Toàn rời rạc (CE23101)

Đồ thị và cây

Đồ thị vô hướng (undirected graph)

Định nghĩa

Một đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ là một cặp trong đó $V \neq \emptyset$ là các đỉnh và $E \subset \binom{V}{2}$ là các cạnh.

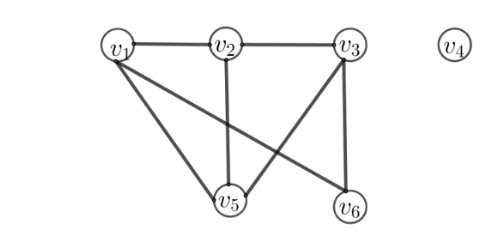


Figure 1: Hình từ sách toán rời rạc và ứng dụng của Nguyễn Hữu Điển.

Ta có thể khái quát định nghĩa trên cho $G = (V, E)$ như sau

- Nếu $E \subset \binom{V}{2} \cup \{(v, v) : v \in V\}$ thì G là vô hướng có khuyên.
- Nếu E là một đa tập (multiset) với các phần tử $e \in \binom{V}{2}$ thì G là đa đồ thị vô hướng. Hai cạnh $e_1, e_2 \in E$ với $e_1 = e_2$ được gọi là song song.
- Nếu E là một đa tập (multiset) với các phần tử $e \in \binom{V}{2} \cup \{(v, v) : v \in V\}$ thì G là đa đồ thị vô hướng có khuyên hoặc giả đồ thị.

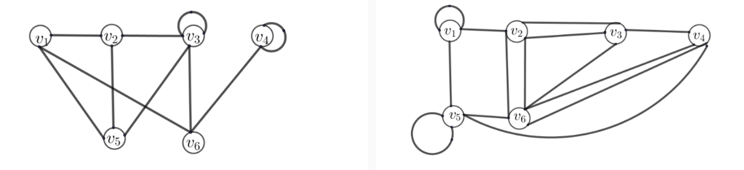


Figure 2: Hình từ sách toán rời rạc và ứng dụng của Nguyễn Hữu Điển.

Đồ thị có hướng (directed graph)

Định nghĩa

Một đồ thị có hướng $G = (V, E)$ là một cặp trong đó $V \neq \emptyset$ là các đỉnh và $E \subset V \times V$ là các cạnh hoặc các cung. Nếu $(v, v) \in E$ cho ít nhất một $v \in V$ thì G có khuyên còn không thì G vô khuyên.

Cho mỗi $e = (u, v) \in E$ ta gọi

- u là nguồn hoặc đỉnh khởi đầu của e.
- v là đích hoặc đỉnh kết thúc của e.

Ta có thể định nghĩa đa đồ thị vô hướng bằng cách coi E là một đa tập (multiset) với các phần tử $e \in V \times V$.

Trong bài giảng này, nếu không nói rõ thì $G = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng, không khuyên, và không cạnh song song.

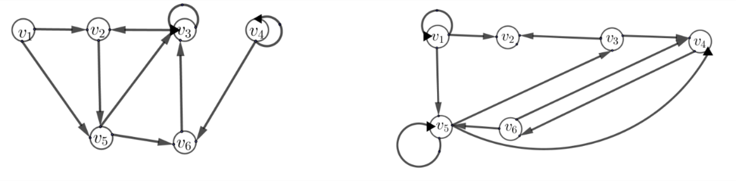


Figure 3: Đồ thị có hướng và đa đồ thị có hướng. Hình từ sách toán rời rạc và ứng dụng của Nguyễn Hữu Điển.

5

Đường đi (path) trong đồ thị

Định nghĩa

Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị (có thể có hướng).

- Một đường đi (path) $\mathcal{P}$ có độ dài n là một dãy n cạnh $e_1, \ldots, e_n$ đi qua $n + 1$ đỉnh $v_1, \ldots, v_{n+1}$ sao cho đỉnh kết thúc của e_i là đỉnh khởi đầu của e_{i+1} cho $i = 1, \ldots, n - 1$.
- $\mathcal{P}$ kín nếu đỉnh đầu tiên của $\mathcal{P}$ cũng là đỉnh cuối.
- Một đường đi kín mà không cạnh nào xuất hiện hai lần được gọi là một vòng lặp hoặc chu trình (cycle).
- G acyclic nếu G không có bất kỳ một chu trình nào.
- $\mathcal{P}$ acyclic nếu tiểu đồ thị của G tương ứng với các đỉnh và cạnh của $\mathcal{P}$ là acyclic.
- Một đường đi có các đỉnh phân biệt được gọi là một đường đi đơn acyclic (simple acyclic path).

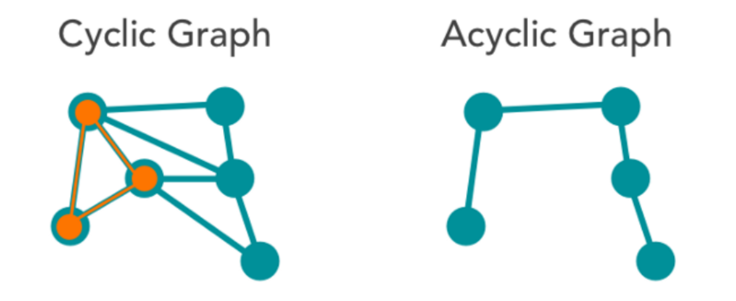


Figure 4: Đồ thị có vòng lặp và đồ thị không có vòng lặp. Hình từ trang web Programmer's Army

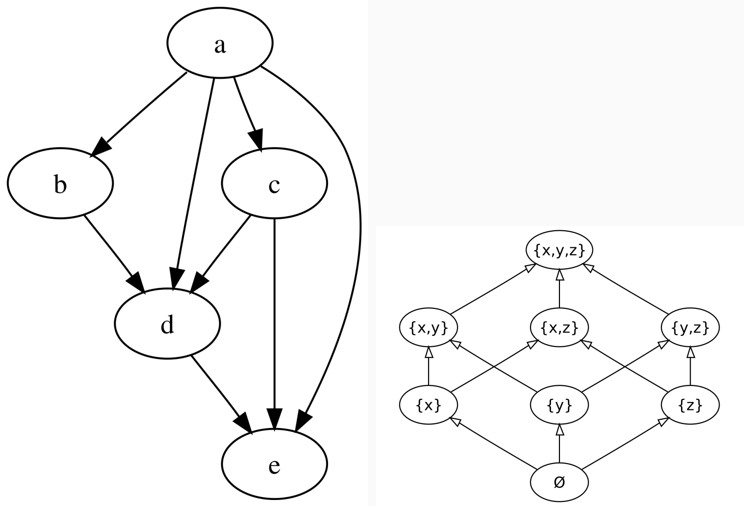


Figure 5: Đồ thị có hướng không chu trình. Hình từ Wikipedia

8

Mệnh đề

Nếu tồn tại một đường đi giữa hai đỉnh $u \neq v$ trong một đồ thị G thì sẽ có một đường đi đơn acyclic (simple acyclic path) từ u đến v.

Mệnh đề

Nếu $u \neq v$ là hai đỉnh của một đồ thị vô hướng và acyclic G, thì có tối đa một đường đi từ u đến v trong G.

9

Độ của một đỉnh

Định nghĩa

Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng và $v \in V$ là một đỉnh. Ta gọi $N(v) = \{u \in V : \{u, v\} \in E\}$ là (tập hợp) những hàng xóm của v. Ta gọi $\deg(v) := |N(v)|$ là độ hoặc bậc của v.

Mệnh đề (Bắt tay)

Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng. Ta có

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|.$$

10

Độ của một đỉnh

Định nghĩa

Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị có hướng và $v \in V$ là một đỉnh. Ta gọi

- $N_{\text{in}}(v) = \{u \in V : (u, v) \in E\}$ là hàng xóm vào của v.
- $N_{\text{out}}(v) = \{u \in V : (v, u) \in E\}$ là hàng xóm ra của v.
- $\deg_{\text{in}}(v) = |N_{\text{in}}(v)|$ là độ vào hoặc bậc vào của v.
- $\deg_{\text{out}}(v) = |N_{\text{out}}(v)|$ là độ ra hoặc bậc ra của v.

Mệnh đề (Bắt tay)

Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị có hướng. Ta có

$$\sum_{v \in V} \deg_{\text{in}}(v) = \sum_{v \in V} \deg_{\text{out}}(v) = |E|.$$

Một số đồ thị đặc biệt

Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng với $|V| = n \geq 1$ đỉnh.

Ta gọi G là

- đều hoặc chính quy với bậc d nếu $\deg(v) \equiv d$.
- đầy đủ (complete), nếu $\deg(v) \equiv n - 1$.
- một vòng nếu G là một đường đi kín và $\deg(v) \equiv 2$.
- một bánh xe nếu G là một vòng với $n - 1$ đỉnh và thêm vào đỉnh v_n nối đến v_i cho mọi $i \leq n - 1$.
- đồ thị hai phần nếu $V = V_1 \cup V_2, V_1 \cap V_2 = \emptyset$ và $e \in E \Longrightarrow e = \{v_1, v_2\}, v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$.

12

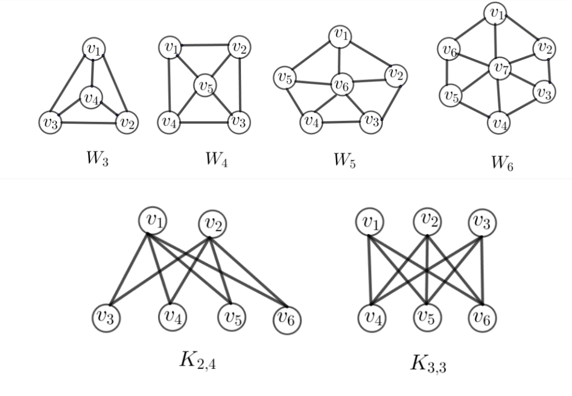


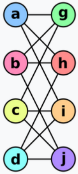
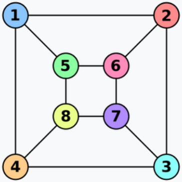
Figure 6: Đồ thị bánh xe và đồ thị hai phần. Hình từ sách toán rời rạc và ứng dụng của Nguyễn Hữu Điển.

13

Đẳng cấu

Định nghĩa

Cho $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ là hai đồ thị vô hướng. G_1 và G_2 được gọi là đẳng cấu nếu tồn tại một song ánh f giữa V_1 và V_2 sao cho $\{u, v\} \in E_1 \iff \{f(u), f(v)\} \in E_2$.

Graph G	Graph H	An isomorphism between G and H
 	 	$f(a) = 1$ $f(b) = 6$ $f(c) = 8$ $f(d) = 3$ $f(g) = 5$ $f(h) = 2$ $f(i) = 4$ $f(j) = 7$

Đồ thị hai phần thường được dùng trong những bài toán ghép cặp (hôn nhân giữa một nhóm người, công việc và máy móc, môn học và phòng học, ...)

Định nghĩa

Cho một đồ thị hai phần $G = (V_1 \cup V_2, E)$ với G vô hướng, ta gọi $M \subset E$ là một ghép cặp nếu như, cho mọi $e_i, e_j \in M$ với $\{s, t\} = e_i \neq e_j = \{u, v\}$ thì s, t, u, v là những đỉnh phân biệt. Ta gọi M là một ghép cặp đầy đủ từ V_1 qua V_2 nếu $|M| = |V_1|$.

15

Định lý (Hôn nhân của P. Hall)

Cho $G = (V_1 \cup V_2, E)$ *là một đồ thị hai phần với* G *vô hướng.* G *có một ghép cặp đầy đủ từ* V_1 *qua* V_2 *khi và chỉ khi* $|N(A)| \geq |A|$ *cho mọi* $A \subset V_1$*.*

16

Ta chứng minh định lý của P. Hall như sau.

Chiều chỉ khi: Nếu có một cặp ghép đầy đủ thì cho mọi $A \subset V_1$ ta có thể ghép các $v \in A$ với những $w \in V_2$, w riêng biệt, và vì thế $|N(A)| \geq |A|$.

Chiều khi: Ta sử dụng quy tắc quy nạp tổng quát.

Bước cơ sở: Khi $|V_1| = 1$ thì $N(V_1) \geq 1$ và có cặp ghép đầy đủ.

Bước quy nạp: Giả sử mệnh đề cần chứng minh đúng cho mọi $G = (V_1 \cup V_2, E)$ với $|V_1| \leq k$ cho một số nguyên dương k. Ta sẽ chứng minh là mệnh đề vẫn đúng khi $|V_1| = k + 1$.

Ta xét hai trường hợp.

Trường hợp 1 là khi $|N(A)| > |A|$ cho mọi $A \subset V_1, |A| \leq k$.

Chọn $w \in V_1$ bất kỳ. Ghép w với một $u_w \in V_2, e_w = \{w, u_w\} \in E$.

Gọi E' là những cạnh còn lại trong E không nối với w hoặc u_w.

Sau đó xem xét $G' = ((V_1 \setminus \{w\}) \cup (V_2 \setminus \{u_w\}), E')$.

Do $|V_1 \setminus \{w\}| = k$, sử dụng giả thiết quy nạp, ta có cặp ghép đầy đủ từ $V_1 \setminus \{w\}$ qua $V_2 \setminus \{u_w\}$, và khi thêm vào e_w ta có cặp ghép đầy đủ từ V_1 qua V_2.

18

Trường hợp 2 là khi tồn tại một $A \subset V_1, |A| \leq k$ và $|N(A)| = |A|$.

Gọi W_1 là một tập con của V_1 thỏa mãn điều kiện trên. Do $|W_1| \leq k$, sử dụng giả thiết quy nạp ta có cặp ghép đầy đủ M_1 từ W_1 qua V_2. Gọi W_2 là những đỉnh của V_2 xuất hiện trong M_1.

Gọi E' là những cạnh trong E không nối với W_1 hoặc W_2.

Xem xét $G' = ((V_1 \setminus W_1) \cup (V_2 \setminus W_2), E')$.

Ta sẽ có $|N(A)| \geq |A|$ cho mọi $A \subset V_1 \setminus W_1$ (ở đây $N(A)$ tính dựa trên E').

Bởi vì nếu không thì cho $S_1 \subset V_1 \setminus W_1$ với $|N(S_1)| < |S_1|$ ta sẽ có $|N(W_1 \cup S_1)| < |W_1 \cup S_1|$, mâu thuẫn với tiên đề $|N(A)| \geq |A|$ cho mọi $A \subset V_1$.

Sử dụng giả thiết quy nạp, ta có cặp ghép đầy đủ M_2 từ $V_1 \setminus W_1$ qua $V_2 \setminus W_2$. Gộp M_1 với M_2 ta có cặp ghép đầy đủ từ V_1 qua V_2.

19

Chu trình Euler

Định nghĩa

Cho $G = (V, E)$ là một đa đồ thị (có thể có hướng và có khuyên). Một chu trình Euler của G (nếu có) là một chu trình đi qua tất cả các cạnh thuộc E một lần duy nhất. Một đường đi Euler của G (nếu có) là một đường đi qua tất cả các cạnh thuộc E một lần duy nhất.

Figure 7: Những cây cầu của Konisberg. Hình từ Wikipedia

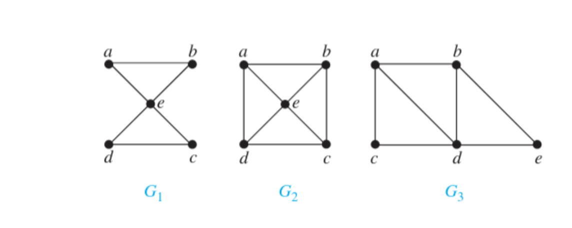


Figure 8: Đồ thị nào có chu trình Euler ? Đồ thị nào có đường đi Euler ? Hình từ sách toán rời rạc của Kenneth Rosen.

Định lý

Một đa đồ thị vô hướng $G = (V, E)$, với G liên thông, $|E| < \infty$, và mọi đỉnh có bậc chẵn sẽ có một chu trình Euler. Một đa đồ thị liên thông với hai đỉnh bậc lẻ và tất cả các đỉnh còn lại bậc chẵn sẽ có một đường đi Euler.

Định lý

Một đa đồ thị có hướng $G = (V, E)$, với G liên thông, $|E| < \infty$, và mọi đỉnh có bậc vào bằng với bậc ra sẽ có một chu trình Euler. Một đa đồ thị có hướng liên thông với tối đa một đỉnh v mà $\deg_{\text{in}}(v) - \deg_{\text{out}}(v) = 1$ và tối đa một đỉnh u mà $\deg_{\text{in}}(v) - \deg_{\text{out}}(v) = 1$ sẽ có một đường đi Euler.

22

Ta có thể chứng minh định lý trên thông qua giải thuật xây dựng chu trình Euler cho đa đồ thị vô hướng của Hierholzer như sau.

1. Chọn bất kỳ một đỉnh $v \in V$.
2. Tạo một đường đi kín đơn giản $\mathcal{C}$ bắt đầu từ v.
3. Tìm một đỉnh lệch u trong $\mathcal{C}$, và tạo một đường đi kín đơn giản $\tilde{\mathcal{C}}$ bắt đầu từ u và sử dụng các cạnh thuộc $E \setminus \mathcal{C}$.
4. Nhập $\mathcal{C}$ và $\tilde{\mathcal{C}}$ thành một chu trình đơn giản vẫn gọi là $\mathcal{C}$.
5. Lặp lại bước 3 và 4 cho đến khi $E \setminus \mathcal{C} = \emptyset$.

Ở bước 3, một đỉnh lệch u là một đỉnh mà có ít nhất một đỉnh w khác sao cho $\{u, w\} \in E \setminus \mathcal{C}$.

23

Giải thuật trên dẫn đến một chu trình Euler như sau

- Tất cả $v \in V$ đều có bậc chẵn, nên nếu v không phải là điểm khởi đầu của một chu trình thì khi vào được v ta cũng thoát được ra khỏi v.
- Vậy cho bất kỳ $v \in V$ nào ta cũng sẽ kiếm được một đường đi kín đơn giản bắt đầu và kết thúc tại v.
- Cho bất kỳ một chu trình $\mathcal{C}$ ta có một là $E \setminus \mathcal{C} = \emptyset$ còn không thì sẽ có một đỉnh lệch.
- Do bậc của tất cả $v \in V$ trong $E \setminus \mathcal{C}$ là chẵn, nên sẽ có một đường đi kín đơn giản $\tilde{\mathcal{C}}$ bắt đầu tại một đỉnh lệch u của $\mathcal{C}$.
- Nhập $\mathcal{C}$ với $\tilde{\mathcal{C}}$ như sau. Tạo

$$v \xrightarrow{\text{đầu } \mathcal{C}} u \xrightarrow{\tilde{\mathcal{C}}} u \xrightarrow{\text{đuôi } \mathcal{C}} v$$

24

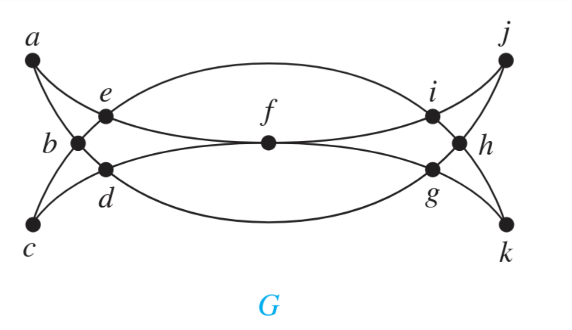


Figure 9: Mã tấu của Mohammed. Hình từ sách toán rời rạc của Kenneth Rosen.

Chu trình Hamilton

Định nghĩa

Cho $G = (V, E)$ là một đa đồ thị (có thể có hướng và có khuyên). Một chu trình Hamilton của G (nếu có) là một chu trình đi qua tất cả các đỉnh thuộc V một lần duy nhất. Một đường đi Hamilton của G (nếu có) là một đường đi qua tất cả các đỉnh thuộc V một lần duy nhất.

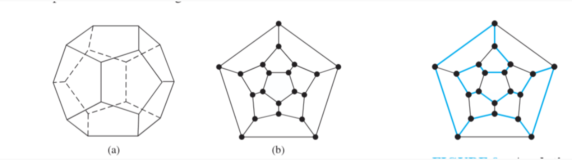


Figure 10: Chò trơi vòng quanh thế giới. Hình từ sách toán rời rạc của Kenneth Rosen.

Khác với chu trình Euler, cho đến giờ không ai tìm được một giải thuật nào để tìm một chu trình Hamilton cho một đồ thị G với n đỉnh mà chỉ cần $O(n^c)$ thao tác cho một hằng số c.

Tìm chu trình Hamilton là một trong những bài toán nằm trong lớp NP-đầy đủ (NP-complete). Bất kỳ ai giải được bài này (bằng cách chứng minh hoặc bác bỏ mệnh đề về việc tồn tại một giải thuật với $O(n^c)$ thao tác) sẽ nổi danh như cồn, tha hồ phè phỡn và tiền tiêu không hết.

27

Cây

Định nghĩa

Một đa đồ thị $G = (V, E)$ là một cây nếu G liên thông (connected) và không có chu trình (acyclic).

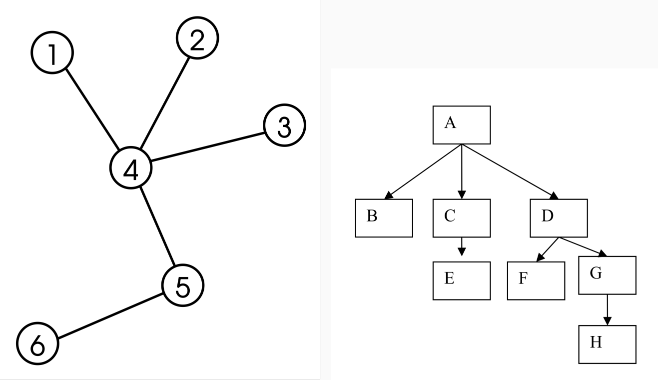


Figure 11: Cây không hướng và cây có hướng

Vài mệnh đề về cây

Mệnh đề

Một đồ thị cây $\mathcal{T}$ vô hướng phải có tối thiểu hai lá (một đỉnh v được gọi là lá nếu $\deg(v) = 1$).

Chứng minh Cho $\mathcal{P}$ là đường đi đơn giản dài nhất trong $\mathcal{T}$. Gọi u và v là điểm bắt đầu và kết thúc của $\mathcal{P}$.

Giả sử $\deg(u) \geq 2$. Vậy thì nếu $\mathcal{P}$ bắt đầu từ u thì $\mathcal{P}$ sẽ không bao giờ quay lại u. Vậy u có ít nhất một hàng xóm w mà w không xuất hiện trên $\mathcal{P}$ (vì nếu w xuất hiện thì $\mathcal{P}$ sẽ có một chu trình). Vì w không xuất hiện trên $\mathcal{P}$ ta có thể nối dài $\mathcal{P}$ thành $w \longrightarrow u \xrightarrow{\mathcal{P}} v$ và việc này mâu thuẫn với giả thiết $\mathcal{P}$ là đường đi đơn giản dài nhất. Suy ra $\deg(u) = 1$ và u là một lá.

Dùng lý luận tương tự ta có thẻ kết luận là v cũng là một lá. Vậy $\mathcal{T}$ có ít nhất hai lá.

Mệnh đề

Một đồ thị cây $\mathcal{T} = (V, E)$ *vô hướng sẽ có* $|E| = |V| - 1$.

Chứng minh Sử dụng nguyên tắc quy nạp và sự tồn tại của ít nhất một lá trong $\mathcal{T}$.

Mệnh đề

Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị liên thông (connected) vô hướng và $e \in E$. Các phát biểu sau là tương đương

- $G' = (V, E \setminus \{e\})$ *là liên thông*
- e *là một cạnh của một vòng* $\mathcal{C}$ *nào đó trong* G.
- e *là một cạnh của một đường đi kín nào đó trong* G.

31

Cây bao trùm

Định nghĩa

Cho G là một đa đồ thị liên thông. Một cây bao trùm (spanning tree) của G là một cây $G' = (V, E')$ với $E' \subset E$.

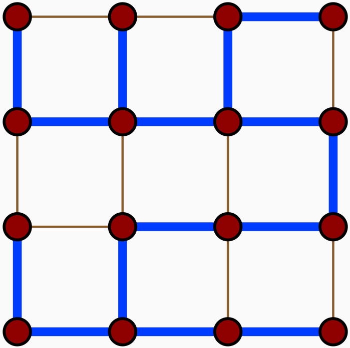


Figure 12: Cây bao trùm của đồ thị lưới. Hình từ Wikipedia

Tìm kiếm rộng và tìm kiếm sâu

Cho một đồ thị G ta có thể tìm những phần liên thông của G bằng phương pháp tìm kiếm rộng hay tìm kiếm sâu.

Thuật toán [sửa | sửa mã nguồn]

Thuật toán sử dụng một cấu trúc dữ liệu hàng đợi để lưu trữ thông tin trung gian thu được trong quá trình tìm kiếm:

1. Chèn đỉnh gốc vào hàng đợi (đang hướng tới)
2. Lấy ra đỉnh đầu tiên trong hàng đợi và quan sát nó
   - Nếu đỉnh này chính là đỉnh đích, dừng quá trình tìm kiếm và trả về kết quả.
   - Nếu không phải thì chèn tất cả các đỉnh kề với đỉnh vừa thăm nhưng chưa được quan sát trước đó vào hàng đợi.
3. Nếu hàng đợi là rỗng, thì tất cả các đỉnh có thể đến được đều đã được quan sát – dừng việc tìm kiếm và trả về "không thấy".
4. Nếu hàng đợi không rỗng thì quay về bước 2.

Figure 13: Thuật toán tìm kiếm rộng. Hình từ Wikipedia

33

Tìm kiếm rộng và tìm kiếm sâu

Ý tưởng thuật toán [sửa | sửa mã nguồn]

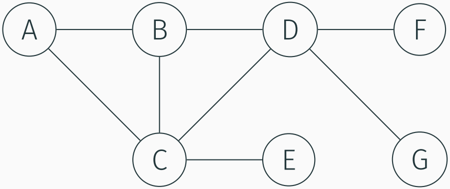
1. **DFS** trên đồ thị vô hướng cũng giống như khám phá mê cung với một cuộn chỉ và một thùng sơn đỏ để đánh dấu, tránh bị lạc. Trong đó mỗi đỉnh **s** trong đồ thị tượng trưng cho một cửa trong mê cung.
2. Ta bắt đầu từ đỉnh **s**, buộc đầu cuộn chỉ vào **s** và đánh đấu đỉnh này **"đã thăm"**. Sau đó ta đánh dấu **s** là đỉnh hiện hành **u**.
3. Bây giờ, nếu ta đi theo cạnh **(u,v)** bất kỳ.
4. Nếu cạnh **(u,v)** dẫn chúng ta đến đỉnh **"đã thăm" v**, ta quay trở về **u**.
5. Nếu đỉnh **v** là đỉnh mới, ta di chuyển đến **v** và lăn cuộn chỉ theo. Đánh dấu **v** là **"đã thăm"**. Đặt **v** thành đỉnh hiện hành và lặp lại các bước.
6. Cuối cùng, ta có thể đi đến một đỉnh mà tại đó tất cả các cạnh kề với nó đều dẫn chúng ta đến các đỉnh **"đã thăm"**. Khi đó, ta sẽ quay lui bằng cách cuộn ngược cuộn chỉ và quay lại cho đến khi trở lại một đỉnh kề với một cạnh còn chưa được khám phá. Lại tiếp tục quy trình khám phá như trên.
7. Khi chúng ta trở về **s** và không còn cạnh nào kề với nó chưa bị khám phá là lúc **DFS** dừng.

Figure 14: Thuật toán tìm kiếm sâu. Hình từ Wikipedia

Cả hai thuật toán tìm kiếm rộng và tìm kiếm sâu cũng có thể dùng để tìm cây bao trùm của một đồ thị G liên thông.

34

Tìm một cây bao trùm cho đồ thị sau đây



Cây có gốc (rooted tree)

Định nghĩa

Cho một đồ thị đơn giản $\mathcal{T} = (V, E)$ mà $\mathcal{T}$ là một cây. Ta biến $\mathcal{T}$ thành một cây có gốc bằng cách chọn một đỉnh $v_* \in V$ làm gốc. Đặt $d(v_*, w)$ là số cạnh trong đường đi đơn giản từ v_* đến w. Ta gọi $d(v_*, w)$ là tầng của w. Tất cả $w \in V$ còn lại sẽ được sắp xếp dựa trên $d(v_*, w)$.

- Nếu $\{u, w\} \in E$ và $d(v_*, u) < d(v_*, w)$ thì u là bố của w và w là con của u.
- $w_1, w_2 \in V$ có chung một bố sẽ là anh/em.
- Một đỉnh không có con được gọi là lá.
- u là tổ tiên của w (và w là hậu duệ) nếu có một chuỗi $v_0 := u, v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k := w$ sao cho v_{i-1} là bố của v_i.
- Độ sâu của $\mathcal{T}$ là $\max_{w \in V} d(v_*, w)$.

Định nghĩa

Một cây nhị phân (binary tree) $\mathcal{T} = (V, E)$ là một cây có gốc sao cho mỗi $w \in V$ có tối đa 2 con. Một cây bậc n (n-ary tree) là cây có gốc sao cho mỗi $w \in V$ có tối đa n con.

Một cây bậc n có gốc với độ cao h là cân bằng (balanced n-ary tree) nếu các lá đều ở tầng h hoặc $h - 1$.

Một cây bậc n đều đặn (regular n-ary tree) là một cây có gốc sao chô mỗi $w \in V$ có 0 hoặc n con.

Một cây bậc n đầy đủ (full n-ary tree) là một regular n-ary tree với tất cả các lá đều ở cùng một tầng.

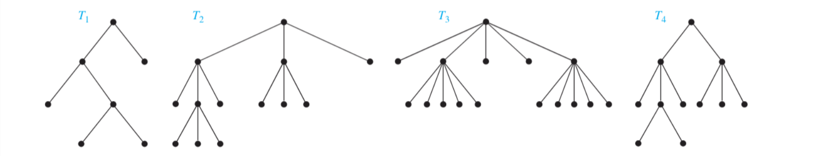


Figure 15: Vài cây có gốc. Hình từ sách toán rời rạc của Ken Rosen

Mệnh đề

Cho $\mathcal{T}$ là một cây đều đặn bậc m.

- *Nếu $\mathcal{T}$ có i đỉnh không phải là lá thì $\mathcal{T}$ có $mi+1$ đỉnh và $\ell = (m-1)i+1$ lá.*
- *Nếu $\mathcal{T}$ có n đỉnh thì sẽ có $i = (n-1)/m$ đỉnh không phải là lá và $\ell = [(m-1)n+1]/m$ đỉnh lá.*
- *Nếu $\mathcal{T}$ có ℓ lá thì sẽ có $(m\ell-1)/(m-1)$ đỉnh và $i = (\ell-1)/(m-1)$ đỉnh không phải là lá.*

38

Vài ứng dụng của cây có gốc

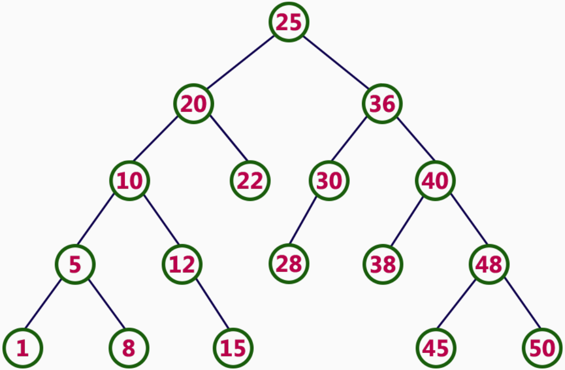


Figure 16: Cây tìm kiếm nhị phân (binary search tree)

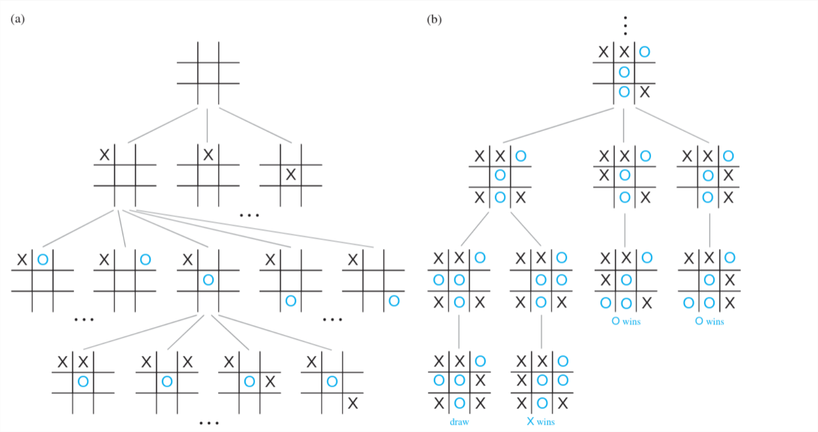


Figure 17: Cây Tic Tac Toe. Hình từ sách toán rời rạc của Ken Rosen

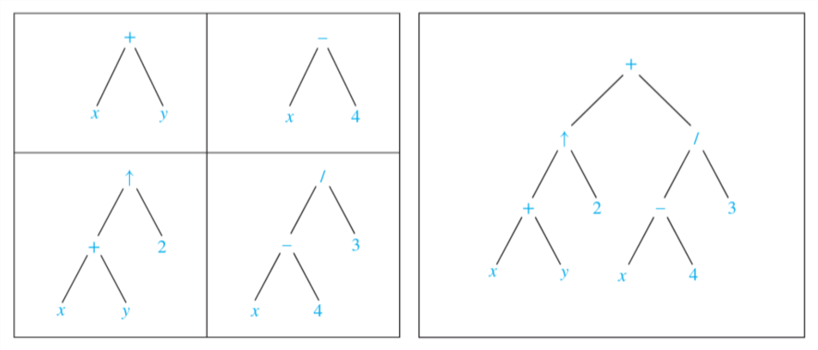


Figure 18: Cây tính toán biểu thức $(x+y)^2+(x-4)/3$. Hình từ sách toán rời rạc của Ken Rosen

41