

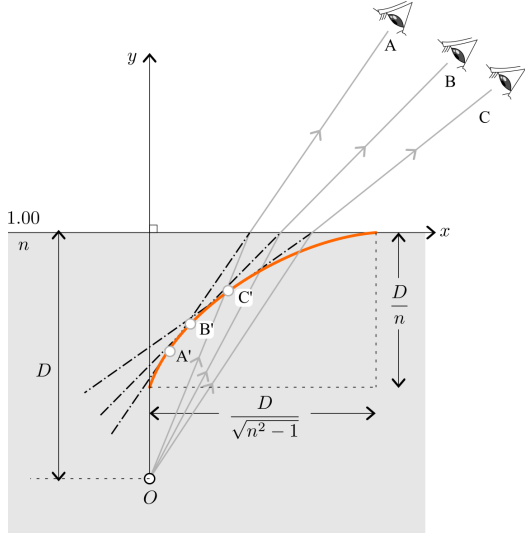
평면 경계면에 의한 굴절 상과 아스트로이드의 재발견

M. Ryu
mingshey@hafs.hs.kr

January 26, 2025

1 도입

평평한 수면 아래의 점 물체를 수면 위에서 바라볼 때, 상의 위치는 시점(POV)에 따라 달라진다. 시점이 움직임에 따라 법선 평면 내에서 관찰되는 상은 “찌그러진 아스트로이드”라고 불리는 특정 곡선을 그린다.



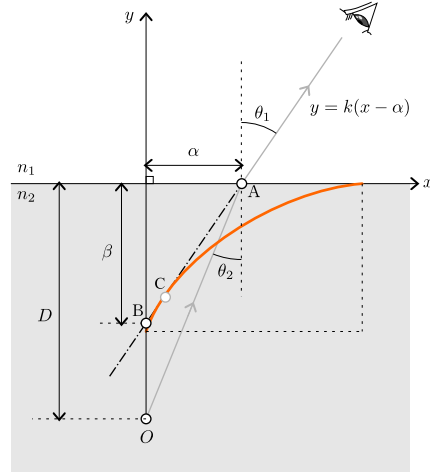
물체와 시점을 포함하는 법평면을 xy -평면으로 하고, 법선 평면과 수면의 교선을 x -축으로, 물체를 통과하는 법선을 y -축으로 합니다. 그러면 상의 자취는 다음 곡선의 일부이다.

$$\left| \frac{x}{M} \right|^{2/3} + \left| \frac{y}{N} \right|^{2/3} = 1,$$

여기서 $M = D/\sqrt{n^2 - 1}$ 및 $N = D/n$ 이고, D 는 물체의 깊이이며 n 은 공기에 대한 물의 상대 굴절률이다.

2 공식의 유도

공기와 물의 굴절률을 각각 n_1 및 n_2 라고 하자. 공기와 물의 경계면 아래 깊이 D 인 곳에 점 물체 O 가 있다. 물체에서 출발한 광선이 수면을 y -축으로부터 α 만큼 떨어진 지점에서 법선으로부터 θ_2 의 각도로 경계면에 입사한 후, 동일한 법선으로부터 θ_1 의 각도로 공기 중으로 굴절된다.



스넬의 법칙에 따라 다음이 성립한다.

$$\sin \theta_1 = \frac{n_2}{n_1} \sin \theta_2 = n \sin \theta_2.$$

굴절된 광선의 연장선은 다음 방정식으로 표현된다.

$$y = k(x - \alpha).$$

여기서

$$k = \frac{1}{\tan \theta_1} = \frac{\cos \theta_1}{\sin \theta_1}$$

이고, 스넬의 법칙을 고려하면,

$$k = \frac{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \theta_2}}{n \sin \theta_2}.$$

이 직선은 y -축과 $y = \beta$ 에서 만나므로,

$$\beta = -k\alpha.$$

기하학적으로 다음을 얻을 수 있다.

$$\alpha = D \tan \theta_2 = \frac{D \sin \theta_2}{\cos \theta_2},$$

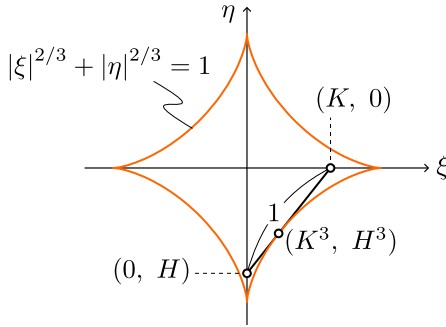
및

$$\begin{aligned}\beta &= -k\alpha \\ &= -\frac{D \sin \theta_2}{\cos \theta_2} \frac{\sqrt{1-n^2 \sin^2 \theta_2}}{n \sin \theta_2} \\ &= -\frac{D \sqrt{1-n^2 \sin^2 \theta_2}}{n \cos \theta_2}.\end{aligned}$$

이제, $K = \alpha/M$ 및 $H = \beta/N$ 이라 하면,

$$\begin{aligned}K^2 + H^2 &= \frac{\alpha^2}{M^2} + \frac{\beta^2}{N^2} \\ &= \frac{(n^2 - 1) \sin^2 \theta_2 + 1 - n^2 \sin^2 \theta_2}{\cos^2 \theta_2} \\ &= \frac{1 - \sin^2 \theta_2}{\cos^2 \theta_2} \\ &= 1\end{aligned}$$

$\xi = x/M$ 및 $\eta = y/N$ 이라고 하면, 시점이 xy -평면에서 움직임에 따라, 점 $A(\alpha, 0)$ 및 $B(0, \beta)$ 도 이에 따라 움직이고, $\xi\eta$ -평면에서 점 $(K, 0)$ 및 $(0, H)$ 도 이에 따라 움직이며, 두 점 사이의 거리는 1로 일정하게 유지된다.



이러한 선분의 포락선은 “아스트로이드”(astroid)¹로 잘 알려져 있으며, 다음 방정식으로 표현된다.

$$|\xi|^{2/3} + |\eta|^{2/3} = 1.$$

상은 선분 \overline{AB} 와 움직이는 선분의 포락선의 접점 C에 위치한다. 이는 이 순간 인접한 광선이 발산하는 점이기 때문이다. $\xi\eta$ -평면에서 해당 점은 (K^3, H^3) 인 것으로 알려져 있다.

따라서 다음 관계식으로부터 상의 좌표 (x_C, y_C) 를 얻을 수 있다.

$$\begin{cases} \xi_C = \frac{x_C}{M} = K^3 = \frac{\alpha^3}{M^3}, \\ \eta_C = \frac{y_C}{N} = H^3 = \frac{\beta^3}{N^3}. \end{cases}$$

즉,

$$\begin{cases} x_C = \frac{\alpha^3}{M^2}, \\ y_C = \frac{\beta^3}{N^2} = -\frac{k^3 \alpha^3}{N^2}. \end{cases}$$

를 사용하여,

$$\sin \theta_2 = \frac{\alpha}{\sqrt{D^2 + \alpha^2}},$$

$$k = \frac{\sqrt{D^2 - (n^2 - 1)\alpha^2}}{n\alpha},$$

를 얻을 수 있으며, 상의 위치를 α 에 대한 매개변수 함수로 유도할 수 있다.

$$\begin{cases} x_C = (n^2 - 1) \frac{\alpha^3}{D^2}, \\ y_C = -\frac{n^2}{D^2} \frac{\alpha^3}{n^3 \alpha^3} \{D^2 - (n^2 - 1)\alpha^2\}^{3/2} \\ = -\frac{D}{n} \left\{ 1 - (n^2 - 1) \frac{\alpha^2}{D^2} \right\}^{3/2}. \end{cases}$$

3 시점이 물 속에 있는 경우

물체가 경계면 위 높이 D 인 공기 중에 있고, 시점이 물 속에 있는 경우, 상대적인 굴절률은 $1/n < 1$ 이고, 유사한 추론에 의해 다음 방정식을 얻는다.

$$-|\xi|^{2/3} + |\eta|^{2/3} = 1,$$

여기서 $\xi = \frac{x}{W}$ 및 $\eta = \frac{y}{Z}$ 이고, $W = \frac{nD}{\sqrt{1-n^2}}$ 및 $Z = nD$ 인데, 이 곡선의 모양에 대한 이름은 찾을 수 없었다. 아스트로이드는

$$|\xi|^n + |\eta|^n = 1.$$

와 같이 정의되는 “초타원”(superellipse)이라는 곡선 계열에 속한다. 아스트로이드는 $n = 2/3$ 인 경우이다.

그러나 필자가 알기로는 다음 형태의 곡선 계열에 대한 이름이 없다.

$$|\xi|^n - |\eta|^n = \pm 1$$

이것은 “초쌍곡선”(super-hyperbola)이라고 부를 수 있을지 모르지만, 같은 의미의 반복되는 어원 때문에 거슬릴 수도 있으니 *superbola*라고 하는 것이 좋을 수도 있겠다.

¹ “소행성”을 뜻하는 *asteroid*와 혼동하지 말 것.