9.28

None Leon

2021/1/10

`{r setup, include=FALSE} knitr::opts_chunk$set(echo = TRUE)`

R Markdown

1.为治理空气污染问题, 其他政府尝试污染权交易制度。政府 将总量为 $\bar{Q}$ 的污染排放许可证免费分配给 N 家不同的企业。假设企业 i 免费获得的初始污染证数量是 Q_i^0。 显然我们有 $\bar{Q}=\sum_{i=1}^{N} Q_0^n$ 。企业可以在 市场上自由买卖这些污染权证数量。显然, 如果 $Q_i>Q_i^n$, 企业必须从 市场上购买额外的污染权证, 反之则卖出污染权证。设 $C_i(Q_i)$ 是企业 的污染减排成本, $C_i'(Q_i)<0, C_i'(Q_i)>0$。设 P 为污染权证的市场价格。

1)考虑污染权证交易市场完全竞争。请写下企业 } i 的减排成本最 优化问题并写下企业的污染排放的最优条件。请问在该制度下，不同 企业的减排活动有什么重要特征? 该制度是帕累托有效的吗?

2) 请写下污染证市场的竞争性均衡条件。请问污染权证市场均 衡是什么变量的函数? 初始的污染权分配对污染权证的市场均衡价格 和企业的减排活动有什么样的影响?

(3)设在污染权证市场上，企业 1 拥有垄断定价权，其它企业都 是价格跟随者。请分别写下企业 1 和其他企业的成本最小化问题以及 各自的污染物排放的最优条件。可考虑企业 1 选择污染权证价格以使 得自身的减排成本最小化。请问此时，污染权证制度是帕累托有效的 吗? 如果是帕累托有效的, 请解释你的答案。如果不是帕累托有效 的，请指出在什么条件下该污染权交易制度能实现帕累托有效的资源 配置。

Solution:

分析：首先对企业的行为进行分析。面对生产过程中的污染，一方面可以通过去污技术消去，另一方面可以购买污染权证。企业的行为无非是权衡两种方式的成本。

由于 $Q_i>Q_i^0$时，企业必须购买权证。故 Q_i表示企业去污过程中使用凭证的消除量。假设 $\overline{Q}_i$ 表示企业 i 的总污染量，且为外生变量。则$\overline{Q_i}-Q_i$表示利用去污技术的消除量，该部分对应的成本为：

$C_i(Q_i)=C_i\left(\overline{Q_i}-Q_i\right)$

由于 $C_i'(Q_i)=-C_i'\left(\overline{Q_i}-Q_i\right)<0$ $C_i''(Q_i)=C_i''(\bar{Q}_i-2Q_i)>0$

故企业的去污技术为污染量的单增凸函数

1) i)企业 i 成本最小化：

$\min C_i = C_i(Q_i) + p\left(Q_i - {Q_i}^0\right)$

FOC: $\frac{dC_i}{dQ_i} = C_i'(\alpha_i) + p = 0$

即： $p = -C_i'(R_i) \quad (\forall i = 1,2 \cdots N)$

ii)该制度下，任意企业 i 使得 $p = -c_i'(Q_i)$，即使得两者去污方式的边际成本相等，，都等于市场价格 p

iii)该制度帕累托有效，证明如下： $\min: C = \sum_{i=1}^{n} C_i = \sum_{i=1}^{N} [C_i(Q_i) + P(Q_i - Q_i^0)]$

st: $\sum_{i=1}^{N} C_i = \sum_{i=1}^{N} Q\, i^0$

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{n} C_i + \lambda\left[\sum_{i=1}^{N} Q_i - \sum_{i=1}^{N} Q_i\right]$$

Foc: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_i} = c_i'(\alpha_i) - \lambda = 0$

即： $C_i'(Q_i) = \lambda \quad (\forall i = 1,2 \cdots N)$

2)由 1)知： $p = -c_i'(Q_i)$

由于 $C_i'(Q_i)$单调，故存在一个反函数使得

$Q_i = f_i(p)$，即企业 i 的权证需求

权证市场总需求：

$$Q^d = \sum_{i=1}^{N} Q_i = \sum_{i=1}^{N} f_i\,(p)$$

均衡时： $\sum_{i=1}^{N} f_i\,(p) = \sum_{i=1}^{N} Q_i^0 = \overline{Q}$

故 $p = g(\overline{Q})$(单调性得反函数)

因此均衡的价格是$\overline{Q}$)的函数，与产权的初始分配无关。(科斯定理)

3)若企业 1 是价格领导者：

价格追随者$i(i = 2,3 \cdots \cdot N)$的最优条件：

$p = c_i'(Q_i)$

权证剩余需求：

$$Q_1 = \overline{Q} - \sum_{i=2}^{N} Q_i = Q_1(p)$$

价格领导者 1 的最优条件：

$\min: C_1 = C_1(Q_1) + P(Q_1 - Q_1^0)$

$Foc: \dfrac{dc_1}{dp} = c_1'(Q_1) \cdot \dfrac{dQ_1}{dp} + p \cdot \dfrac{dQ_1}{dp} + (Q_1 - Q_1^0) = 0$

当且仅当 $Q_1 = Q_1^0$时；$p = -c_1{}'(Q_1)$，即帕累托最优。

即企业 1 对权证的需求为 0 时，能够达到帕累托最优，此时 2-N 相当于形成一个完全竞争市场，科斯定理成立。从整体上看，此时产权的初始分配会影响均衡价格。

2.生产均衡。考虑一个经济体有两种商品，1 和 2，它们都是用资本和劳动生产的。企业是价格接受者，产出价格由国际市场决定。商品 1 和商品 2 的产出系数为

$$q_1 = (K_1)^{1/4}(L_1)^{3/4}$$
$$q_2 = (K_2)^{3/4}(L_2)^{1/4}$$

1)求出每个公司的边际成本。

2)用 1)部分的结果把你的结果和斯托尔珀-萨缪尔森定理联系起来。

3)如果$p1 = 2p2$，，那么在均衡时$wL = 4wK$

Solution:

1) 假设 K,L 的价格为 w_k, w_l

$$\begin{aligned} \min: \quad & c = w_k \cdot k + w_l \cdot l \\ st: \quad & q = k^{\alpha} l^{1-\alpha} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{k}{l} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \left(\frac{w_l}{w_k}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k = \left(\dfrac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} \left(\dfrac{w_l}{w_k}\right)^{1-\alpha} q \\ l = \left(\dfrac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\alpha} \left(\dfrac{w_k}{w_l}\right)^{\alpha} \cdot q \end{cases}$$

$$\Rightarrow c = \alpha^{-\alpha}(1-\alpha)^{-(1-\alpha)} w_k^{\alpha} w_L^{1-\alpha} \cdot q$$

$$\Rightarrow \quad mc = \alpha^{-\alpha}(1-\alpha)^{-(1-\alpha)} w_k^{\alpha} w_l^{1-\alpha}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} mc_1 = 4 \cdot 3^{-\frac{3}{4}} \cdot w_k^{\frac{1}{4}} w_L^{\frac{3}{4}} \\ mc_2 = 4 \cdot 3^{-\frac{3}{4}} \cdot w_k^{\frac{3}{4}} w_L^{\frac{1}{4}} \end{cases}$$

2)由于企业为价格接受者：

则 $P_1 = MC_1; P_2 = MC_2$

即 $\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{w_l}{w_k}\right)^{\frac{1}{2}}$

Stolper-Samuelson 效应：

某一商品相对价格的上升，会使得该密集使用的生产要素的相对价格上升，即提高了该要素所有者的收入，这就是对外开放的一个重要意义。

$$p = \frac{p_1}{p_2} \uparrow \rightarrow \left(\frac{w_l}{w_k}\right) \uparrow \rightarrow \frac{k_1}{l_1} \uparrow, \frac{k_2}{l_2} \uparrow$$

3)由于 $\frac{W_l}{Wk} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^2$

当 $\frac{p_1}{p_2} = 2$ 时， $w_L = 4w_k$

3.给定如下支付矩阵

		player B	
		L	R
player A	T	(a,b)	(c,d)
	B	(e,f)	(g,h)

1) 如(T,L)是占优策略（Dominant Strategy)，则 a 到 h 间应满足什么关系?
2) 如(T,L)是纳什均衡，则 a 到 h 间应满足什么关系?
3) 如(T,L)和(B,R)都是纳什均衡，则 a 到 h 间应满足什么关系?

4)试求该题目的混合策略。

Solution:

1)若(T,L)是占优策略:

$$\begin{cases} 对A而言: \quad a \geq e, \quad c \geq g \\ 对B而言: \quad b \geq d, \quad f \geq h \end{cases} （取等号时为弱占优策略）$$

2)若 (T, L)时 NE

$$\begin{cases} 对B而言：\in 1: \quad b \geq d \\ 对A而言: \quad\quad\quad a \geq e \end{cases}$$

3)若$(T,L),(B,R)$是 NE：

(T,L)为 NE: $b \geq d, a \geq e$ (B,R)为 NE: $h \geq f \quad g \geq c$

4)混合均衡

假设 A 以γ选择 T,B 以θ选择 L ,且$(0 < \gamma, \theta < 1)$

若 A 选 T:

$E\pi_A^T = \theta \cdot a + (1-\theta) \cdot c$

若 A 选 B: $E\pi_A^B = \theta \cdot e + (1-\theta) \cdot g$

由无差异性： $E\pi_A^T = E\pi_A^B$

得： $\theta^* = \frac{c-g}{c+e-a-g}$

同理得：

$$\gamma^* = \frac{h-f}{b+h-f-d}$$

当且仅当 $0 < \theta^*, \gamma^* < 1$时，存在混合策略 NE

即：

$(c-g)(e-a) > 0$ $(b-d)(h-f) > 0$