

이 때 스넬의 법칙에 따라 다음이 성립한다.

$$\sin \theta_1 = \frac{n_2}{n_1} \sin \theta_2 = n \sin \theta_2.$$

굴절된 광선의 연장선은 다음 방정식으로 표현된다.

$$y = k(x - \alpha).$$

여기서

$$k = \frac{1}{\tan \theta_1} = \frac{\cos \theta_1}{\sin \theta_1}$$

이고, 스넬의 법칙을 고려하면,

$$k = \frac{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \theta_2}}{n \sin \theta_2}.$$

이 직선은 y -축과 점 $B(y = \beta)$ 에서 만나므로,

$$\beta = -k\alpha.$$

기하학적으로 다음을 얻을 수 있다.

$$\alpha = D \tan \theta_2 = \frac{D \sin \theta_2}{\cos \theta_2},$$

및

$$\begin{aligned} \beta &= -k\alpha \\ &= -\frac{D \sin \theta_2}{\cos \theta_2} \frac{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \theta_2}}{n \sin \theta_2} \\ &= -\frac{D \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \theta_2}}{n \cos \theta_2}. \end{aligned}$$

이제, $K = \alpha/M$ 및 $H = \beta/N$ 이라 하면,

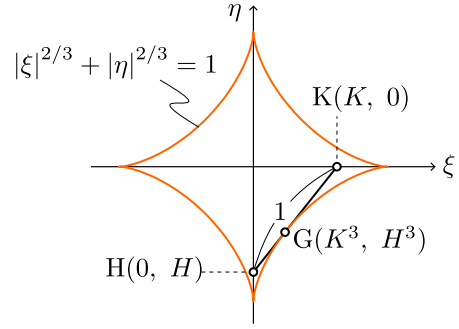
$$\begin{aligned} K^2 + H^2 &= \frac{\alpha^2}{M^2} + \frac{\beta^2}{N^2} \\ &= \frac{(n^2 - 1) \sin^2 \theta_2 + 1 - n^2 \sin^2 \theta_2}{\cos^2 \theta_2} \\ &= \frac{1 - \sin^2 \theta_2}{\cos^2 \theta_2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$\xi = x/M$ 및 $\eta = y/N$ 이라고 하면, 시점이 xy -평면에서 움직임에 따라, 점 $A(\alpha, 0)$ 및 $B(0, \beta)$ 도 이에 따라 움직이는데, 점 A, B 는 각각 $\xi\eta$ -평면의 점 $K(K, 0)$ 및 $H(0, H)$ 에 대응된다. 이 때 두 점 K, H 사이의 거리는 1로 일정하게 유지된다.

선분 \overline{KH} 의 포락선은 ‘아스트로이드’(astroid²)로 잘 알려져 있으며, 다음 방정식으로 표현된다.

$$|\xi|^{2/3} + |\eta|^{2/3} = 1.$$

²소행성을 뜻하는 *asteroid*와 혼동하지 말 것.



상은 선분 \overline{AB} 와 포락선의 접점 C 에 위치한다. 이는 이 순간 인접한 광선 다발이 발산하는 점이기 때문이다. $\xi\eta$ -평면에서 해당 점은 $G(K^3, H^3)$ 이다.

따라서 다음 관계식으로부터 상의 좌표 (x_C, y_C) 를 얻을 수 있다.

$$\begin{cases} \xi_G = \frac{x_C}{M} = K^3 = \frac{\alpha^3}{M^3}, \\ \eta_G = \frac{y_C}{N} = H^3 = \frac{\beta^3}{N^3}. \end{cases}$$

즉,

$$\begin{cases} x_C = \frac{\alpha^3}{M^2}, \\ y_C = \frac{\beta^3}{N^2} = -\frac{k^3 \alpha^3}{N^2}. \end{cases}$$

여기서

$$\sin \theta_2 = \frac{\alpha}{\sqrt{D^2 + \alpha^2}}$$

를 이용하여

$$k = \frac{\sqrt{D^2 - (n^2 - 1)\alpha^2}}{n\alpha},$$

를 얻을 수 있으며, 상의 위치를 α 에 대한 매개변수 함수로 유도할 수 있다.

$$\begin{cases} x_C = (n^2 - 1) \frac{\alpha^3}{D^2}, \\ y_C = -\frac{n^2}{D^2} \frac{\alpha^3}{n^3 \alpha^3} \{D^2 - (n^2 - 1)\alpha^2\}^{3/2} \\ = -\frac{D}{n} \left\{1 - (n^2 - 1) \frac{\alpha^2}{D^2}\right\}^{3/2}. \end{cases}$$

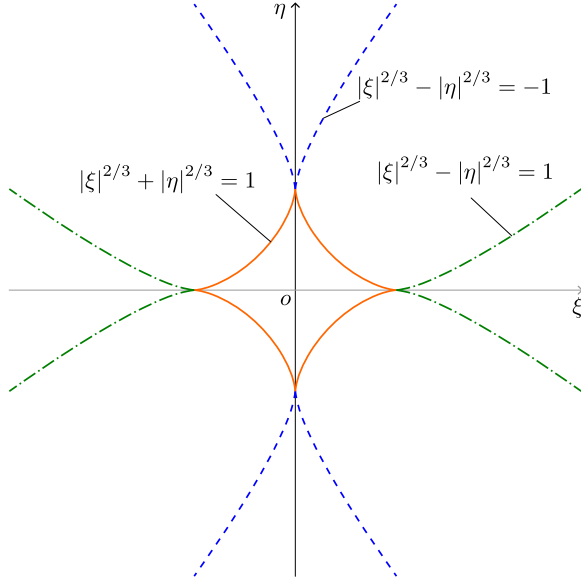
4 시점이 물 속에 있는 경우

물체가 경계면 위 높이 D 인 공기 중에 있고, 시점이 물 속에 있는 경우, 상대적인 굴절률은 $1/n < 1$ 이고, 유사한 추론에 의해 코스틱에 대한 다음 방정식을 얻는다.

$$|\xi|^{2/3} - |\eta|^{2/3} = -1,$$

여기서 $\xi = \frac{x}{W}$ 및 $\eta = \frac{y}{Z}$ 이고, $W = \frac{nD}{\sqrt{n^2-1}}$ 및 $Z = nD$ 인데, 이 곡선은 기울기가 $\pm Z/W = \pm\sqrt{n^2-1}$ 인 점근선을 갖는다.

따라서 물 속에서 본 물 위 하늘의 풍경은 연직선으로부터 전반사의 임계각 안쪽 원(또는 원뿔) 안에 압축되어 보인다. 이것은 ‘스넬의 창’(Snell’s window)이라고 하는 잘 알려진 현상이며 전천 사진과 같은 초광각 사진에 사용되는 어안렌즈(fisheye lens)의 시야와도 닮았다.



이 곡선의 좀 더 일반적인 형태인

$$|\xi|^{2/3} - |\eta|^{2/3} = \pm 1$$

은 물리학적으로 물 위의 점광원에서 나와 물 속으로 들어가며 굴절된 광선들의 코스틱 곡선으로 등장하기도 하는데, 필자가 아는 바로는 아직 이름이 확립되지 않은 것 같다. 여기에 ‘쌍곡-아스트로이드’(hyperastroid)라고 이름을 붙여보는 것은 어떨까? 아스트로이드에 대해 이 곡선은 타원에 대한 쌍곡선과도 비슷한 관계가 있기 때문이다.

아스트로이드는

$$|\xi|^r + |\eta|^r = 1.$$

와 같이 정의되는 ‘초타원’(superellipse)이라는 곡선 계열에 속한다. 아스트로이드는 $r = 2/3$ 인 경우이다.

그러나 필자가 알기로는 다음 형태의 곡선 계열에 대한 이름도 없다.

$$|\xi|^r - |\eta|^r = \pm 1$$

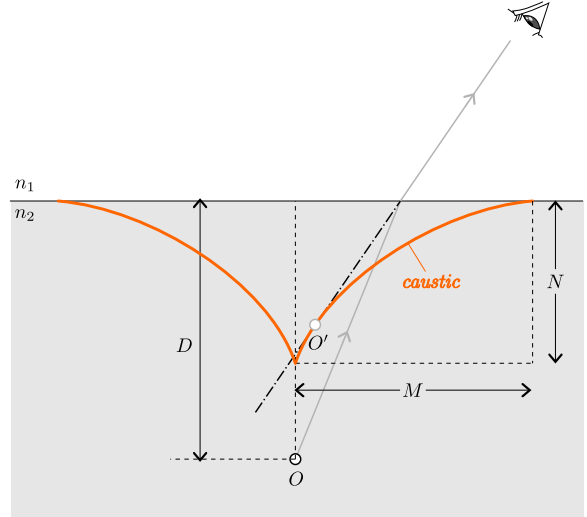
이것은 ‘초쌍곡선’(super-hyperbola³)이라고 부를 수 있

³ 같은 의미의 반복되는 어원 때문에 거슬릴 수도 있으니 *superbola* 라고 하는 것이 좋을 수도 있겠다.

을지 모르겠다.

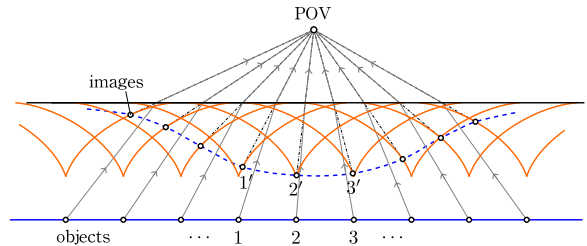
5 상의 위치 찾기

물체에 대한 허상의 코스틱을 닫힌 형태로 구할 수 있으므로 이를 이용하여 물체의 위치와 시점이 주어졌을 때 상의 위치를 다음과 같이 찾을 수 있다.



시점에서 코스틱에 접선을 그린다. 접선과 코스틱의 접점이 상의 위치이고, 접선이 수면과 교차하는 점은 물체에서 나온 광선이 수면에 입사하는 점이다.

물 속에 연속된 물체가 있다면 물체의 표면을 따라 놓인 점 1, 2, 3, ... 에 대해 각각 이와 같은 방법으로 상을 찾을 수 있다. 점이 연속으로 움직일 때 따라 움직이는 상의 자취가 물체의 상이 될 것이다.



단, 코스틱에 대한 접선은 해석적으로 찾기 어렵고 실제로는 수치적인 방법을 이용하여 근사값을 찾는 것으로 만족해야 할 것이다.

또다른 방법은 물체와 시점을 잇는 광선의 경로를 페르마의 원리를 이용하여 수치적으로 구한 다음, 광선이 수면과 교차하는 점의 좌표를 바탕으로 아스트로이드의 점점 공식을 이용하여 상의 위치를 구하는 방법이다. 이에 대한 파이썬 예제는 github.com/mingshey/python_projects에 있다.

부록: 포락선으로 정의한 아스트로이드

평면 상의 직교 좌표에서 x 축 위의 점 $(K, 0)$ 과 y 축 위의 점 $(0, H)$ 가 일정한 거리 a 를 유지하며 움직인다고 하자. 그러면 $K^2 + H^2 = a^2$ 이고, 어느 순간 선분을 포함하는 직선의 방정식을

$$y = -\frac{H}{K}(x - K)$$

라 쓸 수 있고, $H = \pm\sqrt{a^2 - K^2}$ 임을 이용하면

$$y(x, K) = \mp \frac{\sqrt{a^2 - K^2}}{K}(x - K)$$

라 할 수 있다. K 값이 변할 때 두 점을 잇는 선분 또는 직선이 변하며 그리는 포락선은 매 순간 정류점들의 자취, 즉 $\partial y / \partial K = 0$ 인 점들의 자취이다. 이 조건을 만족하는 (x, y) 들을 구해 보자.

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial K} &= \pm \left[\left(\frac{1}{\sqrt{a^2 - K^2}} + \frac{\sqrt{a^2 - K^2}}{K^2} \right) (x - K) + \frac{\sqrt{a^2 - K^2}}{K} \right] \\ &= \pm \frac{(K^2 + a^2 - K^2)(x - K) + K(a^2 - K^2)}{K^2 \sqrt{a^2 - K^2}} \\ &= \pm \frac{a^2 x - K^3}{K^2 \sqrt{a^2 - K^2}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

따라서 정류점의 x 좌표는 $x = K^3/a^2$ 이고, 이 때 y 좌표의 값은

$$\begin{aligned} y(x, K) &= \mp \frac{\sqrt{a^2 - K^2}}{K} \left(\frac{K^3}{a^2} - K \right) \\ &= \pm \frac{(a^2 - K^2)^{3/2}}{a^2} \\ &= \frac{H^3}{a^2} \end{aligned}$$

이다. 따라서 정류점의 좌표 (x, y) 는 다음 방정식을 만족한다:

$$\left| \frac{x}{a} \right|^{2/3} + \left| \frac{y}{a} \right|^{2/3} = 1.$$

■