SUMMOD

Tóm tắt đề bài

Cho 3 số nguyên dương a, b, c ($a \leq b \leq c \leq 10^{12}$). Tính kết quả của biểu thức sau :

$$\sum_{i=a}^{b} (c \bmod i)$$

Lời giải

Chúng ta có thể biến đổi $c \bmod i = c - \lfloor \frac{c}{i} \rfloor \times i$. Vậy biểu thức trên trở thành :

$$\sum_{i=a}^{b} \left(c - \lfloor \frac{c}{i} \rfloor \times i\right)$$

$$= c \times (b - a + 1) - \sum_{i=a}^{b} \left(\lfloor \frac{c}{i} \rfloor \times i\right)$$

.

Vì vế đầu tiên $c \times (b - a + 1)$ chỉ là biểu thức đơn giản nên ta sẽ tập trung vào tính vế thứ hai của biểu thức.

Ta có nhận xét : Có tối đa $2\sqrt{c}$ giá trị $\lfloor \frac{c}{i} \rfloor$ phân biệt ($1 \leq a \leq i \leq b \leq c$).

Chứng minh :

- Với $i \leq \sqrt{c}$: Trong trường hợp này, ta thấy chỉ có tối đa $\sqrt{c}$ giá trị i phân biệt nên chỉ có tối đa $\sqrt{c}$ giá trị $\lfloor \frac{c}{i} \rfloor$ phân biệt.
- Với $i \geq \sqrt{c}$: Trong trường hợp này, ta thấy $\lfloor \frac{c}{i} \rfloor \leq \sqrt{c}$ nên cũng chỉ có tối đa $\sqrt{c}$ giá trị $\lfloor \frac{c}{i} \rfloor$ phân biệt.

Nhận xét trên cho ta một cách làm sau : Với mỗi giá trị $\lfloor \frac{c}{i} \rfloor$, ta kiểm tra nó ứng với các giá trị i trong khoảng nào.

Giả sử $\lfloor \frac{c}{i} \rfloor = x$ với x cố định. Ta có nhận xét : $i = \lfloor \frac{c}{x} \rfloor$ là i lớn nhất thỏa mãn $\lfloor \frac{c}{i} \rfloor \geq x$

Vậy với $x = \lfloor \frac{c}{i} \rfloor$ bất kỳ thì i sẽ nằm trong khoảng $\left[\lfloor \frac{c}{x+1} \rfloor + 1, \lfloor \frac{c}{x} \rfloor\right]$. (Lưu ý trường hợp $\lfloor \frac{c}{x+1} \rfloor + 1] < a$ hay $\lfloor \frac{c}{x} \rfloor > b$).

Ta tính được tổng giá trị $\lfloor \frac{c}{i} \rfloor \times i$ của đoạn này là :

$$\left(\sum_{i=max(a,\lfloor \frac{c}{x+1} \rfloor + 1)}^{min(b,\lfloor \frac{c}{x} \rfloor)} i \right) \times x$$

.

Ta chỉ cần tính tổng giá trị nêu trên của mọi đoạn là sẽ tính ra được giá trị vế sau biểu thức.

Độ phức tạp: $O(\sqrt{c})$

Tag: Math