درونیابی لاگرانژ

اگر $L_i(x)$ چندجمله‌ای درجه n باشد، چندجمله‌ای درونیاب برابر است با: (درجه $P(x)$ بعد از محاسبات معلوم می‌شود)

$$P(x)=\sum_{i=o}^{n} L_i(x) f_i$$

که

$$L_j(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$$

درونیابی تفاضلات تقسیم شده نیوتن

مرتبه اول: $f[x_i,x_{i+1}]=\frac{f_i-f_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}$

مرتبه دوم: $f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]=\frac{f[x_i,x_{i+1}]-f[x_{i+1},x_{i+2}]}{x_i-x_{i+2}}$

چندجمله‌ای درونیاب:

$$\begin{aligned}P(x)=f_0+(x-x_0)f[x_0,x_1]+(x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2]+\cdots\\+(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})f[x_0,x_1,\ldots,x_n]\end{aligned}$$

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$\cdots$
x_0	$f[x_0]$			
x_1	$f[x_1]$	$f[x_0,x_1]$		
x_2	$f[x_2]$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$
x_n	$f[x_n]$	$f[x_{n-1},x_n]$	$f[x_{n-2},x_{n-1},x_n]$	$\cdots f[x_0,x_1,\ldots,x_n]$

دستگاه معادلات غیر خطی

در دستگاه غیر خطی $[f(x,y)=0, g(x,y)=0]$، (x_i,y_i) تخمین جوابِ طوری که:

$$x_{n+1}=x_n+h_n \qquad y_{n+1}=y_n+k_n$$

با فرض معلوم بودن x_n,y_n:

$$\begin{cases}h_n\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_n,y_n)}+k_n\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_n,y_n)}=-f(x_n,y_n)\\ h_n\frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{(x_n,y_n)}+k_n\frac{\partial g}{\partial y}\Big|_{(x_n,y_n)}=-g(x_n,y_n)\end{cases}$$

در این صورت:

$$h_n=\frac{\begin{vmatrix}-f & f_y\\ -g & g_y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}f_x & f_y\\ g_x & g_y\end{vmatrix}} \qquad k_n=\frac{\begin{vmatrix}f_x & -f\\ g_x & -g\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}f_x & f_y\\ g_x & g_y\end{vmatrix}}$$

حواست باشه مخرج صفر نشه

تفاضل پیشرو

مخصوص درونیابی نقاط با فاصله مساوی

تغییر متغیر:

$$f(x)=f(x_0+sh)=f_s$$

تفاضل پیشرو

$$\Delta^i f_s=\begin{cases}f_s & i=0\\ \Delta^{i-1}f_{s+1}-\Delta^{i-1}f_s & i>0\end{cases}$$

چندجمله‌ای درونیاب

$$P(x)=f_0+\binom{s}{1}\Delta f_0+\binom{s}{2}\Delta^2 f_0+\cdots+\binom{s}{n}\Delta^n f_0$$

جاگذاری $s=(x-x_0)/h$ و محاسبه تابع بر حسب x.

x_i	f_i	Δ	Δ^2	Δ^3	$\cdots$
x_0	f_0				
x_1	f_1	Δf_0			
x_2	f_2	Δf_1	$\Delta^2 f_0$		
x_3	f_3	Δf_2	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_0$	

تفاضل پسرو

مخصوص برای x نزدیک به نقاط انتهایی جدول.

تغییر متغیر:

$$f(x)=f(x_n+sh)=f_s$$

تفاضل پسرو

$$\nabla^i f_s=\begin{cases}f_s & i=0\\ \nabla^{i-1}f_s-\nabla^{i-1}f_{s-1} & i>0\end{cases}$$

چندجمله‌ای درونیاب

$$\begin{aligned}P(x)=f_n+s\nabla f_n+\frac{s(s+1)}{2!}\nabla^2 f_n+\cdots\\+\frac{s(s+1)(s+2)\cdots(s+n-1)}{n!}\nabla^n f_n\end{aligned}$$

جاگذاری $s=(x-x_0)/h$ و محاسبه تابع بر حسب x.

x_i	f_i	Δ	Δ^2	Δ^3	$\cdots$
x_0	f_0	∇f_1	$\nabla^2 f_2$	$\nabla^3 f_3$	
x_1	f_1	∇f_2	$\nabla^2 f_3$		
x_2	f_2	∇f_3			
x_3	f_3				

مشتق‌گیری عددی تابع درونیاب

تابع درونیاب را پیدا می‌کنیم و مشتق می‌گیریم.

مشتق مرتبه اول با یک جمله $\quad f_i' = \frac{f_{i+1}-f_i}{h} \qquad f_i' = \frac{1}{h}\Delta f_i$

مشتق مرتبه اول با دو جمله $\quad f_i' = \frac{2f_{i+1}-\frac{1}{2}f_{i+2}-\frac{3}{2}f_i}{h} \qquad f_i' = \frac{1}{h}[\Delta f_i - \frac{1}{2}\Delta^2 f_i]$

مشتق مرتبه دوم با دو جمله $\quad f_i'' = \frac{f_{i+2}-2f_{i+1}+f_i}{h^2} \qquad f_i'' = \frac{1}{h^2}\Delta^2 f_i$

مشتق‌گیری بسط تیلور

بسط تیلور $f(x_{i+1})$ و $f(x_{i-1})$ را می‌نویسیم:

مشتق مرتبه اول با دو جمله در $f'(x_0)$ $\quad f'(x_i) = \frac{f_{i+1}-f_i}{h}$

مشتق مرتبه اول با دو جمله در $f'(x_n)$ $\quad f'(x_i) = \frac{f_i-f_{i-1}}{h}$

در حالت کلی $\quad f'(x_i) = \frac{f_{i+1}-f_{i-1}}{2h}$

مشتق مرتبه دوم $\quad f''(x_i) = \frac{f_{i-1}-2f_i+f_{i+1}}{h^2}$

مشتق مرتبه سوم $\quad f'''(x_i) = \frac{f_{i+2}-2f_{i+1}+2f_{i-1}-f_{i-2}}{2h^3}$

انتگرال ذوزنقه‌ای

بین زیربازه‌ها، تابع خطی رد کن

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1})$$

$$\Rightarrow T(h) = \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}[f_0 + 2f_1 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n]$$

$$= A_0 f_0 + A_1 f_1 + \cdots + A_n f_n + E, \quad A_i = A_{i+1} = \frac{h}{2}$$

انتگرال سیمپسون

بین زیربازه‌ها تابع درجه ۲ رد کن. (تعداد نقاط باید فرد باشد.)

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx = \frac{h}{3}(f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2})$$

$$\Rightarrow S(h) = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \cdots + 4f_{n-1} + f_n]$$

$$= A_0 f_0 + A_1 f_1 + \cdots + A_n f_n + E$$

انتگرال نقطه میانی

برای توابع تکین (تعریف نشده در ابتدا یا انتها). $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = hf\left(x_i + \frac{h}{2}\right)$

$$M(h) = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = h\left[f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) + \cdots + f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + \cdots + f\left(x_{n-1} + \frac{h}{2}\right)\right]$$

انتگرال نیوتن-کاتس(ضرایب مجهول)

x_iها معلوم

برای $f(x) = 1, x, x^2, \cdots$، خطای سیمپسون $= 0$

A_iها را تعیین می‌کنیم.

در این روش، تعداد نقاط باید فرد باشد.

نیوتن-کاتس ۴ نقطه‌ای

$$\int_0^{3h} f(x)dx = \frac{3h}{8}[f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3]$$

انتگرال گاوس

در سیمپسون:

- A_i, x_i مجهول
- خطا $= 0$

فرمول‌ها برای $[-1, 1]$ بدست می‌آید.

نقاط زیربازه لزوما متساوی الفاصله نیستند.

$$\begin{cases} x \in [a,b] \\ u \in [-1,1] \end{cases} \quad \to x = \frac{1}{2}[(b-a)u + (b+a)] \Rightarrow \int_a^b g(u)\,du = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

گاوس ۲ نقطه‌ای

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = f\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

گاوس ۳ نقطه‌ای

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{9}\left[5f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 8f(0) + 5f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right]$$

روش حداقل مربعات

رگرسیون خطی :)

$$\underset{a_0, a_1, \cdots}{\text{argmin}} \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - (a_0 + a_1 x + \cdots))^2 = s \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial s}{\partial a_0} = 0 \\ \frac{\partial s}{\partial a_1} = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancelto{n}{(\sum 1)} a_0 + (\sum x_i)a_1 + \cdots = \sum y_i \\ (\sum x_i)a_0 + (\sum x_i^2)a_1 + \cdots = \sum x_i y_i \\ \vdots \end{cases}$$

روش حذفی گاوس - مستقیم

بدون در نظر گرفتن خطای گرد کردن، به جواب دقیق می‌رسیم.
عملیات سطری مقدماتی:

- جابجایی سطرها
- ضرب سطر در عدد غیر صفر
- جمع دو سطر با یکدیگر

جایگذاری پسرو حل به کمک ماتریس بالا مثلثی
جایگذاری پیشرو حل به کمک ماتریس پایین مثلثی

الگوریتم

۱. محورگیری
  - با جابجایی سطرها، همه اعداد بزرگ را روی قطر انتقال بده.
  - سپس بالا مثلثی کن (پسرو) یا پایین مثلثی کن (پیشرو).
  - علت: کاهش خطای حاصل ضرب

۲. انجام عملیات سطری مقدماتی روی ماتریس افزوده $(A|b)$

۳. تکرار ۲، تا رسیدن به بالامثلثی (پسرو) یا پایین مثلثی (پیشرو)

۴. برای انجام مرحله i-اُم، باید $a_{ii}^{(i)} \neq 0$. (عضو روی قطر، غیر صفر)

روش ژاکوبی - تکراری

به تقریب جواب می‌رسیم.

۱. از معادله i-اُم، x_i را بدست می‌آوریم. ($i.e.\ \ x_i = \cdots$)

۲. تقریب اولیه $x^{(0)} = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \cdots]^t$ را در نظر می‌گیریم.

۳. با جاگذاری تقریب ۲ در دستگاه ۱، یک تقریب جدید بدست می آید. (تکرار شود...)

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= 1/a_{11}[b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots] \\
x_2^{(k+1)} &= 1/a_{22}[b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots] \\
x_3^{(k+1)} &= 1/a_{33}[b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)} - \cdots]
\end{aligned}$$

روش ماتریس وارون ضرایب - مستقیم

بدون در نظر گرفتن خطای گرد کردن، به جواب دقیق می‌رسیم.

$$x = A^{-1}b$$

- اگر $b = 0, |A| \neq 0$، آنگاه $x = 0$
- اگر $|A| = 0$، آنگاه دستگاه همگن $Ax = 0$ جواب غیر صفر دارد.

محاسبه ماتریس وارون
ماتریس افزوده $(A|I)$ را با عملیات سطری مقدماتی به $(I|A^{-1})$ تبدیل می‌کنیم.

rank ابعاد بزرگترین زیرماتریس مربعی که دترمینان آن مخالف صفر باشد. (تعداد سطرهای مستقل خطی)
ماتریسی وارون پذیر است که $Order(A) = Rank(A)$

حل پذیری دستگاه

- اگر $Rank(A) \neq Rank(A|Y)$ دستگاه پاسخ ندارد
- اگر $Rank(A) = Rank(A|Y) = r$، دستگاه سازگار است
  - $r < n$: بی‌نهایت پاسخ از خانواده $n - r$ پارامتر
  - $n = r$: پاسخ یکتا

روش گاوس-سایدل - تکراری

مثل ژاکوبی
در هر مرحله، محورگیری انجام بده.
تفاوت:
هر مقدار جدید بدست آمده از مولفه‌های جواب، در محاسبه سایر مولفه‌ها بکار می‌رود.

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= 1/a_{11}[b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots] \\
x_2^{(k+1)} &= 1/a_{22}[b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots] \\
x_3^{(k+1)} &= 1/a_{33}[b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - \cdots]
\end{aligned}$$

گاوس-سایدل، سریعتر از ژاکوبی. (هیچکدام تضمین همگرایی ندارد)

اگر ماتریس A (ضرایب)، اکیدا قطر غالب سطری/ستونی باشد، هر حدس اولیه از جواب‌ها برای ژاکوبی و گاوس-سایدل، همگراست