모두의 안생일

류명선/외대부고

애니메이션 영화 "*이상한 나라의 앨리스*(1951)"[1]에서 앨리스가 미친 모자장수와 3월의 토끼를 만난 미친 다과회를 기억하시나요? 그 때 모자장수와 토끼는 "안생일*Unbirthday*," 즉 생일 아닌 날[1]의 파티를 하고 있었죠.

가장 가까운 친구 사이에도 생일은 같은 경우가 드뭅니다. 그렇지만 *안생일*은 어느 누구와도 공유할 수 있습니다. 그렇다면 여러분이 다니는 학교에서 다른 학생들 모두와 *안생일*을 공유할 수도 있을까요? 학생 모두의 *안생일*인 날은 몇 일이 있일까요? 학생 수가 일 년의 날 수보다 꽤 많다면 그런 날은 거의 없을 것이라고 짐작하실지도 모릅니다. 정말 그럴까요?

일 년의 날 수를 D라고 할 때 *안생일*인 날은 $D-1$ 일이고[2], 따라서 어떤 날이 특정한 한 학생의 생일이 아닐 확률 P_1은,

$$\begin{aligned} P_1 &= (D-1)/D \\ &= 1-\frac{1}{D} \end{aligned}$$

입니다.

학교의 학생수가 N 명이라고 할 때, N이 D의 α 배, 즉 $N=\alpha D$이라면, 그 날이 어떤 학생의 생일도 아닐 확률 P_N은

$$\begin{aligned} P_N = P_1^N &= (1-\frac{1}{D})^N \\ &= (1-\frac{1}{D})^{\alpha D} \end{aligned}$$

입니다. 일 년의 날 수 D는 1보다 매우 큰 수이므로 $(D \gg 1)$, $(1-\frac{1}{D})^D \approx 1/e$ 이고[3], 따라서

$$P_N \to e^{-\alpha},$$

그러면 모든 학생의 "안생일" 날 수의 기대치는, 일 년의 날 수가 D 이므로,

$$\begin{aligned} U &= D \times P_N \\ &\approx D \times e^{-\alpha}. \end{aligned}$$

예를 들어 (윤년이 아닌)평년에는 $D=365$이고, 30 학급에 학급당 36.5명이 있는 학교에서 학생수는 $N=1095$ 이고, $\alpha=3$입니다. 즉 일년의 날 수보다 3배 많은 학생이 있는 학교에서,

$$\begin{aligned} P_N &= e^{-3} \approx \frac{1}{20}, \\ U &\approx 365 \times e^{-3} \\ &\approx 18.17\text{ 일}. \end{aligned}$$

[1] *험프티 덤프티*의 설명[2]

[2] 앨리스의 계산식 참고[2]:

$$\begin{array}{r} 365 \\ -\quad 1 \\ \hline 364 \end{array}$$

[3] $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e \approx 2.71828182846...$, 따라서 $y=-x$라 하면, $\lim_{x\to 0}(1-x)^{1/x} = \lim_{y\to 0}(1+y)^{-1/y} = \lim_{y\to 0}\{(1+y)^{1/y}\}^{-1} = e^{-1}$.

사실은, $D=365$일 때, $(1-\frac{1}{D})^D \approx 0.367375$이고, $1/e \approx 0.367879$로 상대오차는 약 0.137%입니다.

따라서 학생 수가 일 년의 날 수보다 많은 큼직한 학교에서도 모든 학생의 안생일, 즉 아무의 생일도 아닌 날은 꽤 여러 날이 남아 있을 수 있는 셈입니다.

그렇다면 모두의 안생일 수의 기대치가 d 보다 작으려면 학생수는 몇 명이 되어야 할까요?

$$\begin{aligned} U &\approx De^{-\alpha} < d, \\ D/d &< e^{\alpha}, \\ \ln\frac{D}{d} &< \alpha = \frac{N}{D}, \\ \therefore N &> D\ln\frac{D}{d}. \end{aligned}$$

예를 들어, 안생일 날 수의 기대치가 하루 미만이려면 $\alpha > 5.9$, 이고, 학생 수는 2153명보다 많아야 된다는 것입니다.■

References

[1] 디즈니, "이상한 나라의 앨리스"(영화,1951)

[2] 루이스 캐롤, "거울나라의 앨리스" (1871)