কণার স্থিতিবিদ্যা ও গতিবিদ্যা

$v_x = v_{x_0} + a_x t$ এর প্রতিপাদন: ধরি, কোনো বস্তু কণা x অক্ষ বরাবর v_{x_0} আদিবেগ নিয়ে a_x সুষম ত্বরণে চলছে। t সময় পর কণার চূড়ান্ত বেগ v_x। ত্বরণের সংজ্ঞানুসারে,

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

$$\Rightarrow dv_x = dt\, a_x$$

যখন, $t=0$ তখন $v_x = v_{x_0}$ এবং যখন $t=t$ তখন $v_x = v_x$। এই সীমার মধ্যে সমাকলন করে পাই,

$$\int_{v_{x_0}}^{v_x} dv_x = \int_0^t dt\, a_x$$

$$\Rightarrow [v_x]_{v_{x_0}}^{v_x} = a_x [t]_0^t$$

$$\Rightarrow v_x - v_{x_0} = a_x (t - 0)$$

$$\Rightarrow v_x = v_{x_0} + a_x t$$

Chep: 2

Subject..
Date:............................ Time...............

$x = x_0 + v_{x_0} t + \frac{1}{2} a_x t^2$ এর প্রতিষ্ঠা :

ধরি, কোনো বস্তুকণা x-অক্ষ বরাবর v_{x_0} আদিবেগ নিয়ে a_x সুষম ত্বরণে চলে, t সময় পর অবস্থান x এবং আদি অবস্থান x_0। ত্বরণের সংজ্ঞানুসারে,

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \Rightarrow dv_x = a_x dt$$

যখন, $t=0$ তখন $v_x = v_{x_0}$ আবার $t=t$ হলে, $v_x = v_x$; এই সীমার মধ্যে সমাকলন করে পাই,

$$\int_{v_{x_0}}^{v_x} dv_x = a_x \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow v_x = v_{x_0} + a_x t$$

~~আবার~~ বেগের সংজ্ঞানুসারে, $v_x = \frac{dx}{dt}$। অতএব উপরের সমীকরণ থেকে পাই,

$$\frac{dx}{dt} = v_{x_0} + a_x t$$

$$\Rightarrow dx = dt\, v_{x_0} + a_x t\, dt$$

যখন, $t=0$ ~~তখন~~ $x = x_0$ আবার $t=t$ হলে, $x=x$ এই সীমার মধ্যে সমাকলন করে পাই,

$$\int_{x_0}^{x} dx = v_{x_0} \int_0^t dt + a_x \int_0^t t\, dt$$

$$\Rightarrow (x - x_0) = t v_{x_0} + a_x \frac{t^2}{2}$$

$$\Rightarrow x = x_0 + v_{x_0} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

Papersoft

$V_x^2 = V_{x_0}^2 + 2a_x(x-x_0)$ এর প্রতিষ্ঠা ঃ

ধরি, কোনো বস্তুকণা x অক্ষ বরাবর a_x সুষম ত্বরণে চলছে। এর আদি অবস্থান, x_0 এবং আদিবেগ V_{x_0}। আবার শেষ অবস্থান x এবং শেষ বেগ V_x। ত্বরণের সংজ্ঞানুসারে,

$$dv_x = a_x\, dt$$

$$\Rightarrow a_x = \frac{dx}{dt} \times \frac{dv_x}{dx}$$

$$\Rightarrow a_x = v_x \times \frac{dv_x}{dx} \quad \left[\because v_x = \frac{dx}{dt}\right]$$

$$\Rightarrow dx\, a_x = v_x\, dv_x$$

যখন, $x = x_0$ তখন $V_x = V_{0x}$ আবার $x = x$ হলে, $V_x = V_x$ হলে এই সীমার মধ্যে সমাকলন করে পাই,

$$a_x \int_{x_0}^{x} dx = \int_{V_{x_0}}^{V_x} V_x\, dV_x$$

$$\Rightarrow a_x(x - x_0) = \frac{1}{2}\left(V_x^2 - V_{x_0}^2\right)$$

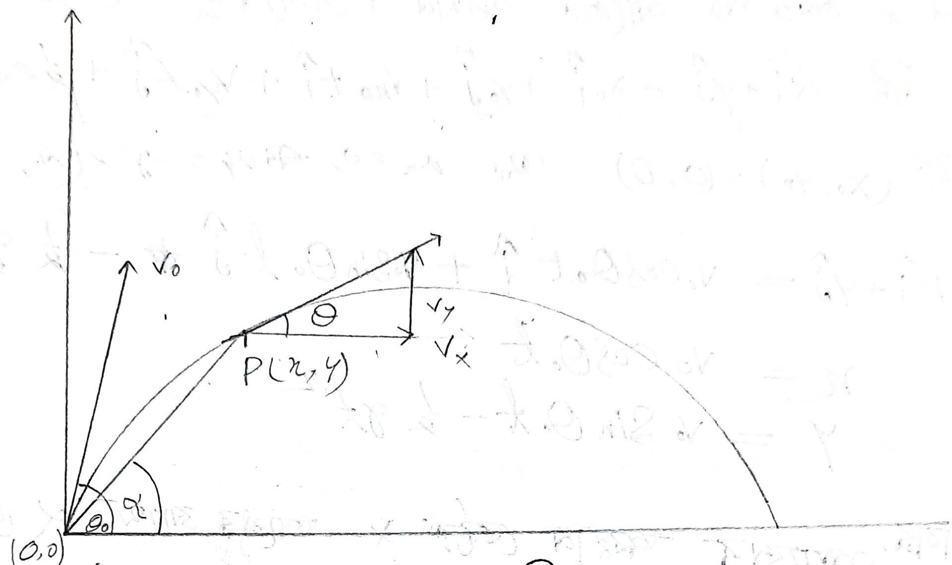
$$\cancel{\Rightarrow x a_x - x_0 a}$$

$$\Rightarrow V_x^2 = V_{x_0}^2 + 2a_x(x - x_0)$$

কণার স্থিতিবিদ্যা এবং গতিবিদ্যা

অনুভূমিকের সাথে নতি রেখে শূন্যে নিক্ষিপ্ত বস্তুর গতিকে প্রাসের গতি বা প্রক্ষেপকের গতি বলে এবং উক্ত বস্তুকে প্রাস বা প্রক্ষেপক বলে।

প্রাসের গতির সমীকরণ :



মনে করি, কোন বস্তুকে প্রসঙ্গ কাঠামোর মূলবিন্দু (0, 0) হতে x- অক্ষের সাথে θ_0 কোণে শূন্যে নিক্ষেপ করা হয়, v_0 বেগে নিক্ষেপ করলে এর আদি বেগের x ও y- উপাংশ যথাক্রমে,

$$v_{x_0} = v_0 \cos\theta_0$$
$$v_{y_0} = v_0 \sin\theta_0$$

আবার, ত্বরণের অনুভূমিক উপাংশ $a_x = 0$ এবং উলম্ব উপাংশ $a_y = -g$

এখন, t সময় পর প্রাসের বেগ $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$ হলে,

$$v_x\hat{i} + v_y\hat{j} = v_{x_0}\hat{i} + v_{y_0}\hat{j} + a_x\hat{i}t + a_y\hat{j}t$$
$$= v_0\cos\theta_0\hat{i} + v_0\sin\theta_0\hat{j} - gt\hat{j}$$

v_x ও v_y বেগের অনুভূমিক ও উলম্ব উপাংশ হলে,

$$v_x = v_0\cos\theta_0$$
$$v_y = v_0\sin\theta_0 - gt$$

ch:2

Subject..................... Date:..................... Time.....................

আবার, t সময় পর প্রাসের বেগ অনুভূমিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে,

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} \quad \therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right)$$

এখন, t সময় পর প্রাসের অবস্থান $P(x,y)$ বিন্দুতে হলে, $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$

হতে পাই, $x\hat{i} + y\hat{j} = x_0\hat{i} + y_0\hat{j} + v_{x0}t\hat{i} + v_{y0}t\hat{j} + \frac{1}{2}a_x t^2\hat{i} + \frac{1}{2}a_y t^2\hat{j}$

এখানে, $(x_0, y_0) = (0,0)$ এবং $a_x = 0$, ~~এবং~~ $a_y = -g$ হলে,

$$x\hat{i} + y\hat{j} = v_0\cos\theta_0 t\,\hat{i} + v_0\sin\theta_0 t\,\hat{j} - \frac{1}{2}gt^2\hat{j}$$

$$\therefore x = v_0\cos\theta_0 t$$

$$y = v_0\sin\theta_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

আবার, প্রাসের অবস্থান ভেক্টর x- অক্ষের সাথে α কোণ উৎপন্ন করলে,

$$\tan\alpha = y/x \quad \therefore \alpha = \tan^{-1}(y/x)$$

প্যারাবোলা বা অধিবৃত্তের সমীকরণ

সর্বোচ্চ উচ্চতায় উঠার সময়:

সর্বোচ্চ উচ্চতায় $v_y = 0$ হলে, $v_0\sin\theta_0 - gt_m = 0$

$$\text{বা, } t_m = \frac{v_0\sin\theta_0}{g}$$

সর্বোচ্চ উচ্চতা: $t_m = \frac{v_0\sin\theta_0}{g}$ হলে,

$$y_m = v_0\sin\theta_0 \times \frac{v_0\sin\theta_0}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0\sin\theta_0}{g}\right)^2$$

$$= \frac{v_0^2\sin^2\theta_0}{g} - \frac{v_0^2\sin^2\theta_0}{2g}$$

$$= \frac{v_0^2\sin^2\theta_0}{2g}$$

মোট উড্ডয়ন কাল ঃ

মোট উড্ডয়ন কালে ~~T~~ $y = 0$ হলে

$$v_0 \sin\theta_0 T - \frac{1}{2} g T^2 = 0$$

$$\Rightarrow T\left(v_0 \sin\theta_0 - \frac{1}{2} g T\right) = 0$$

$$\Rightarrow v_0 \sin\theta_0 - \frac{1}{2} g T = 0$$ অথবা $T = 0$; যা প্রারম্ভ মুহূর্ত নির্দেশ করে

$$\Rightarrow T = \frac{2 v_0 \sin\theta_0}{g}$$

অনুভূমিক পাল্লা ঃ মোট অনুভূমিক সরণকে অনুভূমিক পাল্লা বলে।

প্রাসের মোট উড্ডয়ন কাল $T = \frac{2 v_0 \sin\theta_0}{g}$ সময়ের অনুভূমিক সরণই পাল্লা R। $\therefore x = v_0 \cos\theta_0 t = R$

বা, $R = v_0 \cos\theta \frac{2 v_0 \sin\theta_0}{g} = \frac{v_0^2 2 \sin\theta_0 \cos\theta_0}{g}$

$$= \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$$

সর্বাধিক পাল্লার জন্য প্রাসকে অনুভূমিকের সাথে 45° কোণে নিক্ষেপ করতে হবে।

Ch:2

Subject...

Date:................................Time...............

অনুভূমিকের সাথে আনতভাবে শূন্যে নিক্ষিপ্ত বস্তুর গতিপথ একটি প্যারাবোলা।

আগের প্রশ্নের সমীকরণ,

আবার, $y = v_0 \sin\theta_0 t - \frac{1}{2} g t^2$ সমীকরণে $t = \frac{x}{v_0 \cos\theta_0}$

বসিয়ে পাই,

$$y = v_0 \sin\theta_0 \left(\frac{x}{v_0 \cos\theta_0}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\theta_0}\right)$$

$$= x \tan\theta_0 - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\theta_0}$$

এখন, $\tan\theta_0 = a$ এবং $-\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\theta_0} = b$ হলে,

$y = ax + bx^2$ যা একটি প্যারাবোলা বা অধিবৃত্তের

সমীকরণ।

Papersoft

Subject............ ch:2

Date:............ Time............

নিউটনের গতির দ্বিতীয় সূত্র ঃ

গতিশীল বস্তুর ভরবেগের পরিবর্তনের হার এর উপর প্রযুক্ত বলের সমানুপাতিক। এবং বল যে দিকে ক্রিয়া করে ভরবেগের পরিবর্তনও সেদিকে ঘটে।

মনে করি, গতিশীল বস্তুকনার ভরবেগ $\bar{P}$, $\bar{F}$ বলের ক্রিয়ায় dt সময়ে ভরবেগের পরিবর্তন dP হলে, পরিবর্তনের হার $\frac{dP}{dt}$। এবং,

সূত্রানুসারে, $\frac{dP}{dt} \propto \bar{F}$

$$\Rightarrow \frac{d(m\bar{v})}{dt} \propto F \quad [\because \bar{P} = m\bar{v}]$$

$$\Rightarrow m\frac{d\bar{v}}{dt} \propto \bar{F}$$

$$\Rightarrow m\bar{a} \propto \bar{F} \quad [\because \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{a}]$$

$$\Rightarrow m\bar{a} = K\bar{F}$$

এখানে, K একটি সমানুপাতিক ~~ধ~~ ধ্রুবক। এখন, $K = 1$ হলে—

$$\bar{F} = m\bar{a}$$

chie

নিউটনের সূত্রের প্রয়োগ

একটি ঘর্ষণমুক্ত এবং ভরহীন কপির উপর দিয়ে রশির সাহায্যে দুটি ভরদ্বয় m_1 ও m_2 যুক্ত রয়েছে, $m_1 > m_2$ হলে রশির টান ও ভরদ্বয়ের ত্বরণ নির্ণয়,

উর্ধ্বমুখী ত্বরণ ধনাত্মক হলে m_1 ও m_2 ভরের ত্বরণ হবে a, m_1 ও m_2 ভরের উপর ক্রিয়ারত বল T রশির টানকে নির্দেশ করে।

এখন,

m_1 ভরের গতি সমীকরণের জন্য পাই;

$$T - m_1 g = m_1 a \quad \text{--- (i)}$$

m_2 এর জন্য,

$$T - m_2 g = -m_2 a \quad \text{--- (ii)}$$

(i) - (ii) $\Rightarrow$

$$T - m_1 g = m_1 a$$
$$\underset{(-)}{T} \underset{(+)}{-} m_2 g = \underset{(+)}{-} m_2 a$$

$$\Rightarrow g(m_2 - m_1) = a(m_1 + m_2)$$

$$\Rightarrow a = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) g$$

~~অনুরূপভাবে~~, $T = \dfrac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$

স্থিতি ঘর্ষণ গুণাঙ্ক

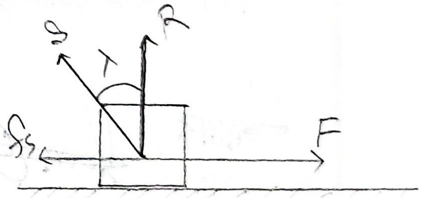
স্থিতি ঘর্ষণের সীমান্তিক মান f_s এবং অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া R এর অনুপাতকে স্থিতি ঘর্ষণ গুণাঙ্ক বা স্থিতি ঘর্ষণ সহগ বলে। একে μ_s দ্বারা প্রকাশ করা হয়। $\therefore \mu_s = \frac{f_s}{R}$

স্থিতি ঘর্ষণের সূত্রাবলি

স্থিতি ঘর্ষণ সর্বদা গতির বিরুদ্ধে ক্রিয়া করে। এর সীমান্তিক মান অভিলম্ব প্রতিক্রিয়ার সমানুপাতিক। স্থিতি ঘর্ষণ বল স্পর্শ তলের প্রকৃতির উপর নির্ভর করে, স্পর্শ তলের ক্ষেত্রফলের উপর নয়।

ঘর্ষণ কোণ

স্থিতি ঘর্ষণের সীমান্তিক মান f_s এবং অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া R কে সমন্বয় করে যে লব্ধি পাওয়া যায়, তাকে লব্ধ প্রতিক্রিয়া S বলে। এই লব্ধ প্রতিক্রিয়া অভিলম্ব প্রতিক্রিয়ার সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে ঘর্ষণ কোণ বলে। একে λ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।



চিত্রানুসারে,

$$R = S\cos\lambda$$

$$f_s = S\sin\lambda$$

$$\therefore \tan\lambda = \frac{f_s}{R}$$

আবার, $\mu_s = \frac{f_s}{R}$

$$\therefore \tan\lambda = \mu_s$$

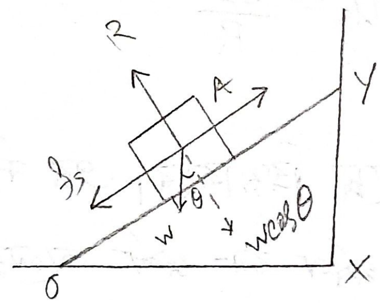
Ch12

Subject.......................... Date:.......................... Time..............

প্রমাণ কর যে স্থিতি কোণের tangent ঘর্ষণ গুণাঙ্ক/গুণাঙ্কের সমান

স্থিতি কোণ বা নিশ্চল কোণ ঃ

কোন আনত তলস্থিত বস্তু তলের যে আনতির জন্য গতির উপক্রম হয়, তাকে স্থিতি কোণ বলে। একে θ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।



OY তলের উপরিস্থিত বস্তু তলের θ আনতির জন্য গতির উপক্রম হয়। সুতরাং, θ হবে স্থিতি কোণ। বস্তুর ওজন W খাড়া নিচের দিকে ক্রিয়া করলে তলের অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া R এর ক্রিয়া রেখার সাথে θ কোণে নত হয়।

$\therefore$ চিত্রানুসারে, $R = W\cos\theta$

স্থিতি ঘর্ষণের সীমান্তিক মান, $f_s = W\sin\theta$ $\qquad \therefore \tan\theta = \frac{\cancel{R}\, f_s}{R}$

~~আবার,~~ স্থিতি ঘর্ষণ গুণাঙ্ক $\cancel{\tan\theta = \frac{f_s}{R}}$ $\mu_s = \frac{f_s}{R}$

$\therefore \tan\theta = \mu_s$ অর্থাৎ স্থিতি কোণের ট্যানজেন্ট স্থিতি ঘর্ষণ গুণাঙ্কের সমান।

আবার ঘর্ষণ কোণের ক্ষেত্রে, $\tan\lambda = \mu_s$

$\therefore \tan\lambda = \tan\theta$

$\Rightarrow \lambda = \theta$

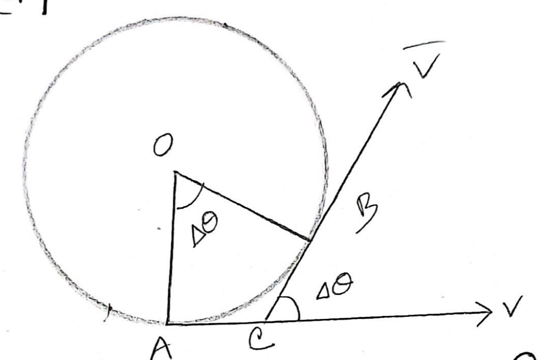
সুতরাং, ঘর্ষণ কোণ এবং স্থিতি কোণের মানসমূহ সমান। কিন্তু ঘর্ষণ কোণ সর্বক্ষেত্রে প্রযোজ্য হলেও স্থিতি কোণ শুধুমাত্র আনত তলের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য।

Papersoft

কেন্দ্রমুখী ত্বরণের রাশিমালা

মনে করি, কোন বস্তু কণা r ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের পরিধি বরাবর v সুষম রৈখিক গতিতে ঘুরছে। এর কেন্দ্রমুখী ত্বরণের রাশিমালা প্রতিপাদন করতে হবে।

এখন, বৃত্তের কেন্দ্র O এবং বস্তুকণা পরিধির A বিন্দু হতে যাত্রা করে অতি অল্প সময় Δt অন্তর B বিন্দুতে পৌঁছায় এবং কেন্দ্রে $\Delta\theta$ কোণ উৎপন্ন করে।



বস্তু ~~কণা~~ কণার বেগ পরিধির A ও B বিন্দুতে ঐ বিন্দুদ্বয়ের অঙ্কিত স্পর্শক বরাবর বহির্মুখী ক্রিয়া করবে। A ও B বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক AC এবং CB পরস্পরের সাথে C বিন্দুতে মিলিত হবে। এবং $\Delta\theta$ কোণে আনত হবে।

AC বরাবর উপাংশ $v\cos\Delta\theta = v$ [∵ $\Delta\theta$ ক্ষুদ্র, তাই $\cos\Delta\theta = 1$]

অভিলম্ব উপাংশ $v\sin\Delta\theta = v\Delta\theta$ [∵ $\Delta\theta$ " , তাই, $\sin\Delta\theta = \Delta\theta$]

∴ কেন্দ্রমুখী ত্বরণের মান, $a = \dfrac{v\Delta\theta}{\Delta t}$

এখন, $\Delta t \to 0$ হলে, $a = v\lim_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = v\dfrac{d\theta}{dt}$

$\Rightarrow a = \omega v$ [∵ $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$]

$\Rightarrow a = \omega^2 r$ [∵ $v = \omega r$]

$\Rightarrow a = \dfrac{v^2}{r}$; এটিই কেন্দ্রমুখী ত্বরণের রাশিমালা

State and explain law of conservation of momentum

ভরবেগের সংরক্ষণ এবং বল বিশ্লেষণ

রৈখিক ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র (Conservation of linear momentum)

দুই বা ততোধিক বস্তুকণার মধ্যে ক্রিয়া প্রতিক্রিয়া বল ছাড়া অন্য কোন বল ক্রিয়া না করলে, ঐ বস্তুকণাসমূহের মোট রৈখিক ভরবেগের সমষ্টি সংরক্ষিত থাকে বা ধ্রুব থাকে।

ধরি, P_1 ও P_2 ভরবেগে সমকালে দুটি বস্তুর সংঘর্ষ ঘটলো। ফলে বস্তু দ্বয়ের ভরবেগের পরিবর্তন যথাক্রমে dP_1 ও dP_2। এখন, প্রথম বস্তুর ক্রিয়াবল $\bar{F}_1$ এবং ২য় বস্তুর ~~ক্রিয়াবল F~~ প্রতিক্রিয়া বল $\bar{F}_2$।

∴ সূত্রানুসারে, $\cancel{\bar{F}_1 = dP_2}$ $\bar{F}_1 = -\bar{F}_2$

~~আবার,~~ ~~ক্রিয়া~~ ক্রিয়া-~~প্রতিক্রিয়া~~ প্রতিক্রিয়ার কার্যকাল dt হলে,

$$\bar{F}_1 = \frac{d\bar{P}_1}{dt} \text{ এবং } \bar{F}_2 = \frac{d\bar{P}_2}{dt}$$

$$\therefore \frac{d\bar{P}_2}{dt} + \frac{d\bar{P}_1}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\bar{P}_1 + \bar{P}_2) = 0$$

$$\Rightarrow \bar{P}_1 + \bar{P}_2 = \text{ধ্রুবক}$$

$$\Rightarrow \Sigma P = \text{ধ্রুবক}$$

প্রতিষ্ঠিত সূত্র।

Papersoft

Ch:3

Subject..........

Date:.......... Time..........

ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্রের প্রয়োগ:

রকেটের গতি

রকেটের অভ্যন্তরে তরল জ্বালানি ব্যবহার করা হয়, দহনের ফলে তরল জ্বালানি বায়বীয় আকার ধারণ করে এবং আয়তনে বহুগুন প্রসারিত হয়, ফলে এর জ্বালানি ছিদ্রপথে দ্রুত বেগে নির্গত হয়, গ্যাস নির্গমনের ভরবেগ সংরক্ষিত হয়, ফলে রকেট একটি ধাক্কা অনুভব করে এবং সম্মুখ গতি লাভ করে। Δt সময়ে Δm পরিমাণ গ্যাস v বেগে রকেট থেকে নির্গত হলে,

ভরবেগের পরিবর্তন $\Delta \vec{P} = (\Delta m)\vec{v}$

আবার, ঘাত বল $= F$ হলে বলের ঘাত $= F\Delta t$

$\therefore F\Delta t = \Delta m \vec{v}$

$\Rightarrow F = \frac{\Delta m}{\Delta t}\vec{v}$

এখানে, $\left(\frac{\Delta m}{\Delta t}\right)$ জ্বালানি দহনের হার,

এখন, ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্রানুসারে,

$mv_r - \Delta m v = 0$

বা, $v_r = \frac{\Delta m v}{m}$

$\Rightarrow \frac{v_r}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{m\Delta t} v$ [$\because \Delta t$ দ্বারা ভাগ করে]

$\Rightarrow a = \left(\frac{\Delta m}{m\Delta t}\right) v$ [$\because a = \frac{v_r}{\Delta t}$]

Papersoft

নিউটনের গতির ৩য় সূত্র থেকে ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র ঃ—

যখন কোন ব্যবস্থার উপর প্রযুক্ত বাহ্যিক বল শূন্য হয়, তখন ব্যবস্থাটির মোট রৈখিক ভরবেগ সংরক্ষিত থাকে।

মনে করি, $\overline{P_1}$ ও $\overline{P_2}$ রৈখিক ভরবেগ সহকারে দুটি গতিশীল বস্তুর মধ্যে সংঘর্ষ ঘটলে বস্তুদ্বয়ের রৈখিক ভরবেগের পরিবর্তন যথাক্রমে $d\overline{P_1}$ ও $d\overline{P_2}$

এখন, ১ম বস্তু কর্তৃক ক্রিয়া বল $\overline{F_1}$ হলে, এবং ২য় বস্তু কর্তৃক প্রতিক্রিয়া বল $\overline{F_2}$ হলে, সূত্রানুসারে, $\overline{F_1} = -\overline{F_2}$

আবার ২য় সূত্রানুসারে, $\overline{F_1} = \frac{d\overline{P_2}}{dt}$ এবং $\overline{F_2} = \frac{d\overline{P_1}}{dt}$

সুতরাং,
$$\frac{d\overline{P_2}}{dt} = -\frac{d\overline{P_1}}{dt}$$
$$\Rightarrow \frac{d\overline{P_2}}{dt} + \frac{d\overline{P_1}}{dt} = 0$$
$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\overline{P_1} + \overline{P_2}) = 0$$
$$\Rightarrow \overline{P_1} + \overline{P_2} = \text{ধ্রুবক}$$
$$\therefore \Sigma\overline{P} = \text{ধ্রুবক}$$

প্রতিষ্ঠিত হল

Subject..

Date:.............................Time..............

শক্তি সংরক্ষণশীলতা

কোন বস্তু বা ব্যবস্থার ভৌত অবস্থানের জন্য এটি কাজ করার যে ~~সামর্থ্য~~ সামর্থ্য অর্জন করে তাকে যান্ত্রিক শক্তি বলে।

পারিপার্শ্বিকের সাপেক্ষে স্থির থাকার ফলে কোন বস্তু বা ব্যবস্থা কাজ করার যে সামর্থ্য অর্জন করে অথবা যে শক্তি সঞ্চয় করে রাখে তাকে বিভব শক্তি বলে। $U = mgh$

পারিপার্শ্বিকের সাপেক্ষে গতিশীল ~~থ~~ থাকার দরুন কোন বস্তু বা ব্যবস্থা কাজ করার যে সামর্থ্য অর্জন করে তাকে গতিশক্তি বলে। $K = \frac{1}{2}mv^2$

কাজ শক্তি উপপাদ্য : ~~কাজ শক্তি উপপাদ্যকে~~ গতিশীল বস্তুর উপর ক্রিয়ারত বলের দ্বারা কৃতকাজ বস্তুর গতিশক্তির পরিবর্তনের সমান। $W = \Delta K$

কোন বলের দ্বারা একটি বস্তুকে পূর্ণ চক্রে পরিভ্রমণ করাতে কৃতকাজের পরিমাণ শূন্য হলে, ঐ বলকে সংরক্ষণশীল বল বলে। অন্যথায় অসংরক্ষণশীল

শক্তির সংরক্ষণ সূত্র : শক্তির সৃষ্টি বা ধ্বংস নেই। এর রূপান্তর ঘটে মাত্র। রূপান্তরের আগে ও পরে মোট শক্তির পরিমাণ ধ্রুব থাকে।

$E = U + K + Q +$ অন্যান্য

যে প্রক্রিয়ায় সূর্য শক্তি উৎপন্ন করে তা তাপীয় নিউক্লিয়ার বিক্রিয়া নামে পরিচিত। এ প্রক্রিয়ায় সূর্যে ~~আ~~ ক্রমাগত হালকা H নিউক্লিয়াস অপেক্ষাকৃত ভারী He নিউক্লিয়াসে পরিণত হয় এবং প্রচুর তাপশক্তির উদ্ভব ঘটায়। C, N ও নিউক্লিয়াস এই প্রক্রিয়ায় সহায়তা করে বলে প্রক্রিয়াটি C-N চক্র নামে পরিচিত।

P-১১১

Papersoft

Ch: 4

Subject..........................
Date:.......................... Time..........

পরিবর্তনশীল বলের ক্ষেত্রে কাজ-শক্তি উপপাদ্য প্রতিষ্ঠা :

মনে করি, m ভরের কোন বস্তু v_i আদিবেগে চলছে। $F(x)$ মানের কোন পরিবর্তনশীল বল বস্তুর উপর গতির দিকে ক্রিয়া করায় বস্তুটি v_f বেগ প্রাপ্ত হয়।

সুতরাং, বস্তুর গতিশক্তির পরিবর্তন, $\Delta K = K_f - K_i$

$$= \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

$$= \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) \quad \text{--- (i)}$$

এখন, $F(x)$ বলের ক্রিয়ায় বস্তুকে dx ক্ষুদ্র দূরত্ব সরাতে কৃতকাজ,

$$dw = F\,dx$$

নিউটনের গতির ২য় সূত্রানুসারে, $F = ma = m\frac{dv}{dt}$ বসিয়ে পাই,

$$dw = m\frac{dv}{dt}dx$$

$$= mv\,dv \quad \left[\because \frac{dx}{dt} = v\right]$$

অতএব, বস্তু v_i বেগ হতে v_f বেগ প্রাপ্ত হতে মোট কাজ

$$w = \int dw$$

$$= \int_{v_i}^{v_f} mv\,dv$$

$$= m\left[\frac{v^2}{2}\right]_{v_i}^{v_f}$$

$$w = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) \quad \text{--- (ii)}$$

তুলনা করলে (i) ও (ii) থেকে পাই,

$$w = \Delta K$$

প্রতিষ্ঠিত কাজ-শক্তি উপপাদ্য

Papersoft

ধ্রুব বলের ক্ষেত্রে কাজ-শক্তি উপপাদ্য-প্রতিপাদ্য:

মনে করি, m ভরের কোন বস্তু v_0 আদিবেগে চলছে। F মানের কোন ধ্রুব বল এর গতির দিকে প্রযুক্ত হওয়ায় বস্তুটি a ত্বরণে চলে x দূরত্ব অতিক্রম করে এবং V বেগ প্রাপ্ত হয়। তাহলে, বস্তুর গতিশক্তির পরিবর্তন হবে,

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) \quad \text{—(i)}$$

এখন, F বলের দ্বারা সম্পাদিত কাজ W হলে,

$W = Fx$ গতির ২য় সূত্রানুসারে $F = ma$ হলে,

$$W = max \quad \text{—(ii)}$$

আবার, গতির সমীকরণ হতে পাই;

$$v^2 = v_0^2 + 2ax$$

বা, $$ax = \frac{v^2 - v_0^2}{2} \quad \cancel{\text{—(iii)}}$$

(ii) নং হতে পাই;
$$W = m\frac{v^2 - v_0^2}{2} \quad \text{—(iii)}$$

(i) ও (iii) নং হতে পাই,
$$\Delta K = W$$

এটিই কাজ-শক্তি উপপাদ্য

বস্তুজগতে 100% সংরক্ষণশীল বলের অস্তিত্ব নেই। কিন্তু পরমাণু জগতে সংরক্ষণশীল বল পাওয়া যায়।

Papersoft

বিভব শক্তি ও বলের মধ্যে সম্পর্ক ঃ

কোন বলক্ষেত্রে যদি শক্তির অপচয় না ঘটে তবে ঐ ক্ষেত্রকে সংরক্ষণশীল ক্ষেত্র বলে। এরূপ বলক্ষেত্রে কোন বস্তুর বলের বিরুদ্ধে সরণ ঘটলে ঋণাত্মক কাজ সম্পাদিত হয় এবং এতে বস্তুর বিভব শক্তি বৃদ্ধি পায়। ধরি, সংরক্ষণশীল বল F এর ক্রিয়ায় বলের বিরুদ্ধে কোন বস্তুর ক্ষুদ্র সরণ হলো $d\vec{r}$। বস্তুর বিভব শক্তি বৃদ্ধির পরিমাণ dV হলে;

$$dV = -\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

ধরি, $F = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$, এখানে $d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$

তাহলে, $dV = -F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad \text{——(i)}$

এখন, $V = V(x, y, z)$ হলে,

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz \quad \text{——(ii)}$$

(i) ও (ii) নং থেকে পাই,

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

এবং $F = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\right)$

$$\therefore \vec{F} = -\nabla V = -\text{grad}.V$$

অর্থাৎ বিভব শক্তির নতিমাত্রার ঋণাত্মক মান সংরক্ষণশীল বলক্ষেত্র নির্দেশ করে। এটি বল ও বিভব শক্তির সম্পর্ক নির্দেশক মৌলিক সমীকরণ

->Suggest

Ch: 4

পড়ন্ত বস্তুর ক্ষেত্রে শক্তির সংরক্ষণ সূত্র : (Conservation law of energy in case of falling body)

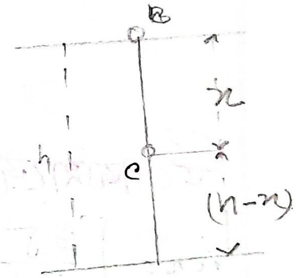
মনে করি, m ভরের একটি বস্তুকণা ভূ-পৃষ্ঠ হতে h উচ্চতায় কোন বিন্দু B তে অবস্থান করছে। B বিন্দুতে বস্তুটি স্থির আছে বলে এর কোন গতিশক্তি থাকবে না।

B বিন্দুতে বস্তুর সমস্ত শক্তি হবে বিভব শক্তি।

অতএব, B বিন্দুতে বস্তুটির মোট শক্তি, E_B = বিভব শক্তি + গতিশক্তি

$= mgh + 0$

$= mgh$



এখন, বস্তুটি B বিন্দু হতে অবাধে পতিত হলো এবং t কিছু সময় পর x দূরত্ব অতিক্রম করে C বিন্দুতে পৌঁছায় এবং v বেগ প্রাপ্ত হয়।

অর্থাৎ, $v^2 = 2gx$ [∵ আদিবেগ, $v_0 = 0$]

অতএব, C বিন্দুতে বস্তুর গতিশক্তি, $K_C = \frac{1}{2}mv^2$

$= \frac{1}{2}m \times 2gx$

$= mgx$

এখন, ভূপৃষ্ঠ হতে C বিন্দুর উচ্চতা $= (h-x)$

যেহেতু বিভব শক্তি ভূপৃষ্ঠ হতে বস্তুর উচ্চতার সমানুপাতিক। সুতরাং,

C বিন্দুতে বিভব শক্তি $U_C = mg(h-x)$

∴ C বিন্দুতে মোট শক্তি, $E_C = K_C + U_C$

$= mgx + mg(h-x)$ [K_C ও U_C এর মান বসিয়ে]

$= mgh$

অর্থাৎ $E_C = E_B$

B বিন্দুতে মোট শক্তি = C বিন্দুতে মোট শক্তি

শক্তি সংরক্ষণশীলতা

গতিশক্তি

পারিপার্শ্বিকের সাপেক্ষে গতিশীল থাকার দরুন কোন বস্তু বা ব্যবস্থা কাজ করার যে সামর্থ্য অর্জন করে তাকে গতিশক্তি বলে। একে K দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

মনে করি, m ভরের কোন ~~বস্তু~~ স্থির বস্তুর উপর একটি ধ্রুব বল F ক্রিয়া করায় বস্তুটি v বেগ প্রাপ্ত হলে গতিশক্তি K নির্ণয় করতে হবে।

এখন, F বলের ক্রিয়ায় বস্তুকে dx দূরত্বে সরাতে কৃতকাজ, $dW = Fdx$

$$\Rightarrow dw = m\frac{dv}{dt} \cdot dx \quad \left[\because F = m\frac{dv}{dt}\right]$$

$$\Rightarrow dw = mvdv \quad \left[\because \frac{dx}{dt} = v\right]$$

এখন $v=0$ বেগ হতে $v=v$ বেগ আনতে কৃত মোট কাজ অর্থাৎ

গতিশক্তি, $K = \int dw$

$$= \int_0^v mvdv$$

$$= m\left[\frac{v^2}{2}\right]_0^v$$

$$\therefore K = \frac{1}{2}mv^2$$

~~অর্থাৎ~~ গতিশক্তি বেগের বর্গের সমানুপাতিক।

GRAVITATION (মহাকর্ষ)

মহাকর্ষ ও অভিকর্ষ কি?

সমাধান: মহাকর্ষ: বিশ্ব জগতের প্রত্যেকটি বস্তুকণা অন্য সকল বস্তুকণাকে একটি বলে নিজের দিকে সর্বদা আকর্ষণ করছে। দুটি বস্তুকণার মধ্যে পারস্পরিক এ আকর্ষণকে মহাকর্ষ বলে। যেকোনো দূরত্বে থেকে একটি বস্তুকণার উপর অপর একটি বস্তুকণা আকর্ষণ করছে। তবে আকর্ষণ বলের মান শুধু বস্তুর ভর এবং দূরত্বের উপর নির্ভর করে। তবে বস্তুর আকৃতি, প্রকৃতি, অভিমুখ এবং অন্তর্বর্তী মাধ্যমের উপর নির্ভর করে না। স্বর্গীয় এবং পার্থিব যেকোনো দুটি বস্তুর মধ্যে আকর্ষণকে মহাকর্ষ বলা চলে।

অভিকর্ষ: পৃথিবী এবং ভূপৃষ্ঠস্থ অথবা উপরস্থ যেকোনো দুটি বস্তুর মধ্যে আকর্ষণকে অভিকর্ষ বলে। অভিকর্ষ বলতে পৃথিবীর সাথে অপর যেকোনো বস্তুর আকর্ষণকে বুঝায়।

☐ মহাকর্ষ ক্ষেত্র কি?

সমাধান: কোনো কণার বস্তু তার চারপাশে যে স্থান ব্যাপিয়া মহাকর্ষীয় প্রভাব বিস্তার করে তাকে ঐ বস্তুর মহাকর্ষ ক্ষেত্র বলে। মহাকর্ষ ক্ষেত্র অবশ্যই একটি ভেক্টর ক্ষেত্র।

☐ মহাকর্ষ সম্পর্কিত নিউটনের সূত্রগুলো লিখ।

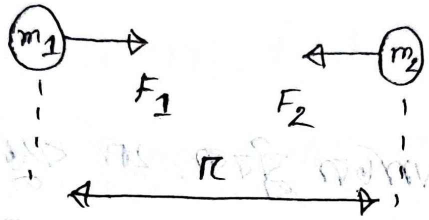
সমাধান: ১৬৮৭ খ্রিস্টাব্দে স্যার আইজ্যাক নিউটন মহাকর্ষের উপর তিনটি সূত্র আবিষ্কার করেন। তার নামানুসারে ঐ তিনটি সূত্রকে নিউটনের মহাকর্ষ সূত্র বলে, সূত্র তিনটি নিম্নরূপ:

(ক) মহাবিশ্বের যেকোন দুটি বস্তুকণা একে অপরকে তাদের সংযোগ সরলরেখা বরাবর একটি বল দ্বারা আকর্ষণ করে।

(খ) দুটি বস্তুর মধ্যবর্তী দূরত্ব অপরিবর্তিত থাকলে উহাদের আকর্ষণ বলের মান বস্তুকণা দুটির ভরের গুণফলের সমানুপাতিক।

(গ) ভর স্থির থাকলে ও আকর্ষণ বলের মান তাদের মধ্যবর্তী দূরত্বের বর্গের ব্যস্তানুপাতিক।

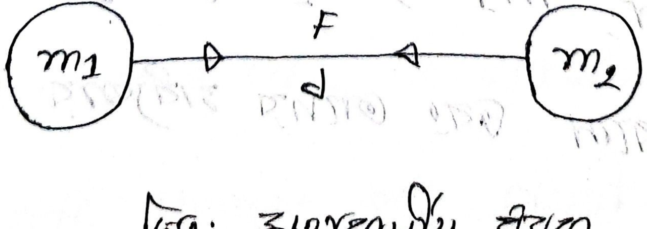
ঘ



$$F_1 = F_2 = G \frac{m_1 \times m_2}{r^2}$$

<u>ব্যাখ্যা</u>: মনে করি, দুটি বস্তুকণার ভর যথাক্রমে m_1 ও m_2 এবং তাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব d, যদি তাদের মধ্যবর্তী পারস্পরিক আকর্ষণ বল F হয়, তবে -

$F \propto m_1 \times m_2$ [যখন d ধ্রুবক] —— (i)



চিত্র: মহাকর্ষীয় ধ্রুবক

$F \propto \frac{1}{d^2}$ [যখন m_1 ও m_2 ধ্রুবক] ——— (ii)

সূত্র দুটি সংযুক্ত করে পাই,

$F \propto \frac{m_1 \times m_2}{d^2}$ [যখন m_1, m_2 ও d একসাথেই পরিবর্তনশীল]

বা, $F = G \frac{m_1 \times m_2}{d^2}$

এখানে G একটি সমানুপাতিক ধ্রুবক, যা বস্তু নিরপেক্ষে অভিন্ন হবে। একে মহাকর্ষীয় ধ্রুবক বা বিশ্বজনীন ধ্রুবকও বলা হয়।

□ মহাকর্ষীয় ধ্রুবক:

একক ভরবিশিষ্ট দুটি বস্তুকণা একক দূরত্বে থেকে যে পরিমাণ বল দ্বারা পরস্পরকে আকর্ষণ করে তাকে মহাকর্ষীয় ধ্রুবক বলে। নিউটনের মহাকর্ষ সূত্র থেকে আমরা জানি, m_1 ও m_2 ভরের দুটি বস্তু d দূরত্বে অবস্থান করলে এবং তাদের মধ্যকার আকর্ষণ বল F হয় তবে –

$$\therefore F \propto \frac{m_1 m_2}{d^2}$$

$$\text{বা, } F = G\frac{m_1 m_2}{d^2} \quad \text{——— (i)}$$

এখানে, G মহাকর্ষীয় ধ্রুবক। (i) নং সমীকরণে $m_1 = 1$ একক, $m_2 = 1$ একক এবং $d = 1$ একক হলে $F = G$ হবে।

মহাকর্ষীয় ধ্রুবকের মান C.G.S পদ্ধতিতে 6.67×10^{-8} $\frac{\text{ডাইন-সেমি}^2}{\text{গ্রাম}^2}$, এম.কে.এস পদ্ধতিতে 6.67×10^{-11} $\frac{Nm^2}{kg^2}$ এবং F.P.S পদ্ধতিতে এর মান 1.07×10^{-9} পাউন্ডাল-ফুট^2/ পাউন্ড^2।

☐ মহাকর্ষ সূত্র ব্যবহার করে অভিকর্ষজ ত্বরণ g নির্ণয়ের সমীকরণ :

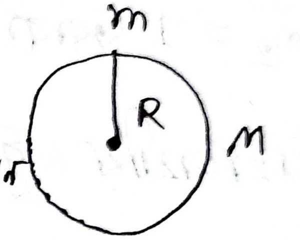
অভিকর্ষের প্রভাবে মুক্তভাবে পড়ন্ত কোন বস্তুর বেগ বৃদ্ধির হারকে অভিকর্ষজ ত্বরণ বলে। একে g দ্বারা প্রকাশ করা হয়। মনে করি, m ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকণা পৃথিবী পৃষ্ঠে অবস্থিত এবং পৃথিবী একটি গোলাকার

বস্তু। যদি পৃথিবীর ভর M এবং ব্যাসার্ধ R হয়, তবে নিউটনের মহাকর্ষ সূত্র হতে আমরা পাই,

$$F = G\frac{Mm}{R^2} \quad \text{—— (i)}$$

আবার, নিউটনের গতির দ্বিতীয় সূত্র থেকে আমরা জানি,

বল = ভর × ত্বরণ



∴ অভিকর্ষীয় বল = বস্তুর ভর × অভিকর্ষজ ত্বরণ

$$F = mg \quad \text{—— (ii)}$$

∴ (i) ও (ii) হতে পাই,

$$mg = \frac{GMm}{R^2}$$

$$\therefore g = \frac{GMm}{R^2 m}$$

$$\boxed{g = \frac{GM}{R^2}}$$ এটিই হল ভূপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণের সমীকরণ।

৭. **মুক্তিবেগের রাশিমালা;**

সমাধান: কোন বস্তুকে সর্বনিম্ন যে বেগে নিক্ষেপ করলে উহা পৃথিবী বা অন্য কোন গ্রহের মহাকর্ষীয় বাধা অতিক্রম করে বাইরে চলে যেতে পারে, যা পৃথিবী কিংবা সংশ্লিষ্ট গ্রহে আর ফিরে আসে না সেই বেগকে পৃথিবী কিংবা সংশ্লিষ্ট গ্রহের মুক্তিবেগ / নিষ্ক্রমণ / নির্গমন ~~বেগ~~ বেগ (Escape velocity) বলে।

মনে করি, একটি বস্তু যে গ্রহ থেকে নিক্ষিপ্ত। নিক্ষিপ্ত হবে সেই গ্রহের ভর ও ব্যাসার্ধ যথাক্রমে M ও R।

অতএব, গ্রহটির পৃষ্ঠে অবস্থিত যে কোন বিন্দুর মহাকর্ষীয় বিভব হলে,

$$V = -\frac{GM}{R} \quad \text{—(i)}$$

বিভবশক্তির সংজ্ঞানুযায়ী, m ভরের একটি বস্তু গ্রহের পৃষ্ঠে অবস্থিত হলে এবং তার বিভবশক্তি U হলে,

$$U = Vm$$

$$\text{বা, } U = -\frac{GMm}{R} \quad \text{—(ii)}$$

সমীকরণ (ii) থেকে বুঝা যায় যে, m ভরের বস্তুটিকে গ্রহের পৃষ্ঠ থেকে মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের বাহিরে অসীমে নিয়ে যেতে হলে $\frac{GMm}{R}$ পরিমাণ কাজ সম্পন্ন করতে হবে। সুতরাং ঐ গ্রহ থেকে নিক্ষিপ্ত কোন বস্তুকে যদি উল্লেখিত পরিমাণ বা তার চেয়ে বেশি শক্তি দেয়া হয় তাহলে ঐ বস্তুটি ঐ গ্রহের মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের বাঁধা অতিক্রম করে বাহিরে চলে যেতে পারবে এবং তা আর ফিরে আসবে না।

নিক্ষিপ্ত ঐ বস্তুর ভর ও নিক্ষেপণ বেগ যথাক্রমে m ও v_e হয় তাহলে বস্তুটির গতিশক্তি হবে $= \frac{1}{2} m v_e^2$।

এখন, বস্তুটি পৃষ্ঠ থেকে যত দূরে যেতে থাকবে তত তার গতিশক্তি হ্রাস পেতে থাকবে এবং স্থিতিশক্তি বৃদ্ধি পেতে থাকবে। তার বেগ কখনোই শূন্য হতে পারে না। অতএব, বস্তুর গতিশক্তি ও উল্লেখিত কাজের পরিমাণ সমান হলে বস্তু আর ঐ গ্রহে

ফিরে আসবে না।

$$\therefore \frac{1}{2} m v_e^2 = \frac{GMm}{R}$$

বা, $v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$

$= \sqrt{\frac{2GM}{R^2} \times R} \quad \Big| \; g = \frac{GM}{R^2}$

$v_e = \sqrt{2gR}$ ইহাই মুক্তিবেগের রাশিমালা।

Note: পৃথিবীর ক্ষেত্রে, $v_e = \sqrt{2 \times 9.8 \times 6.4 \times 10^6 m}$

$= 11.2 \ kms^{-1}$

$= 11.2 \times 3600 \ kmh^{-1}$

$= 40320 \ kmh^{-1}$

■ গ্রহের গতি সম্পর্কিত কেপলারের সূত্রাবলি:

প্রথম সূত্র:

সূর্যকে একটি ফোকাসে রেখে প্রত্যেকটি গ্রহই উপবৃত্তাকার কক্ষপথে পরিভ্রমণ করে।

দ্বিতীয় সূত্র:

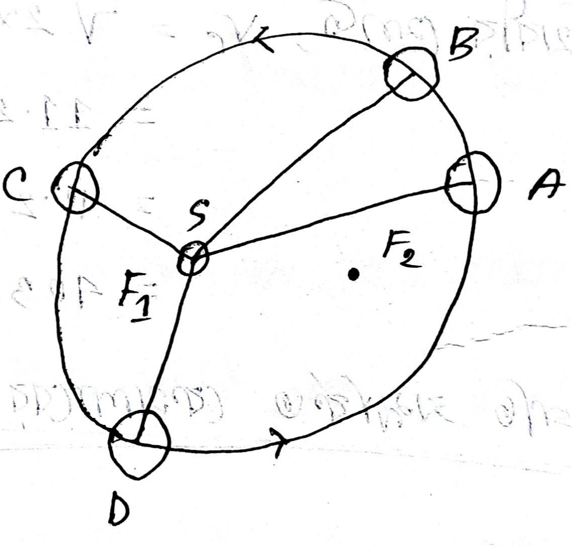
সূর্য ও গ্রহের সংযোগকারী সরলরেখা সমান সময়ে সমান ক্ষেত্রফল অতিক্রম করে। অর্থাৎ গ্রহ ও সূর্য

সংযোগকারী সরলরেখা একই সময়ে অতিক্রান্ত ক্ষেত্রফল ধ্রুবক।

তৃতীয় সূত্র:

সূর্যের চতুর্দিকে গ্রহের আবর্তন কালের বর্গ সূর্য হতে গ্রহের গড় দূরত্বের ঘনের সমানুপাতিক।

ব্যাখ্যা:



চিত্রে একটি উপবৃত্তাকার কক্ষপথ দেখানো হয়েছে।

F_1 ও F_2 উপবৃত্তের দুটি ফোকাস। কেপলারের প্রথম সূত্রানুসারে কোন গ্রহ এই উপবৃত্তাকার কক্ষপথে অবস্থান করে অর্থাৎ আবর্তন সম্পাদন করবে যেন সূর্য F_1

অথবা F_2 ফোকাসে থাকে।

চিত্রে সূর্যকে F_1 ফোকাসে দেখানো হয়েছে। এখন যদি t সময়ে গ্রহটি A অবস্থান হতে B অবস্থানে যায় অথবা ঐ একই সময়ে C অবস্থান হতে D তে যায়, তবে কেপলারের দ্বিতীয় সূত্রানুসারে, ক্ষেত্র AF_1B = ক্ষেত্র CF_1D হবে। আবার ধরা যাক সূর্যকে একবার প্রদক্ষিণ করতে গ্রহের T সময় লাগে এবং সূর্য থেকে গ্রহের দূরত্ব r, তাহলে কেপলারের তৃতীয় সূত্রানুসারে, $T^2 \propto r^3$।

মহাকর্ষীয় বিভব:

অসীম দূর হতে একক ভরের বস্তুকে মহাকর্ষ ক্ষেত্রের কোনো বিন্দুতে আনতে যে পরিমাণ কার্য সম্পাদন করতে হয় তাকে উক্ত ক্ষেত্রের ঐ বিন্দুর মহাকর্ষ বিভব বলে। একে V দিয়ে প্রকাশ করা হয়। অসীম দূর হতে m ভরের কোনো বস্তুকে মহাকর্ষ ক্ষেত্রের কোন বিন্দুতে আনতে W পরিমাণ কার্য সম্পাদন করতে হলে, তবে ঐ বিন্দুর মহাকর্ষ বিভব,

$$V = \frac{W}{m} \quad \text{—(i)}$$

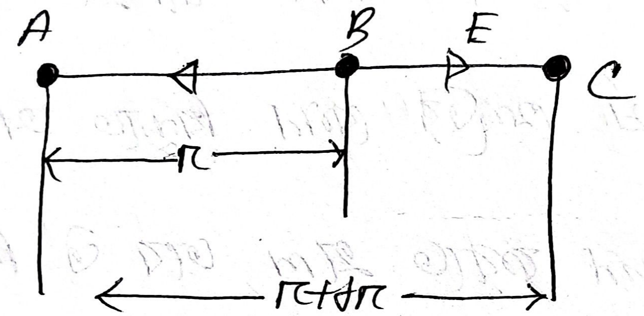
মহাকর্ষ বিভব একটি অদিক রাশি।

বিন্দু ভরের জন্য মহাকর্ষ বিভব:

মনে করি, একটি বিন্দু ভর m কোন বিন্দু A তে অবস্থান করছে। A হতে r দূরে কোন বিন্দু B এর মহাকর্ষ বিভব নির্ণয় করতে হবে। এখন M ভর হতে r দূরে মহাকর্ষ প্রাবল্য,

$$E_G = \frac{GM}{r^2}$$

ধরি প্রাবল্য BA বরাবর ক্রিয়া করে। AB রেখার উপর B-এর কাছাকাছি C বিন্দু বিবেচনা করা হলো। ধরি, BC = dr এবং dr খুবই ক্ষুদ্র।



তাহলে BC-এর সর্বত্র মহাকর্ষ প্রাবল্যের মানকে সুষম।

এখন B থেকে C তে একক ভর স্থানান্তরিত করতে কৃতকাজ অর্থাৎ বিন্দুদ্বয়ের বিভব পার্থক্য,

$$dV = \vec{E_G} \cdot \vec{dr} = E_G \, dr \cos 0^\circ$$

E_G এর মান বসিয়ে পাই

$$dV = \frac{GM}{r^2} dr$$

এখন অসীম দূর হতে একক ভরকে B বিন্দুতে আনতে সম্পাদিত কাজের পরিমাণই হবে B বিন্দুর বিভব।

অতএব. উপরের সমীকরণকে $r = \infty$ হতে $r = r$ সীমার মধ্যে যোগজীকরণ করলে B বিন্দুর বিভব V পাওয়া যাবে। সুতরাং, $V = \int dV$।

$$V = \int_{\infty}^{r} \frac{GM}{r^2} dr = GM\left[-\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{r}$$

$$= GM\left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{\infty}\right)$$

$$V = -\frac{GM}{r}$$

এটিই নির্ণেয় বিভব।

প্র ১২: কেপলারের সূত্র থেকে মহাকর্ষ সূত্র:

কেপলারের সূত্র হতে নিউটনের মহাকর্ষ সূত্র প্রতিপাদন করা যায়। তবে এর জন্য গ্রহের গতিপথকে মোটামুটিভাবে বৃত্তাকার বিবেচনা করা হয়। বিজ্ঞানী আইজ্যাক নিউটন গ্রহের গতিপথকে বৃত্তাকার বিবেচনা করে তার মহাকর্ষ সূত্রে উপনীত হয়েছেন।

ধরা যাক, m_1 ভরের একটি গ্রহ সূর্যের চারদিকে r_1 ব্যাসার্ধের বৃত্তপথে ঘুরছে। যদি গ্রহের কৌণিক দ্রুতি ω_1 হয়, তাহলে অভিকেন্দ্র বল

$$F_1 = m_1\omega_1^2 r_1 = m_1\left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 r_1 = \frac{4\pi^2 m_1 r_1}{T_1^2}$$

যেখানে T_1 হলো গ্রহের আবর্তনকাল। একইভাবে অন্য একটি গ্রহের জন্য লিখা যায়

$$F_2 = \frac{4\pi^2 m_2 r_2}{T_2^2}$$

উপরের সমীকরণদ্বয় হতে পাই,

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1 r_1 T_2^2}{m_2 r_2 T_1^2} \quad \text{—— (i)}$$

কেপলারের তৃতীয় সূত্রানুসারে,

$$T^2 \propto r^3 \text{ ; অতএব,}$$

$$\frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{r_2^3}{r_1^3}$$

(i) নং সমীকরণ হতে পাই,

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1 r_1}{m_2 r_2} \times \frac{r_2^3}{r_1^3}$$

$$\therefore \frac{F_1}{\frac{m_1}{r_1^2}} = \frac{F_2}{\frac{m_2^2}{r_2^2}}$$

সুতরাং যে কোন গ্রহের ক্ষেত্রে,

$$F = K \frac{m}{r^2} \quad \text{—— (ii)}$$

এখানে K একটি সমানুপাতিক ধ্রুবক। এখন কেপলারের সূত্র অনুসরণ করে বলা যায় যে, সকল গ্রহের জন্য K এর মান একই হবে। অতএব (i) নং সমীকরণ হতে আমরা বলতে পারি যে, গ্রহের উপর সূর্যের আকর্ষণ বল গ্রহের ভরের সমানুপাতিক এবং সূর্য হতে গ্রহের দূরত্বের বর্গের ব্যস্তানুপাতিক।

এখন আমরা জানি, প্রত্যেক ক্রিয়ারই একটি সমান ও বিপরীত প্রতিক্রিয়া আছে। সুতরাং গ্রহ কর্তৃক সূর্যের উপর একটি আকর্ষণ বল ক্রিয়া করবে যার পরিমাণ হবে F। কিন্তু (i) নং সমীকরণ হতে দেখা যায় যে, গ্রহের প্রতি সূর্যের আকর্ষণ বলের সাথে গ্রহের ভরের সম্পর্ক আছে। কাজেই সূর্যের প্রতি গ্রহের আকর্ষণ বলের সাথে সূর্যের ভরের একই রকম

সম্পর্ক থাকবে। এ কারণে ধ্রুবক K এর পরিবর্তে GM লিখা যায়, যেখানে M সূর্যের ভর ও G একটি ধ্রুবক। কাজেই গ্রহ ও সূর্যের পারস্পরিক আকর্ষণ বল F হলে, আমরা লিখতে পারি,

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

এটিই নিউটনের মহাকর্ষ সূত্র।

৮.৫ মহাকর্ষ সূত্র থেকে কেপলারের তৃতীয় সূত্র:

ধরা যাক, সূর্যের ভর M এবং সূর্যকে কেন্দ্র করে m ভরের কোন গ্রহ r ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পথে v সুষম রৈখিক দ্রুতিতে আবর্তন করছে। তাহলে গ্রহের অভিকেন্দ্র বল $F_c = \frac{mv^2}{r}$ হবে।

এখন সূর্য ও গ্রহের মধ্যকার মহাকর্ষ বল,

$$F = G\frac{M_s m}{r^2}$$

সাম্যাবস্থায়

$$F_c = F$$

বা, $\frac{mv^2}{r} = \frac{GM_s m}{r^2}$

$$\therefore v^2 = \frac{GM_s}{r} \quad \text{——— (i)}$$

গ্রহের পর্যায়কাল T হলে,

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

বা, $v^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \quad \text{——— (ii)}$

সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই,

$$\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{GM_s}{r}$$

বা, $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_s} r^3 \quad \text{——— (iii)}$

এখন $\frac{4\pi^2}{GM_s}$ একটি ধ্রুব সংখ্যা। অতএব

$$T^2 \propto r^3$$

অর্থাৎ গ্রহের আবর্তনকালের বর্গ গ্রহ ও সূর্যের মধ্যবর্তী দূরত্বের ঘনানুপাতিক।

একটি ফাঁপা গোলক অথবা পুরু গোলকের দরুণ মহাকর্ষ বিভব ও প্রাবল্য:

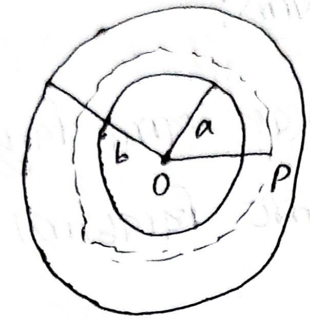
- একটি ফাঁপা গোলকের কোন বিন্দুর বিভব নির্ণয় করার ক্ষেত্রে নিম্নের মোট তিনটি বিবেচনায় নিতে হয়। যথা:

(ক) বিন্দু ফাঁপা গোলকের বাহিরে অবস্থিত।
(খ) বিন্দু গোলকের মধ্যে ফাঁপা স্থানে অবস্থিত।
(গ) বিন্দু ফাঁপা গোলকের অভ্যন্তরে উপাদানের মধ্যে অবস্থিত।

(ক) বিন্দু ফাঁপা গোলকের বাহিরে অবস্থিত:

ধরা যাক, একটি ফাঁপা গোলকের ভিতরের ব্যাসার্ধ a ও বাহিরের ব্যাসার্ধ b। এর কেন্দ্র O হতে দূরত্বে অবস্থিত। কোনো বিন্দু P এর মহাকর্ষ বিভব ও প্রাবল্য নির্ণয় করতে হবে।

এখন x ব্যাসার্ধের ও dx পুরুত্বের একটি পাতলা এককেন্দ্রিক গোলীয় বিবেচনা করা যাক,



খোলকের আয়তন হবে $4\pi x^2 dx$। যদি গোলকের উপাদানের ঘনত্ব ρ হয়, তাহলে খোলকের ভর $4\pi\rho x^2 dx$ হবে। এখন আমরা জানি, বহিস্থ বিন্দুতে বিভবের ক্ষেত্রে গোলীয় খোলক এমন আচরণ করে যেন এর সমস্ত ভর কেন্দ্রে কেন্দ্রীভূত থাকে। সুতরাং পাতলা খোলকের জন্য P বিন্দুর বিভব হবে,

$$dV = -G\frac{4\pi\rho x^2 dx}{r}$$

এই সমীকরণকে $x = a$ হতে $x = b$ সীমা সমূহের মধ্যে সমাকলন করলে সমগ্র গোলকের জন্য P বিন্দুর বিভব V পাওয়া যাবে. অতএব

$$V = \int_a^b -G\frac{4\pi\rho x^2 dx}{r}$$

$$= -\frac{G4\pi\rho}{r}\int_a^b x^2 dx$$

$$= -\frac{G4\pi\rho}{r}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b$$

$$= -\frac{G4\pi\rho}{r}\cdot\frac{1}{3}(b^3-a^3)$$

~~কিন্তু $\frac{4}{3}$~~ $= -\frac{G4\pi\rho}{3r}(b^3-a^3)$ —— (1)

কিন্তু $\frac{4\pi\rho}{3}(b^3-a^3)$ = ফাঁপা গোলকের ভর । অতএব

$$V = -\frac{GM}{r}$$

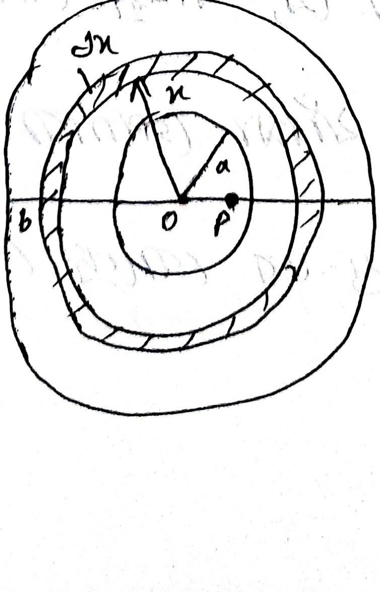
<u>প্রাবল্য</u>: P বিন্দুর প্রাবল্য E হলে,

$$E = -\frac{dV}{dr} = -\frac{d}{dr}\left(\frac{GM}{r}\right) = \frac{GM}{r^2}$$

সুতরাং বলা যায় যে, বহিঃস্থ কোন বিন্দুতে বিভব অথবা প্রাবল্যের ক্ষেত্রে ফাঁপা গোলক এমন আচরণ করে যেন, এর সমস্ত ভর কেন্দ্রে কেন্দ্রীভূত থাকে ।

(ঘ) বিন্দু গোলকের ভিতরে থাকলে অবস্থানে:

ধরা যাক, গোলকের অভ্যন্তরে থাকলে অবস্থানে বিন্দু O হতে r দূরে P কোন বিন্দুর মহাকর্ষ বিভব ও তীব্রতা নির্ণয় করতে হবে। এখন x ব্যাসার্ধ ও dx পুরুত্বের একটি পাতলা এককেন্দ্রিক গোলীয় খোলক বিবেচনা করা যাক। তাহলে, খোলকের ভর $(4\pi x^2 dx)\rho$ হবে যেখানে ρ হলো গোলকের উপাদানের ঘনত্ব। যেহেতু P বিন্দু খোলকের অভ্যন্তরে অবস্থান করে থাকছে, তাই খোলকের P বিন্দুর মহাকর্ষ বিভব



$$dV = -G\frac{(4\pi x^2 dx)\rho}{x}$$
$$= -4\pi G\rho x\,dx$$

এই সমীকরণকে $x = a$ হতে $x = b$ সীমার মধ্যে সমাকলন করলে সমগ্র গোলকের জন্য P বিন্দুর মহাকর্ষ বিভব V পাওয়া যাবে। অতএব,

$$V = \int_a^b -4\pi G\rho x\,dx = -2\pi G\rho(b^2 - a^2) \quad \text{—} (1)$$

প্রাবল্য: P বিন্দুর মহাকর্ষ প্রাবল্য E হলে,

$$E = -\frac{dV}{dr} = -\frac{d}{dr}\left[2\pi G\rho(b^2 - a^2)\right] = 0$$

$$= -4\pi\rho G\int_a^b x\,dx$$
$$= -4\pi\rho G\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b$$
$$= -4\pi\rho G\cdot\frac{1}{2}\cdot(b^2 - a^2)$$
$$= -2\pi G\rho(b^2 - a^2)$$

(গ) বিন্দু গোলকের অভ্যন্তরে উপাদানের মধ্যে অবস্থিত:

ধরা যাক গোলকের অভ্যন্তরে উপাদানের মধ্যে কেন্দ্র O হতে r দূরে কোন বিন্দু P এর মহাকর্ষ বিভব ও প্রাবল্য নির্ণয় করতে হবে। O কে কেন্দ্র করে r ব্যাসার্ধের একটি গোলক বিবেচনা করা যাক। যেহেতু P বিন্দু r অন্তঃব্যাসার্ধ এবং b বহিঃব্যাসার্ধ বিশিষ্ট গোলীয় খোলকের অভ্যন্তরে থাকে, কাজেই P বিন্দুতে ঐ খোলকের জন্য বিভব

$$V_1 = -2G\pi\rho(b^2 - r^2)$$

আবার P বিন্দু r বহিঃব্যাসার্ধ এবং a অন্তঃব্যাসার্ধ বিশিষ্ট গোলীয় খোলকের ঠিক বাইরে অবস্থান করে। অতএব ঐ খোলকের জন্য P বিন্দুর বিভব

$$V_2 = -\frac{4\pi G\rho}{3r}(r^3 - a^3)$$

অতএব, ফাঁপা গোলকের জন্য P বিন্দুতে মোট বিভব

$$V = V_1 + V_2$$

$$= -2\pi\rho G(b^2 - r^2) - \frac{4\pi\rho G}{3r}(r^3 - a^3)$$

$$= -2\pi\rho G\left(b^2 - \frac{r^3}{3} - \frac{2a^3}{3r}\right)$$

<u>প্রাবল্য:</u> ফাঁপা গোলকের জন্য P বিন্দুতে প্রাবল্য

$$E = -\frac{dV}{dr}$$

$$= -\frac{d}{dr}\left[2\pi\rho G\left(b^2 - \frac{r^2}{3} - \frac{2a^3}{3r}\right)\right]$$

$$= 2\pi\rho G\left(\frac{2r}{3} - \frac{2a^3}{3r^2}\right)$$

$$\therefore E = \frac{4\pi\rho G}{3r^2}(r^3 - a^3)$$

এ থেকে বলা যায় যে, ফাঁপা গোলকের অভ্যন্তরের ও আবরণের মধ্যস্থিত কোন বিন্দুতে মহাকর্ষীয় প্রাবল্য এমন হবে যেন ঐ বিন্দুর বাইরের গোলকের কোন প্রভাব নেই।

* $-2\pi\rho G(b^2-r^2) - \frac{4\pi\rho G}{3r}(r^3-a^3)$

$= -2\pi\rho G(b^2-r^2) - \frac{2}{3r}(r^3-a^3)$

$= -2\pi\rho G(b^2-r^2) - \frac{2r^3}{3r} - \frac{2a^3}{3r}$

$= -2\pi\rho G(b^2-r^2) - \frac{2r^2}{3} - \frac{2a^3}{3r}$

$= -2\pi\rho G(b^2 - r^2 - \frac{2r^2}{3} - \frac{2a^3}{3r})$

$= -2\pi\rho G(b^2 - \frac{3r^2-2r^2}{3} - \frac{2a^3}{3r}$

$= -2\pi\rho G(b^2 - \frac{r^2}{3} - \frac{2a^3}{3r})$

* $-\frac{d}{dr}\left[2\pi\rho G(b^2 - \frac{r^2}{3} - \frac{2a^3}{3r})\right]$

$= -2\pi\rho G\left[\frac{d}{dr}(b^2) - \frac{d}{dr}(\frac{r^2}{3}) - \frac{d}{dr}(\frac{2}{3}\frac{a^3}{r})\right.$

$= -2\pi\rho G\left[0 - \frac{1}{3}2r - \frac{2a^3}{3}\cdot(r^{-1})\right.$

$= -2\pi\rho G\left[0 - \frac{2r}{3} - \frac{2a^3}{3}\cdot(-r^{-2})\right.$

$= -2\pi\rho G\left[\frac{2a^3}{3r^2} - \frac{2r}{3}\right]$

$$= -2\pi \rho G \left\{ \frac{2}{3} \left(\frac{a^3}{r^2} - r \right) \right\}$$

$$= -\frac{4\pi \rho G}{3} \left[\frac{a^3 - r^3}{r^2} \right]$$

$$= \frac{4\pi \rho G}{3r^2} \left[r^3 - a^3 \right]$$

স্থিতিস্থাপকতা

যে ধর্মের জন্যে বলের ক্রিয়ায় বিকৃত বস্তু, প্রযুক্ত বল অপসারণে পূর্বাবস্থায় ফিরে আসে বা আসতে চেষ্টা করে তাকে স্থিতিস্থাপকতা বলে।

P.: ২৫০

হুকের সূত্র :

স্থিতিস্থাপকতার সীমার মধ্যে কোন বস্তুর পীড়ন এর বিকৃতির সমানুপাতিক।

অর্থাৎ, পীড়ন $\propto$ বিকৃতি

বা, $\frac{\text{পীড়ন}}{\text{বিকৃতি}} = \text{ধ্রুবক}$

এই ধ্রুবককে স্থিতিস্থাপকতার ধ্রুবক বা স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক বলে।

ইয়ং এর মানাঙ্ক

স্থিতিস্থাপকতার সীমার মধ্যে দৈর্ঘ্য পীড়ন ও দৈর্ঘ্য বিকৃতির অনুপাতকে ইয়ং এর স্থিতিস্থাপক মানাঙ্ক বলে। একে Y দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

অতএব, $Y = \frac{\text{দৈর্ঘ্য পীড়ন}}{\text{দৈর্ঘ্য বিকৃতি}}$

এখন, A প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট L দৈর্ঘ্যের কোন তার বা রডের দৈর্ঘ্য বরাবর F বল প্রয়োগ করলে যদি তার বা রডের দৈর্ঘ্য l পরিমাণ বৃদ্ধি বা হ্রাস পায়, তাহলে, দৈর্ঘ্য বিকৃতি $= \frac{l}{L}$ এবং দৈর্ঘ্য পীড়ন $= \frac{F}{A}$

$$\therefore Y = \frac{F/A}{l/L}$$

$$\Rightarrow Y = \frac{FL}{Al}$$

Ch: ২

Subject........ Date:........ Time........

দৃঢ়তার স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক বা কাঠিন্যের গুণাঙ্ক বা ব্যবর্তন গুণাঙ্ক :-

স্থিতিস্থাপকতার সীমার মধ্যে আকার পীড়ন ও আকার বিকৃতির অনুপাতকে দৃঢ়তার গুণাঙ্ক বলে। একে n দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

অতএব, $n = \dfrac{\text{আকার পীড়ন}}{\text{আকার বিকৃতি}}$

এখন, কোন দৃঢ় বস্তুর পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল A এবং উক্ত ~~স্পর্শী~~ পৃষ্ঠে ক্রিয়াশীল স্পর্শীয় বল F। ব্যবর্তন কোণ θ হলে, ব্যবর্তন পীড়ন F/A এবং ব্যবর্তন বিকৃতি θ।

$$\therefore n = \frac{F/A}{\theta}$$

$$\text{বা, } n = \frac{F}{A\theta}$$

আয়তনের স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক :-

স্থিতিস্থাপকতার সীমার মধ্যে আয়তন ~~আকার~~ পীড়ন ও আয়তন ~~আকার~~ বিকৃতির অনুপাতকে আয়তনের স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক বলে। একে K দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

অতএব, $K = \dfrac{\text{আয়তন পীড়ন}}{\text{আয়তন বিকৃতি}}$

আয়তনের স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ককে কোন কোন ক্ষেত্রে অসংনম্যতা বলে। এর বিপরীত রাশিকে সংনম্যতা বলে। একে β দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

$$\therefore \beta = \frac{\text{আয়তন বিকৃতি}}{\text{আয়তন পীড়ন}} = \frac{1}{K}$$

এখন, V আয়তনের কোন বস্তুর উপর চারদিক থেকে F মানের বল প্রয়োগের দরুন বস্তুটির আয়তন v ~~হলে~~ পরিমাণ হ্রাস পেলে, A ক্ষেত্রফল হলে আয়তনের স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক, $K = \dfrac{F/A}{v/V}$

$$= \frac{PV}{v} \quad [\because P = F/A]$$

পয়সনের অনুপাত

স্থিতিস্থাপকতার সীমার মধ্যে পার্শ্ব বিকৃতি ও দৈর্ঘ্য ~~বিকি~~ বিকৃতির অনুপাতকে পয়সনের অনুপাত বলে। একে σ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

অতএব, $\sigma = \dfrac{\text{পার্শ্ব বিকৃতি}}{\text{দৈর্ঘ্য বিকৃতি}}$

এখন, L দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট কোন তারের ব্যাস D, বিকৃতির ফলে তারের দৈর্ঘ্য l পরিমাণ বৃদ্ধি পেলে যদি ব্যাস d পরিমাণ হ্রাস পায় তবে দৈর্ঘ্য বিকৃতি l/L এবং পার্শ্ব বিকৃতি d/D হবে।

$$\therefore \sigma = \frac{d/D}{l/L}$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{dL}{lD}$$

আবার, কোন তার বা রডের ব্যাসার্ধ R ও দৈর্ঘ্য L_0 হলে ব্যাস $d = 2R$।

তাহলে, পার্শ্ব বিকৃতি $= \dfrac{\text{ব্যাসের পরিবর্তন}}{\text{আদি ব্যাস}} = \dfrac{\Delta d}{d} = \dfrac{2\Delta R}{2R} = \dfrac{\Delta R}{R}$

এবং দৈর্ঘ্য বিকৃতি $= \dfrac{\text{দৈর্ঘ্যের পরিবর্তন}}{\text{আদি দৈর্ঘ্য}} = \dfrac{\Delta L}{L_0}$

$$\therefore \sigma = \frac{\Delta R/R}{\Delta L/L_0}$$

$$\Rightarrow \sigma = -\frac{L_0 \Delta R}{R \Delta L}$$

দৈর্ঘ্য বৃদ্ধিতে ব্যাসার্ধ কমে যায় বলে (−) চিহ্ন ব্যবহার করা হয়েছে।

σ-এর সীমা

আমরা জানি, $Y = 3K(1-2\sigma)$

বা, $1-2\sigma = \frac{Y}{3K}$

কিন্তু $\frac{Y}{3K}$ একটি ধনাত্মক সংখ্যা

$\therefore\ 1-2\sigma > 0$

বা, $\sigma < \frac{1}{2}$ —— (i)

আবার, $Y = 2n(1+\sigma)$

বা, $1+\sigma = \frac{Y}{2n}$

কিন্তু $\frac{Y}{2n}$ একটি ধনাত্মক সংখ্যা

$\therefore\ 1+\sigma > 0$

বা, $\sigma > -1$ —— (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই,

$$\frac{1}{2} > \sigma > -1$$

অর্থাৎ σ এর মান $\frac{1}{2}$ ও -1 এর মধ্যে থাকে।

পৃষ্ঠটান ও সান্দ্রতা

কোন তরল পৃষ্ঠ বরাবর একটি রেখা কল্পনা করলে ঐ রেখার একক দৈর্ঘ্য এবং রেখার উভয় পাশে ~~অভিলম্ব~~ অভিলম্বভাবে এবং তরল পৃষ্ঠের স্পর্শক রূপে যে বল ক্রিয়া করে ~~তা~~ তাকে পৃষ্ঠটান বলে। ~~N~~ $T = \frac{F}{l}$; Nm^{-1}

দুটি ভিন্ন পদার্থের অনুর মধ্যে যে আকর্ষণ বল ক্রিয়া করে তাকে আসঞ্জন বল বলে।

একই পদার্থের অনুর মধ্যে যে আকর্ষণ বল ক্রিয়া করে তাকে সংসক্ত বল বলে।

দুটি অনুর মধ্যবর্তী দূরত্ব অতিক্ষুদ্র হলেই সংসক্তি বল কার্যকর হয়। এমনকি এই দূরত্ব বাড়লেই সংসক্ত বল ~~দুর্বল হয়ে পড়ে~~ উপেক্ষণীয় হয়ে যায়।

সমোষ্ণ অবস্থায় কোন তরলের মুক্তভলের একক ক্ষেত্রফল বৃদ্ধির জন্য সম্পন্ন কাজের পরিমাণ তথা মুক্ত তলের একক ক্ষেত্রফলে সঞ্চিত বিভব শক্তিকেই তরলের পৃষ্ঠ শক্তি বলে। $E = AT$

কঠিন ও তরলের স্পর্শ বিন্দু থেকে বক্র তরল তলে অঙ্কিত স্পর্শক কঠিন তলের সাথে তরলের ভেতরে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে উক্ত কঠিন পদার্থের সাথে ও তরলের মধ্যকার স্পর্শকোণ বলে।

সংসক্ত বলের জন্যই তরলের মুক্ত পৃষ্ঠ থাকে এবং পৃষ্ঠটানের উদ্ভব হয়। বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$

$F = 2lT$ $W = \Delta A T$ $\Delta A = 2 \cdot 4\pi (r_2^2 - r_1^2)$

ক্ষেত্রফল বৃদ্ধি; দুটি পৃষ্ঠ

ফোটার সংখ্যা; ছোট ফোটার

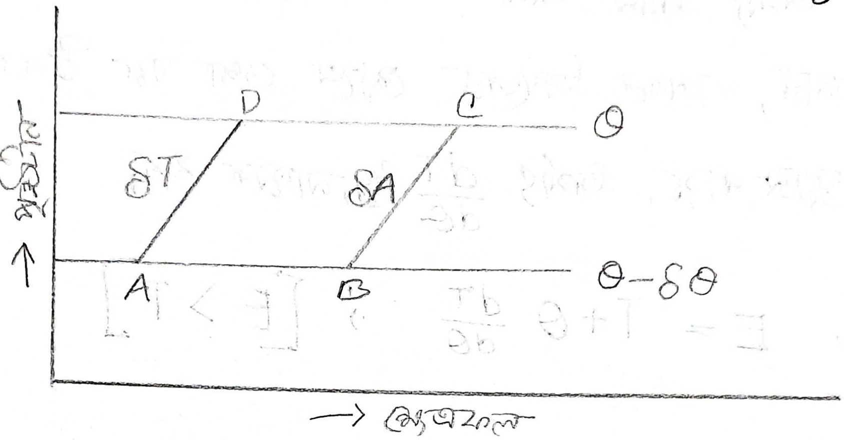
বড় ফোঁটার আয়তন = N × ছোট ফোঁটার আয়তন

পৃষ্ঠটান ও তাপমাত্রার সম্পর্ক!

তরলের পৃষ্ঠটানের উপর তাপমাত্রার প্রভাব বর্ণনা কর।

⇒ তরল পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল বৃদ্ধিজনিত যান্ত্রিক শক্তির সাথে কিছু তাপশক্তি শোষিত হয়, এবং এই দুই শক্তির সমষ্টিকে পৃষ্ঠশক্তি বলে। প্রতি একক ক্ষেত্রফল বৃদ্ধির জন্য আহরিত তাপশক্তি Q হলে, পৃষ্ঠশক্তি,

$$E = T + Q$$



উল্লেখিত চিত্রকে, কার্নোচক্রের অধীন ক্ষেত্র বিবেচনা করলে, θ ও $\theta-\delta\theta$ পরম তাপমাত্রায় তরলের পৃষ্ঠটান হবে যথাক্রমে T ও $T-\delta T$। কার্নো চক্রের D বিন্দু থেকে C বিন্দুতে পৌঁছাতে যদি পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল δA পরিমাণ বৃদ্ধি পায়, তবে কৃতকাজ $T\delta A$ হবে। এই পর্যায়ে উষ্ণতা θ অপরিবর্তিত থাকে এবং শোষিত তাপশক্তি হবে $Q\delta A$। ~~এই পর্যায়ে উষ্ণতা θ থাকে~~ C ও B বিন্দুর মাঝে পৃষ্ঠতলের রুদ্ধতাপ সংকোচন ঘটে এবং এতে $\delta\theta$ পরিমাণ উষ্ণতা হ্রাস পায়। অতঃপর B থেকে A তে একটি সমোষ্ণ সংকোচন ঘটিয়ে রুদ্ধতাপ প্রসারণের মাধ্যমে আদি অবস্থা D তে ফিরে আসে।

কার্নোর সূত্রানুসারে,

$$\frac{\text{চক্র সম্পাদনে বহিঃস্থ উৎস কর্তৃক সম্পাদিত কাজ}}{\text{উচ্চ তাপমাত্রায় শোষিত তাপ}} = \frac{\delta\theta}{\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{\left(T - \frac{dT}{d\theta}d\theta\right)\delta A - T\delta A}{Q\delta A} = \frac{\delta\theta}{\theta}$$

$$\therefore Q = -\theta\frac{dT}{d\theta}$$

Subject...
Date:.............................Time.............

সুতরাং, $E = T - \theta \frac{dT}{d\theta}$

অতএব, মোট পৃষ্ঠশক্তি অনুসারে, ~~অথবা~~ পৃষ্ঠটানের সমান হবে যখন $\theta = 0$, অর্থাৎ পরম শূন্য তাপমাত্রায়, অনুরূপ $\frac{dT}{d\theta} = 0$ হলেও $E = T$ হবে। আবার, সকল তরলের ক্ষেত্রে দেখা যায় উষ্ণতা বৃদ্ধিতে পৃষ্ঠটান হ্রাস পায়, অর্থাৎ $\frac{dT}{d\theta}$ ঋণাত্মক হয়,

সুতরাং, $E = T + \theta \frac{dT}{d\theta}$; $[E > T]$

বড় তরলের ফোঁটাকে ভেঙে আয়তনে ছোট ফোঁটায় পরিণত করতে সরবরাহকৃত শক্তির বা কৃত কাজের রাশিমালা :

ধরি, R ব্যাসার্ধের বড় ফোঁটাকে ভেঙে r ব্যাসার্ধের N সংখ্যক সমআয়তনের ছোট ফোঁটায় পরিণত করা হলো। এর ফলে পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল বৃদ্ধি পায় এবং ফোঁটাটিতে কিছু শক্তি সরবরাহ করতে হয়।

∴ বড় ফোঁটার আয়তন = N × ছোট ফোঁটার আয়তন।

বা, $V = N \times v$

বা, $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi r^3 \times N$

বা, $R^3 = r^3 N$

এখন, বড় ফোঁটার পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল, $A = 4\pi R^2$

ছোট " " " , $a = 4\pi r^2$

∴ N সংখ্যক ছোট ফোঁটার পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল, $A' = N \times a = N \times 4\pi r^2$

$\therefore A' > A$

এখন, পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল বৃদ্ধি $\Delta A = A' - A$

$$= N \times 4\pi r^2 - 4\pi R^2$$
$$= 4\pi (Nr^2 - R^2)$$

সুতরাং, ফোঁটাতে অবরোধ কৃত শক্তি বা কৃতকাজ,

$$E = W = \text{ক্ষেত্রফল বৃদ্ধি} \times \text{পৃষ্ঠটান}$$

বা, $E = W = 4\pi (Nr^2 - R^2) \times T$

বেগের যে নির্দিষ্ট সীমা অতিক্রম করার পর প্রবাহীর গতি অশান্ত হয় তাকে ক্রান্তিবেগ বা সংকট বেগ বলে। V_c

যে ধর্মের জন্যে প্রবাহী তার বিভিন্ন স্তরের আপেক্ষিক গতিকে বাধাপ্রাপ্ত করতে চায় তাকে সান্দ্রতা বলে।

একক বেগ অবক্রম বজায় রাখার জন্যে প্রবাহীর একক ক্ষেত্রফলের উপর যে পরিমাণ স্পর্শী বল ক্রিয়া করে, তাকে ঐ প্রবাহীর সান্দ্রতার সুনাঙ্ক বা সান্দ্রতাঙ্ক বা সান্দ্রতার সহগ বলে। $F = \eta A \frac{dv}{dy}$ (বেগ / দূরত্ব)

→ সান্দ্রতা সহগ

$V_c = \frac{K\eta}{\rho r}$ → নলের ব্যাসার্ধ, → তরলের ঘনত্ব

সরু নলের ক্ষেত্রে রেনল্ড সংখ্যা K এর মান প্রায় 1000 এর কাছাকাছি হয়, K এর মান 1000 এর বেশি হলে প্রবাহকে অশান্ত বিবেচনা করা হয়।

তরল অসংনম্য পদার্থ, চাপের পরিবর্তনে তরলের আয়তন ও ঘনত্বের পরিবর্তন হয় না, গ্যাস সংনম্য পদার্থ, পরিবর্তন হয়।

তরল বা বায়বীয় প্রবাহীর মধ্যদিয়ে ক্ষুদ্রাকারের গোলাকার পড়ন্ত বস্তুর ক্ষেত্রে নিম্নমুখী অভিকর্ষ বল এবং ঊর্ধ্বমুখী সান্দ্রতাজনিত বলের মান পরস্পর সমান হলে গতি জড়তার কারণে বস্তু যে স্থির বেগে পড়তে থাকে তাকে প্রান্তবেগ বা প্রান্তিক বেগ বা অন্তবেগ বলে। V_t

স্টোকসের সূত্রঃ স্টোকস এর মতে r ব্যাসার্ধের কোন গোলক η সান্দ্রতা সুনাঙ্কের কোন প্রবাহীর মধ্যে v প্রান্তিক বেগে পড়তে থাকলে গোলকটির উপর ক্রিয়ারত সান্দ্রতাজনিত ঊর্ধ্বমুখী বল $F = 6\pi\eta r v$

স্টোকস এর সমীকরণ

স্টোকস এর মতে, r ব্যাসার্ধের কোন গোলক η সান্দ্রতা গুনাঙ্কের কোন প্রবাহীর মধ্যে v আন্তিক বেগে পড়তে থাকলে গোলকটির উপর ক্রিয়ারত সান্দ্রতাজনিত ঊর্ধ্বমুখী বল, $F = 6\pi\eta r v$

এখন, গোলকের উপাদান ঘনত্ব ρ হলে এর ভর $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ এবং এর উপর

ক্রিয়ারত অভিকর্ষ বল $=$ গোলকের ওজন

$=$ ভর $\times$ অভিকর্ষজ ত্বরণ

$= \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g$

আবার, প্রবাহীর ঘনত্ব σ হলে, প্লবতাজনিত ঊর্ধ্বমুখী বল

$=$ বস্তুর সমআয়তন প্রবাহীর ওজন

$= \frac{4}{3}\pi r^3 \sigma g$

অতএব, বস্তুর উপর ক্রিয়ারত লব্ধ নিম্নমুখী বল,

$$F' = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g - \frac{4}{3}\pi r^3 \sigma g$$

$$= \frac{4}{3}\pi r^3 g(\rho - \sigma)$$

এখন, গোলকটি আন্তিক বেগে পড়তে থাকলে, $F = F'$

$$\therefore 6\pi\eta r v = \frac{4}{3}\pi r^3 g(\rho - \sigma)$$

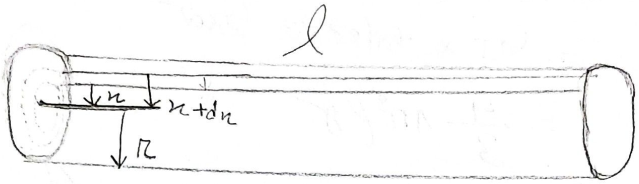
$$\Rightarrow v = \frac{2}{9}\frac{r^2(\rho - \sigma)g}{\eta}$$

এটিই স্টোকস এর সমীকরণ।

এবং এ সমীকরণ শুধুমাত্র অসীম বিস্তৃতির প্রবাহীর বেলায় খাটে। এবং যদি বস্তুটি অতিদ্রুত চলতে থাকে এবং এর ফলে প্রবাহীর ধারারেখা না হয় তাহলে এ সূত্র খাটবে না।

পয়সুলির তত্ত্ব

l দৈর্ঘ্য এবং R ব্যাসার্ধের একটি সরু নলের মধ্যদিয়ে কোন তরল স্থিরবেগ গতিতে প্রবাহিত ~~হচ্ছে~~ হয়। ~~ঐ~~ ঐ তরল নলের অক্ষের সমান্তরালে কতগুলো স্তরে ভাগ হলে দেখা যায় অক্ষ হতে যত দূরে যাওয়া যায় তরল স্তরের বেগ ~~ততই~~ কমতে থাকে এবং নলের দেয়াল সংলগ্ন তরল স্তরের বেগ শূন্য হয়। এখানে নলের দুই মুখের চাপের পার্থক্য P।



চিত্রে, নলের অক্ষের সাথে সমাক্ষভাবে r ব্যাসার্ধের একটি তরল চোঙ কল্পনা করলে এর গাত্র বরাবর সর্বত্র তরলের গতিবেগ সমান হবে। ধরি, ঐ গতিবেগ v। তরল চোঙের অভ্যন্তরস্থ তরল বাইরের তরল অপেক্ষা অধিক বেগে প্রবাহিত হয় এবং বাইরের অপেক্ষাকৃত মন্থর তরল উক্ত তরল চোঙের উপর একটি পশ্চাৎবর্তী ~~বল~~ বল প্রয়োগ করলে তরল ~~চ~~ চোঙের অগ্রসরণ মন্দীভূত হয়। এই দুই বলের মান সমান হলে তরল চোঙের গতি স্থির হয় এবং কোন ত্বরণ থাকে না।

এখন,
তরল চোঙের তলক্ষেত্র $= 2\pi r l$

গতিবেগের ব্যাসার্ধমুখী নতিমাত্রা (Gradient) $= -\frac{dv}{dr}$ [ঋণাত্মক চিহ্ন প্রকাশ করে r এর বৃদ্ধিতে v হ্রাস পায়]

সুতরাং, ~~সা~~ সান্দ্রতাজনিত পশ্চাৎবর্তী বল, $F = -\eta\, 2\pi r l \frac{dv}{dr}$

আবার, চাপের পার্থক্য P হলে সম্মুখবর্তী বল, $F = \pi r^2 P$

সুতরাং, সাম্যাবস্থায়, $-2\pi \eta l r \frac{dv}{dr} = \pi r^2 P$

Establish Poiseuille's equation with necessary correction.

বা, $dV = -\frac{P}{2\eta l} x\,dx$

বা, $V = -\frac{P}{2\eta l}\int x\,dx$ [∵ সমাকলন]

$\Rightarrow V = -\frac{P}{2\eta l}\frac{x^2}{2} + c$

$\Rightarrow c = V + \frac{Px^2}{4\eta l}$ —— (1)

এখন $x = r$ হলে $V = 0$ [∵ নলের দেয়াল সংলগ্ন তরল স্তরের বেগ শূন্য]

সুতরাং, $c = \frac{Pr^2}{4\eta l}$

c এর মান (1) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{Pr^2}{4\eta l} = V + \frac{Px^2}{4\eta l}$$

$$\therefore V = \frac{P}{4\eta l}(r^2 - x^2)$$

এখন, $x + dx$ ব্যাসার্ধের আর একটি সমাক্ষীয় তরল চোঙ বিবেচনা করলে এই দুটি তরল চোঙের মধ্যবর্তী অঞ্চলের প্রস্থচ্ছেদ $= 2\pi x\,dx$

এখানে, dx খুবই ক্ষুদ্র বলে বেগ v ধরা যায়। অতএব, প্রতি সেকেন্ডে $2\pi x dx$ প্রস্থচ্ছেদ অতিক্রম ~~করলে~~ করে dV আয়তনের তরল প্রবাহিত হলে, $dV = 2\pi x\,dx . v$

এখন, $x = 0$ হতে $x = r$ সীমার মধ্যে সমাকলন করে পাই,

$$V = \int_0^r 2\pi x\,dx \cdot v$$

$$= 2\pi \int_0^r x \left\{ \frac{P}{4\eta l}(r^2 - x^2) \right\} dx \quad [v \text{ এর মান বসিয়ে}]$$

$$= \frac{2\pi P}{4\eta l} \int_0^r x r^2 - x^3 \; dx$$

$$= \frac{\pi P}{2\eta l} \left\{ \left[\frac{x^2 r^2}{2} \right]_0^r - \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^r \right\}$$

$$= \frac{\pi P}{2\eta l} \left[\frac{r^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]$$

$$= \frac{\pi P}{2\eta l} \times \frac{2r^4 - r^4}{4}$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi P r^4}{8\eta l}$$

$$\therefore \eta = \frac{\pi P r^4}{8 l V}$$

এটাই ~~এ~~ পয়সুলির সমীকরণ।

সংশোধন

পয়সুলির সমীকরণে তরলের ত্বরণকে উপেক্ষা করা হয়েছে কিন্তু নলের প্রবেশ মুখে তরলের ত্বরণ থাকে। এই ত্রুটি সংশোধনের জন্য নলের দৈর্ঘ্য l এর পরিবর্তে $(l+Kr)$ ধরা হয়, K একটি ধ্রুবক, যার মান 1.64

আবার, নলের দুই প্রান্তে চাপের যে পার্থক্য থাকে তা শুধু মাত্র সান্দ্রতাজনিত বাধা অতিক্রমেই ব্যয় হয় না এর কিছু অংশ তরলে গতিশক্তি

1

Subject.......................

Date:....................Time 0.00

প্রবাহে ধরা হলো, যদি তরলের ঘনত্ব ρ, তাহলে প্রতি সেকেন্ডে তরলে প্রদত্ত গতিশক্তি, $K = \frac{1}{2} \times$ আয়তন $\times$ ঘনত্ব $\times$ বেগ^2

$$= \frac{1}{2} \int_0^r 2\pi x \, dx \cdot v\rho \cdot v^2$$

$$= \pi\rho \int_0^r \left\{ \frac{P}{4\eta l} (r^2 - x^2) \right\}^3 x \, dx$$

$$= \pi\rho \left(\frac{P}{4\eta l} \right)^3 \cdot \int_0^r (r^2 - x^2)^3 x \, dx$$

$$\cancel{= \pi\rho \left(\frac{P}{4\eta l} \right)^3 \times \left\{ \left[\frac{x^2 r^2}{2} \right]_0^r - \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^r \right\}}$$

$$\cancel{= \pi\rho \left(\frac{P}{4\eta l} \right)^3 \left(\frac{2r^4 - r^4}{4} \right)}$$

$$= \pi\rho \left(\frac{P}{4\eta l} \right)^3 \left[-\frac{1}{8} (r^2 - x^2)^4 \right]_0^r$$

$$= \pi\rho \left(\frac{P}{4\eta l} \right)^3 \times \frac{r^8}{8}$$

$$= \left(\frac{P\pi r^4}{8\eta l} \right)^3 \cdot \frac{\rho}{\pi^2 r^4}$$

এখন, পয়সুলির সমীকরণ অনুসারে, $K = \frac{V^3 \rho}{\pi^2 r^4}$

পুনরায় আন্তঃতলকে অতিক্রম করতে সম্পাদিত কাজ $= PV$।

$\therefore$ প্রতি সেকেন্ডে ব্যয়িত মোট শক্তি, $K = \frac{V^3 \rho}{r^4 \pi^2} + PV$

আবার, যদি বাহ্যিক চাপ P_1 হয়, তাহলে মোট শক্তি, $K = P_1 V$

$$\therefore P_1 V = \frac{V^3 \rho}{\pi^2 r^4} + PV$$

Papersoft

Subject.......... Date:.......... Time..........

বা, $P = P_1 - \frac{\vartheta^2 \ell}{\pi^2 r^4}$

এখন, পয়সুলির সমীকরণে গতিশক্তি ও প্রান্তের সংশোধন যুক্ত করে পাই,

$$\eta = \frac{\left(P_1 - \frac{\vartheta^2 \ell}{\pi^2 r^4}\right)\pi r^4}{8\vartheta(l+1.64r)}$$

বা, $$\eta = \frac{P_1 \pi r^4}{8\vartheta(l+1.64r)} - \frac{\vartheta \ell}{8(l+1.64r)}$$

এটিই পয়সুলির ~~এর~~ সংশোধিত সমীকরণ।

গ্যাস প্রবাহের ক্ষেত্রে পয়জুলির সমীকরণ :

তরল অসং নম্য পদার্থ বলে নলের কোন একটি ~~প্রস্থচ্ছেদ~~ ছেদের মধ্য দিয়ে নির্দিষ্ট সময়ে যে তরল প্রবাহিত হয় তার আয়তন স্থির থাকে, কিন্তু গ্যাস ~~অ~~ সংনম্য পদার্থ বলে নলের কোন ছেদের মধ্য দিয়ে নির্দিষ্ট সময়ে প্রবাহিত গ্যাসের আয়তন স্থির নাও থাকতে পারে তবে ভর স্থির থাকে।

অতএব নলের প্রবেশ মুখে প্রতি সেকেন্ডে m_1 ~~গ্র~~ পরিমাণ গ্যাস প্রবেশ করলে এবং নলের প্রবেশ মুখ হতে x দূরে কোন ছেদের মধ্য দিয়ে প্রতি সেকেন্ডে m পরিমাণ গ্যাস নির্গত হলে $m_1 = m$ হবে।

এখন, ρ_1 ও ρ যথাক্রমে ~~নলের~~ প্রবেশ মুখে ও বিবেচ্য ছেদে গ্যাসের ঘনত্ব হলে $V_1\rho_1 = V\rho$ হবে, এখানে, V_1 ও V যথাক্রমে নলের প্রবেশ মুখে এবং ঐ ছেদের মধ্য দিয়ে প্রতি সেকেন্ডে প্রবাহিত গ্যাসের আয়তন।

আমরা জানি, গ্যাসের ঘনত্ব এর চাপের সমানুপাতিক;

সুতরাং; $P_1 = \rho_1$ এবং; $P = \rho$

অর্থাৎ, $P_1V_1 = PV$ ——— (i)

এখন, পয়জুলির সমীকরণ অনুসারে, $V = -\dfrac{\pi r^4 dP}{8\eta dx}$ ——— (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) একত্র করে পাই,

$$P_1V_1 = -\frac{\pi r^4 P dP}{8\eta dx}$$

$$\text{বা, } P_1V_1 dx = -\frac{\pi r^4}{8\eta} P dP$$

এখন, নলের দৈর্ঘ্য l এবং নলের প্রবেশ মুখ ও নির্গমন মুখে গ্যাসের

চাপ যথাক্রমে P_1 ও P_2 $(P_1 > P_2)$ হলে, উক্ত সমীকরণকে $x=0$ হতে $x=l$ এবং $P=P_1$ হতে $P=P_2$ সীমার মধ্যে সমাকলন করে পাই,

$$P_1V_1 \int_0^l dx = -\frac{\pi r^4}{8\eta} \int_{P_1}^{P_2} P\,dP$$

$$\Rightarrow P_1V_1 l = -\frac{\pi r^4}{8\eta} \left[\frac{P^2}{2}\right]_{P_1}^{P_2}$$

$$\Rightarrow P_1V_1 l = -\frac{\pi r^4}{16\eta} \left(P_2^2 - P_1^2\right)$$

$$\therefore V_1 = -\frac{\pi r^4}{16\eta l} \frac{P_1^2 - P_2^2}{P_1}$$

এটিই গ্যাসের প্রবাহের ক্ষেত্রে পয়সুলির সমীকরণ।

নির্দিষ্ট তাপমাত্রা ও চাপে যে সব তরলের সান্দ্রতাঙ্ক (η) স্থির থাকে সেসব তরলকে নিউটনীয় তরল বলে। অর্থাৎ যেসব তরল $F/A = \eta \, dv/dy$ এই সম্পর্ক মেনে চলে তাকে নিউটনীয় তরল বলে, না মানলে অনিউটনীয় তরল।

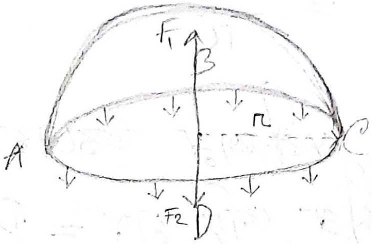
নিউটনীয় তরলের ক্ষেত্রে সান্দ্রতাঙ্ক η বেগ-অবক্রম নিরপেক্ষ কিন্তু অনিউটনীয় তরলের ক্ষেত্রে η বেগ-অবক্রমের উপর নির্ভর করে। কোন তরলে যথেষ্ট পরিমাণে কলয়েড থাকলে তা অনিউটনীয় হয়। অনিউটনীয় বল কিছু কৃন্তন বল সহ্য করতে পারে। যে সকল প্রবাহী সামান্যতম কৃন্তন বলও সহ্য করতে পারে না তাকে আদর্শ প্রবাহী বলে।

Find the expression of excess pressure of spherical soap bubble and estimate the total energy of the bubble.

পৃষ্ঠটান ও সান্দ্রতা

সাবান বুদবুদের অভ্যন্তরীণ অতিরিক্ত চাপ:-

সাবান বুদবুদ হচ্ছে সাবান পানির পাতলা গোলীয় পর্দা দ্বারা আবদ্ধ কিছু বায়ু। বুদবুদের ভিতরের বায়ুর চাপ বাহিরের বায়ুর চাপ অপেক্ষা অধিক হয় বলে বুদবুদ প্রসারিত হতে থাকে। পৃষ্ঠটানের জন্য একটি বল বুদবুদের ভিতরের দিকে ক্রিয়াশীল হয়, বুদবুদে আবদ্ধ বায়ু চাপের দরুন ক্রিয়াশীল বহির্মুখী বল এবং ভিতরমুখী বল সমান সাম্যাবস্থায় মিলিত হয়। এরূপ বুদবুদের ভেতরে ও বাহিরে দুটি পৃষ্ঠ থাকে।



চিত্রে ABCD অনুভূমিক তল বুদবুদকে সমান দুই ভাগে ভাগ করেছে।

∴ ঊর্ধ্বমুখী বল, F_1 = অতিরিক্ত চাপ × অনুভূমিক বৃত্তাকার তলের ক্ষেত্রফল

$$= P\pi r^2$$

ভিতরমুখী বল, F_2 = 2 × পৃষ্ঠটান × পরিধি [∵ বুদবুদের পৃষ্ঠ দুটি]

$$= 2\times T\times 2\pi r$$

$$= 4\pi r T$$

∴ সাম্যাবস্থায়, $F_1 = F_2$

$$\Rightarrow P\pi r^2 = 4\pi r T$$

$$\Rightarrow P = \frac{4T}{r}$$

∴ বায়ুমণ্ডলীয় চাপ $\mathcal{P}$ হলে মোট চাপ $\Rightarrow \mathcal{P} + P = \mathcal{P} + \frac{4T}{r}$

Papersoft

তরল বিন্দুর বা তরল বেষ্টিত বায়ু বুদবুদের অভ্যন্তরীণ অতিরিক্ত চাপ ঃ

তরল বেষ্টিত বায়ু বুদবুদের একটি পৃষ্ঠ থাকে; তাই বুদবুদের ভিতরের অতিরিক্ত চাপ P এর জন্য বহির্মুখী বল, $F_1 = \pi r^2 P$ এবং পৃষ্ঠটান T এর জন্য ভিতরমুখী বল $F_2 = 2\pi r T$,

$\therefore$ সাম্যাবস্থায়, $F_1 = F_2$

$$\Rightarrow \pi r^2 P = 2\pi r T$$

$$\Rightarrow P = \frac{2T}{r}$$

যদি বায়ু বুদবুদ h গভীরতায় তরলের মধ্যে অবস্থিত হয় এবং বায়ুমণ্ডলীয় চাপ P হলে, অভ্যন্তরীণ মোট চাপ $= P + h\rho g + \frac{2T}{r}$

Ch: 9

প্রবাহী গতিবিদ্যার সূত্রপাত

Subject.................................. Time..............
Date:..................................

পদার্থবিদ্যার যে শাখায় প্রবাহীর উপর বলের ক্রিয়া আলোচনা করা হয় তাকে প্রবাহী বলবিদ্যা (Fluid mechanics) বলে।

প্রস্থচ্ছেদ বেশি হলে তরলের বেগ কম হয়।

নির্গত পানির আয়তন $= aV = \pi r^2 \sqrt{2gh}$

আক্রমণ কোণ বলতে ডানা বা উড়োজাহাজের পাখা বাতাসের দিকের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে বুঝায়।

উত্তোলক বল, বাতাসের বেগ, লিফট সহগ, এরোফয়েল পাখার ক্ষেত্রফল

$$L = \frac{1}{2} C_L V^2 \rho A$$

অনুভূমিক দিকে ক্রিয়াশীল বাধা, বায়ুর ঘনত্ব, টান সহগ

$$D = \frac{1}{2} C_d V^2 \rho A$$

চূড়ান্ত বেগ, জ্বালানি আর রকেটের ভর, রকেটের ভর, নির্গমন বেগ

$$V_e = V_{en} \ln \frac{m_0}{m_1}$$

উড়োজাহাজের পাখার আক্রমণ কোণ খুব ক্ষুদ্র প্রায় 4° হতে 15° এর মধ্যে।

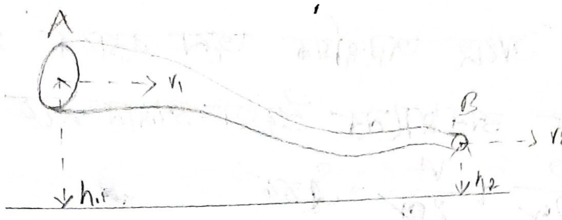
$$V_{en} = \left[\frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{RT_0}{M} \left\{ 1 - \left(\frac{P_{en}}{P_0} \right)^{1 - \frac{1}{\gamma}} \right\} \right]^{1/2}$$

উষ্ণতা ও চাপ যত বৃদ্ধি পায় এবং গ্যাসের আণবিক ওজন যত হ্রাস পায় রকেট তত দ্রুত বেগে গতিশীল হয়।

Papersoft

বার্নোলির সমীকরণ ঃ

উপপাদ্যের বর্ণনা: কোন অসংনম্য তরলের ধারারেখ প্রবাহ বজায় থাকলে প্রবাহ নালির যে কোন ছেদে তরলের প্রতি একক ভরের বিভব শক্তি, গতিশক্তি ও চাপশক্তির সমষ্টি ধ্রুবক।



চিত্রে, AB ~~অসং~~ অসংনম্য তরলের একটি প্রবাহ নালি। অনুভূমিক তল হতে প্রবাহ নালির A মুখের কেন্দ্রবিন্দুর উচ্চতা h_1 এবং B মুখের কেন্দ্র বিন্দুর উচ্চতা h_2। A ও B মুখের ছেদে তরলের বেগ যথাক্রমে v_1 ও v_2 এবং ঐ দুই মুখে তরলের চাপ যথাক্রমে P_1 ও P_2। প্রবাহ নালির কোথাও তরল পুঞ্জীভূত হতে পারে না বলে কোন নির্দিষ্ট সময়ে যদি A মুখের ছেদ দিয়ে m ভরের তরল প্রবেশ করে তবে ঐ একই সময়ে B মুখের ছেদ দিয়ে m ভরের তরল নির্গত হবে।

এখানে, A বিন্দুতে তরলের বিভব শক্তি $= mgh_1$

A " " গতিশক্তি $= \frac{1}{2}mv_1^2$

A " " চাপশক্তি $= \frac{mP_1}{\rho}$ [এখানে ρ তরলের ঘনত্ব]

∴ প্রবাহ নালির A মুখের তরলের মোট শক্তি $= mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{mP_1}{\rho}$

একইভাবে, প্রবাহ নালির B মুখের তরলের মোট শক্তি $= mgh_2 + \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{mP_2}{\rho}$

সুতরাং, শক্তির সংরক্ষণ সূত্রানুসারে,

$$mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{mP_1}{\rho} = mgh_2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{mP_2}{\rho}$$

$$\Rightarrow gh_1 + \frac{1}{2}v_1^2 + \frac{P_1}{\rho} = gh_2 + \frac{1}{2}v_2^2 + \frac{P_2}{\rho}$$

$$\therefore gh + \frac{1}{2}v^2 + \frac{P}{\rho} = \text{ধ্রুবক}$$

নোটঃ বার্নোলির উপপাদ্যকে শক্তির নিত্যতার রূপ

সমীকরণকে g দ্বারা ভাগ করে, $\frac{P}{\rho g} + h + \frac{v^2}{2g} =$ ধ্রুবক।

∴ বার্নৌলির উপপাদ্য ⇒ চাপ শীর্ষ + উচ্চতা শীর্ষ + বেগ শীর্ষ = ধ্রুবক

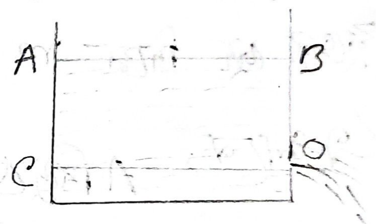
যদি ~~অ~~ তরলের প্রবাহ অনুভূমিক তলে বরাবর হয় তবে প্রমাণ অনুভূমিক তল হতে তরলের অবস্থানের উচ্চতা সমান হবে, অর্থাৎ h ধ্রুবক হবে।

∴ $\frac{P}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} =$ ধ্রুবক

বা, $P + \frac{v^2 \rho}{2} =$ ধ্রুবক

তরলের প্রবাহন বেগ টরিসেলির উপপাদ্য (Velocity of efflux of liquid; Torricelli's theorem)

ধরি, একটি প্রশস্ত পাত্রে তরল আছে এবং পাত্রের তলদেশের কাছাকাছি একটি অনুভূমিক ছিদ্র O আছে। পাত্রের তরলের মুক্ত পৃষ্ঠ AB ঐ ছিদ্রের লেভেল CO থেকে h উচ্চতায় রয়েছে। এ অবস্থায় ছিদ্রপথে



তরল নির্গত হবে এবং যে বেগে ঐ ছিদ্রপথে তরল নির্গত হবে তাকে তরলের প্রবাহন বেগ বলে। পাত্র খুবই প্রশস্ত এবং ছিদ্র খুবই সরু বলে ছিদ্রপথে তরল নির্গত হওয়ার দরুন AB পৃষ্ঠে তরলের কোন গতি নেই মনে করা যেতে পারে। ~~অত~~ তাছাড়া AB পৃষ্ঠের চাপ এবং তরলের নির্গমন মুখে ছিদ্রের চাপ বায়ুমণ্ডলীয় চাপের সমান হওয়ায় তরলের প্রবাহের উপর ঐ চাপের কোন প্রভাব নেই।

এখন, ছিদ্রপথে তরলের প্রবাহন বেগ v, তরলের ঘনত্ব ρ, এবং বায়ুমণ্ডলীয় চাপ P এবং AB পৃষ্ঠ হতে O ছিদ্র পর্যন্ত একটি প্রবাহ নালি ~~বিবেচনা~~ ধরলে ~~ধরলে~~ বার্নৌলির উপপাদ্য অনুসারে ⇒ $\frac{P}{\rho g} + h + 0 = \frac{P}{\rho g} + 0 + \frac{v^2}{2g}$

বা, $\frac{v^2}{2g} = h$

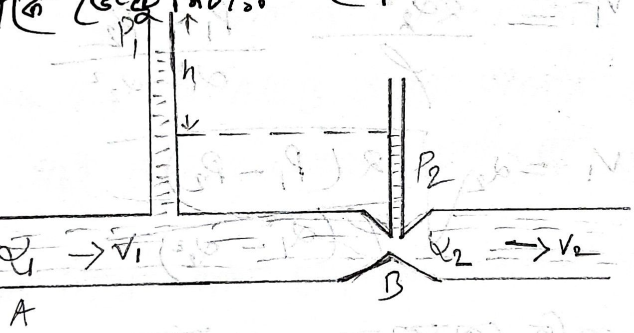
$\therefore v = \sqrt{2gh}$; এটিই তরলের প্রবহন বেগের রাশিমালা।

টরিসেলির উপপাদ্য (h উচ্চতা থেকে অভিকর্ষের ক্রিয়ায় অবাধে পড়তে হলে):
কোন ছিদ্র দিয়ে তরলের প্রবহন বেগ ঐ তরলের মুক্ত পৃষ্ঠ হতে ছিদ্রের লেভেল পর্যন্ত কোন বস্তু অবাধে অবতরণ করলে যে বেগ প্রাপ্ত ~~হয়~~ হবে তার সমান।

কোন তরলের ক্ষেত্রেই ঐ আদর্শ গতিবেগ অর্জন করা সম্ভব নয়; কারণ কোন তরলই সান্দ্রতা মুক্ত নয়।

→ Sup

ভেঞ্চুরিমিটার (Venturimeter)
অসম প্রস্থচ্ছেদের নল দিয়ে নির্গত তরলের পরিমাণ নির্ণয় ~~করাকে~~ করার ব্যবস্থাকে ভেঞ্চুরিমিটার বলে।



চিত্রে, অসম প্রস্থচ্ছেদের একটি অনুভূমিক নলের A বিন্দুতে প্রস্থচ্ছেদ a_1 এবং সংকুচিত B বিন্দুতে প্রস্থচ্ছেদ a_2। ~~ঐ~~ এ নলের মধ্য দিয়ে তরল প্রবাহিত হলে প্রশস্ত স্থান অপেক্ষা সংকুচিত স্থানে তরলের বেগ বেশি হবে এবং চাপ হ্রাস পাবে। সুতরাং, নলের A বিন্দুতে তরলের বেগ v_1, B বিন্দুতে তরলের বেগ v_2 অপেক্ষা কম হবে। আবার, A বিন্দুতে তরলের চাপ P_1 অপেক্ষা B বিন্দুতে চাপ P_2 কম হবে।

এখন, বার্নোলির উপপাদ্য অনুসারে,
$$\frac{P_1}{\rho g} + h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + h_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

যেহেতু নল অনুভূমিক, সুতরাং $h_1 = h_2$

$$\therefore P_1 - P_2 = \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v_1^2) \quad \text{——— (1)}$$

এখন, তরলের ধারাবাহিকতার সমীকরণ, $a v$ = ধ্রুবক অনুসারে,

$$a_1 v_1 = a_2 v_2$$

বা, $\frac{v_2}{v_1} = \frac{a_1}{a_2}$

∴ (1) নং হতে পাই, $P_1 - P_2 = \frac{\rho v_1^2}{2}\left(\frac{v_2^2}{v_1^2} - 1\right)$

$$\Rightarrow P_1 - P_2 = \frac{\rho v_1^2}{2}\left(\frac{a_1^2}{a_2^2} - 1\right)$$

$$\Rightarrow P_1 - P_2 = \frac{\rho v_1^2}{2a_2^2}(a_1^2 - a_2^2)$$

$$\Rightarrow v_1^2 = \frac{2a_2^2}{\rho} \frac{P_1 - P_2}{a_1^2 - a_2^2}$$

$$\therefore v_1 = a_2\sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho(a_1^2 - a_2^2)}}$$

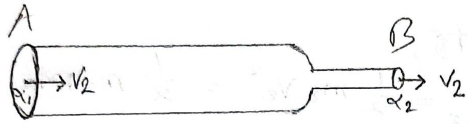
এখন, A বিন্দুতে প্রতি সেকেন্ডে যে আয়তনের পানি প্রবেশ করে, অর্থাৎ নল দিয়ে পানিপ্রবাহের হার =

$$a_1 v_1 = a_1 a_2 \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho(a_1^2 - a_2^2)}} \qquad [\because \rho = 1\,g\,cm^{-3}]$$

$$= a_1 a_2 \sqrt{\frac{2hg}{a_1^2 - a_2^2}}$$

অবিচ্ছিন্নতা বা নিরবচ্ছিন্নতার সমীকরণ ঃ

অসম প্রস্থচ্ছেদের কোন নলের মধ্যে দিয়ে অসংনম্য প্রবাহী ধারারেখ গতি বজায় রাখলে নলের কোন স্থানে নলের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল, প্রবাহীর ঘনত্ব ও বেগের গুণফল একটি ধ্রুব সংখ্যা হয়, নলের কোন স্থানের প্রস্থচ্ছেদ α, প্রবাহীর ঘনত্ব ρ ও বেগ v হলে $\alpha\rho v$ = ধ্রুবক, এটিই অবিচ্ছিন্নতার বা নিরবচ্ছিন্নতার সমীকরণ।



ধরি, AB একটি অসম প্রস্থচ্ছেদ বিশিষ্ট নল যার মধ্যে কোন প্রবাহী ধারারেখ প্রবাহে চলছে, নলের A ও B প্রান্তের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল যথাক্রমে α_1 ও α_2 এবং দুই প্রান্তে প্রবাহীর বেগ যথাক্রমে v_1 ও v_2। তাহলে নলের A প্রান্ত দিয়ে প্রতি সেকেন্ডে প্রবাহিত প্রবাহীর আয়তন হবে $\alpha_1 v_1$ এবং B প্রান্ত দিয়ে প্রতি সেকেন্ডে প্রবাহিত আয়তন হবে $\alpha_2 v_2$। যদি A ও B প্রান্তে প্রবাহীর ঘনত্ব যথাক্রমে ρ_1 ও ρ_2 হয়, তাহলে A প্রান্ত দিয়ে প্রতি সেকেন্ডে প্রবাহিত প্রবাহীর ভর $dm_1 = \alpha_1 v_1 \rho_1$

আবার, B প্রান্ত দিয়ে প্রতি সেকেন্ডে প্রবাহিত প্রবাহীর ভর $dm_2 = \alpha_2 v_2 \rho_2$

কিন্তু ভর অপরিবর্তিত থাকে। সুতরাং $dm_1 = dm_2$

বা, $\alpha_1 v_1 \rho_1 = \alpha_2 v_2 \rho_2$

$\therefore \alpha v \rho$ = ধ্রুবক।

আবার, এই সমীকরণের ব্যবকলিত রূপ হবে $\nabla \cdot \vec{v} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t}$

তাৎপর্য ঃ $\alpha\rho v$ = ধ্রুবক, এর অর্থ হলো প্রবাহীর প্রবাহের হার ধ্রুবক।
আবার, $v \propto \frac{1}{\alpha}$ কারণ $\frac{\text{ধ্রুবক}}{\alpha}$ = ধ্রুবক, এর অর্থ প্রবাহীর বেগ প্রবাহ নালির প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফলের ব্যস্তানুপাতিক। অর্থাৎ সরু নলে প্রবাহীর বেগ বেশি কিন্তু মোটা নলে কম।

Ch: 9

Subject............................

Date:............................Time...............

একটি ঘূর্ণনশীল বস্তুর গতিশক্তি $K = \frac{1}{2} I \omega^2$

ধরি, কোন অক্ষের সাপেক্ষে ঘূর্ণনরত কোন দৃঢ় বস্তুর কণাসমূহের ভর যথাক্রমে $m_1, m_2, m_3 \ldots$ । অক্ষ থেকে, কণাগুলোর দূরত্ব যথাক্রমে $r_1, r_2, r_3 \ldots$ এবং কণাগুলোর রৈখিক দ্রুতি যথাক্রমে $v_1, v_2, v_3 \ldots$

এখন, m_1 ভরের কণার ঘূর্ণন ~~শ~~ গতিশক্তি,

$$E_{r_1} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \omega^2$$

m_2 ভরের কণার ঘূর্ণন গতিশক্তি,

$$E_{r_2} = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \omega^2$$

একভাবে প্রতিটি কণার ঘূর্ণন গতিশক্তি নির্ণয় করে যোগ করলে দৃঢ় বস্তুর মোট শক্তি পাওয়া যায়।

$\therefore$ বস্তুর মোট গতিশক্তি, $E_r = E_{r_1} + E_{r_2} + E_{r_3} \ldots$

$$= \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \omega^2 + \ldots$$

$$= \frac{1}{2} (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots) \omega^2$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_i^2\right) \omega^2$$

~~এখন~~, $i = 1, 2, 3 \ldots$ । যেহেতু, $I = \sum m_i r_i^2$ বসিয়ে পাই,

$$E_r = \frac{1}{2} I \omega^2$$

এটিই ঘূর্ণন গতিশক্তির রাশিমালা। যেখানে I কে দৃঢ় বস্তুর জড়তার ভ্রামক বলে।