性需求曲线，其中每个人每单位的意愿支付在 [0. 1] 区间。假设垄 低其价格（在此降到 1/4）。因此、回过头看、一些支付意惑接近 1/2 的消肃者将要在第一阶段抑制喝买。例如，一个有支付意愿等于 $1/2+\varepsilon\ \varepsilon(1+\delta)$ 的剩余：如果他等侍，剩余为 $\delta(1/4+\varepsilon) >_{\varepsilon} (1+\delta)$ 。因此，对 明天价格调整的预期改变了今天些断者的需求曲线。面对完全预见下的 我们有跨时价格歧视现象。在均衡条件下，只有高估价消费者在第一阶 根本不去购实。 垄断者受到消费者认为的他会使市场泛滥的理性信念的损害。这一 问题在下面的情形下采取了一种极端的形式：假设垄断者和消费者无限 期地活着，商品无限期地耐用。消费者有单位需求。每个消费者现在的 估价代表了从购买日起，该商品带来的服务的当前貼现值。假设消费者 的估价依据菜一平滑的密度函数在 $[c,+\infty]$ 上分布，其中 $c$ 是该商 品的单位生产成本。(可以很容易证明，由于垄断者绝不会要低于 c 的 价格，估价低于 $c$ 的消赏者是不相关的。）令 $\delta = e^{-r\Delta}$, 其中 $r$ 为利率， $\Delta$ 为价格调整之间的时长。科斯猜想（1972），共特殊需求函数和均衡 情况由布罗（1982）和斯托凯（1981）证明，其较一般的需求结构由古 尔（Gul）、松恩深（Sonnenschein）和威尔逊（1986）证明。[36] 根据该 猜想，当 $\Delta$ 趋近于零时，踊时利沟趋近于零。换句话说，一个很快改 衡情况下，消费者期望他在任何未来时刻的要价接近竞争性价格 $c$, 而 且由于他们能组等待下一次提供而无需很多延迟成本，他们不会被引导 去接受较高的价格。因此，垄断者以要价接近竞争性价格而告终，这证 明了消毁者信念的正确。

3. 市场反需求函数为 $p = a - bq$ ，生产商的边际成本为 $c$, 有两个零售商分别从生产商 处进化，批发价统一为 $w$, 零售商之间展开产 l 量竞争。

1) 如果零售商之间进行古诺竞争，求均衡时的批发价，商品价格和零售商的进货量。

2) 如果生产商决定额外对每家零售商收取固定的特许权费用 $A$ ，重新求解上一问。

3)如果存在 N 个零售商，重新回答上述两问，当 N 趋向于无穷大时，你会发现什么结论？

solution

N 个企业进行古诺竞争利润最大化：

$$\max: \pi_i = (a - c - bq)q_i$$

$$Foc: \frac{\partial \pi_i}{\partial p_i} = a - c - 2bq_i - bq_{-i} = 0$$

由对称性知：

$$q_i = \frac{a - c}{(N+1)b}$$

故： $q = \frac{N(a-c)}{(N+1)b}; p = \frac{a+Nc}{N+1}$

$$\pi_i = \frac{(a-c)^2}{(N+1)^2 b}$$

1)两个零售商进行古诺竞争 $mc = W$

需求 $q = \frac{2(a-w)}{3b}; p = \frac{a+2w}{3}$

生产利润最大化：

$$\max: \pi = (w - c) \cdot \frac{2(a-w)}{3b}$$

Foc: $\frac{d\pi}{dw} = \frac{2}{3b}(a + c - 2w) = 0$

解得：

$$w = \frac{a+c}{2}$$

因此：

零售价： $p = \frac{a+2w}{3} = \frac{2a+c}{3}$

进货量 $q = \frac{2(a-w)}{3b} = \frac{a-c}{3b}$

2)额外收取特许权费用

生产利润最大化：

$$\max: \pi = (w - c) \cdot \frac{2(a-w)}{3b} + 2A$$

st: $A \le \pi_i(w) = \frac{(a-w)^2}{9b}$

Foc: $\frac{d\pi}{dw} = \frac{2}{3b}(c-w) = 0$

解得： $w = c$

此时：

零售价 $p = \frac{a+2w}{3} = \frac{a+2c}{3}$

进货量： $q = \frac{2(a-w)}{3b} = \frac{2(a-c)}{3b}$

特许权费用消除了双重价加价的影响，使最终的均衡与单纯的双寡头古诺竞争一样。

3)当 N 家厂商进行古诺竞争时

生产利润最大化

$$\max: \pi = (w-c)\frac{N(a-w)}{(N+1)b}$$

Foc: $\frac{d\pi}{dw} = \frac{N}{(N+1)b}(a+c-2w) = 0$

解得： $w = \frac{a+c}{2}$

此时零售价 $p = \frac{a+Nw}{N+1} = \frac{(N+2)a+Nc}{2(N+1)}$

进货量 $q = \frac{N(a-w)}{(N+1)b} = \frac{N(a-c)}{2(N+1)b}$

当 $N \to \infty$时

$$\begin{cases} p = \dfrac{a+c}{2} = W = p^m \\ q = \dfrac{a-c}{2b} = q^m \end{cases}$$

即当 $N \to \infty$ 时， $\pi_i \to 0$此时生产厂商相当于一个垄断厂商，即使收取特许经营费 A,$A \to 0$.