단진자의 가속도는 어디에서 최대가 될까?

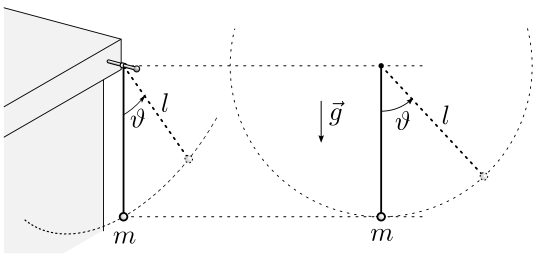
류명선
mingshey@hafs.hs.kr
용인한국외국어대학교부설고등학교

단진자의 가속도는 구심 가속도와 접선 가속도 성분이 있다. 접선 방향 가속도는 평형점에서 0이 되며, 이 때 구심 가속도는 최대가 된다. 반면 최고 높이에서 속력이 0이므로 구심 가속도는 0이고 접선 방향 가속도는 기울기가 90°일 때 최대가 된다. 그렇다면 두 가속도 성분을 합성한 값은 어느 지점에서 최대가 될까? 14기 김한재, 허정민 학생이 제기한 이 질문에 답해 보기로 한다.

먼저, 길이 l, 추의 질량 m인 단진자의 각진폭이 Θ, 즉

$$-\Theta \leq \vartheta \leq \Theta$$

라 하고, 단진자가 각 ϑ만큼 기운 순간 접선 가속도의 크기를 a_t, 구심 가속도의 크기를 a_c라 하자.



그러면, 역학적 에너지 보존으로부터

$$mgl\,(1-\cos\Theta) = \frac{1}{2}mv^2 + mgl\,(1-\cos\vartheta)$$

와 구심 가속도의 식

$$a_c = \frac{v^2}{l}$$

을 이용하면

$$a_t = g\sin\vartheta \tag{1}$$

$$a_c = \frac{v^2}{l} = 2g\,(\cos\vartheta - \cos\Theta) \tag{2}$$

이다.

$u \equiv \cos\vartheta$, $U \equiv \cos\Theta$로 두면, $\sin\vartheta = \sqrt{1-u^2}$이고,

$$U < u \leq 1. \tag{3}$$

피타고라스의 정리를 이용하여 합성한 가속도의 절댓값은,

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} = g\sqrt{1-u^2+4u^2-8Uu+4U^2}$$
$$a(u) = g\sqrt{3u^2-8Uu+4U^2+1}$$

이다.

최댓값을 구하기 위해 먼저 극값을 구해 보면,

$$\frac{du}{d\vartheta} = -\sin\vartheta$$

이고,

$$\begin{aligned}\frac{da(\vartheta)}{d\vartheta} &= \frac{da}{du}\frac{du}{d\vartheta} \\ &= -\frac{6u-8U}{2\sqrt{3u^2-8Uu+4U^2+1}}\sin\vartheta \\ &= \frac{(4\cos\Theta - 3\cos\vartheta)\sin\vartheta}{\sqrt{3u^2-8Uu+4U^2+1}} \\ &= 0\end{aligned} \tag{4}$$

으로부터,

$$\sin\vartheta = 0,\ \text{또는} \tag{5}$$

$$\cos\vartheta = \frac{4}{3}\cos\Theta = \frac{4}{3}U. \tag{6}$$

일 때 극값을 가진다. (3)에서, (6)의 극값을 가지는 것은 $0 \leq U \leq \frac{3}{4}$일 때임을 알 수 있다.

각각의 경우 가속도 값은,

i) (5) $\sin\vartheta = 0$인 경우, 즉 $\vartheta = 0$인 경우,

$$\begin{aligned}a_t &= 0 \\ a_c &= 2g(1-\cos\Theta), \\ \therefore a_0 &= a_c = 2g(1-\cos\Theta) \\ &= 2g(1-U).\end{aligned} \tag{7}$$

ii) (6) $u = \frac{4}{3}U$, 즉 $\cos\vartheta = \frac{4}{3}\cos\Theta$인 경우, (이 때 $|\cos\Theta| \leq \frac{3}{4}$이어야 한다.)

$$a_t = g\sin\vartheta = g\sqrt{1-\cos^2\vartheta} = g\sqrt{1-\frac{16}{9}U^2}.$$

$$a_c = 2g\left(\frac{4}{3}U - U\right) = \frac{2}{3}gU.$$

$$\begin{aligned}\therefore a_1 &= \sqrt{\frac{4}{9}g^2U^2 + g^2\left(1-\frac{16}{9}U^2\right)} \\ &= g\sqrt{1-\frac{4}{3}U^2}.\end{aligned} \tag{8}$$

a_0과 a_1 중 어느 값이 더 큰지 비교해 보면,

$$f_0(U) = \frac{a_0}{g} = 2(1-U)$$

와

$$f_1(U) = \frac{a_1}{g} = \sqrt{1-\frac{4}{3}U^2}$$

은 $U = \dfrac{3}{4}$일 때 한 점에서 만남을 간단히 증명할 수 있고(연습문제), $U = 0$ 일 때 $f_0(0) > f_1(0)$이므로 항상 $f_0(U) \geq f_1(U)$임을 알 수 있다.

iii) 또한 구간 한계($\vartheta = \Theta$)에서의 가속도 값을 검토해 보면 (1), (2) 에서

$$\begin{cases} a_t &= g \sin\Theta = g\sqrt{1-U^2}, \\ a_c &= 0 \end{cases}$$

로부터,

$$a_2(U) = a_t = g\sqrt{1-U^2}$$

이고,

$$f_2(U) = a_2/g = \sqrt{1-U^2}$$

이라 하면, $f_0(U)$와 $f_2(U)$는 $U = 3/5$에서 교차하고, $U > 3/5$일 때는 $f_2(U) > f_0(U)$이다.

따라서 가속도의 최댓값은 각진폭 Θ에 대하여

$\cos\Theta < 3/5$일 때는 $\vartheta = 0$일 때

$$a_0 = 2g(1 - \cos\Theta),$$

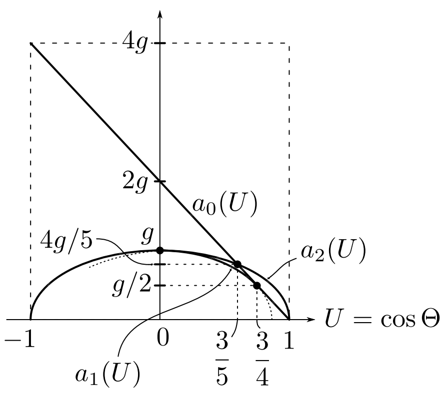
$\cos\Theta = 3/5$일 때는 $\vartheta = \Theta$ 및 $\vartheta = 0$일 때 같은 최댓값

$$a_0 = a_2 = \frac{4}{5}g,$$

$\cos\Theta > 3/5$일 때는 $\vartheta = \Theta$일 때

$$a_2 = g\sin\Theta$$

이다.



(연습 문제) 식 (8)의 극값 $a_1(U)$가 극솟값임을 보일 수 있겠는가?