Calculus – 1

** অধ্যায় – ২ **

** 1 (A) **

ফাংশন: যদি X ও Y দুইটি অশূন্য সেট এবং f এরূপ একটি নিয়ম হয় যে, প্রত্যেক $x \in X$ এর জন্য একটি অনন্য $y \in Y$ পাওয়া যায় তবে f কে X সেট হতে Y সেটে একটি ফাংশন বলা হয়।

ফাংশনের ডোমেন, কোডোমেন এবং রেঞ্জ: ধরি, $f: X \to Y$ একটি ফাংশন। তাহলে X কে f এর ডোমেন। Y কে f এর কোডোমেন বা কো-ডিমেইন এবং Y সেটের অন্তর্গত সকল f সম্পর্কিত উপাদান বা প্রতিবিম্ব নিয়ে যে উপসেট গঠিত হয় তাকে ফাংশনটির রেঞ্জ বলা হয়।

$f: \{0, 1, 2, 3\} \to \{2, 5, 8, 11, 15\}$ ফাংশনটি $f(x) = 3x + 2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হলে এর ডোমেন, কোডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

⟹ দেওয়া আছে,

$$f: \{0, 1, 2, 3\} \to \{2, 5, 8, 11, 15\}$$

ফাংশনটি $f(x) = 3x + 2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত

$\therefore D_f = \{0, 1, 2, 3\}$

$Cod_f = \{2, 5, 8, 11, 15\}$

এবং $R_f = \{f(0), f(1), f(2), f(3)\}$

$= \{2, 5, 8, 11\}$

$f(0) = 3 \cdot 0 + 2 = 2$

$f(1) = 3 \cdot 1 + 2 = 5$

$f(2) = 3 \cdot 2 + 2 = 8$

$f(3) = 3 \cdot 3 + 2 = 11$

CamScanner

ব্যবধি: মনেকরি, দুইটি বাস্তব সংখ্যা a ও b যেখানে $a<b$ ($a>b$ হতে পারে)। a ও b এর একটি বা উভয়কে বাদ দিয়ে (বা নিয়ে) তাদের মধ্যবর্তী সকল বাস্তব সংখ্যার সেটকে ব্যবধি বলে।

(i) খোলা ব্যবধি: মনেকরি, a ও b দুইটি বাস্তব সংখ্যা এবং $a<b$, a ও b কে বাদ দিয়ে তাদের মধ্যবর্তী সকল বাস্তব সংখ্যার সেট। $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a<x<b\}$

(ii) বদ্ধ ব্যবধি: এখানে $a<b$ প্রযোজ্য। a ও b কে নিয়ে তাদের মধ্যবর্তী সকল বাস্তব সংখ্যার সেট।
$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

(iii) অর্ধখোলা ও অর্ধবদ্ধ ব্যবধি: $a<b$, প্রযোজ্য a কে বাদ দিয়ে এবং b কে নিয়ে তাদের মধ্যবর্তী বাস্তব সংখ্যার সেট। $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a<x \leq b\}$

(iv) অর্ধবদ্ধ ও অর্ধখোলা ব্যবধি: $a<b$, a কে নিয়ে b কে বাদ দিয়ে তাদের মধ্যবর্তী সকল বাস্তব সংখ্যার সেট।
$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

খোলা ও অসীম ব্যবধি $\longrightarrow (a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a<x\}$

বদ্ধ ও অসীম ব্যবধি $\longrightarrow [a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$

CamScanner

Type-1

$f(x) = ax+b$

এখানে, $f(x)$ এর সকল মানের জন্য ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত।

প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন সকল বাস্তব সংখ্যার সেট।

$\therefore D_f = \mathbb{R}$

ধরি, $y = f(x) = ax+b$

$\Rightarrow y = ax+b$

$\Rightarrow ax = y-b$

$\Rightarrow x = \frac{y-b}{a}$ ——— ①

① নং সমীকরণে y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়

$\therefore$ রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R}$

Ex-5: $f(x) = 3x+5$ ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

→ এখানে, $f(x)$ এর সকল মানের জন্য ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত।

প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন সকল বাস্তব সংখ্যার সেট।

$\therefore D_f = \mathbb{R}$

ধরি, $y = f(x) = 3x+5$

$\Rightarrow y = 3x+5$

$\Rightarrow 3x = y-5$

$\Rightarrow x = \frac{y-5}{3}$ ——— ①

① নং সমীকরণে y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore$ রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R}$।

Type-2

$$f(x) = \frac{1}{ax+b}$$

এখানে, যদি $x=b=0$ হয় তাহলে অসংজ্ঞায়িত হবে বা $ax+b=0$ বা $x = -\frac{b}{a}$ ব্যতীত অন্য সকল মানের জন্য $f(x)$ বাস্তব হয়।

$\therefore$ ডোমেন $D_f = \mathbb{R} - \{-\frac{b}{a}\}$

ধরি,

$$y = f(x) = \frac{1}{ax+b}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{ax+b}$$

$$\Rightarrow ax+b = \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow ax = \frac{1}{y} - b$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{ay} - \frac{b}{a}$$

এখানে, $y=0$ ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore$ রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R} - \{0\}$।

Ex – 6 (iii) $f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$

এখানে, $2x+1=0$ বা $x=-\frac{1}{2}$ ব্যতীত অন্য সকল মানের জন্য $f(x)$ বাস্তব হয়।

ডোমেন $D_f = \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$

ধরি, $y = f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$

$\Rightarrow y = \dfrac{1}{2x+1}$

$\Rightarrow 2x+1 = \dfrac{1}{y}$

$\Rightarrow 2x = \dfrac{1}{y} - 1$

$\Rightarrow x = \dfrac{1}{2y} - \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y} - 1\right)$

$y=0$ ব্যতীত অন্য সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore$ রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R} - \{0\}$

Type – 3

$f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

এখানে, $cx+d=0$ বা $c=-\frac{d}{x}$ ব্যতীত সকল বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ বাস্তব হয়।

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{-\frac{d}{x}\}$

CamScanner

ধরি, $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

$\Rightarrow y(cx+d) = ax+b$

$\Rightarrow cxy + dy = ax+b$

$\Rightarrow cxy - ax = b - dy$

$\Rightarrow x(cy-a) = b-dy$

$\Rightarrow x = \dfrac{b-dy}{cy-a}$

এখানে, $cy-a=0$ বা $y = \dfrac{a}{c}$ ব্যতীত অন্য সকল মানের জন্য x এর বাস্তব মান পাওয়া যায়।

$\therefore R_f = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{a}{c}\right\}$

Ex – 7(ii)

$f(x) = \dfrac{x-3}{2x+1}$

এখানে, $2x+1=0$ বা $x = -\frac{1}{2}$ ব্যতীত অন্য সকল মানের জন্য $f(x)$ এর বাস্তব মান পাওয়া যায়।

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

ধরি, $y = f(x) = \dfrac{x-3}{2x+1}$

$\Rightarrow y = \dfrac{x-3}{2x+1}$

$\Rightarrow (2x+1)y = x-3$

$\Rightarrow 2xy + y = x-3$

$\Rightarrow 2xy - x = -y-3$

$\Rightarrow x(2y-1) = -(y+3)$

$\Rightarrow x = -\dfrac{y+3}{2y-1}$

এখানে, $2y-1=0$ বা $y=\frac{1}{2}$ ব্যতীত অন্য সকল মানের জন্য x এর বাস্তব মান পাওয়া যায়।

$\therefore R_f = \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$ ।

Type – 4

$f(x) = \dfrac{x^2-a^2}{x-a}$

এখানে $x-a=0$ বা $x=a$ ব্যতীত অন্য সকল মানের জন্য $f(x)$ এর মান বাস্তব হয়।

$D_f = \mathbb{R} - \{a\}$ ।

ধরি, $y = f(x) = \dfrac{x^2-a^2}{x-a}$

$\Rightarrow y = \dfrac{x^2-a^2}{x-a}$ $[x \neq a]$

$\Rightarrow y = \dfrac{(x-a)(x+a)}{x-a}$

$\Rightarrow y = x+a$

$\Rightarrow x = y-a$ $[y \neq 2a]$

$\therefore$ $y=2a$ ব্যতীত অন্য সকল মানের জন্য $f(x)$ এর রেঞ্জ সংজ্ঞায়িত।

$\therefore R_f = \mathbb{R} - \{2a\}$ ।

Ex- 8(i)

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$$

এখানে, $x-2=0$ বা $x=2$ ব্যতীত অন্য সকল মানের জন্য $f(x)$ এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

ধরি, $y = f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$

$\Rightarrow y = \frac{x^2-4}{x-2}$

$\Rightarrow y = \frac{(x+2)(x-2)}{x-2}$

$\Rightarrow y = x+2 \quad [x \neq 2]$

$\Rightarrow x = y-2 \quad [y \neq 4]$

এখানে, $y=4$ ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x সংজ্ঞায়িত।

$\therefore R_f = \mathbb{R} - \{4\}$

Type-5

$$f(x) = \frac{x-a}{x^2-a^2}$$

$\Rightarrow x^2-a^2=0$

$\Rightarrow x^2=a^2$

$\Rightarrow x = \pm a$ ব্যতীত অন্য সকল মানের জন্য x এর বাস্তব মান পাওয়া যায়।

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{\pm a\}$ বা $D_f = \mathbb{R} - \{-a, a\}$

ধরি,

$$y = f(x) = \frac{x-a}{x^2-a^2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{x-a}{x^2-a^2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{x-a}{(x+a)(x-a)}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{(x+a)} \qquad [x \neq a]$$

$$\Rightarrow x+a = \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{y} - a \qquad \left[y \neq \frac{1}{2a}, \; y \neq 0, \frac{1}{2a}\right]$$

$y = 0, \frac{1}{2a}$ ব্যতীত অন্য সকল মানের জন্য x এর বাস্তব মান পাওয়া যায়।

$$\therefore R_f = \mathbb{R} - \left\{0, \frac{1}{2a}\right\}$$

Ex-8 (ii) $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-9}$

এখানে, $x^2-9=0$ বা $x^2=9$ বা $x = \pm 3$ ব্যতীত অন্য সকল মানের জন্য x এর বাস্তব মান পাওয়া যায়।

$$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{\pm 3\} \text{ বা } D_f = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$$

ধরি, $y = f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-9}$

$$\Rightarrow y = \frac{x-3}{x^2-9}$$

$$\Rightarrow y = \frac{x-3}{(x+3)(x-3)}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{x+3} \qquad [x \neq 3]$$

$$\Rightarrow x+3 = \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{y} - 3 \qquad \left[y \neq \frac{1}{6} ; y \neq 0, \frac{1}{6}\right]$$

$y = 0, \frac{1}{6}$ ব্যতীত অন্য সকল মানের জন্য x এর বাস্তব মান পাওয়া যায়।

$$\therefore R_f = \mathbb{R} - \left\{0, \frac{1}{6}\right\}$$

Type-6

$$f(x) = \sqrt{ax+b}$$

এখানে, যদি $ax+b \geq 0$

বা $ax+b-b \geq -b$

$$\Rightarrow ax \geq -b$$

$$\Rightarrow \frac{ax}{a} \geq -\frac{b}{a}$$

$$\therefore x \geq -\frac{b}{a}$$

কেবলমাত্র $x \geq -\frac{b}{a}$ এর জন্য $f(x)$ এর মান বাস্তব হয়।

$$\therefore D_f = \left\{x : x \geq -\frac{b}{a}\right\}$$

$$= \left[-\frac{b}{a}, \infty\right)$$

ধরি, $y = f(x) = \sqrt{ax+b}$ ——— (1)

$$\Rightarrow y^2 = ax+b \qquad [y \neq 0]$$

$$\Rightarrow ax = y^2 - b$$

$\Rightarrow x = \frac{1}{a}(y^2 - b)$ ——— (ii)

(ii) নং সমীকরণে যদি $y \geq 0$ হয় তবে সংজ্ঞায়িত হবে।

$R_f = \{y : y \geq 0\}$

$= [0, \infty)$

Ex – 9 (ii)

$f(x) = -\sqrt{x+1}$

এখানে, যদি $x+1 \geq 0$

$\Rightarrow x \geq -1$

কেবলমাত্র $x \geq -1$ এর জন্য $f(x)$ এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore D_f = \{x : x \geq -1\}$

$= [-1, \infty)$

ধরি, $y = f(x) = -\sqrt{x+1}$ ——— (i)

$\Rightarrow y = \sqrt{x+1}$

$\Rightarrow y^2 = x+1$ $[y \geq 0$

$\Rightarrow x = y^2 - 1$ ——— (ii)

(ii) নং সমীকরণে যদি $y \leq 0$ এর জন্য কেবলমাত্র x সংজ্ঞায়িত

$\therefore R_f = \{y : y \leq 0\}$

$= (-\infty, 0]$

Type – 7

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{ax+b}}$$

এখানে, $ax+b > 0$

$\Rightarrow ax > -b$

$\Rightarrow x > -\frac{b}{a}$

কেবলমাত্র $x > -\frac{b}{a}$ এর জন্য $f(x)$ এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore D_f = \{x : x > -\frac{b}{a}\}$

$= (-\frac{b}{a}, \infty)$

ধরি,

$$y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{ax+b}} \quad \text{——— (i)}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{ax+b}}$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{1}{ax+b}$$

$$\Rightarrow ax+b = \frac{1}{y^2}$$

$$\Rightarrow ax = \frac{1}{y^2} - b$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{y^2} - b\right) \quad \text{——— (ii)}$$

$y > 0$ এর জন্য কেবলমাত্র x সংজ্ঞায়িত

$\therefore R_f = \{y : y > 0\}$

$= (0, \infty)$

Ex - 11(ii)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$$

এখানে,

$$2-x>0$$

$$\Rightarrow -x>-2$$

$$\Rightarrow x<2$$

কেবলমাত্র $x<2$ এর জন্য $f(x)$ এর মান বাস্তব হয়।

$$\therefore D_f = \{x : x<2\}$$

$$= (-\infty, 2)$$

ধরি,

$$y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{1}{2-x} \qquad [y \nless 0$$

$$\Rightarrow 2-x = \frac{1}{y^2}$$

$$\Rightarrow -x = -2 + \frac{1}{y^2}$$

$$\Rightarrow x = 2 - \frac{1}{y^2} \quad \text{———— (ii)}$$

(ii) নং সমীকরণে $y>0$ এর জন্য কেবলমাত্র x সংজ্ঞায়িত হবে।

$$\therefore R_f = \{y : y>0\}$$

$$= (0, \infty)$$

Type - 8

$$f(x) = \sqrt{-a^2+x^2}$$

এখানে, $x^2-a^2 \geq 0$ হলে $f(x)$ এর মান বাস্তব হয়।

$x^2 - a^2 + a^2 \geq a^2$

$\Rightarrow x^2 \geq a^2$

$\Rightarrow x \leq -a, \quad x \geq a$

ডোমেন $D_f = \{x : x \leq -a\} \cup \{x : x \geq a\}$

$= (-\infty, a] \cup [a, \infty)$

$= (-\infty, \infty)$

ধরি,

$y = f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$

$\Rightarrow y = \sqrt{x^2 - a^2}$ ——— (i)

(i) নং এ $y = 0$ অথবা $y > 0$ হতে পারবে

$y^2 = x^2 - a^2 \quad y \nless 0$

$\Rightarrow x^2 = y^2 + a^2 \quad y \nless 0$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{y^2 + a^2} \quad y \nless 0$ ——— (ii)

(ii) নং এ $y \geq 0$ এর জন্য x সংজ্ঞায়িত হবে।

রেঞ্জ $R_f = \{y : y \geq 0\}$

$= [0, \infty)$

Ex – 13(1)

$f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$

এখানে, $f(x)$ বাস্তব হবে যদি $x^2 - 25 \geq 0$ হয়

$\Rightarrow x^2 \geq 25$

$\Rightarrow x^2 \geq 5^2$

$\Rightarrow x \geq 5$ বা $x \leq -5$

$$D_f = \{x : x \leq -5\} \cup \{x : x \geq 5\}$$
$$= (-\infty, -5] \cup [5, \infty)$$

ধরি, $y = \sqrt{x^2 - 25}$ ——— (i)

(i) নং এ $y = 0$ অথবা $y > 0$ হতে পারবে,

$y^2 = x^2 - 25 \qquad y \nless 0$

$\Rightarrow x^2 = y^2 + 25 \qquad y \nless 0$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{y^2 + 25} \qquad y \nless 0$ ——— (ii)

(ii) নং এ $y \geq 0$ এর জন্য x সংজ্ঞায়িত হবে।

$$R_f = \{y : y \geq 0\}$$
$$= [0, \infty)$$

Type – 9

Ex – 14 (iii)

$$f(x) = y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$$

যদি $x^2 - 4x + 3 \geq 0$ হয় তবে y এর মান বাস্তব হবে।

$x^2 - 4x + 3 \geq 0$

$\Rightarrow x^2 - 3x - x + 3 \geq 0$

$\Rightarrow x(x-3) - 1(x-3) \geq 0$

$\Rightarrow (x-3)(x-1) \geq 0$

$\Rightarrow x \leq 1$ অথবা $x \geq 3$

$$D_f = \{x : x \leq 1\} \cup \{x : x \geq 3\}$$
$$= (-\infty, 1] \cup [3, \infty)$$

আবার,

$$y = \sqrt{x^2-4x+3} \quad \text{——— (1)}$$

যেখানে, y এর মান ধনাত্মক বা শূন্য।

$$y^2 = x^2-4x+3 \qquad y \nless 0$$

$$\Rightarrow x^2-4x+(3-y^2)=0 \qquad y \nless 0$$

এখানে, x এর মান বাস্তব ও সংখ্যায়িত হবে যদি নিশ্চায়ক ≥ 0 হয়।

$$4^2-4\cdot 1\cdot(3-y^2) \geq 0 \qquad y \nless 0$$

$$\Rightarrow 16-12+4y^2 \geq 0 \qquad y \nless 0$$

$$\Rightarrow 4+4y^2 \geq 0 \quad \text{এবং} \quad y \nless 0$$

$y \geq 0$, যা প্রদত্ত অসমতার জন্য সত্য।

$$R_f = \{y : y \geq 0\}$$
$$= [0, \infty)$$

Type – 10

Ex – 15 (ii)

$$y = \frac{1}{x^2-4x+3}$$

$$= \frac{1}{x^2-x-3x+3}$$

$$= \frac{1}{(x-1)(x-3)}$$

$x=1$ বা $x=3$ ব্যতীত x এর সকল বাস্তবমানের জন্য y এর মান বাস্তব হবে।

$$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{1, 3\}$$

আবার,

$$y = \frac{1}{x^2-4x+3}$$

$$\Rightarrow x^2-4x+3 = \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow x^2-4x+3-\frac{1}{y} = 0$$

x এর মান বাস্তব হবে যদি নিয়ামক ≥ 0 হয়।

$$\Rightarrow 16-4\cdot 1\cdot\left(3-\frac{1}{y}\right) \geq 0$$

$$\Rightarrow 16-12+\frac{4}{y} \geq 0$$

$$\Rightarrow 4+\frac{4}{y} \geq 0$$

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{y} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{y+1}{y} \geq 0$$

$\Rightarrow y \leq -1$ বা $y > 0$

$$R_f = \{y : y \leq -1\} \cup \{y : y > 0\}$$

$$= (-\infty, -1] \cup (0, \infty)$$

Type – 11

$$y = \begin{cases} f_1(x) & \text{যখন } x < a \\ f_2(x) & \text{" } a \leq x < b \\ f_3(x) & \text{" } x \geq b \end{cases}$$

$$D_f = (-\infty, a) \cup [a, b) \cup [b, \infty)$$

$$= (-\infty, \infty)$$

$$R_f = [a, b, c]$$

Ex – 17 (iii)

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{যখন } 0 \le x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{,, } x = \frac{1}{2} \\ 1-x & \text{,, } \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

এখানে,

$0 \le x < \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$ এবং $\frac{1}{2} < x < 1$ এর জন্য $f(x)$ এর মান সংজ্ঞায়িত।

$$D_f = \{x : 0 \le x < \tfrac{1}{2}\} \cup \{\tfrac{1}{2}\} \cup \{x : \tfrac{1}{2} < x < 1\}$$

$$= [0, \tfrac{1}{2}) \cup \{\tfrac{1}{2}\} \cup (\tfrac{1}{2}, 1)$$

$$= [0, 1)$$

আবার, $0 \le x < \frac{1}{2}$ ব্যবধিতে $f(x) \in [0, \frac{1}{2})$

$x = \frac{1}{2}$ এর জন্য $f(x) = 1$

$\frac{1}{2} < x < 1$ ব্যবধিতে, $f(x) \in (0, \frac{1}{2})$

$$R_f = [0, \tfrac{1}{2}) \cup \{1\} \cup (0, \tfrac{1}{2})$$

$$= [0, \tfrac{1}{2}) \cup \{1\}.$$

Type – 12

অখণ্ড মান ফাংশন

যদি $a < b$ হয়

এবং $f(x) = |x-a| + |x-b|$ হয়

$x < a$ এর জন্য $f(x) = -(x-a) - (x-b)$

২য় শর্ত

$(-, -)$

$= -x + a - x + b$

$= -2x + a + b$

$a \le x < b$ এর জন্য $f(x) = (x-a)-(x-b)$

২য় শর্ত

$(+,-)$

$= x-a-x+b$

$= b-a$

$x \geqslant b$ এর জন্য $f(x) = (x-a)+(x-b)$

৩য় শর্ত

$(+,+)$

$= x-a+x-b$

$= 2x-a-b$

খণ্ডিত ফাংশন, $f(x) = \begin{cases} a+b-2x & \text{যখন } x < a \\ b-a & \text{,, } a \le x < b \\ 2x-a-b & \text{,, } b \le x \end{cases}$

Ex – 18 (i)

$f(x) = |x+1| + |x-1|$

$= |x-(-1)| + |x-1|$

$x < -1$ এর জন্য $f(x) = -(x+1)-(x-1)$

$= -x-1-x+1$

$= -2x$

$-1 \le x < 1$ এর জন্য $f(x) = (x+1)-(x-1)$

$= x+1-x+1$

$= 2$

$x \geqslant 1$ এর জন্য $f(x) = (x+1)+(x-1)$

$= x+1+x-1$

$= 2x$

খণ্ডিত ফাংশন $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{যখন } x < -1 \\ 2 & \text{,, } -1 \le x < 1 \\ 2x & \text{,, } 1 \le x \end{cases}$

$D_f = \{x : x < -1\} \cup \{x : -1 \le x < 1\} \cup \{x : 1 \le x\}$

$= (-\infty, -1) \cup [-1, 1) \cup [1, \infty)$

$= (-\infty, \infty)$

আবার,

$x < -1$ এর জন্য $y > 2$

$-1 \le x < 1$ " " $y = 2$

$1 \le x$ " " $y \geqslant 2$

$R_f = \{y : y > 2\} \cup \{2\} \cup \{y \geqslant 2\}$

$= (2, \infty) \cup \{2\} \cup [2, \infty)$

$= [2, \infty)$

Ex— 18 (iii)

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \frac{x}{|x-0| + |x-0|}$$

$x < 0$ এর জন্য $f(x) = \frac{x}{-x} = -1$

$x > 0$ " " $f(x) = \frac{x}{x} = 1$

$x = 0$ " " $f(x) =$ বিদ্যমান নয় $\boxed{\frac{x}{x} = 0}$

অভিষ্ট ফাংশন $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{যখন } x < 0 \\ 1 & \text{" } x > 0 \end{cases}$

$D_f = \{x : x < 0\} \cup \{x : x > 0\}$

$= (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

$= (-\infty, \infty) - \{0\}$

আবার,

$x<0$ এর জন্য $y=-1$

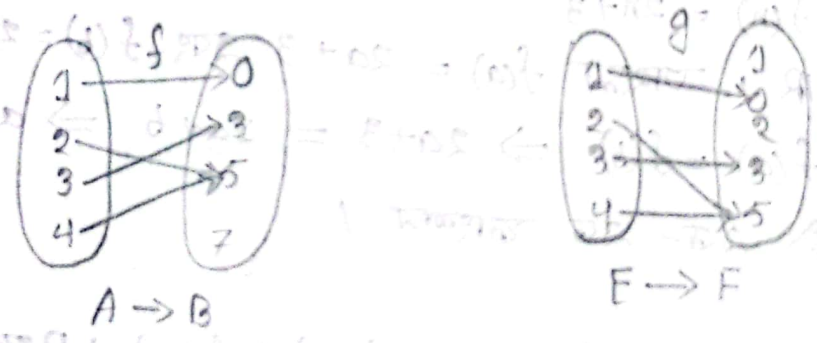
$x>0$ " " $y=1$

$\therefore R_f = \{-1, 1\}$

** অধ্যায়-২ **

** 1(B) **

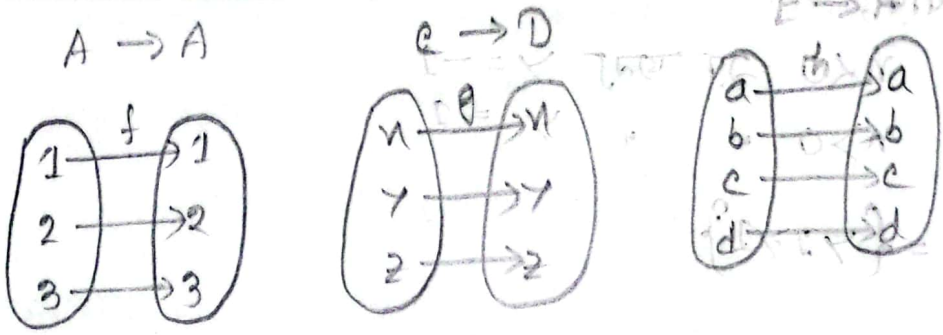
সমান ফাংশন (Equal Function) : মনেকরি $f: A \to B$ এবং $g: E \to F$ তাহলে f এবং g ফাংশনদ্বয় সমান হবে যদি (i) $D_f = D_g$ অর্থাৎ $A = E$ এবং (ii) $f(x) = g(x)$ হয় $\forall x \in A$ (বা $x \in E$).



এখানে, $D_f = D_g$ অর্থাৎ $A = E$ এবং $f(x) = g(x)$ $\forall x \in A$ (বা E)।

সুতরাং f ও g সমান ফাংশন অর্থাৎ $f = g$।

অভেদ ফাংশন (Identity Function): $f: A \to A$ কে অভেদ ফাংশন বলা হবে যদি ইহাকে $f(x) = x$ সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা যায়।



ইনটু ফাংশন (Into Function): $f: A \to B$ কে ইনটু ফাংশন বলা হবে যদি $f(A) \neq B$ হয়। অর্থাৎ রেঞ্জ ও কোডোমেন সমান না হয়।

এক-এক ফাংশন (one-one or 1-1 Function): $f: A \to B$ কে এক-এক ফাংশন বলা হবে যদি $f(a_1) = f(a_2)$ $\Rightarrow a_1 = a_2$ যেখানে $a_1, a_2 \in A$

ধরি, $f(x) = 2x+3$

$a, b \in \mathbb{R}$। তাহলে $f(a) = 2a+3$ এবং $f(b) = 2b+3$

এখন, $f(a) = f(b) \Rightarrow 2a+3 = 2a+b \Rightarrow a = b$

f একটি এক-এক ফাংশন।

সার্বিক ফাংশন (Onto Function): $f: A \to B$ কে সর্বগ্রাহী বা সার্বিক বা অনিটু ফাংশন বলা হবে যদি $f(A) = B$ হয়। অর্থাৎ রেঞ্জ ও কোডোমেন সমান হয়।

$f(x) = 3x-4$ একটি সার্বিক ফাংশন হলে

$\text{cod} f = \mathbb{R}$

$y = f(x) = 3x-4$

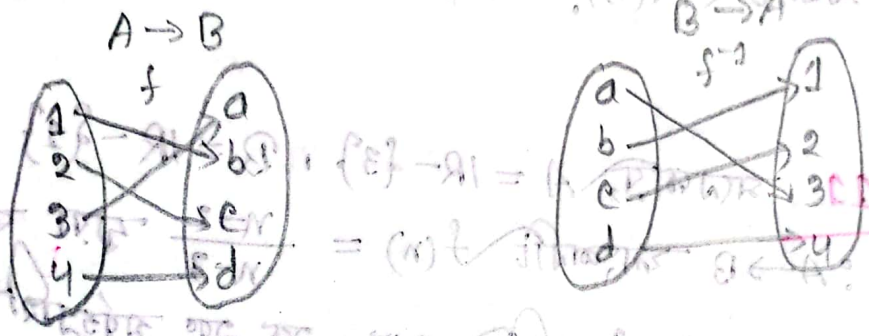
$\Rightarrow 3x = y+4$

$\Rightarrow x = \frac{1}{3}(y+4)$

যেহেতু $R_f = \mathbb{R}$

অর্থাৎ $Cod_f = R_f$ । ফাংশনটি সার্বিক ফাংশন ।

বিপরীত ফাংশন (Inverse Function): ধরি $f: A \to B$ একটি এক-এক এবং অন্টি ফাংশন । তাহলে $f^{-1}: B \to A$ বিদ্যমান যদি প্রত্যেক $b \in B$ এর জন্য একটি অনন্য $f^{-1}(b) \in A$ বিদ্যমান থাকে । এক্ষেত্রে f^{-1} কে বিপরীত ফাংশন বলা হয় ।



পরম মান (Absolute Value Function): যদি $x \in \mathbb{R}$ তবে $y = f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{যখন } x \geq 0 \\ -x & \text{" } x < 0 \end{cases}$ কে পরম মান ফাংশন বলা হয় ।

এর $D_f = \mathbb{R}$ এবং $R_f = [0, \infty)$ ।

জোড় বা যুগ্ম ফাংশন (Even Function): ফাংশন $f(x)$ কে জোড় ফাংশন বলা হবে যদি $f(-x) = f(x)$ হয় ।

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$f(-x) = 1 - \frac{1}{(-x)^2} = 1 - \frac{1}{x^2} = f(x)$$

এটি একটি জোড় ফাংশন কেননা $f(-x) = f(x)$ ।

বিজোড় বা যুগল (odd Function): ফাংশন $f(x)$ কে বিজোড় বলা হবে যদি $f(-x) = -f(x)$ হয়।

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

$$f(-x) = -x + \frac{1}{-x}$$

$$= -x - \frac{1}{x}$$

$$= -\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= -f(x)$$

এটি একটি বিজোড় ফাংশন কেননা $f(-x) = -f(x)$।

Ex – 11 মনেকরি, $A = \mathbb{R} - \{3\}$, $B = \mathbb{R} - \{1\}$ এবং $f: A \to B$ ফাংশনটি $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$ দ্বারা বর্ণিত প্রমান কর যে, f একটি এক-এক এবং সর্বজাহি ফাংশন। একটি ফর্মুলা বাহির কর যাহা f^{-1} কে সংজ্ঞায়িত করে। (Let $A = \mathbb{R} - \{3\}$ and $B = \mathbb{R} - \{1\}$ Let the function $f: A \to B$ is defined by $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$ Prove that f is an one-one and onto function Find a formula which defined f^{-1}.)

$\Rightarrow$ এখানে, $A = \mathbb{R} - \{3\}$, $B = \mathbb{R} - \{1\}$ এবং

$$f(x) = \frac{x-2}{x-3}$$

f এক-এক: ধরি, $a, b \in A$। (এখানে $a \neq 3, b \neq 3$)

$f(a) = \frac{a-2}{a-3}$ এবং $f(b) = \frac{b-2}{b-3}$

যদি $f(a) = f(b)$ হয় তবে

$$\frac{a-2}{a-3} = \frac{b-2}{b-3}$$

$$\Rightarrow (a-2)(b-3) = (b-2)(a-3)$$

$$\Rightarrow ab - 3a - 2b + 6 = ab - 3b - 2a + 6$$

$$\Rightarrow \cancel{ab} - 3a - 2b + \cancel{6} - \cancel{ab} + 3b + 2a - \cancel{6} = 0$$

$$\Rightarrow b - a = 0$$

$$\Rightarrow b = a$$

$\therefore$ f ফাংশনটি এক-এক।

f -সর্বগ্রাহী: যদি $y = f(x) = \frac{x-2}{x-3}$ হয় তবে

$$\Rightarrow y = \frac{x-2}{x-3}$$

$$\Rightarrow xy - 3y = x - 2$$

$$\Rightarrow xy - x = 3y - 2$$

$$\Rightarrow x(y-1) = 3y - 2$$

$$\Rightarrow x = \frac{3y-2}{y-1} \quad \text{——— (1)}$$

(1) নং এ $y = 1$ ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়।

ফাংশনটির কোডোমেন $Cod_f = \mathbb{R} - \{1\}$

" রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R} - \{1\}$

যেহেতু কোডোমেন = রেঞ্জ $= \mathbb{R} - \{1\}$, সুতরাং ফাংশনটি অনটু ফাংশন।

যদি কোনো ফাংশন অন্টু এবং অন-অন ফাংশন হয় তাহলে তার একটি বিপরীত পাওয়া সম্ভব।

$f : A \to B$

$f^{-1} : B \to A$ অর্থাৎ $y = \frac{x-2}{x-3}$

$\Rightarrow x = \frac{3y-2}{y-1}$

$f^{-1}(y) = \frac{3y-2}{y-1}$

$f^{-1}(x) = \frac{3x-2}{x-1}$

$f(x) = y$
$f^{-1}(y) = x$

$f(x)$ এর বিপরীত ফাংশন $f^{-1}(x) = \frac{3x-2}{x-1}$,

Ex – 19 যদি $f : \mathbb{R} - R$ এবং $g : \mathbb{R} - R$ সূত্র $f(x) = x+1$ এবং $g(x) = x-1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয় তাহলে $f+g$, $f-g$, fg; $(f+g)(1)$, $(f-g)(2)$, $fg(3)$, $\frac{f}{g}(1)$ এবং $\frac{f}{g}(5)$ নির্ণয় কর। (If the formulas $f : \mathbb{R} \to R$ and $g : \mathbb{R} \to R$ are defined by $f(x) = x+1$ and $g(x) = x-1$ then find $f+g$, $f-g$, fg, $(f+g)(1)$, $(f-g)(2)$, $fg(3)$, $\frac{f}{g}(1)$ and $\frac{f}{g}(5)$,

$\Rightarrow$ এখানে,

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$= (x+1) + (x-1)$

$= x+1+x-1 \quad = 2x$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (x+1) - (x-1)$$
$$= x+1-x+1$$
$$= 2$$

$$fg(x) = f(x)\cdot g(x) = (x+1)\cdot(x-1)$$
$$= x^2 - x + x - 1$$
$$= x^2 - 1$$

$$(f+g)(1) = f(1) + g(1) = (x+1) + (x-1)$$
$$= 1+1+1-1$$
$$= 2$$

$$(f-g)(2) = f(2) - g(2) = (x+1) - (x-1)$$
$$= 2+1-(2-1)$$
$$= 2$$

$$fg(3) = f(3)\cdot g(3) = (x+1)\cdot(x-1)$$
$$= (3+1)\cdot(3-1)$$
$$= 9-3+3-1$$
$$= 8$$

আবার সংজ্ঞানুসারে $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ যেখানে $g(x) \neq 0$

$$= \frac{x+1}{x-1} \text{ যেখানে } x-1 \neq 0$$

সুতরাং $\frac{f}{g}(1) = \frac{f(1)}{g(1)}$. কিন্তু এটা সংজ্ঞায়িত নয় কারণ $g(1) = 1-1 = 0$

আবার, $\frac{f}{g}(5) = \frac{f(5)}{g(5)} = \frac{x+1}{x-1} = \frac{5+1}{5-1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

Trigonometric Circular Function

① Sine : Domain $\rightarrow \mathbb{R}$, Range $\rightarrow -1 \leq \sin x \leq 1$

② Cose : " $\rightarrow \mathbb{R}$, " $\rightarrow -1 \leq \cos x \leq 1$

③ Tane : " $\rightarrow \mathbb{R} - (2n+1)\frac{\pi}{2}$, Range $\rightarrow (-\infty, \infty)$

④ Cosec : " $\rightarrow \mathbb{R} - n\pi$, Range $\rightarrow (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

⑤ Sec : " $\rightarrow \mathbb{R} - (2n+1)\frac{\pi}{2}$, Range $\rightarrow (-\infty, 1) \cup [1, \infty)$

⑥ Cote : " $\rightarrow \mathbb{R} - n\pi$, Range $\rightarrow (-\infty, \infty)$

** ① Sin, Cos $\rightarrow \mathbb{R}$

② tan, sec $\rightarrow$ D same

③ cosec, cot $\rightarrow$ D same

④ tan, cot $\rightarrow$ R same

* অধ্যায়—২ *

1 (C)

Ex-6: ধরি, $f: \{-2,-1,0,1,2\} \to \mathbb{R}$ এবং $f: [-2,2] \to \mathbb{R}$ ফাংশন দুইটি $f(x) = x^2+1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। তাহলে দ্বিতীয় ফাংশনের লেখচিত্র অংকন কর। (Let the two functions $f: \{-2,-1,0,1,2\} \to \mathbb{R}$ and $F: [-2,2] \to \mathbb{R}$ are defined by $f(x) = x^2+1$. Then draw the graph of both functions.

→ $D_f = \{-2,-1,0,1,2\}$

$f(x) = x^2+1$ হতে পাই

$f(-2) = (-2)^2+1 = 5$

$f(-1) = (-1)^2+1 = 2$

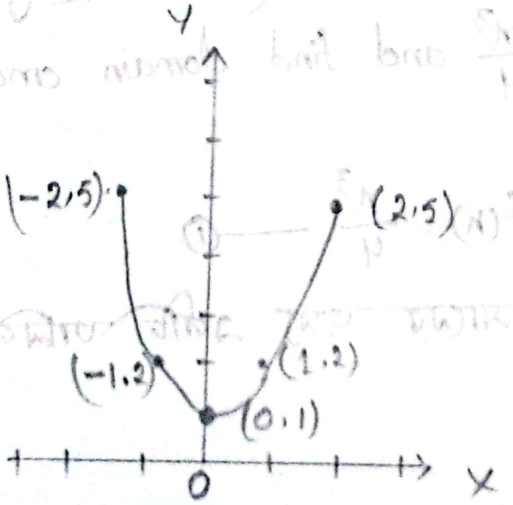
$f(0) = 0^2+1 = 1$

$f(1) = 1^2+1 = 2$

$f(2) = 2^2+1 = 5$

f এর বিন্দুসমূহ $= \{(-2,5), (-1,2), (0,1), (1,2), (2,5)\}$

xy সমতলে স্থাপন করলে f এর লেখচিত্র পাওয়া যাবে।

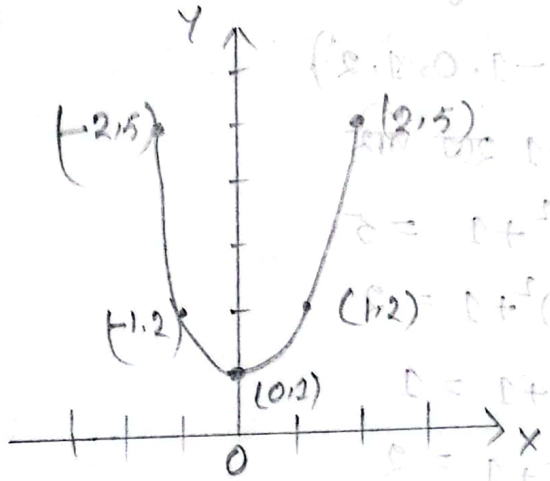


দ্বিতীয় অংশ: এখানে, $D_f = [-2, 2]$

এখন $-2 \le x \le 2$ ব্যবধিতে $y = f(x) = x^2+1$ সূত্রের সাহায্যে x এবং y এর কিছু মানের একটি তালিকা তৈরি করি

x	-2	-1	0	1	2
y	5	2	1	2	5

এখন $(-2,5)$, $(-1,2)$, $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,5)$ বিন্দু সমূহ xy সমতলে স্থাপন করলে f এর লেখচিত্র পাওয়া যায়।



Ex-8: $f(x) = \frac{x^3}{4}$ ফাংশনের লেখচিত্র অংকন কর এবং ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। (Draw the graph of the function $f(x) = \frac{x^3}{4}$ and find domain and range).

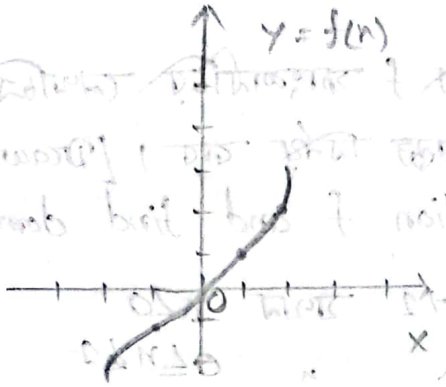
→ দেওয়া আছে,

$$f(x) = \frac{x^3}{4} \quad \text{—— (1)}$$

x ও y এর কিছু মানের জন্য একটি তালিকা তৈরি করি

x	0	1	-1	2	-2
$f(x)$	0	$1/4$	$-1/4$	2	-2

① নং ফাংশনটি $(-2,-2), (-1,-\frac{1}{4}), (0,0), (1, 1/4), (2,2)$ বিন্দুগামী বক্ররেখা নির্দেশ করে



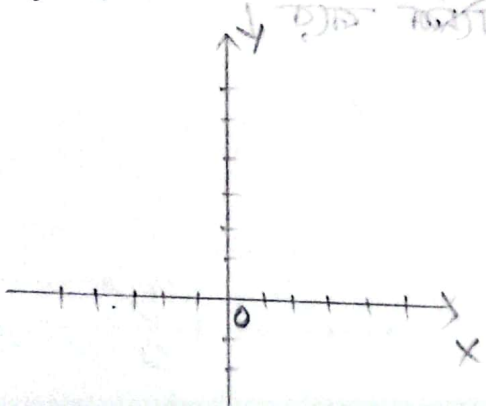
লেখচিত্র হতে,
$D_f = \mathbb{R}$ এবং
$R_f = \mathbb{R}$ ।

Ex-9: $f(x) = \sqrt{x-1}$ ফাংশনটির লেখচিত্র অংকন কর এবং ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। (Draw the graph of the function $f(x) = \sqrt{x-1}$ and find domain and range).

→ $f(x) = \sqrt{x-1}$ ফাংশনটি $x-1 \geq 0$ বা $x \geq 1$ এর জন্য বিদ্যমান।
$x \geq 1$ শর্তে x ও $f(x)$ এর কিছু মানের একটি তালিকা তৈরি করি।

x	1	2	3	5
$f(x)$	0	1	$\sqrt{2}$	2

ফাংশনটি $(1,0)$ বিন্দু থেকে $(2,1), (3,\sqrt{2}), (5,2)$ বিন্দুগামী এবং ক্রমবর্ধমান।



⊞ $x \leq 0$ থাকলে প্রান্তবিন্দুযুক্ত এবং একে ( ) দ্বারা প্রকাশ করে এবং ○ বৃত্ত ভরাট হবে না লেখচিত্রে।

⊞ $x < 0$ থাকলে প্রান্তবিন্দুহীন এবং একে [ ] দ্বারা প্রকাশ করে এবং ● বৃত্ত ভরাট হবে লেখচিত্রে।

Ex-13: নিম্নে বর্ণিত f ফাংশনটির লেখচিত্র অংকন কর এবং ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Draw the graph of the following function f and find domain and range).

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{যখন } x<0 \\ x & \text{" } 0 \leq x \leq 1 \\ 1/x & \text{" } x>1 \end{cases}$$

শর্ত: ১ → $x<0$ বা $(-\infty, 0)$ ব্যবধিতে $f(x) = x^2+1$ এর প্রান্তবিন্দু $(0,1)$ প্রান্তবিন্দুবিহীন $(-1,2)$, $(-2,5)$... বিন্দু পর্যন্ত রেখার অংশ নির্দেশ করে।

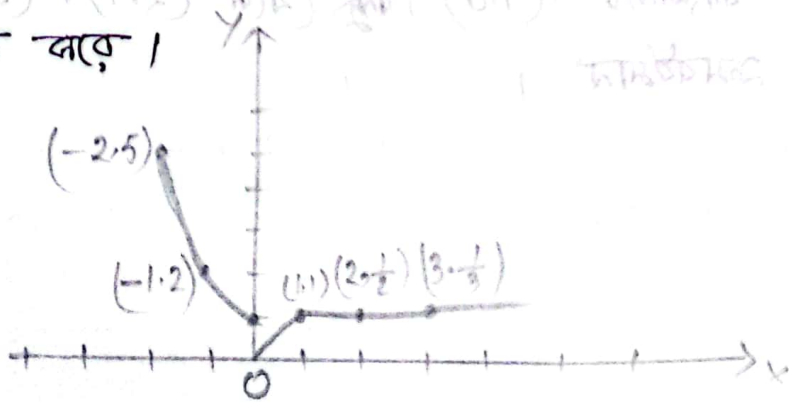
শর্ত: ২ → $0 \leq x \leq 1$ ব্যবধিতে $f(x) = x$ একটি $(0,0)$ এবং $(1,1)$ প্রান্তবিন্দুধারী রেখাংশ নির্দেশ করে,

শর্ত: ৩ → $x>1$ বা $(1,\infty)$ ব্যবধিতে $f(x) = \frac{1}{x}$ একটি $(1,1)$ বিন্দুবিহীন এবং $(2,\frac{1}{2})$, $(3,\frac{1}{3})$ --- বিন্দু পর্যন্ত রেখার অংশ নির্দেশ করে।

লেখচিত্র হতে,

$D_f = \mathbb{R}$ এবং

$R_f = [0,\infty)$



Ex-14: নিম্নভাবে সংজ্ঞায়িত f ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর। (Draw the graph of the function f which is defined as follows).

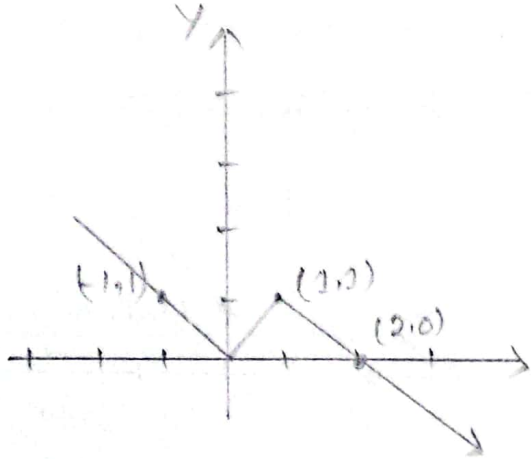
$$f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{যখন } x>1 \\ x & \text{" } 0<x\le 1 \\ -x & \text{" } x\le 0 \end{cases}$$

→ অংশ-১: $x>1$ বা $(1,\infty)$ ব্যবধিতে $y=f(x)=2-x$ একটি $(1,1)$ খোলা প্রান্তবিন্দু এবং $(2,0)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ নির্দেশ করে।

অংশ-২: $0<x\le 1$ বা $(0,1]$ ব্যবধিতে $y=f(x)=x$ একটি $(0,0)$ খোলা প্রান্ত বিন্দু এবং $(1,1)$ প্রান্তবিন্দু বিশিষ্ট রেখাংশের সমীকরণ নির্দেশ করে।

অংশ-৩: $x\le 0$ বা $(-\infty,0]$ ব্যবধিতে $y=f(x)=-x$ একটি $(0,0)$ প্রান্তবিন্দু বিশিষ্ট এবং $(-1,1)$ বিন্দুগামী রেখাংশের সমীকরণ নির্দেশ করে।

তিন অংশের বিন্দুসমূহ আয়তাকার স্থানাঙ্কের সমতলে স্থাপন করলে সরলভাবে সংযোগ করলে f এর লেখচিত্র পাওয়া যায়।



Ex-15: $f(x) = \frac{1}{2}(|x|+x)$ ফাংশনটির লেখচিত্র অংকন কর এবং ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। (Draw the graph of the function $f(x) = \frac{1}{2}(|x|+x)$ and find domain and range.

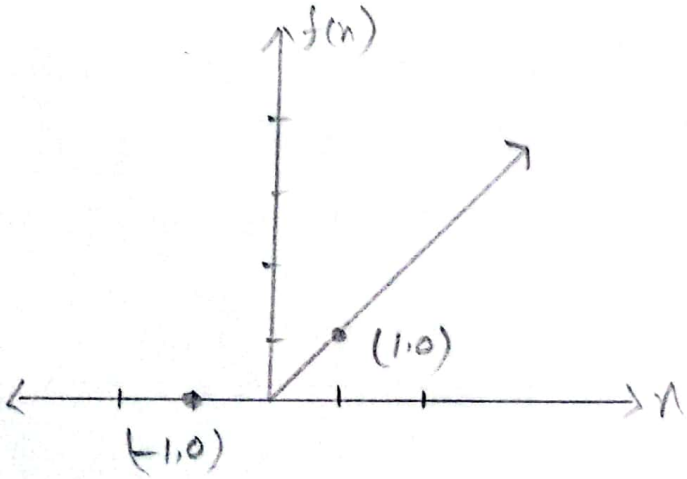
→ দে. আছে, $f(x) = \frac{1}{2}(|x|+x)$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}(x+x) & \text{যখন } x \geq 0 \\ \frac{1}{2}(-x+x) & \text{" } x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x & \text{যখন } x \geq 0 \\ 0 & \text{" } x < 0 \end{cases}$$

$x \geq 0$ শর্তে: $f(x) = x$, এটি একটি রেখার অংশের সমীকরণ যার প্রান্তবিন্দু $(0,0)$ এবং $(1,1)$ বিন্দুগামী।

$x < 0$ শর্তে: $f(x) = 0$। এটি একটি খোলা রেখার অংশের সমীকরণ যার খোলা প্রান্ত $(0,0)$ অর্থাৎ প্রান্তবিন্দু $(0,0)$ বিন্দুর নিকটবর্তী এবং $(-1,0)$ বিন্দুগামী।



Ex-16: নিম্নলিখিত f ফাংশনের লেখচিত্র অংকনসহ এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয়। (Draw the graph and find domain and range of the function f which is defined as follows.)

$$f(x) = |x| + |x-1|$$

→ এখানে,

$$y = f(x) = |x| + |x-1|$$

$$= |x-0| + |x-1|$$

কার্ত

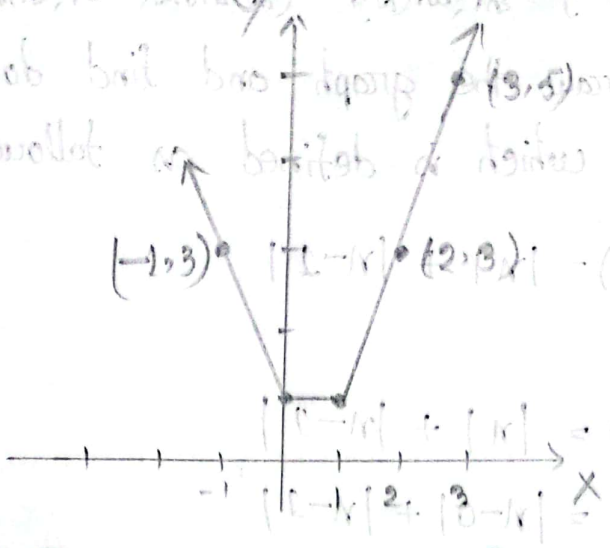
$$= \begin{cases} -2x+1 & \text{যখন } x < 0 & (-,-) \\ 1 & \text{" } 0 \le x < 1 & (+,-) \\ 2x+1 & \text{" } x \ge 1 & (+,+) \end{cases}$$

কার্ত-১: $x<0$ কার্তে, $y=-2x+1$ একটি $(0,1)$ থেকে $(-1,3)$ $(-2,5)$ পর্যন্ত প্রান্তবিন্দুবিহীন রশ্মির সমীকরণ নির্দেশ করে।

কার্ত-২: $0 \le x < 1$ কার্ত $y=1$ একটি $(0,1)$ প্রান্তবিন্দুবাদী থেকে $(1,1)$ প্রান্তবিন্দুবিহীন রেখার সমীকরণ নির্দেশ করে।

কার্ত-২: $x \ge 1$ কার্তে বা ব্যবহিতে $y=2x-1$ একটি $(1,1)$ থেকে $(2,3)$, $(3,5)$ পর্যন্ত প্রান্তবিন্দুবাদী রেখার সমীকরণ নির্দেশ করে।

তিন কার্তের বিন্দুসমূহ xy সমতলে স্থাপন করলে f এর লেখচিত্র পাওয়া যাবে।



লেখচিত্র হতে, ডোমেন $D_f = \mathbb{R}$

রেঞ্জ $R_f = [1, \infty)$

Ex – 18 নিম্নলিখিত সংজ্ঞায়িত f ফাংশনটির লেখচিত্র অংকন কর। (Draw the graph of the function f which is defined as follows).

$$f(x) = |x+1| + |x-2|$$

$$\rightarrow \quad Y = f(x) = |x+1| + |x-2|$$

$$= |x-(-1)| + |x-2|$$

$$= \begin{cases} -(x+1)-(x-1) & \text{যখন } x < -1 \\ (x+1)-(x-1) & \text{" } -1 \le x < 1 \\ (x+1)+(x-2) & \text{" } x \geq 1 \end{cases}$$

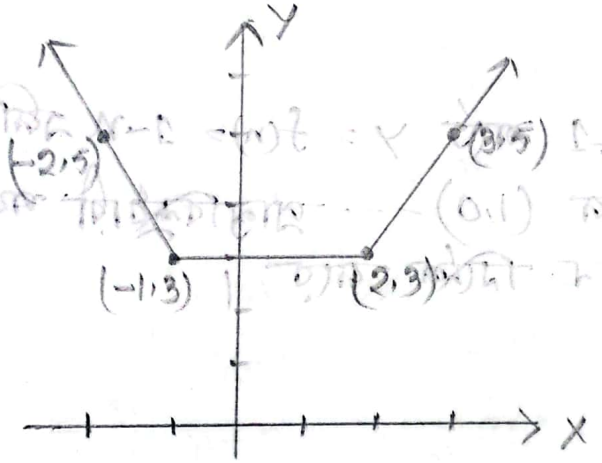
$$= \begin{cases} -2x+1 & \text{যখন } x < -1 \\ 3 & \text{" } -1 \le x < 2 \\ 2x-1 & \text{" } x \geq 2 \end{cases}$$

শর্ত-১: $x < -1$ ব্যবধিতে $y = -2x+1$ একটি $(-1,3)$ থেকে $(-2,5)$ ---- পর্যন্ত প্রান্তবিন্দুহীন রেখার সমীকরণ নির্দেশ করে।

শর্ত-২: $-1 \le x < 2$ ব্যবধিতে $y = 3$ $(-1,3)$ প্রান্তবিন্দুবাদী থেকে $(2,3)$ বিন্দুহীন রেখার সমীকরণ নির্দেশ করে।

শর্ত-৩: $x \geq 2$ ব্যবধিতে $y = 2x-1$ একটি $(2,3)$ থেকে $(3,5)$ --- পর্যন্ত প্রান্তবিন্দুবাদী রেখার সমীকরণ নির্দেশ করে।

ফাংশনটির লেখচিত্র অংকন করা হলো :—



Ex-18: নিম্নলিখিত f ফাংশনটির লেখচিত্র অংকন কর এবং ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। (Draw the graph and find domain and range of function f which is defined as follows).

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{যখন } |x| > 1 \\ 1+x & \text{" } -1 \le x \le 0 \\ 1-x & \text{" } 0 < x \le 1 \end{cases}$$

→ শর্ত :১ → এখানে, $|x| > 1$

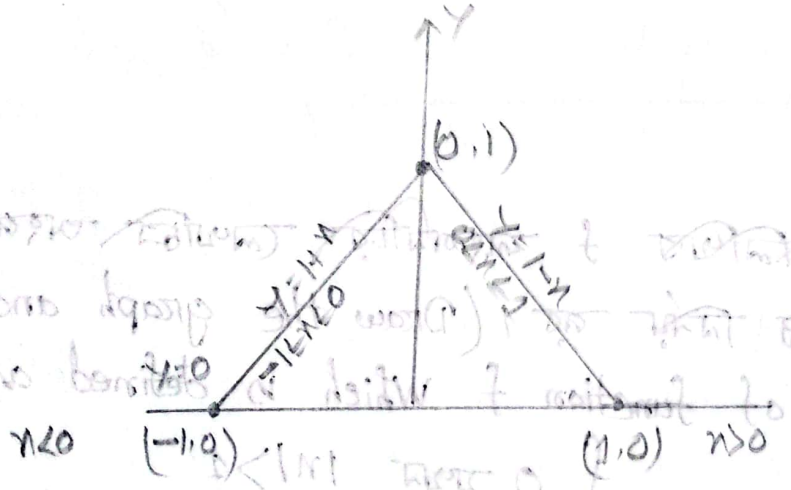
$\Rightarrow x > 1$ অথবা $x < -1$

এখন $x>1$ শর্তে $y = f(x) = 0$ একটি $(1,0)$ থেকে $(2,0)$ অথবা $(3,0)$ প্রান্ত বিন্দুহীন রেখা নির্দেশ করে।

আবার, $x<-1$ শর্তে $y = f(x) = 0$ একটি $(-1,0)$ থেকে $(-2,0)$, $(-3,0)$ অথবা প্রান্তবিন্দুহীন রেখা নির্দেশ করে।

শর্ত-2: $-1 \le x \le 0$ শর্তে $y = f(x) = 1+x$ একটি $(-1,0)$ থেকে $(0,1)$ প্রান্তবিন্দুধারী রেখার সমীকরণ নির্দেশ করে।

শর্ত-3: $0 < x \le 1$ শর্তে $y = f(x) = 1-x$ একটি $(0,1)$ প্রান্তবিন্দুহীন থেকে $(1,0)$ --- প্রান্তবিন্দুধারী অথবা রেখার সমীকরণ নির্দেশ করে।



$f(x) = |x-a| + |x-b| + |x-c|$

শর্তসমূহ $\longrightarrow$ $x<a \longrightarrow (-,-,-)$

$a \le x < b \longrightarrow (+,-,-)$

$b \le x < c \longrightarrow (+,+,-)$

$c \le x \longrightarrow (+,+,+)$

Ex – 22: $f(x) = |x+1| + |x| + |x-1|$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত ফাংশনের লেখচিত্র অংকন কর। (Draw the graph of f which is defined by $f(x) = |x+1| + |x| + |x-1|$).

→ এখানে, $y = f(x) = |x+1| + |x| + |x-1|$

$$= |x-(-1)| + |x-0| + |x-1|$$

$$= \begin{cases} -(x+1)-(x)-(x-1) & \text{যখন } x < -1 \\ (x+1)-(x)-(x-1) & \text{" } -1 \le x < 0 \\ (x+1)+(x)-(x-1) & \text{" } 0 \le x < 1 \\ (x+1)+(x)+(x-1) & \text{" } 1 \le x \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -3x & \text{যখন } x < -1 \\ -x+2 & \text{" } -1 \le x < 0 \\ x+2 & \text{" } 0 \le x < 1 \\ 3x & \text{" } 1 \le x \end{cases}$$

f ফাংশনের লেখচিত্র নিম্নরূপ:

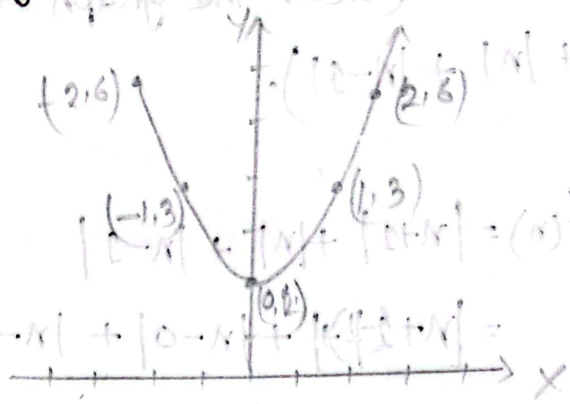
অংশ-১: $x < -1$ ব্যবধিতে $y = f(x) = -3x$ একটি $(-1,3)$ থেকে $(-2,6)$ ---- প্রান্তবিন্দুহীন রশ্মির সমীকরণ নির্দেশ করে।

অংশ-২: $-1 \le x < 0$ ব্যবধিতে $y = f(x) = -x+2$ একটি $(-1,3)$ প্রান্তবিন্দু থেকে $(0,2)$ প্রান্তবিন্দুহীন রশ্মির সমীকরণ নির্দেশ করে।

অংশ-৩: $0 \le x < 1$ ব্যবধিতে $y = x+2$ একটি $(0,2)$ প্রান্তবিন্দু থেকে $(1,3)$ প্রান্তবিন্দুহীন রশ্মির সমীকরণ নির্দেশ করে।

CamScanner

শর্ত-৪: $x \geq 1$ ব্যবধিতে $y = f(x) = 3x$ একটি $(1,3)$, $(2,6)$ --- পর্যন্ত প্রান্তবিন্দুধারী রৈখিক সমীকরণ নির্দেশ করে।



Ex-23 নিম্নে বর্ণিত f ফাংশনটির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর এবং লেখচিত্র অংকন কর। (Find domain and range of the following function and draw the graph).

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{|x|}{2}} & \text{যখন } -1 < x < 0 \\ x^2 & \text{,, } 0 \leq x < 2 \end{cases}$$

→ প্রদত্ত ফাংশনটি $(-1,0)$ এবং $[0,2)$ ব্যবধিতে সংজ্ঞায়িত।

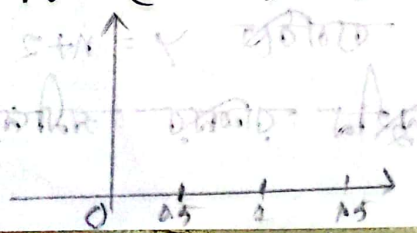
সুতরাং $D_f = (-1,0) \cup [0,2) = (-1,2)$

$(-1,0)$ ব্যবধিতে $f(x) = e^{-\frac{|x|}{2}}$ এর রেঞ্জ

$$R_f' = (f(-1), f(0))$$
$$= \left(e^{-\frac{|-1|}{2}}, e^{-\frac{0}{2}}\right)$$
$$= (e^{-\frac{1}{2}}, e^0)$$
$$= (0.60, 1)$$

$(0,2)$ ব্যবধিতে $f(x) = x^2$ এর রেঞ্জ $R_f'' = [0,4)$

ফাংশনটির রেঞ্জ $R_f = (0.60, 1) \cup [0,4) = [0,4)$



অধ্যায়
২য়

* অধ্যায় – ২ *

* 2(A) *

চলরাশির সীমা (Limit of a variable): কোনো স্বাধীন চলক একটি নির্দিষ্ট নিয়মানুযায়ী কতকগুলি মান গ্রহনের জন্য একটি নির্দিষ্ট সংখ্যার দিকে অগ্রসর হতে থাকলে ঐ সংখ্যাটিকে চলরাশির সীমা বলে।

কোনো বাস্তব চলরাশি x বাস্তব অক্ষের কোনো নির্দিষ্ট a মানের দিকে কতকগুলি মান গ্রহনকালে ধাবিত হতে থাকলে a কে x এর সীমা বলে। একে $x \to a$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

ফাংশনের সীমা (Limit of function): যদি একটি চলক x এর মান a এর উভয় দিক হতে (ডান বা বাম) অগ্রসর হয়ে a এর অতি নিকটবর্তী হওয়ায় $f(x)$ এর মান একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা l এর অতি নিকটবর্তী হয় তবে l কে $f(x)$ ফাংশনের সীমা বলা হয়। একে $\lim_{x \to a} f(x) = l$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

$\delta - \epsilon$ এর সাহায্যে ফাংশনের সীমা (Define limit of function using δ to ϵ):

যদি প্রত্যেক সংখ্যা $\epsilon > 0$ এর উপর নির্ভরশীল একটি ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা δ নির্ণয় করা যায় যে, $0 < |x-a| < \delta$ হলে $|f(x) - l| < \epsilon$ হয় তবে l কে ফাংশনের সীমা বলা হয়।

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

Type — 1

($\delta-\epsilon$) সংজ্ঞার সাহায্যে প্রমান কর (use the ($\delta-\epsilon$) definition to prove that $\lim_{x\to 2}(3x+4)=10$

$\Rightarrow$ ধরি,

$$f(x)=3x+4$$

যেকোনো ক্ষুদ্র সংখ্যা $\epsilon>0$ এর দিয়ে নির্ভরশীল অপর একটি ক্ষুদ্র সংখ্যা $\delta>0$ বিদ্যমান বিদ্যমান থাকবে যেখানে

$$|x-2|<\delta$$

$\Rightarrow |f(x)-10|<\epsilon$ যেখানে, $f(x)=3x+4$

এখন,

$$|f(x)-10| = |3x+4-10|$$
$$= |3x-6|$$
$$= |3(x-2)|$$
$$= 3|x-2|$$

$\therefore |f(x)-10|<3\delta$ যেখানে, $3\delta=\epsilon$

$\therefore |f(x)-10|<3\cdot\frac{\epsilon}{3}$ বা, $\delta=\frac{\epsilon}{3}$

$\therefore |f(x)-10|<\epsilon$

$\therefore$ $\epsilon>0$ এর দিয়ে নির্ভরশীল $\delta>0$ বিদ্যমান থাকবে

$$|x-2|<\delta$$

$$|f(x)-10|<\epsilon$$

অর্থাৎ $\lim_{x\to 2} 3x+4=10$

Ex-2:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$$

$\Rightarrow$ ধরি, $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$

যেকোনো ক্ষুদ্র সংখ্যা $\epsilon > 0$ এর জন্য নির্ভরশীল আমরা একটি ক্ষুদ্র সংখ্যা $\delta > 0$ বিদ্যমান থাকবে যখন

$$|x-3| < \delta$$

$\Rightarrow |f(x) - 6| < \epsilon$ যেখানে, $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$

এখন, $|f(x)-6| = \left|\frac{x^2-9}{x-3} - 6\right|$

$$= \left|\frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)} - 6\right|$$

$$= |x+3-6|$$

$$= |x-3|$$

$$< \delta$$ যেখানে $\delta = \epsilon$

$$|f(x) - 6| < \delta$$

$$|f(x) - 6| < \epsilon$$

$\epsilon > 0$ এর জন্য নির্ভরশীল $\delta > 0$ বিদ্যমান থাকবে,

$\therefore |x-3| < \delta$

$|f(x) - 6| < \epsilon$

অর্থাৎ $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$

Type-2

Ex-4: $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = 3$

ধরি, $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$

যেকোনো ক্ষুদ্র সংখ্যা $\epsilon>0$ এর জন্য নির্ভরশীল এমন একটি সংখ্যা $\delta>0$ পাওয়া যাবে, যেখানে

$$|x-1|<\delta$$

$$\Rightarrow |f(x)-3|<\epsilon \qquad \text{যেখানে } f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}$$

এখন,

$$|f(x)-3| = \left|\frac{x^3-1}{x-1}-3\right|$$

$$= \left|\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}-3\right|$$

$$= |x^2+x+1-3|$$

$$= |x^2+x-2|$$

$$= |x^2-2x+1+3x-3|$$

$$= |(x-1)^2+3(x-1)|$$

$$\le |(x-1)^2|+3|x-1|$$

$$< |x-1|+3|x-1|$$

$$< 4|x-1|$$

$$< 4\delta \qquad \text{যেখানে } 4\delta=\epsilon \Rightarrow \delta=\frac{\epsilon}{4}$$

*$|a+b|$ কে ভাঙালে $|a+b|\le|a|+|b|$

* পাওয়ার টিপি দেওয়ার জন্য equal চিহ্ন টিপি দেওয়া হয়

$$\therefore |f(x)-3| < 4\cdot\frac{\epsilon}{4}$$

$$|f(x)-3|<\epsilon$$

সুতরাং $\epsilon>0$ এর জন্য নির্ভরশীল $\delta>0$ বিদ্যমান থাকবে

$$|x-1| < \delta$$

$$\Rightarrow |f(x) - 3| < \epsilon$$

অর্থাৎ $\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = 3$

Ex-5:

$$\lim_{x \to 2} (x^3 - 3x + 7) = 9$$

$\Longrightarrow$ ধরি, $f(x) = x^3 - 3x + 7$

যেকোনো ক্ষুদ্র সংখ্যা $\epsilon > 0$ এর জন্য নির্ণয়যোগ্য এমন একটি সংখ্যা $\delta > 0$ পাওয়া যাবে, যেখানে

$$|x-2| < \delta$$

$$\Rightarrow |f(x) - 9| < \epsilon \qquad \text{যেখানে, } f(x) = x^3 - 3x + 7$$

এখন, $|f(x) - 9| = |x^3 - 3x + 7 - 9|$

$$= |x^3 - 3x - 2|$$

$$= |x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + 6x^2 - 24x + 24 + 9x - 18|$$

$$= |(x-2)^3 + 6(x-2)^2 + 9(x-2)|$$

$$\leq |(x-2)^3| + 6|(x-2)^2| + 9|(x-2)|$$

$$< |x-2| + 6|x-2| + 9|x-2|$$

$$< 16|x-2|$$

$$< 16\delta \qquad \text{যেখানে, } 16\delta = \epsilon$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{\epsilon}{16}$$

$$|f(x) - 9| < 16 \cdot \frac{\epsilon}{16}$$

$$|f(x) - 9| < \epsilon$$

সুতরাং $\epsilon > 0$ এর উপর নির্ভরশীল $\delta > 0$ বিদ্যমান থাকবে

$$|x-2| < \delta$$

$$\Rightarrow |f(x) - 9| < \epsilon$$

অর্থাৎ $\lim_{x \to 2} (x^3 - 3x + 7) = 9$

Type-3

Ex-6:

$$f(x) = \begin{cases} 1+2x & \text{যখন } -\frac{1}{2} \le x < 0 \\ 1-2x & \text{,, } 0 \le x < \frac{1}{2} \\ -1+2x & \text{,, } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

a) $x = 0$ বিন্দুতে

ডানসীমা $= \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (1-2x)$

$= (1 - 2 \cdot 0)$

$= 1$

বামসীমা $= \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (1+2x)$

$= (1 + 2 \cdot 0)$

$= 1$

যেহেতু $x=0$ বিন্দুতে ডানসীমা = বামসীমা $= 1$

$\therefore \lim_{x \to 0} f(x) = 1$

b) $x = \frac{1}{2}$ বিন্দুতে

ডানসীমা $= \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} (-1+2x)$

$$= \left(-1 + 2\cdot\frac{1}{2}\right)$$

$$= 0$$

বামসীমা $= \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} (1-2x) = \left(1 - 2\cdot\frac{1}{2}\right) = 0$

যেহেতু, $x = \frac{1}{2}$ বিন্দুতে ডানসীমা = বামসীমা = 0

$$\therefore \lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = 0$$

Ex – 8: দেখাও যে, $\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$ বিদ্যমান নয়। (Show that $\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$ not exist).

$\Rightarrow$ বামসীমা $= \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{|-x|}$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0^-} -1 = -1$$

ডানসীমা $= \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1$

$$= 1$$

যেহেতু ডানসীমা $\neq$ বামসীমা

যেহেতু $\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$ বিদ্যমান নয়।

Type-4

Ex – 10: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\tan x} - 1}{e^{\tan x} + 1}$ এর সীমাখমান কি বিদ্যমান? (Does the limit of $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\tan x} - 1}{e^{\tan x} + 1}$ exist?)

$$\Rightarrow \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{e^{\tan x} - 1}{e^{\tan x} + 1}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{e^{\tan x}\left(1 - \frac{1}{e^{\tan x}}\right)}{e^{\tan x}\left(1 + \frac{1}{e^{\tan x}}\right)}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \frac{1}{e^{\tan x}}}{1 + \frac{1}{e^{\tan x}}}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{e^{\tan \pi/2}}}{1 + \frac{1}{e^{\tan \frac{\pi}{2}}}}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{e^{\infty}}}{1 + \frac{1}{e^{\infty}}}$$

$$= \frac{1 - 0}{1 + 0}$$

$$= \frac{1}{1}$$

$$= 1$$

$\therefore \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x)$ ফাংশনটি বিদ্যমান।

* অধ্যায়-2 *

2(B)

অবিচ্ছিন্ন ফাংশনের সংজ্ঞা (Definition of a continuous function):

$x=a$ বিন্দুতে ফাংশন $f(x)$ কে অবিচ্ছিন্ন বলা হবে যদি $f(a)$ সংজ্ঞায়িত, $\lim_{x\to a} f(x)$ বিদ্যমান এবং $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ হয়।

Ex-7: বাস্তব ফাংশনটি $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{যখন } x\neq 2 \\ 3 & x=2 \end{cases}$ হলে দেখাও যে f ফাংশনটি $x=2$ বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন। f ফাংশনটিকে এমনভাবে সংজ্ঞায়িত কর যেন এর $x=2$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হয়। (The real function f is given by $f(x)$. Show that the function f is discontinious at $x=2$. Define the function f in such a way that it is continious at $x=2$).

⟹ দে. আছে, $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$

যখন $x=2$ তখন $f(x)=3$

$$\Rightarrow f(2)=3$$

$$L.H.S = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} x+2 = 2+2 = 4$$

$$R.H.S = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} x+2 = 2+2 = 4$$

$x=2$ বিন্দুতে ফাংশনটি বিচ্ছিন্ন কারণ —

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 4 = \lim_{x\to 2^-} f(x) \neq f(2)$$

যেহেতু $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$ এবং $f(2) = 3$, কাজেই $x=2$ বিন্দুতে ফাংশনটিকে অবিচ্ছিন্ন হওয়ার জন্য নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত করা যায়।

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{যখন } x \neq 2 \\ 4 & \text{,, } x = 2 \end{cases}$$

Ex-10: $x=0$ এবং $x=1$ বিন্দুতে $f: R \to R$ ফাংশনটির অবিচ্ছিন্নতা আলোচনা কর যেখানে [At $x=0$ and $x=1$ discuss the continuity of the function $f: R \to R$ where)

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{যখন } x<0 \\ x & \text{,, } 0 \le x < 1 \\ 1/x & \text{,, } x \ge 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $x=0$ বিন্দুতে

$$R.H.S = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

$$L.H.S = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2+1 = 0^2+1 = 1$$

$$\therefore \lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$$

ফাংশনটি বিচ্ছিন্ন।

আবার,
$x=1$ বিন্দুতে

$$R.H.S = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$L.H.S = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x = 1$$

$$\therefore \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন

$\therefore$ $x=0$ বিন্দুতে ফাংশনটি বিচ্ছিন্ন হলেও $x=1$ বিন্দুতে ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন।

Ex-22 নিচের ফাংশনটির $x=0$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্নতা পরীক্ষা কর।
(verify the continuity of the following function).

$$f(x) = \frac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{e^{1/x} + e^{1/x}}$$

$\Rightarrow$ দে. আছে, $f(x) = \dfrac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{e^{1/x} + e^{-1/x}}$

$x=0$ বিন্দুতে,

$$L.H.S = \lim_{x\to 0^-} = \frac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{e^{1/x} + e^{-1/x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{1/x}\left(1 - \frac{e^{-1/x}}{e^{1/x}}\right)}{e^{1/x}\left(1 + \frac{e^{-1/x}}{e^{1/x}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{1 - \frac{e^{-1/x}}{e^{1/x}}}{1 + \frac{e^{-1/x}}{e^{1/x}}}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{1 - e^{-1/x} \cdot e^{-1/x}}{1 + e^{-1/x} \cdot e^{-1/x}}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{1 - e^{-2/x}}{1 + e^{-2/x}}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{e^{-2/x}\left(\frac{1}{e^{-2/x}} - 1\right)}{e^{-2/x}\left(\frac{1}{e^{-2/x}} + 1\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{1}{e^{-2/x}} - 1}{\frac{1}{e^{-2/x}} + 1}$$

$$= \frac{\frac{1}{\alpha} - 1}{\frac{1}{\alpha} + 1} = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

$$R.H.S = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{e^{1/x} + e^{-1/x}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{1/x}\left(1 - \frac{e^{-1/x}}{e^{1/x}}\right)}{e^{1/x}\left(1 + \frac{e^{-1/x}}{e^{1/x}}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - e^{-1/x} \cdot e^{-1/x}}{1 + e^{-1/x} \cdot e^{-1/x}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - e^{-2/x}}{1 + e^{-2/x}} \quad \cancel{= \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-2/x}\left(\frac{1}{e^{-2/x}} - 1\right)}{e^{-2/x}\left(\frac{1}{e^{-2/x}} + 1\right)}}$$

$$= \frac{1 - 0}{1 + 0}$$

$$= \cancel{\frac{1}{1}} = \frac{1}{1} = 1$$

$x=0$ বিন্দুতে

$R.H.S \neq L.H.S$

$\therefore$ ফাংশনটি বিচ্ছিন্ন।

Ex-24: $x=1$ বিন্দুতে $f(x)=|x-1|+|x-3|$ ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা যাচাই কর। (Discuss the continuity of $f(x)$).

$\Longrightarrow$ দে. আছে,

$$f(x)=|x-1|+|x-3|$$

$$f(x)=\begin{cases} -2x+4 & \text{যখন } x<1 \\ 2 & \text{" } 1\leq x<3 \\ 2x-4 & \text{" } x\geq 3 \end{cases}$$

$x=1$ বিন্দুতে,

বামসীমা $=\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(-2x+4) = -2\cdot(-1)+4$
$= 2$

ডানসীমা $=\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 2 = 2$

$\therefore \lim_{x\to 1^-} f(x) = 2 = \lim_{x\to 1^+}$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} = 2$

সুতরাং ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন।

অধ্যায় – ২

২(C)

Derivative of a Function (ফাংশনের ডেরিভেটিভ বা অন্তরজ) :

যদি $f(x)$ ফাংশনটি $x=a$ বিন্দুতে সংজ্ঞায়িত। তাহলে

$$f(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{--- (1)}$$

দেয় $x=a$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অন্তরজ বলা হবে যদি (1) এর লিমিট বিদ্যমান থাকে।

Left hand derivative (বাম অন্তরজ): যদি $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ বিদ্যমান থাকে তবে একে $x=a$ বিন্দুতে ফাংশন $f(x)$ এর বাম অন্তরজ বলে (L.H.D) একে $L'(a)$ বা $Lf'(a)$ দ্বারা নির্দেশ করে।

Right hand derivative (ডান অন্তরজ): যদি $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ বিদ্যমান থাকে তবে একে $x=a$ বিন্দুতে ফাংশন $f(x)$ এর ডান অন্তরজ বলে (R.H.D)। একে $R'(a)$ বা $Rf'(a)$ দ্বারা নির্দেশ করে।

Note:

1. কোনো একটি বিচ্ছিন্ন ফাংশন কখনোই অন্তরীকরণযোগ্য হতে পারবেনা।
2. ক্রমমান অবিচ্ছিন্ন ফাংশনই অন্তরীকরণযোগ্য হতে পারবে।
3. অবিচ্ছিন্ন ফাংশন অন্তরীকরণ যোগ্য হতে পারে আবার নাও হতে পারে।

CamScanner

উপপাদ্য :- 1 যদি $x=a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অন্তরীকরণযোগ্য হয় তবে ঐ বিন্দুতে ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন। (If the function $f(x)$ is differentiable at $x=a$ then the function is continious at the point).

$\Longrightarrow$ যেহেতু $x=a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অন্তরীকরণযোগ্য। সুতরাং

$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ একটি সসীম রাশি।

এখন,

$$\lim_{h\to 0}\left[f(a+h)-f(a)\right].$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \times h$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \times \lim_{h\to 0} h$$

$$= f'(a) \times 0$$

$$= 0$$

$\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$ $\quad$ [$\because f(a)$ = একটি সসীম রাশি]

এটি নির্দেশ করে $x=a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন।

Ex-1: দেখাও যে, $x=1$ বিন্দুতে $f(x)=x^2+2$ ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন এবং অন্তরীকরণযোগ্য। [Show that the function $f(x)=x^2+2$ is continious and differentiable at $x=1$]

$\Rightarrow$ $x=1$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অবিচ্ছিন্নতা পরিক্ষা :-

$$R.H.S = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x^2+2) = 1^2+2 = 3$$

$$L.H.S = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x^2+2) = 1^2+2 = 3$$

$$f(1) = x^2+2 = 1^2+2 = 3$$

যেহেতু $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = 3$

সুতরাং $f(x)$ ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন।

আবার,

$x=1$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অন্তরীকরণযোগ্যতা আলোচনা :-

$$Rf'(1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$f(1+h) = (1+h)^2+2$

$f(1) = 3$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)^2+2-3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{1+2h+h^2+2-3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2+2h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{h(h+2)}{h} = \lim_{h\to 0^-} h+2 = 0+2 = 2$$

$$Lf'(1) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{(1+h)^2 + 2 - 3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{2h + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{h(h+2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} h + 2$$

$$= 0 + 2$$

$$= 2$$

যেহেতু $Rf'(1) = Lf'(1) = 2$

সুতরাং $f(x)$ ফাংশনটি অন্তরীকরণযোগ্য।

Ex-2: যদি $f(x) = \begin{cases} x & \text{যখন } 0 \le x < 1/2 \\ 1-x & 1/2 \le x < 1 \end{cases}$ হয় তবে দেখাও যে $x = \frac{1}{2}$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন কিন্তু ঐ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনটি অন্তরীযোগ্য নয়। [If $f(x) = \text{----}$ then show that $f(x)$ is continious at $x = 1/2$ but $f(x)$ is not differentiable at that point.]

$\Longrightarrow$ অবিচ্ছিন্নতার জন্য $x = 1/2$ বিন্দুতে

$$R.H.S = \lim_{h \to 1/2^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} (1-x) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$L.H.S = \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} (x) = \frac{1}{2}$

$\therefore f(\frac{1}{2}) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

যেহেতু $\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

সুতরাং $f(x)$ ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন।

অন্তরীকরণযোগ্যতার জন্য :

$Rf'(\frac{1}{2}) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(\frac{1}{2}+h) - f(\frac{1}{2})}{h}$

$f(x) = x$

$f(\frac{1}{2}+h) = \frac{1}{2}+h$

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

$= \lim_{h \to 0^+} \frac{1 - (\frac{1}{2}+h) - \frac{1}{2}}{h}$

$= \lim_{h \to 0^+} -\frac{h}{h}$

$= \lim_{h \to 0^+} (-1) = -1$

$Lf'(\frac{1}{2}) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(\frac{1}{2}+h) - f(\frac{1}{2})}{h}$

$= \lim_{h \to 0^-} \frac{(\frac{1}{2}+h) - \frac{1}{2}}{h}$

$= \lim_{h \to 0^-} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0^-} 1 = 1$

যেহেতু $Rf'(\frac{1}{2}) \neq Lf'(\frac{1}{2})$

সুতরাং $f(x)$ ফাংশনটি অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

Ex-3: যদি $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{যখন } x \le 1 \\ x & \text{" } x > 1 \end{cases}$ তবে $x=1$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অবিচ্ছিন্নতা ও অন্তরীকরণযোগ্যতা যাচাই কর। (Test the continuity and differentiability at $x=1$)

$\Rightarrow$ $x=1$ বিন্দুতে,

$$R.H.S = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x = 1$$

$$L.H.S = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 1 = 1$$

$f(1) = 1$

যেহেতু $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = 1$

সুতরাং $f(x)$ ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন।

আবার,

$x=1$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অন্তরীকরণযোগ্যতা পরিক্ষা

$$Rf'(1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{1+h-1}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 1 = 1$$

$$Lf'(1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{1-1}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{0}{h} = 0$$

যেহেতু $Rf'(1) \neq Lf'(1)$

সুতরাং $f(x)$ ফাংশনটি অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

Ex-5: $x=0$ এবং $x=\frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনটির অবিচ্ছিন্নতা ও অন্তরীকরণযোগ্যতা আলোচনা কর।
(Discuss the continuity and differentiability at $x=0$ and $x=\frac{\pi}{2}$ of the function)

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{যখন } x<0 \\ 1+\sin x & 0\le x<\frac{\pi}{2} \\ 2+\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 & x\ge\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $x=0$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্নতা যাচাই :

$$R.H.S = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 1+\sin x = 1+0=1$$

$$L.H.S = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 1 = 1$$

$$f(0) = 1+\sin 0 = 1+0 = 1$$

$$\therefore \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} = f(0) = 1$$

$\therefore f(x)$ ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন

$x=0$ বিন্দুতে অন্তরীকরণযোগ্যতা :

$$Rf'(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{1+\sin(0+h)-(1+\sin 0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{1+\sin 0+\sin h-1-\sin 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\sin h}{h} = 1$$

$$Lf'(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{1-(1-\sin 0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} 0$$

$$\therefore \lim_{h\to 0^+} f(x) \neq \lim_{h\to 0^-} f(x)$$

সুতরাং $f(x)$ ফাংশনটি $x=0$ বিন্দুতে অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

আবার,

$x=\frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্নতা যাচাই

$$R.H.S = \lim_{h\to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{h\to \frac{\pi}{2}^+} \left\{2+\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\right\}$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} 2+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)^2$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} 2 = 2$$

$$L.H.S = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} 1+\sin x$$

$= 1 + \sin\frac{\pi}{2}$

$= 1 + 1 \quad = 2$

$f(\frac{\pi}{2}) = 2 + (\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2})^2 = 2$

$\therefore \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = f(\frac{\pi}{2}) = 2$

$\therefore$ $f(x)$ ফাংশনটি $x = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন

অন্তরীকরণযোগ্যতা :

$Rf'(\frac{\pi}{2}) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(\frac{\pi}{2}+h) - f(\frac{\pi}{2})}{h}$

$= \lim_{h \to 0^+} \frac{2 + h^2 - 2}{h}$

$= \lim_{h \to 0^+} h \quad = 0$

$f(x) = 2 + (x - \frac{\pi}{2})^2$

$f(\frac{\pi}{2}+h) = 2 + (\frac{\pi}{2} + h - \frac{\pi}{2})^2$

$= 2 + h^2$

$f(\frac{\pi}{2}) = 2 + (\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2})^2$

$= 2$

$Lf'(\frac{\pi}{2}) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(\frac{\pi}{2}+h) - f(\frac{\pi}{2})}{h}$

$= \lim_{h \to 0^-} \frac{1 + (\sin\frac{\pi}{2} + h) - (1 + \sin\frac{\pi}{2})}{h}$

$= \lim_{h \to 0^-} \frac{1 + \cos h - 2}{h}$

$= \lim_{h \to 0^-} \frac{\cos h - 1}{h}$

$\sin(\frac{\pi}{2}+h) = \cos h$

$\sin\frac{\pi}{2} = 1$

$f(x) = 1 + \sin x$

$f(\frac{\pi}{2}+h) = 1 + (\sin\frac{\pi}{2} + h)$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{1-2\sin^2\frac{h}{2}-1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{-2\sin^2\frac{h}{2}}{h}$$

$$= -\lim_{h\to 0^-} \frac{\sin^2\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}\cdot\frac{h}{2}} \cdot \frac{h}{2}$$

$$= -\lim_{h\to 0^-} \left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)^2 \cdot \lim_{h\to 0^-} \frac{h}{2}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} 1 \cdot \frac{0}{2}$$

$$= 1\cdot 0$$

$$= 0$$

যেহেতু $Rf'(\frac{\pi}{2}) = Lf'(\frac{\pi}{2})$

সুতরাং $x = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের অন্তরীকরণযোগ্যতা বিদ্যমান

Ex – 6: যদি $f(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x) & \text{যখন } x\neq 0 \\ 0 & \text{" } x=0 \end{cases}$ দেখাও যে $x=0$ বিন্দুতে $f(x)$ অন্তরীকরণযোগ্য কিন্তু $x=0$ বিন্দুতে $f'(x)$ অবিচ্ছিন্ন নয়।

(Then show that at $x=0$ $f(x)$ is differentiable but $f'(x)$ is not continuous).

$\Rightarrow$ $x=0$ বিন্দুতে অন্তরীকরণযোগ্যতা যাচাই

$$Rf'(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2\sin\frac{1}{h} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} h\sin\frac{1}{h}$$

$$= 1$$

$f(x) = x^2\sin(1/x)$

$f(0+h) = (0+h)^2\sin\frac{1}{(0+h)}$

$= h^2\sin\frac{1}{h}$

$f(0) = 0^2\sin\frac{1}{0}$

$= 0$

$$Lf'(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2\sin\frac{1}{h} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} h\sin\frac{1}{h}$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{\sin h}{h} = 1$$

$$= 1$$

$$Rf'(0) = Lf'(0) = 1$$

অতএব, $x=0$ বিন্দুতে $f(x)$ অন্তরীকরণযোগ্য।

আবার,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{যখন } x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$L.H.S = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

$$= 2\lim_{x\to 0^+} x\sin\frac{1}{x} - \lim_{x\to 0^+}\cos\frac{1}{x}$$

$$= 2\cdot 0 - \lim_{x\to 0^+}\cos\frac{1}{x}$$

$= 0 - \lim_{x\to 0^+}\cos\frac{1}{x}$ হিসাব মান বিদ্যমান নেই।

$\therefore$ $x=0$ বিন্দুতে $f'(x)$ অবিচ্ছিন্ন নয়।

Ex-8: যদি $f(x) = |x-1| + |x+3|$ হয় তবে $x=-3$ ও $x=1$ বিন্দুতে ফাংশনটির অবিচ্ছিন্নতা ও অন্তরীকরণযোগ্যতা আলোচনা কর। (If $f(x) = |x-1| + |x+3|$ then discuss the continuity and differentiability of the function at $x=-3$ and $x=1$.)

$\Rightarrow$ দেওয়া আছে,

$$f(x) = |x-1| + |x+3|$$
$$= |x+3| + |x-1|$$
$$= |x-(-3)| + |x-1|$$

$$f(x) = \begin{cases} -\{x-(-3)\} - (x-1) & \text{যখন } x < -3 \\ x-(-3)-(x-1) & \text{যখন } -3 \le x < 1 \\ x-(-3)+(x-1) & \text{যখন } x \ge 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -2x-2 & \text{যখন } x < -3 \\ 4 & \text{,, } -3 \le x < 1 \\ 2x+2 & \text{,, } x \ge 1 \end{cases}$$

$x=-3$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্নতা যাচাই

$$L.H.S = \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} 4 = 4$$

$$R.H.S = \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (-2x-2) = -2\cdot 3-2$$
$$= -6-2$$

$$f(-3) = 4$$

$$\therefore L.H.S = R.H.S = f(-3) = 4$$

$\therefore x=-3$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন।

$x=1$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্নতা যাচাই

$$L.H.S = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (2x+2) = 2\cdot 1+2$$
$$= 4$$

$$R.H.S = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 4 = 4$$

$$f(1) = 2x+2 = 2\cdot 1+2 = 4$$

$$\therefore L.H.S = R.H.S = f(1) = 4$$

$\therefore x=1$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন।

$x=-3$ বিন্দুতে অন্তরীকরণযোগ্যতা যাচাই

$$Rf'(-3) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(-3+h)-f(-3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{4-4}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{0}{h}$$

$$= 0$$

$f(x) = 4$

$f(-3+h) = 4$

$f(-3) = 4$

$$Lf'(-3) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{4-2h-4}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} -\frac{2h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} -2$$

$f(x) = -2x - 2$

$f(-3+h) = -2(-3+h) - 2$

$= 6 - 2h - 2$

$= 4 - 2h$

$\therefore Lf'(-3) \neq Rf'(-3)$

$\therefore$ $x = -3$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনটি অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

আবার,

$x = 1$ বিন্দুতে অন্তরীকরণযোগ্যতা যাচাই

$$Rf'(1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{4+2h-4}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{2h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 2 = 2$$

$f(x) = 2x+2$

$f(1+h) = 2(1+h)+2$

$= 2+2h+2$

$= 4+2h$

$f(1) = 2\cdot 1 + 2$

$= 2+2$

$= 4$

$$L.f'(1) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$f(x) = 4$

$f(1+h) = 4$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{4 - 4}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{0}{h} = 0$$

$\therefore Rf'(1) \neq Lf'(1)$

সুতরাং $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ বিন্দুতে ফাংশনটি অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

Ex-9: দেখাও যে, $f(x) = |x| + |x-1|$ ফাংশনটি $x = 1$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন কিন্তু অন্তরীকরণযোগ্য নয়। (Show that the function $f(x) = |x| + |x-1|$ is continuous at $x = 1$ but not differentiable).

$\Rightarrow$ $f(x) = |x| + |x-1|$

$= |x-0| + |x-1|$

$$f(x) = \begin{cases} -(x-0) - (x-1) & \text{যখন } x < 0 \\ (x-0) - (x-1) & \text{" } 0 \leq x < 1 \\ (x-0) + (x-1) & \text{" } x \geq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -2x + 1 & \text{যখন } x < 0 \\ 1 & \text{" } 0 \leq x < 1 \\ 2x - 1 & \text{" } x \geq 1 \end{cases}$$

$x=1$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্নতা যাচাই.

$$L.H.S = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(2x-1) = 2\cdot 1-1 = 1$$

$$R.H.S = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 1 = 1$$

$$f(1) = 2x-1 = 2\cdot 1-1 = 1$$

$$\therefore L.H.S = R.H.S = R(1) = 1$$

সুতরাং $x=1$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন।

আবার,

$x=1$ বিন্দুতে অন্তরীকরণযোগ্যতা যাচাই

$$Rf'(1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{1+2h-1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{2h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 2 = 2$$

$f(x) = 2x-1$

$f(1+h) = 2(1+h)-1$

$= 2+2h-1$

$= 1+2h$

$f(1) = 2\cdot 1-1$

$= 1$

$$Lf'(1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{1-1}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{0}{h} = 0$$

$f(x) = 1$

$f(1+h) = 1$

$f(1) = 1$

$\therefore Rf'(1) \neq Lf'(1)$

সুতরাং $x=1$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনটি অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

Ex-12 যদি $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{যখন } x \le 0 \\ x & \text{" } 0 \le x < 1 \\ 1/x & \text{" } x \ge 1 \end{cases}$ হয় তবে

$x=0$ এবং $x=1$ বিন্দুতে অন্তরীকরণযোগ্যতা আলোচনা কর।

(Then discuss the differentiability at the point $x=0$ and $x=1$)

$\Rightarrow$ $x=0$ বিন্দুতে অন্তরীকরণযোগ্যতা যাচাই —

$$Rf'(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{h-1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} - \frac{1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} 1 - \frac{1}{h} \quad = -\infty$$

$f(x) = x$

$f(0+h) = 0+h$
$= h$

$f(x) = x^2+1$

$f(0) = 0^2+1$
$= 1$

যেহেতু $Rf'(0)$ বিদ্যমান নয়, সুতরাং $x=0$ বিন্দুতে সংজ্ঞাটি অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

(- ∞ হওয়ায়)

আবার, $x=1$ বিন্দুতে

$$Rf'(1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+h} - 1}{h}$$

$f(x) = 1/x$

$f(1+h) = \frac{1}{1+h}$

$f(1) = \frac{1}{1}$
$= 1$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{1-1-h}{(1+h)}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-h}{h(1+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{-1}{1+h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{-1}{1+0} = -1$$

$$Lf'(1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{1+h-1}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h}{h}$$

$$= 1$$

$f(x) = x$
$f(1+h) = 1+h$
$f(1) = 1$

$\therefore Rf'(1) \neq Lf'(1)$ সুতরাং $x=1$ বিন্দুতে ফাংশনটি অন্তরীকরণ যোগ্য নয়।

Ex-14 $y=x^2+1$ বক্ররেখার $(2,5)$ বিন্দুতে স্পর্শক রেখার ঢাল নির্ণয় কর। (Find the slope of tangent line to the curve $y=x^2+1$ at the point $(2,5)$.)

$\Rightarrow$ ধরি, $y = f(x) = x^2+1$

$(2,5)$ বিন্দুতে অর্থাৎ $x=2$ বিন্দুতে নির্ণেয় স্পর্শক রেখার ঢাল

$$\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=2} = f'(2)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 + 1 - (2^2+1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4 + 4h + h^2 + 1 - 4 - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4h + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(4+h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4+h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 4 + h$$

$$= 4 + 0$$

$$= 4$$

অধ্যায় – ৩

3(A)

অন্তরজ বা অন্তরক সহগ (Derivative of Differential Coefficient): $y=f(x)$ ফাংশনের স্বাধীন চলরাশি x এর মানে ক্ষুদ্র বৃদ্ধি সাপেক্ষে অধীন চলরাশি y এর মানে যে বৃদ্ধি ঘটে, এদের অনুপাতের সীমাস্থ মানই হলো x এর সাপেক্ষে y এর অন্তরজ বা অন্তরক সহগ, একে $\frac{dy}{dx}$ বা $f'(x)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

অন্তরীকরণ (Differentiation): $y=f(x)$ ফাংশনের অন্তরক সহগ বা অন্তরজ নির্ণয়ের প্রক্রিয়াকে অন্তরীকরণ বলে।

মূল নিয়মে ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের অন্তরজ নির্ণয়:

$$y = \sin x$$

$$f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f(\sin x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\frac{x+h+x}{2}\cdot\sin\frac{x+h-x}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\frac{2x+h}{2}\cdot\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 2\cos\frac{2x+h}{2}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{h\to 0} 2\cos\frac{2x+h}{2}$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\cos\frac{2x+0}{2}$$

$$= \cos x \quad \text{Ans.}$$

* $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$

* $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$

* $\frac{d}{dx}\cot x = -\operatorname{cosec}^2 x$

* $\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \cdot \tan x$

* $\frac{d}{dx}\operatorname{cosec} x = -\operatorname{cosec} x \cdot \cot x$

* $\frac{d}{dx}e^x = e^x\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)$

* $\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$

* $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$

মূল নিয়মে বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের অন্তরজ নির্ণয়

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sin^{-1}(x+h) - \sin^{-1}x}{h} \quad \text{——— (1)}$$

ধরি, $y = \sin^{-1}x$

$\Rightarrow x = \sin y$

$\therefore \sin^{-1}(x+h) = y + k.$

$\Rightarrow x + h = \sin(y+k)$

$\Rightarrow h = \sin(y+k) - x$

$= \sin(y+k) - \sin y$

① নং হতে পাই

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x = \lim_{k\to 0}\frac{y+k-y}{\sin(y+k)-\sin y}$$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{k}{2\cos\frac{y+k+y}{2}\cdot\sin\frac{y+k-y}{2}}$$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{k\cdot\frac{2}{k}}{2\cos\frac{2y+k}{2}\cdot\frac{\sin\frac{k}{2}}{\frac{k}{2}}}$$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{1}{\cos\frac{2y+k}{2}}\cdot\frac{1}{\lim_{k\to 0}\frac{\sin\frac{k}{2}}{\frac{k}{2}}}$$

$$= \frac{1}{\cos y}\cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

* $\frac{d}{dx}\cos^{-1}x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

* $\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}$

* $\frac{d}{dx}\cot^{-1}x = -\frac{1}{1+x^2}$

* $\frac{d}{dx}\sec^{-1}x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

* $\frac{d}{dx}\operatorname{cosec}^{-1}x = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

CamScanner

Ex-5:

$$\frac{d}{dx} e^{\tan^{-1}x} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{\tan^{-1}(x+h)} - e^{\tan^{-1}x}}{h} \quad \text{——— (1)}$$

ধরি, $\tan^{-1}x = y$

$\Rightarrow x = \tan y$

এবং, $\tan^{-1}(x+h) = y+k$

$\Rightarrow x+h = \tan(y+k)$

$\Rightarrow h = \tan(y+k) - x$

$= \tan(y+k) - \tan y$

যখন $h\to 0$ তখন $k\to 0$

(1) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই

$$\frac{d}{dx} e^{\tan^{-1}x} = \lim_{k\to 0} \frac{e^{y+k} - e^{y}}{\tan(y+k) - \tan y}$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{e^{y}.e^{k} - e^{y}}{\frac{\sin(y+k)}{\cos(y+k)} - \frac{\sin y}{\cos y}}$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{e^{y}(e^{k} - 1)}{\frac{\sin(y+k)\cos y - \cos(y+k)\sin y}{\cos(y+k)\cos y}}$$

$$= \lim_{k\to 0} e^{y}\left(1 + k + \frac{k^2}{2!} + \frac{k^3}{3!} + \cdots - 1\right) \times \frac{\cos(y+k)\cos y}{\sin(y+k-y)}$$

$$= \lim_{k\to 0} e^{y}.k\left(1 + \frac{k}{2!} + \frac{k^2}{3!} + \cdots\right) \times \frac{\cos(y+k)\cos y}{\sin k}$$

$$= 1 \cdot e^{y} \cdot \cos(y+0) \lim_{k \to 0} e^{y} \cdot \cos(y+k) : \cos y \left(1 + \frac{k}{2!} + \frac{k^2}{3!} + \cdots\right)$$

$$= 1 \cdot e^{y} \cdot \cos(y+0) \cdot \cos(1+0+0+0 \cdots)$$

$$= e^{y} \cdot \cos^2 y$$

$$= e^{\tan^{-1} x} \cdot \frac{1}{\sec^2 y}$$

$$= e^{\tan^{-1} x} \cdot \frac{1}{1+\tan^2 y}$$

$$= e^{\tan^{-1} x} \cdot \frac{1}{1+x^2} \quad \text{Ans.}$$

Ex-6:

$$\frac{d}{dx}(\ln \cos x) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln \cos(x+h) - \ln \cos x}{h} \quad \text{——— (1)}$$

ধরি, $\cos x = y$ এবং $\cos(x+h) = y+k$

$\Rightarrow k = \cos(x+h) - y$

$= \cos(x+h) - \cos x$

যখন $h \to 0$, $k \to 0$

(1) নং বসাই

$$\frac{d}{dx}(\ln \cos x) = \lim_{k \to 0} \frac{\ln(y+k) - \ln y}{k} \cdot \frac{k}{h}$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{\ln(y+k) - \ln y}{k} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{1}{k} \left\{ \ln\left(\frac{y+k}{y}\right) \right\} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{2 \sin \frac{x+h+x}{2} \sin \frac{x-(x+h)}{2}}{h}$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{1}{k}\left\{\ln\left(1+\frac{k}{y}\right)\right\} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{2x+h}{2} \cdot \sin\left(-\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$= -\lim_{k\to 0} \frac{1}{k}\left(\frac{k}{2} - \frac{\left(\frac{k}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{k}{3}\right)^3}{3} - \cdots\right) \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$\cdot \lim_{h\to 0} \sin\frac{2x+h}{2}$$

$$= -\lim_{k\to 0} \frac{1}{k}\left(\frac{k}{y} - \frac{k^2}{2y^2} + \frac{k^3}{3y^3} - \cdots\right) \cdot 1 \cdot \sin x$$

$$= -\lim_{k\to 0} \frac{1}{k} \cdot k\left(\frac{1}{y} - \frac{k}{2y^2} + \frac{k^2}{3y^3} - \cdots\right)\sin x$$

$$= -\lim_{k\to 0}\left(\frac{1}{y} - \frac{k}{2y^2} + \frac{k^2}{3y^3} - \cdots\right)\sin x$$

$$= -\left(\frac{1}{y} - 0 + 0 - \cdots\right)\sin x$$

$$= -\frac{\sin x}{y} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x \text{ Ans.}$$

Ex-7:

$$\frac{d}{dx}(\ln\sin x) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\sin(x+h) - \ln\sin x}{h} \quad \text{——— (1)}$$

ধরি, $\sin x = y$ এবং $\sin(x+h) = k+y$

$\Rightarrow k = \sin(x+h) - y$

যখন $h\to 0$, $k\to 0$

(1) নং এ বসাই

$$\frac{d}{dx}(\ln\sin x) = \lim_{k\to 0} \frac{\ln(y+k)-\ln y}{k} \cdot \frac{k}{h}$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{1}{k}\left\{\ln\left(\frac{y+k}{y}\right)\right\} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{1}{k}\left\{\ln\left(1+\frac{k}{y}\right)\right\} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\frac{x+h+x}{2}\sin\frac{x+h-x}{2}}{h}$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{1}{k}\left\{\frac{k}{y} - \frac{\left(\frac{k}{y}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{k}{y}\right)^3}{3} - \cdots\right\} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h\to 0} \cos\frac{2x+h}{2}$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{1}{k}\left(\frac{k}{y} - \frac{k^2}{2y^2} + \frac{k^3}{3y^3} - \cdots\right) \cdot 1 \cdot \cos x$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{k}{k}\left(\frac{1}{y} - \frac{k}{2y^2} + \frac{k^2}{3y^3} - \cdots\right) \cos x$$

$$= \lim_{k\to 0} \left(\frac{1}{y} - \frac{k}{2y^2} + \frac{k^2}{3y^3} - \cdots\right) \cos x$$

$$= \left(\frac{1}{y} - 0 + 0 - \cdots\right) \cos x$$

$$= \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x \quad \text{Ans.}$$

Ex-9:

$$\frac{d}{dx}(x\ln x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)\ln(x+h) - x\ln x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)\ln(x+h) - (x+h)\ln x + (x+h)\ln x - x\ln x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)\{\ln(x+h) - \ln x\} + \ln x\{(x+h) - x\}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)\left\{\ln \frac{x+h}{x}\right\}}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{\ln x\{(x+h) - x\}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)\left\{\ln\left(1 - \frac{h}{x}\right)\right\}}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{h \cdot \ln x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)\left(\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \cdots\right)}{h} + \lim_{h\to 0} \ln x$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)\left\{h \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{h}{2x^2} + \frac{h^2}{3x^3} - \cdots\right)\right\}}{h} + \ln x$$

$$= (x+0) \cdot \left(\frac{1}{x} - 0 + 0 - \cdots\right) + \ln x$$

$$= \frac{x}{x} + \ln x$$

$$= 1 + \ln x$$

* অধ্যায়-৩ *

* 3(B) *

*

পরামিতিক ফাংশনের অন্তরীকরণ (Differentiation of parametric function):

ধরি, $x = f(t)$ $y = g(t)$ পরামিতিক সমীকরণ

x এর সাপেক্ষে y এর অন্তরজ,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{dy}{dt} \div \frac{dx}{dt}$$

* $\frac{d}{dx} u^v = u^v \cdot v \ln u$

* $y = u^v$

$\Rightarrow \ln y = \ln u^v$

$\Rightarrow \ln y = v \ln u$

* $\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$ (x এর কারণে (−) হবেনা, যোগশিকরণ সূত্রানুসারে)

* $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

* $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

2nd year এ লাগবে।

Ex-6:

$$y = \cos^{-1}\left(\frac{a+b\cos x}{b+a\cos x}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\cdot\cos^{-1}\left(\frac{a+b\cos x}{b+a\cos x}\right)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{(a+b\cos x)^2}{(b+a\cos x)^2}}}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{a+b\cos x}{b+a\cos x}\right)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\frac{(b+a\cos x)^2-(a+b\cos x)^2}{(b+a\cos x)^2}}}\cdot\frac{(b+a\cos x)\frac{d}{dx}(a+b\cos x)-(a+b\cos x)\frac{d}{dx}(b+a\cos x)}{(b+a\cos x)^2}$$

$$= -\frac{\cancel{b+a\cos x}}{\sqrt{(b+a\cos x)^2-(a+b\cos x)^2}}\cdot\frac{b+a\cos x(-b\sin x)-(a+b\cos x)(-a\sin x)}{(b+a\cos x)^{\cancel{2}}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{b^2+2ab\cos x+a^2\cos^2 x-a^2-2ab\cos x-b^2\cos^2 x}}\cdot\frac{-b^2\sin x-\cancel{ab\sin x\cos x}+a^2\sin x+\cancel{ab\sin x\cos x}}{b+a\cos x}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2-\cos^2(b^2-a^2)}}\cdot\frac{-\sin x(b^2-a^2)}{b+a\cos x}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{(b^2-a^2)(1-\cos^2 x)}}\cdot\frac{-\sin x\sqrt{b^2-a^2}\cdot\sqrt{b^2-a^2}}{b+a\cos x}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{(b^2-a^2)\cdot\sin^2 x}} \cdot \frac{-\sin x\sqrt{b^2-a^2}\cdot\sqrt{b^2-a^2}}{b+a\cos x}$$

$$= +\frac{1}{\sqrt{\cancel{b^2-a^2}}\cdot\cancel{\sin x}} \cdot \frac{\cancel{-}\cancel{\sin x}\sqrt{\cancel{b^2-a^2}}\cdot\sqrt{b^2-a^2}}{b+a\cos x}$$

$$= \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b+a\cos x} \quad \text{Ans}$$

Ex – 8

(IV) $y = \tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left\{\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)^2}\cdot\frac{d}{dx}\cdot\frac{\cos x}{1+\sin x}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{\cos^2 x}{(1+\sin x)^2}}\cdot\frac{(1+\sin x)\frac{d}{dx}\cos x - \cos x\frac{d}{dx}(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$= \frac{1}{\frac{(1+\sin x)^2+\cos^2 x}{(1+\sin x)^2}}\cdot\frac{(1+\sin x)\cdot(-\sin x) - \cos x\cdot\cos x}{(1+\sin x)^2}$$

$$= \frac{\cancel{(1+\sin x)^2}}{1+2\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x}\cdot\frac{-\sin x-\sin^2 x-\cos^2 x}{\cancel{(1+\sin x)^2}}$$

$$= \frac{1}{2+2\sin x} \cdot -\sin x - (\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$= \frac{1}{2(1+\sin x)} \cdot -\sin x - 1$$

$$= \frac{1}{2\cancel{(1+\sin x)}} \cdot -\cancel{(1+\sin x)}$$

$$= -\frac{1}{2} \quad \text{Ans.}$$

Ex-8

(vii) $y = x^\circ \tan x^\circ$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\pi x}{180} \tan\left(\frac{\pi x}{180}\right)$$

$$= \frac{\pi}{180} x \cdot \tan\left(\frac{\pi x}{180}\right)$$

$$= \frac{\pi}{180} \frac{d}{dx}\left\{x \cdot \tan\left(\frac{\pi x}{180}\right)\right\}$$

$$= \frac{\pi}{180}\left\{x \frac{d}{dx} \tan\left(\frac{\pi x}{180}\right) + \tan\left(\frac{\pi x}{180}\right) \frac{d}{dx} x\right\}$$

$$= \frac{\pi}{180}\left\{x \cdot \sec^2\left(\frac{\pi x}{180}\right) \cdot \frac{\pi}{180} + \tan\left(\frac{\pi x}{180}\right)\right\}$$

$$= \frac{\pi}{180}\left\{x^\circ \sec^2 x^\circ + \tan x^\circ\right\} \quad \text{Ans.}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} * \ 1^\circ = \left(\frac{\pi}{180}\right)^c \\ * \ \ln e = 1 \end{array}}$$

Ex-8

(ix) $y = \ln\left\{e^x \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{3/2}\right\}$

$$\Rightarrow y = \ln e^x + \ln \frac{(x-1)^{3/2}}{(x+1)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow y = \ln e^x + \ln (x-1)^{3/2} - \ln (x+1)^{3/2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left\{x \ln e + \frac{3}{2}\ln(x-1) - \frac{3}{2}\ln(x+1)\right\}$$

$$= \frac{d}{dx} x \cdot 1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{d}{dx}\ln(x-1) - \frac{3}{2}\cdot\frac{d}{dx}\ln(x+1)$$

$$= 1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(x-1)}\cdot 1 - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(x+1)}\cdot 1$$

$$= 1 + \frac{3}{(2x-2)} - \frac{3}{(2x+2)}$$

$$= \frac{(2x+2)(2x-2) + 3(2x+2) - 3(2x-2)}{(2x+2)(2x-2)}$$

$$= \frac{(2x)^2 - 2^2 + 6x + 6 - 6x + 6}{(2x)^2 - 2^2}$$

$$= \frac{4x^2 - 4 + 12}{4x^2 - 4}$$

$$= \frac{4x^2 + 8}{4x^2 - 4}$$

$$= \frac{4(x^2+2)}{4(x^2-1)}$$

$$= \frac{x^2+2}{x^2-1}$$ Ans.

Ex-8

(x) $y = \log_{\cos x}(\tan^2 2x)$

$\left[* \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \right.$

$\Rightarrow y = \frac{\ln \tan^2 2x}{\ln \cos x}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{2\ln \tan 2x}{\ln \cos x}\right)$

$= 2\left\{\frac{\ln \cos x \frac{d}{dx}(\ln \tan 2x) - \ln \tan 2x \frac{d}{dx}(\ln \cos x)}{(\ln \cos x)^2}\right\}$

$= 2\left\{\frac{\ln \cos x \cdot \frac{1}{\tan 2x} \cdot \sec^2 2x \cdot 2 - \ln \tan 2x \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x)}{(\ln \cos x)^2}\right\}$

$= 2\left\{\frac{\frac{\ln \cos x}{\tan 2x} \cdot 2\sec^2 2x - \ln \tan 2x \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x)}{(\ln \cos x)^2}\right\}$

$= 2\left\{\frac{2\sec^2 2x \cdot \ln \cos x \cdot \cot 2x + \sin x \cdot \sec x \cdot \ln \tan 2x}{(\ln \cos x)^2}\right\}$ A:

Ex-8

(1x) $y = \log_a x + \log_x a$

$\Rightarrow y = \frac{\ln x}{\ln a} + \frac{\ln a}{\ln x}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln a}{\ln x}\right)$

$= \frac{1}{\ln a}\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln a \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\ln x}\right)$

$$= \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} + \ln a \frac{d}{dx} (\ln x)^{-1}$$

$$= \frac{1}{x \ln a} + \ln a (-1) \cdot (\ln x)^{-1-1} \cdot \frac{d}{dx} \ln x$$

$$= \frac{1}{x \ln a} - \ln a \cdot (\ln x)^{-2} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x \ln a} - \ln a \cdot \frac{1}{(\ln x)^2} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x \ln a} - \frac{\ln a}{x (\ln x)^2} \quad \text{Ans.}$$

Ex – 10

যদি, $y = (\sin x)^{\ln x} + \sin^2(\cos^{-1} x)$

$$= (\sin x)^{\ln x} + 1 - \cos^2(\cos^{-1} x)$$

$$= (\sin x)^{\ln x} + 1 - \{\cos(\cos^{-1} x)\}^2$$

$$= (\sin x)^{\ln x} + 1 - x^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (\sin x)^{\ln x} + \frac{d}{dx} 1 - \frac{d}{dx} x^2$$

$$= (\sin x)^{\ln x} \cdot \frac{d}{dx} \{\ln x \cdot \ln \sin x\} + 0 - 2x$$

$$= (\sin x)^{\ln x} \cdot \left\{\ln x \frac{d}{dx}(\ln \sin x) + \ln \sin x \frac{d}{dx}(\ln x)\right\} - 2x$$

$$= (\sin x)^{\ln x} \cdot \left\{\ln x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x + \ln \sin x \cdot \frac{1}{x}\right\} - 2x$$

$$= (\sin x)^{\ln x} \cdot \left\{\ln x \cdot \cot x + \frac{\ln \sin x}{x}\right\} - 2x \quad \text{Ans.}$$

Ex-11

$$y = (\cos x)^y + (\sin y)^x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\cos x)^y + \frac{d}{dx}(\sin y)^x = \frac{d}{dx} 0$$

$$\Rightarrow (\cos x)^y \cdot \frac{d}{dx}(y \ln \cos x) + (\sin y)^x \cdot \frac{d}{dx}(x \ln \sin y) = 0$$

$$\Rightarrow (\cos x)^y \left\{ y \frac{d}{dx} \ln \cos x + \ln \cos x \frac{d}{dx} y \right\} + (\sin y)^x \cdot \left\{ x \frac{d}{dx} \ln \sin y + \ln \sin y \frac{d}{dx} x \right\} = 0$$

$$\Rightarrow (\cos x)^y \left\{ y \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) + \ln \cos x \cdot \frac{dy}{dx} \right\} + (\sin y)^x \left\{ x \frac{1}{\sin y} \cdot \cos y \frac{dy}{dx} + \ln \sin y \cdot 1 \right\} = 0$$

$$\Rightarrow (\cos x)^y \left\{ -y \cdot \tan x + \ln \cos x \frac{dy}{dx} \right\} + (\sin y)^x \left\{ x \cot y \frac{dy}{dx} + \ln \sin y \right\} = 0$$

$$\Rightarrow (-y \cdot \tan x)(\cos x)^y + (\cos x)^y \cdot \ln \cos x \frac{dy}{dx} + (\sin y)^x \cdot x \cot y \frac{dy}{dx} + (\sin y)^x \ln \sin y = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} \left\{ (\cos x)^y \cdot \ln \cos x + (\sin y)^x \cdot x \cot y \right\} = (\cos x)^y \cdot y \tan x - (\sin y)^x \ln \sin y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(\cos x)^y \cdot y \tan x - (\sin y)^x \cdot \ln \sin y}{(\cos x)^y \cdot \ln \cos x + (\sin y)^x \cdot x \cot y}$$ Ans.

Ex-12

$$y = (\tan x)^{\cot x} + (\cot x)^{\tan x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\tan x)^{\cot x} + \frac{d}{dx}(\cot x)^{\tan x}$$

$$= (\tan x)^{\cot x} \cdot \frac{d}{dx}\cot x \cdot \ln\tan x + (\cot x)^{\tan x} \cdot \frac{d}{dx}\tan x \cdot \ln\cot x$$

$$= (\tan x)^{\cot x}\left\{\cot x \cdot \frac{d}{dx}\ln\tan x + \ln\tan x \frac{d}{dx}\cot x\right\} + (\cot x)^{\tan x}\left\{\tan x \frac{d}{dx}\ln\cot x + \ln\cot x \frac{d}{dx}\tan x\right\}$$

$$= (\tan x)^{\cot x}\left\{\cot x \cdot \frac{1}{\tan x} \cdot \sec^2 x + \ln\tan x \cdot (-\operatorname{cosec}^2 x)\right\} + (\cot x)^{\tan x}\left\{\tan x \cdot \frac{1}{\cot x}(-\operatorname{cosec}^2 x) + \ln\cot x \cdot \sec^2 x\right\}$$

$$= (\tan x)^{\cot x}\left\{\cot^2 x \cdot \sec^2 x - \ln\tan x \cdot \operatorname{cosec}^2 x\right\} + (\cot x)^{\tan x}\left\{-\tan^2 x \cdot \operatorname{cosec}^2 x + \sec^2 x \cdot \ln\cot x\right\}$$

$$= (\tan x)^{\cot x}\left\{\sec^2 x \cdot \cot^2 x - \operatorname{cosec}^2 x \cdot \ln\tan x\right\} + (\cot x)^{\tan x}\left\{-\tan^2 x \cdot \operatorname{cosec}^2 x + \sec^2 x \cdot \ln\cot x\right\} \text{ Ans}$$

Ex-14:

$$y = \left(\frac{x}{n}\right)^{nx} \cdot \left(1 + \ln\frac{x}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left\{\left(\frac{x}{n}\right)^{nx} \cdot \left(1 + \ln\frac{x}{n}\right)\right\}$$

$$= \left(\frac{x}{n}\right)^{nx} \cdot \frac{d}{dx}\left(1 + \ln x - \ln n\right) + \left(1 + \ln x - \ln n\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{n}\right)^{nx}$$

$$= \left(\frac{x}{n}\right)^{nx} \cdot \left(0 + \frac{1}{x} - 0\right) + \left(1 + \ln x - \ln n\right) \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^{nx} \cdot \frac{d}{dx} nx \ln\left(\frac{x}{n}\right)$$

$$= \left(\frac{n}{x}\right)^{nx} \cdot \frac{1}{x} + (1 + \ln x - \ln n) \cdot \left(\frac{n}{x}\right)^{nx} \left\{ nx \frac{d}{dx} (\ln n - \ln x) + (\ln n - \ln x) \frac{d}{dx} nx \right\}$$

$$= \left(\frac{n}{x}\right)^{nx} \cdot \frac{1}{x} + (1 + \ln x - \ln n) \cdot \left(\frac{n}{x}\right)^{nx} \left[-nx \cdot \frac{1}{x} + (\ln n - \ln x) n \right]$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{n}{x}\right)^{nx} + (1 + \ln x - \ln n) \cdot \left(\frac{n}{x}\right)^{nx} \cdot \left(-\frac{nx}{x} + n(\ln x - \ln n) \right)$$ A:

Ex-17

$$x^y + y^x = a^b$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} x^y + \frac{d}{dx} y^x = \frac{d}{dx} a^b$$

$$\Rightarrow x^y \cdot \frac{d}{dx} y \cdot \ln x + y^x \cdot \frac{d}{dx} x \ln y = 0$$

$$\Rightarrow x^y \left(y \cdot \frac{d}{dx} \ln x + \ln x \frac{d}{dx} y \right) + y^x \left(x \frac{d}{dx} \ln y + \ln y \cdot \frac{d}{dx} x \right) = 0$$

$$\Rightarrow x^y \left(y \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot \frac{dy}{dx} \right) + y^x \left(x \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} + \ln y \cdot 1 \right) = 0$$

$$\Rightarrow x^y \cdot \frac{y}{x} + x^y \ln x \frac{dy}{dx} + y^x \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} + y^x \ln y = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} \left(x^y \ln x + y^x \frac{x}{y} \right) = -x^y \cdot \frac{y}{x} - y^x \ln y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x^y \cdot \frac{y}{x} - y^x \ln y}{x^y \ln x + y^x \cdot \frac{x}{y}}$$ A.

Ex-18

(11) $(\sin x)^{\cos x}$

Let, $y = (\sin x)^{\cos x}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin x)^{\cos x}$$

$$= (\sin x)^{\cos x} \cdot \frac{d}{dx} \cos x \cdot \ln \sin x$$

$$= (\sin x)^{\cos x}\left(\cos x \frac{d}{dx} \ln \sin x + \ln \sin x \frac{d}{dx} \cos x\right)$$

$$= (\sin x)^{\cos x}\left(\cos x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x + \ln \sin x\,(-\sin x)\right)$$

$$= (\sin x)^{\cos x}\left(\frac{\cos x}{\sin x} \cdot \cos x - \sin x \cdot \ln \sin x\right)$$

$$= (\sin x)^{\cos x}\left(\cos x \cdot \cot x - \sin x \cdot \ln \sin x\right) \text{ A.}$$

Ex-18

(VII) $x^y = y^x$

$$\Rightarrow \ln x^y = \ln y^x$$

$$\Rightarrow y \ln x = x \ln y$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(y \ln x) = \frac{d}{dx}(x \ln y)$$

$$\Rightarrow y \frac{d}{dx} \ln x + \ln x \frac{d}{dx} y = x \frac{d}{dx} \ln y + \ln y \frac{d}{dx} x$$

$$\Rightarrow y \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot \frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} + \ln y \cdot 1$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} + \ln x \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} + \ln y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left(\ln x - \frac{x}{y}\right) = \ln y - \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\ln y - \frac{y}{x}}{\ln x - \frac{x}{y}} \text{ A.}$$

Ex-18

(x) $$y = \frac{e^{x^2} \cdot \tan^{-1} x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\Rightarrow \ln y = \ln \frac{e^{x^2} \cdot \tan^{-1} x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\Rightarrow \ln y = \ln e^{x^2} + \ln \tan^{-1} x - \ln \sqrt{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \ln y = x^2 \ln e + \ln \tan^{-1} x - \ln \sqrt{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx} x^2 \cdot 1 + \frac{d}{dx} \ln \tan^{-1} x - \frac{d}{dx} \ln \sqrt{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = 2x + \frac{1}{\tan^{-1} x} \cdot \frac{d}{dx} \tan^{-1} x - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{d}{dx} \sqrt{1+x^2}$$

Ex-18

$$\Rightarrow \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = 2x + \frac{1}{\tan^{-1} x} \cdot \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = 2x + \frac{1}{(1+x^2)\tan^{-1} x} - \frac{2x}{2(1+x^2)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y \left\{ 2x + \frac{1}{\tan^{-1} x \, (1+x^2)} - \frac{x}{(1+x^2)} \right\}$$ Ans.

Ex-18

(XIV) $$y = x^{\ln x} + x^{\cos^{-1} x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} x^{\ln x} + \frac{d}{dx} x^{\cos^{-1} x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^{\ln x} \cdot \frac{d}{dx} \ln x \cdot \ln x + x^{\cos^{-1} x} \cdot \frac{d}{dx} \cos^{-1} x \cdot \ln x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^{\ln x}\left\{\ln x \cdot \frac{d}{dx}\ln x + \ln x \frac{d}{dx}\ln x\right\} + x^{\cos^{-1}x}\left\{\cos^{-1}x \frac{d}{dx}\ln x + \ln x \frac{d}{dx}\cos^{-1}x\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^{\ln x}\left\{\ln x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot \frac{1}{x}\right\} + x^{\cos^{-1}x}\left\{\cos^{-1}x \cdot \frac{1}{x} + \ln x\left(-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^{\ln x}\left(\frac{\ln x}{x} + \frac{\ln x}{x}\right) + x^{\cos^{-1}x}\left\{\frac{\cos^{-1}x}{x} - \frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^{\ln x}\left(\frac{2\ln x}{x}\right) + x^{\cos^{-1}x}\left\{\frac{\cos^{-1}x}{x} - \frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}}\right\}$$ A.

Ex-18

(xv) $y = (\sin x)^{\sin x}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin x)^{\sin x}$$

$$= (\sin x)^{\sin x} \cdot \frac{d}{dx}\sin x \cdot \ln \sin x$$

$$= (\sin x)^{\sin x} \cdot \left(\sin x \frac{d}{dx}\ln \sin x + \ln \sin x \frac{d}{dx}\sin x\right)$$

$$= (\sin x)^{\sin x} \cdot \left(\sin x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x + \ln \sin x \cdot \cos x\right)$$

$$= (\sin x)^{\sin x} \cdot \left(\cos x + \cos x \ln \sin x\right)$$ A.

Ex-18

(xvi) $y = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin x)^{\cos x} + \frac{d}{dx}(\cos x)^{\sin x}$$

$$= (\sin x)^{\cos x} \cdot \frac{d}{dx} \cos x \cdot \ln \sin x + (\cos x)^{\sin x} \cdot \frac{d}{dx} \sin x \cdot \ln \cos x$$

$$= (\sin x)^{\cos x} \left\{ \cos x \frac{d}{dx} \ln \sin x + \ln \sin x \frac{d}{dx} \cos x \right\} + (\cos x)^{\sin x} \cdot \left\{ \sin x \frac{d}{dx} \ln \cos x + \ln \cos x \frac{d}{dx} \sin x \right\}$$

$$= (\sin x)^{\cos x} \left\{ \cos x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x + \ln \sin x (-\sin x) \right\} + (\cos x)^{\sin x} \left\{ \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} (-\sin x) + \ln \cos x \cdot \cos x \right\}$$

$$= (\sin x)^{\cos x} \cdot \left\{ \cos x \cdot \cot x - \sin x \cdot \ln \sin x \right\} + (\cos x)^{\sin x} \left\{ -\sin x \cdot \tan x + \cos x \cdot \ln \cos x \right\}$$

$$= (\sin x)^{\cos x} \cdot \left\{ \cos x \cdot \cot x - \ln \sin^2 x \right\} + (\cos x)^{\sin x} \left\{ -\tan x \cdot \sin x + \ln \cos^2 x \right\}$$

A.

Ex-20

① $\ln(x+y) = xy$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\ln(x+y)\right) = \frac{d}{dx} xy$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+y} \cdot \frac{d}{dx}(x+y) = x \frac{d}{dx} y + y \frac{d}{dx} x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+y} \cdot 1 \cdot \frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{dy}{dx} + y \cdot 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+y} \cdot \frac{dy}{dx} = x \frac{dy}{dx} + y$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+y} \cdot \frac{dy}{dx} - x \frac{dy}{dx} = y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} \left(\frac{1}{x+y} - x \right) = y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left(\frac{1-x^2-xy}{x+y}\right) = y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y \times \frac{x+y}{1-x^2-xy}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{xy+y^2}{1-x^2-xy} \quad \text{A.}$$

Ex-20

(VIII) $\sin y = x\sin(a+y)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\sin y = \frac{d}{dx}\, x\cdot\sin(a+y)$$

$$\Rightarrow \cos y\cdot\frac{dy}{dx} = x\frac{d}{dx}\sin(a+y) + \sin(a+y)\frac{d}{dx}x$$

$$\Rightarrow \cos y\cdot\frac{dy}{dx} = x\cdot\cos(a+y)\cdot\frac{dy}{dx} + \sin(a+y)\cdot 1$$

$$\Rightarrow \cos y\frac{dy}{dx} - x\cdot\cos(a+y)\cdot\frac{dy}{dx} = \sin(a+y)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left(\cos y - x\cos(a+y)\right) = \sin(a+y)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sin(a+y)}{\cos y - x\cos(a+y)} \quad \text{A.}$$

Ex-20

(IV) $x^2+y^2-3a\cdot xy = 0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 - \frac{d}{dx}3a\cdot xy = 0$$

$$\Rightarrow 2x\cdot 1 + 2y\cdot\frac{dy}{dx} - 3a\left(x\frac{d}{dx}y + y\frac{d}{dx}x\right) = 0$$

$$\Rightarrow 2x + 2y\frac{dy}{dx} - 3ax\frac{dy}{dx} - 3ay = 0$$

$$\Rightarrow 2y\cdot\frac{dy}{dx} - 3ax\frac{dy}{dx} = 3ay - 2x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(2y - 3ax) = 3ay - 2x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3ay - 2x}{2y - 3ax}$$ Ans.

Ex-22

$$y = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}\right)$$

ধরি, $x = \tan\theta$

$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}x$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta} - 1}{\tan\theta}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{\sec^2\theta} - 1}{\tan\theta}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left\{\frac{\sec\theta - 1}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}\right\}$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{\cos\theta} - 1}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta} \times \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left\{\frac{(1-\cos\theta)\cdot\frac{2}{\theta}}{\sin 2\cdot\frac{\theta}{2}}\right\}$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= \frac{\theta}{2}$$

$$\therefore y = \frac{\theta}{2} = \frac{\tan^{-1}x}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\tan^{-1}x$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2(1+x^2)}$$ Ans.

Ex-25:

$$y = \sin\left(2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$$

ধরি, $x = \cos\theta$

$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}x$

$$= \sin\left(2\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\cos\theta}}{\sqrt{1+\cos\theta}}\right)$$

$$= \sin\left(2\tan^{-1}\frac{\sqrt{2\sin^2\frac{\theta}{2}}}{\sqrt{2\cos^2\frac{\theta}{2}}}\right)$$

$$= \sin\left(2\tan^{-1}\frac{\cancel{\sqrt{2}}\cdot\sin\frac{\theta}{2}}{\cancel{\sqrt{2}}\cdot\cos\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$= \sin\left\{2\cdot\tan^{-1}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)\right\}$$

$$= \sin\left(\cancel{2}\cdot\frac{\theta}{\cancel{2}}\right)$$

$$= \sin\theta$$

$$\therefore y = \sin\theta$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sin\theta$$

$$= \frac{d}{dx}\sqrt{\sin^2\theta}$$

$$= \frac{d}{dx}\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$= \frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{d}{dx}(1-x^2)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$ A.

Ex - 28

(iv) $y = \sin^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

ধরি, $x = \tan\theta$

$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}x$

$= \sin^{-1}\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right)$

$= \sin^{-1}\left(\frac{1-\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}\right)$

$= \sin^{-1}\left(\frac{\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}\right)$

$= \sin^{-1}\left(\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}\right)$

$\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$

$= \sin^{-1}(\cos 2\theta)$

$= \sin^{-1}\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)\right\}$

$\therefore y = \frac{\pi}{2} - 2\theta$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)$

$= \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2} - 2\tan^{-1}x\right)$

$= -2 \cdot \frac{1}{1+x^2}$

$= -\frac{2}{1+x^2}$ Ans.

Ex-29

(i) দে. আছে,

$$x = a(\theta + \sin\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(a\theta + a\sin\theta)$$

$$= a + a\cos\theta$$

$$= a(1+\cos\theta)$$

$$y = a(1-\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(a - a\cos\theta)$$

$$= 0 - a(-\sin\theta)$$

$$= a\sin\theta$$

$$\therefore \frac{dy}{d\theta} \div \frac{dx}{d\theta} = a\sin\theta \div a(1+\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dx} = \cancel{a}\sin\theta \times \frac{1}{\cancel{a}(1+\cos\theta)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} \quad \text{Ans.}$$

Ex - 29

(ii) দে. আছে,

$$x = \frac{2t}{1+t^3}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{2t}{1+t^3}\right)$$

$$= \frac{(1+t^3)\frac{d}{dt}2t - 2t\frac{d}{dt}(1+t^3)}{(1+t^3)^2}$$

$$= \frac{(1+t^3)\cdot 2 - 2t\cdot 3t^2}{(1+t^3)^2}$$

$$= \frac{2+2t^3-6t^3}{(1+t^3)^2} = \frac{2-4t^3}{(1+t^3)^2}$$

আবার, $y = \dfrac{2t}{1+t^3}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{2t^2}{1+t^3}\right)$$

$$= \frac{(1+t^3)\frac{d}{dt}2t^2 - 2t^2\frac{d}{dt}(1+t^3)}{(1+t^3)^2}$$

$$= \frac{(1+t^3)\cdot 4t - 2t^2\cdot 3t^2}{(1+t^3)^2}$$

$$= \frac{4t+4t^4-6t^4}{(1+t^3)^2}$$

$$= \frac{4t-2t^4}{(1+t^3)^2}$$

$$= \frac{2t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} \div \frac{dx}{dt} = \frac{2t(2-t^3)}{(1+t^3)^2} \div \frac{2(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} = \frac{2t(2-t^3)}{(1+t^3)^2} \times \frac{(1+t^3)^2}{2(1-2t^3)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{t(2-t^3)}{(1-2t^3)}$$ Ans.

Ex-32

① যদি, $y = \cos 3x$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\cos 3x$$

$$= -\sin 3x \cdot 3$$

$$= -3\sin 3x$$

$$z = e^{\sin^{-1}x}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx} e^{\sin^{-1}x}$$

$$= e^{\sin^{-1}x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} \div \frac{dz}{dx} = -3\sin 3x \div \frac{e^{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dz} = -3\sin 3x \times \frac{\sqrt{1-x^2}}{e^{\sin^{-1}x}}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dz} = -\frac{3\sin 3x \cdot \sqrt{1-x^2}}{e^{\sin^{-1}x}}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dy} = -\frac{e^{\sin^{-1}x}}{3\sin 3x \cdot \sqrt{1-x^2}}$$ Ans.

Ex-34

যদি, $y = \sec^{-1}\frac{1}{2x^2-1}$ $[x = \cos\theta$

$$= \left\{\sec^{-1}\left(\frac{1}{2\cos^2\theta - 1}\right)\right\}$$

$$= \sec^{-1}\left(\frac{1}{\cos 2\theta}\right)$$

$$= \sec^{-1}(\sec 2\theta)$$

$$= 2\theta$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} 2\theta \qquad [\theta = \cos^{-1} x$$

$$= \frac{d}{dx} 2\cos^{-1} x$$

$$= 2 \cdot -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

আবার,

$$z = \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \Big| \begin{array}{l} x = \sin\theta \\ \theta = \sin^{-1} x \end{array}$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\sin\theta}{\sqrt{\cos^2\theta}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$$

$$= \tan^{-1}(\tan\theta) \qquad = \theta = \sin^{-1} x$$

$$\therefore \frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx} \sin^{-1} x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\therefore \frac{dz}{dx} \div \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \div -2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} \times \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cancel{\sqrt{1-x^2}}} \times -\frac{\cancel{\sqrt{1-x^2}}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dy} = -\frac{1}{2} \quad \text{Ans.}$$

Ex-35

যদি, $y = \tan^{-1} x$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \tan^{-1} x$$

$$= \frac{1}{1+x^2}$$

আবার,

$$z = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$$

$x = \tan\theta$
$\theta = \tan^{-1} x$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}-1}{\tan\theta}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{\sec^2\theta}-1}{\tan\theta}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\sec\theta-1}{\tan\theta}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{\cos\theta}-1}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{1-\cos 2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= \frac{\theta}{2} \qquad = \frac{1}{2}\tan^{-1}x$$

$$\therefore \frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}x\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2} \qquad = \frac{1}{2(1+x^2)}$$

এখন,

$$\frac{dz}{dx} \div \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2(1+x^2)} \div \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} \times \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2(\cancel{1+x^2})} \times \cancel{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dy} = \frac{1}{2} \quad \text{Ans.}$$

Ex-36

ধরি, $y = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$ $\qquad \left| \begin{array}{l} x = \tan\theta \\ \theta \Rightarrow \sin^{-1}x \end{array} \right.$

$$= \sin^{-1}\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$$

$$= \sin^{-1}\frac{2\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$$

$$= \sin^{-1}\frac{2\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$$

$$= \sin^{-1} 2\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \times \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$$

$$= \sin^{-1} \frac{2\sin\theta\cdot\cos\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$$

$$= \sin^{-1}(\sin 2\theta) \qquad = 2\theta \qquad = 2\tan^{-1}x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} 2\tan^{-1}x$$

$$= 2\cdot\frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2}$$

আবার,

$$z = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} \qquad \left| \begin{array}{l} x = \tan\theta \\ \theta = \tan^{-1}x \end{array} \right.$$

$$= \tan^{-1}\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

$$= \tan^{-1}\frac{2\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1-\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$$

$$= \tan^{-1}\frac{2\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$$

$$= \tan^{-1} 2\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \times \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}$$

$$= \tan^{-1}\frac{2\sin\theta\cdot\cos\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}\right)$$

$$= \tan^{-1}(\tan 2\theta)$$

$$= 2\theta \quad = 2\tan^{-1}x$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx}\, 2\tan^{-1}x$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{1+x^2} \quad = \frac{2}{1+x^2}$$

এখন,

$$\frac{dz}{dx} \div \frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+x^2} \div \frac{2}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} \times \frac{dx}{dy} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{1+x^2}} \times \frac{\cancel{1+x^2}}{\cancel{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dy} = 1$$

Ans.

অধ্যায় — ৪

4(A)

পর্যায় ক্রমিক অন্তরীকরণ :

$y \Rightarrow y_1 \Rightarrow y' \Rightarrow \frac{dy}{dx}$

$y_1 \Rightarrow y_2 \Rightarrow y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$

$y_2 \Rightarrow y_3 \Rightarrow y''' = \frac{d^3y}{dx^3}$

$y_n \Rightarrow y^n = \frac{d^ny}{dx^n}$

উদাহরণ — ১

$$y = (ax+b)^m$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{d}{dx}(ax+b)^m$$

$$= m(ax+b)^{m-1} \cdot \frac{d}{dx}(ax+b)$$

$$= m(ax+b)^{m-1} \cdot a$$

$$= am(ax+b)^{m-1}$$

$$y_2 = \frac{d}{dx}\{am(ax+b)^{m-1}\}$$

$$= am\left\{(m-1)(ax+b)^{m-1-1} \cdot \frac{d}{dx}(ax+b)\right\}$$

$$= am\{(m-1)(ax+b)^{m-2} \cdot a\}$$

$$= a^2m\{(m-1)(ax+b)^{m-2}\}$$

$$y_3 = \frac{d}{dx}\left\{a^2 m (m-1)(ax+b)^{m-2}\right\}$$

$$= \left\{a^2 m (m-1)(m-2)(ax+b)^{m-2-1}\right\} \cdot \frac{d}{dx}(ax+b)$$

$$= a^2 m (m-1)(m-2)(ax+b)^{m-3} \cdot a$$

$$= a^3 m (m-1)(m-2)(ax+b)^{m-3}$$

$$\therefore y_n = a^n m (m-1)(m-2) \cdots \{m-(n-1)\} \cdot (ax+b)^{m-n}$$

$$= \frac{a^n m (m-1)(m-2) \cdots \{m-(n-1)\} \cdot (m-n)!}{(m-n)!} (ax+b)^{m-n}$$

$$= \frac{a^n \cdot m!}{(m-n)!} (ax+b)^{m-n}$$

উদাহরণ – 6

$$y = \cos(ax+b)$$

$$y_1 = \frac{d}{dx}\left\{\cos(ax+b)\right\}$$

$$= -\sin(ax+b) \cdot \frac{d}{dx}(ax+b)$$

$$= -\sin(ax+b) \cdot a$$

$$= -a\sin(ax+b)$$

$$= a\cos\left(\frac{\pi}{2} + ax+b\right)$$

$$y_2 = \frac{d}{dx}\left\{a\cos\left(\frac{\pi}{2}+ax+b\right)\right\}$$

$$= -a\sin\left(\frac{\pi}{2}+ax+b\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}+ax+b\right)$$

$$= -a\sin\left(\frac{\pi}{2}+ax+b\right)\cdot a$$

$$= -a^2\sin\left(\frac{\pi}{2}+ax+b\right)$$

$$= a^2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+ax+b\right)$$

$$= a^2\cos\left(2\frac{\pi}{2}+ax+b\right)$$

$$\therefore y_n = a^n\cos\left(n\frac{\pi}{2}+ax+b\right) \text{ Ans.}$$

উদাহরণ – 7

$$y = e^{ax}\sin(bx+c)$$

$$y_1 = \frac{d}{dx}\left\{e^{ax}\sin(bx+c)\right\}$$

$$= e^{ax}\frac{d}{dx}\sin(bx+c) + \sin(bx+c)\frac{d}{dx}e^{ax}$$

$$= e^{ax}\cdot\cos(bx+c)\cdot b + \sin(bx+c)\cdot e^{ax}\cdot a$$

$$= e^{ax}\left\{b\cos(bx+c) + a\sin(bx+c)\right\} \quad \text{——— (1)}$$

ধরি, $a = r\cos\theta$ $\quad b = r\sin\theta$

$$\therefore a^2+b^2 = r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta$$

$$= r^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$$

$$= r^2 \cdot 1$$
$$= r^2$$

$$\frac{b}{a} = \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \tan\theta$$

$$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

(i) নং হতে,

$$y_1 = e^{ax}\{r\sin\theta \cdot \cos(bx+c) + r\cos\theta \cdot \sin(bx+c)\}$$
$$= re^{ax}\{\sin\theta \cdot \cos(bx+c) + \cos\theta \cdot \sin(bx+c)\}$$
$$= re^{ax} \cdot \sin(bx+c+\theta) \quad \text{——— (ii)}$$

$$y_2 = r^2 e^{ax} \cdot \sin(bx+c+2\theta)$$
$$y_3 = r^3 e^{ax} \cdot \sin(bx+c+3\theta)$$

$$y_n = r^n \cdot e^{ax} \cdot \sin(bx+c+n\theta)$$
$$= \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^n \cdot e^{ax} \cdot \sin\left(bx+c+n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$$
$$= (a^2+b^2)^{n/2} \cdot e^{ax} \cdot \sin\left(bx+c+n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$$ Ans.

সমস্যা:-2

$$y = \sin nx + \cos nx$$
$$y_1 = \frac{d}{dx}\sin nx + \frac{d}{dx}\cos nx$$
$$= \cos nx \cdot n + (-\sin nx) \cdot n$$

$$= n\cos nx - n\sin nx$$

$$= n\sin\left(\frac{\pi}{2}+nx\right) + n\cos\left(\frac{\pi}{2}+nx\right)$$

$$y_2 = \frac{d}{dx}\left\{n\sin\left(\frac{\pi}{2}+nx\right)\right\} + \frac{d}{dx}\left\{n\cos\left(\frac{\pi}{2}+nx\right)\right\}$$

$$= n\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+nx\right)\cdot n + n\cdot -\sin\left(\frac{\pi}{2}+nx\right)\cdot n$$

$$= n^2\cos\left(\frac{\pi}{2}+nx\right) - n^2\sin\left(\frac{\pi}{2}+nx\right)$$

$$= n^2\sin\left(2\frac{\pi}{2}+nx\right) + n^2\cos\left(2\frac{\pi}{2}+nx\right)$$

$$y_r = n^r\cdot\sin\left(r\frac{\pi}{2}+nx\right) + n^r\cos\left(r\frac{\pi}{2}+nx\right)$$

$$= n^r\left\{\sin\left(r\frac{\pi}{2}+nx\right) + \cos\left(r\frac{\pi}{2}+nx\right)\right\}$$

$$= n^r\sqrt{\left\{\sin\left(r\frac{\pi}{2}+nx\right) + \cos\left(r\frac{\pi}{2}+nx\right)\right\}^2}$$

$$= n^r\left\{\sin^2\left(r\frac{\pi}{2}+nx\right) + 2\sin\left(r\frac{\pi}{2}+nx\right)\cdot\cos\left(r\frac{\pi}{2}+nx\right) + \cos^2\left(r\frac{\pi}{2}+nx\right)\right\}^{1/2}$$

$$= n^r\left\{1 + 2\sin\left(r\frac{\pi}{2}+nx\right)\cos\left(r\frac{\pi}{2}+nx\right)\right\}^{1/2}$$

$$= n^r\left\{1 + \sin 2\cdot\left(r\cdot\frac{\pi}{2}+nx\right)\right\}^{1/2}$$

$$= n^r\left\{1 + \sin(\pi r + 2nx)\right\}^{1/2}$$

$$= n^r\left\{1 + (-1)^r\sin 2nx\right\}^{1/2}$$

A.

* অধ্যায়-৪ *

* 4(B) *

লিবনিজের উপপাদ্য :→

উপপাদ্য-২ :

যদি $u = u(x)$ এবং $v = v(x)$ হয় এবং ফাংশনদ্বয় প্রত্যেকে n সংখ্যকবার অন্তরীকরণযোগ্য হয় তবে $(uv)_n = u_n v + {}^nC_1 u_{n-1} v_1 + {}^nC_2 u_{n-2} v_2 + {}^nC_3 u_{n-3} v_3 + \cdots + {}^nC_r u_{n-r} v_r + \cdots + u v_n$ ——— (i)

যেখানে

$$u_n = \frac{d^n}{dx^n}(u)$$

$$u_v = \frac{d^n}{dx^n}(v)$$

$$(uv)_n = \frac{d^n}{dx^n}(uv)$$

প্রমাণ :→

$$\frac{d}{dx}(uv) = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$$

$$(uv)_1 = u_1 v + u v_1$$

$$(uv)_2 = \frac{d}{dx}(u_1 v) + \frac{d}{dx}(u v_1)$$

$$= v\frac{d}{dx}(u_1) + u_1\frac{d}{dx}v + v_1\frac{d}{dx}u + u\frac{d}{dx}v_1$$

$$= v u_2 + u_1 v_1 + u_1 v_1 + u v_2$$

$$= u_2 v + 2u_1 v_1 + u v_2$$

$$= u_2 v + {}^2C_1 u_1 v_1 + u v_2$$

CamScanner

$$(uv_3) = \frac{d}{dx} u_2 v + \frac{d}{dx} 2u_1 v_1 + \frac{d}{dx} u v_2$$

$$= v\frac{d}{dx} u_2 + u_2 \frac{d}{dx} v + 2\left(v_1 \frac{d}{dx} u_1 + u_1 \frac{d}{dx} v_1\right) + u \frac{d}{dx} v_2 + v_2 \frac{d}{dx} u$$

$$= vu_3 + u_2 v_1 + 2v_1 u_2 + 2u_1 v_2 + uv_3 + v_2 u_1$$

$$= u_3 v + 3u_1 v_2 + 3u_2 v_1 + uv_3$$

$$= u_3 v + {}^3C_1 u_1 v_1 + {}^3C_2 u_2 v_1 + uv_3$$

অতএব উপপাদ্যটি $n = 1, 2, 3$ এর জন্য সত্য।

যদি, উপপাদ্যটি $n = m$ এর জন্য সত্য হয়

তাহলে,

$$(uv)_m = u_m v + {}^mC_1 u_{m-1} v_1 + {}^mC_2 u_{m-2} v_2 + \cdots + {}^mC_r u_{m-r} v_r + \cdots + uv_m \quad \text{(ii)}$$

(ii) নং সমীকরণকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই

$$(uv)_{m+1} = \frac{d}{dx}(u_m v) + \frac{d}{dx}({}^mC_1 u_{m-1} v_1) + \frac{d}{dx}({}^mC_2 u_{m-2} v_2) + \frac{d}{dx}({}^mC_3 u_{m-3} v_3) + \cdots + \frac{d}{dx}({}^mC_r u_{m-r} v_r) + \cdots + \frac{d}{dx}(uv_m)$$

$$\Rightarrow u_{m+1} v + u_m v_1 + {}^mC_1 (v_1 \cdot u_{m-1+1} + v_2 \cdot u_{m-1}) + {}^mC_2 (u_{m-2+1} v_2 + v_3 \cdot u_{m-2}) + \cdots + {}^mC_r (u_{m-r+1} + v_{r-1} u_{m-r}) + \cdots + (u_1 v_m + uv_{m+1})$$

$$\Rightarrow U_m V_1 + U_{m+1} V + {}^mC_1 U_m V_1 + {}^mC_1 U_{m-1} V_2 + {}^mC_2 U_{m-1} V_2 + {}^mC_2 U_{m-2} V_3$$
$$+ \cdots {}^mC_r U_{m-r+1} V_r + V_{r+1} U_{m-r} + \cdots + U_1 V_m + U V_{m+1}$$

$$\Rightarrow U_{m+1} V + U_m V_1 (1 + {}^mC_1) + U_{m-1} V_2 ({}^mC_1 + {}^mC_2) + {}^mC_2 U_{m-2} V_3$$
$$+ \cdots + {}^mC_r U_{m-r+1} V_r + V_{r+1} U_{m-r} + \cdots + U_1 V_m + U V_{m+1}$$

$$\Rightarrow U_{m+1} V + {}^{m+1}C_1 U_m V_1 + {}^{m+2}C_2 U_{m-1} V_2 + {}^{m+3}C_3 U_{m-2} V_3 + \cdots +$$
$${}^mC_r U_{m-r+1} V_r + \cdots + U V_{m+1}$$

$$\Rightarrow U_{m+1} V + {}^{m+1}C_1 U_{m+1-1} V_1 + {}^{m+2}C_2 U_{m+1-2} V_2 + {}^{m+3}C_3 U_{m+1-3} V_3 + \cdots \quad \text{(iii)}$$

এখানে,
$n = m+1$ হলে (iii) নং সমীকরণটি (i) নং সমীকরণের সমতুল্য হয়। সুতরাং প্রতিপাদ্যটি $n = m$ এর জন্য সত্য হলে তা $n = m+1$ এর জন্য সত্য হয়। সুতরাং গাণিতিক আরোহ পদ্ধতির সাহায্যে প্রতিপাদ্যটি সকল $n \in N$ এর জন্য সত্য।

সূত্র: * $(UV)_n = U_n V + {}^nC_1 U_{n-1} V_1 + {}^nC_2 U_{n-2} V_2 + \cdots + {}^nC_r U_{n-r} V_r + \cdots + U V_n$

* $(UV_n) = U V_n + {}^nC_1 U_1 V_{n-1} + {}^nC_2 U_2 V_{n-2} + {}^nC_3 U_3 V_{n-3} + \cdots$
(ম্যাথ করতে এই সূত্র ব্যবহার করা হয়)।
(x^2 যুক্ত পদকে সবসময় U ধরতে হবে)।

Ex-2:

ধরি,

$$y = x^n \ln x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} x^n \ln x$$

$$\Rightarrow y_1 = x^n \frac{d}{dx} \ln x + \ln x \frac{d}{dx} x^n$$

$$\Rightarrow y_1 = x^n \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot n x^{n-1}$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{x^n}{x} + n x^{n-1} \ln x$$

$$\Rightarrow y_1 = x^n + n x^{n-1} \ln x$$ [x-দ্বারা গুণ করে

$$\Rightarrow x y_1 = x^n + n y \quad \text{——— (1)}$$

(1) নং সমীকরণকে $\frac{d^n}{dx^n}$ বার অন্তরীকরণ করে পাই

$$\frac{d^n}{dx^n}(x y_1) = \frac{d^n}{dx^n} x^n + \frac{d^n}{dx^n} n y$$

$$\Rightarrow x y_{n+1} + {}^nC_1 x_1 y_{n-1+1} + {}^nC_2 x_2 y_{n-2+1} = n! + n \frac{d^n}{dx^n} y$$

$$\Rightarrow x y_{n+1} + n \cdot \frac{d}{dx} x \cdot y_n + \frac{n!}{2!\,(n-2)!} \cdot \frac{d}{dx}\left\{\frac{d}{dx} x\right\} y_{n-1}$$

$$= n! + n y_n$$

$$\Rightarrow x y_{n+1} + n y_n + \frac{n(n-1)(n-2)!}{2 \cdot (n-2)!} \cdot 0 \cdot y_{n-1} = n! + n y_n$$

$$\Rightarrow x y_{n+1} + \cancel{n y_n} + 0 = n! + \cancel{n y_n}$$

$$\Rightarrow x y_{n+1} = n!$$

$$\Rightarrow y_{n+1} = \frac{n!}{x} \quad \text{(showed)}$$

Ex-3

(ii) ধরি, $y = \tan^{-1}x$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\tan^{-1}x$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow (1+x^2)y_1 = 1 \quad \text{——— (1)}$$

(1) নং কে $\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}$ দ্বারা অন্তরীকরণ করে পাই

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left\{(1+x^2)y_1\right\} = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(1)$$

$$\Rightarrow (1+x^2)y_{n+1+1} + {}^{n+1}C_1 (1+x^2)_1 \cdot y_{n+1-1+1} + {}^{n+1}C_2 (1+x^2)_2 \cdot y_{n+1-2+1} = 0$$

$$\Rightarrow (1+x^2)y_{n+2} + \frac{(n+1)!}{1!\,(n+1)!} \cdot 2x\, y_{n+1} + \frac{(n+1)!}{2!\,(n+1-2)!} 2 \cdot y_n = 0$$

$$\Rightarrow (1+x^2)y_{n+2} + \frac{(n+1)!}{n!} 2x \cdot y_{n+1} + \frac{(n+1)!}{(n-1)!} y_n = 0$$

$$\Rightarrow (1+x^2)y_{n+2} + \frac{(n+1)(n+1-1)!}{n!} \cdot 2x \cdot y_{n+1} + \frac{(n+1)(n+1-1)(n+1-2)!}{(n-1)!} y_n = 0$$

$$\Rightarrow (1+x^2)y_{n+2} + 2(n+1)x\, y_{n+1} + n(n+1)y_n = 0$$

(showed)

Ex-4

(1) ধরি, $y = \cot^{-1} x$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \cot^{-1} x$$

$$\Rightarrow y_1 = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow (1+x^2) y_1 = -1 \quad \text{———} \quad (1)$$

(1) নং কে $\frac{d^n}{dx^n}$ বার অন্তরীকরণ করে পাই।

$$\frac{d^n}{dx^n}\{(1+x^2) y_1\} = \frac{d^n}{dx^n}(-1)$$

$$\Rightarrow (1+x^2) \cdot y_{n+1} + {}^nC_1 (1+x^2)_1 \cdot y_{n-1+1} + {}^nC_2 (1+x^2)_2 \, y_{n-2+1} = 0$$

$$\Rightarrow (1+x^2) y_{n+1} + n \cdot 2x \cdot y_n + \frac{n!}{2!\,(n-2)!} \cdot 2 \cdot y_{n-1} = 0$$

$$\Rightarrow (1+x^2) y_{n+1} + 2nx y_n + n(n-1) y_{n-1} = 0$$ (Showed)

Ex-5:

$$y = a\cos(\ln x) + b\sin(\ln x)$$

$$\Rightarrow y_1 = a \cdot \frac{d}{dx} \cos(\ln x) + b \frac{d}{dx} \sin(\ln x)$$

$$\Rightarrow y_1 = a \cdot \{-\sin(\ln x)\} \cdot \frac{1}{x} + b \cdot \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow y_1 = -a\sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x} + b\cos(\ln x)\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow xy_1 = -a\sin(\ln x) + b\cos(\ln x)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(xy_1) = -a\frac{d}{dx}\sin(\ln x) + b\frac{d}{dx}\cos(\ln x)$$

$$\Rightarrow x\cdot\frac{d}{dx}y_1 + y_1\cdot\frac{d}{dx}x = -a\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x} + b\{-\sin(\ln x)\}\cdot\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow xy_2 + y_1 = -\frac{1}{x}\{a\cos(\ln x) + b\sin(\ln x)\}$$

$$\Rightarrow x^2y_2 + xy_1 = -y$$

$$\Rightarrow x^2y_2 + xy_1 + y = 0 \quad \text{———} \quad (1)$$

(1) নং কে $\frac{d^n}{dx^n}$ বার অন্তরীকরণ করে পাই

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^2y_2) + \frac{d^n}{dx^n}(xy_1) + \frac{d^n}{dx^n}y = 0$$

$$\Rightarrow x^2y_{n+2} + {}^nC_1(x^2)_1\cdot y_{n-1+2} + {}^nC_2(x^2)_2\cdot y_{n-2+2} + xy_{n+1} + {}^nC_1(x)_1\cdot y_{n-1+1} + y_n = 0$$

$$\Rightarrow x^2y_{n+2} + n\cdot 2x\cdot y_{n+1} + \frac{n!}{2!(n-2)!}2\cdot y_n + xy_{n+1} + n\cdot 1\cdot y_n + y_n = 0$$

$$\Rightarrow x^2y_{n+2} + 2nxy_{n+1} + \frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{2!}\cancel{(n-2)!}}\cdot\cancel{2}\cdot y_n + xy_{n+1} + ny_n + y_n = 0$$

$$\Rightarrow x^2y_{n+2} + 2nxy_{n+1} + n(n-1)y_n + xy_{n+1} + ny_n + y_n = 0$$

$$\Rightarrow x^2y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2-n+n+1)y_n = 0$$

CamScanner

$$\Rightarrow x^2 y_{n+2} + (2n+1)x\, y_{n+1} + (n^2+1) y_n = 0 \quad \text{(Showed)}$$

Ex-8:

$$\ln y = \tan^{-1} x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx} \tan^{-1} x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} \cdot y_1 = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow (1+x^2) y_1 = y \quad \text{——— (1)}$$

(1) নং কে $\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}$ বার অন্তরকরণ করে পাই

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \{(1+x^2) y_1\} = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} y$$

$$\Rightarrow (1+x^2) y_{n+1+1} + {}^{n+1}C_1 (1+x^2)_1 \cdot y_{n+1-1+1} + {}^{n+1}C_2 (1+x^2)_2\, y_{n+1-2+1} = y_{n+1}$$

$$\Rightarrow (1+x^2) y_{n+2} + (n+1) 2x \cdot y_{n+1} + \frac{n(n+1)}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \cdot y_n = y_{n+1}$$

$$\Rightarrow (1+x^2) y_{n+2} + 2nx\, y_{n+1} + 2x\, y_{n+1} + n(n+1) y_n - y_{n+1} = 0$$

$$\Rightarrow (1+x^2) y_{n+2} + (2nx + 2x - 1) y_{n+1} + n(n+1) y_n = 0$$

(Showed)

Ex-10

$$y = \cos\{\ln(1+x)\}$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{d}{dx}\cos\{\ln(1+x)\}$$

$$\Rightarrow y_1 = -\sin\{\ln(1+x)\}\cdot\frac{d}{dx}\ln(1+x)$$

$$\Rightarrow y_1 = -\sin\{\ln(1+x)\}\cdot\frac{1}{1+x}\cdot\frac{d}{dx}(1+x)$$

$$\Rightarrow y_1 = -\sin\{\ln(1+x)\}\cdot\frac{1}{1+x}$$

$$\Rightarrow (1+x)y_1 = -\sin\{\ln(1+x)\}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\{(1+x)y_1\} = \frac{d}{dx}-\sin\{\ln(1+x)\}$$

$$\Rightarrow (1+x)\frac{d}{dx}y_1 + y_1\frac{d}{dx}(1+x) = -\cos\{\ln(1+x)\}\cdot\frac{1}{1+x}\cdot 1$$

$$\Rightarrow (1+x)\cdot y_2 + y_1\cdot 1 = -\cos\{\ln(1+x)\}\cdot\frac{1}{1+x}$$

$$\Rightarrow (1+x)^2\cdot y_2 + (1+x)y_1 = -y$$

Ex-11

$$\Rightarrow (1+x)^2\cdot y_2 + (1+x)y_1 + y = 0 \quad \text{——— (1)}$$

(1) নং কে $\frac{d^n}{dx^n}$ বার অন্তরীকরণ করে পাই

$$\frac{d^n}{dx^n}\{(1+x)^2\cdot y_2\} + \frac{d^n}{dx^n}\{(1+x)y_1\} + \frac{d^n}{dx^n}y = 0$$

$$\Rightarrow (1+x)^2\cdot y_{n+2} + {}^nC_1(1+x)^2_1\cdot y_{n-1+2} + {}^nC_2(1+x)^2_2\cdot y_{n-2+2} + (1+x)y_{n+1}$$
$$+ {}^nC_1(1+x)_1\cdot y_{n-1+1} + y_n = 0$$

$$\Rightarrow (1+x)^2 y_{n+2} + n\cdot 2(1+x) y_{n+1} + \frac{n(n-1)!}{2!}\cdot 2 y_n$$

$$+ (1+x) y_{n+1} + n\cdot 1\cdot y_n + y_n = 0$$

$$\Rightarrow (1+x)^2 y_{n+2} + (2n + 2nx) y_{n+1} + (n^2 - n) y_n + (1+x) y_{n+1}$$

$$+ n y_n + y_n = 0$$

$$\Rightarrow (1+x)^2 y_{n+2} + (2n + 2nx + 1 + x) y_{n+1} + (n^2 - n + n + 1) y_n$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow (1+x)^2 y_{n+2} + \{2n(1+x) + 1(1+x)\} y_{n+1} + (n^2+1) y_n = 0$$

$$\Rightarrow (1+x)^2 y_{n+2} + (2n+1)(1+x) y_{n+1} + (n^2+1) y_n = 0$$

(Showed)

Ex-11

$$y^{1/m} + y^{-1/m} = 2x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} y^{1/m} + \frac{d}{dx} y^{-1/m} = \frac{d}{dx} 2x$$

$$\Rightarrow 1/m\, y^{1/m - 1} \cdot \frac{dy}{dx} + \left\{ -1/m\, y^{-1/m - 1} \cdot \frac{dy}{dx} \right\} = 2$$

$$\Rightarrow 1/m \left(y^{1/m} \cdot y^{-1} \right) \cdot y_1 - 1/m \left(y^{-1/m} \cdot y^{-1} \right) y_1 = 2$$

$$\Rightarrow 1/m \cdot y^{1/m} \cdot \frac{1}{y} \cdot y_1 - 1/m \cdot y^{-1/m} \cdot \frac{1}{y} \cdot y_1 = 2$$

$$\Rightarrow 1/my \cdot y_1 \left(y^{1/m} - y^{-1/m}\right) = 2$$

$$\Rightarrow y_1 \left(y^{1/m} - y^{-1/m}\right) = 2my$$

$$\Rightarrow \left\{\left(y^{1/m} - y^{-1/m}\right) y_1\right\}^2 = (2my)^2$$

$$\Rightarrow \left(y^{1/m} - y^{-1/m}\right)^2 \cdot y_1^2 = 4m^2y^2$$

$$\Rightarrow \left\{\left(y^{1/m} + y^{-1/m}\right)^2 - 4 \cdot y^{1/m} \cdot y^{-1/m}\right\} \cdot y_1^2 = 4m^2y^2$$

$$\Rightarrow (2x)^2 - 4 \cdot \cancel{y^{1/m}} \cdot \frac{1}{\cancel{y^{1/m}}} \cdot y_1^2 = 4m^2y^2$$

$$\Rightarrow \left(4x^2 - 4\right) y_1^2 = 4m^2y^2$$

$$\Rightarrow \cancel{4}(x^2-1) \cdot y_1^2 = \cancel{4}m^2y^2$$

$$\Rightarrow (x^2-1) y_1^2 = m^2y^2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left\{(x^2-1) \cdot y_1^2\right\} = \frac{d}{dx} m^2y^2$$

$$\Rightarrow (x^2-1) \frac{d}{dx} y_1^2 + y_1^2 \frac{d}{dx}(x^2-1) = m^2 \frac{d}{dx} y^2$$

$$\Rightarrow (x^2-1) \cdot 2y_1 \cdot y_2 + y_1^2 \cdot 2x = m^2 \cdot 2y \cdot y_1$$

$$\Rightarrow \cancel{2}(x^2-1) \cancel{y_1} \cdot y_2 + 2xy_1^2 = \cancel{2}m^2 \cancel{y_1}$$

$$\Rightarrow \cancel{2}\cancel{y_1}\left\{(x^2-1) \cdot y_2 + xy_1\right\} = \cancel{2}m^2 \cancel{y_1}$$

$$\Rightarrow (x^2-1)y_2 + xy_1 - m^2 y = 0 \quad \text{——— (1)}$$

(1) নং কে $\frac{d^n}{dx^n}$ বার অন্তরকরণ করে পাই

$$\frac{d^n}{dx^n}\left\{(x^2-1)y_2\right\} + \frac{d^n}{dx^n} xy_1 - \frac{d^n}{dx^n} m^2 y = 0$$

$$\Rightarrow (x^2-1)y_{n+2} + {}^nC_1 (x^2-1)_1 \cdot y_{n-1+2} + {}^nC_2 (x^2-1)_2 y_{n-2+2}$$
$$+ xy_{n+1} + {}^nC_1 (x)_1 y_{n-1+1} - m^2 \cdot \frac{d^n}{dx^n} y = 0$$

$$\Rightarrow (x^2-1)y_{n+2} + n \cdot y_{n+1} \cdot 2x + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 \cdot y_n + xy_{n+1}$$
$$+ ny_n - m^2 y_n = 0$$

$$\Rightarrow (x^2-1)y_{n+2} + 2nxy_{n+1} + (n^2-n)y_n + xy_{n+1} + ny_n$$
$$- m^2 y_n = 0$$

$$\Rightarrow (x^2-1)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2 \cancel{-n} \cancel{+n} - m^2)y_n = 0$$

$$\Rightarrow (x^2-1)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2-m^2)y_n = 0$$

(Showed)

Ex-21

$$y = \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^m$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{d}{dx}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^m$$

$$\Rightarrow y_1 = m\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{m-1}\cdot\left\{\frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}\sqrt{x^2+1}\right\}$$

$$\Rightarrow y_1 = m\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{m-1}\cdot\left\{1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{d}{dx}(x^2+1)\right\}$$

$$\Rightarrow y_1 = m\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{m-1}\cdot\left\{1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x\right\}$$

$$\Rightarrow y_1 = m\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{m-1}\left\{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right\}$$

$$\Rightarrow y_1 = m\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{m}\cdot\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{-1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\Rightarrow y_1 = my\cdot\frac{1}{\cancel{x+\sqrt{x^2+1}}}\cdot\frac{\cancel{x+\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{x^2+1}\right)y_1 = my$$

$$\Rightarrow \left\{\left(\sqrt{x^2+1}\right)y_1\right\}^2 = (my)^2$$

$$\Rightarrow (x^2+1)\cdot y_1^2 = m^2y^2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left\{(x^2+1)\cdot y_1^2\right\} = \frac{d}{dx}m^2y^2$$

$$\Rightarrow (x^2+1)\frac{d}{dx}y_1^2 + y_1^2\frac{d}{dx}(x^2-1) = m^2\frac{d}{dx}y^2$$

$$\Rightarrow (x^2+1)\cdot 2y_1\cdot y_2 + y_1^2\cdot 2x = m^2\cdot 2y\cdot y_1$$

$$\Rightarrow \cancel{2}y_2\{(x^2+1)\cdot y_2 + xy_1\} = \cancel{2}m^2 y_1$$

$$\Rightarrow (x^2+1)y_2 + xy_1 - m^2 y = 0 \quad \text{——— (1)}$$

(1) নং কে $\frac{d^n}{dx^n}$ বার অন্তরীকরণ করে পাই

$$\frac{d^n}{dx^n}\{(x^2+1)y_2\} + \frac{d^n}{dx^n}(xy_1) - \frac{d^n}{dx^n} m^2 y = 0$$

$$\Rightarrow (x^2+1)\cdot y_{n+2} + {}^nC_1 (x^2-1)_1 \cdot y_{n-1+2} + {}^nC_2 (x^2-1)_2 \cdot y_{n-2+2}$$

$$+ xy_{n+1} + {}^nC_1 (x)_1 \cdot y_{n-1+1} - m^2 y_n = 0$$

$$\Rightarrow (x^2+1)y_{n+2} + n\cdot 2x\cdot y_{n+1} + \frac{n(n-1)!}{2!}\cdot 2\cdot y_n$$

$$+ xy_{n+1} + n\cdot 1\cdot y_n - m^2 y_n = 0$$

$$\Rightarrow (x^2+1)y_{n+2} + 2nxy_{n+1} + (n^2-n)y_n + xy_{n+1} + ny_n$$

$$- m^2 y_n = 0$$

$$\Rightarrow (x^2+1)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2-\cancel{n}+\cancel{n}-m^2)y_n = 0$$

$$\Rightarrow (x^2+1)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2-m^2)y_n = 0$$

(Showed)

Ex-24

$$\cos^{-1}\left(\frac{y}{b}\right) = \ln\left(\frac{x}{n}\right)^n$$

$$\Rightarrow \cos^{-1}\left(\frac{y}{b}\right) = n\ln\left(\frac{x}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \cos^{-1}\left(\frac{y}{b}\right) = n\ln x - n\ln n$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\cos^{-1}\left(\frac{y}{b}\right) = \frac{d}{dx}n\ln x - \frac{d}{dx}n\ln n$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2}}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{b}\right) = n\cdot\frac{1}{x} - 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}\cdot\frac{1}{b}\cdot y_1 = \frac{n}{x}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{\frac{b^2-y^2}{b^2}}}\cdot\frac{y_1}{b} = \frac{n}{x}$$

$$\Rightarrow -\frac{\cancel{b}}{\sqrt{b^2-y^2}}\cdot\frac{y_1}{\cancel{b}} = \frac{n}{x}$$

$$\Rightarrow -\frac{y_1}{\sqrt{b^2-y^2}} = \frac{n}{x}$$

$$\Rightarrow -xy_1 = n\sqrt{b^2-y^2}$$

$$\Rightarrow (-xy_1)^2 = \left(n\sqrt{b^2-y^2}\right)^2$$ বর্গ করে

$$\Rightarrow x^2y_1^2 = n^2(b^2-y^2)$$

$$\Rightarrow x^2 y_1^2 = x^2 b^2 - x^2 y^2$$

$$\Rightarrow x^2 y_1^2 - x^2 b^2 + x^2 y^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(x^2 y_1^2) - \frac{d}{dx}(x^2 b^2) + \frac{d}{dx}(x^2 y^2) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 \frac{d}{dx} y_1^2 + y_1^2 \frac{d}{dx} x^2 - 0 + x^2 \frac{d}{dx} y^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 \cdot 2y_1 \cdot y_2 + y_1^2 \cdot 2x + x^2 \cdot 2y \cdot y_1 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 y_1 y_2 + 2x y_1^2 + 2y y_1 x^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2y_1 (x^2 y_2 + x y_1 + x^2 y) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 y_2 + x y_1 + x^2 y = 0 \quad \text{——— (1)}$$

(1) নং কে $\frac{d^n}{dx^n}$ বার অন্তরীকরণ করে পাই

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^2 y_2) + \frac{d^n}{dx^n}(x y_1) + \frac{d^n}{dx^n}(x^2 y) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 y_{n+2} + {}^nC_1 (x^2)_1 \cdot y_{n-1+2} + {}^nC_2 (x^2)_2 \cdot y_{n-2+2}$$

$$+ x y_{n+1} + {}^nC_1 (x)_1 y_{n-1+1} + x^2 y_n = 0$$

$$\Rightarrow x^2 y_{n+2} + n \cdot 2x \cdot y_{n+1} + \frac{n(n-1)!}{2!} \cdot 2 \cdot y_n + x y_{n+1}$$

$$+ n \cdot 1 \cdot y_n + x^2 y_n = 0$$

$$\Rightarrow x^2 y_{n+2} + 2nx y_{n+1} + (n^2 - n) y_n + x y_{n+1} + n y_n$$

$$+ x^2 y_n = 0$$

$$\Rightarrow n^2 y_{n+2} + (2n+1) n y_{n+1} + (n^2 - \cancel{n} + \cancel{n} + n^2) y_n = 0$$

$$\Rightarrow n^2 y_{n+2} + (2n+1) n y_{n+1} + 2n^2 y_n = 0$$ (Showed)

Ex-6

দেওয়া আছে,

$$x = \sin\left(\frac{1}{a} \ln y\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a}(\ln y) = \sin^{-1} x$$

$$\Rightarrow \ln y = a \sin^{-1} x$$

$$\Rightarrow y = e^{a \sin^{-1} x}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} y = \frac{d}{dx} e^{a \sin^{-1} x}$$

$$\Rightarrow y_1 = e^{a \sin^{-1} x} \cdot \frac{d}{dx} a \sin^{-1} x$$

$$\Rightarrow y_1 = e^{a \sin^{-1} x} \cdot a \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{1-x^2}\right) y_1 = a y$$

$$\Rightarrow \left\{\left(\sqrt{1-x^2}\right) \cdot y_1\right\}^2 = (ay)^2$$ বর্গ করে

$$\Rightarrow \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 \cdot y_1^2 = a^2 y^2$$

$$\Rightarrow (1-x^2) \cdot y_1^2 = a^2 y^2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left\{(1-x^2) \cdot y_1^2\right\} = \frac{d}{dx} a^2 y^2$$

$$\Rightarrow (1-x^2) \frac{d}{dx} y_1^2 + y_1^2 \frac{d}{dx}(1-x^2) = a^2 \frac{d}{dx} y^2$$

$$\Rightarrow (1-x^2)\cdot 2y_1\cdot y_2 + y_1^2\cdot(-2x) = a^2\cdot 2y\cdot y_1$$

$$\Rightarrow (1-x^2)\,2y_1y_2 - 2xy_1^2 - 2a^2yy_1 = 0$$

$$\Rightarrow 2y_1\{(1-x^2)y_2 - xy_1 - a^2y\} = 0$$

$$\Rightarrow (1-x^2)y_2 - xy_1 - a^2y = 0 \quad \text{———} \quad (1)$$

(1) নং কে $\frac{d^n}{dx^n}$ বার অন্তরীকরণ করে পাই

$$\frac{d^n}{dx^n}\{(1-x^2)y_2\} - \frac{d^n}{dx^n}(xy_1) - \frac{d^n}{dx^n}(a^2y) = 0$$

$$\Rightarrow (1-x^2)y_{n+2} + nc_1(1-x^2)_1 y_{n-1+2} + nc_2(1-x^2)_2\cdot y_{n-2+2}$$
$$- xy_{n+1} - nc_1(x)_1\cdot y_{n-1+1} - a^2y_n = 0$$

$$\Rightarrow (1-x^2)y_{n+2} + n(-2x)y_{n+1} + \frac{n(n-1)!}{2!}(-2)\cdot y_n - xy_{n+1}$$
$$- n\cdot 1\cdot y_n - a^2y_n = 0$$

$$\Rightarrow (1-x^2)y_{n+2} - 2nxy_{n+1} - (n^2-n)y_n - xy_{n+1} - ny_n$$
$$- a^2y_n = 0$$

$$\Rightarrow (1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - (n^2-\cancel{n}+\cancel{n}+a^2)y_n = 0$$

$$\Rightarrow (1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - (n^2+a^2)y_n = 0$$ (Showed)

Ex-7

$$y = \sin(m\sin^{-1}x)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sin(m\sin^{-1}x)$$

$$\Rightarrow y_1 = \cos(m\sin^{-1}x)\cdot\frac{d}{dx}m\sin^{-1}x$$

$$\Rightarrow y_1 = \cos(m\sin^{-1}x)\cdot m\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{1-x^2})y_1 = m\cos(m\sin^{-1}x)$$

$$\Rightarrow \{(\sqrt{1-x^2})\cdot y_1\}^2 = \{m\cdot\cos(m\sin^{-1}x)\}^2$$ বর্গ করে

$$\Rightarrow (1-x^2)\cdot y_1^2 = m^2\cdot\cos^2(m\sin^{-1}x)$$

$$\Rightarrow (1-x^2)\cdot y_1^2 = m^2\{1-\sin^2(m\sin^{-1}x)\}$$

$$\Rightarrow (1-x^2)\cdot y_1^2 = m^2\{1-y^2\}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\{(1-x^2)\cdot y_1^2\} = \frac{d}{dx}\{m^2(1-y^2)\}$$

$$\Rightarrow (1-x^2)\frac{d}{dx}y_1^2 + y_1^2\cdot\frac{d}{dx}(1-x^2) = m^2\frac{d}{dx}(1-y^2)$$

$$\Rightarrow (1-x^2)\cdot 2y_1y_2 + y_1^2(-2x) = m^2(-2y\cdot y_1)$$

$$\Rightarrow (1-x^2)2y_1y_2 - 2xy_1^2 + 2yy_1m^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2y_1\{(1-x^2)\cdot y_2 - xy_1 + m^2y\} = 0$$

$$\Rightarrow (1-x^2)y_2 - xy_1 + m^2y = 0 \quad \text{——— (1)}$$

(1) নং কে $\frac{d^n}{dx^n}$ বার অন্তরকলন করে পাই

$$\frac{d^n}{dx^n}\{(1-x^2)y_2\} - \frac{d^n}{dx^n}(xy_1) + \frac{d^n}{dx^n}(m^2y) = 0$$

$$\Rightarrow (1-x^2)y_{n+2} + {}^nC_1(1-x^2)_1 y_{n-1+2} + {}^nC_2(1-x^2)_2 \cdot y_{n-2+2}$$

$$- xy_{n+1} - {}^nC_1(x)_1 y_{n-1+1} + m^2y_n = 0$$

$$\Rightarrow (1-x^2)y_{n+2} + n(-2x)y_{n+1} + \frac{n(n-1)!}{2!}(-2)\cdot y_n$$

$$- xy_{n+1} - n\cdot 1\cdot y_n + m^2y_n = 0$$

$$\Rightarrow (1-x^2)y_{n+2} - 2nxy_{n+1} - (n^2-n)y_n - xy_{n+1} - ny_n$$

$$+ m^2y_n = 0$$

$$\Rightarrow (1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} + (-n^2+\cancel{n}-\cancel{n}+m^2)y_n$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow (1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} + (m^2-n^2)y_n = 0$$

(Showed)

Ex-9: $y = \sin\{a\ln(x+b)\}$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{d}{dx}\sin\{a\ln(x+b)\}$$

$$\Rightarrow y_1 = \cos\{a\ln(x+b)\}\cdot\frac{d}{dx}\{a\ln(x+b)\}$$

$$\Rightarrow y_1 = \cos\{a\ln(x+b)\}\cdot a\cdot\frac{1}{x+b}\cdot 1$$

$$\Rightarrow (x+b)y_1 = a\cos\{a\ln(x+b)\}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\{(x+b)y_1\} = \frac{d}{dx}\, a\cos\{a\ln(x+b)\}$$

$$\Rightarrow (x+b)\frac{d}{dx}y_1 + y_1\frac{d}{dx}(x+b) = a\cdot -\sin\{a\ln(x+b)\}\cdot a\cdot\frac{1}{x+b}\cdot 1$$

$$\Rightarrow (x+b)\cdot y_2 + y_1\cdot 1 = -a^2\sin\{a\ln(x+b)\}\cdot\frac{1}{x+b}$$

$$\Rightarrow (x+b)^2\cdot y_2 + (x+b)y_1 = -a^2 y$$

$$\Rightarrow (x+b)^2 y_2 + (x+b)y_1 + a^2 y = 0 \quad \text{——— (1)}$$

(1) নং কে $\frac{d^n}{dx^n}$ বার অন্তরীকরণ করে পাই

$$\frac{d^n}{dx^n}\{(x+b)^2 y_2\} + \frac{d^n}{dx^n}\{(x+b)y_1\} + \frac{d^n}{dx^n}(a^2 y) = 0$$

$$\Rightarrow (x+b)^2\cdot y_{n+2} + {}^nC_1\,(x+b)^2_1\cdot y_{n-1+2} + {}^nC_2\,(x+b)^2_2\cdot y_{n-2+2} + (x+b)y_{n+1}$$
$$+ {}^nC_1\,(x+b)_1\cdot y_{n-1+1} + a^2 y_n = 0$$

$$\Rightarrow (x+b)^2\cdot y_{n+2} + n\cdot 2(x+b)\cdot y_{n+1} + \frac{n(n-1)!}{2!}\cdot 2\cdot y_n + (x+b)y_{n+1}$$
$$+ n\cdot 1\cdot y_n + a^2 y_n = 0$$

$$\Rightarrow (x+b)^2\cdot y_{n+2} + (2nx+2nb)y_{n+1} + (n^2-n)y_n + (x+b)y_{n+1} + ny_n$$
$$+ a^2 y_n = 0$$

$$\Rightarrow (x+b)^2\cdot y_{n+2} + (2nx+2nb+x+b)y_{n+1} + (n^2-n+n+a^2)y_n = 0$$

$$\Rightarrow (x+b)^2\cdot y_{n+2} + \{2n(x+b)+1(x+b)\}y_{n+1} + (n^2+a^2)y_n = 0$$

$$\Rightarrow (x+b)^2\cdot y_{n+2} + (2n+1)(x+b)y_{n+1} + (n^2+a^2)y_n = 0 \quad \text{(Showed)}$$

Ex – 12

$$y = (x^2-1)^n$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} y = \frac{d}{dx}(x^2-1)^n$$

$$\Rightarrow y_1 = n(x^2-1)^{n-1} \cdot \frac{d}{dx}(x^2-1)$$

$$\Rightarrow y_1 = n(x^2-1)^{n-1} \cdot 2x$$

$$\Rightarrow (x^2-1) \cdot y_1 = n(x^2-1)^{n-1} \cdot 2x\,(x^2-1)$$ [x^2-1 দ্বারা গুণ করে

$$\Rightarrow (x^2-1)\, y_1 = 2nx\,(x^2-1)^n$$

$$\Rightarrow (x^2-1)\, y_1 = 2nxy$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\{(x^2-1) \cdot y_1\} = \frac{d}{dx} 2nxy$$

$$\Rightarrow (x^2-1)\frac{d}{dx} y_1 + y_1 \frac{d}{dx}(x^2-1) = 2n\left\{x\frac{d}{dx}y + y\frac{d}{dx}x\right\}$$

$$\Rightarrow (x^2-1)\, y_2 + y_1 \cdot 2x = 2nxy_1 + 2ny \cdot 1$$

$$\Rightarrow (x^2-1) \cdot y_2 + 2xy_1 - 2nxy_1 - 2ny = 0$$

$$\Rightarrow (x^2-1)\, y_2 + 2(1-n)xy_1 - 2ny = 0 \quad \text{——— (1)}$$

(1) নং কে $\frac{d^n}{dx^n}$ বার অন্তরীকরণ করে পাই

$$\frac{d^n}{dx^n}\{(x^2-1) \cdot y_2\} + \frac{d^n}{dx^n}\{2(1-n)xy_1\} - \frac{d^n}{dx^n} 2ny = 0$$

$$\Rightarrow (x^2-1) \cdot y_{n+2} + {}^nC_1 (x^2-1)_1 \cdot y_{n-1+2} + {}^nC_2 (x^2-1)_2 \cdot y_{n-2+2}$$

$$+2(1-n)\{x y_{n+1} + {}^nC_1 (x)_1 \cdot y_{n-1+1}\} - 2n y_n = 0$$

$$\Rightarrow (x^2-1) y_{n+2} + n \cdot 2x \cdot y_{n+1} + \frac{n(n-1)!}{2!} \cdot 2 \cdot y_n + (2-2n)\{x y_{n+1} + n \cdot 1 \cdot y_n\} - 2n y_n = 0$$

$$\Rightarrow (x^2-1) y_{n+2} + 2nx y_{n+1} + (n^2-n) y_n + (2-2n) x y_{n+1} + (2-2n) n y_n - 2n y_n = 0$$

$$\Rightarrow (x^2-1) y_{n+2} + (\cancel{2n} + 2 - \cancel{2n}) x y_{n+1} + (n^2 - n + \cancel{2n} - 2n^2 - \cancel{2n}) y_n = 0$$

$$\Rightarrow (x^2-1) y_{n+2} + 2x y_{n+1} + (-n^2-n) y_n = 0$$

$$\Rightarrow (x^2-1) y_{n+2} + 2x y_{n+1} - (n^2+n) y_n = 0$$

$$\Rightarrow (x^2-1) y_{n+2} + 2x y_{n+1} - n(n+1) y_n = 0$$

(Showed)

২য় অংশ :

অধ্যায় – ৫

5

রোলের উপপাদ্য :

যদি $y = f(x)$ ফাংশন হয়

(i) $[a, b]$ বদ্ধ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন

(ii) (a, b) খোলা ব্যবধিতে অন্তরীকরণযোগ্য

(iii) $f(a) = f(b)$

তবে a এবং b এর মধ্যে অন্ততঃপক্ষে x এর এমন একটি মান c পাওয়া যাবে যেখানে $f'(c) = 0$ হবে।

প্রমাণ:

যেহেতু $y = f(x)$ ফাংশন $[a, b]$ বদ্ধ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন। কাজেই $[a, b]$ ব্যবধিতে ফাংশনের লঘিষ্ঠমান অথবা গরিষ্ঠমান অথবা উভয় মানই থাকবে।

ধরি, $y = f(x)$ ফাংশনের লঘিষ্ঠ ও গরিষ্ঠমান যথাক্রমে m ও M.

$m \neq$ বা $m = M$ হতে পারে।

যখন $m = M$ তখন $f(x) =$ ধ্রুবক

$$\Rightarrow f'(x) = 0$$

$$\Rightarrow f'(c) = 0 \quad \text{যেখানে } a < c < b$$

আবার, যখন $m \neq M$ হয় তখন (a, b) খোলা ব্যবধিতে অন্ততঃপক্ষে একটি বিন্দু $x = c$ থাকবে যেখানে $f(c) = m$ হয়। অর্থাৎ $x = c$ বিন্দুতে ফাংশনের লঘিষ্ঠমান $f(c)$।

$$\lim_{h\to 0^+} f(c+h) \geq f(c)$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0^+} f(c+h) - f(c) \geq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq \frac{0}{h}$$ [h দ্বারা ভাগ করে

$$\Rightarrow f'(c) \geq 0$$

এবং, $\lim_{h\to 0^-} f(c+h) \geq f(c)$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0^-} f(c+h) - f(c) \geq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq \frac{0}{h}$$ [h দ্বারা ভাগ করে

(-h এর জন্য চিহ্ন পরিবর্তন হয়)

$$\Rightarrow f'(c) \leq 0$$

$\therefore f'(c) = 0, \quad a<c<b$

$\therefore f'(c)$ বিদ্যমান।

আবার, (a,b) খোলা ব্যবধিতে অন্ততঃ পক্ষে একটি বিন্দু $x=c$ থাকবে যেখানে $f(c) = M$ হয়। অর্থাৎ $x=c$ বিন্দুতে ফাংশনের গরিষ্ঠমান $f(c)$।

$$\lim_{h\to 0^+} f(c+h) \leq f(c)$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0^+} f(c+h) - f(c) \leq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \le \frac{0}{h}$$ [h-দ্বারা ভাগ করে

$$\Rightarrow Rf'(c) = \le 0$$

আবার,

$$\lim_{h\to 0^-} f(c+h) \le f(c)$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0^-} f(c+h) - f(c) \le 0$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \ge \frac{0}{h}$$ [h-দ্বারা ভাগ করে (-h এর জন্য চিহ্ন পরিবর্তন হয়)]

$$\Rightarrow Lf'(c) \ge 0$$

∴ যেহেতু $f'(c)$ বিদ্যমান। সুতরাং $f'(c) = 0$ হবে যেখানে $a < c < b$।

রোলের উপপাদ্য :-

যদি $y = f(x)$ ফাংশন হয়

(i) $[a, b]$ বদ্ধ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন

(ii) (a, b) খোলা ব্যবধিতে অন্তরকলনযোগ্য

(iii) $f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$ হয়।

তবে a ও b এর মধ্যে অন্তত পক্ষে x এর এমন একটি মান c পাওয়া যাবে যেখানে $(b-a) f'(c) - f(b) + f(a) = 0$ হয়।

প্রমাণ: ধরি, $F(x) = f(x) + Ax$ ——— (1) একটি সহায়ক ফাংশন।

যেখানে, A হলো ইচ্ছামূলক ধ্রুবক যেন $F(a) = F(b)$ হয়।

① নং হতে পাই

$$F(a) = f(a) + Aa$$

$$F(b) = f(b) + Ab$$

যেখানে $F(a) = F(b)$

$$\Rightarrow f(a) + Aa = f(b) + Ab$$

$$\Rightarrow f(a) - f(b) = Ab - Aa$$

$$\Rightarrow f(a) - f(b) = A(b-a)$$

$$\Rightarrow A = \frac{f(a) - f(b)}{(b-a)}$$

$$\Rightarrow A = -\frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

A এর মান ① এ বসিয়ে পাই

$$F(x) = f(x) + Ax$$

$$\Rightarrow F(x) = f(x) + \left\{\frac{-f(b) - f(a)}{(b-a)}\right\} x$$

$$\Rightarrow F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{(b-a)} x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\{F(x)\} = \frac{d}{dx}\{f(x)\} - \frac{d}{dx}\left\{\frac{f(b) - f(a)}{(b-a)} \cdot x\right\}$$

$$\Rightarrow F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{(b-a)} \cdot \frac{d}{dx} x$$

$$\Rightarrow F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \cdot 1 \quad \text{——— ②}$$

যেখানে $a < c < b$ ।

যেহেতু $f(x)$ ফাংশন $[a,b]$ বদ্ধ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন এবং (a,b) খোলা ব্যবধিতে অন্তরীকরণযোগ্য । সুতরাং $F(x)$ ফাংশন $[a,b]$ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন ও (a,b) ব্যবধিতে অন্তরীকরণযোগ্য হবে। আবার, $F(a) = F(b)$ হবে অর্থাৎ $F(x)$ ফাংশন রোলের উপপাদ্যের প্রতিটি শর্ত পালন করে ।

Ex-6: $f(x) = \begin{cases} x & \text{যখন } 0 \le x \le 1 \\ 2-x & \text{" } 1 < x \le 2 \end{cases}$ ফাংশনটির $f(0) = 0 = f(2)$, রোলের উপপাদ্য অনুযায়ী $(0,2)$ ব্যবধিতে অন্তত:পক্ষে একটি বিন্দু বিদ্যমান থাকিবে যেন $f'(x) = 0$ হয় কিন্তু যেকোনো $x \in (0,2)$ এর জন্য $f'(x) \neq 0$ কেন নয়, ব্যাখ্যা কর ।

$\Longrightarrow$ দেওয়া আছে,

প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = \begin{cases} x & \text{যখন } 0 \le x \le 1 \\ 2-x & \text{" } 1 < x \le 2 \end{cases}$ এবং ব্যবধি $(0,2)$,

তাহলে $x = 1$ বিন্দুর জন্য,

$$Rf'(1) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{1-h-1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} -\frac{h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} -1 = -1$$

$f(x) = 2-x$

$f(1+h) = 2-(1+h)$

$= 2-1-h$

$= 1-h$

$f(1) = 2-1 = 1$

$$Lf'(1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$f(x) = x$

$f(1+h) = 1+h$

$f(1) = 1$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{1+h-1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} 1 = 1$$

$\therefore Rf'(1) \neq Lf'(1)$ অর্থাৎ $(0,2)$ ব্যবধিতে $f'(x)$ বিদ্যমান নয়। যেহেতু $(0,2)$ ব্যবধিতে প্রদত্ত ফাংশন রোলের উপপাদ্যের সকল শর্ত সিদ্ধ করেনা, ফলে $(0,2)$ ব্যবধির কোনো বিন্দুতেই $f'(x) = 0$ হবেনা।

Ex-11 $(0,1)$ ব্যবধিতে $f(x) = 3+2x-x^2$ ফাংশনের জন্য গড়মান উপপাদ্যটির সত্যতা যাচাই কর।

→ প্রদত্ত ফাংশন,

$$f(x) = 3+2x-x^2$$

$$Rf'(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{3+2(x+h)-(x+h)^2-(3+2x-x^2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\cancel{3}+\cancel{2x}+2h-\cancel{x^2}-2xh-h^2-\cancel{3}-\cancel{2x}+\cancel{x^2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{2h - 2xh - h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{h(2 - 2x - h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} 2 - 2x - h$$

$$= 2 - 2x - 0 = 2 - 2x$$

$$Lf'(x) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{3 + 2(x+h) - (x+h)^2 - (3 + 2x - x^2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{\cancel{3} + \cancel{2x} + 2h - \cancel{x^2} - 2xh - h^2 - \cancel{3} - \cancel{2x} + \cancel{x^2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{2h - 2xh - h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{h(2 - 2x - h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} 2 - 2x - h$$

$$= 2 - 2x - 0 = 2 - 2x$$

যেহেতু $Rf'(x) = Lf'(x)$

সুতরাং, x এর সকল মানের জন্য $[0,1]$ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন এবং $(0,1)$ ব্যবধিতে অন্তরীকরণযোগ্য।

∴ ফাংশনটি গড়মান উপপাদ্যের সকল শর্ত সিদ্ধ করে।

এখন, অন্ততপক্ষে একটি বিন্দু $c \in (0,1)$ এর জন্য $a=0, b=1$

তাহলে $f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$

$$\Rightarrow f(1) - f(0) = (1-0) f'(c) \quad \text{——— (1)}$$

$f(x) = 3+2x-x^2$

$f(1) = 3+2\cdot 1-1^2$

$= 3+2-1$

$= 4$

$f(x) = 3+2x-x^2$

$f(0) = 3+2\cdot 0-0^2$

$= 3+0-0$

$= 3$

$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}(3+2x-x^2)$

$= 2-2x$

$\therefore f'(c) = 2-2c$

(1) নং সমীকরণ হতে পাই

$4-3 = 1 \times (2-2c)$

$\Rightarrow 1 = 2-2c$

$\Rightarrow 2c = 2-1$

$\Rightarrow c = \frac{1}{2}$

যেহেতু $c = \frac{1}{2} \in (0,1)$। সুতরাং $(0,1)$ ব্যবধিতে প্রদত্ত ফাংশনের গড়মান উপপাদ্য সত্য।

Ex-17 $[0, 1/2]$ ব্যবধিতে $f(x) = x(x-1)(x-2)$ ফাংশনের জন্য ল্যাগ্রাঞ্জের গড়মান উপপাদ্যের সত্যতা যাচাই কর।

→ প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = x(x-1)(x-2)$

$$= (x^2 - x)(x-2)$$

$$= x^3 - 2x^2 - x^2 + 2x$$

$$= x^3 - 3x^2 + 2x$$

$$Rf'(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{(x+h)^3 - 3(x+h)^2 + 2(x+h) - (x^3 - 3x^2 + 2x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{\cancel{x^3} + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 3(x^2 + 2xh + h^2) + \cancel{2x} + 2h - \cancel{x^3} + 3x^2 - \cancel{2x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - \cancel{3x^2} - 6xh - 3h^2 + 2h + \cancel{3x^2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2 - 6x - 3h + 2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} 3x^2 + 3xh + h^2 - 6x - 3h + 2$$

$$= 3x^2 + 0 + 0^2 - 6x - 0 + 2$$

$$= 3x^2 - 6x + 2$$

$$Lf'(x) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{(x+h)^3 - 3(x+h)^2 + 2(x+h) - (x^3 - 3x^2 + 2x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 3(x^2 + 2xh + h^2) + 2x + 2h - x^3 + 3x^2 - 2x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 3x^2 - 6xh - 3h^2 + 2h + 3x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2 - 6x - 3h + 2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} 3x^2 + 3xh + h^2 - 6x - 3h + 2$$

$$= 3x^2 + 0 + 0^2 - 6x - 0 + 2$$

$$= 3x^2 - 6x + 2$$

$\therefore Rf'(x) = Lf'(x)$,

সুতরাং x এর সকল মানের জন্য $[0, 1/2]$ বদ্ধ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন এবং $(0, 1/2)$ খোলা ব্যবধিতে অন্তরীকরণযোগ্য,

$\therefore$ ফাংশনটি গড়মান উপপাদ্যের সকল শর্ত সিদ্ধ করে,

ধরি, একটি বিন্দু $c \in (0, 1/2)$

$$\therefore f(1/2) - f(0) = (1/2 - 0) f'(c) \quad \text{——— (1)}$$

$\therefore f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$

$f'(c) = 3c^2 - 6c + 2$

$\therefore f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

$f(1/2) = (1/2)^3 - 3\cdot(1/2)^2 + 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{1}{8} - \frac{3}{4} + 1$

$= \frac{1 - 6 + 8}{8}$

$= \frac{3}{8}$

$\therefore f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

$f(0) = 0^3 - 3\cdot 0^2 + 2\cdot 0$

$= 0$

(1) নং সমীকরণ হতে পাই

$\frac{3}{8} - 0 = \frac{1}{2} \times 3c^2 - 6c + 2$

$\Rightarrow \frac{6}{8} = 3c^2 - 6c + 2$

$\Rightarrow 24c^2 - 48c + 16 = 6$

$\Rightarrow 24c^2 - 48c + 16 - 6 = 0$

$\Rightarrow 24c^2 - 48c + 10 = 0$

$\Rightarrow 2(12c^2 - 24c + 5) = 0$

$\Rightarrow 12c^2 - 24c + 5 = 0$

এখন, $a = 12$, $b = -24$, $c = 5$

$$c = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-24) \pm \sqrt{(-24)^2 - 4\times 12\times 5}}{2\times 12}$$

$$= \frac{24 \pm \sqrt{576 - 240}}{24}$$

$$= \frac{24 \pm \sqrt{336}}{24}$$

$$= \frac{24}{24} \pm \frac{\sqrt{336}}{24}$$

$$\therefore c = 1 \pm \frac{\sqrt{336}}{24}$$

যেহেতু $1 \pm \frac{\sqrt{336}}{24} \in (0, 1/2)$, সুতরাং $(0, 1/2)$ ব্যবধিতে প্রদত্ত ফাংশনের গড়মান উপপাদ্যটি সত্য।

অধ্যায় — ৬

6

ম্যাকলরিন বহুপদী :

$x=0$ বিন্দুতে $f(x), f'(x), f''(x) \cdots f^n(x)$ ফাংশন সমূহ বিদ্যমান হয় তবে n ক্রমের ম্যাকলরিন বহুপদী হবে,

$$P_n(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^n(0)$$

ম্যাকলরিন এর ভিন্নপাদ্যটি শুধুমাত্র $x=0$ বিন্দুর সাপেক্ষে নির্ণয় করা যায়।

$f(x)$ এর জন্য টেলর বহুপদী x এর ইচ্ছামূলক বিন্দুর সাপেক্ষে নির্ণয় করা হয়। যদি $x=x_0$ বিন্দুতে $f(x), f'(x), f''(x) \cdots f^n(x)$ ফাংশনসমূহ বিদ্যমান হয় তবে n ক্রমের টেলরের বহুপদী হবে।

$$P_n(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^n(x_0)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^k(x_0)$$

উদা: ২২

① ধরি, $f(x) = 5x^2+7x+3$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(5x^2+7x+3)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 5.2x+7+0$$

$$\Rightarrow f'(x) = 10x+7$$

$$\therefore \frac{d}{dx}f'(x) = \frac{d}{dx}(10x+7)$$

$$\Rightarrow f''(x) = 10+0$$

$\therefore \frac{d}{dx} f''(x) = \frac{d}{dx}(10)$

$\Rightarrow f'''(x) = 0$

$f'''(x) = f^{iv}(x) = f^{v}(x) = \cdots = 0$

দেওয়া আছে,

$(x-2)$ ঘাতের বিস্তৃতি

$x = 2$ বিন্দুতে

$f''(2) = 10$

$f(2) = 5 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2 + 3$

$= 5 \cdot 4 + 14 + 3$

$= 20 + 14 + 3$

$= 37$

$f'(2) = 10 \cdot 2 + 7$

$= 20 + 7$

$= 27$

টেলরের উপপাদ্য হতে জানি $(x-2)$ শক্তি ঘাতের $f(x)$ এর বিস্তার

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!} f'''(x_0) + \cdots$$

$$\Rightarrow 5x^2 + 7x + 3 = f(2) + (x-2)f'(2) + \frac{(x-2)^2}{2!} f''(2) + \frac{(x-2)^3}{3!} f'''(2) + \cdots$$

$$\Rightarrow 5x^2 + 7x + 3 = 37 + (x-2) \cdot 27 + \frac{x^2 - 4x + 4}{\cancel{2}} \cdot \overset{5}{\cancel{10}} + 0 + \cdots$$

$$\Rightarrow 5x^2 + 7x + 3 = 37 + 27(x-2) + 5(x-2)^2 + \cdots$$ Ans.

Ex-11

(iii) ধরি, $f(x) = 2x^3 + 7x^2 - x - 1$

$\Rightarrow \frac{d}{dx} f(x) = 2 \cdot 3x^{3-1} + 7 \cdot 2x - 1 - 0$

$\Rightarrow f'(x) = 6x^2 + 14x - 1$

$\therefore \frac{d}{dx} f'(x) = \frac{d}{dx}(6x^2 + 14x - 1)$

$\Rightarrow f''(x) = 6 \cdot 2x + 14 - 0$

$\Rightarrow f''(x) = 12x + 14$

$\therefore \frac{d}{dx} f''(x) = \frac{d}{dx}(12x + 14)$

$\Rightarrow f'''(x) = 12 + 0$

$\Rightarrow f'''(x) = 12$

$\therefore \frac{d}{dx} f'''(x) = \frac{d}{dx}(12)$

$\Rightarrow f^{iv}(x) = 0$

$\therefore f^{iv}(x) = f^{v}(x) = f^{vi}(x) = \cdots = 0$

দেওয়া আছে, $(x-2)$ বারবার বিস্তৃতি

$x = 2$ বিন্দুতে

$f'(2) = 6 \cdot 2^2 + 14 \cdot 2 - 1$

$= 6 \cdot 4 + 28 - 1$

$= 24 + 28 - 1$

$= 51$

$f(2) = 2x^3 + 7x^2 - x - 1$

$= 2 \cdot 2^3 + 7 \cdot 2^2 - 2 - 1$

$= 16 + 28 - 3$

$= 44 - 3$

$= 41$

$f'''(2) = 12$

$f''(2) = 12\cdot 2 + 14$

$= 24 + 14$

$= 38$

টেলরের ডিফারেন্স হতে আমি $(x-2)$ আকারে $f(x)$ এর বিস্তার

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!}f'''(x_0) + \frac{(x-x_0)^4}{4!}f^{iv}(x_0) + \cdots$$

$$\Rightarrow 2x^3+7x^2-x-1 = 41 + (x-2)51 + \frac{(x-2)^2}{2}\cdot 38 + \frac{(x-2)^3}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 12 + \frac{(x-2)^4}{4}\cdot 0 + \cdots$$

$$\Rightarrow 2x^3+7x^2-x-1 = 41 + 51(x-2) + 19(x-2)^2 + 2(x-2)^3 + \cdots$$

A.

Ex-16

যদি, $f(x) = \sin x$

এখানে, $a = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুর প্রতিবেশে টেলর ধারা হবে

$$f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + \left(x-\frac{\pi}{2}\right)f'\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2!}f''\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cdots + \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^n}{n!}f^n\left(\frac{\pi}{2}+\theta\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right) \quad \text{--- (1)}$$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

$f(x) = \sin x$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\sin x$

$* f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(a) + \frac{h^n}{n!} f^n(a+\theta h)$

$* f^n(x) = \frac{d^n}{dx^n} \sin x = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)$

$\Rightarrow f'(x) = \cos x$

$\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$\therefore f'(x) = \cos x$

$\Rightarrow \frac{d}{dx} f'(x) = \frac{d}{dx} \cos x$

$\Rightarrow f''(x) = -\sin x$

$\Rightarrow f''(x) = -\sin\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow f''(x) = -1$

$\therefore f^{n-1}(x) = \sin\left\{\frac{(n-1)\pi}{2} + x\right\}$

$f^{n-1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left\{\frac{(n\pi - \pi)}{2} + \frac{\pi}{2}\right\}$

$= \sin\left(\frac{n\pi}{2} - \cancel{\frac{\pi}{2}} + \cancel{\frac{\pi}{2}}\right)$

$= \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

$\therefore f^n(a+\theta h) = f^n\left\{\frac{\pi}{2} + \theta\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right\}$

$= \sin\left\{\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \theta\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right\}$

$= \sin\left\{\frac{\pi}{2} + \frac{n\pi}{2} + \theta\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right\}$

$= \cos\left\{\frac{n\pi}{2} + \theta\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right\}$

(F) নং হতে পাই

$$f(x) = 1 + 0 + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{2!}(-1) + \cdots + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \sin\frac{n\pi}{2} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^n}{n!} \cos\left\{\frac{n\pi}{2} + \theta\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

$$= 1 - \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{2!} + \cdots + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \sin\frac{n\pi}{2} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^n}{n!} \cos\left\{\frac{n\pi}{2} + \theta\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right\}$$ Ans.

CamScanner

Ex – 18

ধরি, $f(x) = \cos x$

এখানে, $a = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুর প্রতিবেশে টেলর ধারা হবে

$$f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + \left(x-\frac{\pi}{2}\right)f'\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2!}f''\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3}{3!}f'''\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$+ \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4}{4!}f^{IV}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^5}{5!}f^{V}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cdots \quad \text{—— (1)}$$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

$\therefore f(x) = \cos x$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\cos x$

$\Rightarrow f'(x) = -\sin x$

$\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$

$\therefore \frac{d}{dx}f'(x) = \frac{d}{dx}(-\sin x)$

$\Rightarrow f''(x) = -\cos x$

$\Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$\therefore \frac{d}{dx}f''(x) = \frac{d}{dx}(-\cos x)$

$\Rightarrow f'''(x) = +\sin x$

$\Rightarrow f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$\therefore \frac{d}{dx}f'''(x) = \frac{d}{dx}\sin x$

$\Rightarrow f^{IV}(x) = \cos x$

$\Rightarrow f^{IV}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow f^{IV}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$\therefore \frac{d}{dx}f^{IV}(x) = \frac{d}{dx}\cos x$

$\Rightarrow f^{V}(x) = -\sin x$

$\Rightarrow f^{V}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow f^{V}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$

(1) নং হতে পাই

$$f(x) = 0 + \left(x-\frac{\pi}{2}\right)(-1) + \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2!}\cdot 0 + \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3}{3!}\cdot 1 + \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4}{4!}\cdot 0$$

$$+ \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^5}{5!}(-1) + \cdots$$

$$= -\left(x-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3}{3!} - \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^5}{5!} + \cdots \quad \text{Ans.}$$

Ex – 21

ক. আছে,

$$0 < c < x$$

ধরি, $f(x) = \ln(1+x)$

এখানে, $a=0$ এর প্রতিবেশে টেলর ধারা

$$f(x) = f(0) + (x-0)f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \frac{x^4}{4!}f^{iv}(0) + \frac{x^5}{5!}f^{v}(0) \quad \text{—— (1)}$$

$\therefore f(0) = \ln(1+0) = \ln 1$

$\Rightarrow f(0) = 0$

$$\therefore f'(x) = \frac{d}{dx}\ln(1+x)$$

$$= \frac{1}{1+x}\cdot 1$$

$$f'(0) = \frac{1}{1+0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{d}{dx}(1+x)^{-1}$$

$$= -1(1+x)^{-1-1}$$

$$= -(1+x)^{-2}$$

$$= -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f''(0) = -\frac{1}{(1+0)^2} = -\frac{1}{1^2} = -\frac{1}{1} = -1$$

$$\therefore f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$\Rightarrow f'''(x) = \frac{d}{dx} - (1+x)^{-2}$$

$$= -(-2)\cdot(1+x)^{-2-1}$$

$$= 2(1+x)^{-3}$$

$$= \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$f'''(0) = \frac{2}{(1+0)^3} = \frac{2}{1^3} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\therefore f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$\Rightarrow f^{IV}(x) = 2\frac{d}{dx}(1+x)^{-3}$$

$$= 2\cdot(-3)\cdot(1+x)^{-3-1}$$

$$= -6(1+x)^{-4}$$

$$= -\frac{6}{(1+x)^4}$$

$$f^{IV}(0) = -\frac{6}{(1+0)^4} = -\frac{6}{1^4} = -\frac{6}{1} = -6$$

$$\therefore f^{IV}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}$$

$$\Rightarrow f^{V}(x) = \frac{d}{dx} - 6(1+x)^{-4}$$

$$= -6\cdot(-4)\cdot(1+x)^{-4-1}$$

$$= 24(1+x)^{-5}$$

$$= \frac{24}{(1+x)^5}$$

$$\therefore f^{v}(c) = \frac{24}{(1+c)^5}$$

(1) নং হতে পাই

$$f(x) = 0 + x\cdot 1 + \frac{x^2}{2!}(-1) + \frac{x^3}{3!}\cdot 2 + \frac{x^4}{4!}(-6) + \frac{x^5}{5!}\,\frac{24}{(1+c)^5}$$

$$\Rightarrow \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2\cdot 1} + \frac{x^3}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 2 - \frac{x^4}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot 6 + \frac{x^5}{5!}\,\frac{24}{(1+c)^5}$$

$$\Rightarrow \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5!}\,\frac{24}{(1+c)^5}$$ Ans.

Ex-24: $x^2+2y^2=3$ বক্ররেখার $(1,-1)$ বিন্দুতে স্পর্শক এবং অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। (Find the equations of tangent and normal of the curve $x^2+2y^2=3$ at $(1,-1)$)

সমাধান: দে. আছে,

$$x^2+2y^2=3$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(x^2+2y^2) = \frac{d}{dx}3$$

$$\Rightarrow 2x + 2\cdot 2y\cdot\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow 2x + 4y\cdot\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow 2\left(x + 2y\cdot\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$\Rightarrow x + 2y\cdot\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} = -x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,-1)} = -\frac{1}{2\cdot(-1)} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$$

রেখাটির স্পর্শকের সমীকরণ

$$(y-y_1) = m(x-x_1)$$

$$\Rightarrow (y+1) = \frac{1}{2}(x-1)$$

$$\Rightarrow 2y+2 = x-1$$

$$\Rightarrow x-1-2y-2 = 0$$

$$\Rightarrow x-2y-3 = 0$$

অভিলম্বের সমীকরণ

$$(y-y_1) = -\frac{1}{m}(x-x_1)$$

$$\Rightarrow (y+1) = -\frac{1}{1/2}(x-1)$$

$$\Rightarrow y+1 = -2(x-1)$$

$$\Rightarrow (y+1) = -2x+2$$

$$\Rightarrow y+1+2x-2 = 0$$

$$\Rightarrow 2x+y-1 = 0$$

অধ্যায় – ৭

ফাংশন হ্রাস বা বৃদ্ধি নির্ণয় করার নিয়ম ⟶

(i) $f'(x)$ নির্ণয়

(ii) সন্ধি বিন্দু নির্ণয় $f'(x) = 0$

(iii) ব্যবধি নির্ণয়

(iv) বৃদ্ধি বা হ্রাস

Ex-7: দে. আছে,

$$f(x) = 5 + 12x - x^3$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}(5 + 12x - x^3)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 + 12 - 3x^2 = 12 - 3x^2$$

কর্তমতে,

$$f'(x) = 0$$

$$\Rightarrow 12 - 3x^2 = 0$$

$$\Rightarrow 3(4 - x^2) = 0$$

$$\Rightarrow 4 - x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = 4$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{4}$$

$$\Rightarrow x = \pm 2$$

$$\therefore x = +2, -2$$

$\therefore x = -2, 2$ এর জন্য ব্যবধি $-\infty < x < -2$, $-2 < x < 2$, $2 < x < \infty$

এখন,

$-\infty < x < -2$ এর জন্য $f'(x) < 0$

$\therefore -\infty < x < -2$ ব্যবধিতে $f(x)$ হ্রাস পাবে

$-2 < x < 2$ এর জন্য $f'(x) > 0$

$\therefore -2 < x < 2$ ব্যবধিতে $f(x)$ বৃদ্ধি পাবে

$2 < x < \infty$ এর জন্য $f'(x) < 0$

$\therefore 2 < x < \infty$ ব্যবধিতে $f(x)$ হ্রাস পাবে।

Ex-11

ক. আছে,

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 6x^2 + 9x + 5)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6 \cdot 2x + 9 + 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

শর্তমতে,

$$f'(x) = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$\Rightarrow 3(x^2 - 4x + 3) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x - x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow x(x-3) - 1(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = 1, 3.$$

$\therefore$ $x = 1, 3$ এর জন্য ব্যবধি $-\infty < x < 1$, $1 < x < 3$, $3 < x < \infty$

এখন, $-\infty < x < 1$ এর জন্য $f'(x) > 0$

$\therefore$ $-\infty < x < 1$ ব্যবধিতে $f(x)$ বৃদ্ধি পাবে.

$1 < x < 3$ এর জন্য $f'(x) < 0$

$\therefore$ $1 < x < 3$ ব্যবধিতে $f(x)$ হ্রাস পাবে

$3 < x < \infty$ এর জন্য $f'(x) > 0$

$\therefore$ $3 < x < \infty$ ব্যবধিতে $f(x)$ বৃদ্ধি পাবে.

আবার,

$x = 1$ এর জন্য

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$

$f(1) = 1^3 - 6.1^2 + 9.1 + 5$

$= 1 - 6 + 9 + 5$

$= 9$

$x = 3$ এর জন্য

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$

$f(3) = 3^3 - 6.3^2 + 9.3 + 5$

$= 27 - 54 + 27 + 5$

$= 5$

গরিষ্ঠমান 9, লঘিষ্ঠমান 5।

Ex - 27

দেওয়া আছে,

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}(x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 5x^4 - 5.4x^3 + 5.3x^2 - 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2$$

কার্যমতে,

$f'(x) = 0$

$\Rightarrow 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 0$

$\Rightarrow 5(x^4 - 4x^3 + 3x^2) = 0$

$\Rightarrow x^2(x^2 - 4x + 3) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 3x - x + 3 = 0$

$\Rightarrow x(x-3) - 1(x-3) = 0$

$\Rightarrow (x-3)(x-1) = 0$

$\therefore x = 3, 1$

$x = 1, 3$ এর জন্য ব্যবধি

$-\infty < x < 1, \quad 1 < x < 3, \quad 3 < x < \infty$

$-\infty < x < 1$ এর জন্য $f'(x) > 0$

$\therefore -\infty < x < 1$ ব্যবধিতে $f(x)$ বৃদ্ধি পাবে

$1 < x < 3$ এর জন্য $f'(x) < 0$

$\therefore 1 < x < 3$ ব্যবধিতে $f(x)$ হ্রাস পাবে

$3 < x < \infty$ এর জন্য $f'(x) > 0$

$\therefore 3 < x < \infty$ ব্যবধিতে $f(x)$ বৃদ্ধি পাবে

আবার, $x = 1$ এর জন্য

$f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$

$f(1) = 1^5 - 5 \cdot 1^4 + 5 \cdot 1^3 - 1$

$= 1 - 5 + 5 - 1$

$= 0$

$x = 3$ এর জন্য

$f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$

$f(3) = 3^5 - 5 \cdot 3^4 + 5 \cdot 3^3 - 1$

$= 243 - 405 + 135 - 1$

$= -28$

∴ গরিষ্ঠমান 0, লঘিষ্ঠমান −28 ।Ans.

Ex−28

দে.আছে,

$$f(x) = \frac{4}{x} + \frac{16}{2-x}$$

$$\Rightarrow f(x) = 4x^{-1} + 16(2-x)^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}\left\{4x^{-1} + 16(2-x)^{-1}\right\}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 4(-1)x^{-1-1} + 16(-1)(2-x)^{-1-1} \cdot -1$$

$$\Rightarrow f'(x) = -4x^{-2} + 16(2-x)^{-2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{4}{x^2} + \frac{16}{(2-x)^2}$$

শর্তমতে, $f'(x) = 0$

$$\Rightarrow -\frac{4}{x^2} + \frac{16}{(2-x)^2} = 0$$

$$\Rightarrow -4\left(\frac{1}{x^2} - \frac{4}{(2-x)^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} - \frac{4}{(2-x)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(2-x)^2 - 4x^2}{x^2(2-x)^2} = 0$$

$$\Rightarrow 4 - 4x + x^2 - 4x^2 = 0$$

$$\Rightarrow 4 - 4x - 3x^2 = 0$$

$$\Rightarrow -(3x^2 + 4x - 4) = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 4x - 4 = 0$$

$x = -2, \frac{2}{3}$ এর জন্য ব্যবধি

$$-\infty < x < -2$$
$$-2 < x < \frac{2}{3}$$
$$\frac{2}{3} < x < \infty$$

$-\infty < x < -2$ এর জন্য $f'(x) < 0$

$\therefore -\infty < x < -2$ ব্যবধিতে $f(x)$ হ্রাস পাবে

$-2 < x < \frac{2}{3}$ এর জন্য $f'(x) > 0$

$\therefore -2 < x < \frac{2}{3}$ ব্যবধিতে $f(x)$ বৃদ্ধি পাবে

$\frac{2}{3} < x < \infty$ এর জন্য $f'(x) < 0$

$\therefore \frac{2}{3} < x < \infty$ ব্যবধিতে $f(x)$ হ্রাস পাবে

CamScanner

$\Rightarrow 3x^2 + 6x - 2x - 4 = 0$

$\Rightarrow 3x(x+2) - 2(x+2) = 0$

$\Rightarrow (x+2)(3x-2) = 0$

$\therefore x = -2, \frac{2}{3}$

$x = -2$ এর জন্য

$f(x) = \frac{4}{x} + \frac{16}{2-x}$

$f(-2) = \frac{4}{-2} + \frac{16}{2-(-2)}$

$= -2 + \frac{16}{4}$

$= -2 + 4$

$= 2$

$x = \frac{2}{3}$ এর জন্য

$f(x) = \frac{4}{x} + \frac{16}{2-x}$

$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{\left(\frac{2}{3}\right)} + \frac{16}{2-\frac{2}{3}}$

$= \frac{4\times 3}{2} + \frac{16}{\frac{6-2}{3}}$

$= \frac{12}{2} + \frac{48}{4}$

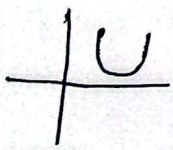
$= 6 + 12$

$= 18$

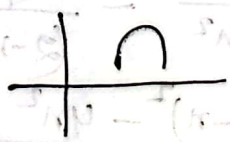
$\therefore$ গরিষ্ঠমান 2, লঘিষ্ঠমান 18 Ans.

নিয়ম:

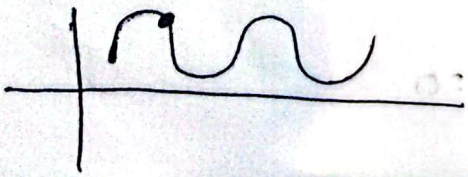
* কনকেভ আপ



* কনকেভ ডাউন



* কনকেভ আপ ও কনকেভ ডাউন এর মধ্যবিন্দুকে ইনফ্লেকশন বিন্দু বলে।



* কনকেভিটি আপ ও ডাউন নির্ণয় করার নিয়ম →

(i) $f'(x)$

(ii) $f''(x)$

(iii) সন্ধি বিন্দু $f''(x) = 0$

(iv) সন্ধি বিন্দু $f''(x)$ তে বসিয়ে শর্ত নির্ণয় করে সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান বের করতে হবে।

Ex-23

দে: আছে,

$$f(x) = 4x^3 - 9x^2 + 6x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}(4x^3 - 9x^2 + 6x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 4 \cdot 3x^2 - 9 \cdot 2x + 6$$

$$\Rightarrow f'(x) = 12x^2 - 18x + 6$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} f'(x) = \frac{d}{dx}(12x^2 - 18x + 6)$$

$$\Rightarrow f''(x) = 12 \cdot 2x - 18 + 0$$

$$\Rightarrow f''(x) = 24x - 18$$

শর্তমতে, $f'(x) = 0$

$$\Rightarrow 12x^2 - 18x + 6 = 0$$

$$\Rightarrow 6(2x^2 - 3x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 2x - x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2x(x-1) - 1(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow (2x-1)(x-1) = 0$$

* $f''(x)$ এর মান 0 থেকে ছোট হলে সর্বোচ্চ মান পাওয়া যাবে।

$\therefore x = 1, \frac{1}{2}$

$x = 1$ এর জন্য

$f''(x) = 24x - 18$

$\Rightarrow f''(1) = 24(1) - 18$

$= 24 - 18$

$= 6 > 0$

$x = 1$ বিন্দুতে, $f(x)$ ফাংশনটির সর্বনিম্ন মান বিদ্যমান

$\therefore f(1) = 4 \cdot 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1$

$= 4 - 9 + 6$

$= 1$

$x = \frac{1}{2}$ এর জন্য

$f''(x) = 24x - 18$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 24 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) - 18$

$= 12 - 18$

$= -6 < 0$

$x = \frac{1}{2}$ বিন্দুতে, $f(x)$ ফাংশনটির সর্বোচ্চ মান বিদ্যমান

$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 9\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{1}{2}\right)$

$= 4 \cdot \left(\frac{1}{8}\right) - 9\left(\frac{1}{4}\right) + 6\left(\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{1}{2} - \frac{9}{4} + 3$

$= \frac{2 - 9 + 12}{4}$

$= \frac{14 - 9}{4}$

$= \frac{5}{4} = 1.25$

অর্থাৎ,

ইনফ্লেকশন বিন্দুর জন্য

$f''(x) = 0$

$\Rightarrow 24x - 18 = 0$

$\Rightarrow 24x = 18$

$\Rightarrow x = \frac{18}{24}$

$\Rightarrow x = \frac{3}{4}$

এখন, $x < \frac{3}{4}$ ব্যবধিতে

$f''(x) = 24x - 18$

$= 24(-1) - 18$

$= -24 - 18$

$= -42 \quad < 0$

$\therefore x < \frac{3}{4}$ এর জন্য কনকেভ জমিন হবে।

$\therefore x > \frac{3}{4}$ ব্যবহিতে

$f''(x) = 24x - 18$

$= 24 \cdot 1 - 18$

$= 24 - 18$

$= 6 \quad > 0$

$x > \frac{3}{4}$ এর জন্য কনভেক্স আপ হবে

$\therefore$ প্রমানিত হলো যে, $x = \frac{3}{4}$ বিন্দুটি ইনফ্লেকশন বিন্দু।

Ex-24 : দে. আছে,

$y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$

$\Rightarrow \frac{d}{dx} y = \frac{d}{dx}(2x^3 - 6x^2 - 18x + 7)$

$\Rightarrow y' = 2 \cdot 3x^2 - 6 \cdot 2x - 18 + 0$

$\Rightarrow y' = 6x^2 - 12x - 18$

$\Rightarrow y'' = \frac{d}{dx}(6x^2 - 12x - 18)$

$\Rightarrow y'' = 6 \cdot 2x - 12 - 0$

$\Rightarrow y'' = 12x - 12$

শর্তমতে,

$y' = 0$

$\Rightarrow 6x^2 - 12x - 18 = 0$

$\Rightarrow 6(x^2 - 2x - 3) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 3x + x - 3 = 0$

$\Rightarrow x(x-3) + 1(x-3) = 0$

$\Rightarrow (x-3)(x+1) = 0$

$\therefore x = -1, 3$

$x = -1$ এর জন্য

$y'' = 12x - 12$

$= 12(-1) - 12$

$= -12 - 12$

$= -24 < 0$

$x = -1$ বিন্দুতে y ফাংশনটির সর্বোচ্চ মান বিদ্যমান

$\therefore f(-1) = 2(-1)^3 - 6(-1)^2 - 18(-1) + 7$

$= -2 - 6 + 18 + 7$

$= 17$

$x = 3$ এর জন্য

$y'' = 12x - 12$

$= 12(3) - 12$

$= 36 - 12$

$= 24 > 0$

$x = 3$ বিন্দুতে y ফাংশনটির সর্বনিম্ন মান বিদ্যমান

$f(3) = 2(3)^3 - 6 \cdot 3^2 - 18 \cdot 3 + 7$

$= 54 - 54 - 54 + 7$

$= -47$

আবার,

নতিপরিবর্তন বিন্দুর জন্য

$y'' = 0$

$\Rightarrow 12x - 12 = 0$

$\Rightarrow 12x = 12$

$\Rightarrow x = 1$

এখন, $x < 1$ ব্যবধিতে

$y'' = 12x - 12$

$= 12(-1) - 12$

$= -12 - 12$

$= -24 < 0$

$\therefore x < 1$ এর জন্য কনকেভিটি উর্ধ্বমুখী হবে

আবার, $x > 1$ ব্যবধিতে

$y'' = 12x - 12$

$= 12 \cdot 2 - 12$

$= 24 - 12$

$= 12 \quad > 0$

$\therefore$ $x > 1$ এর জন্য y ফাংশনটি কনকেভ আপ হবে।

$\therefore$ প্রমাণিত হলো যে, $x = 1$ বিন্দুটি ইনফ্লেকশন বিন্দু।