Toàn rời rạc (CE23101)

Đếm và xác suất

Đếm là gì ?

Hỏi tên: Rằng biển xanh dâu
Hỏi quê: Rằng mộng ban đầu đã xa
Gọi tên là một hai ba
Đếm là diệu tưởng, đo là nghi tâm

– Bùi Giáng

2

Vài ví dụ căn bản

Ví dụ 1:

Cho $S = \{1, 2, \dots, 1000\}$. S chứa

- bao nhiêu số chẵn ?
- bao nhiêu số chia hết cho 3 ?
- bao nhiêu số chia hết cho 3 và 5 ?
- bao nhiêu số chia hết cho 3 hoặc của 5 ?

3

Vài nguyên tắc cơ bản

Cho S và T là hai tập hợp hữu hạn.

Định nghĩa $|S|$ là số phần tử thuộc S.

- $|S \cup T| = |S| + |T| - |S \cap T|$.
- Nếu S và T rời nhau ($S \cap T = \emptyset$) thì $|S \cup T| = |S| + |T|$.
- $|S| = |S \cap T| + |S \cap \bar{T}|$.
- Nếu $T \subseteq S$ thì $|S \setminus T| = |S| - |T|$.

Nguyên tắc nhân

Mệnh đề

Giả sử A là một tập hợp mà các phần tử $a \in A$ có dạng $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$, Nếu ta có n_i lựa chọn cho a_i, cho mỗi $i = 1, 2, \ldots, m$, thì

$$|A| = n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_m$$

Chú ý: Thứ tự của a_i trong chuỗi $a = (a_1, \ldots, a_m)$ là quan trọng.

Ví dụ 2:

Cho $\mathbf{\Sigma} = \{a, b, c, d, e, f, g\}$.

- Có bao nhiêu chuỗi $w \in \mathbf{\Sigma}^5$?
- Có bao nhiêu chuỗi $w \in \mathbf{\Sigma}^5$ mà các ký tự đều khác nhau ?

Ví dụ 3:

Rô Nam Ơ Rô tham gia chương trình Anh Trai Hay Sai. Anh ta có 3 cái quần, 5 cái áo, và 4 đôi giày. Hỏi anh ta có mấy cách phối đồ khác nhau ?

Hoán vị (combinations) và tổ hợp (combinations)

Định nghĩa

Cho S là một tập hợp hữu hạn có n phần tử .

- Một hoán vị của S là một dãy có thứ tự (order sequence) của các phần tử (không lập lại) từ S
- Một hoán vị có kích thước r là một dãy có thứ tự gồm r phần tử (không lập lại) từ S.
- Một tổ hợp có kích thước r là một $T \subset S$ với $|T| = r$.

Chúng ta dùng $P(n, r)$ hoặc $P_{n,r}$ để biểu thị tổng số hoán vị có kích thước r của một tập hợp có n phần tử.

Chúng ta dùng $C(n, r)$ hoặc $C_{n,r}$ để biểu thị tổng số tổ hợp có kích thước r của một tập hợp với n phần tử.

Mệnh đề

Cho $r \geq 0$ là một số nguyên. Ta có

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}, \quad P(n,n) = n!,$$
$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{P(n,r)}{r!}$$

Chú ý Ta định nghĩa $P(n,r) = C(n,r) = 0$ cho $r < 0$ hoặc $r > n$.

8

Ví dụ 4:

Có bao nhiêu cách để đi từ P đến Q trong sơ đồ sau ?

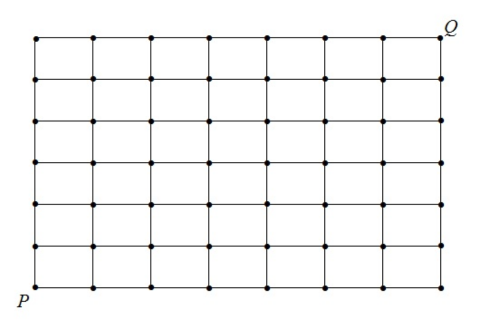


Figure 1: Hình từ trang web All Math considered.

Ví dụ 5:

- Vui và Buồn là hai bạn thân trong một nhóm 60 học sinh. Có bao nhiêu cách để chia những học sinh này vào hai lớp (mỗi lớp 30 học sinh) sao cho
  - Vui và Buồn được ở bên nhau ?
  - Vui và Buồn phải ở xa nhau ?
- Vui, Buồn, và Dửng Dưng có mặt ở một bữa tiệc cùng với 9 người khác. Mọi người dàn hàng ngang để chụp ảnh. Có bao nhiêu cách sắp xếp để cả ba bạn đứng cạnh nhau ?

Vài mối quan hệ của số tổ hợp

Cho $m, n \geq 1$ và $r \geq 1$ là số nguyên. Ta có

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1} \qquad \text{(tam giác Pascal)},$$

$$\binom{n}{r} = \sum_{k=r-1}^{n-1} \binom{k}{r-1},$$

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r} = \binom{n+m}{r} \qquad \text{(đồng nhất thức Vandermonde)}.$$

11

Định lý (nhị thức Newton)

Cho x, y là hai số thực, và $n \geq 1$ là một số nguyên. Ta có

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

12

Xác Suất Cơ Sở

Định nghĩa (Tiên đề xác suất của Kolmogorov)

Cho Ω là một tập hợp đếm được. Một hàm $\mathbb{P}\colon 2^{\Omega} \mapsto [0,1]$ được gọi là một độ đo (probability measure) trên Ω nếu như $\mathbb{P}$ thỏa mãn những tiên đề sau

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- Nếu $E_1, E_2, \ldots$ là một chuỗi tập hợp con của Ω với $E_i \cap E_j = \emptyset$ cho mọi $i \neq j$ thì

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i\geq 1} E_i\Big) = \sum_{i\geq 1} \mathbb{P}(E_i).$$

13

Từ những tiên đề xác suất của Kolmogorov ta có thể kết luận

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- $\mathbb{P}(\bar{E}) = 1 - \mathbb{P}(E)$ cho mọi $E \subset \Omega$.
- $\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E \cap F)$ cho mọi $E, F \subset \Omega$.
- $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E \cap F) + \mathbb{P}(E \cap \bar{F})$ cho mọi $E, F \subset \Omega$.
- Nếu $E_1, E_2, \ldots$ thỏa mãn $\bigcup_{i \geq 1} E_i = \Omega$ và $E_i \cap E_j = \emptyset$ cho mọi $i \neq j$ thì

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(A \cap E_i), \quad \text{cho mọi } A \subset \Omega.$$

14

Ví dụ 6:

Một hệ thống có thể mắc ba dạng lỗi. Gọi A_i là sự cố lỗi dạng i cho $i = 1, 2, 3$. Giả sử ta có

$$\mathbb{P}(A_1) = 0.12, \quad \mathbb{P}(A_2) = 0.07, \quad \mathbb{P}(A_3) = 0.05$$
$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = 0.13, \quad \mathbb{P}(A_1 \cup A_3) = 0.14, \quad \mathbb{P}(A_2 \cup A_3) = 0.1$$
$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0.01$$

Tìm xác suất hệ thống

- không có lỗi dạng 1.
- có cùng lúc lỗi dạng 1 và 2.
- có cùng lúc lỗi dạng 1 và 2 nhưng không có dạng 3.
- có tối đa hai dạng lỗi cùng một lúc

Nhiều bài toán xác suất cơ bản có dạng như sau.

- Ω là một tập hợp hữu hạn với $\Omega \neq \emptyset$.
- Tất cả $\omega \in \Omega$ đều có xác suất $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 1/|\Omega|$.

Dựa trên những điều kiện trên ta kết luận

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}, \quad \text{cho mọi } A \subset \Omega.$$

Bài toán sinh nhật

Ví dụ 7:

Bạn đang dự một bữa tiệc cùng với $n - 1$ bạn học khác. Tính xác suất của việc có ít nhất hai người trong bữa tiệc có chung một ngày sinh nhật.

Gọi A_n là sự kiện (hoặc biến cố) tương ứng với sự tồn tại của ít nhất hai người có cùng ngày sinh nhật.

Tập hợp Ω tượng trưng cho sinh nhật của cả n bạn trong lớp là

$$\Omega = \{(s_1, s_2, \ldots, s_n) \colon s_i \in \{1, 2, \ldots, 365\}\}.$$

Ta có thể viết A_n dưới dạng

$$A_n = \{(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \Omega \colon s_i = s_j \text{ cho ít nhất một cặp } i \neq j\}.$$

18

Ta có thể định nghĩa

$$\mathbb{P}(A_n) = \frac{|A_n|}{|\Omega|}$$

nhưng không dễ để tính $|A_n|$ trực tiếp

Thay vì thế ta sẽ tính $\mathbb{P}(\bar{A}_n) = 1 - \mathbb{P}(A_n) = \frac{|\bar{A}_n|}{|\Omega|}$.

Ta có

$$\bar{A}_n = \{(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \Omega \colon s_i \neq s_j \text{ khi } i \neq j\}.$$

và suy ra

$$|\bar{A}_n| = 365 \times 364 \times \cdots \times (365 - n + 1) = P(365, n)$$

Thêm nữa ta có $|\Omega| = 365 \times 365 \times \cdots = 365^n$.

Kết luận ta có

$$\mathbb{P}(\bar{A}_n) = \frac{365 \times 364 \times \cdots \times (365 - n + 1)}{365^n} = \prod_{i=0}^{n-1}\Big(1 - \frac{i}{365}\Big)$$

và thế là

$$\mathbb{P}(A_n) = 1 - \prod_{i=0}^{n-1}\Big(1 - \frac{i}{365}\Big).$$

Một vài giá trị tiêu biểu

$$\mathbb{P}(A_{20}) \approx 0.41, \quad \mathbb{P}(A_{23}) \approx 0.507, \quad \mathbb{P}(A_{30}) \approx 0.7,$$
$$\mathbb{P}(A_{40}) \approx 0.89, \quad \mathbb{P}(A_{50}) \approx 0.97.$$

Mệnh đề

Cho Ω là một tập hợp và $\mathbb{P}$ là một độ đo trên Ω. Cho $E_1, E_2, \ldots, E_n$ là tập hợp con của Ω. Ta có

$$\mathbb{P}(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{S \subset \{1,2,\ldots,n\} \\ |S|=k}} (-1)^{k-1} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{i \in S} E_i\Big),$$

Ví dụ 8:

Trường hợp $n = 3$ ta có

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E_1 \cup E_2 \cup E_3) &= \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) + \mathbb{P}(E_3) \\
&- \mathbb{P}(E_1 \cap E_2) - \mathbb{P}(E_1 \cap E_3) - \mathbb{P}(E_2 \cap E_3) \\
&+ \mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3)
\end{aligned}$$

Trường hợp $n = 4$ ta có

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4) &= \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) + \mathbb{P}(E_3) + \mathbb{P}(E_4) \\
&- \mathbb{P}(E_1 \cap E_2) - \cdots - \mathbb{P}(E_3 \cap E_4) \\
&+ \mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3) + \cdots + \mathbb{P}(E_2 \cap E_3 \cap E_4) \\
&- \mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4)
\end{aligned}$$

Ví dụ 9:

Có n người gửi mũ của họ cho một lễ tân khách sạn. Đến cuối ngày lễ tân đó trả lại mũ theo một thứ tự ngẫu nhiên. Tìm xác suất của việc không có người nào nhận lại được mũ của họ.

Đặt E_i là sự cố người số i lấy lại được mũ của họ.

Nếu $|S| = k$ ta có

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i \in S} E_i\Big) = \frac{(n-k)!}{n!}$$

Suy ra ta có

$$\sum_{\substack{S \subset \{1,2,\ldots,n\} \\ |S|=k}} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{i \in S} E_i\Big) = \binom{n}{k} \times \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{k!}.$$

Kết luận ta có

$$\mathbb{P}(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k!}$$
$$= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!},$$

$$\mathbb{P}(\overline{E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n}) = 1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k!}$$
$$= \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^{n} \frac{1}{n!}.$$

24

Đặt đồ vật vào hộp

Mệnh đề

Giả sử ta có n đồ vật giống nhau (indistinguishable) và muốn đặt vào k hộp khác nhau (distinguishable). Sẽ có tổng cộng

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$$

cách để làm việc đó.

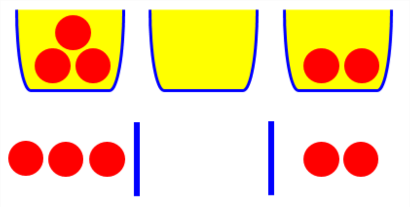


Figure 2: Hình từ trang web Math Doctors.

Ví dụ 10:

Trong một lớp có 4 bạn nữ là Xuân, Hạ, Thu, Đông, và 10 cái bánh bích qui.

- Có bao nhiêu cách để chia số bánh trên cho 4 bạn này ?
- Có bao nhiêu cách để chia số bánh trên cho 4 bạn này sao cho mỗi bạn có ít nhất một cái bánh ?

Ví dụ 11:

Có bao nhiêu số điện thoại có 7 chữ số sao cho các chữ số đó theo thứ tự không đi lên ? Một ví dụ là 8876421.

26

Ví dụ 12:

Có bao nhiêu cách chọn 5 tờ giấy bạc từ một két đựng tiền gồm những mệnh giá 1 nghìn, 2 nghìn, 5 nghìn, 10 nghìn, 20 nghìn, 50 nghìn, và 100 nghìn ? Giả sử thứ tự mà các tờ tiền được chọn là không quan trọng, các tờ tiền cùng loại là đều giống nhau, và mỗi loại có ít nhất 5 tờ.

Ví dụ 13:

Có bao nhiều hàm $f \in \{1, 2, \ldots, n\} \mapsto \{1, 2, \ldots, m\}$ sao cho

- $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$?
- $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$?

27

Hệ số đa thức

Mệnh đề

Cho $\mathcal{S}$ *là một tập hợp với* n *phần tử. Một chia vùng có thứ tự của* $\mathcal{S}$ *thành* $k \geq 1$ *vùng là một cách để chia* $\mathcal{S}$ *thành* k *tập hợp con* $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \ldots \mathcal{S}_k$ *riêng biệt* ($\mathcal{S}_i \cap \mathcal{S}_j = \emptyset$ *khi* $i \neq j$) *với mỗi tập hợp có kích thước* $|\mathcal{S}_k| = n_k$ ($n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$)*. Số cách ta có thể chia là*

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}.$$

28

Ví dụ 14:

Một khóa học có 90 bạn học sinh.

- Có bao nhiêu cách để chia số bạn này thành 3 lớp, mỗi lớp có 30 bạn ?
- Trong nhóm này có ba bạn là Dài, Lê, và Thê. Có bao nhiêu cách để chia lớp (mỗi lớp 30 bạn) sao cho
    - 3 bạn này học chung một lớp ?
    - 3 bạn này đều học khác lớp ?

Ví dụ 15:

Một mật khẩu được tạo ngẫu nhiên có 2 ký tự A, 3 ký tự C, 4 ký tự G và 2 ký tự T. Tính xác suất của việc mật khẩu đó có các ký tự như nhau xuất hiện ngay bên cạnh nhau (một ví dụ là $AACCCGGGGTT$).

Định lý (Định lý đa thức)

Cho $n \geq 0$ và $m \geq 1$ là những số nguyên. Ta có

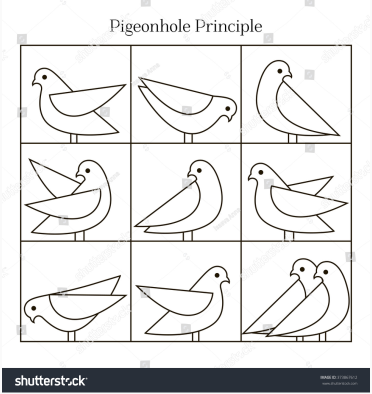
$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{(n_1, n_2, \ldots, n_m)} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_m} \prod_{k=1}^{m} x_k^{n_k}.$$

30

Nguyên lý chim bồ câu

Mệnh đề

Nếu một tập hợp S được chia thành k tập hợp con thì có ít nhất một tập hợp con có tối thiểu $\lceil |S|/k \rceil$ phần tử.



Ví dụ 16:

Cho 3 số nguyên bất kỳ thì có ít nhất một cặp có tổng chẵn.

Ví dụ 17:

Cho $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ là $n+1$ số nguyên bất kỳ trong khoảng $1 \leq a_i \leq 2n$. Chứng minh rằng có ít nhất hai số a_i và a_j với $i \neq j$ sao cho a_i chia hết cho a_j.

Ví dụ 18:

Giả sử trong một nhóm 6 người thì mỗi cặp hai người sẽ là bạn hoặc là kẻ thù. Chứng minh rằng có ba người đều là bạn của nhau hoặc có ba người đều là kẻ thù của nhau.

32

Định lý (Erdős-Szekeres)

Cho $a \geq 1$ *và* $b \geq 1$ *là hai số nguyên. Chứng minh rằng nếu* $(z_1, z_2, \ldots, z_{ab+1})$ *là một dãy số với* $ab+1$ *số thực bất kỳ khác nhau, thì sẽ tồn tại một dãy con tăng với chiều dài* $a+1$ *hoặc một dãy con giảm với chiều dài* $b+1$.

Gợi ý Đặt (x_i, y_i) là một cặp sao cho x_i là chiều dài của dãy số tăng dài nhất kết thúc với giá trị z_i và y_i là chiều dài của dãy số giảm dài nhất kết thúc với giá trị z_i.

33

Xác suất có điều kiện

Định nghĩa

Cho Ω là một tập hợp rời rạc và $\mathbb{P}$ là một độ đo trên Ω. Giả sử $S \subset \Omega$ thỏa mãn $\mathbb{P}(S) > 0$. Ta có thể định nghĩa một độ đo trên S bằng biểu thức

$$\mathbb{P}(A \mid S) = \frac{\mathbb{P}(A \cap S)}{\mathbb{P}(S)}, \quad \text{cho mọi } A \subset \Omega.$$

$\mathbb{P}(A \mid S)$ được gọi là xác suất của biến cố A với điều kiện là biến cố S xảy ra.

34

Ví dụ 19:

Cho Ω là tập hợp gắn với việc lắc một con xúc xắc có 6 mặt công bằng.

Gọi A là biến cố mặt xuất hiện là số 1 và B là biến cố mặt xuất hiện là số lẻ.

Ta có

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(\{1\})}{\mathbb{P}(\{1, 3, 5\})} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(\{1\})}{\mathbb{P}(\{1\})} = 1$$

Chú ý $\mathbb{P}(A \mid B)$ và $\mathbb{P}(B \mid A)$ có thể khác nhau.

35

Ví dụ 20:

Giả sử ta có một bảng tham chiếu chéo như sau

Trạng thái	Có tiếp xúc	Không tiếp xúc	Tổng hàng
Có bệnh	a	b	$a+b$
Không có bệnh	c	d	$c+d$
Tổng cột	$a+c$	$b+d$	

Gọi B là sự cố một người ngẫu nhiên có tiếp xúc với một chất lây truyền và A là sự cố một người ngẫu nhiên ngã bệnh. Từ bảng tham chiếu trên ta có

$$\mathbb{P}(A) = \frac{a+b}{a+b+c+d}; \quad \mathbb{P}(B) = \frac{a+c}{a+b+c+d};$$

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{a}{a+c} = \left(\frac{a}{a+b+c+d}\right) / \left(\frac{a+c}{a+b+c+d}\right)$$

36

$\mathbb{P}(\cdot \mid S)$ thỏa mãn các tiên đề của Kolmogorov.

- $\mathbb{P}(\Omega \mid S) = \mathbb{P}(S \mid S) = 1$.
- Nếu $E_1, E_2, \ldots$ là một chuỗi tập hợp con của Ω với $E_i \cap E_j = \emptyset$ khi $i \neq j$ thì

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i \geq 1} E_i \mid S\Big) = \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(E_i \mid S).$$

37

Quy luật nhân cho xác suất có điều kiện

Mệnh đề

Cho Ω *là một tập hợp rời rạc và* $\mathbb{P}$ *là một độ đo trên* Ω*. Ta có*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \mid B) \times P(B), \quad \text{cho mọi } A, B \subset \Omega \text{ với } \mathbb{P}(B) > 0.$$

Ở mức độ rộng hơn nếu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *là tập hợp con của* Ω *với* $\mathbb{P}(A_j) > 0$ *cho* $j \geq 2$ *thì*

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_n) \times \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_i \mid A_{i+1} \cap A_{i+2} \cap \cdots \cap A_n).$$

38

Ví dụ 21:

Cho các giá trị sau đây

$$\mathbb{P}(A) = 0.75, \quad \mathbb{P}(B \mid A) = 0.9, \quad \mathbb{P}(B \mid \bar{A}) = 0.8$$
$$\mathbb{P}(C \mid A \cap B) = 0.8, \quad \mathbb{P}(C \mid A \cap \bar{B}) = 0.6$$
$$\mathbb{P}(C \mid \bar{A} \cap B) = 0.7, \quad \mathbb{P}(C \mid \bar{A} \cap \bar{B}) = 0.3$$

Tính

- $\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$
- $\mathbb{P}(B \cap C)$
- $\mathbb{P}(C)$

39

Mệnh đề

Cho Ω là một tập hợp rời rạc với độ đo $\mathbb{P}$. Giả sử $E_1, \ldots, E_n$ là một phân hoạch của Ω. Ta có, cho mọi $A \subset \Omega$,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap E_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \mid E_i) \times \mathbb{P}(E_i) \quad \textit{(tổng xác suất)},$$

$$\mathbb{P}(E_i \mid A) = \frac{\mathbb{P}(E_i \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A \mid E_i) \times \mathbb{P}(E_i)}{\sum_j \mathbb{P}(A \mid E_j) \times P(E_j)} \quad \textit{(Bayes)}.$$

Ví dụ 22:

Một mặt hàng được sản xuất bởi ba chiếc máy, M_1, M_2, and M_3. Tỷ lệ số sản phẩm sản xuất từ máy M_1, M_2 và M_3 là 50%, 30% và 20%. Giả sử 4%, 2%, và 4% số sản phẩm tạo ra từ máy M_1, M_2 và M_3 sẽ không đạt chuẩn.

- Tính xác suất việc một sản phẩm bất kỳ không đạt chuẩn.
- Tính xác suất của việc một sản phẩm bất kỳ không đạt chuẩn nếu như ta biết sản phẩm đó được sản xuất bởi máy M_1.

Ví dụ 23:

Một căn bệnh đương lan truyền rất nhanh. Giả sử xấp xỉ 2% dân số VN có căn bệnh này. Một bác sĩ nghiên cứu ra một xét nghiệm T để chuẩn đoán căn bệnh. Giả sử T có kết quả dương tính 95% nếu người xét nghiệm có bệnh, và kết quả âm tính 99% khi người xét nghiệm không có bệnh. Một người ngẫu nhiên được chọn để xét nghiệm và kết quả là dương tính. Tính xác suất người đó thực sự có bệnh.

Ví dụ 24:

Ánh và Bánh đương tham gia chò trơi cá độ. Cho mỗi lượt chơi một đồng xu được tung lên và nếu đồng xu hiện mặt cười thì Bánh trả Ánh một \$, còn nếu hiện mặt khóc thì Ánh trả Bánh một \$. Gọi $p \in (0, 1)$ là xác suất đồng xu hiện mặt cười trong mỗi lượt tung. Ánh bắt đầu với a\$ và Bánh bắt đầu với b\$. Chò trơi kết thúc khi một người phá sản. Tính xác suất của việc Ánh phá sản.

43

Đặt A_k là biến cố Ánh phá sản khi cô ta có k\$. Gọi E là biến cố đồng xu hiện mặt cười cho một lượt chơi bất kỳ. Ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_k) &= \mathbb{P}(A_k \cap E) + \mathbb{P}(A_k \cap \bar{E}) \\ &= \mathbb{P}(A_k \mid E) \times \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(A_k \mid \bar{E}) \times \mathbb{P}(\bar{E}) \\ &= \mathbb{P}(A_{k+1}) \times p + \mathbb{P}(A_{k-1}) \times (1-p).\end{aligned}$$

Đặt $f_k = \mathbb{P}(A_k)$ và $n = a + b$. Ta có phương trình hồi quy

$$f_k = p f_{k+1} + (1-p) f_{k-1}, \quad f_0 = 1,\ f_n = 0.$$

Suy ra ta có

$$p(f_{k+1} - f_k) = (1-p)(f_k - f_{k-1}).$$

Gọi $r = \frac{1-p}{p}$ và $s_k = f_{k+1} - f_k$. Ta có $s_k = rs_{k-1}$ cho $k \geq 2$ và

$$\begin{aligned} f_k &= f_0 + (f_1 - f_0) + (f_2 - f_1) + \cdots + (f_k - f_{k-1}) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{k} s_i = 1 + \sum_{i=1}^{k} r^{i-1} s_1. \end{aligned}$$

Nếu $p = 1/2$ thì $r = 1$ và

$$f_k = 1 + ks_1$$

Dùng giá trị $f_n = 0$ ta có

$$s_1 = -1/n \Longrightarrow f_k = 1 - k/n = (n-k)/n$$

45

Nếu $p \neq 1/2$ thì

$$f_k = 1 + \frac{r^k - 1}{r - 1} s_1.$$

Dùng giá trị $f_n = 0$ ta có

$$s_1 = \frac{r-1}{1-r^n} \Longrightarrow f_k = 1 + \frac{r^k - 1}{1 - r^n} = \frac{r^k - r^n}{1 - r^n}.$$

46

Ví dụ 25:

Một người quản lý cần tuyển thư ký tốt nhất trong n ứng viên có thể xếp hạng. Các ứng viên được phỏng vấn lần lượt theo một thứ tự ngẫu nhiên. Quyết định cho mỗi ứng viên phải được đưa ra ngay sau khi phỏng vấn ứng viên đó. Sau khi đã bị từ chối, ứng viên đó sẽ không thể được tuyển. Trong quá trình phỏng vấn, người quản lý có thể xếp hạng các ứng viên đã phỏng vấn nhưng không biết gì về chất lượng của các ứng viên chưa phỏng vấn. Làm thế nào để tối ưu hóa xác suất tuyển được ứng viên tốt nhất ?

Độc lập của hai biến cố

Định nghĩa

Cho Ω là một tập hợp rời rạc và $\mathbb{P}$ là một độ đo cho Ω. Hai biến cố $A, B \subset \Omega$ được gọi là độc lập khi và chỉ khi

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \tag{1}$$

Biến cố A, B được gọi là phụ thuộc nếu chúng không độc lập.

Chú ý Nếu $\mathbb{P}(A) > 0$ thì Eq. (1) tương đương với

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B).$$

và nếu $\mathbb{P}(B) > 0$ thì Eq. (1) tương đương với

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A).$$

Chú ý Độc lập giữa A và B khác hoàn toàn với $A \cap B = \emptyset$.

Chính xác là nếu $A \cap B = \emptyset$ thì $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$. Để cho A độc lập đối với B ta cũng cần

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 0 = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

và suy ra ta phải có $\mathbb{P}(A) = 0$ hoặc $\mathbb{P}(B) = 0$.

Nói cách khác, nếu $A \cap B = \emptyset$ thì B xảy ra nghĩa là A không thể xảy ra, tức là $\mathbb{P}(A \mid B) = 0$.

Trong khi đó, nếu A và B độc lập thì việc B xảy ra không thay đổi xác suất của A, tức là $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$.

Ví dụ 26:

Có ba thương hiệu cà phê, gọi là X, Y, and Z. Ba thương hiệu này sẽ được đánh giá bởi một ban giám khảo. Gọi

- A: X được đánh giá cao hơn Y
- B: X được đánh giá cao nhất.
- C: X được đánh giá cao nhì.
- D: X được đánh giá thấp nhất.

Giả sử những hoán vị của các thứ tự của $\{X, Y, Z\}$ đều có xác suất như nhau. Ta có thể kết luận

$$\mathbb{P}(A) = P(\{(X, Y, Z), (X, Z, Y), (Z, X, Y)\}) = 1/2$$
$$\mathbb{P}(A \mid B) = 1, \quad \mathbb{P}(A \mid C) = 1/2, \quad \mathbb{P}(A \mid D) = 0.$$

Suy ra A và C độc lập, A phụ thuộc B cũng như A phụ thuộc D.

50

Mệnh đề

Nếu A và B là hai biến cố độc lập thì

- *A và $\bar{B}$ cũng là biến cố độc lập*
- *$\bar{A}$ và B cũng là biến cố độc lập*
- *$\bar{A}$ và $\bar{B}$ cũng là biến cố độc lập*

51

Độc lập của $n \geq 2$ biến cố

Định nghĩa

Cho Ω là một tập hợp rời rạc và $\mathbb{P}$ là một độ đo. Giả sử $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là những tập hợp con của Ω. Ta gọi $\{A_i\}$ là độc lập lẫn nhau nếu, cho mọi $S \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ với $S \neq \emptyset$, ta có

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i \in S} A_i) = \prod_{i \in S} \mathbb{P}(A_i)$$

Ví dụ 27:

A_1, A_2, và A_3 độc lập lẫn nhau khi và chỉ khi

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2), \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_3),$$
$$\mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_3);$$
$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_3)$$

Ví dụ 28:

Chúng ta ném, tổng cộng hai lần, một đồng xu công băng với hai mặt H và T. Cho A, B, C là những biến cố như sau

- A: Lần ném đầu tiên ta thấy mặt H.
- B: Lần ném thứ hai ta thấy mặt H.
- C: Cả hai lần ném đều xuất hiện cùng một mặt.

Ta có $C = \{HH, TT\}$ và $\mathbb{P}(C) = 1/2$. Từ đó suy ra

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = P(\mathbb{P} \cap C) = 1/4$$
$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 1/4 \neq \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C)$$

A, B và C là độc lập theo cặp nhưng không độc lập lẫn nhau.

53

Ví dụ 29:

Giả sử Lưu và Ly có ba xe máy và mỗi buổi sáng những chiếc xe này khởi động được là biến cố độc lập lẫn nhau với xác suất là $0.9, 0.95$ and 0.99.

Gọi A_i là biến cố chiếc xe số i khởi động được

Xác suất cả bả xe khởi động được là

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0.9 \times 0.95 \times 0.99 = 0.84645.$$

Xác suất cả ba xe đều hỏng là

$$\mathbb{P}(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) = (1 - 0.9) \times (1 - 0.95) \times (1 - 0.99) = 0.0005$$

Xác suất ít nhất một xe khởi động được là

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) = 0.99995$$

54

Xác suất của việc chỉ có một xe khởi động được là

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{chỉ có 1}) &= \mathbb{P}(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) + \mathbb{P}(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) + \mathbb{P}(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) \\ &= 0.9 \cdot 0.05 \cdot 0.01 + 0.1 \cdot 0.95 \cdot 0.01 + 0.1 \cdot 0.05 \cdot 0.99 \\ &= 0.00635.\end{aligned}$$

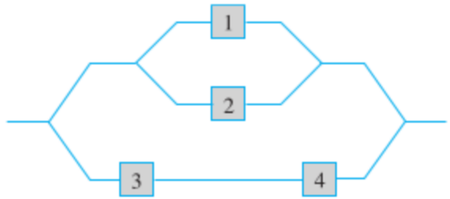
Xác suất của việc chỉ có hai xe khởi động được là

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{chỉ có 2}) &= \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= 0.9 \cdot 0.95 \cdot 0.01 + 0.9 \cdot 0.05 \cdot 0.99 + 0.1 \cdot 0.95 \cdot 0.99 \\ &= 0.14715.\end{aligned}$$

55

Ví dụ 30:

Có một hệ thống T với 4 bộ phận $\{C_i\}_{i=1}^4$ như hình sau đây. C_1 và C_2 tạo thành một hệ thống con S_1, và chỉ cần một trong hai bộ phận này hoạt động thì S_1 sẽ hoạt động. C_3 và C_4 cũng tạo thành một hệ thống con S_2 nhưng cả hai bộ phận này phải hoạt động thì S_2 mới hoạt động. T hoạt động nếu S_1 và S_2 cùng hoạt động. Giả sử các bộ phận là độc lập lẫn nhau, xác suất bộ phận C_1 và C_2 hoạt động là $p_1 = p_2 = 0.8$, xác suất bộ phận C_3 và C_4 hoạt động là $p_3 = p_4 = 0.9$. Tính xác suất hệ thống T hoạt động.



56