

# Toàn rời rạc (CE23101)

Đếm và xác suất

---

## Đếm là gì ?

Hỏi tên: Rằng biển xanh dâu

Hỏi quê: Rằng mộng ban đầu đã xa

Gọi tên là một hai ba

*Đếm là diệu tưởng*, đo là nghi tâm

– Bùi Giáng

# Vài ví dụ căn bản

## Ví dụ 1:

Cho  $S = \{1, 2, \dots, 1000\}$ .  $S$  chứa

- bao nhiêu số chẵn ?
- bao nhiêu số chia hết cho 3 ?
- bao nhiêu số chia hết cho 3 và 5 ?
- bao nhiêu số chia hết cho 3 hoặc của 5 ?

## Vài nguyên tắc cơ bản

Cho  $S$  và  $T$  là hai tập hợp hữu hạn.

Định nghĩa  $|S|$  là số phần tử thuộc  $S$ .

- $|S \cup T| = |S| + |T| - |S \cap T|$ .
- Nếu  $S$  và  $T$  rời nhau ( $S \cap T = \emptyset$ ) thì  $|S \cup T| = |S| + |T|$ .
- $|S| = |S \cap T| + |S \cap \bar{T}|$ .
- Nếu  $T \subseteq S$  thì  $|S \setminus T| = |S| - |T|$ .

## Mệnh đề

Giả sử  $A$  là một tập hợp mà các phần tử  $a \in A$  có dạng  $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ , Nếu ta có  $n_i$  lựa chọn cho  $a_i$ , cho mỗi  $i = 1, 2, \dots, m$ , thì

$$|A| = n_1 \times n_2 \times \dots \times n_m$$

**Chú ý:** Thứ tự của  $a_i$  trong chuỗi  $a = (a_1, \dots, a_m)$  là quan trọng.

### Ví dụ 2:

Cho  $\Sigma = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ .

- Có bao nhiêu chuỗi  $w \in \Sigma^5$  ?
- Có bao nhiêu chuỗi  $w \in \Sigma^5$  mà các ký tự đều khác nhau ?

### Ví dụ 3:

Rô Nam Ở Rô tham gia chương trình Anh Trai Hay Sai. Anh ta có 3 cái quần, 5 cái áo, và 4 đôi giày. Hỏi anh ta có mấy cách phối đồ khác nhau ?

# Hoán vị (combinations) và tổ hợp (combinations)

## Định nghĩa

Cho  $S$  là một tập hợp hữu hạn có  $n$  phần tử.

- Một hoán vị của  $S$  là một dãy **có thứ tự** (order sequence) của các phần tử (không lặp lại) từ  $S$
- Một hoán vị có **kích thước  $r$**  là một dãy **có thứ tự** gồm  $r$  phần tử (không lặp lại) từ  $S$ .
- Một tổ hợp có **kích thước  $r$**  là một  $T \subset S$  với  $|T| = r$ .

Chúng ta dùng  $P(n, r)$  hoặc  $P_{n,r}$  để biểu thị tổng số hoán vị có kích thước  $r$  của một tập hợp có  $n$  phần tử.

Chúng ta dùng  $C(n, r)$  hoặc  $C_{n,r}$  để biểu thị tổng số tổ hợp có kích thước  $r$  của một tập hợp với  $n$  phần tử.

## Mệnh đề

Cho  $r \geq 0$  là một số nguyên. Ta có

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}, \quad P(n, n) = n!,$$
$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{P(n, r)}{r!}$$

**Chú ý** Ta định nghĩa  $P(n, r) = C(n, r) = 0$  cho  $r < 0$  hoặc  $r > n$ .

#### Ví dụ 4:

Có bao nhiêu cách để đi từ  $P$  đến  $Q$  trong sơ đồ sau ?

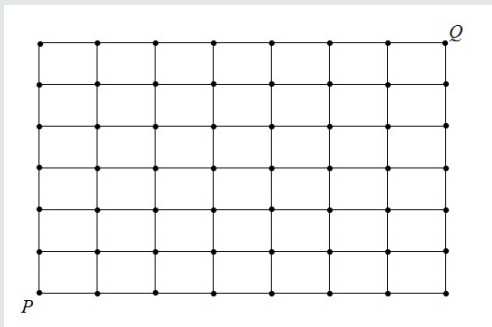


Figure 1: Hình từ trang web [All Math considered](#).

### Ví dụ 5:

- Vui và Buồn là hai bạn thân trong một nhóm 60 học sinh. Có bao nhiêu cách để chia những học sinh này vào hai lớp (mỗi lớp 30 học sinh) sao cho
  - Vui và Buồn được ở bên nhau ?
  - Vui và Buồn phải ở xa nhau ?
- Vui, Buồn, và Dũng Dưng có mặt ở một bữa tiệc cùng với 9 người khác. Mọi người dàn hàng ngang để chụp ảnh. Có bao nhiêu cách sắp xếp để cả ba bạn đứng cạnh nhau ?

## Vài mối quan hệ của số tổ hợp

Cho  $m, n \geq 1$  và  $r \geq 1$  là số nguyên. Ta có

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$
$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1} \quad (\text{tam giác Pascal}),$$

$$\binom{n}{r} = \sum_{k=r-1}^{n-1} \binom{k}{r-1},$$

$$\sum_{k=0}^r \binom{n}{k} \binom{m}{r-k} = \binom{n+m}{r} \quad (\text{đồng nhất thức Vandermonde}).$$

## Định lý (nhị thức Newton)

Cho  $x, y$  là hai số thực, và  $n \geq 1$  là một số nguyên. Ta có

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

## Định nghĩa (Tiên đề xác suất của Kolmogorov)

Cho  $\Omega$  là một tập hợp đếm được. Một hàm  $\mathbb{P}: 2^\Omega \mapsto [0, 1]$  được gọi là một độ đo (probability measure) trên  $\Omega$  nếu như  $\mathbb{P}$  thỏa mãn những tiên đề sau

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ .
- Nếu  $E_1, E_2, \dots$  là một chuỗi tập hợp con của  $\Omega$  với  $E_i \cap E_j = \emptyset$  cho mọi  $i \neq j$  thì

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \geq 1} E_i\right) = \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(E_i).$$

Từ những tiên đề xác suất của Kolmogorov ta có thể kết luận

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ .
- $\mathbb{P}(\bar{E}) = 1 - \mathbb{P}(E)$  cho mọi  $E \subset \Omega$ .
- $\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E \cap F)$  cho mọi  $E, F \subset \Omega$ .
- $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E \cap F) + \mathbb{P}(E \cap \bar{F})$  cho mọi  $E, F \subset \Omega$ .
- Nếu  $E_1, E_2, \dots$  thỏa mãn  $\bigcup_{i \geq 1} E_i = \Omega$  và  $E_i \cap E_j = \emptyset$  cho mọi  $i \neq j$  thì

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(A \cap E_i), \quad \text{cho mọi } A \subset \Omega.$$

### Ví dụ 6:

Một hệ thống có thể mắc ba dạng lỗi. Gọi  $A_i$  là sự cố lỗi dạng  $i$  cho  $i = 1, 2, 3$ . Giả sử ta có

$$\mathbb{P}(A_1) = 0.12, \quad \mathbb{P}(A_2) = 0.07, \quad \mathbb{P}(A_3) = 0.05$$

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = 0.13, \quad \mathbb{P}(A_1 \cup A_3) = 0.14, \quad \mathbb{P}(A_2 \cup A_3) = 0.1$$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0.01$$

Tìm xác suất hệ thống

- không có lỗi dạng 1.
- có cùng lúc lỗi dạng 1 và 2.
- có cùng lúc lỗi dạng 1 và 2 nhưng không có dạng 3.
- có tối đa hai dạng lỗi cùng một lúc

Nhiều bài toán xác suất cơ bản có dạng như sau.

- $\Omega$  là một tập hợp hữu hạn với  $\Omega \neq \emptyset$ .
- Tất cả  $\omega \in \Omega$  đều có xác suất  $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 1/|\Omega|$ .

Dựa trên những điều kiện trên ta kết luận

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}, \quad \text{cho mọi } A \subset \Omega.$$

## Ví dụ 7:

Bạn đang dự một bữa tiệc cùng với  $n - 1$  bạn học khác. Tính xác suất của việc có ít nhất hai người trong bữa tiệc có chung một ngày sinh nhật.

Gọi  $A_n$  là sự kiện (hoặc biến cố) tương ứng với sự tồn tại của ít nhất hai người có cùng ngày sinh nhật.

Tập hợp  $\Omega$  tượng trưng cho sinh nhật của cả  $n$  bạn trong lớp là

$$\Omega = \{(s_1, s_2, \dots, s_n) : s_i \in \{1, 2, \dots, 365\}\}.$$

Ta có thể viết  $A_n$  dưới dạng

$$A_n = \{(s_1, s_2, \dots, s_n) \in \Omega : s_i = s_j \text{ cho ít nhất một cặp } i \neq j\}.$$

Ta có thể định nghĩa

$$\mathbb{P}(A_n) = \frac{|A_n|}{|\Omega|}$$

nhưng không dễ để tính  $|A_n|$  trực tiếp

Thay vì thế ta sẽ tính  $\mathbb{P}(\bar{A}_n) = 1 - \mathbb{P}(A_n) = \frac{|\bar{A}_n|}{|\Omega|}$ .

Ta có

$$\bar{A}_n = \{(s_1, s_2, \dots, s_n) \in \Omega: s_i \neq s_j \text{ khi } i \neq j\}.$$

và suy ra

$$|\bar{A}_n| = 365 \times 364 \times \dots \times (365 - n + 1) = P(365, n)$$

Thêm nữa ta có  $|\Omega| = 365 \times 365 \times \dots = 365^n$ .

Kết luận ta có

$$\mathbb{P}(\bar{A}_n) = \frac{365 \times 364 \times \cdots \times (365 - n + 1)}{365^n} = \prod_{i=0}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{365}\right)$$

và thế là

$$\mathbb{P}(A_n) = 1 - \prod_{i=0}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{365}\right).$$

Một vài giá trị tiêu biểu

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_{20}) &\approx 0.41, & \mathbb{P}(A_{23}) &\approx 0.507, & \mathbb{P}(A_{30}) &\approx 0.7, \\ \mathbb{P}(A_{40}) &\approx 0.89, & \mathbb{P}(A_{50}) &\approx 0.97.\end{aligned}$$

## Mệnh đề

Cho  $\Omega$  là một tập hợp và  $\mathbb{P}$  là một độ đo trên  $\Omega$ . Cho  $E_1, E_2, \dots, E_n$  là tập hợp con của  $\Omega$ . Ta có

$$\mathbb{P}(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{S \subset \{1, 2, \dots, n\} \\ |S|=k}} (-1)^{k-1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in S} E_i\right),$$

### Ví dụ 8:

Trường hợp  $n = 3$  ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_1 \cup E_2 \cup E_3) &= \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) + \mathbb{P}(E_3) \\ &\quad - \mathbb{P}(E_1 \cap E_2) - \mathbb{P}(E_1 \cap E_3) - \mathbb{P}(E_2 \cap E_3) \\ &\quad + \mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3)\end{aligned}$$

Trường hợp  $n = 4$  ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4) &= \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) + \mathbb{P}(E_3) + \mathbb{P}(E_4) \\ &\quad - \mathbb{P}(E_1 \cap E_2) - \cdots - \mathbb{P}(E_3 \cap E_4) \\ &\quad + \mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3) + \cdots + \mathbb{P}(E_2 \cap E_3 \cap E_4) \\ &\quad - \mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4)\end{aligned}$$

### Ví dụ 9:

Có  $n$  người gửi mũ của họ cho một lễ tân khách sạn. Đến cuối ngày lễ tân đó trả lại mũ theo một thứ tự ngẫu nhiên. Tìm xác suất của việc không có người nào nhận lại được mũ của họ.

Đặt  $E_i$  là sự cố người số  $i$  lấy lại được mũ của họ.

Nếu  $|S| = k$  ta có

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in S} E_i\right) = \frac{(n-k)!}{n!}$$

Suy ra ta có

$$\sum_{\substack{S \subset \{1, 2, \dots, n\} \\ |S|=k}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in S} E_i\right) = \binom{n}{k} \times \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{k!}.$$

Kết luận ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{1}{k!} \\ &= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n}) &= 1 - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{1}{k!} \\ &= \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}.\end{aligned}$$

# Đặt đồ vật vào hộp

## Mệnh đề

Giả sử ta có  $n$  đồ vật *giống nhau* (indistinguishable) và muốn đặt vào  $k$  hộp *khác nhau* (distinguishable). Sẽ có tổng cộng

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$$

cách để làm việc đó.

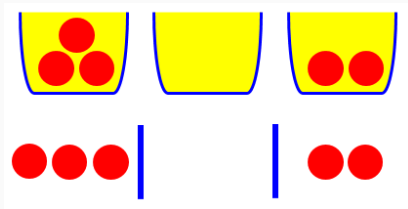


Figure 2: Hình từ trang web [Math Doctors](#).

### Ví dụ 10:

Trong một lớp có 4 bạn nữ là Xuân, Hạ, Thu, Đông, và 10 cái bánh bích qui.

- Có bao nhiêu cách để chia số bánh trên cho 4 bạn này ?
- Có bao nhiêu cách để chia số bánh trên cho 4 bạn này sao cho mỗi bạn có ít nhất một cái bánh ?

### Ví dụ 11:

Có bao nhiêu số điện thoại có 7 chữ số sao cho các chữ số đó theo thứ tự không đi lên ? Một ví dụ là 8876421.

### Ví dụ 12:

Có bao nhiêu cách chọn 5 tờ giấy bạc từ một két đựng tiền gồm những mệnh giá 1 nghìn, 2 nghìn, 5 nghìn, 10 nghìn, 20 nghìn, 50 nghìn, và 100 nghìn ? Giả sử thứ tự mà các tờ tiền được chọn là không quan trọng, các tờ tiền cùng loại là đều giống nhau, và mỗi loại có ít nhất 5 tờ.

### Ví dụ 13:

Có bao nhiêu hàm  $f \in \{1, 2, \dots, n\} \mapsto \{1, 2, \dots, m\}$  sao cho

- $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$  ?
- $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$  ?

## Mệnh đề

Cho  $S$  là một tập hợp với  $n$  phần tử. Một chia vùng có thứ tự của  $S$  thành  $k \geq 1$  vùng là một cách để chia  $S$  thành  $k$  tập hợp con  $S_1, S_2, \dots, S_k$  riêng biệt ( $S_i \cap S_j = \emptyset$  khi  $i \neq j$ ) với mỗi tập hợp có kích thước  $|S_k| = n_k$  ( $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ ). Số cách ta có thể chia là

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}.$$

### Ví dụ 14:

Một khóa học có 90 bạn học sinh.

- Có bao nhiêu cách để chia số bạn này thành 3 lớp, mỗi lớp có 30 bạn ?
- Trong nhóm này có ba bạn là Dài, Lê, và Thê. Có bao nhiêu cách để chia lớp (mỗi lớp 30 bạn) sao cho
  - 3 bạn này học chung một lớp ?
  - 3 bạn này đều học khác lớp ?

### Ví dụ 15:

Một mật khẩu được tạo ngẫu nhiên có 2 ký tự  $A$ , 3 ký tự  $C$ , 4 ký tự  $G$  và 2 ký tự  $T$ . Tính xác suất của việc mật khẩu đó có các ký tự như nhau xuất hiện ngay bên cạnh nhau (một ví dụ là  $AACCCGGGGTT$ ).

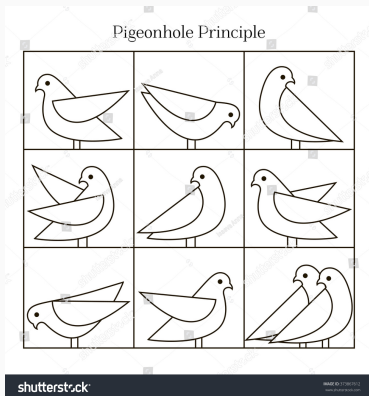
## Định lý (Định lý đa thức)

Cho  $n \geq 0$  và  $m \geq 1$  là những số nguyên. Ta có

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{(n_1, n_2, \dots, n_m)} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_m} \prod_{k=1}^m x_k^{n_k}.$$

## Mệnh đề

Nếu một tập hợp  $S$  được chia thành  $k$  tập hợp con thì có ít nhất một tập hợp con có tối thiểu  $\lceil |S|/k \rceil$  phần tử.



### Ví dụ 16:

Cho 3 số nguyên bất kỳ thì có ít nhất một cặp có tổng chẵn.

### Ví dụ 17:

Cho  $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$  là  $n + 1$  số nguyên bất kỳ trong khoảng  $1 \leq a_i \leq 2n$ . Chứng minh rằng có ít nhất hai số  $a_i$  và  $a_j$  với  $i \neq j$  sao cho  $a_i$  chia hết cho  $a_j$ .

### Ví dụ 18:

Giả sử trong một nhóm 6 người thì mỗi cặp hai người sẽ là bạn hoặc là kẻ thù. Chứng minh rằng có ba người đều là bạn của nhau hoặc có ba người đều là kẻ thù của nhau.

## Định lý (Erdős-Szekeres)

Cho  $a \geq 1$  và  $b \geq 1$  là hai số nguyên. Chứng minh rằng nếu  $(z_1, z_2, \dots, z_{ab+1})$  là một dãy số với  $ab + 1$  số thực bất kỳ khác nhau, thì sẽ tồn tại một **dãy con tăng** với chiều dài  $a + 1$  hoặc một **dãy con giảm** với chiều dài  $b + 1$ .

**Gợi ý** Đặt  $(x_i, y_i)$  là một cặp sao cho  $x_i$  là chiều dài của dãy số tăng dài nhất kết thúc với giá trị  $z_i$  và  $y_i$  là chiều dài của dãy số giảm dài nhất kết thúc với giá trị  $z_i$ .