انواع خطا

- مطلق: $e(a) = |A - a|$ — یکتا
- حدی: $e_a \geq e(a)$ — غیر یکتا | تساوی: $e(a)$ رند
- نسبی: $\delta(a) = \frac{|A-a|}{|A|} = \frac{e(a)}{|A|}$ — خطای نسبی ↓ اندازه‌گیری دقیق‌تر

- خطای مطلق حدی در گرد کردن تا n رقم اعشار $\frac{1}{2} \times 10^{-n}$

منابع خطا

خطای مدلساز	صرف نظر کردن از مقاومت هوا
خطای داده (اندازه‌گیری)	خطای وسیله یا آزمایشگر
خطای باقی‌مانده (برشی)	عملیات‌های نامتناهی - بسط e^x
خطای نمایش (گرد کردن)	$1.414654 \to 1.415$
خطای عملیات ریاضی	جمع و ضرب دو عدد خطادار در هم

خطای عملیات ریاضی

جمع و تفریق	$e_c \leq e_a + e_b$
ضرب دو عدد	$e_c \leq b.e_a + a.e_b$
ضرب سه عدد	$e_d \leq \sum_{cyc} ab.e_c$

خطای تابع

خطای $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ در نقطه $A_i = a_i + e_{a_i}$:

$$e_f \leq \sum_{i=1}^{n} e_{a_i} \frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_a$$

خطای بسط تیلور:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + E_n(x)$$

$$E_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Taylor Series

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n!} + \ldots$$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

شرط معادله

- سه‌گانه پیوستگی:
  - تابع در بازه مورد نظر، پیوسته باشد
  - باید $f(a), f(b)$ مختلف العلامت باشند
  - در این بازه $f'(x) \neq 0$ (زیرا ریشه ساده می‌خواهیم)
- شرط توقف:
  - اگر $|f(x_n)| < e$
  - اگر $|x_{n+1} - x_n| < e$
  - اگر تعداد تکرار ما از عددی بزرگتر شود. $n > m$
- سه‌گانه علامت:
  - $f(a)f(x) < 0 \Rightarrow \alpha \in (a, x)$
  - $f(a)f(x) > 0 \Rightarrow \alpha \in (x, b)$
  - $f(a)f(x) = 0 \Rightarrow \alpha = x$

تنصیف

- سه‌گانه پیوستگی
- $x_n = \frac{a+b}{2}$
- سه‌گانه علامت
- همگرایی تضمین شده

نابجایی

- سه‌گانه پیوستگی
- $x = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$
- سه‌گانه علامت
- همگرایی تضمین شده

نیوتن-رفسون

- سه‌گانه پیوستگی
- $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
- همگرایی تضمین نشده. ولی اگر همگرا باشه، سرعتش بالاست

وتری

- سه‌گانه پیوستگی
- $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$
- همگرایی تضمین نشده. ولی اگر همگرا باشه، سرعتش بیشتر از نابجاییِ

تکرار ساده

- سه‌گانه پیوستگی
- شروط کافی همگرایی

$$\forall x \in [a,b] \Rightarrow g(x) \in [a,b]$$

$$\forall x \in [a,b] \Rightarrow |g'(x)| < 1$$

- $x_{n+1} = g(x_n)$

تیلور مرتبه k

- حل مساله در $[a,b]$ با n گام: $h = (b-a)/n$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2!}f'(x_n, y_n) + \frac{h^3}{3!}f''(x_n, y_n) + \cdots + \frac{h^k}{k!}f^{(k-1)}(x_n, y_n)$$

اویلر

تیلور مرتبه ۱

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

رونگه-کوتا

- مرتبه ۲

$h = cte., x_n = x_0 + nh$-

$$\begin{cases} k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1) \end{cases} \qquad y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

- مرتبه ۴ - $h = cte, y' = f(x,y), y(x_0) = y_0$

$$\begin{cases} k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}) \\ k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3) \end{cases} \qquad y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

دستگاه

$y' = f_1(x,y,p), p' = f_2(x,y,p)$ with initial condition $y(x_0) = y_0, p(x_0) = p_0$:

$$k_1 = hf_1(x_n, y_n, p_n) \qquad l_1 = hf_2(x_n, y_n, p_n)$$

$$k_2 = hf_1(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1, p_n + \frac{1}{2}l_1) \qquad l_2 = hf_2(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1, p_n + \frac{1}{2}l_1)$$

$$k_3 = hf_1(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2, p_n + \frac{1}{2}l_2) \qquad l_3 = hf_2(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2, p_n + \frac{1}{2}l_2)$$

$$k_4 = hf_1(x_n + h, y_n + k_3, p_n + l_3) \qquad l_4 = hf_2(x_n + h, y_n + k_3, p_n + l_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(K_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \qquad p_{n+1} = p_n + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$$

محاسبات عـــددی بهار ۱۴۰۲
دکتر کیوان محمدی
Amin