Toàn rời rạc (CE23101)

Quy nạp và đệ quy

Tự giới thiệu bản thân

- Họ + tên: Tăng Minh
- Nghề nghiệp: Giảng viên
- Sở thích: Ăn uống
- Quê quán: Quảng Nam
- Email liên lạc: mtang8@ncsu.edu

2

Vài bài tập từ chương 3

Ví dụ 1:

Tính $537^{1000} \mod 1000$.

Ví dụ 2:

Tính $\mathbf{A}^{-1}$ cho ma trận

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 1: Ta viết $1000 = 512 + 256 + 128 + 64 + 32 + 8$.

Sử dụng quy luật

$$(m \times n) \mod p = ((m \mod p) \times (n \mod p)) \mod p$$

ta có

$$\begin{aligned}
537^2 \mod 1000 &= 369 \\
537^4 \mod 1000 = 369^2 \mod 1000 &= 161, \\
537^8 \mod 1000 = 161^2 \mod 1000 &= 921, \\
537^{16} \mod 1000 = 921^2 \mod 1000 &= 241, \\
537^{32} \mod 1000 = 241^2 \mod 1000 &= 81, \\
&\vdots \\
537^{256} \mod 1000 &= 841, \\
537^{512} \mod 1000 &= 281.
\end{aligned}$$

Từ những giá trị trên ta có chuỗi tính toán như sau

$$1 \rightarrow 921 \iff (537^8 \mod 1000)$$
$$921 \rightarrow (921 \times 81) \mod 1000 = 601 \iff (537^{40} \mod 1000)$$
$$601 \rightarrow (601 \times 561) \mod 1000 = 161 \iff (537^{104} \mod 1000)$$
$$161 \rightarrow (161 \times 721) \mod 1000 = 81 \iff (537^{232} \mod 1000)$$
$$81 \rightarrow (81 \times 841) \mod 1000 = 121 \iff (537^{488} \mod 1000)$$
$$121 \rightarrow (121 \times 281) \mod 1000 = 1 \iff (537^{1000} \mod 1000)$$

Ví dụ 2 Đặt ma trận

$$\mathbf{M}_0 = [\mathbf{A} \mid \mathbf{I}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bằng các phép biến đổi dòng ta có chuỗi ma trận như sau

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{r}_3 + 4\boldsymbol{r}_1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 11 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 11 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{r}_3 - \frac{2}{3}\boldsymbol{r}_2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & \frac{10}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & \frac{10}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\boldsymbol{r}_1 = \frac{11}{2}\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_3} \begin{bmatrix} -\frac{11}{2} & 0 & 0 & \frac{13}{6} & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & \frac{10}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{11}{2} & 0 & 0 & \frac{13}{6} & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & \frac{10}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{thay đổi tỉ lệ}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{26}{66} & -\frac{4}{33} & \frac{2}{11} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{10}{33} & -\frac{2}{33} & \frac{1}{11} \end{bmatrix}$$

Nguyên tắc quy nạp

Quy nạp hữu hạn (Induction)

Cho $P(m), P(m+1), \ldots, P(n)$ là một dãy các mệnh đề. Nếu

(B) $P(m)$ đúng.

(I) $P(k+1)$ đúng khi $P(k)$ đúng, cho $m \leq k < n$.

Thì ta có thể kết luận là $P(k)$ đúng cho mọi $m \leq k \leq n$.

Gọi (B) là bước cơ sở, và (I) là bước quy nạp.

Hai điểm quan trọng về quy nạp

- Dễ dàng áp dụng để chứng minh nhiều định lý.
- Không giúp ta tìm ra định lý. Phải xác định trước định lý cần chứng minh.

9

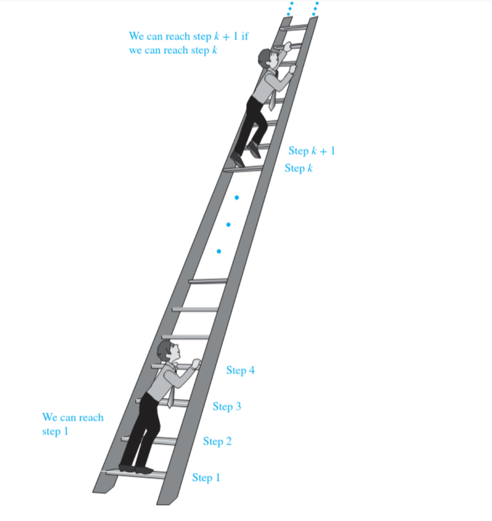

Figure 1: Hình từ sách toán rời rạc của Kenneth Rosen

10

Vài ví dụ về quy nạp

Ví dụ 3:

Chứng minh $n! \geq 2^n$ cho mọi $n \geq 4$.

Ví dụ 4:

Chứng minh $\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}$ cho mọi $r \neq 1$.

Ví dụ 5:

Chứng minh $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ cho mọi $n \geq 1$.

Ví dụ 6:

Chứng minh $8^n - 2^n$ chia hết cho 6 cho mọi $n \geq 0$.

11

Ví dụ 7:

Định nghĩa $H(m) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i}$. Chứng minh $H(2^n) \geq 1 + \frac{n}{2}$.

Ví dụ 8:

Cho $A_1, A_2, \ldots$ là tập hợp con của tập hợp U. Chứng minh

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_n, \qquad n \geq 1.$$

12

Ví dụ 9:

Chứng minh rằng mỗi bàn cờ với kích thước $2^n \times 2^n$, với một ô bỏ trống, có thể được lắp đầy bởi những domino hình chữ L, sao cho không có miếng domino nào đè lên miếng khác.

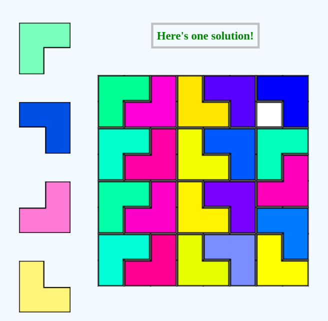

Figure 2: Hình tử trang web của Norton Starr

Nguyên tắc quy nạp tổng quát (Strong Induction)

Cho $P(m), P(m+1), \ldots, P(n)$ là một dãy các mệnh đề. Nếu

(B) $P(m)$ đúng.

(I_*) $P(k+1)$ đúng khi $P(r)$ đúng, cho mọi $m \leq r \leq k < n$.

Thì ta có thể kết luận là $P(k)$ đúng cho mọi $m \leq k \leq n$.

Gọi (B) là bước cơ sở, và (I_*) là bước quy nạp.

14

Vài ví dụ về quy nạp tổng quát

Ví dụ 10:

Chứng minh rằng bất kỳ số nguyên $n \geq 2$ nào đều có thể viết được thành $n = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_k$ với tất cả p_i là số nguyên tố .

Ví dụ 11:

Chứng minh rằng mọi số nguyên $n \geq 8$ đều có thể viết dưới dạng $n = 3a + 5b$ với $a, b \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 12:

Mỗi đa giác đơn với $k \geq 4$ cạnh có thể chia thành $k - 2$ tam giác sao cho các cạnh của những tam giác này không cắt chéo qua nhau.

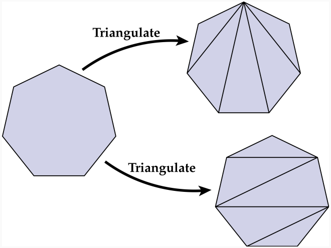

Figure 3: Hình tử trang web của lớp CS-248 (Stanford)

Big-Oh and Θ

Định nghĩa

Cho hai hàm f, g với $f(x) \geq 0$ và $g(x) \geq 0$ cho mọi $x \geq 0$.

- Ta nói $g \in O(f)$ hoặc $g = O(f)$ nếu tồn tại $x_0 \geq 0$ và $c > 0$ sao cho $g(x) \leq cf(x)$ cho mọi $x \geq x_0$.
- Ta nói $f \in \Theta(g)$ hoặc $f = \Theta(g)$ nếu $f \in O(g)$ và $g \in O(f)$.

Mối quan hệ $\in O(\cdot)$ có tính phản xạ (reflexive) và truyền ứng (transitive).

Mệnh đề

$$\textit{Nếu } 0 < \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty \Longrightarrow f \in O(g) \textit{ và } g \in O(f)$$

$$\textit{Nếu } \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Longrightarrow f \in O(g) \textit{ nhưng } g \notin O(f)$$

$$\textit{Nếu } \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty \Longrightarrow g \in O(f) \textit{ nhưng } f \notin O(g).$$

Ví dụ 13:

- $3n^2 + 15n \in \Theta(n^2)$.
- $n^r \in O(n^s)$ nếu $0 \leq r \leq s$.
- $\log n = O(n^\epsilon)$ cho mọi $\epsilon > 0$.
- $n^k \in O(e^n)$ cho mọi $k > 0$.

Ví dụ 14:

Đặt $H(n) := \sum_{k=1}^{n}(1/i)$. Ta có $H(n) = \Theta(\log n)$.

19

Vài tính chất của Big-Oh

- Nều $f \in O(g)$ thì $cf \in O(g)$ cho mọi hằng số $c > 0$.
- Nếu $f \in O(g)$ và $h \in O(g)$ thì $f + h \in O(g)$
- Nếu $f \in O(g)$ và $h \in O(p)$ thì $f + h \in O(\max(g, p))$.
- Nếu $f \in O(g)$ và $h \in O(p)$ thì $f \times h \in O(g \times p)$.

Hàm đệ quy

Một hàm đệ quy (recursive function) f được thiết lập như sau

- Bước cơ sở (B): Cho giá trị của $f(0), f(1), \dots f(b)$ cho một số hữu hạn b.
- Bước đệ quy (R): Định nghĩa giá trị của $f(n)$ cho $n > b$ dựa trên giá trị của $f(m), m < n$.

Ví dụ 15:

Hàm giao thừa.

- (B): $f(0) = 1$.
- (R): $f(n) = nf(n-1)$ cho $n \geq 1$.

21

Ví dụ 16:

Cho hàm $T(n)$ thỏa mãn

- (B): $T(1) = 1$
- (R): $T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor)$ cho $n \geq 2$.

Tính giá trị $T(73)$.

Ví dụ 17:

Dãy số Fibonacci.

- (B) $f(0) = 1, f(1) = 1$
- (R) $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ cho $n \geq 2$.

Chứng minh rằng

$$f(n) \geq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}, \qquad n \geq 3.$$

Ta có

$$f(3) = 2 \geq (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.61, \quad f(4) = 3 \geq (1 + \sqrt{5})^2/4 \approx 2.61.$$

Đặt $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$. Giả sử $f(n) \geq \alpha^{n-2}$ cho $3 \leq n \leq k$. Ta có

$$\begin{aligned} f(k+1) &= f(k) + f(k-1) \\ &\geq \alpha^{k-2} + \alpha^{k-3} \geq \alpha^{k-3}(\alpha + 1) = \alpha^{k-3} \times \alpha^2 = \alpha^{k-1} \end{aligned}$$

23

Ví dụ 18:

Đặt H_n là số bước cần để chuyển tất cả đĩa từ cọc 1 qua cọc 2 (sao cho các đĩa được sắp xếp từ bé đến lớn).

Ta có $H_1 = 1$ và $H_n = 2H_{n-1} + 1$ cho $n \geq 2$.

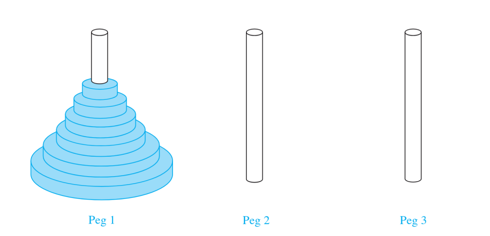

Figure 4: Tower of Hanoi (từ sách toán rời rạc của Kenneth Rosen)

Giải phương trình quan hệ hồi quy (dạng đơn giản)

Cho

- (B) Giá trị của s_0 và s_1
- (I) Giá trị $s_n = as_{n-1} + bs_{n-2}$.

Hai trường hợp đặc biệt

- Nếu $b = 0$ ta có $s_n = a^{n-1}s_1$ cho $n \geq 1$.
- Nếu $a = 0$ ta có $s_{2n} = b^n s_0$ và $s_{2n+1} = b^n s_1$ cho $n \geq 1$.

25

Khi $a \neq 0$ và $b \neq 0$, ta thử đặt $s_n = r^n$. Ta có

$$s_n = r^n = ar^{n-1} + br^{n-2} \Longrightarrow r^2 - ar - b = 0$$

và kết luận r là nghiệm của phương trình $z^2 - az - b = 0$.

Tiếp theo, nếu s_n và t_n đều thỏa mãn (I) thì $c_1 s_n + c_2 t_n$ cũng sẽ thỏa mãn (I) cho mọi hằng số $c_1 > 0, c_2 > 0$.

Suy ra một khả năng là $s_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$ và tìm giá trị của c_1 và c_2 sao cho $s_0 = c_1 + c_2$ và $s_1 = c_1 r_1 + c_2 r_2$.

26

Mệnh đề

Cho a và b là hai số thực. Giả sử phương trình $z^2 - az - b$ có hai nghiệm khác nhau là r_1 và r_2. Một dãy số $\{s_n\}$ thỏa mãn quan hệ hồi quy $s_n = as_{n-1} + bs_{n-2}$ khi và chỉ khi

$$s_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n,$$

với c_1, c_2 là hai hằng số.

Chú ý: $z^2 - az - b = 0$ được gọi là phương trình đặc trưng (characteristic equation) của $s_n = as_{n-1} + bs_{n-2}$.

Ví dụ 19:

Tìm biểu thức dạng đóng cho dãy số Fibonacci.

Ví dụ 20:

Tìm biểu thức dạng đóng cho dãy số Fibonacci.

Từ $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ ta có phương trình đặc trưng $z^2 - z - 1 = 0$ và hai nghiệm

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Đặt $f_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$.

Từ $f_0 = 0$ và $f_1 = 1$ ta có $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ và $c_2 = -c_1$.

Kết luận ta có

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Nếu phương trình đặc trưng $z^2 - az - b = 0$ chỉ có duy nhất một nghiệm thì ta áp dụng kết quả sau

Mệnh đề

Cho a *và* b *là hai số thực. Giả sử phương trình* $z^2 - az - b$ *có duy nhất một nghiệm* r. *Một dãy số* $\{s_n\}$ *thỏa mãn* $s_n = as_{n-1} + bs_{n-2}$ *khi và chỉ khi*

$$s_n = c_1 r^n + c_2 n r^n,$$

với c_1, c_2 *là hai hằng số.*

Ví dụ 21:

Cho $s_0 = 1, s_1 = 6$ và $s_n = 6s_{n-1} - 9s_{n-2}$. Tìm biểu thức dạng đóng cho s_n.

Phương trình đặc trưng $z^2 - 6z - 9 = 0$ có một nghiệm duy nhất là $r = 3$.

Đặt $s_n = c_1 3^n + c_2 n 3^n$.

Từ giá trị $s_0 = 1$ và $s_1 = 6$ ta có $c_1 = 1$ và $c_2 = 1$.

Kết luận ta có $s_n = (n+1)3^n$ cho $n \geq 0$.

30

Phương trình hồi quy tính tuyến

Định nghĩa

Một dãy số $\{s_n\}$ thỏa mãn phương trình hồi quy tuyến tính đồng nhất (HLRE) nếu như ta có, cho một hằng số k, mối quan hệ

$$s_n = a_1 s_{n-1} + a_2 s_{n-2} + \cdots + a_k s_{n-k}, \qquad n \geq k \tag{1}$$

cùng với giá trị ban đầu $s_0, s_1, \ldots, s_{k-1}$.

31

Định lý

Cho $\{s_n\}$ là một dãy số thỏa mãn phương trình (1). Đặt $p(z) = z^n - a_1 z^{n-1} - a_2 z^{n-2} - \cdots - a_k$ và gọi $p(z) = 0$ là phương trình đặc trưng tương ứng với $\{s_n\}$. Giả sử $p(z) = 0$ có t nghiệm phân biệt, gọi là $r_1, r_2, \ldots, r_t$, với bội tương ứng $m_1, m_2, \ldots, m_t$. Ta sẽ có

$$s_n = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=0}^{m_t - 1} c_{ij} n^j r_i^n,$$

với $\{c_{ij}\}$ là những hằng số.

32

Ví dụ 22:

Giả sử $s_0 = 0, s_1 = 1, s_2 = 2$ và $s_n = 5s_{n-1} - 8s_{n-2} + 4s_{n-3}$ cho $n \geq 3$. Tìm biểu thức dạng đóng cho s_n.

33

Ví dụ 23:

Giả sử $s_0 = 0, s_1 = 1, s_2 = 2$ và $s_n = 5s_{n-1} - 8s_{n-2} + 4s_{n-3}$ cho $n \geq 3$. Tìm biểu thức dạng đóng cho s_n.

Phương trình đặc trưng của s_n là $z^3 - 5z^2 + 8z - 4 = 0$.

Một nghiệm là $z = 1$. Chia $z^3 - 5z^2 + 8z - 4$ cho $z - 1$ ta có

$$z^3 - 5z^2 + 8z - 4 = (z-1)(z^2 - 4z + 4) = (z-1)(z-2)^2.$$

Đặt $s_n = c_{10} + c_{20}2^n + c_{21}n2^n$.

Từ $s_0 = 0, s_1 = 1, s_2 = 2$ ta có $c_{10} = -2, c_{20} = 2, c_{21} = -0.5$.

Kết luận ta có

$$s_n = -2 + 2^{n+1} - n2^{n-1}.$$

33

Phương trình hồi quy tuyến tính không đồng nhất

Định nghĩa

Một dãy số $\{s_n\}$ thỏa mãn phương trình hồi quy tuyến tính không đồng nhất (ILRE) nếu như ta có, cho một hằng số k và một hàm $F(n)$, mối quan hệ

$$s_n = a_1 s_{n-1} + a_2 s_{n-2} + \cdots + a_k s_{n-k} + F(n) \qquad n \geq k, \tag{2}$$

cùng với giá trị ban đầu $s_0, s_1, \ldots, s_{k-1}$.

Ví dụ 24:

Đặt $s_n = \sum_{i=1}^{n} i^2$. Ta có $s_n = s_{n-1} + n^2$ từ đấy kết luận là s_n thỏa mãn hồi quy tuyến tính với bậc $k = 1$ và $F(n) = n^2$.

Định lý

Nếu $\{s_n^{(p)}\}$ *thỏa mãn phương trình* (2) *thì mọi dãy số* $\{s_n\}$ *thỏa mãn* (2) *sẽ có dạng tổng quát là* $s_n = s_n^{(p)} + s_n^{(h)}$*, trong đó* $s_n^{(h)}$ *là nghiệm của phương trình hồi quy thuần nhất* $s_n = a_1 s_{n-1} + a_2 s_{n-2} + \cdots + a_k s_{n-k}$.

Định lý trên dẫn đến cách giải phương trình (2) sau đây

- Xác định nghiệm $s_n^{(h)}$ dựa trên định lý 4.
- Đoán nghiệm $s_n^{(p)}$ dựa trên dạng của hàm $F(n)$.

35

Mệnh đề ($F(n)$ dạng đơn giản)

Cho một ILRE có dạng như trong phương trình (2). Nếu F_n có dạng $F(n) = P(n)c^n$ cho một đa thức $P(n)$ bậc t và c là một hằng số, thì ta có thể đặt

$$s_n^{(p)} = n^m Q(n) c^n$$

cho một đa thức $Q(n)$ có bậc tương đương $P(n)$. Ở đây

- *$m = 0$ nếu c không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng (CE) tương ứng với phương trình (2)*
- *$m = m_c$ nếu c là nghiệm của CE với bội m_c.*

Ví dụ 25:

Tìm biểu thức dạng đóng cho $s_n = \sum_{i=0}^{n} i^2$.

Ta có $s_n = s_{n-1} + n^2$. Suy ra $F(n) = n^2 \times 1^n$.

Phương trình đặc trưng cho s_n là $z - 1 = 0$.

Từ mệnh đề trên ta có $s_n^{(h)} = c_4$ và $s_n^{(p)} = n(c_1 n^2 + c_2 n + c_3)$.

Suy ra $s_n = c_1 n^3 + c_2 n^2 + c_3 n + c_4$.

Giá trị ban đầu là $s_0 = 0, s_1 = 1, s_2 = 5, s_3 = 14$.

Suy ra $c_1 = \frac{1}{3}, c_2 = \frac{1}{2}, c_3 = \frac{1}{6}, c_4 = 0$.

Kết luận ta có

$$s_n = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + 1) = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Ví dụ 26:

Tìm biểu thức dạng đóng cho $s_n = 6s_{n-1} - 9s_{n-2} + F(n)$ khi

- $F(n) = 3^n$.
- $F(n) = (n^2 + 1)3^n$.
- $F(n) = n^2 2^n$.

38

Mệnh đề ($F(n)$ dạng phức tạp)

Cho một ILRE có dạng như trong phương trình (2). Nếu F_n có dạng $F(n) = \sum_{i=1}^{d} P_i(n)c_i^n$ cho đa thức $P_1(n), P_2(n), \ldots, P_d(n)$ bậc $t_1, t_2, \ldots, t_d$ và $c_1, c_2, \ldots, c_d$ là những hằng số, thì ta có thể đặt

$$s_n^{(p)} = \sum_{i=1}^{d} n^{m_i} Q_i(n) c_i^n$$

cho những đa thức $Q_1(n), Q_2(n), \ldots, Q_d(n)$ có bậc tương đương $P_1(n), P_2(n), \ldots, P_d(n)$. Ở đây

- *$m_i = 0$ nếu c_i không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng (CE) tương ứng với phương trình (2)*
- *$m_i = m(c_i)$ nếu c_i là nghiệm của CE với bội $m(c_i)$.*

Ví dụ 27:

Cho s_n thỏa mãn $s_n = 2s_{n-1} + n + 2^n$ cùng với giá trị ban đầu $s_1 = 3$. Tìm biểu thức dạng đóng cho s_n.

Phương trình đặc trưng cho s_n là $z - 2 = 0$.

Ta có thể đặt $s_n^{(h)} = c_* 2^n$.

Hàm $F(n)$ của s_n có dạng $n \times 1^n + 2^n$. Vậy ta có thể đặt

$$s_n^{(p)} = (c_1 + c_2 n) + (c_3 + c_4 n)2^n.$$

Kết luận ta có

$$s_n = s_n^{(h)} + s_n^{(p)} = c_1 + c_2 n + c_3 2^n + c_4 n 2^n.$$

Từ $s_1 = 3$ ta có $s_2 = 12$, $s_3 = 35$ và $s_4 = 90$.

Suy ra ta có $c_1 = -2, c_2 = -1, c_3 = 2$ và $c_4 = 1$. Kết luận

$$s_n = n2^n + 2^{n+1} - (n + 2).$$

Giải thuật chia để trị

Một số bài toán có thể giải bằng phương pháp như sau

- Chia bài toán ra vài phẩn riêng biệt nhỏ hơn.
- Giải từng phần.
- Gộp lời giải những phần này lại với nhau.

41

Ví dụ 28:

Cho một chuỗi $\mathcal{A} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ với $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$, ta muốn tìm $x \in \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Algorithm 1 Tìm kiếm nhị phân

procedure BINARY_SEARCH($\mathcal{A}, x$)
    $L = 1, R = |\mathcal{A}|$.
    while $L \leq R$ **do**
        $m = \lfloor (L + R)/2 \rfloor$.
        if $a_m = x$ **then**
            return m
        else if $a_m > x$ **then**
            $R = m - 1$
        else
            $R = m + 1$
    return "Không tìm thấy"

Ví dụ 29:

Cho một dãy số $\mathcal{A} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, sắp xếp $\mathcal{A}$ thành $\mathcal{A}^{\uparrow} = (a_{(1)}, a_{(2)}, \ldots a_{(n)})$ với $a_{(1)} \leq a_{(2)} \leq \cdots \leq a_{(n)}$.

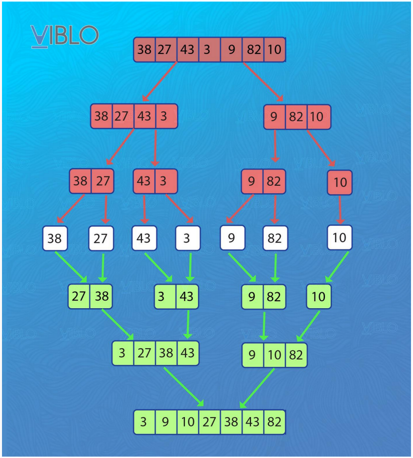

Figure 5: (Sắp xếp trộn) Hình từ trang web Viblo

Ví dụ 30:

Cho $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ và $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, viết trong hệ cơ số B. Tính gía trị của ab.

Algorithm 2 Giải thuật nhân của Karatsuba

```
procedure KARATSUBA_MULT(a, b)
    m = ⌊n/2⌋.
    a = B^m x_1 + x_0, b = B^m y_1 + y_0.
    z_0 = x_0 y_0
    z_2 = x_1 y_1
    z_3 = (x_0 + x_1)(y_0 + y_1).
    z_1 = z_3 − z_0 − z_1.
    return z_2 B^{2m} + z_1 B^m + z_0.
```

Ví dụ 31:

Cho $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ là ma trận có kích thước $n \times n$. Tính $\mathbf{AB}$.

Viết $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ dưới dạng

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix}.$$

Ta có

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} \times \mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{12} \times \mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{11} \times \mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{12} \times \mathbf{B}_{22} \\ \mathbf{A}_{21} \times \mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{22} \times \mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{21} \times \mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{22} \times \mathbf{B}_{22}. \end{bmatrix}$$

45

Đặt $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \ldots, \mathbf{M}_7$ là

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_1 &= (\mathbf{A}_{11} + \mathbf{A}_{22}) \times (\mathbf{B}_{11} + \mathbf{B}_{22}), \\
\mathbf{M}_2 &= (\mathbf{A}_{21} + \mathbf{A}_{22}) \times \mathbf{B}_{11}, \\
\mathbf{M}_3 &= \mathbf{A}_{11} \times (\mathbf{B}_{12} - \mathbf{B}_{22}), \\
\mathbf{M}_4 &= \mathbf{A}_{22} \times (\mathbf{B}_{21} - \mathbf{B}_{11}), \\
\mathbf{M}_5 &= (\mathbf{A}_{11} + \mathbf{A}_{12}) \times \mathbf{B}_{22}, \\
\mathbf{M}_6 &= (\mathbf{A}_{21} - \mathbf{A}_{11}) \times (\mathbf{B}_{11} + \mathbf{B}_{12}), \\
\mathbf{M}_7 &= (\mathbf{A}_{12} - \mathbf{A}_{22}) \times (\mathbf{B}_{21} + \mathbf{B}_{22}).
\end{aligned}$$

Ta có

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_4 - \mathbf{M}_5 + \mathbf{M}_7 & \mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_5 \\ \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_4 & \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_6 \end{bmatrix}.$$

46

Đổi biến trong phương trình hồi quy

Nhiều giải thuật chia để trị dẫn đến phương trình hồi quy dạng

$$T(n) = aT(n/b) + F(n)$$

cho a, b là những hằng số

Phương trình trên có thể giải bằng cách đổi biến $n = b^k$.

Ví dụ 32:

Giải $T(n) = 4T(n/2) + n^2$.

Đặt $n = 2^k$ ta có

$$T(2^k) = 4T(2^{k-1}) + 2^{2k}.$$

Thay $s_k = T(2^k)$ dẫn đến ILRE

$$s_k = 4s_{k-1} + 4^k.$$

Suy ra $s_k = c_1 4^k + c_2 k 4^k$.

Thay $k = 0$ ta có $s_0 = c_1 = T(1)$ và thay $k = 1$ ta có $s_1 = 4c_1 + 4c_2 = T(2) = 4T(1) + 4$.

Suy ra $c_1 = T(1)$ và $c_2 = 1$.

Kết luận ta có $T(n) = T(1)n^2 + n^2 \log_2 n$.

48

Ví dụ 33:

Giải $T(n) = 2T(n/2) + n\log n$.

Đặt $n = 2^k$ và $s_k = T(2^k)$ ta có

$$s_k = 2s_{k-1} + k2^k.$$

Suy ra $s_k = (c_1 + c_2 k + c_3 k^2)2^k$ và

$$T(n) = (c_1 + c_2\log_2 n + c_3\log_2^2 n) \times n.$$

Giá trị c_1, c_2 và c_3 tìm được từ giá trị của $T(1), T(2)$ và $T(4)$.

49

Định lý tổng quát cho những giải thuật chia để trị

Định lý (Định lý thợ)

Cho T là một hàm tăng thỏa mãn phương trình hồi quy

$$T(n) = aT(n/b) + cn^d$$

trong đó $a \geq 1$, b là số nguyên lớn hơn 1, và c, d là số thực với $c > 0$, $d \geq 0$. Ta sẽ có

$$T(n) = \begin{cases} O(n^d) & \text{nếu } a < b^d \\ O(n^d \log n) & \text{nếu } a = b^d \\ O(n^{\log_b a}) & \text{nếu } a > b^d \end{cases}.$$

50

Ví dụ 34:

- $T(n) = T(n/2) + n \Longrightarrow T(n) = \dots$
- $T(n) = 2T(n/2) + n \Longrightarrow T(n) = \dots$
- $T(n) = 3T(n/2) + n \Longrightarrow T(n) = \dots$

51

Ví dụ 35:

- $T(n)$ cho giải thuật tìm kiếm nhị phân thỏa mãn

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + 1$$

  và suy ra $T(n) = O(\log n)$.

- $T(n)$ cho giải thuật sắp xếp trọn thỏa mãn

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + O(n)$$

  và suy ra $T(n) = O(n \log n)$.

Ví dụ 36:

- $T(n)$ cho giải thuật nhân của Karatsuba thỏa mãn

$$T(n) = 3T(n/2) + O(n)$$

  và suy ra $T(n) = O(n^{\log_2(3)})$.
- $T(n)$ cho giải thuật nhân ma trận của Strassen thỏa mãn

$$T(n) = 7T(n/2) + O(n^2)$$

  và suy ra $T(n) = O(n^{\log_2(7)})$.

53

Định lý thợ có thể chứng minh như sau.

Đặt $n = b^k$ và $s_k = T(b^k)$ ta có

$$s_k = as_{k-1} + cb^{dk} = as_{k-1} + c(b^d)^k$$

Phương trình đặc trưng của s_k là $z - a = 0$. Suy ra

- Nếu $a \neq b^d$ thì

$$s_k = c_1 a^k + c_2 b^{dk} \Longrightarrow T(n) = c_1 a^{\log_b n} + c_2 n^d$$

- Nếu $a = b^d$ thì

$$s_k = c_1 b^{dk} + c_2 k b^{dk} \Longrightarrow T(n) = (c_1 + c_2 \log_b n) n^d.$$

54

Phân tích thuật toán Euclid

Algorithm 3 Euclid (dạng đệ quy)

```
procedure GCD(a, b)
    if b = 0 then
        return a
    else
        return gcd(b, a mod b).
```

Mệnh đề

Cho $m \geq n \geq 0$. *Giải thuật Euclid cho* $\gcd(m, n)$ *cần tối đa* $2\log_2(m+n)$ *bước*

55

Giả sử $a \geq b \geq 0$ ta sẽ chứng minh

$$b + (a \mod b) < \frac{2}{3}(a+b).$$

Gọi bất đẳng thức trên là (I). Ta có

$$(I) \iff 3b + 3(a \mod b) < 2a + 2b \quad (II)$$

$$(II) \iff b + 3(a \mod b) < 2a \quad (III)$$

$$(III) \iff b + 3(a \mod b) < 2b(a \operatorname{div} b) + 2(a \mod b)) \quad (IV)$$

$$(IV) \iff b + (a \mod b) < 2b(a \operatorname{div} b) \quad (V)$$

Do $a \geq b$ ta có $a \operatorname{div} b \geq 1$ và vì thế (V) luôn đúng.

Cho $a \geq b \geq 0$ là hai số nguyên bất kỳ và $s_0 = (a+b)$. Từ lý luận trên ta có (sau mỗi bước đệ quy) $s_{k+1} < \frac{2}{3}s_k$.

Do đó cần tối đa

$$\log_{3/2}(a+b) = \log_2(a+b) \times \log_{3/2}(2) < 2\log_2(a+b) \quad \text{bước.}$$

56

Bổ đề Bezout

Mệnh đề

Cho a, b là hai số nguyên với $\gcd(a, b) = d$. Có tồn tại hai số nguyên x, y sao cho $ax + by = d$, và mọi số nguyên với dạng $az + bt$ cho $z, t \in \mathbb{Z}$ đều là bội số của d.

Chú ý Có nhiều cặp (x, y) thỏa mãn $ax + by = \gcd(a, b)$. Ví dụ, cho $a = 15, b = 6$ với $\gcd(6, 15) = 3$ ta có

$$3 = (-1) \times 15 + 6 \times 3 = 1 \times 15 + 6 \times (-2).$$

Bài tập Chứng minh bổ đề Bezout bằng nguyên tắc quy nạp.

Gợi ý Giả sử rằng ta có mệnh đề của Bezout cho mọi (a, b) với $0 \leq a + b \leq n$. Chứng minh bước quy nạp cho $n + 1$.

Ta tìm x, y thỏa mãn $ax + by = \gcd(a, b)$ bằng giải thuật Euclid mở rộng như sau

Algorithm 4 Euclid mở rộng (dạng đệ quy)

procedure GCD_EXTEND(a, b)
    if $b = 0$ **then**
        return $(a, 1, 0)$.
    else
        $(d, s_*, t_*) = \text{gcd\_extend}(b, a \mod b)$.
        $s = t_*$.
        $t = s_* - (a \text{ div } b) \times t_*$.
        return (d, s, t).

Ví dụ 37:

Tính $\gcd(78, 99)$ bằng giải thuật Euclid mở rộng.

	a	b	a div b	d	s	t
1	99	78	1			
2	78	21	3			
3	21	15	1			
4	15	6	2			
5	6	3	2			
6	3	0	-	3	1	0

Figure 6: Hình từ trang web của Richard Chang

59

	a	b	a div b	d	s	t
1	99	78	1	3	-11	14
2	78	21	3	3	3	-11
3	21	15	1	3	-2	3
4	15	6	2	3	1	-2
5	6	3	2	3	0	1
6	3	0	-	3	1	0

Figure 7: Hình từ trang web của Richard Chang