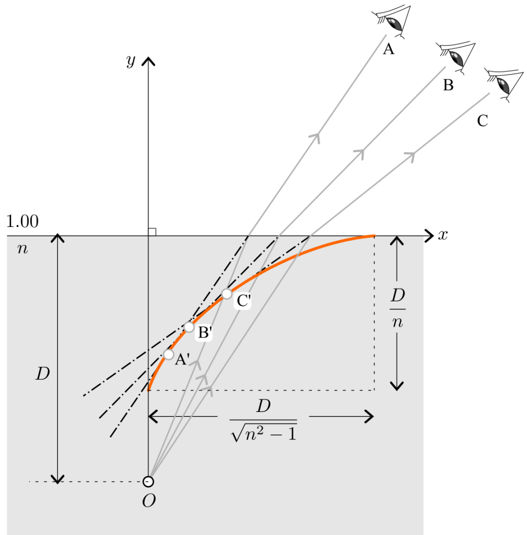
평면 경계면에 의한 굴절 상과 아스트로이드의 재발견

M. Ryu
mingshey@hafs.hs.kr

January 28, 2025

1 도입

평평한 수면 아래의 점 물체를 수면 위에서 바라볼 때, 상의 위치는 시점(POV)에 따라 달라진다. 시점이 움직임에 따라 법평면 내에서 관찰되는 상은 “찌그러진 아스트로이드”라고 불리는 특정 곡선을 그린다.



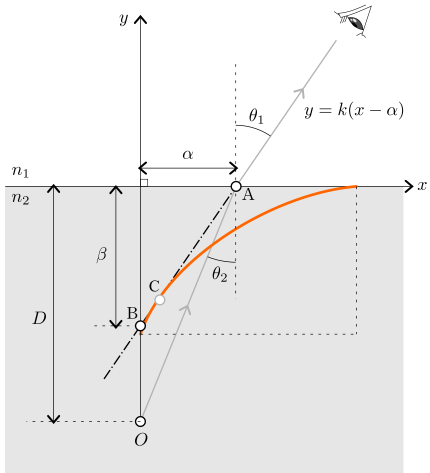
물체와 시점을 포함하는 법평면을 xy-평면으로 하고, 법평면과 수면의 교선을 x-축으로, 물체를 통과하는 법선을 y-축으로 하자. 그러면 상의 자취는 다음 곡선의 일부이다.

$$\left|\frac{x}{M}\right|^{2/3} + \left|\frac{y}{N}\right|^{2/3} = 1,$$

여기서 $M = D/\sqrt{n^2-1}$은 전반사의 임계각에 의해 결정되는 입사 거리의 최댓값이고, $N = D/n$은 바로 위에서 관찰할 때 물체의 겉보기 깊이이며, D는 물체의 실제 깊이이고, n은 공기에 대한 물의 굴절률이다.

2 공식의 유도

공기와 물의 굴절률을 각각 n_1 및 n_2라고 하자. 공기와 물의 경계면 아래 깊이 D인 곳에 점 물체 O가 있다. 물체에서 출발한 광선이 수면을 y-축으로부터 α만큼 떨어진 지점에서 법선으로부터 θ_2의 각도로 경계면에 입사한 후, 동일한 법선으로부터 θ_1의 각도로 공기 중으로 굴절된다.



이 때 스넬의 법칙에 따라 다음이 성립한다.

$$\sin\theta_1 = \frac{n_2}{n_1}\sin\theta_2 = n\sin\theta_2.$$

굴절된 광선의 연장선은 다음 방정식으로 표현된다.

$$y = k(x-\alpha).$$

여기서

$$k = \frac{1}{\tan\theta_1} = \frac{\cos\theta_1}{\sin\theta_1}$$

이고, 스넬의 법칙을 고려하면,

$$k = \frac{\sqrt{1-n^2\sin^2\theta_2}}{n\sin\theta_2}.$$

이 직선은 y-축과 $y = \beta$에서 만나므로,

$$\beta = -k\alpha.$$

기하학적으로 다음을 얻을 수 있다.

$$\alpha = D\tan\theta_2 = \frac{D\sin\theta_2}{\cos\theta_2},$$

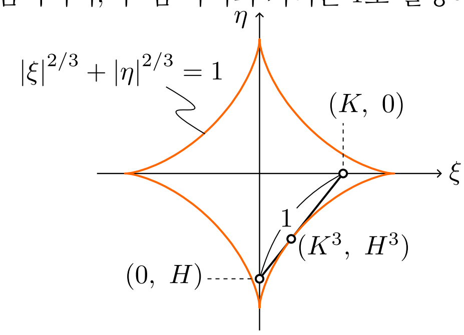
및

$$\begin{aligned}\beta &= -k\alpha \\ &= -\frac{D\sin\theta_2}{\cos\theta_2}\frac{\sqrt{1-n^2\sin\theta_2}}{n\sin\theta_2} \\ &= -\frac{D\sqrt{1-n^2\sin\theta_2}}{n\cos\theta_2}.\end{aligned}$$

이제, $K=\alpha/M$ 및 $H=\beta/N$이라 하면,

$$\begin{aligned}K^2+H^2 &= \frac{\alpha^2}{M^2}+\frac{\beta^2}{N^2} \\ &= \frac{(n^2-1)\sin^2\theta_2+1-n^2\sin^2\theta_2}{\cos^2\theta_2} \\ &= \frac{1-\sin^2\theta_2}{\cos^2\theta_2} \\ &= 1\end{aligned}$$

$\xi = x/M$ 및 $\eta = y/N$이라고 하면, 시점이 xy-평면에서 움직임에 따라, 점 $\mathrm{A}(\alpha, 0)$ 및 $\mathrm{B}(0,\beta)$도 이에 따라 움직이고, $\xi\eta$-평면에서 점 $(K, 0)$ 및 $(0, H)$도 이에 따라 움직이며, 두 점 사이의 거리는 1로 일정하게 유지된다.



이러한 선분의 포락선은 "아스트로이드"(*astroid*[1])로 잘 알려져 있으며, 다음 방정식으로 표현된다.

$$|\xi|^{2/3}+|\eta|^{2/3}=1.$$

상은 선분 $\overline{\mathrm{AB}}$와 움직이는 선분의 포락선의 접점 C에 위치한다. 이는 이 순간 인접한 광선 다발이 발산하는 점이기 때문이다. $\xi\eta$-평면에서 해당 점은 (K^3, H^3)이다.

따라서 다음 관계식으로부터 상의 좌표 $(x_{\mathrm{C}}, y_{\mathrm{C}})$를 얻을 수 있다.

$$\begin{cases}\xi_{\mathrm{C}} = \dfrac{x_{\mathrm{C}}}{M} = K^3 = \dfrac{\alpha^3}{M^3}, \\ \eta_{\mathrm{C}} = \dfrac{y_{\mathrm{C}}}{N} = H^3 = \dfrac{\beta^3}{N^3}.\end{cases}$$

즉,

$$\begin{cases}x_{\mathrm{C}} = \dfrac{\alpha^3}{M^2}, \\ y_{\mathrm{C}} = \dfrac{\beta^3}{N^2} = -\dfrac{k^3\alpha^3}{N^2}.\end{cases}$$

[1] "소행성"을 뜻하는 *asteroid*와 혼동하지 말 것.

여기서

$$\sin\theta_2 = \frac{\alpha}{\sqrt{D^2+\alpha^2}}$$

를 사용하여

$$k = \frac{\sqrt{D^2-(n^2-1)\alpha^2}}{n\alpha},$$

를 얻을 수 있으며, 상의 위치를 α에 대한 매개변수 함수로 유도할 수 있다.

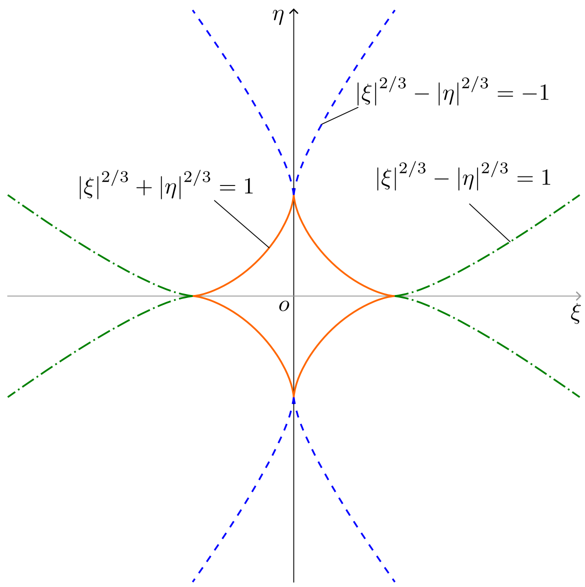
$$\begin{cases}x_{\mathrm{C}} = (n^2-1)\dfrac{\alpha^3}{D^2}, \\ y_{\mathrm{C}} = -\dfrac{n^2}{D^2}\dfrac{\alpha^3}{n^3\alpha^3}\left\{D^2-(n^2-1)\alpha^2\right\}^{3/2} \\ \quad\ = -\dfrac{D}{n}\left\{1-(n^2-1)\dfrac{\alpha^2}{D^2}\right\}^{3/2}.\end{cases}$$

3 시점이 물 속에 있는 경우

물체가 경계면 위 높이 D인 공기 중에 있고, 시점이 물 속에 있는 경우, 상대적인 굴절률은 $1/n < 1$이고, 유사한 추론에 의해 다음 방정식을 얻는다.

$$|\xi|^{2/3}-|\eta|^{2/3}=-1,$$

여기서 $\xi = \dfrac{x}{W}$ 및 $\eta = \dfrac{y}{Z}$이고, $W = \dfrac{nD}{\sqrt{1-n^2}}$ 및 $Z = nD$인데, 이 곡선의 모양에 대한 이름은 찾을 수 없었다.



물리학적으로 의미 있고 아스트로이드와도 관계 있는 이 곡선

$$|\xi|^{2/3}-|\eta|^{2/3}=\pm 1$$

에 아직 이름이 없다면, 아스트로이드에 대해 이 곡선은

타원에 대한 쌍곡선과도 같은 관계가 있으므로 "쌍곡-아스트로이드"(*hyperastroid*)라고 이름을 붙여보는 것은 어떨까?

아스트로이드는

$$|\xi|^r + |\eta|^r = 1.$$

와 같이 정의되는 "초타원"(*superellipse*)이라는 곡선 계열에 속한다. 아스트로이드는 $r = 2/3$인 경우이다.

그러나 필자가 알기로는 다음 형태의 곡선 계열에 대한 이름도 없다.

$$|\xi|^r - |\eta|^r = \pm 1$$

이것은 "초쌍곡선"(*super-hyperbola*[2])이라고 부를 수 있을지 모르겠다.

부록: 포락선으로 정의한 아스트로이드

평면 상의 직교 좌표에서 x 축 위의 점 $(K, 0)$과 y 축 위의 점 $(0, H)$가 일정한 거리 a를 유지하며 움직인다고 하자. 그러면 $K^2 + H^2 = a^2$이고, 어느 순간 선분을 포함하는 직선의 방정식을

$$y = -\frac{H}{K}(x - K)$$

라 쓸 수 있고, $H = \pm\sqrt{a^2 - K^2}$임을 이용하면

$$y(x, K) = \mp\frac{\sqrt{a^2 - K^2}}{K}(x - K)$$

라 할 수 있다. K값이 변할 때 두 점을 잇는 선분 또는 직선이 변하며 그리는 포락선은 매 순간 정류점들의 자취, 즉 $\partial y/\partial K = 0$인 점들의 자취이다. 이 조건을 만족하는 (x, y)들을 구해 보자.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y}{\partial K} &= \pm\left[\left(\frac{1}{\sqrt{a^2 - K^2}} + \frac{\sqrt{a^2 - K^2}}{K^2}\right)(x - K) + \frac{\sqrt{a^2 - K^2}}{K}\right] \\
&= \pm\frac{(K^2 + a^2 - K^2)(x - K) + K(a^2 - K^2)}{K^2\sqrt{a^2 - K^2}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

따라서 정류점의 x좌표는 $x = K^3/a^2$ 이고, 이 때 y좌표의 값은

$$\begin{aligned}
y(x, K) &= \mp\frac{\sqrt{a^2 - K^2}}{K}\left(\frac{K^3}{a^2} - K\right) \\
&= \pm\frac{\left(a^2 - K^2\right)^{3/2}}{a^2} \\
&= \frac{H^3}{a^2}
\end{aligned}$$

이다. 따라서 정류점의 좌표 (x, y)는 다음 방정식을 만족한다:

$$\left|\frac{x}{a}\right|^{2/3} + \left|\frac{y}{a}\right|^{2/3} = 1.$$

■

[2] 같은 의미의 반복되는 어원 때문에 거슬릴 수도 있으니 *superbola*라고 하는 것이 좋을 수도 있겠다.