

# Implementation of Polygonal-Light Shading with Linearly Transformed Matrix

from paper, “Real-Time Polygonal-Light Shading with Linearly Transformed Cosines”

0556619 羅元懋

0556641 牛明韋

## Motivation and Goal

以物理為基礎的 shading 包含了一些光線的計算，像是計算 BRDF 的積分及球面域上的光線。對於多邊形光(polygonal light)來說，即使其可能是最簡單的光線模型(lightning model)之一，仍然有許多在實時渲染(real-time rendering)上的困難處：

- 對於多邊形上的參數化球面分布(parametric spherical distribution)進行積分，是耗時且困難的。
- 最新的以物理為基礎的材質模型都不是簡單的分布，它們有一些特別的特性，如：anisotropic、skewness。

論文「Real-Time Polygonal-Light Shading with Linearly Transformed Cosines」對此提出了一個 $3 \times 3$ 的線性轉換矩陣，利用線性轉換的方式，使上述的問題得以解決，論文作者以此線性轉換為基礎，近似 GGX BRDF，不論在視覺上或效能上都有不錯的結果。

我們的目標是實作這篇論文，更進一步來說，論文作者在文章中提出了一些不同特性的轉換矩陣，我們希望能實作這些在論文中沒有展示的結果。

## Related Work

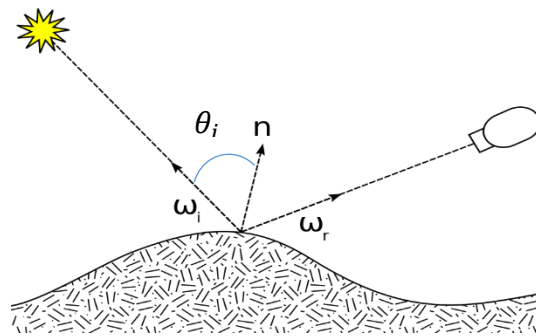
以下大致簡介 BRDF、microfacet model、GGX：

### BRDF

BRDF 全名 Bidirectional Reflectance Distribution Function，是一個定義在不透明表面上反射的函數，其表示式如下：

$$f_r(\omega_i, \omega_r) = \frac{d L_r(\omega_r)}{d E_i(\omega_i)} = \frac{d L_r(\omega_r)}{L_i(\omega_i) \cos \theta_i d \omega_i}$$

其中  $L$  是輻射率(radiance)，代表每單位立體角每單位投射表面的光照能量； $E$  是輻照度(irradiance)，代表入射光的每單位投射表面的光照能量，其他參數如下圖所示：



## Microfacet Model

這是以物理為基礎的 BRDF 會用到的理論，它把一個表面看成是無數個微小的面，而每個面會反射出一個單一方向的反射光，其表示式如下：

$$f_{microfacet}(l, v) = \frac{F(l, h)G(l, v, h)D(h)}{4(n \cdot l)(n \cdot v)}$$

, where  $f$  is microfacet BRDF

$F$  is fresnel reflectance term,

$G$  is geometry term of shadowing masking between microfacet,

$D(h)$  is normal distribution term describing how microfacet normals is distributed around direction  $h$ ,

$l$  is the light direction,

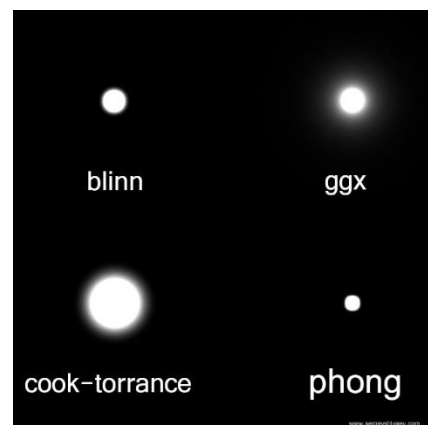
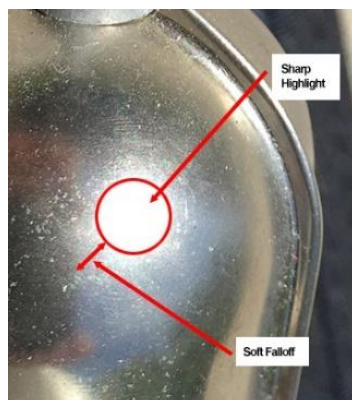
$v$  is the view direction

$n$  is the surface normal

$h$  is the half vector between  $l$  and  $v$

## GGX

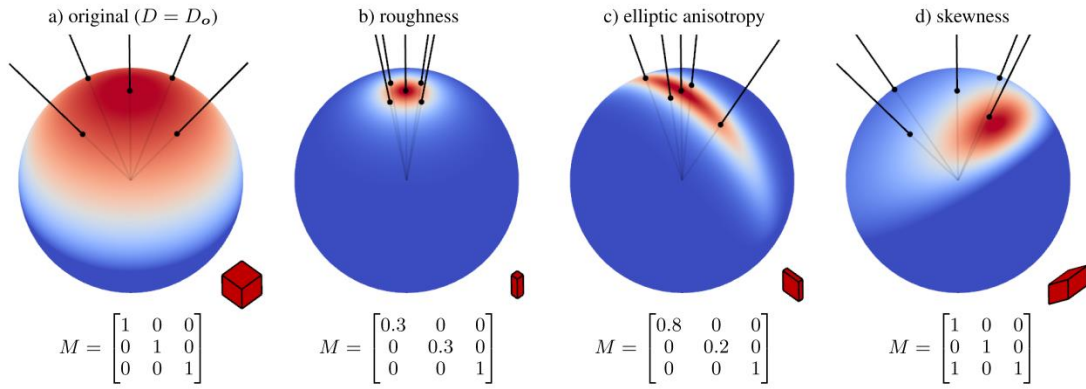
GGX 可能是目前最真實的一個 BRDF 方法，它使用的模型是上述的 microfacet model，由於式子過於繁複，在此不多加著墨，而是以其在視覺上的表現為主。GGX 在物理上的表現有一個很大的優點，真實光線打在粗糙表面時，中心會是最銳利(sharp)的 highlight，而周圍則會帶有一圈拖尾效果的光暈，如下圖左，GGX 正是因為有抓住這個物理現象，看起來更加真實，下圖右為各方法的比較。



## Proposed Method

我們主要是要用論文的方法，以線性轉換矩陣，實作出近似 GGX BRDF 的效果。大致上的概念是：將球面分布上的方向向量，經過不同特性線性轉換後，得到擁有不同特性的新分布；對於這些新分布，我們可以利用一些近似方法，達到 GGX BRDF 的效果。實際上在應用時，此線性轉換矩陣的反矩陣的使用率可能會更高，為了達到目標的效果，在計算一些如光線積分的繁瑣事項時，以此論文的方式，可以透過乘上線性轉換矩陣的反矩陣，來使過程簡化，使計算上更為容易。

以下為幾個不同特性的線性轉換矩陣，以及論文的主要公式：



$$\omega = M \omega_o / \|M \omega_o\| \quad \omega_o = M^{-1} \omega / \|M^{-1} \omega\|$$

$$D(\omega) = D_o(\omega_o) \frac{\partial \omega_o}{\partial \omega} = D_o\left(\frac{M^{-1} \omega}{\|M^{-1} \omega\|}\right) \frac{|M^{-1}|}{\|M^{-1} \omega\|^3}, \quad (1)$$

$\omega$  是球面分布上的一個方向向量，公式(1)為線性轉換的基礎。

$$D \approx \rho(\omega_v, \omega_l) \cos \theta_l. \quad (5)$$

公式(5)是以本篇論文提出的線性轉換，近似 GGX BRDF 的式子。

$$I = \int_P L(\omega_l) \rho(\omega_v, \omega_l) \cos \theta_l d\omega_l$$

$$\approx \int_P L(\omega_l) D(\omega_l) d\omega_l. \quad (8)$$

公式(8)結合了光線的積分與近似方法。

## Excepted Results

我們期待能利用論文提出的方法，實作出實時的多邊形光，以下為論文中的結果展示與比較：(D、LTC 為論文的方法)

