8.20

None Leon

2021/2/4

1.小明在 A 市工作，其效用函数为$u(x,y)=x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$，$\left(p_x,p_y,m\right)=(1,2,24)$

1)若调往 B 市工作，$\left(p_x',p_y\right)=(2,2)$。求此时小明的最优消费。相对于 A 市，x 变化中替代、收入效应分别为多少。

2)前往 B 市工作，小明的工资相当于减少为多少？boss 至少给小明涨多少工资才能让小明前往 B 市？

solution:

效用最大化：$\max \quad U(x,y)=x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\,st: \quad p_x\cdot x+p_y\cdot y=m$

拉格朗日函数：

$$\mathcal{L}=x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+\lambda\left[m-p_x\cdot x-p_y\cdot y\right]$$

$$\text{FOC:}\begin{cases}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}f^{\frac{1}{2}}-\lambda p_x=0\\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}-\lambda p_y=0\end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases}x=\dfrac{m}{2p_x}\\ y=\dfrac{m}{2p_y}\end{cases}$$

$$\begin{cases}V\left(p_x,p_y,m\right)=\dfrac{m}{2\sqrt{p_xp_y}}\\ E\left(p_x,p_y,U\right)=2\sqrt{p_xp_y}\cdot U\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^h=\dfrac{\partial E}{\partial P_x}=\sqrt{\dfrac{P_y}{P_x}}\cdot U\\ y^h=\dfrac{\partial E}{\partial P_y}=\sqrt{\dfrac{P_x}{P_y}}\cdot U\end{cases}$$

1)替代效应：

$$
\begin{aligned}
\Delta x^{S} &= x\left(p_x', p_y, m'\right) - x\left(p_x, p_y, m\right) \\
&= -3
\end{aligned}
$$

其中 $m' = m + \Delta p_x \cdot x\left(p_x, p_y, m\right) = 36$

收入效应：

$$
\begin{aligned}
\Delta x^{n} &= x\left(p_x', p_y, m\right) - x\left(p_x', p_y, m'\right) \\
&= -3
\end{aligned}
$$

2)前往 B 市工作，由于价格上升，导致效用下降。工资相对于减少，即以u_1为标准，在原(p_x, p_y)下，仅需较少的收入就可达u_1,相当于工资损失，即利用 EV 评估。

$$
\begin{aligned}
EV &= \int_1^2 \sqrt{\frac{py}{px}} \cdot U_1 dp_x \\
&= 12(2-\sqrt{2})
\end{aligned}
$$

即相当于工资减少了 $12(2-\sqrt{2})$

也就是说$P_x = 1$时，仅需 $12\sqrt{2}$ 即达到u_1,此时需要 24，损失了$24 - 12\sqrt{2}$

2)老板需给小明涨工资，以u_0为基准，在新 $\left(p_x', p_y\right)$下至少需要增加多少才能达到初始效用u_0,即利用 CV 评估。

$$
\begin{aligned}
CV &= \int_1^2 \sqrt{\frac{p_y}{p_x}} U_0 dp_x \\
&= 24(\sqrt{2}-1)
\end{aligned}
$$

即老板至少涨 $24(\sqrt{2}-1)$，才能是小明前往 B 市。

即$p_x = 2$时，需 $24\sqrt{2}$到u_0,需涨 $24\sqrt{2} - 24$

注：
$$
\begin{aligned}
CV &= \int_{p_0}^{p_1} x^h\left(p_x, p_y, U_0\right) dp_x \\
&= E\left(p_x, p_y, u_0\right)\Big|_{p_0}^{p_1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
EV &= \int_{p_0}^{p_1} x^h\left(p_x, p_y, v_1\right) dp_x \\
&= E\left(p_x, p_y, v_1\right) \int_{p_0}^{p_x}
\end{aligned}
$$

note：禀赋效应

求禀赋效应是一般用 slutsky 分解，希克斯分级较为复杂。

1.三种效应的比较

初始：$p_x, p_y, \quad m = p_x w_x + p_y \cdot w_y$

现在：$p_x', \quad p_y \quad m'' = p_x' w_x + p_y \cdot w_y$

替代效应：$\Delta x^s = x(p_x', p_y, m') - x(p_x, p_y, m)$

(普通)收入效应：$\Delta x^n = x(p_x', p_y, m) - x(p_x', p_y, m')$

禀赋(收入)效用：$\Delta x^w = x(p_x', p_y, m'') - x(p_x', p_y, m)$

总效应：$\begin{aligned} \Delta x \quad &= \Delta x^s + \Delta x^n + \Delta x^m \\ &= x(p_x', p_y, m'') - x(p_x, p_y, m) \end{aligned}$

其中$\begin{cases} m' = m + \Delta p_x \cdot x(p_x \cdot p_y \cdot m) \\ m'' = m + \Delta p_x \cdot w_x \end{cases}$

2 图示：

3.slutsky 方程(修订后)

1)增量形式——slutsky 分解

$\Delta x = \Delta x^s + \Delta x^n + \Delta x^w$

$\Rightarrow \dfrac{\Delta x}{\Delta p_x} = \dfrac{\Delta x^5}{\Delta p_x} - \dfrac{\Delta x^m}{\Delta p_x} + \dfrac{\Delta x^w}{\Delta p_x} \quad (\Delta x^m = -\Delta x^n)$

令 $\begin{aligned} \Delta m \quad &= m' - m = 4 p_x \cdot x \\ \Delta m_1 \quad &= m'' - m = \Delta p_x \cdot w_x \end{aligned}$

$\Rightarrow \dfrac{\Delta x}{\Delta px} = \dfrac{\Delta x^s}{\Delta p_x} - \dfrac{\Delta x^m}{\Delta m} \cdot x + \dfrac{\Delta x^w}{\Delta m_1} \cdot w_x$

若p_x变动很小，$\frac{\Delta x^w}{\Delta m_1} \doteq \frac{\Delta x^m}{\Delta m}$

$\Rightarrow \dfrac{\Delta x}{\Delta p_x} = \dfrac{\Delta x^s}{\Delta p_x} + (w_x - x) \cdot \dfrac{\Delta x^m}{\Delta m}$

2)微分形式——希克斯分解

$x = x[p_x, p_y, m(p_x)]$

$\Rightarrow \dfrac{dx}{dp_x} = \dfrac{\partial x}{\partial p_x} + \dfrac{\partial x}{\partial m} \cdot \dfrac{dm}{dp_x}$

$= \dfrac{\partial x}{\partial p_x} + \dfrac{\partial x}{\partial m} \cdot W_x$

$$= \frac{\partial x^h}{\partial p_x} - \frac{\partial x}{\partial m} x + \frac{\partial x}{\partial m} \cdot W_x$$

$$= \frac{\partial x^h}{\partial p_x} + (w_x - x) \cdot \frac{\partial x}{\partial m}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dp_x} = \frac{\partial x^h}{\partial p_x} + (w_x - x) \frac{\partial x}{\partial m}$$

2. 假设某国的一个垄断厂商可以在国内和国际市场出售自己的产品。国内市场的需求函数为: $\mathrm{p}_1 = 41 - \mathrm{q}_1$, 国际市场的需求函数为: $\mathrm{p}_2 = 51 - \mathrm{q}_2$, 该厂商的成本函数为: $\mathrm{C}(\mathrm{q}_1, \mathrm{q}_2) = (1 + \mathrm{q}_1)(1 + \mathrm{q}_2)_0$

1)讨论利润最大化的该工厂是否会出口，并计算其产量q_1^*，q_2^*

2)现在政府限定至少 Z 单位的产品必须在国内市场出售。如果 Z = 16, 请计算该厂商的产量 q_1^* 和 $\mathrm{q}_2{}^*$ 。

3)如果 Z 进一步从 16 提高，给该垄断厂商带来的“影子成本”为多少?

4)假如成本函数为 $\mathrm{C}(\mathrm{q}_1, \mathrm{q}_2) = 2(1 + \mathrm{q}_1)(1 + \mathrm{q}_2)$, 则 (1) 的答案会变为什么?

solution：

1)利润最大化：

$\max: \pi = (41 - q_1)q_1 + (51 - q_2)q_2 - (1 + q_1)(1 + q_2)$

$\mathrm{st}: \quad q_1 \geq 0, \quad q_2 \geq 0$

构建拉格朗日函数：

$\exists u_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0$

$\mathcal{L} = (41 - q_1)q_1 + (51 - q_2)q_2 - (1 + q_1)(1 + q_2) + \mu_1 q_1 + \mu_2 q_2$

$$\text{Focs:} \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = 40 - 2q_1 - q_2 + u_1 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = 50 - q_1 - 2q_2 + u_2 = 0 \end{cases}$$

若 $q_1 > 0, q_2 > 0$ ，则 $\mu_1 = u_2 = 0; \quad q_1 = 10, \quad q_2 = 20\ \pi = 699$

若 $q_1 = 0, \quad q_2 > 0$ ，则 $u_2 \geq 0, \mu_1 = 0; \quad q_1 = 20. \quad \mu_2 = -30 < 0$不符合

若$q_2 = 0, \quad q_1 > 0$，则 $\mu_2 \geq 0, \mu_1 = 0; \quad q_1 = 20, \quad \mu_2 = -30 < 0$不符合

若$q_1 = q_2 = 0, \quad \pi = -1$ 不符，

则 $q_1^* = 10, q_2^* = 20$

2)利润最大化：

$\max: \pi = (41 - q_1)q_1 + (51 - q_2)q_2 - (1 + q_1)(1 + q_2) \quad st: q_1 \geq 16$

拉格朗日函数：

$\mathcal{L} = (41 - q_1)q_1 + (51 - q_2)q_2 - (1 + q_1)(1 + q_2) + \lambda(q_1 - 16)$

FOCs: $\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = 40 - 2q_1 - q_2 + \lambda = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = 50 - q_1 - 2q_2 = 0 \end{cases}$

由 1)知， $\lambda = 0$不符合。

故$\lambda > 0$,即 $q_1^* = 16$，此时$q_2^* = 17$

3)由 2)$\lambda = 9$ 故 z 从 16 进一步提高的影子成本为 9

4)若 $c(q_1, q_2) = 2(1 + q_1)(1 + q_2)$

利润最大化：

$\max: \pi = (41 - q_1)q_1 + (51 - q_2)q_2 - 2(1 + q_1)(1 + q_2)$

拉格朗日函数：

$\exists \quad \mu_1 \geq 0, \quad \mu_2 \geq 0$

$f = (41 - q_1)q_1 + (51 - q2)q_2 - 2(1 + q_1)(1 + q_2) + \mu_1 q_1 + u_2 q_2$

FOCs: $\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = 39 - 2q_1 - 2q_2 + u_1 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = 49 - 2q_1 - 2q_2 + u_2 = 0 \end{cases}$

K-T 条件:

$\mu_i q_i = 0 \quad (i = 1,2)$

当 $q_1 > 0$ 且 $q_2 > 0$时，此时 $u_1 = \mu_2 = 0$不符合

当 $q_1 > 0$ 且 $q_2 = 0$时，即 $\mu_1 = 0$ 且 $u_2 \geq 0$
此时 $u_2 = -10 < 0$，不符合

当 $q_1 = 0$ 且 $q_2 > 0$ 时， 即$u_1 \geq 0$ 且$u_2 = 0$，此时 $q_2 = 24.5, \quad \mu_1 = 10$符合

综上：此时反供应国外市场，不供应国内市场。

note：从本题可以看出，同时存在两个市场的联合生产时，即成本函数 $c(q_1, q_2) \neq c(q_1 + q_2)$，当成本较小是，可能会同时供应。若成本增加，可能只会供应大市场，而放弃小市场。

3. 假设某个市场的需求曲线为$D(\mathrm{y}) = \mathrm{a} - \mathrm{by}$, 其中 $\mathrm{y} > 0$ 为市场的总供给, $\mathrm{a} > 0$ 和 $\mathrm{b} > 0$ 为两个参数。该市场中共有 N 个相同的厂商。每个厂商的边际成本 为 $\mathrm{c} > 0$ 。假设 a>c。

1) 假设所有厂商在市场中进行古诺竞争，求解古诺均衡。

2)现假设每个厂商首先需要决定是否进入市场。如果进入市场，则需 要支付一个进入成本 q>0。如果不进入市场，不需要支付该进入成本，但也不 能在市场中生产销售。假设所有厂商同时决定是否进入，进入的厂商可以观察 到其它厂商是否进入，所有进入的厂商在市场中进行古诺竞争。均衡时会有多 少个厂商进入?

3)现假设上题中的进入成本实际上是由一个腐败的政府官员收取，该 官员的目标是最大化他从厂商中收取的进入费用，那么他应该把 q 定为多少? 此时有多少个厂商进入?

solution：

1)任意厂商 i 的利润最大化：

max: $\pi_i = (a - by)y_i - cy_i$

Foc: $\frac{\partial \pi_i}{\partial y_i} = a - by - c - by_i = 0$

由对称性知：

$$y_i^c = \frac{a - c}{(N + 1)b}$$

$$\pi_i^c = \frac{(a - c)^2}{(N + 1)^2 b}$$

$$y^c = \frac{N}{N+1}\frac{a-c}{b} p^c = \frac{a+Nc}{N+1}$$

$$\pi(n) = \frac{(a - 1)^2}{(n + 1)^2 b} - q = 0$$

$$n^* = \frac{a - c}{\sqrt{bq}} - 1$$

2)若存在进入成本q

设古诺均衡时，企业数量为 n

此时：

max: $T = n \cdot q = \frac{a - c}{\sqrt{b}} \cdot \sqrt{q} - q$

Foc: $\frac{d_T}{dq} = \frac{a-c}{\sqrt{b}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{q}} - 1 = 0$

$$\pi^* = \frac{(a-c)^2}{4b}$$

$$n^* = \frac{a-c}{\sqrt{bq^*}} - 1$$

3)腐败官员的最大化收入：

$$max: T = nq = \frac{a-c}{\sqrt{b}\sqrt{q}} - q$$

FOC:

$$\frac{dT}{dq} = \frac{a-c}{2\sqrt{b}\sqrt{q}} - 1 = 0$$

解得：

$q^* = \frac{(a-c)^2}{4b}$,此时 $n^{**} = 1$

note：若 N 有整数约束，则 2)应为$[n^*]$,由 2)无整数约束时$n^{**} = 1$，出题人虽然没有强调整数约束，但是厂商数量是自然数约束。