

모두의 안생일

류명선

mingshey@hafs.hs.kr

April 22, 2020

애니메이션 영화 “이상한 나라의 앨리스(1951)”[1]에서 앨리스가 미친 모자장수와 3월의 토끼를 만난 미친 다과회를 기억하시나요? 그 때 모자장수와 토끼는 “안생일 *Unbirthday*,” 즉 생일 아닌 날¹의 파티를 하고 있었죠.

가장 가까운 친구 사이에도 생일은 같은 경우가 드뭅니다. 그렇지만 안생일은 어느 누구와도 공유할 수 있습니다. 그렇다면 여러분이 다니는 학교에서 다른 학생들 모두와 안생일을 공유할 수도 있을까요? 학생 모두의 안생일인 날은 몇 일이 있을까요? 학생수가 일 년의 날 수보다 꽤 많다면 그런 날은 거의 없을 것이라고 짐작하실지도 모릅니다. 정말 그럴까요?

일 년의 날 수를 D 라고 할 때 안생일인 날은 $D - 1$ 이고², 따라서 어떤 날이 특정한 학생의 생일이 아닐 확률 P_1 은,

$$\begin{aligned} P_1 &= (D - 1)/D \\ &= 1 - \frac{1}{D} \end{aligned}$$

입니다.

학교의 학생수가 N 명이라고 할 때, N 이 D 의 α 배, 즉 $N = \alpha D$ 이라면, 그 날이 어떤

$$\begin{aligned} P_N = P_1^N &= \left(1 - \frac{1}{D}\right)^N \\ &= \left(1 - \frac{1}{D}\right)^{\alpha D} \end{aligned}$$

입니다. 일 년의 날 수 D 는 1보다 매우 큰 수이므로 ($D \gg 1$), $(1 - \frac{1}{D})^D \approx 1/e$ 이고³, 따라서

$$P_N \rightarrow e^{-\alpha},$$

그러면 모든 학생의 “안생일” 날 수의 기대치는, 일 년의 날 수가 D 이므로,

$$\begin{aligned} U &= D \times P_N \\ &\approx D \times e^{-\alpha}. \end{aligned}$$

예를 들어 (윤년이 아닌)평년에는 $D = 365$ 이고, 30 학급에 학급당 36.5명이 있는 학교에서 학생수는 $N = 1095$ 이고, $\alpha = 3$ 입니다. 즉 일년의 날 수보다 3배 많은 학생이

¹험프터 덤프터의 설명[2]

²앨리스의 계산식 참고[2]:

$$\begin{array}{r} 365 \\ - \quad 1 \\ \hline 364 \end{array}$$

³ $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e \approx 2.71828182846...$, 따라서 $y = -x$ 라 하면, $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x)^{1/x} = \lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{-1/y} = \lim_{y \rightarrow 0} \{(1 + y)^{1/y}\}^{-1} = e^{-1}$.

사실은, $D = 365$ 일 때, $(1 - \frac{1}{D})^D \approx 0.367375$ 이고, $1/e \approx 0.367879$ 로 상대오차는 약 0.137%입니다.

있는 학교에서,

$$\begin{aligned}P_N &= e^{-3} \approx \frac{1}{20}, \\U &\approx 365 \times e^{-3} \\&\approx 18.17 \text{ 일.}\end{aligned}$$

따라서 학생 수가 일 년의 날 수보다 많은
큼직한 학교에서도 모든 학생의 안생일, 즉
아무의 생일도 아닌 날은 꽤 여러 날이 남아
있을 수 있는 셈입니다.

그렇다면 모두의 안생일 수의 기대치가 d
보다 작으려면 학생수는 몇 명이 되어야 할
까요?

$$\begin{aligned}U &\approx De^{-\alpha} < d, \\D/d &< e^{\alpha}, \\\ln \frac{D}{d} &< \alpha = \frac{N}{D}, \\\therefore N &> D \ln \frac{D}{d}.\end{aligned}$$

예를 들어, 안생일 날 수의 기대치가 하루 미
만이라면 $\alpha > 5.9$, 이고, 학생 수는 2153명
보다 많아야 된다는 것입니다.■

References

- [1] 디즈니, “이상한 나라의 앨리스”(영
화, 1951)
- [2] 루이스 캐롤, “거울나라의 앨리스”
(1871)