Toán rời rạc (CE23101): Đáp án của kiểm tra giữa kỳ

2025-11-26

Bài 1 (2 điểm)

(a) Gỉa sử $p \Rightarrow q$ là `FALSE`. Tìm trị của (1) $p \vee q$, (2) $p \wedge q$, và (3) $q \Rightarrow p$.

(b) Chứng minh (prove) hoặc bác bỏ (disprove) mệnh đề sau

$$(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \iff \{(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow r)\}.$$

Chú ý Ký hiệu $\Rightarrow$ tượng trưng cho mối liên kết "implies", và ký hiệu $\iff$ tượng trưng cho mối liên kết "if and only if".

Đáp án Phần (a), $p \Rightarrow q = \neg p \vee q$. Vậy nếu $p \Rightarrow q$ là `FALSE` thì $\neg p$ là `FALSE` và q cũng là `FALSE`. Suy ra p là `TRUE`. Từ đó ta có

$$p \vee q = \texttt{TRUE}, \quad p \wedge q = \texttt{FALSE}, \quad q \rightarrow p = \neg q \vee p = \texttt{TRUE}$$

Phần (b) ta có thể lập bảng với 8 tổ hợp của các trị $p, q, r \in \{\texttt{TRUE}, \texttt{FALSE}\}$ để so sánh $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$ với $\{(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow r)\}$. Làm thế ta sẽ thấy, nếu $p = \texttt{FALSE}, q = \texttt{TRUE}$, và $r = \texttt{FALSE}$ thì

$$(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) = \texttt{FALSE} \Rightarrow \texttt{FALSE} = \texttt{TRUE}$$
$$\{(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow r)\} = \texttt{TRUE} \rightarrow \texttt{FALSE} = \texttt{FALSE}$$

Suy ra mệnh đề được cho là sai.

Bài 2 (2 điểm)

(a) Dùng giải thuật Euclid, tìm `gcd` (ước số chung lớn nhất) của hai số 143 và 195.

(b) Tìm `lcm` (bội số chung nhỏ nhất) của hai số 35 và 98.

Đáp án Phần (a) ta có những bước như sau

$$\begin{aligned}
\gcd(195, 143) &= \gcd(143, 52) \qquad (195 \mod 143 = 52) \\
&= \gcd(52, 39) \qquad (143 \mod 52 = 39) \\
&= \gcd(39, 13) \qquad (52 \mod 39 = 13) \\
&= \gcd(13, 0) \qquad (39 \mod 13 = 0)
\end{aligned}$$

Suy ra $\gcd(195, 143) = 13$.

Phần (b) ta có thể tính $\gcd(98, 35) = 7$ và vì thế

$$\text{lcm}(35, 98) = \frac{35 \times 98}{\gcd(35, 98)} = 490$$

Bài 3 (3 điểm)

(a) Cho $\mathbf{A}$ là ma trận như sau

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Tìm ma trận đảo nghịch $\mathbf{A}^{-1}$ của $\mathbf{A}$ bằng các phép biến đổi dòng (row operations).

(b) Tính giá trị của $17^{10} \mod 15$.

Đáp án Phần (a) ta có những bước như sau

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad (r_1 \leftarrow r_1 - r_2,\ r_3 \leftarrow r_3 - 2r_2)$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad (r_1 \leftarrow r_1 - 3r_3,\ r_2 \leftarrow r_2 - r_3)$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad (r_1 \leftarrow \tfrac{1}{3}r_1,\ r_3 = -r_3)$$

Suy ra

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Phần (b) ta có

$$\begin{aligned} 17 \mod 15 &= 2 \\ 17^2 \mod 15 &= 2^2 \mod 15 = 4 \\ 17^4 \mod 15 &= 4^2 \mod 15 = 1 \end{aligned}$$

Từ đó ta có $17^m \mod 15 = 1$ cho mọi $m = 2^k, k \geq 2$. Vậy $17^8 \mod 15 = 1$. Suy ra

$$17^{10} \mod 15 = ((17^8 \mod 15) \times (17^2 \mod 15)) \mod 15 = 4.$$

Bài 4 (3 điểm)

(a) Cho $h > -1$. Chứng minh rằng, cho mọi số nguyên $n \geq 1$, ta có

$$(1+h)^n \geq 1 + nh.$$

(b) Cho T là một hàm định nghĩa cho số nguyên $n \geq 1$ như sau:

$$\begin{aligned} T(1) &= T(2) = 1, \\ T(n) &= 2T(\lfloor n/3 \rfloor), \quad \text{cho } n \geq 3 \end{aligned}$$

Tính giá trị của $T(91)$. Mối quan hệ $n \in O(T(n))$ đúng hay sai ?

Đáp án Phần (a) ta sẽ dùng quy tắc quy nạp. Bước cơ sở $n = 1$ ta có

$$(1+h)^1 = 1 + h$$

Giả sử mệnh đề đúng cho $n \geq 1$. Từ đó suy ra

$$(1+h)^{n+1} = (1+h)^n \times (1+h) \geq (1+nh) \times (1+h) = 1 + nh + h + nh^2 \geq 1 + (n+1)h.$$

Vậy ta có thể kết luận là $(1+h)^n \geq 1 + nh$ cho mọi $n \geq 1$.

Phần (b) ta có

$$T(91) = 2T(30) = 4T(10) = 8T(3) = 16T(1) = 16.$$

Giả sử $n = 3^k$ cho một số nguyên $k \geq 1$. Ta có

$$T(3^k) = 2T(3^{k-1}) = 4T(3^{k-2}) = \cdots = 2^k T(1) = 2^k.$$

Vì $2^k/3^k \to 0$ khi $k \to \infty$, ta kết luận mối quan hệ $n \in O(T(n))$ là sai.