Định lí Hall và ứng dụng

Chuyên đề dự thi “Cuộc thi viết bài kỉ niệm 10 năm Diễn đàn toán học”

Lê Nhật Hoàng (THPT chuyên Lê Quý Đôn-Bình Định) (nick VMF: LNH)
Trần Phan Quốc Bảo (THPT chuyên Lê Quý Đôn -Khánh Hòa) (nick VMF: quocbaolqd11)

Trước hết, ta nhắc lại định nghĩa của đơn đồ thị, đồ thị 2 phe (lưỡng phân), ghép cặp và một số tính chất liên quan

Định nghĩa 1: Một đơn đồ thị G = (V, E) gồm một tập khác rỗng V mà các phần tử của nó gọi là các đỉnh và một tập E mà các phần tử của nó gọi là các cạnh, đó là các cặp không có thứ tự của các đỉnh phân biệt.

Định nghĩa 2: Đơn đồ thị G=(V,E) sao cho $V=V_1\cup V_2$, $V_1\cap V_2=\varnothing$, $V_1\neq\varnothing$, $V_2\neq\varnothing$ và mỗi cạnh của G được nối một đỉnh trong V_1 và một đỉnh trong V_2 được gọi là đồ thị 2 phe.
Cho đồ thị 2 phe G=(A,B,E). Một ghép cặp là một tập hợp các cạnh sao cho không có cạnh nào có chung 1 đầu mút. Một ghép cặp từ A đến B được gọi là hoàn hảo khi nó có thể nối tất cả các đỉnh của A đến B

Bây giờ, ta sẽ đề cập định lí Hall (còn được gọi là định lí đám cưới)

Định lí Hall:

Cho đồ thị hai phe X, Y. Với mỗi tập con A thuộc X, gọi G(A) là tập các đỉnh thuộc Y kề với một đỉnh nào đó thuộc A. Khi đó điều kiện cần và đủ để tồn tại một đơn ánh f: X → Y sao cho x kề f(x) là $|G(A)| \geq |A|$ với mọi A khác rỗng thuộc X.

Chứng minh.

Điều kiện cần là hiển nhiên: Nếu tồn tại đơn ánh f thì với mỗi $A = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ thuộc X, ta có G(A) chứa các phần tử phân biệt $f(x_1), \dots, f(x_r)$, do đó $|G(A)| \geq r = |A|$.

Ta chứng minh điều kiện đủ bằng quy nạp theo |X|. Khi $|X| = 1$, khẳng định là hiển nhiên. Giả sử định lý đã đúng với các tập X với $|X| < n$. Giả sử bây giờ $|X| = n$. Ta xét hai trường hợp:

1) Giả sử với mọi $A\subset X$ $(A \neq X)$, ta có $|G(A)| > |A|$. Chọn một phần tử x_0bất kỳ thuộc X, theo điều kiện $|G(\{x_0\})| \geq 1$, do đó tồn tại y_0 thuộc Y kề với X. Ta đặt $f(x_0) = y_0$. Bây giờ xét $X' = X\{x\}$ và $Y' = Y\ \{y\}$, $A\subset X'$ và G’(A) là tập các đỉnh thuộc Y’ kề với A. Khi đó $|G'(A)| \geq |G(A)| - 1 \geq |A|$. Vì $|X'| < |X|$ nên theo giả thiết quy nạp, tồn tại đơn ánh f: X’ → Y’ sao cho f(x) kề x với mọi x thuộc x’. Bổ sung thêm $f(x_0) = y_0$ ta được đơn ánh f: X → Y thỏa mãn yêu cầu định lý.

2) Trong trường hợp ngược lại, tồn tại $A\subset X$ $(A \neq X)$ sao cho $|G(A)| = |A|$. Khi đó, do $|A| < |X|$ nên tồn tại đơn ánh f: A → G(A). Xét $X' = X \setminus A$, $Y' = Y \setminus G(A)$. Xét B thuộc X’ và G(B) là tập các đỉnh thuộc Y’ kề với B. Nếu $|G(B)| < |B|$ thì ta có

$$|G(A\cup B)| = |G(A)| + |G(B)| < |A| + |B| = |A\cup B|$$

mâu thuẫn với điều kiện định lý. Như vậy ta có $|G(B)| \geq |B|$ với mọi B thuộc X’. Theo giả thiết quy nạp, tồn tại đơn ánh g: X’ → Y’ sao cho g(x) kề với x. Như vậy, ta có thể xây

dựng được đơn ánh h: $X \rightarrow Y$ sao cho h(x) kề với x: cụ thể h(x) = f(x) nếu x thuộc A và h(x) = g(x) nếu x thuộc $X \setminus A$.
Chúng ta hãy cùng khám phá những ứng dụng của định lí Hall nào

Bài toán 1 : (Canada 2006) Trong một bảng ô vuông mxn chứa các số không âm, mỗi hàng (hoặc cột) chứa ít nhất 1 số dương. Ngoài ra, nếu 1 hàng giao một cột 1 ô chứa một số dương, khi đó tổng của hàng và cột bằng nhau. Chứng minh rằng : $m = n$

Ý tưởng :

Một cách tự nhiên, ta nghĩ đến việc chứng minh $m \leq n$ và $n \leq m$ bằng cách xây dựng đồ thị lưỡng phân với tập hợp các hàng và các cột rồi áp dụng định lí Hall.

Giải :

Ta sẽ xây dựng một đồ thị lưỡng phân là $G = (A, B, E)$, với A là tập hợp các hàng, B là tập hợp các cột. Nếu cột và hàng giao nhau tại 1 ô chung chứa số dương thì nối chúng bởi một cạnh.
Không mất tính tổng quát, giả sử $m \geq n$
Gọi S là tập con của A sao cho $|T| < |S|$ với T là tập hợp các đỉnh của B kề với ít nhất một đỉnh của S.
Giả sử tổng các số trên các hàng thuộc S là $s_1,\ldots,s_k$. Mỗi cột thuộc T sẽ có tổng là một s_i nào đó. Vì vậy, nếu nhìn theo góc độ ở cột thì tổng các hàng thuộc S chỉ bằng tổng của một tập con các hàng nào đó thuộc S. Mà mọi $s_i > 0$, vô lí
Suy ra $|T| \geq |S|$, với mọi S là tập con của A
Theo định lí Hall thì tồn tại một ghép cặp hoàn hảo từ A đến B
Điều này có nghĩa là $m \leq n$
Suy ra $m = n$ (đpcm)

Bài toán 2: (Vietnam TST 2010) Có n nước, mỗi nước có k đại diện ($n>k>1$). Người ta chia n.k người này thành n nhóm, mỗi nhóm có k người sao cho không có 2 người nào cùng nhóm đến từ một nước. Chứng minh rằng có thể chọn ra n người đến từ các nhóm khác nhau và đến từ các nước khác nhau.

Ý tưởng:

Yêu cầu của bài toán như một lời nhắc nhở không thể rõ hơn về việc sử dụng định lí Hall.

Giải:

Nhận xét: Với mọi h thuộc $\{1,2,\ldots,n\}$ thì tập hợp các đại biểu ở h nhóm bất kì đến từ ít nhất h nước
Nếu ta xây dựng một đồ thị lưỡng phân $G = (A, B, E)$ với A là tập hợp các nhóm còn B là tập hợp các nước thì theo định lí Hall, tồn tại một ghép cặp hoàn hảo từ A đến B (đpcm)

Bài toán 3: Bảng $n \times n$ được gọi là bảng hoán vị nếu các số trên bảng là 0 và 1 sao cho trên mỗi hàng và mỗi cột có đúng một số 1. Cho G là 1 bảng $n \times n$ gồm các số nguyên không âm sao cho tổng các số trên mỗi hàng và trên mỗi cột bằng nhau. Chứng minh rằng G có thể viết dưới dạng tổng các bảng hoán vị.

Ý tưởng:

Ta có thể thấy được sự giống nhau giữa bảng hoán vị và bảng G, đó là: bảng hoán vị cũng có tổng ở các cột và các hàng bằng nhau và bằng 1. Nên từ đó, thay vì biểu diễn G thành tổng các bảng hoán vị, ta sẽ trừ đi 1 ở các ô được chọn tương ứng trong bảng G (các ô đó được chọn bởi định lí Hall).

Giải:
Ta sẽ chứng minh luôn tìm được n số nguyên dương nằm ở các hàng và cột khác nhau. Xét đồ thị lưỡng phân $G = (U, V, E)$. Trong đó U là các hàng và V là các cột. Một đỉnh trong U được bối với 1 đỉnh trng V khi và chỉ khi giao của hàng và cột này có là một số nguyên dương. Ta sẽ chứng minh k đỉnh trong U kề với ít nhất k đỉnh trong V. Giả sử như k đỉnh trong U chỉ kề với k-1 đỉnh trong V thì xét 1 bảng con $k \times (k-1)$, tổng các ô trong bảng bằng tổng các ô tính theo hàng và tổng các ô tính theo cột nên có $c.k = c.(k-1)$ (vô lí). Vậy k đỉnh trong U phải kề ít nhất k đỉnh trong V. Từ đây theo điều kiện Hall thì ta luôn chọn ra được n ô chứa n số nguyên dương và các ô này nằm ở các hàng và cột khác nhau. Giảm đi các ô đó 1 đơn vị thì tính chất của bảng vẫn không đổi nên tiếp tục áp dụng nhiều lần thì ta sẽ được 1 bảng toàn số 0 (đpcm).
Bài toán 4: Bảng $n \times n$ gồm các số thuộc $\{0,1\}$ sao cho với mọi tập con gồm n ô, trong đó không có hai ô cùng hàng hoặc cùng cột, chứa ít nhất một số 1. Chứng minh rằng tồn tại i hàng và j cột với $i + j \geq n + 1$, có giao chứa toàn 1.
Ý tưởng:
Bài toán này yêu cầu tìm l hàng và k cột, tức là yêu cầu chỉ ra l+k đỉnh kề nhau của đồ thị lưỡng phân thỏa đề, khác hẳn với bài toán trước nên sẽ gặp khó khăn. Nhưng thay vì đi chứng minh trực tiếp thì tại sao lại không chứng minh gián tiếp ? Nếu thay vì 2 đỉnh của đồ thị nối với nhau nếu hàng và cột giao nhau tại ô chứa số 1 thì ta cho chúng nối với nhau khi ô giao của chúng chứa số 0 và ta sẽ đi chứng minh luôn chọn ra l cột chỉ kề được nhiều nhất l-1 hàng.
Lời giải:
Bỏ qua TH đơn giản toàn bộ các ô trong 1 cột chứa số 1.
Xét TH không có cột nào chứa toàn số 1.
Ta sẽ chứng minh rằng, nếu có k cột chứa các số 1 trong bảng thì phải tồn tại l cột (1<l<k+1) mà mỗi cột trong l cột đó sẽ có đúng $l - 1$ ô chứa số 0 và các ô tương ứng của mỗi cột phải nằm cùng 1 hàng.
(ví dụ với bảng 5x5 và i=3)

1	1	1	1	1
1	1	1	0	1
0	1	0	1	0
1	0	1	1	1
0	1	0	1	0

Giả sử phản chứng có 1 cách đặt sao cho nó không thỏa nhận xét trên. Khi đó, ta luôn tìm được n ô không cùng hàng hoặc cột mà trong các ô đó không chưa số 1 nào (dễ thấy) từ đó tría với giải thiết của đề, vô lí.
Như vậy, theo nhận xét trên thì luôn chọn được l cột chỉ kề với nhiều nhất l-1 hàng nên theo điều kiện Hall thì không tồn tại ghép cặp từ tập hàng tới tập cột thỏa điều kiện ta cho ban đầu. Vậy nên luôn chọn ra từ các tập đỉnh đó l đỉnh thuộc tập cột và t đỉnh thuộc tập hàng sao cho $t \leq l - 1$ suy ra số hàng mà các ô giao của chúng với l cột kia chứa toàn số 1 là $k = n - t \geq n - l + 1$ hay $l + k \geq n + 1$(đpcm).

Bài toán 5: Cho đồ thị hai phe G, chứng minh rằng nếu các bậc của các đỉnh đều dương và bằng nhau thì tồn tại một ghép cặp hoàn hảo

Chứng minh: Đây là một bài toán dễ, xin nhường lại cho bạn đọc

Bài toán 6: Cho một bảng $n \times k$ với $k < n$ sao cho trong mỗi ô vuông có một số từ 1 đến n. Biết rằng trong mỗi hàng và mỗi cột không có số nào trùng nhau. Chứng minh rằng ta có thể mở rộng bảng trên thành bảng $n \times n$ với một số từ 1 đến n trong mỗi ô, sao cho trong mỗi hàng và mỗi cột không có số nào trùng nhau

Ý tưởng:

Một ý tưởng tự nhiên khi gặp bài toán này là ta sẽ thêm tuần tự các số vào từng cột. Vì vậy, ta cần chứng minh có thể mở rộng bảng trên thành một bảng $n \times (k+1)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài. Và việc xây dựng đồ thị lưỡng phân kết hợp với định lí Hall là một điều không thể thiếu để giải quyết bài toán này

Giải:

Ta sẽ chứng minh rằng ta có thể mở rộng bảng trên thành một bảng $n \times (k+1)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài. Xét một đồ thị với $2n$ đỉnh trong đó có n đỉnh biểu diễn các hàng và n đỉnh biểu diễn các số từ 1 đến n. Nếu một số chưa xuất hiện ở một hàng thì ta đặt một cạnh nối hai đỉnh tương ứng. Để ý rằng bậc mỗi đỉnh biểu thị các hàng là $n - k$. Tuy nhiên, mỗi số xuất hiện một lần trong mỗi cột, nên chúng ở trong k hàng khác nhau. Vì vậy, bậc các đỉnh biểu thị các số cũng là $n - k$. Theo bài toán 5, tồn tại một ghép cặp hoàn hảo, đây cũng chính là đpcm.

Bài toán 7 (Russia MO 2006) : Có 100 người đến từ 25 quốc gia.Mỗi nước 4 người và họ ngồi trên một cái bàn tròn .CMR ta có thể chia họ thành 4 nhóm sao cho mỗi nhóm có 25 người của 25 quốc qia khác nhau và không có ai cùng nhóm ngồi cạnh nhau trên bàn tròn.

Giải:

Bổ đề: Cho 100 người đến từ 50 quốc gia, mỗi quốc gia có 2 người xếp thành một vòng tròn. CMR: có thể chia 100 người này thành 2 nhóm, mỗi nhóm có 50 người sao cho không có 2 người nào cùng một quốc gia và không có 3 người nào đứng kề nhau trên vòng tròn

Chứng minh:

Ta đáng số và chia những người này thành từng cặp theo chiều kim đồng hồ:

$(1,2); (3,4); \dots; (49,50)$

Ta xây dựng một đồ thị lưỡng phân với các đỉnh lần lượt là các cặp và 50 nước, nếu một người của nước nào đó được chọn từ một cặp nào đó thì ta nối 2 đỉnh tương ứng bằng một cạnh. Dễ thấy đồ thị trên thỏa mãn điều kiện Hall. Vậy ta chọn được 50 người từ 50 cặp đến từ các nước khác nhau. Những người còn lại sẽ thuộc nhóm thứ hai. Cách chia trên thỏa mãn yêu cầu của bổ đề, suy ra đpcm

Trở lại bài toán:

Trong mỗi bộ 4 người ở một quốc gia, ta chia làm 2 tỉnh, mỗi tỉnh có 2 người. Ta có tất cả 50 tỉnh. Theo bổ đề trên thì ta có thể chia 100 người này thành 2 nhóm, mỗi nhóm có

50 người sao cho không có 2 người nào cùng một tỉnh và không có 2 người nào đứng kề nhau trên vòng tròn.
Có thể thấy rằng trong 50 người của nhóm 1 sẽ có 25 cặp có cùng một quốc gia. Ta chia 50 người này thành 2 nhóm sao cho không có 2 người nào cùng một cặp ở chung một nhóm.
Làm tương tự với nhóm 2
Suy ra đpcm

Bài toán 8 (C5 IMO shortlist): Các cột và hàng của một $3n \times 3n$ bảng vuông được đánh số $1, 2, \dots, 3\text{n}$. Mỗi vuông (x, y) với $1 \leq \text{x}, \text{y} \leq 3\text{n}$ là màu asparagus, Byzantium hoặc citrine theo như modulo 3 theo số dư của x + y là 0,1 hoặc 2 tương ứng. Một chiếc thẻ màu asparagus, byzantium hoặc citrine được đặt trên mỗi vuông, vì vậy sẽ có $3n^2$ thẻ của mỗi màu.
Giả sử trên có thể hoán vị các thẻ để mỗi thẻ được chuyển đến một khoảng cách nhiều nhất là d từ vị trí ban đầu của nó, mỗi thẻ asparagus thay thế một thẻ byzantium, mỗi thẻ byzantium thay thế một thẻ citirine, và mỗi thẻ citrine thay thế một thẻ aspargus. Chứng minh rằng nó có thể hoán vị các thẻ để mỗi thẻ được chuyển đến một khoảng cách nhiều nhất là d+2 từ vị trí ban đầu của nó, và mỗi ô vuông chứa một thẻ với các cùng màu như hình vuông.

Ý tưởng:
Ý tưởng dùng Hall khá rõ ràng khi đề yêu cầu chúng ta chuyển thẻ đến ô có màu giống nó với 1 khoảng cách đã cho. Nhưng vấn đề lớn nhất ở đây là khi giả thiết chỉ cho chuyển thẻ đến ô có khoảng cách nhiều nhất so với vị trí ban đầu là d, nhưng lại bắt ta đi chứng minh có thể chuyển đến với khoảng cách nhiều nhất là d+2 và cộng thêm việc các ô được tô bởi 3 màu nên ta nghĩ ngay tới việc phân bảng thành các hình 1×3 đứng (hoặc ngang cũng ko ảnh hưởng).

Giải (Lim Jeck):
Đặt $3n^2$ ô vuông tô màu asparagus là $a_1, \dots, a_{3n^2}$, và tương tự cho byzantium $b_1, \dots, b_{3n^2}$ và citrine $c_1, \dots, c_{3n^2}$. Giả sử trong hoán vị , mỗi a_i thay thế b_i và mỗi c_i thay thế c_i . Xét các nhóm u_i với $\text{i} = 1, \dots, 3n^2$ với mỗi nhóm u_i có chứa $a_i, b_i, , c_i$,. Bây giờ ta phủ bảng $3n \times 3n$ với hình chữ nhật 1×3 thẳng đứng. Mỗi nhóm v_i, $\text{i} = 1, \dots, 3n^2$ sẽ chứa 3 ô vuông trong mỗi $3n^2$ hình chữ nhật 1×3 . Bây giờ hãy xem một đồ thị lưỡng phân với 2 tập đỉnh u_i, v_i cho , $\text{i} = 1, \dots, 3n^2$. Một cạnh được gọi là tương ứng từ u_j và v_k khi và chỉ khi có một ô vuông thuộc cả hai u_j và v_k. Lưu ý rằng đối với bất kỳ tập con của U của $\{u_i\}$ có kích thước m , kích thước của các tập kề với nó là ít nhất m bởi vì ta cần ít nhất m nhóm 3 hình vuông 1×3 phủ lên 3m ô vuông của tập U. Vì vậy, bằng định lí Hall, sẽ tồn tại 1 cặp ghép hoàn hảo giữa u_i và v_i. Giả sử u_j và v_k được ghép , chúng ta có thể di chuyển a_j đến các ô vuông chung của u_j, v_k với khoảng cách d sau đó đến một ô 0 trong khoảng cách lớn nhất là 2 (vì v_k chứa 3 ô của 1 hình vuông đứng 1×3 nên khoảng cách tương ứng lớn nhất là 2) . Do đó chúng ta có thể di chuyển

mỗi a_i đến 1 ô 0 duy nhất với khoảng cách lớn nhất là d+2 . Tương tự như vậy cho mỗi byzantium và citrine và ta đã hoàn thành bài toán .

<u>Bài toán 9 (VN TST 2001):</u> Một lớp khiêu vũ có 42 thành viên ,trong 31 người bất kì có ít nhất 1 cặp nam, nữ quen nhau .CMR có thể chọn trong 42 người này 12 cặp nam, nữ quen nhau

<u>Giải (Lê Hồng Quý):</u>

Bài toán này chỉ là một hệ quả của định lý Hall tổng quát sau:

Đồ thị hai mảng $G(X, Y, E)$ gồm hai tập đỉnh là X, Y tập cạnh là E. Biết rằng $|N(S)| \geq |S| - d$ với mọi tập đỉnh $S \subset X$. Khi đó tồn tại không ít hơn $|X| - d$ cạnh đôi một không có cạnh chung.

$N(S)$ là tập cách đỉnh kề với ít nhất một đỉnh trong tập $\boldsymbol{S}$

Ta chứng minh bằng quy nạp theo $|X|$ và d bất kì.

Hiển nhiên khẳng định trên đúng cho $|X| = 1$ và d bất kì.

Ta xét 2 trường hợp:

<u>Trường hợp 1:</u> Tồn tại $U \subset X$ mà $|N(U)| = |U| - d$, khi đó ta sử dụng quy nạp cho tập đỉnh U với $|U| < |X|$ và d, ta sẽ có tồn tại $|U| - d$ cạnh đôi một không có đỉnh chung và có một đỉnh thuộc U.

Với $S \subset X - U$ ta có:

Áp dụng giải thiết quy nạp cho $|X - U| < |X|$ và $d = 0$, ta có tồn tại $|X - U| = |X| - |U|$ cạnh đôi một không có cạnh chung và không có đỉnh thuộc U hay $N(U)$. Kết hợp với $|U| - d$ cạnh đã thu thuộc ở trên ta có $|X| - |U| + |U| - d = |X| - d$ cạnh thỏa mãn điều kiện bài toán.

<u>Trường hợp 2:</u> Với mọi $S \subset X$ thì $|N(S)| \geq |S| - d + 1$. Ta xét một cạnh bất kì là xy với $x \in X, y \in Y$. Bỏ 2 đỉnh này đi thì ta thu thuộc đồ thị mới thỏa mãn điều kiện $|N(S)| \geq |S| - d$ với mọi $S \subset X - \{x\}$. Theo giả thiết quy nạp, ta thu được $|X| - 1 - d$ cạnh đôi một không có đỉnh chung, thêm cạnh xy nữa ta có $|X| - d$ cạnh đôi một không có đỉnh chung (đpcm)

Trở lại bài toán ban đầu, giả sử có $\boldsymbol{a}$ nam và b nữ. Dễ thấy là có ít nhất là 12 nam và ít nhất 12 nữ (ngược lại thì có 31 nam hoặc 31 nữ, vô lý).

Tiếp theo ta chứng minh cứ một tập $\boldsymbol{S}$ nam bất kì thì quen ít nhất là $|S| - (a - 12)$ nữ khác nhau. Thật vậy ta chỉ xét cho $|S| > a - 12$. Nếu nhóm này chỉ quen nhiều nhất với k nữ khác nhau và $k < |S| - a + 12$, thì khi đó số nữ còn lại là $b - k = 42 - a - k > 42 - a + |S| + a - 12 = 30 - a - |S|$ hay số nữ còn lại $\geq 31 - |S|$, như vậy thì nhóm nữ này và $|S|$ nam gồm $\geq 31 - |S| + |S| = 31$ người, không có cặp nam nữ nào quen nhau. Mâu thuẫn với giả thiết bài toán. Vậy ta luôn có cứ một nhóm $|S|$ nam thì quen với ít nhất là $|S| - (a - 12)$ nữ khác nhau.

Áp dụng vào bài toán tổng quát ban đầu ta có số cặp nam nữ phân biệt, đôi một không chung nhau một người nào ít nhất là $a - (a - 12) = 12$ cặp (đpcm)

<u>Bài toán 10 (USA TST 2014):</u> Cho n là số nguyên dương chẵn, và G là đồ thị đơn n đỉnh với $\frac{n^2}{4}$ cạnh, không có khuyên. Một cặp không tính thứ tự các đỉnh $\{x, y\}$ được gọi là đẹp nếu chúng cùng kề một đỉnh (tồn tại đỉnh z sao cho xz và yz đều là cạnh). Chứng minh rằng G có ít nhất $2\binom{n/2}{2}$ cặp đỉnh đẹp.

Ý tưởng:
Đây là một bài toán đếm-bất đẳng thức tổ hợp với cách phát biểu ít liên quan đến định lí Hall. Việc mô hình hóa các đỉnh thành các hàng và cột chính là nút thắt cho bài toán và mở ra cho việc đánh giá tiêu chuẩn Hall về sau. Đây cũng là một trong những kĩ thuật mà những người có sở trường dung định lí Hall cần lưu ý.
Giải:
Ta sẽ phát biểu lại yêu cầu của bài toán (làm cho các con số trở nên đẹp hơn) thành $2n$ người với n^2 đỉnh. Ta cần chứng minh tồn tại ít nhất $n(n-1)$ cặp đỉnh đẹp.

Bây giờ, ta đếm số cặp đỉnh đẹp ở mỗi đỉnh trong đó. Hiển nhiên, kết quả sẽ gấp 2 lần số các cặp đỉnh đẹp. Để ý rằng với mỗi đỉnh, số cặp đẹp ít nhất bằng bậc cao nhất của các đỉnh kề trừ một. Đặt i_{max} là bậc cao nhất trong số các đỉnh kề của đỉnh i, ta có $N=\frac{1}{2}\sum_{i\in G}(i_{max}-1)=\frac{1}{2}\sum_{i\in G}i_{max}-n$. Bây giờ, ta xét bổ đề sau:

Bổ đề: Với bất kì đồ thị G nào, ta có $\sum_{i\in G}i_{max}\geq\sum_{i\in G}d_i$, khi i_{max} là bậc cao nhất trong số các đỉnh kề của đỉnh i và d_i là bậc của i.
Chứng minh: Xét một tập đỉnh S sao cho với mỗi $i\in S$, $d_i>i_{max}$. Ta sẽ xây dựng một lưới sao cho mỗi hàng ứng với một đỉnh trong S và mỗi cột ứng với một đỉnh không ở trong S. Ta đánh dấu 1 ô nếu đỉnh ở hàng và cột tương ứng kề nhau. Để ý rằng với mỗi ô được đánh dấu, có nhiều ô được đánh dấu ở hàng của nó hơn là cột của nó
Với mỗi ô được đánh dấu là k với k_r ô được đánh dấu ở cùng một hàng (kể cả chính ô đó), ta xét một giá trị $\frac{1}{k_r}$. Vì vậy, tổng các ô được đánh dấu trong hàng bằng 1 và tổng các ô được đánh dấu trong cột bé hơn 1. Lấy bất kì tập con s nào của S, tổng của các ô được đánh dấu là $|s|$. Điều này cho thấy có nhiều hơn $|s|$ cột sao cho có một ô trong những hàng này. Điều này thỏa mãn định lí Hall, vì vậy ta có thể chọn $|S|$ ô được đánh dấu sao cho mỗi đỉnh $i\in S$ được ghép với một và chỉ một đỉnh $j\notin S$. Khi đó, $i_{max}+j_{max}\geq d_i+d_j$ với mỗi cặp đỉnh i,j. Với mỗi đỉnh v không được nối, nó không ở trong S, vì vậy $v_{max}\geq d_v$. Như vậy ta có:
$$\sum_{i\in G}i_{max}\geq\sum_{i\in G}d_i$$

Vì vậy, $N=\frac{1}{2}\sum_{i\in G}i_{max}-n\geq\frac{1}{2}\sum_{i\in G}d_i-n=\frac{1}{2}2n^2-n=n(n-1)$, đpcm.
Lời kết:
Định lí Hall là một định lí đẹp trong lí thuyết đồ thị nói riêng và tổ hợp nói chung. Đây cũng là một công cụ mạnh để giải các bài toán thuộc kiểu ghép, nối bằng cách xây dựng đồ thị lưỡng phân và đánh giá điều kiện Hall. Các bài toán được giải bằng định lí Hall thường hết sức ngắn gọn, đẹp mắt, dễ hiểu và khó có một lời giải nào khác. Một kinh nghiệm để sử dụng thành thạo định lí này là cố gắng đưa các đại lượng liên quan về đồ

thị lưỡng phân rồi chứng minh phản chứng phần điều kiện Hall (và đây cũng là cấu trúc chung của các bài toán sử dụng định lí Hall). Tuy nhiên, vì đây là công cụ đặc trị cho các bài toán ghép cặp nên phạm vi các bài toán có thể sử dụng được khá. Vì vậy, trước khi sử dụng, các bạn nên cân nhắc kĩ và đừng quên là phải chứng minh trước khi làm bài. Chúc các bạn thành công!

Tài liệu tham khảo:

1) Graph Theory – Adrian Tang (1,3,4)
2) Problem Solving Method in Combinatorics – Paolo Soberon Bravo (5,6)
3) Tuyển tập một số vấn đề chọn lọc diendantoanhoc.net (7)
4) Mathlinks.ro (8,9,10)