9.21

None Leon

2021/1/20

1. 有两个猎人以在公共猎场捕获兔子为生。猎场共有 1000 只兔子。每个猎人面临的选择是决定 捕获兔子的速率 $r_i(i=1,2)$ 。猎人 i 的净效用取决于兔子的捕获量 q_i 和捕获的速率 $r_i(i=1,2)$, 即
$$U_i = 4q_i + 50r_i - r_i^2$$
2. 其中 $q_i = \frac{1000r_i}{r_1+r_2}, i = 1,2$ 。

1） 如果两位猎人能够达成一个最优捕获率，那么最优捕获率等于多少？

2） 如果每个猎人各自决策，那么他们选择的捕获率将是多少？请简要解释为什么猎人各自决策 的结果和第 1 问中得到的结果会存在差异。

3） 上述问题在经济学上被称为“公共地悲剧”。请简要说明什么是公共地悲剧。另请列举一种 解决办法，并说明条件和理由。

3.一个有垄断势力的企业面临的需求曲线为 $P = 100 - 3Q + 4\sqrt{A}$, A 为广告费用，总成 本函数为 $C(Q,A) = 4Q^2 + 100 + A$ 。

1）试求企业利润最大化时的 P,Q,A;

2）厂商利润最大化时，勒纳指数是多少?

3) 该厂商如果不打广告，利润最大化时产量是多少?

4）从整个社会角度来看，最优的 P,Q,A 是多少?

solution

1）共同捕猎：

$$\max: U = U_1 + U_2 \quad = 4q_1 + 50r_1 - r_1^2 + 4q_2 + 50r_2 - r_2^2$$
$$= 4000 + 50r_1 - r_1^2 + 50r_2 - r_2^2$$

$$\text{FOC:}\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial r_1} = 50 - 2r_1 = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial r_2} = 50 - 2r_2 = 0 \end{cases}$$

解得：

$r_1^* = r_2^* = 25$

2）独自捕猎：

$$\max: U_i = 4q_i + 50r_i - r_i^2 \quad (i = 1,2)$$
$$= \frac{4000r_i}{r_1 + r_2} + 50r_i - r_i^2$$

FOC:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U_1}{\partial r_1} = 50 - 2\gamma_1 + \dfrac{4000r_2}{(r_1 + r_2)^2} = 0 \\ \dfrac{\partial V_2}{\partial r_2} = 50 - 2r_2 + \dfrac{4000r_1}{(r_1 + r_2)^2} = 0 \end{cases}$$

解得：$r_1^{**} = r_2^{**} = \frac{25+\sqrt{2625}}{2} \doteq 38\left(\frac{25-\sqrt{2625}}{2}\right)$

3）公地悲剧：过多的参与者追求有限的资源，每个参与者只考虑自己的理性决策，同样会对其他参与者产生负的外部效应。

体中由于效用函数中存在 $4q_i = \frac{4000r_i}{r_1+r_2}$项，即独自选择最优捕获率时选择的产量为 q_i，总体产量时给定的，就会影响到其他参与者的效用 U_j。

解决方案：

第三方干预：征税、许可证

利用科斯定理：产权界定、交易等

以本题为例：若对每个猎人的捕获量征收 t 单位的从量税，则

$$\max: \quad U_i = (4 - t)q_i + 50r_i - r_i^2$$

$$Foc: \frac{\partial U_i}{\partial r_i} = (4 - t)\frac{4000r_j}{(r_1 + r_2)^2} + 50 - 2r_i$$

若 $r_i = r_0 = 25$，则 $t^* = 4$

2.在纯交换经济中，存在两个消费者 A 和 B，他们的效用函数分别是 $U_A = x_A y_A$ 和 $U_B = 2x_B + y_B$, 消费者 A 的初始課赋为 (3,3), 消费者 B 的初始京赋为 (2,7)

1) 画出埃奇沃思矩形图，标示出消费者的亭赋和无差异曲线。

2）在价格比为 P 的情况下，求两种商品的超额需求函数。

3) 均衡价格比是多少?消费者 A 和 B 各自需求量是多少?

4) 如果该经济的总京赋是 (5,10), 求所有均衡轨迹。

5) 如果该经济的总課赋是 (10,10), 求所有均衡轨迹。

6) 承接 5)，消费者 A 的初始課赋为 (8,8)，求均衡价格比。

solution：

1）图示

2）A 的效用最大化：

max: $U_A = x_A y_A$

$st: px_A + y_A = 3p + 3$

拉格朗日函数：

$$\mathcal{L} = x_A y_A + \lambda[3p + 3 - px_A - y_A]$$

$$\text{FOC:}\begin{cases}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_A} = y_A - \lambda p = 0\\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_A} = x_A - \lambda = 0\end{cases}$$

$$\text{解得：}\begin{cases}x_A = \frac{3p+3}{2p}\\ y_A = \frac{3p+3}{2}\end{cases}$$

B 的需求为：

$$x_B = \begin{cases}0 & p > 2\\ \left[0, \dfrac{2p+7}{p}\right] & p = 2\\ \dfrac{2p+1}{p} & 0 < p < 2\end{cases}$$

$$y_B = \begin{cases}2p+7 & p > 2\\ [0, 2p+7] & p = 2\\ 0 & 0 < p < 2\end{cases}$$

综上：x,y 的超额需求为：

$$EDx = \begin{cases}\dfrac{3-7p}{2p} & p > 2\\ \left[\dfrac{173p}{2p} \dfrac{7-3p}{2p}\right] & p = 2\\ \dfrac{17-3p}{2p} & 0 < p < 2\end{cases}$$

$$ED_y = \begin{cases} \frac{7}{2}p - \frac{3}{2} & p > 2 \\ \left[\frac{3p-17}{2}, \frac{7p-3}{2}\right] & p = 2 \\ \frac{3}{2}p - \frac{17}{2} & 0 < p < 2 \end{cases}$$

3）均衡时： $EDx = EDy = 0$

当 $p > 2$时，

$p = \frac{3}{7} < 2$不符合

当 $0 < p < 2$时， $p = \frac{17}{3} > 2$不符合

当 $p = 2$时

$$\begin{cases} x_A = \frac{9}{4} \\ y_A = \frac{9}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_B = \frac{11}{4} \\ y_B = \frac{11}{2} \end{cases}$$

此时为瓦尔拉斯均衡。

4）求 $e = (5,10)$时的契约函数

max: $U_A = x_A y_A$

$\overline{U}_B = 2x_B + y_B$

$x_A + x_B = 5$

$y_A + y_B = 10$

拉格朗日函数：

$$\mathcal{L} = x_A y_A + \lambda\left[\overline{U_B} - 2(5 - x_A) - (10 - y_A)\right]$$

FOC:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_A} = y_A + 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_A} = x_A + \lambda = 0$$

解得：

$y_A = 2x_A \quad (0 \le x_A \le 5)$

此时只存在内部解。

5） $e = (10,10)$时的契约曲线

内部解均衡：

$y_A = 2x_A \quad (0 \le x_A \le 5)$

对应区域：

此时 $p^* = 2$，由 A 的禀赋约束：

$$\begin{cases} x_A = \dfrac{p^* e_A^X + e_A^Y}{2p_*^r} \le 1 \\ y_A = \dfrac{p^* e_A^X + e_A^Y}{2} \le 10 \end{cases}$$

$\Rightarrow 0 \le e_A^Y \le 20 - 2e_A^x$

角点解均衡：

契约曲线：

$y_A = 10 \quad (5 \le x_A \le 10)$

对应的区域：

$e_A^Y \ge 20 - 2e_A^X$

初始禀赋 E_0

若无约束： $E_0 \to E_3$

有约束： $E_0 \to (E_1 - E_2)$

取决于均衡价格 p^*

6）若 A 的初始禀赋为： $e_A = (8,8)$

首先限定 B 的需求：确定 p^*的上限。

若 $p > 2$ 则 $x_B = 0$，不可能达到角点解均衡

故 $p^* \le 2$

其次限定 A 的需求：确定 p^*下限

$$\begin{cases} x_A = \dfrac{8p+8}{2p} = 4 + \dfrac{4}{p} \geq 6 > 5\text{：}\textit{一定满足角点解} \\ y_A = \dfrac{8p+8}{2} = 4 + 4p \geq 9\text{：}\textit{不一定满足角点解} \end{cases}$$

令 $y_A \geq 10 \Rightarrow p^* \geq \frac{3}{2}$

综上 $1.5 \leq p^* \leq 2$

此时均衡为： $y_A = 10$ 且 $\frac{20}{3} \leq x_A < 7$

$$E_0(8,8) \quad \begin{cases} E_1(7,10) \\ E_2(6.4,10) \\ E_3\left(\dfrac{20}{3}, 10\right) \end{cases}$$

3.一个有垄断势力的企业面临的需求曲线为 $P = 100 - 3Q + 4\sqrt{A}$, A 为广告费用，总成 本函数为 $C(Q,A) = 4Q^2 + 100 + A$ 。

1）试求企业利润最大化时的 P, Q, A;

2）厂商利润最大化时，勒纳指数是多少?

3) 该厂商如果不打广告，利润最大化时产量是多少?

4）从整个社会角度来看，最优的 P, Q, A 是多少?

solution：

1）利润最大化：

$\max: \pi = P(Q,A) \cdot Q - C(Q,A)$

$$\text{FOC:} \begin{cases} \dfrac{\partial \pi}{\partial Q} = p_2 \cdot Q + p(Q,A) - c_Q = 0 \\ \dfrac{\partial \pi}{\partial A} = p_A \cdot Q - c_A = 0 \end{cases}$$

解得：

$$Q^* = \frac{100}{3} \quad A^* = \frac{40000}{9} \quad p^* = \frac{800}{3}$$

2） $L = \frac{p - mc}{p} = 0$

3）若 $A = 0$，利润最大化：

$\max: \pi = P(Q) \cdot Q - C(Q)$

$$Foc\colon \frac{d\pi}{dQ} = 100 - 6Q - 8Q = 0$$

解得：$Q^m = \frac{50}{7}$

4）社会最优：

$$\max\colon \quad sw = \int_0^Q p\,(t, A)dt - c(Q, A).$$

$$\text{FOC:}\begin{cases} \frac{\partial SW}{\partial \alpha} = P(Q, A) - C_Q = 0 \\ \frac{\partial SW}{\partial A} = \int_0^Q p_A\,(t, A)dt - C_A = 0 \end{cases}$$

解得 $Q^{**} = \frac{100}{3} \quad A^{**} = \frac{40000}{9} \quad p^{**} = \frac{800}{3}$

附加：若 $c(Q, A) = 4Q^2 + 10Q + A$

1）垄断厂商最优：

Q=15,A=900 ,P=175

2) $L = \frac{p - c_Q}{p} = \frac{9}{35}$

3) $A = 0$时厂商最优：

$$Q^m = \frac{45}{4}$$

4）社会最优： $Q^{**} = 30 \quad A^{**} = 3600 \quad P^* = 250$

垄断广告不足，有时也会出现垄断广告过剩。