Physics Department

Md. Emon

Roll. 270091

session: 2020-2021

Subject: (PHA-205) Waves, Oscillation & advanced mechanics (KN)

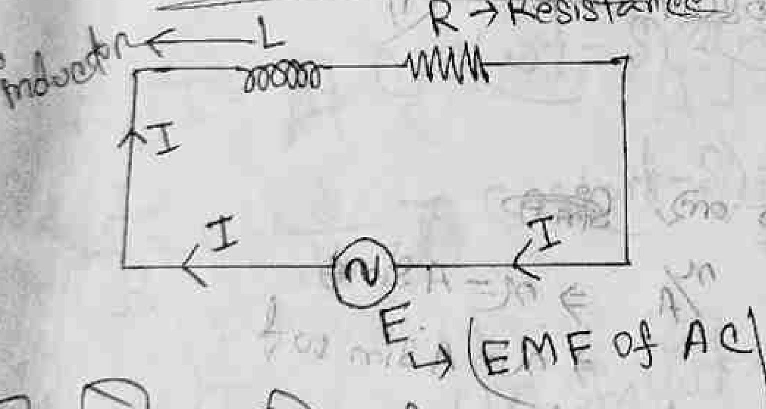
From Syllabus

2. Time Varying Fields [I]

2(b) Alternating Current, Impedance

Question || একটি L-R বর্তনীকে প্রত্যাবর্তী ভোল্টেজ উৎসের সাথে সংযুক্ত করা হলো, তাহলে বর্তনীর মোট তড়িৎ প্রবাহ কত হবে? (বর্তনীর প্রতিরোধ বা impendence এবং আবেশ কুণ্ডলীর প্রতিক্রিয়া বা reactance কত হবে?)

Solution



উপরিউক্ত বর্তনীর মধ্যে দেখা যায়,
(L) আবেশিতা বিশুদ্ধ আবেশক এবং
(R) রোধ বিশুদ্ধ রোধের সমবায়।

Note

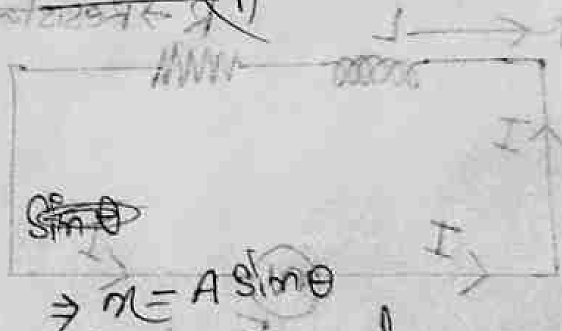
⊣⊢ → capacitor
⊣|⊢ → battery
(=) → DC current
(~) → AC current
‑ooooo‑ → Inductor (আবেশক)
‑ww‑ Resistance
* $E = E_0 \cos \omega t$
$V = IR$

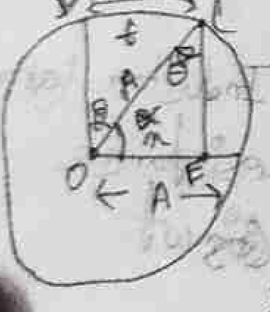
(E) দিক পরিবর্তিত তড়িৎ চালক বল যুক্ত আছে। কোনো মুহূর্তে ঐ বর্তনীর তড়িৎ প্রবাহ (I) এবং ঐ মুহূর্তে রোধের বিভবপার্থক্য $V_R = IR$ এবং ফ্যারাডের সূত্র মতে, আবেশের আবেশিকতা, $V_L = -L\frac{dI}{dt}$ হবে এবং দিক পরিবর্তি প্রবাহের জন্য বর্তনীর মোট বিভবশক্তি $E = E_0 \cos \omega t$ হলে,

বর্তনীতে KVL হতে পাই,

$$V_L + V_R = E$$

$$\Rightarrow L\frac{dI}{dt} + IR = E_0 \cos \omega t \quad \text{(i)}$$





$\therefore \Delta COE$ হতে পাই,

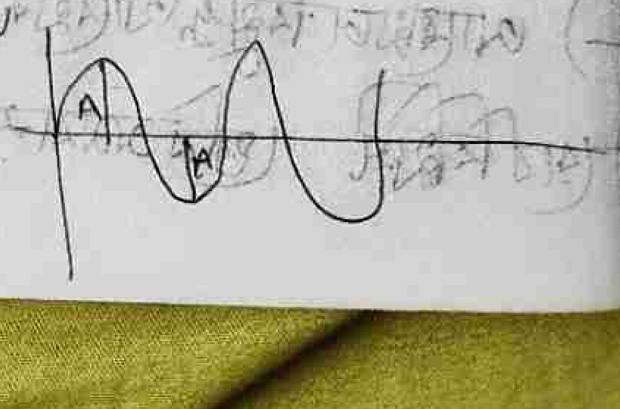
$\sin\theta = \frac{x}{A} \Rightarrow x = A \sin\theta$

$\Rightarrow x = A \sin \omega t$

$\therefore x = A \sin(\omega t + \delta)$

বৃত্তচাপ, সময়, দশা

দশা পার্থক্য, $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \times x$ → পথ পার্থক্য



∴ x অক্ষের বিপরীত দিকে যদি অবস্থান হয় তাহলে সমীকরণ,

$y = A\sin(\omega t - \delta)$

বর্তনীতে আমরা সব সময়, sin না ধরে cos ধরবো সুবিধার জন্য,

যেমন AC বর্তনীর ~~ভোল্টেজ~~ ভোল্টেজ, $E = E_0 \cos\omega t$

$I = A\cos(\omega t - \delta)$ — (ii) যেহেতু বিদ্যুৎ প্রবাহিত হয়

∴ এখন L-R বর্তনীতে KVL করলাম,

$E = V_L + V_R \Rightarrow \boxed{E_0 \cos\omega t = L\frac{dI}{dt} + IR}$ — (i)

$I = A\cos(\omega t - \delta)$ হলে,

$\therefore I = A\cos(\omega t - \delta) = A(-\sin\omega t)\omega$

$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} A\cos(\omega t - \delta)$

$\therefore \frac{dI}{dt} = -\omega A\sin(\omega t - \delta)$

$\therefore \frac{dI}{dt}$ এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$\Rightarrow E_0 \cos \omega t = -L(A_0 \omega \sin(\omega t - \delta)) + IR$$

$$\Rightarrow A_0 \cos(\omega t - \delta) . R - L A_0 \omega \sin(\omega t - \delta) = E_0 \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow A_0 R \{\cos(\omega t)\cos(\delta) + \sin(\omega t)\sin(\delta)\} -$$
$$L A_0 \omega \{\sin(\omega t)\cos\delta - \cos(\omega t)\sin(\delta)\} = E_0 \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow A_0 R \cos(\omega t)\cos(\delta) + L A_0 \omega \cos(\omega t)\sin(\delta) + A_0 R \sin(\omega t)\sin(\delta)$$
$$- L A_0 \omega \sin(\omega t)\cos(\delta) = E_0 \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \cos(\omega t)\{A_0 R \cos(\delta) + L A_0 \omega \sin(\delta)\} +$$
$$\sin(\omega t)\{A_0 R \sin(\delta) - L A_0 \omega \cos(\delta)\} =$$
$$E_0 \cos(\omega t) + 0 \times \sin(\omega t) \quad \text{——— (iii)}$$

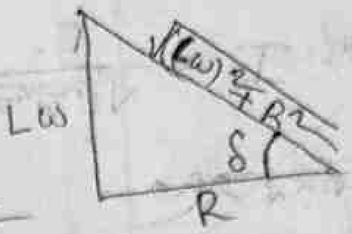
(iii) নং সমীকরণ হতে $\sin(\omega t)$ এর সহগসমূহকে সমীকৃত করে পাই

$$\cancel{0 \times \sin(\omega t)} + A_0 R \sin(\delta) - L A_0 \omega \cos(\delta) = 0$$

$$\Rightarrow A_0 R \sin(\delta) = L A_0 \omega \cos(\delta) \Rightarrow \tan\delta = \frac{L A_0 \omega}{A_0 R}$$

$$\Rightarrow \tan\delta = \frac{L\omega}{R} \quad \text{——— (iv)}$$

(iv) নং সমীকরণ মতে,



$$\tan(\delta) = \frac{L\omega}{R} \quad \therefore \sin(\delta) = \frac{L\omega}{\sqrt{L^2\omega^2+R^2}}$$

$$\therefore \cos(\delta) = \frac{R}{\sqrt{L^2\omega^2+R^2}}$$

আবার, (iii) নং সমীকরণ হতে $\cos(\omega t)$ এর সহগ সমীকৃত করে $\sin\delta$, $\cos\delta$ এর মান বসিয়ে পাই,

$$A R\cos(\delta) + L A\omega\sin(\delta) = E_0$$

$$\Rightarrow A = \frac{E_0}{R\cos(\delta) + L\omega\sin(\delta)} = \frac{E_0}{R\times\frac{R}{\sqrt{L^2\omega^2+R^2}} + \frac{L\omega.L\omega}{\sqrt{L^2\omega^2+R^2}}}$$

$$\Rightarrow A = \frac{E_0 \times \sqrt{L^2\omega^2+R^2}}{R^2+L^2\omega^2} = \frac{E_0}{\sqrt{L^2\omega^2+R^2}}$$

$$\therefore A = \frac{E_0}{\sqrt{L^2\omega^2+R^2}}$$

A এর মান (ii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$I = \frac{E_0}{\sqrt{L^2\omega^2+R^2}}.\cos(\omega t-\delta) \text{ —— (iv A)}$$

$$\cancel{\Rightarrow I = I_0\cos(\omega t-\delta) \text{ —— (v)}}$$

$$\Rightarrow I = \frac{E_0 \cos(\omega t - \delta)}{\sqrt{L^2\omega^2 + R^2}}$$

$$\Rightarrow I = \frac{E}{\sqrt{L^2\omega^2 + R^2}} \quad \text{—(V)}$$

$$\Rightarrow I = \frac{E}{Z}$$

ওখানে,
$I = A\cos(\omega t - \delta)$
$A = \dfrac{E_0}{\sqrt{L^2\omega^2 + R^2}}$
$E = E_0 \cos(\omega t - \delta)$

ওখানে, impedance, $Z = \sqrt{L^2\omega^2 + R^2}$

Impedance | প্রতিরোধ | (V) নং সমীকরণকে, $I = V/R$ এর সাথে তুলনা করলে পাই, প্রযুক্ত L-R বর্তনীর মোট রোধ হলো, $Z = \sqrt{L^2\omega^2 + R^2}$ (impedance)

$$= \sqrt{(L 2\pi f)^2 + R^2}$$

R-L circuit resistance

Reactance | inductor এর রোধ | তড়িৎ যখন inductor দিয়ে প্রবাহিত হবে তখন, inductor একটি বিপরীত মুখী বল প্রদান করবে, যেটা বাধা বা রোধ বা inductor এর রোধ কে Reactance বলে।

যখন, R = শূন্য হবে, তখন, $Z = X_L = \sqrt{L^2\omega^2 + 0^2}$

$$\Rightarrow X_L = L\omega = 2\pi f L$$

∴ Impedance, $Z = \sqrt{L^2\omega^2 + R^2}$

∴ Reactance, $X_L = L\omega = 2\pi f L$

বাংলাদেশে Line Voltae এর frequency = 50 Hz

⊛ Impedance হলো R-L circuit এর মোট রোধ

⊛ Reactance হলো R-L circuit এর inductor এর রোধ [inductor resistance]

বিদ্র:
(V A) equation হতে পাই,

$I = \frac{E_0 \cos(\omega t - \delta)}{\sqrt{L^2\omega^2 + R^2}}$ কে $I = I_0 \cos(\omega t - \delta)$ এর সাথে তুলনা করে

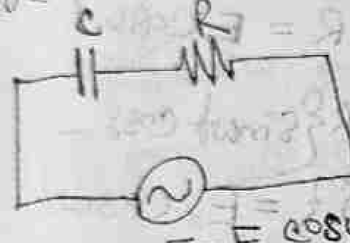
∴ $I_0 = \frac{E_0}{\sqrt{L^2\omega^2 + R^2}}$ ∴ I_0 হলো ~~প্রত্যাবর্তী~~ হতে সর্বোচ্চ কারেন্ট এর জন্য রোধ, $I_0 = \frac{E_0}{Z}$

∴ impedance, $Z_L = \sqrt{L^2\omega^2 + R^2} = \sqrt{(L 2\pi f)^2 + R^2}$

∴ Reactance, $X_L = \omega L = 2\pi f L$

Question 2।

একটি R-C বর্তনীকে পর্যাবৃত্ত ভোল্টেজ উৎসের সাথে সংযুক্ত করা হলো, তাহলে বর্তনীর মোট তড়িৎ ~~প্রবাহের~~ প্রবাহ কত হবে? (বর্তনীর প্রতিরোধ বা impedance এবং ধারকের ধারকীয় প্রতিক্রিয়া বা Reactance কত হবে?)



$E = E_0 \cos \omega t$

C → Capacitor

R → Resistance

উপরের ~~বর্তনীতে~~ KVL করলে আমরা যা পাবো।

Capacitor Volt + Resistance Volt = Cell EMF

$$\Rightarrow V_C + V_R = E$$

$$\Rightarrow \frac{q}{C} + IR = E_0 \cos \omega t$$

$$\Rightarrow \frac{q}{C} + \frac{dq}{dt} \cdot R = E_0 \cos \omega t \quad \text{--- (1)}$$

এখানে, Capacitor এর জন্য,

$$C = \frac{q}{V_C}$$

↓ Capacitance

$$I = \frac{dq}{dt}$$

∴ আমরা লিখতে পারি, একটি আবারের জন্য

$$q = A \cos(\omega t - \delta)$$

$$\therefore \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} A\cos(\omega t - \delta)$$
$$= -\omega A \sin(\omega t - \delta)$$

$\therefore \frac{dq}{dt}$ এর মান এবং q এর মান (1) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই

$$\frac{A\cos(\omega t-\delta)}{C} - \omega A \sin(\omega t - \delta) \cdot R = E_0 \cos\omega t$$

$$\Rightarrow \frac{A}{C}\{\cos\omega t \cos\delta + \sin\omega t \sin\delta\} - \omega A R\{\sin\omega t \cos\delta - \cos\omega t \sin\delta\} = E_0 \cos\omega t$$

$$\Rightarrow \frac{A}{C}\cos\omega t \cos\delta + \frac{A}{C}\sin\omega t \sin\delta - \omega A R \sin\omega t \cos\delta + \omega A R \cos\omega t \sin\delta = E_0 \cos\omega t$$

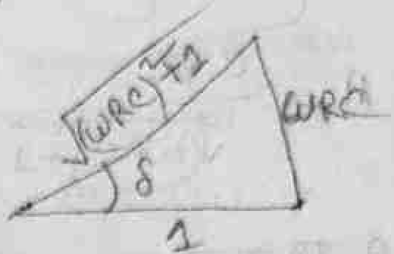
$$\Rightarrow \sin\omega t\left\{\frac{A}{C}\sin\delta - \omega A R\cos\delta\right\} + \cos\omega t\left\{\frac{A}{C}\cos\delta + \omega A R \sin\delta\right\} = E_0 \cos\omega t \quad \text{—(2)}$$

(২) নং সমীকরণ হতে $\sin\omega t$ এর দুই সহগুণ সমতুল্য করতে পারি

$$\Rightarrow \frac{A}{C}\sin\delta - \omega A R \cos\delta = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \frac{\omega A R}{A/C} = \omega R C$$

$$\Rightarrow \tan\delta = \omega R C \quad ,$$



$$\therefore \sin\delta = \frac{\omega R C}{\sqrt{(\omega RC)^2+1}} \ , \quad \cos\delta = \frac{1}{\sqrt{(\omega RC)^2+1}}$$

∴ (2) নং সমীকরণ হতে $\cos\omega t$ এর সহগ ~~সমী~~ সমীকৃত করে পাই এবং $\sin\delta, \cos\delta$ এর মান বসিয়ে পাই,

$$\frac{A}{C}\cos\delta + \omega A R \sin\delta = E_0$$

$$\Rightarrow \frac{A}{C}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\omega RC)^2+1}} + \frac{\omega A R \cdot \omega R C}{\sqrt{(\omega RC)^2+1}} = E_0$$

$$\Rightarrow A\left\{\frac{1}{C\sqrt{(\omega RC)^2+1}} + \frac{\omega^2 R^2 C}{\sqrt{(\omega RC)^2+1}}\right\} = E_0$$

$$\Rightarrow A\left\{\frac{\cancel{C\sqrt{\omega RC}}\ 1+\omega^2R^2C^2}{C\sqrt{(\omega RC)^2+1}}\right\} = E_0$$

$$\Rightarrow A\left\{\frac{(\omega RC)^2+1}{C\sqrt{(\omega RC)^2+1}}\right\} = E_0$$

$$\Rightarrow A\left\{\frac{\sqrt{(\omega RC)^2+1}}{C}\right\} = E_0$$

$$\Rightarrow A = \frac{CE_0}{\sqrt{(\omega RC)^2+1}}$$

∴ A এর মান $q = \cancel{A\sin}\ A\cos(\omega t-\delta)$ সমীকরণে

$$\therefore q = \frac{CE_0}{\sqrt{(\omega RC)^2+1}}\cos(\omega t-\delta)$$

$$\therefore I = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\cdot\left\{\frac{E_0 C}{\sqrt{(\omega RC)^2+1}}\cdot\cos(\omega t-\delta)\right\}$$

$$\Rightarrow I = \frac{-\omega E_0 C\cdot\sin(\omega t-\delta)}{\sqrt{(\omega RC)^2+1}}$$

$$= \frac{-\omega C E_0\sin(\omega t-\delta)}{\sqrt{\omega^2C^2\left(\frac{1}{\omega^2C^2}+R^2\right)}}$$

$$= \frac{-\omega C E_0\sin(\omega t-\delta)}{\omega C\sqrt{\left(\frac{1}{\omega^2C^2}+R^2\right)}}$$

$$= \frac{-E_0\sin(\omega t-\delta)}{\cancel{\omega C}\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

∴ R-C circuit এর জন্য তড়িৎপ্রবাহ,

$$I = \frac{E_0 \sin(\omega t - \delta)}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

[তড়িৎ প্রবাহের মান ঋণাত্মক হতে পারে না, তাই (−) চিহ্ন বাদ]

$$\Rightarrow I = \frac{E_0 \sin(\omega t - \delta)}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

এর সাথে $I = V/R$ তুলনা করলে R-C circuit এর মোট রোধ / impedance,

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

এবং R-C circuit এর capacitor এর রোধ / Reactance,

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}$$

∴ এখানে দেখা যাচ্ছে যে,

R-L circuit,	R-C circuit
impedance, $Z_L = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$	impedance, $Z_C = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$
Reactance, $X_L = \omega L = 2\pi f L$	Reactance, $X_C = 1/\omega C = \frac{1}{2\pi f C}$

equation 3 হতে পাই,

$$I = \frac{E_0 \sin(\omega t - \delta)}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$ কে $I = I_0 \sin(\omega t - \delta)$ এর সাথে

তুলনা করলে, $I_0 = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$ লেখা যায়

অতএব, $I_0 = \frac{E_0}{Z_C}$ লেখা যায়,

তাহলে impedance of R-C circuit is

$$Z_C = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$= \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{2\pi f C}\right)^2}$$

আবার,

Reactance of R-C circuit ~~of resistor~~

or resistance of capacitor is,

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}$$

সরল ছন্দিত স্পন্দন গতির ব্যবকলন সমীকরণ নির্ণয়।

আমরা জানি,

পর্যাবৃত্ত গতির শর্ত হলো। (ত্বরণ সরনের বিপরীত মুখি সমানুপাতিক)

$$a \propto -x \Rightarrow a = -k'x$$

আবার,

নিউটনের গতির ২য় সূত্রানুসারে। $F = ma$

$$\Rightarrow F \propto a$$

$$\Rightarrow F \propto a \Rightarrow F \propto -k'x \Rightarrow F = -k''k'x$$

$$\Rightarrow F = -kx \Rightarrow \boxed{ma = -kx} \text{ (i)} \Rightarrow a = -\frac{k}{m}x$$

$$\Rightarrow a = -\frac{k}{m}x \qquad \left[\omega = \sqrt{k/m} \Rightarrow \omega^2 = k/m\right.$$

$$\Rightarrow a = -\omega^2 x$$

$\Rightarrow$ আমরা জানি, বেগ = সরন/সময়, ত্বরণ = বেগ/সময়

$$v = \frac{dx}{dt} \qquad a = \frac{d}{dt}v = \frac{d}{dt}\cdot\frac{d}{dt}x$$

$$\Rightarrow a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

∴ (i) নং সমীকরণে a এর মান বসিয়ে পাই,

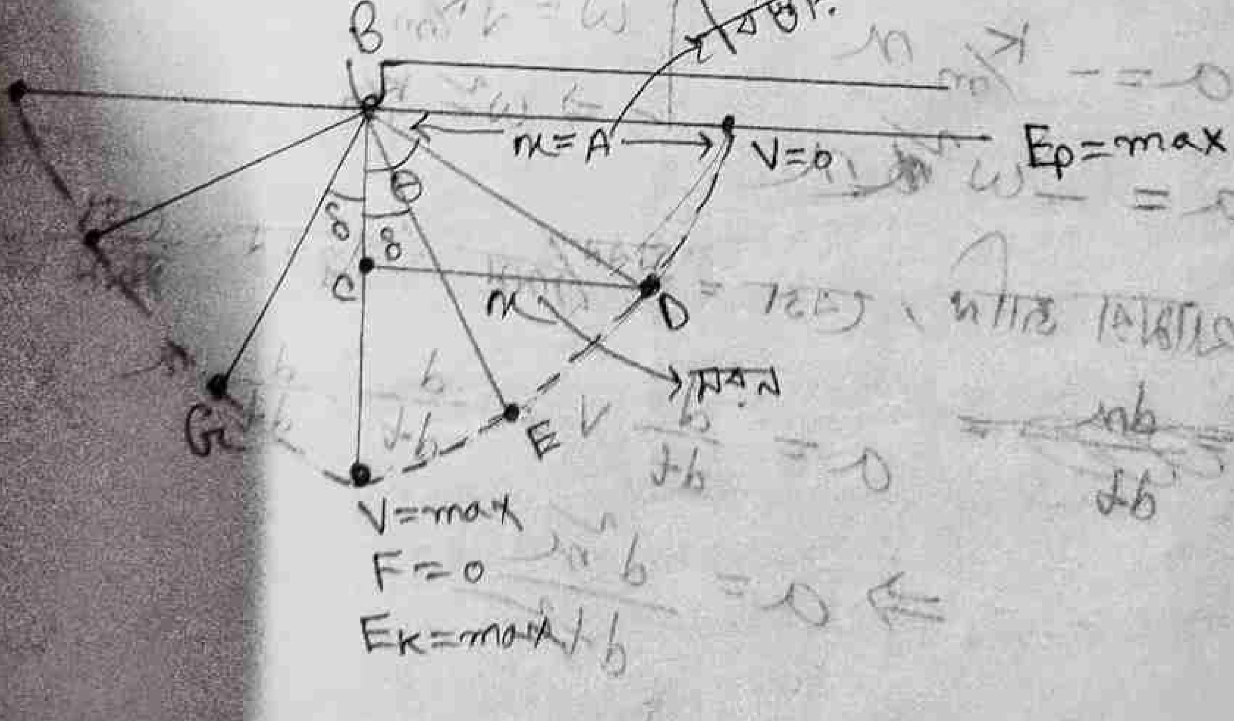
$$m\cdot\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}m + kx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \qquad \left[\omega^2 = k/m\right]$$

$$\therefore \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$$ → সরল ছন্দিত স্পন্দন গতির ব্যবকলন সমীকরণ



চিত্রে, $\triangle BCD$ হতে পাই,

$\sin\theta = \frac{CD}{BD} = x/A$

$\Rightarrow x = A\sin\theta \quad [\omega = \theta/t, \ \theta = \omega t]$

$\Rightarrow x = A\sin\omega t$

δ = আদি দশা হলে, $x = A\sin(\omega t \pm \delta)$

important ☆ ☆ ☆

☆ সরল ছন্দিত গতির ব্যবকলনী সমীকরণ প্রতিপাদন।

$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ → সমীকরণটি SHM এর ব্যবকলনীয় সমীকরণ (Simple Harmonic Motion)

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\cdot\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0, \Rightarrow \frac{d}{dt}v + \omega^2 x = 0$

$\Rightarrow \frac{dv}{dt} + \omega^2 x = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx}\,\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$

$\Rightarrow \frac{dv}{dx}\cdot v + \omega^2 x = 0 \Rightarrow v.dv + \omega^2 x.dx = 0 \times dx$

$\Rightarrow v.dv + \omega^2 x\,dx = 0$ ——— (i)

(i) নং কে সমাকলন করে পাই,

$\Rightarrow \int v\,dv + \omega^2 \int x\,dx = \int 0$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{2} + \omega^2 \cdot \frac{x^2}{2} = C \text{ — (ii)}$$

বিস্তার যখন $v = 0$ তখন বিস্তার $x = A$ maximum

$\Rightarrow$ তাহলে (ii) সমীকরণে $v=0$, $x = A$ বসিয়ে

C এর মান পাই,

$$\Rightarrow \frac{0^2}{2} + \omega^2 \frac{A^2}{2} = C$$

$$\Rightarrow C = \frac{\omega^2 A^2}{2}$$

$\therefore$ C এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\Rightarrow \frac{v^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2} = \frac{\omega^2 A^2}{2}$$

$$\Rightarrow v^2 + \omega^2 x^2 = \omega^2 A^2$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\omega^2 (A^2 - x^2)} = \omega\sqrt{(A^2 - x^2)}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \omega\sqrt{(A^2 - x^2)} \quad \left[v = \frac{dx}{dt} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \omega \cdot dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{A^2 - x^2}} dx = \omega \cdot dt \text{ — (iii)}$$

(iii) এবং সমীকরণের ব্যবকলন করে পাই।

$$\int \frac{1}{\sqrt{A^2-x^2}}\,dx = \omega \int 1 \cdot dt$$

$$\Rightarrow \sin^{-1}\left(\frac{x}{A}\right) = (\omega t + \delta)$$ [δ = constant হিসাবে এসেছে]

$$\Rightarrow \frac{x}{A} = \sin(\omega t + \delta)$$

[Formula
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\frac{x}{a}$$]

$$\Rightarrow x = A\sin(\omega t + \delta)$$

$\therefore$ $$\boxed{x = A\sin(\omega t + \delta)}$$ → "Simple Harmonic motion (SHM) বা সরল ছন্দিত স্পন্দন গতির ব্যবকলনীয় সমীকরণের সমাধান।"

মন্দিভূত দোলনের সমীকরণ নির্ণয় এবং এর সমাধান

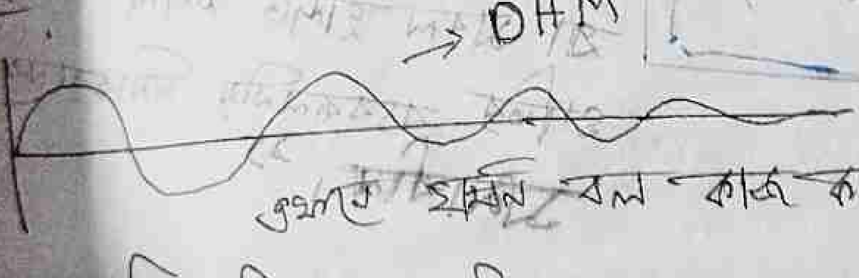
→ damped

সরল ছন্দিত স্পন্দন গতি বিনা বাধায় দুলতে থাকে যার কারনে প্রত্যেক দোলনে প্রতি বিস্তার সমান থাকে

→ SHM

মন্দিভূত দোলনে এটি বাধার সম্মুখীন হয় যার কারনে এর বিস্তার কমতে থাকে এবং এক সময় দোলন বন্ধ হয়ে যায়।

→ DHM



এখানে ঘর্ষন বল কাজ করে।

ব্যাখ্যা// যদি স্প্রিং এ বাধী কোনো বস্তুকে অমসৃন তলে দুলতে দেয়া হয় বা সরল দোলকের ক্ষেত্রে সুতার ঘর্ষন ও বায়ুর বাধা বিবেচনা করা হয় তবে এদের বিস্তার আসতে আসতে কমতে থাকে এবং এক সময় দোলন বন্ধ হয়ে যায়। এ ধরনের দোলনকে মন্দিভূত দোলন বলে।

এক্ষেত্রে দুটি বাধাদানকারী বল কাজ করে,

বাধাদানকারী বল দুটি হলো।

→ প্রত্যয়নী বল (1)

→ ঘর্ষণ জনিত বল (2)

আমরা জানি, প্রত্যয়নী বল, $\boxed{F_1 = -kx}$ ——— (i)

ঘর্ষণ বল। ঘর্ষণ বল, বস্তুর বেগের সমানুপাতিক এবং বিপরীত মুখী।

আমরা জানি, বেগ $= \dfrac{\text{সরণ}}{\text{সময়}}$

একক সময়ে কোনো বস্তুর সরণের হারকেই বেগ বলে।

∴ ঘর্ষণ বল, $F_2 \propto -\dfrac{dx}{dt}$

$$\Rightarrow \boxed{F_2 = -b\frac{dx}{dt}} \text{ ——— (ii)}$$

→ ধ্রুবক।

∴ মোট বল,

$$F = F_1 + F_2 = -kx - b\frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow F = -kx - b\frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow ma + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$\Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

important

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} = 0}$$

এটা মন্দিভূত দোলনের অবকলনীয় সমীকরণ।

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x + \underbrace{\frac{b}{m}\frac{dx}{dt}}_{\text{অবকলনীয়}} = 0 \qquad \boxed{\omega^2 = \frac{k}{m}}$$

সরল ছন্দিত স্পন্দন গতির সমীকরণের সাথে extra $\frac{b}{m}\frac{dx}{dt}$ যোগ করলে মন্দিভূত দোলনের অবকলনীয় সমীকরণ পাওয়া যায়।

মন্দিভূত দোলনের ব্যবকলনীয় সমীকরণের সমাধান কর

আমরা জানি,

মন্দিভূত দোলনের ব্যবকলনীয় সমীকরণ,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} + kx + b\frac{dx}{dt} = 0} \quad \text{(i)}$$

ধরি, এই ব্যবকলনীয় সমীকরণ একটি সমাধান হচ্ছে,

$$\boxed{x = ce^{pt}} \quad \text{(ii)}$$

wave এর equation মতে, $x = A\sin\omega t = A\cos\omega t$ ধরা হয়, কিন্তু মন্দিভূত দোলনের জন্য $x = ce^{pt}$ ধরা হয় কারণ এই দোলনে বাস্তব ও অবাস্তব রাশি কাজ যুক্তি ধরা হয়,

Oylar এর equation

$$e^{i\theta} = \underbrace{\cos\theta}_{\text{বাস্তব}} + \underbrace{i\sin\theta}_{\text{অবাস্তব}}$$

তাই, damped oscillation এর সমীকরণের সমাধান, $x = A\sin(\omega t \pm \delta)$ না ধরে, $x = ce^{pt}$ ধরা হয়,

∴ $x = ce^{pt}$ হলে, সময়ের সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} ce^{pt} = c\frac{d}{dt}e^{pt}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dx}{dt} = cpe^{pt}}$$

আবার,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = cp\frac{d}{dt}e^{pt}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = cp^2e^{pt}}$$

এই $\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}$ এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$\Rightarrow mcp^2e^{pt} + bcpe^{pt} + kce^{pt} = 0$$

$$\Rightarrow ce^{pt}(mp^2 + bp + k) = 0$$

$$\Rightarrow e^{pt}(mp^2 + bp + k) = 0 \quad \text{—— (ii)}$$

(ii) নং সমীকরণে $e^{pt} \neq 0$, তাই $mp^2+bp+k=0$ হবে।

$\therefore mp^2+bp+k=0$

$$\therefore p = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4mk}}{2m}$$

$$\Rightarrow p = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{4mk}{4m^2}}$$

$$\Rightarrow p = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{(-1)\left(\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}\right)}$$

$$\Rightarrow p = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{-1}\,\sqrt{\left(\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}\right)}$$

$$\Rightarrow p = -\frac{b}{2m} \pm i\sqrt{\left(\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}\right)}$$

$i = \sqrt{-1}$
imaginary number

~~ধরি~~,

$\frac{b}{2m} = \lambda$ এবং $\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} = \omega_0$

~~আমরা জানি, (iii) নং সমীকরণ $x = A e^{pt}$ এবং ... সমীকরণে~~

$$\therefore \boxed{p = -\lambda \pm i\omega_0} \quad \text{(iv)}$$

আমরা জানি, damped oscillation এর সমীকরণ থেকে

(iii) নং সমীকরণ,

$x = Ce^{pt}$ এই সমীকরণে (p) এর মান বসিয়ে পাই,

$$\therefore x = Ce^{(-\lambda \pm i\omega_0)t}$$

$$\Rightarrow x = \left[C_1 e^{-\lambda t + i\omega_0 t} + C_2 e^{-\lambda t - i\omega_0 t}\right]$$

$$\Rightarrow x = \left[C_1 e^{-\lambda t}\cdot e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-\lambda t}\cdot e^{-i\omega_0 t}\right]$$

e এর Power (±) তাই C_1, C_2 কেও ভেঙ্গে হবে

$$\Rightarrow x = e^{-\lambda t}\left[C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}\right]$$

$$\boxed{\text{ধরি, } C_1 = \frac{A}{2}e^{i\delta},\ C_2 = \frac{A}{2}e^{-i\delta}}$$

$$\Rightarrow x = e^{-\lambda t}\left[\frac{A}{2}e^{i\delta}e^{i\omega_0 t} + \frac{A}{2}e^{-i\delta}e^{-i\omega_0 t}\right]$$

$$\Rightarrow x = \frac{A}{2}e^{-\lambda t}\left[e^{i(\omega_0 t+\delta)} + e^{-i(\omega_0 t+\delta)}\right]$$

আমরা জানি,

$$\boxed{\cancel{e^{i\theta} = \sin\theta + i\cos\theta}} \quad \boxed{e^{-i\theta} = \sin\theta - i\cos\theta}$$

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,\quad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta}$$

~~$$\Rightarrow x = \frac{A}{2} e^{-\lambda t}\left[\sin(\omega_0 t+\delta) + i\cos(\omega_0 t+\delta) + \sin(\omega_0 t+\delta) - i\cos(\omega_0 t+\delta)\right]$$~~

~~$$\Rightarrow x = \frac{A}{2} e^{-\lambda t}\left[2\sin(\omega_0 t+\delta)\right]$$~~

~~$$\Rightarrow x = A\, e^{-\lambda t} \sin(\omega_0 t+\delta)$$~~

~~$$\Rightarrow x = A\, e^{-b/2m \cdot t} \sin(\omega_0 t+\delta)$$~~

~~$$\Rightarrow x = A \cdot e^{-\frac{bt}{2m}} \cdot \sin(\omega_0 t+\delta)$$~~

$$\Rightarrow x = \frac{A}{2} e^{-\lambda t}\left[\cos(\omega_0 t+\delta) + i\sin(\omega_0 t+\delta) + \cos(\omega_0 t+\delta) - i\sin(\omega_0 t+\delta)\right]$$

$$\Rightarrow x = \frac{A}{2} e^{-\lambda t}\left[2\cos(\omega_0 t+\delta)\right]$$

$$\Rightarrow x = A\, e^{-\lambda t} \cos(\omega_0 t+\delta) \qquad \left[\lambda = \frac{b}{2m} \text{ বসিয়ে পাই}\right]$$

$$\Rightarrow x = A e^{-\frac{bt}{2m}} \cdot \cos(\omega_0 t+\delta)$$

$$\therefore \boxed{x = A \cdot e^{-\frac{bt}{2m}} \cdot \cos(\omega_0 t+\delta)}$$

→ মান দুটি যোগ করে ব্যবকলনী সমীকরণের সমাধান নির্ণয়

Solution of damped occilation differential equation form.

Lissajous Figure / লিসাজুস চিত্র

Superposition of two simple Harmonic motion।

দুটি সরল ছন্দিত স্পন্দন গতির উপরিপাতন।

Lissajous figure। দুটি সরল ছন্দিত স্পন্দন গতি সম্পন্ন কণাকে পরস্পর সমকোণে বা লম্বভাবে উপরিপাতন করালে যেখানে কিছু বক্ররেখা তৈরী হয়। সেই বক্ররেখাগুলোকে Lissajous figure। লিসাজুস চিত্র বলে।

∴ ধরি,

X অক্ষ বরাবর যেই তরঙ্গ কাজ করছে সেটির সমীকরণ,

$x = a\sin(\omega t + \delta)$ —— (i)

Y অক্ষ বরাবর যেই তরঙ্গ কাজ করছে সেটির সমীকরণ

$y = b\sin\omega t$ —— (ii)

দুটি সমীকরণই পরস্পর ভিন্ন বিস্তার ও দশা সম্পন্ন।

$\therefore$ (ii) নং সমীকরণ হতে পাই,

$y = b \sin\omega t$

$\Rightarrow \frac{y}{b} = \sin\omega t$

আমরা জানি,

$\sin^2\omega t + \cos^2\omega t = 1$

$\Rightarrow \cos\omega t = \sqrt{1-\sin^2\omega t} = \sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2}$

$\therefore \cos\omega t = \sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}$ ——— (iii)

(i) নং সমীকরণ হতে পাই,

$x = a\sin(\omega t + \delta)$

$\Rightarrow \frac{x}{a} = \sin(\omega t + \delta) = \sin\omega t \cos\delta + \cos\omega t \sin\delta$

$\Rightarrow \frac{x}{a} = \sin\omega t \cos\delta + \cos\omega t \sin\delta$

$\Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b}\cos\delta + \sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\sin\delta$ [$\sin\omega t$, (iii) নং সমীকরণের মান বসিয়ে]

$\Rightarrow \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\cos\delta = \sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\sin\delta$

$\Rightarrow \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\cos\delta\right)^2 = \left(\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\cdot\sin\delta\right)^2$ [বর্গ করে]

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - 2\frac{x}{a}\frac{y}{b}\cos\delta + \frac{y^2}{b^2}\cos^2\delta = \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)\cdot \sin^2\delta$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\delta + \frac{y^2}{b^2}\cos^2\delta = \sin^2\delta - \frac{y^2}{b^2}\sin^2\delta$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\delta + \frac{y^2}{b^2}\left(\sin^2\delta + \cos^2\delta\right) = \sin^2\delta$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\delta + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2\delta$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\delta = \sin^2\delta} \text{ ——— (iv)}$$

Lissajous Figure

উপরের (iv) নং সমীকরণ দেখে বুঝা যাচ্ছে যে এটি একটি সাধারণ উপবৃত্তের সমীকরণ।

∴ লিসাজুস এর চিত্র সাধারণত ~~উপবৃত্তের~~ একটি উপবৃত্ত।

এখানে ~~দশা = δ~~ দশা পার্থক্য δ এর পরিবর্তন করলে বিভিন্ন বক্ররেখা পাওয়া যায়।

Lissajous figure এর শর্ত, $\delta = 0°$ বিভি,

Case 1 || $\delta = 0°$ হলে, $\sin\delta = 0$, $\cos\delta = 1$ হবে।

∴ (iv) নং সমীকরণে মান বসিয়ে পাই-

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2 - 2\frac{x}{a}\frac{y}{b} + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 0$$

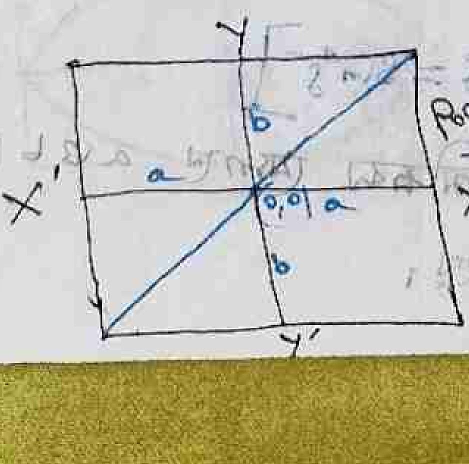
$$\Rightarrow \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{y}{b} = \frac{x}{a} \Rightarrow \boxed{y = \frac{b}{a}.x}$$ is similar $y = mx$

যেখানে, $m = \frac{b}{a}$ ∴ $y = \frac{b}{a}.x$ হলো একটি মূলবিন্দুগামী সরলরেখা।

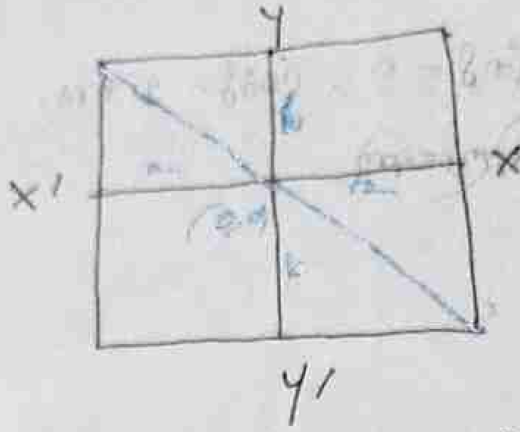
∴ [দুটি তরঙ্গ (S.H.M) যদি পরস্পর লম্বভাবে উপরিপাতিত ~~করলে হবে করানো হলেও এবং~~ দশা-পার্থক্য 0° হলে সরলরেখা নির্দেশ করে।]

∴ তরঙ্গ দুটি উপরিপাতিত সরলরেখা

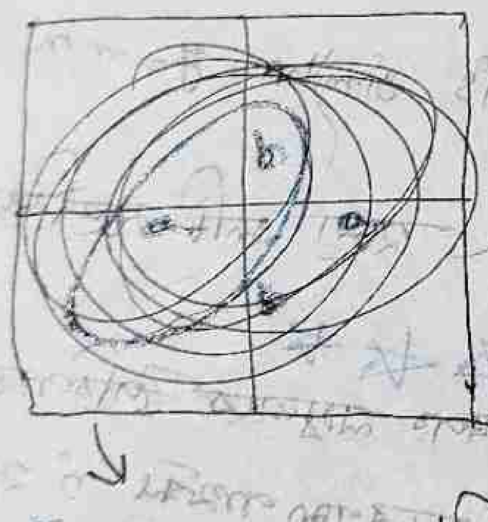


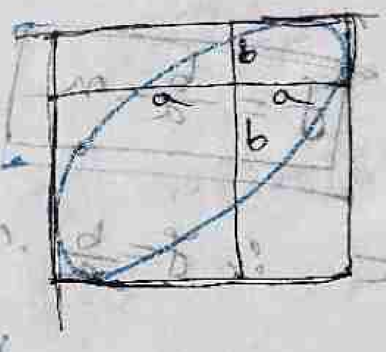
Positive ~~ঢালের জন্য~~

Negative মানের জন্য ।



(ii) সংমীকরনের জন্য লেখচিত্র,





[Oblique ellipes (তির্যক উপবৃত্তের) জন্য লেখচিত্র,]

$$\left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\delta = \sin^2\delta\right]$$

এটি তির্যক উপবৃত্তের সমীকরণ যেখানে a ও, b এর মান changeable হয়।

Case 2 $\boxed{\delta = \frac{\pi}{2} \text{ হলে}}$ ~~এক্ষেত্রে~~ $\sin\delta = 1$

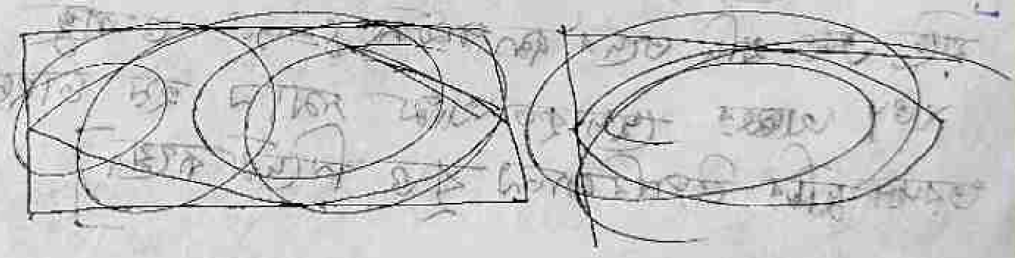
$\cos\delta = 0$

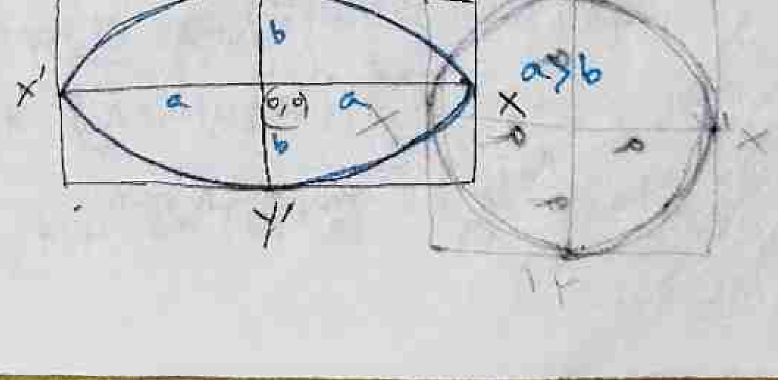
এখন (iii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \times 0 = \cancel{\sin} \; 1^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$ → উপবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ

[দুটি (S.H.M) wave যদি পরস্পর 90° কোণে উপরিপাতিত হয় এবং তাদের দশা পার্থক্য $\delta = 90°$ হলে, তরঙ্গদুটির উপরিপাতন একটি উপবৃত্ত নির্দেশ করে।]





Case : 3 || $\delta = \frac{\pi}{2}$, $a = b$ হলে

$\sin\delta = 1$, $\cos\delta = 0$

(i) নং সমীকরণে মান বসিয়ে পাই

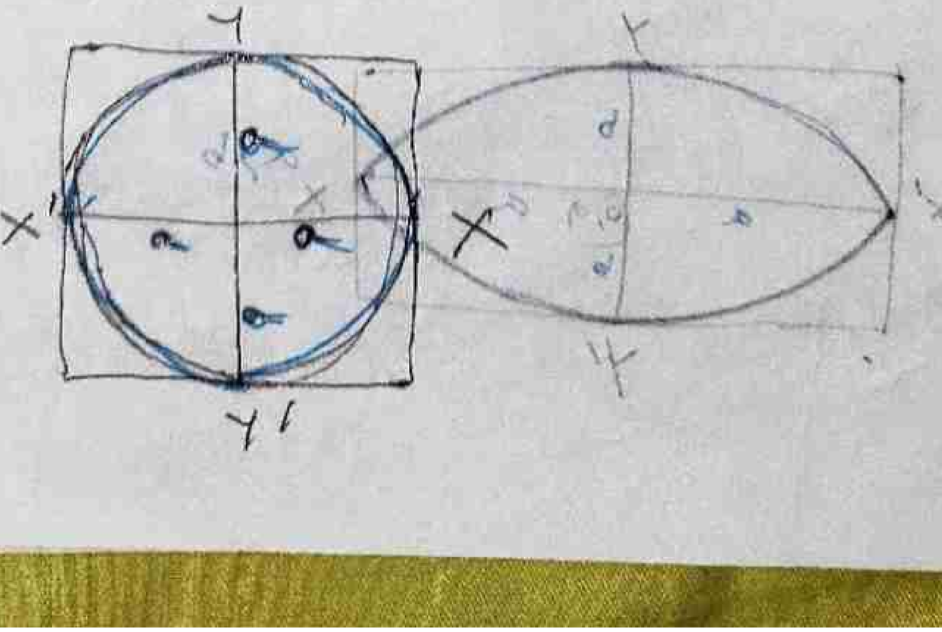
$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab} \times 0 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \boxed{x^2+y^2=a^2}$$

[ইহা একটি বৃত্তের সমীকরণ যার ব্যাসার্ধ a]

[দুটি তরঙ্গ (S.H.M) যদি পরস্পর সমকোণে লম্ব ভাবে উপরিপাতিত হয়ে এবং যদি তাদের দশা পার্থক্য $\delta = 90^\circ$ ও বস্তুর x ও y অক্ষের দোদুলকৃত বিস্তার সমান হয় তাহলে তরঙ্গ দুটির উপরিপাতন বৃত্ত নির্দেশ করে।]



প্রশ্ন ॥ important question

সরলছন্দিত গতির বিভবশক্তি, গতিশক্তি, মোট শক্তির রাশিমালা নির্ণয় কর। আবার দেখাও যে, বিভবশক্তি + গতিশক্তি = মোটশক্তি। আবার দেখাও যে, ছন্দিত গতির ক্ষেত্রে শক্তির নিত্যতার সূত্র পালিত হয়?

Solution ॥ আমরা জানি, সরলছন্দিত গতির ব্যবকলনী সমীকরণের সমাধান,

$$x = A\sin(\omega t + \delta) \quad \text{— (i)}$$

সরলছন্দিত গতি সম্পন্ন কোনো কণার x অবস্থানে বিভবশক্তি (প্রত্যয়নী বল বিদ্যমান থাকা অবস্থায়)

$$U = \int_0^x -\vec{F}.d\vec{x}$$

$$= \int_0^x -(-k.x).dx = k\int_0^x x.dx = k\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^x$$

$$= \frac{1}{2}kx^2$$

[$F = -kx$] প্রত্যয়নী বল

$$\therefore U = \frac{1}{2}kx^2 \quad \text{— (ii)}$$

(i) নং সমীকরণের মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই,

$$U = \frac{1}{2}k\left[A\sin(\omega t + \delta)\right]^2$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \delta) \quad \text{— (iii)}$$

এখানে, K এবং A হলো constant, কাজেই বিভবশক্তির

মান নির্ভর করে $\sin^2(\omega t+\delta)$ এর উপর।

বিভবশক্তির মান সর্বোচ্চ হবে যখন $\sin(\omega t+\delta)$।

এর মান সর্বোচ্চ হবে, অর্থাৎ $\sin^2(\omega t+\delta)=1$

∴ U_{max} ~~অর্থাৎ~~ হবে যখন $\sin^2(\omega t+\delta)=1$ ~~হবে~~

$$\therefore \boxed{U_{max}=\frac{1}{2}KA^2} \rightarrow \text{when, } \sin^2(\omega t+\delta)=1$$

$$\boxed{U_{min}=0} \rightarrow \text{when, } \sin^2(\omega t+\delta)=0$$

∴ মোট বিভবশক্তি, $W = U_{max}+U_{min}=\frac{1}{2}KA^2$

গতিশক্তি // আমরা জানি,

গতিশক্তি, $E_k=\frac{1}{2}mv^2$ ——— (iv)

∴ সরল ছন্দিত গতির ব্যবকলনীয় সমীকরণের সমাধান,

$$x=A\sin(\omega t+\delta)$$

$$\Rightarrow V=\frac{d}{dt}x=\frac{d}{dt}A\sin(\omega t+\delta)$$

$$=A\omega\cos(\omega t+\delta) \quad \text{(iii)}$$

$$\therefore V=A\omega\cos(\omega t+\delta)$$

V এর মান (iii) নং এ বসিয়ে পাই,

$$E_k = \frac{1}{2} m \left[A\omega \cos(\omega t+\delta)\right]^2$$

$$\Rightarrow E_k = \frac{1}{2} m A^2\omega^2 \cos^2(\omega t+\delta)$$

$$\left[\omega = \sqrt{K/m} \Rightarrow \omega^2 = K/m\right]$$

$$\Rightarrow E_k = \frac{1}{2} m A^2 \frac{K}{m} \cos^2(\omega t+\delta)$$

$$\Rightarrow E_k = \frac{1}{2} K A^2 \cos^2(\omega t+\delta) \quad \text{--- (v)}$$

এখানে K এবং A হলো constant কারণ, গতিশক্তির মান নির্ভর করে $\cos^2(\omega t+\delta)$ এর উপর। যদি গতিশক্তি এর মান সর্বোচ্চ হবে যদি $\cos^2(\omega t+\delta)$ এর মান সর্বোচ্চ হয়।

$\rightarrow$ when, $\cos^2(\omega t+\delta) = 1$

$$\therefore \boxed{E_{K_{max}} = \frac{1}{2} K A^2}$$

$\rightarrow$ when, $\cos^2(\omega t+\delta) = 0$

$$\boxed{E_{K_{min}} = \cancel{\frac{1}{2} K A}}$$

$\therefore$ ~~মোট~~ মোট গতিশক্তি, $E_{K_{total}} = \frac{1}{2} K A^2$

∴ সর্বাধিক বিস্তারে মোট শক্তি, $E_{total} = U_{max} + E_{k\,min}$

$$= \frac{1}{2}KA^2 + 0$$

$$= \frac{1}{2}KA^2$$

অথবা,

x অক্ষের উপর মোট শক্তি, $E_{total} = U_{min} + E_{k\,max}$

$$= 0 + \frac{1}{2}KA^2$$

$$= \frac{1}{2}KA^2$$

∴ প্রমাণিত হলো যে, স্থিতিশক্তি = গতিশক্তি = মোটশক্তি

$$\Rightarrow \frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}KA^2$$

∴ যেকোনো অবস্থানে সরল ছন্দিত গতির মোট শক্তি,

(K+V) করলেই যেকোনো অবস্থানে মোট শক্তি পাওয়া যাবে।

$$E_{total\ in\ any\ place} = \frac{1}{2}KA^2\sin^2(\omega t+\delta) + \frac{1}{2}KA^2\cos^2(\omega t+\delta)$$

$$= \frac{1}{2}KA^2\left[\sin^2(\omega t+\delta) + \cos^2(\omega t+\delta)\right]$$

$$\therefore \boxed{E_{TIAP} = \frac{1}{2}KA^2\left[\sin^2(\omega t+\delta) + \cos^2(\omega t+\delta)\right]}$$

সমাধান

(i) $x = 6\sin(3\pi t + \pi/3)$ হলে এর বিস্তার, পর্যায়কাল, কৌণিক কম্পাঙ্ক, আদিদশা নির্ণয় কর?

Ans

$\therefore$ $x = A\sin(\omega t + \delta)$ এর সাথে তুলনা করলে,

বিস্তার $(A) = 6$; কৌণিক কম্পাঙ্ক $(\omega) = 3\pi$,

আদিদশা $(\delta) = \pi/3$; পর্যায়কাল $(T) = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3\pi}$

$= 2/3$

(ii) কোনো সরল দোলকের বিস্তার $5cm$, আদিদশা $0°$, $1 min$ সময়ে 150 বার কম্পন হলে, সমীকরণ নির্ণয় কর,

Ans দেয়া আছে, $A = 5cm$; $\delta = 0$,

60 sec সময়ে কম্পন দেয় 150 বার

$\therefore$ 1 sec " " " $f = \frac{150}{60}$ বার

$\therefore x = A\sin(\omega t + \delta) = A\sin\omega t$

$= 5\sin 2\pi f.t = 5\sin 2\pi \frac{150}{60}.t$

$\boxed{x = 5\sin 5\pi.t}$

(iii) ~~~~ 0.01 kg ভরের একটি কণা সরল দোলন গতিতে চলছে, পর্যায়কাল 2 sec, বিস্তার 0.1 m কণাটি যখন সাম্যবস্থান থেকে 0.02 m দূরে তখন তার গতিশক্তি নির্ণয় কর?

Ans

দেয়া আছে,

$m = 0.01\ kg$, $A = 0.1\ m$, $x = 0.02\ m$, $T = 2\ sec$

∴ গতিশক্তি $\cancel{E_k = \frac{1}{2}kx^2}$

$$E_k = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2)$$

$$= \frac{1}{2}\omega^2 m(A^2 - x^2)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 m(A^2 - x^2)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{2}\right)^2 (0.01)\left((0.1)^2 - (0.02)^2\right)$$

$$= 0.0397\ J$$

$\cancel{k = \sqrt{\frac{\omega}{m}}}$

$\Rightarrow \omega = \sqrt{k/m}$

$\Rightarrow k = \omega^2 m$

সাম্যাবস্থান থেকে একটি সরল দোলিত গতিশীল কণার কি পরিমাণ সরণ হলে গতিশক্তি সর্বোচ্চ গতির অর্ধেক হবে।

আমরা জানি, গতিশক্তি সর্বোচ্চ হলে $E_{k_{max}} = \frac{1}{2} k(A^2 - x^2)$ $[x=0]$

$$= \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$$

সাধারণ গতিশক্তি, $E_k = \frac{1}{2} k(A^2 - x^2)$

∴ প্রশ্নমতে, $E_k = \frac{1}{2} E_{k_{max}}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} k(A^2 - x^2) = \left(\frac{1}{2} m\omega^2 A^2\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{1}{2} m\omega^2}(A^2 - x^2) = \frac{1}{2} \cdot \cancel{\frac{1}{2} m\omega^2} A^2$$

$$\Rightarrow A^2 - x^2 = \frac{1}{2} A^2 \Rightarrow 2A^2 - A^2 = 2x^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 = A^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\underset{\text{সরণ}}{x} = \frac{A}{\sqrt{2}}} \rightarrow \text{নির্ণেয় বিস্তার}$$

important Question

What is beat? How are the beat formed? Give mathematicle analysis or show the rate of production of the beat is equal to the difference in frequency of the sources. (বীট উৎপত্তির হার, বীট সৃষ্টিকারী উৎসদ্বয়ের কম্পাঙ্কের পার্থক্যের সমান।)

Answer

বীট ॥ প্রায় সমান কম্পাঙ্কের এবং সমান বিস্তারের দুটি শব্দ তরঙ্গ দুটি উৎস হতে একই সময়ে উৎপন্ন হয়ে একই দিকে অগ্রসর হলে তাদের উপরিপাতনের ফলে একটি লব্ধি শব্দ তরঙ্গের সৃষ্টি হয়। এই লব্ধি শব্দের তীব্রতার পর্যায়ক্রমিক হ্রাস-বৃদ্ধিকে বীট বলে।

বীট সৃষ্টির শর্ত

(i) বীট সৃষ্টিকারী শব্দ তরঙ্গ দুটি একই সময়ে উৎপন্ন হতে হবে।
(ii) তরঙ্গ দুটির কম্পাঙ্ক ও বিস্তার প্রায় সমান হতে হবে।
(iii) মাধ্যমের কোনো একটি কণার উপর তরঙ্গ দুটি মিলিত হবার পর তাদের মধ্যে দশা পার্থক্য সময়ের সাথে সাথে পরিবর্তন হবে।
(iv) লব্ধি বিস্তার সময়ের সাথে পরিবর্তন হবে।

mathematically Prove

দুটি শব্দ উৎসের কম্পাঙ্ক n_1 এবং n_2 এবং বিস্তার a ও দশা পার্থক্য same হলে,

$y_1 = a \sin \omega t = a \sin 2\pi n_1 t$

$\Rightarrow y_1 = a \sin 2\pi n_1 t$

ও $y_2 = a \sin 2\pi n_2 t$

$\therefore$ উপরিপাতন, $y = y_1 + y_2$

$= a(\sin 2\pi n_1 t + \sin 2\pi n_2 t)$

$$= 2a \sin \frac{2\pi n_1 t + 2\pi n_2 t}{2} \cos \frac{2\pi n_1 t - 2\pi n_2 t}{2}$$

$$= 2a \sin \frac{2\pi(n_1+n_2)t}{2} \cos \frac{2\pi(n_1-n_2)t}{2}$$

$$\therefore y = 2a \sin \frac{2\pi(n_1+n_2)t}{2} \cos \frac{2\pi(n_1-n_2)t}{2}$$

হলো উপরিপাতনের ফলে লব্ধি তরঙ্গের সমীকরণ

$$\therefore y = A \sin \frac{2\pi(n_1+n_2)t}{2} \quad \text{--- (i)}$$

এখানে লব্ধি বিস্তার, $A = 2a \cos \frac{2\pi(n_1-n_2)t}{2}$ --- (ii)

আমরা জানি,

বিস্তার তীব্রতার বর্গের সমানুপাতিক $(E \propto A^2)$

অর্থাৎ বিস্তার বেশি হলে তীব্রতা বেশি এবং

বিস্তার কম হলে তীব্রতা কম হবে।

(i) নং সমীকরণ হতে, দেখা যায় A সর্বোচ্চ হবে

যখন, $\cos \frac{2\pi(n_1-n_2)t}{2} = \pm 1 = \cos m\pi$

when, $m = 0, 1, 2 \ldots$

$$\therefore \cos \frac{2\pi(n_1-n_2)t}{2} = \cos m\pi$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi(n_1-n_2)}{2} t = m\pi$$

$$\Rightarrow t = \frac{m}{(n_1-n_2)}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\therefore t = 0, \frac{1}{(n_1-n_2)}, \frac{2}{(n_1-n_2)}$$

এই সব মুহূর্তে তীব্র শব্দ শোনা যাবে।

∴ পর পর দুটি তীব্র শব্দের মধ্যবর্তী সময় হবে,

$$\left(\frac{1}{n_1-n_2} - 0\right) = \frac{1}{n_1-n_2}$$

same

আবার,

$$\left(\frac{2}{n_1-n_2} - \frac{1}{n_1-n_2}\right) = \frac{1}{n_1-n_2}$$

অর্থাৎ constant time পর পর আমরা তীব্র শব্দ শুনতে পাবো।

আবার আমরা জানি,

বিস্তার কম হলে তীব্রতাও কম হবে।

অর্থাৎ,

A সর্বনিম্ন যখন, $\cos\frac{2\pi(n_1-n_2)t}{2} = \cos(2m+1)\frac{\pi}{2} = 0$

$\Rightarrow \frac{2\pi(n_1-n_2)t}{2} = (2m+1)\frac{\pi}{2}$ | $m = 0, 1, 2 \ldots$

$\Rightarrow 2(n_1-n_2)t = (2m+1)$

$\Rightarrow t = \frac{(2m+1)}{2(n_1-n_2)}$; $m = 0, 1, 2, 3 \ldots$

$\therefore t = \frac{1}{2(n_1-n_2)}, \frac{3}{2(n_1-n_2)}, \frac{5}{2(n_1-n_2)}$

∴ ঐ সব মুহূর্তে নিঃস্পন্দ শোনা যাবে।

∴ পরপর দুটি নিঃস্পন্দের মধ্যবর্তী সময়,

$\frac{3}{2(n_1-n_2)} - \frac{1}{2(n_1-n_2)} = \frac{2}{2(n_1-n_2)} = \frac{1}{n_1-n_2}$

আবার,

$\frac{5}{2(n_1-n_2)} - \frac{3}{2(n_1-n_2)} = \frac{1}{n_1-n_2}$

Same

অর্থাৎ, যেই সময় পরপর আমরা উচ্চশব্দ শুনতে পাই ঠিক সেই সময় পরপরই আমরা নিঃশব্দ শুনতে শুনতে পাই।

∴ $\frac{1}{n_1-n_2}$ সেকেন্ডে একটি উচ্চ ও একটি ~~নিম্ন~~ নিঃশব্দ শব্দ আমরা শুনতে পাই, অর্থাৎ $\frac{1}{n_1-n_2}$ ~~সেকেন্ডে~~ ১টি বীট তৈরী হয়।

∴ $\frac{1}{n_1-n_2}$ সেকেন্ডে বীট তৈরী হয় ১টি

∴ 1 " " " (n_1-n_2) টি

∴ 1 সেকেন্ডে তৈরী হওয়া বীট সংখ্যা, $N = n_1 - n_2$

∴ It's Proved that,
উৎসদ্বয়ের কম্পাঙ্কের পার্থক্যের মান = উৎপন্ন বীটের মান

MAIA

সরল দোলনগতি সম্পন্ন কণা যখন সাম্য অবস্থান থেকে 0.2 cm দূরে তখন উহার ত্বরণ কত? এবং কণাটির সর্বাধিক বেগ কত?

দেওয়া আছে, $A = 0.5$ cm

দোলনকাল, $T = 0.001$

$a = ?$

$V_{max} = ?$

$$\therefore x = A\sin(\omega t + \delta)$$

$$= A\sin\omega t$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \cdot A\sin\omega t$$

$$= A\omega\cos\omega t$$

$$V_{max} = A\omega \quad [\text{when } \cos\omega t = \text{max}]$$

$$= A \cdot \frac{2\pi}{T} = 0.05 \times \frac{2 \times 3.1416}{0.001} = 3141.6$$

$$\therefore a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \cdot A\omega\cos\omega t$$

$$= -\omega^2 A\sin\omega t$$

$$= -\omega^2 x$$

* দোলনকাল 2sec আয়াম বিস্তার 1m, 0.5m বিস্তারে এবং স্থিতি বেগ ও ত্বরণ নির্ণয় কর।

$T = 2s$

$A = 1m$

$x = 0.5$

$x = A\sin\omega t$

$\Rightarrow \sin\omega t = \frac{x}{A} = \frac{0.5}{1} =$

---

① সরল ছন্দিত স্পন্দন সমীকরণ, $x = A\sin(\omega t + \delta)$

② বেগের সমীকরণ, $v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} A\sin(\omega t + \delta)$

$$\Rightarrow v = \omega A\cos(\omega t + \delta) = \omega A\sqrt{\cos^2(\omega t + \delta)}$$

$$\Rightarrow v = \omega A\sqrt{1 - \sin^2(\omega t + \delta)}$$

$$\Rightarrow v = \omega A\sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2} = \omega A\sqrt{\frac{A^2 - x^2}{A^2}}$$

$$\Rightarrow v = \omega \cdot \frac{A}{A} \cdot \sqrt{A^2 - x^2}$$

$$\therefore \boxed{v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}}$$

$\therefore x = 0$ হলে, $v_{max} = \omega A = \frac{2\pi}{T} \cdot A$

$$\boxed{\omega^2 = \frac{k}{m}}$$

③ $a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A\sin(\omega t + \delta) = -\omega^2 x$

$\therefore$ মোট শক্তি, $E = E_p$ (বিভবশক্তি) $+ E_k$ (গতিশক্তি)

$$= \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v = A\omega\cos(\omega t+\delta)$$

$$= \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\delta) + \frac{1}{2}\left(\frac{k}{\omega^2}\right)\cdot A^2\omega^2\cos^2(\omega t+\delta)$$

$$= \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\delta) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\delta)$$

$$= \frac{1}{2}kA^2\left\{\sin^2(\omega t+\delta)+\cos^2(\omega t+\delta)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}kA^2$$

$$\boxed{\omega^2 = \frac{k}{m}}$$

$$\therefore \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \left[T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{k/m}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\right] = 2\pi\sqrt{L/g}$$

$$\therefore \boxed{E_A = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2)}$$

x 0 হলে সরণ zero হলে

$$\boxed{E = \frac{1}{2}kA^2}$$

সরল দোলিত স্পন্দনশীল একটি কণার বিস্তার 0.05m পর্যায়কাল 12s হলে এর সর্বোচ্চ দ্রুতি ত্বরণ নির্ণয় কর।

$\Rightarrow V = \omega A\cos(\omega t+\delta) \Rightarrow V_{max} = \omega A = \frac{2\pi}{T}\cdot A$

$= \frac{2\times 3.1416\times 0.05}{12}$

$= 0.02618\,ms^{-1}$

$a = -\omega^2 A = -(0.5236)^2\times 0.05$

$= -0.0137\,ms^{-2}$

একটি সরল দোলিত স্পন্দনশীল বস্তুর বিস্তার 0.01m কম্পাঙ্ক 12Hz বস্তুটির 0.005m সরণে বেগ ও সর্বোচ্চ বেগ নির্ণয় কর।

$V = \omega A\cos(\omega t+\delta) = \omega\sqrt{A^2-x^2} = 2\pi f\sqrt{A^2-x^2}$

$= 2\times 3.1416\times 12\times\sqrt{(0.01)^2-(0.005)^2}$

$= 0.65297\,ms^{-1}$

বস্তুর বিস্তার 0.5m দোলনকাল 2sec বেগ 1.11 ms^{-1} বস্তুটির সরণ কত?

$x = A\sin(\omega t+\delta)$ $\therefore V = \omega\sqrt{A^2-x^2}$

$\Rightarrow \frac{v^2}{\omega^2}+x^2 = A^2 \Rightarrow x = \sqrt{A^2-\frac{v^2}{\omega^2}}$

$\Rightarrow x = \sqrt{A^2-\frac{v^2T^2}{4\pi^2}} = \sqrt{(0.5)^2-\frac{(1.11)^2\cdot(2)^2}{4\cdot(3.1416)^2}} = 0.3$

* কোনো স্প্রিং এ m ভরের ঝুলালে 6cm প্রসারিত হয়। বস্তুটি টেনে ছেড়ে দিলে পর্যায়কাল ও কম্পাঙ্ক কত হবে।

we know,

$F = kx \Rightarrow ma = kx \Rightarrow k = \frac{ma}{x} = \frac{9.8 \times m}{0.06}$

$\therefore T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{k/m}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m \times 0.06}{9.8 \times m}}$

$= 0.49 \text{ sec}$

$\therefore f = \frac{1}{T} = 2.034 \text{ Hz}$

* একটি স্প্রিং এর এক প্রান্তে 50kg ভর ঝুলানো অবস্থায় 0.70 Hz কম্পাঙ্কে সরল ছন্দিত হয়। স্থিরাবস্থা 15cm টেনে আনতে কত কাজ করতে হবে।

$W = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 x^2$

$= \frac{1}{2} \times 50 \times \left(\frac{2 \times 3.1416 \times .70}{1}\right)^2 \times (.15)^2$

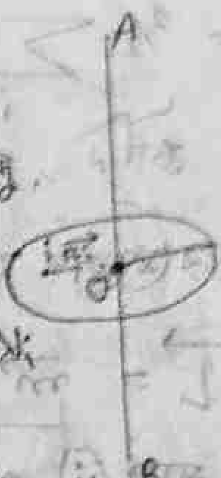
$= 0.01088 \text{ J}$

Chapter-5

MATH

দেখাও যে, একটি ঘূর্ণনশীল দৃঢ় বস্তুর গতিশক্তি,

$T = \frac{1}{2}\,\vec{\omega}\cdot\vec{L}$,



Answer: ধরি, ঘূর্ণনশীল বস্তুর O হলো মূলবিন্দু. এবং মূলবিন্দু হতে (i) তম বিন্দুর দূরত্ব $\vec{r_i}$

M_i ভরের সেই (i) বিন্দুর রৈখিক বেগ $\vec{v_i}$

হলে, এর বা System এর গতিশক্তি হবে,

$$T = \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2 \quad \text{—— (i)}$$

আমরা জানি,

$$\boxed{\vec{V} = \vec{\omega}\times\vec{r}}$$

Relation between কৌণিক বেগ (ω) ও রৈখিক বেগ (v)

কৌণিক বেগ ও রৈখিক বেগের সম্পর্ক

∴ ~~$\omega = v/r$~~

∴ (i) তম বিন্দুর জন্য সম্পর্কটি হবে, $\vec{V_i} = \vec{\omega}\times\vec{r_i}$

∴ গতিশক্তি, $T = \frac{1}{2}\sum_i m_i V_i^2$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \cdot V_i \cdot V_i$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}\sum_i \vec{\omega} \cdot m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) \text{ --- (ii)}$$

আমরা জানি,

রৈখিক ভরবেগের সূত্র, $L = mvr$

$$\therefore \vec{L} = \vec{m}(\vec{r} \times \vec{v}) \text{ --- (iii)}$$

(iii) এর মান (ii) এ বসিয়ে পাই,

$$T = \frac{1}{2}\sum_i \vec{\omega} \cdot \vec{L}_i$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}\vec{\omega} \sum_i \vec{L}_i = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \vec{L}$$

$$\therefore \boxed{T = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \vec{L}}$$

It's Proved that,

ঘূর্ণনশীল দৃঢ় বস্তুর ঘূর্ণন গতিশক্তি (T) হলো কৌনিক ভরবেগ (L) ও কৌনিক বেগ (ω) এর ডটগুণফলের অর্ধেক।

দেখাও যে, সরল ছন্দিত স্পন্দনের গড় গতিশক্তি = গড় বিভবশক্তি = $\frac{1}{2}$ মোট শক্তি

Answer

সরল ছন্দিত গতির পর্যায়কাল = T হলে, একটি পূর্ণ চক্রে

গড় গতিশক্তি, $K.E_{ave} = \dfrac{\int_0^T K.E\, dt}{\int_0^T dt}$ $\quad \boxed{\omega = \sqrt{k/m}}$

আমরা জানি, $x = A\sin(\omega t + \delta)$; $v = \frac{dx}{dt} = \omega A\cos(\omega t + \delta)$

$\therefore K.E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\cos^2(\omega t+\delta) = \frac{1}{2}m\frac{k}{m}A^2\cos^2(\omega t+\delta)$

kinetic energy $= \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\delta)$

$$\therefore K.E_{ave} = \frac{\int_0^T \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\delta)\,dt}{\int_0^T dt} = \frac{1}{2}kA^2\int_0^T \frac{\cos^2(\omega t+\delta)}{T}\,dt$$

$$= \frac{kA^2}{2T}\cdot\frac{1}{2}\int_0^T\left(1+\cos 2(\omega t+\delta)\right)dt$$

$$= \frac{kA^2}{4T}\left[[t]_0^T + \left[\frac{\sin 2(\omega t+\delta)}{2\omega}\right]_0^T\right]$$

$$= \frac{kA^2}{4}\frac{T}{T} + \left[\frac{kA^2}{4T}\cdot\frac{1}{2\omega}\left\{\sin 2(\omega T+\delta) - \sin 2\delta\right\}\right]$$

$$= \frac{kA^2}{4} + \left[\frac{kA^2}{4T}\cdot\frac{1}{2\omega}\left\{\sin\left(\frac{4\pi}{T}\cdot T + 2\delta\right) - \sin 2\delta\right\}\right]$$

$$\Rightarrow K.E_{ave} = \frac{kA^2}{4} + \left[\frac{kA^2}{4T}\frac{1}{2\omega}\left\{\sin(4\pi+2\delta) - \sin 2\delta\right\}\right]$$

$$= \frac{kA^2}{4} + \left[\frac{kA^2}{4T\cdot 2\omega}\left\{\sin 2\delta - \sin 2\delta\right\}\right]$$

$$= \frac{kA^2}{4} + \left[\frac{kA^2}{6\omega T} \times 0\right]$$

$$= \frac{kA^2}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}kA^2$$

$$= \frac{1}{2}\cdot E_{total}$$

∴ প্রতি পূর্ণ চক্রের গড়গতি শক্তি, $KE_{ave} = \frac{1}{2} E_{total}$

আবার, প্রতি পূর্ণ চক্রের জন্য বিভবশক্তি, $P.E_{ave} = \frac{\int_0^T P.E.\, dt}{\int_0^T dt}$

$$P.E = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\delta)$$

$$\therefore P.E_{ave} = \frac{\int_0^T P.E\, dt}{\int_0^T dt}$$

$$= \frac{\int_0^T \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\delta)\, dt}{\int_0^T dt}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}KA^2 \int_0^T \sin^2(\omega t+\delta)\,dt}{T} = \frac{KA^2}{2T}\cdot\frac{1}{2}\int_0^T \left\{1-\cos 2(\omega t+\delta)\right\}dt$$

$$= \frac{KA^2}{4T}\left[T - \left[\frac{\sin(2\omega t+2\delta)}{2\omega}\right]_0^T\right]$$

$$= \frac{KA^2}{4T}\left[T - \frac{1}{2\omega}\left\{\sin(4\pi+2\delta) - \sin(2\delta)\right\}\right]$$

$$= \frac{KA^2}{4T}\left[T - \frac{1}{2\omega}\left\{\cancel{\sin 2\delta - \sin 2\delta}\right\}\right] \rightarrow 0$$

$$= \frac{KA^2}{4T}\cdot T = \frac{KA^2}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}KA^2$$

$$= \frac{1}{2}\cdot E_{total}$$

$$\therefore P.E_{ave} = \frac{1}{2}E_{total}$$

$$\boxed{K.E_{ave} = P.E_{ave} = \frac{1}{2}E_{total}}$$

Chapter - 8

Differential equation of travelling wave

we know,

$$y = A\sin(\omega t \pm \delta) = A\sin(\omega t - \delta) = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t \ldots\right.$$

$$\Rightarrow y = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}.x\right) = A\sin\left(2\pi n t - \frac{2\pi}{\lambda}.x\right)$$

$$\Rightarrow y = A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}.vt - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

$$\Rightarrow y = A\sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) \text{ ——— (i)}$$

Phase difference,

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \times x$$

Path difference

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \left[T = \frac{1}{n}\right]$$

$$v = n\lambda$$

$\therefore \frac{dy}{dt}$

(i) নং সমীকরণকে t এর সাপেক্ষে

অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2\pi}{\lambda}.vA\cos\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)$$

আবার t এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \left(\frac{2\pi v}{\lambda}\right)^2 (-A) \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) \quad \text{—— (i)}$$

(i) নং সমীকরণকে x এর সাপেক্ষে দুইবার অন্তরীকরণ করে পাই

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2\pi A}{\lambda} \cos \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 (-A) \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) \quad \text{—— (ii)}$$

(i) ও (ii) নং সমীকরণ তুলনা করে পাই,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = v^2 \frac{d^2y}{dx^2} \Rightarrow \boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{v^2} \frac{d^2y}{dt^2}}$$

এটি অগ্রগামী তরঙ্গের ব্যবকলনী সমীকরণ।

অগ্রগামী তরঙ্গের শক্তির রাশিমালা।

আমরা জানি,

একটি অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ,

$$y = A \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)$$

$$\boxed{\begin{aligned} y &= A \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt-x) \\ v &= \frac{dy}{dt} = \frac{2\pi v A}{\lambda} \cos \frac{2\pi}{\lambda}(vt-x) \\ a &= \frac{d^2y}{dt^2} = \left(\frac{2\pi v}{\lambda}\right)^2 (-A) \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt-x) \\ &= -\left(\frac{2\pi v}{\lambda}\right)^2 \cdot y \end{aligned}}$$

∴ **গতিশক্তির রাশিমালা।**

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

$$= \frac{1}{2} m \left(\frac{2\pi v A}{\lambda} \cos \frac{2\pi}{\lambda}(vt-x)\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} m \frac{4\pi^2 v^2 A^2}{\lambda^2} \cdot \cos^2 \frac{2\pi}{\lambda}(vt-x)$$

$$= \frac{2\pi^2 v^2 m A^2}{\lambda^2} \cos^2 \frac{2\pi}{\lambda}(vt-x)$$

বিভবশক্তির রাশিমালা।

আমরা জানি, বিভবশক্তি = বল × সরণ

$$\Rightarrow dE_p = F \cdot dy$$

$$\Rightarrow dE_p = m \cdot a \cdot dy$$

$\Rightarrow d_{E_P} = m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} \cdot dy = m \cdot \left(\frac{2\pi v}{\lambda}\right)^2 (-A) \cdot \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt-x) \cdot dy$

অথবা $\Rightarrow d_{E_P} = -m \cdot \left(\frac{2\pi v}{\lambda}\right)^2 \cdot y \cdot dy$

সমাকলন করে পাই,

$\Rightarrow E_P = -m \left(\frac{2\pi v}{\lambda}\right)^2 \cdot \int y \cdot dy$

$= -m \frac{4\pi^2 v^2}{\lambda^2} \frac{y^2}{2}$

$= -\frac{m 2\pi^2 v^2}{\lambda^2} \cdot A^2 \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda}(vt-x)$

$= \frac{2\pi^2 v^2 m A^2}{\lambda^2} \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda}(vt-x)$ [স্থিতি শক্তি]

$\therefore$ মোট শক্তি $E = E_P + E_k$

$= \frac{2\pi^2 v^2 m A^2}{\lambda^2} \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda}(vt-x) + \frac{2\pi^2 v^2 m A^2}{\lambda^2} \cos^2 \frac{2\pi}{\lambda}(vt-x)$

$= \frac{2\pi^2 v^2 m A^2}{\lambda^2} \left(\sin^2 \frac{2\pi}{\lambda}(vt-x) + \cos^2 \frac{2\pi}{\lambda}(vt-x)\right)$

$= \frac{2\pi^2 v^2 m A^2}{\lambda^2}$

$$\Rightarrow E = \frac{2\pi^2 v^2 m A^2}{\lambda^2} \qquad \boxed{v = n\lambda}$$

$$= \frac{2\pi^2 (n\lambda)^2 m A^2}{\lambda^2}$$

$$= 2\pi^2 n^2 m A^2$$

∴ অগ্রগামী তরঙ্গের মোট শক্তির পরিমাণ,

$$\boxed{E = 2\pi^2 n^2 m A^2}$$

অগ্রগামী তরঙ্গের একক আয়তনে শক্তির ঘনত্ব.

অগ্রগামী তরঙ্গের একক আয়তনে শক্তির ঘনত্ব

∴ একক আয়তন $V = 1$ হলে, $\rho = m$ হয়.

∴ মোট শক্তি একক আয়তনে ঘনত্ব হবে

$$\boxed{E = 2\pi^2 n^2 \rho A^2}$$

আমরা জানি,

$m = \rho V$

$\Rightarrow \rho = \frac{m}{V}$

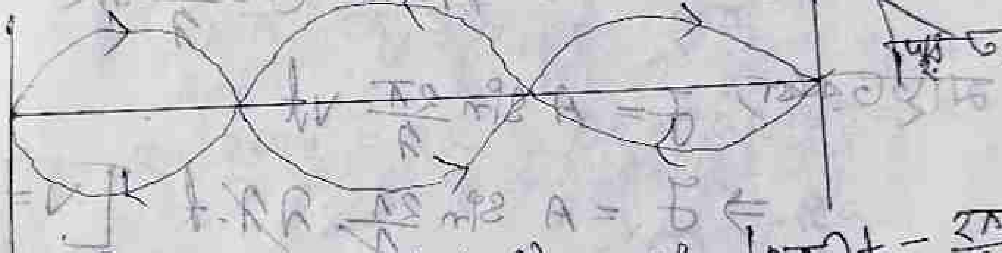
∴ আয়তন একক হলে, $V=1$

$\boxed{\rho = m}$ হবে

এখানে $\lambda = 1$ অর্থাৎ একটি তরঙ্গের জন্য শক্তির ঘনত্ব।

স্থির তরঙ্গের সমীকরণ নির্ণয় ও সুস্পন্দ ও নিস্পন্দ বিন্দুর শর্ত প্রতিপাদন কর

পরস্পর দুটি বিপরীতগামী তরঙ্গের উপরিপাতনের ফলে যেই তরঙ্গের সৃষ্টি হয় তাকেই স্থির তরঙ্গ বলে।



∴ তরঙ্গ দুটি, $y_1 = a\sin(\omega t - \delta) = a\sin\left(2\pi n t - \frac{2\pi}{\lambda}\cdot x\right)$

$$= a\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} vt - \frac{2\pi}{\lambda}\cdot x\right)$$

$$\Rightarrow y_1 = a\sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) \text{ --- (i)}$$

$$\boxed{v = n\lambda \Rightarrow n = \frac{v}{\lambda}}$$

আবার, $y_2 = a\sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt + x)$ --- (ii)

∴ এদের উপরিপাতনের ফলে স্থায়ী তরঙ্গ,

$$y = y_1 + y_2 = a\sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) + a\sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt + x)$$

$$\Rightarrow y = a\left\{2\sin\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{vt-x+vt+x}{2}\right)\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{vt-x-vt-x}{2}\right)\right\}$$

$$= 2a\sin\frac{2\pi}{\lambda}\cdot vt\ \cos\frac{2\pi}{\lambda}(-x)$$

$$= 2a\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\ \sin\frac{2\pi}{\lambda}vt \qquad [\cos(-\theta) = \cos\theta]$$

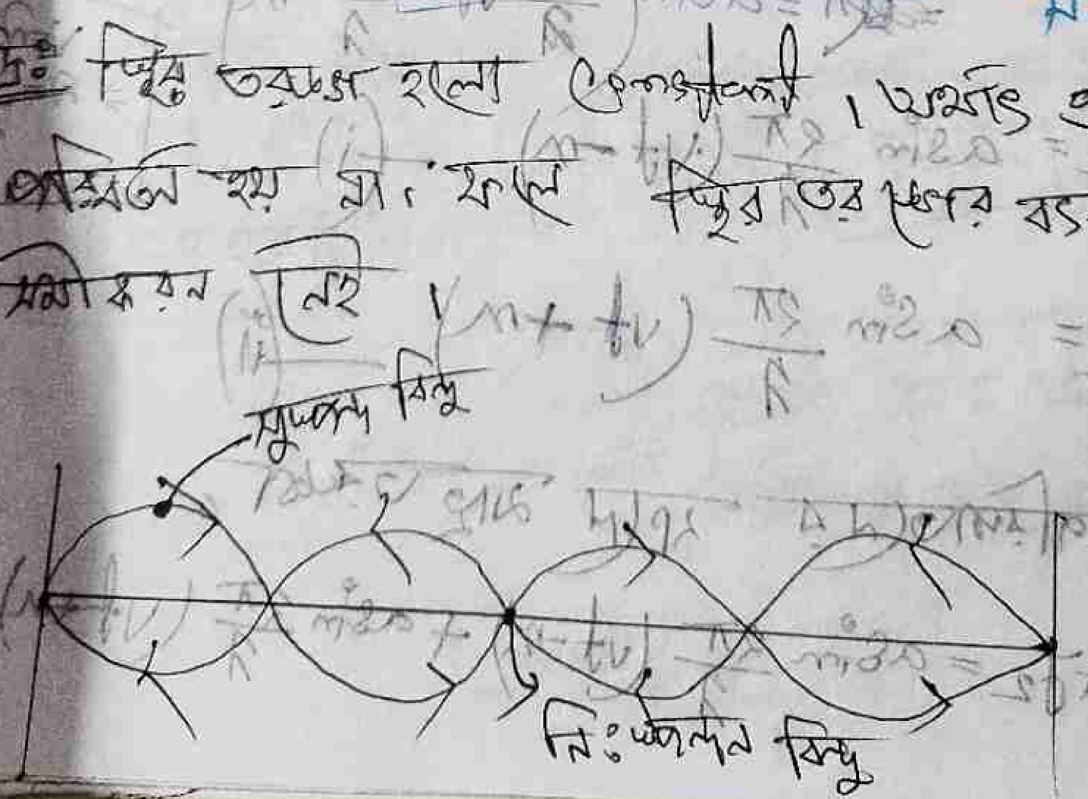
মাতৃতরঙ্গের বিস্তার, $A = 2a\cos\frac{2\pi}{\lambda}x$

∴ মাতৃতরঙ্গ, $y = A\sin\frac{2\pi}{\lambda}vt$

$$\Rightarrow y = A\sin\frac{2\pi}{\lambda}n\lambda\cdot t \qquad [v = n\lambda]$$

$$\therefore \boxed{y = A\sin 2\pi n t}$$ স্থির তরঙ্গের সমীকরণ

বিঃদ্রঃ স্থির তরঙ্গ হলো constant। অর্থাৎ এর কোনো পরিবর্তন হয় না। ফলে স্থির তরঙ্গের বর্ধকলন সমীকরণ নেই।



আমরা জানি, সুস্পন্দন বিন্দুতে বিস্তার maximum ও নিস্পন্দন বিন্দুতে বিস্তার minimum হয়ে থাকে।

∴ প্রশ্ন মতে, স্থির তরঙ্গের বিস্তার, $A = 2a\cos\frac{2\pi}{\lambda}x$

∴ সুস্পন্দন বিন্দু // বিস্তার max, হলে, $\frac{2\pi}{\lambda}x =$

$\cos 0^\circ = \pm 1 = max = \cos\frac{2\pi}{\lambda}x$

$\frac{2\pi}{\lambda}x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots n\pi$

∴ $A_1 = 2a\cos 0^\circ = 2a$, $A_2 = 2a\cos\pi = -2a$

$A_3 = +2a$, $A_4 = -2a$

∴ $A = \pm 2a$ হলে সুস্পন্দন বিন্দু হবে।

নিস্পন্দন বিন্দুর জন্য // বিস্তার minimum $= \cos 90^\circ = 0$

$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pi/2, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \ldots (2n-1)\pi/2$

∴ বিস্তারের মান, $A = 0$ হবে।

(Proved).

স্থির তরঙ্গের গতিশক্তির রাশিমালা

$y_1 = a \sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)$; $y_2 = a \sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt + x)$

∴ উপরিপাতনের সাহায্যে, $y = 2a \cos\frac{2\pi}{\lambda} \cdot x \sin\frac{2\pi}{\lambda} vt$

$$\therefore V = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\, 2a \cos\frac{2\pi}{\lambda} x \sin\frac{2\pi}{\lambda} vt$$

$$= 2a \cos\frac{2\pi}{\lambda} x \cdot \cos\frac{2\pi}{\lambda} vt \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot v$$

$$\Rightarrow V = \frac{4\pi a v}{\lambda} \cos\frac{2\pi}{\lambda} x \cos\frac{2\pi}{\lambda} vt$$

$$\Rightarrow V = \frac{4\pi a n \lambda}{\lambda} \cos\frac{2\pi}{\lambda} x \cos\frac{2\pi}{\lambda} vt$$

$$\therefore V = 4\pi a n \cos\frac{2\pi}{\lambda} x \cos\frac{2\pi}{\lambda} vt$$

∴ প্রযুক্তি। $E_k = \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} m\, 16 a^2 \pi^2 n^2 \cos^2\frac{2\pi}{\lambda} x \cos^2\frac{2\pi}{\lambda} vt$

$= \cancel{\frac{1}{2} m (4A}$

$$\Rightarrow E_k = 8 m \pi^2 a^2 n^2 \cos^2\frac{2\pi}{\lambda} x \cos^2\frac{2\pi}{\lambda} vt$$

$\Rightarrow E_k = 4m\pi^2 a^2 n^2 \cos^2\frac{2\pi}{\lambda}x \cdot \cos^2\frac{2\pi}{\lambda}\,vt$

$\Rightarrow E_k = 4m\pi^2 a^2 n^2 \cos^2\frac{2\pi}{\lambda}x \; \underline{\cos^2 2\pi nt}$

এখানে $\cos^2 2\pi nt$ হলো variable, তাই এটি যদি maximum হয় তাহলে গতিশক্তি maximum হবে।

$\therefore E_{k(max)} = 4m\pi^2 a^2 n^2 \cos^2\frac{2\pi}{\lambda}x \quad [\cos^2 2\pi nt = 1]$

আমরা জানি, $E_{k(max)}$ হলে $E_{p(min)}$ হয় তাই মোট শক্তি,

$E_{p(min)} = 0$

$E = \cancel{E_p + E_k}\; E_{k(max)} + E_{p(min)}$

$\Rightarrow 4m\pi^2 a^2 n^2 \cos^2\frac{2\pi}{\lambda}x$

$\therefore$ একক আয়তনে $(v = 1)$ শক্তির ঘনত্ব $= \rho = \frac{m}{v}$ $\Rightarrow \rho = m$

$\therefore$ একক আয়তনে শক্তির ঘনত্ব

$d_E = 4\rho\pi^2 a^2 n^2 \cos^2\frac{2\pi}{\lambda}x$

∴ স্থির তরঙ্গের dx আয়তনে শক্তির ঘনত্ব, আয়তন = দৈর্ঘ্য × ক্ষেত্রফল

$$\int_0^\lambda dE = 4\rho\pi^2 a^2 n^2 \int_0^\lambda 2\cos^2\frac{2\pi x}{\lambda}\,dx$$

$$= 4\rho\pi^2 a^2 n^2\left[\int_0^\lambda 1\,dx + \int_0^\lambda \cos\frac{4\pi x}{\lambda}\,dx\right]$$

$$= 4\rho\pi^2 a^2 n^2\left[\left[x\right]_0^\lambda + \frac{\left[\sin\frac{4\pi x}{\lambda}\right]_0^\lambda}{\frac{4\pi}{\lambda}}\right]$$

$$= 4\rho\pi^2 a^2 n^2\left[(\lambda-0) + \frac{\lambda}{4\pi}(\sin 4\pi - \sin 0)\right]$$

$$= 4\rho\pi^2 a^2 n^2 \cdot \lambda$$

$$\Rightarrow E = 4\pi^2 n^2 \rho a^2 \cdot \lambda$$ একক আয়তনে শক্তিঘনত্ব

∴ একটি তরঙ্গের যে দৈর্ঘ্য $(\lambda = 1)$, শক্তির মাত্রিমান স্থির

$$\boxed{E = 4\pi^2 n^2 \rho a^2}\,,$$

(Most Important)

প্রমানিত হলো যে,

প্রতি তরঙ্গদৈর্ঘ্যের (ম=১) স্থির তরঙ্গের একক আয়তনে শক্তির ঘনত্ব অগ্রগামী তরঙ্গের একক আয়তনে শক্তি ঘনত্বের দ্বিগুন।

→ অগ্রগামী তরঙ্গের জন্য,

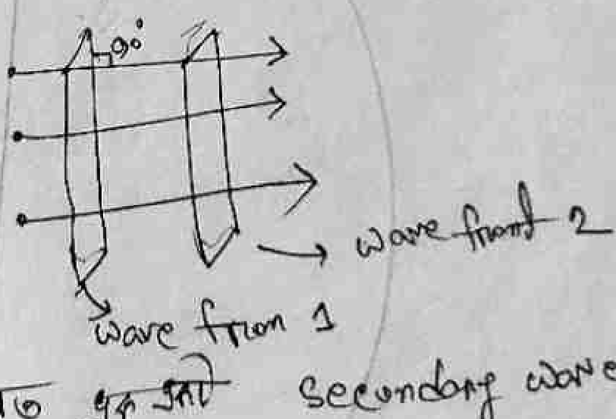
$\therefore$ ~~$E = 2\pi^2 n^2$~~ $E = 2\pi^2 a^2 n^2 \rho$

$E = 4\pi^2 a^2 n^2 \rho$ → স্থির তরঙ্গের জন্য

Hygens Principle

(1) wavefront is always perpendicular to direction of rays.

Here wave front 1 & 2 are always perallal.



wavefront এর বিন্দু সমূহ নতুন এক একটি secondary wavelets হিসাবে কাজ করে, কারন সমান সময় পর ~~থাকে~~ আমরা আরো wavelets পাবো। সেগুলোকে সমান ভাবে দাড়ালে আরেকটি wavefront পাওয়া যাবে, যা পূর্বেরটির সমান্তরাল।

Physics Department

Md. Emon

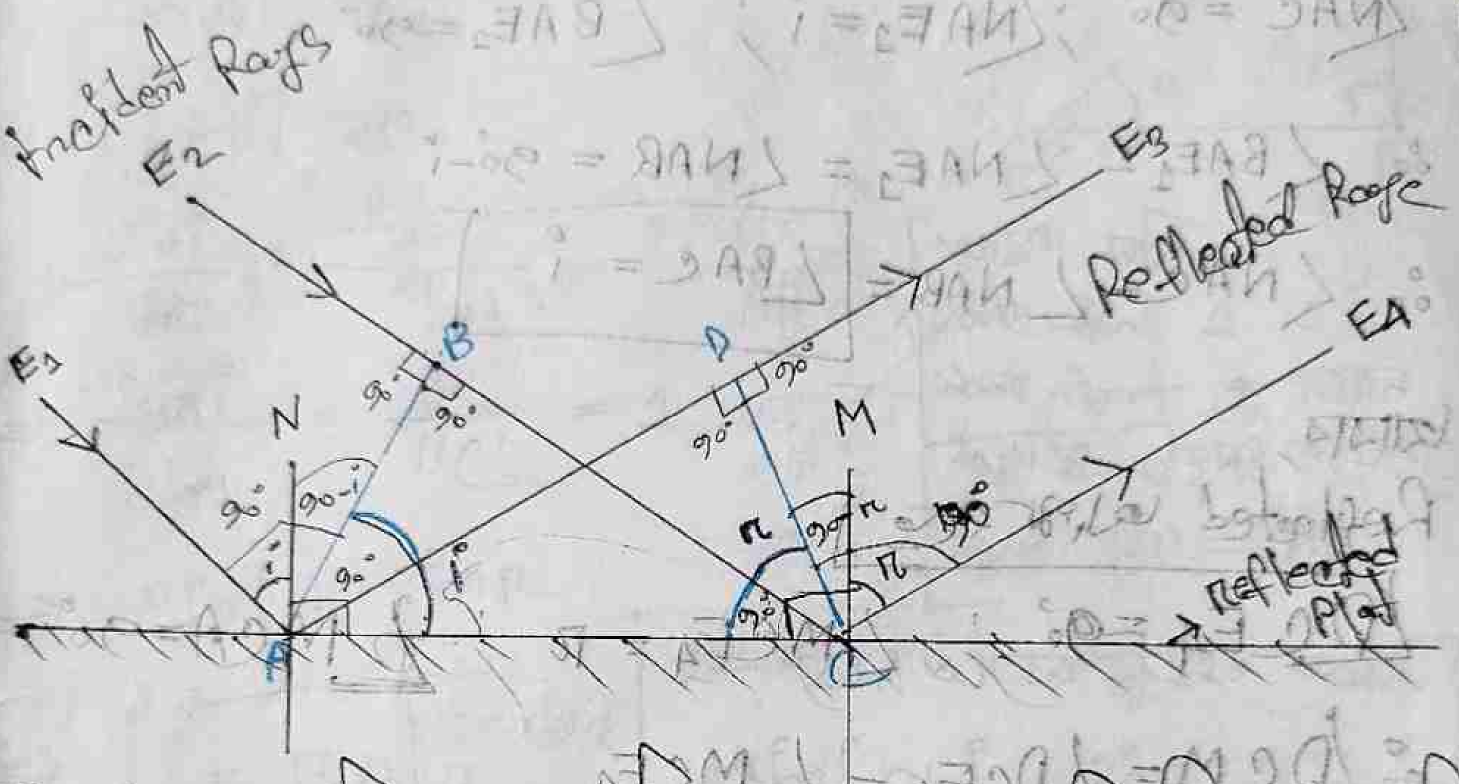
Roll. 270091

2

session. 2020-2021

subject: (PHA-205) waves, oscillation & advanced mechanics.

Proof for law of Reflection



E_1, E_2 → আপতিত আলোকরশ্মি E_3, E_4 → প্রতিফলিত আলোকরশ্মি

AB → incident wavefront (E_1, E_2 এবং AB পরস্পর লম্ব)

CD → reflected wave front ($E_3 E_4$ এবং CD পরস্পর লম্ব)

$\boxed{BC = AD}$ Reflected plate এর সাথে AN এবং MC লম্বভাবে অবস্থায় আছে।

আমরা জানি incident Rays পরস্পর সমান্তরাল ও Reflected Rays পরস্পর সমান্তরাল. এবং তাদের wave front পরস্পর সমান্তরাল। তাই AB = DC

Incident রশ্মির হতে

চিত্র হতে দেখা যাচ্ছে,

$\angle NAC = 90^\circ$; $\angle NAE_1 = i$; $\angle BAE_1 = 90^\circ$

$\therefore \angle BAE_1 - \angle NAE_1 = \angle NAB = 90^\circ - i$

$\therefore \angle NAC - \angle NAB = \boxed{\angle BAC = i}$

আবার,

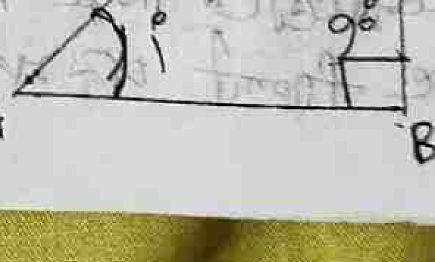
Reflected রশ্মির হতে,

$\angle DCE_4 = 90^\circ$; $\angle MCE_4 = r$; $\angle MCA = 90^\circ$

$\therefore \angle DCM = \angle DCE_4 - \angle MCE_4$
$= 90^\circ - r$

$\therefore \angle DCA = \angle MCA - \angle DCM = r$

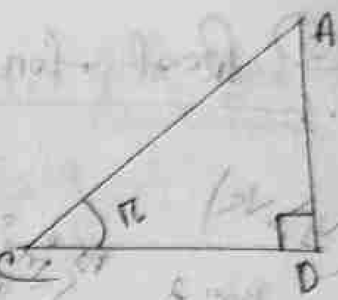
$\Rightarrow \boxed{\angle DCA = r}$



$\therefore$ ΔABC হতে পাই,

$\therefore \sin i = \frac{BC}{AC}$ —(i)

আবার, ΔDCA হতে পাই,



$$\sin r = \frac{AD}{AC} \text{ —— (iii)}$$

$\therefore$ (i ÷ iii) করে,

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\frac{BC}{AC}}{AD/AC} = \frac{BC}{AD}$$

[আমরা জানি, wave front 1 ও wave front 2 সমান দূরত্বে উৎপন্ন হয়েছে তাই $BC = AD$]

$$\Rightarrow \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{BC}{BC} = 1$$

$$\Rightarrow \sin i = \sin r$$

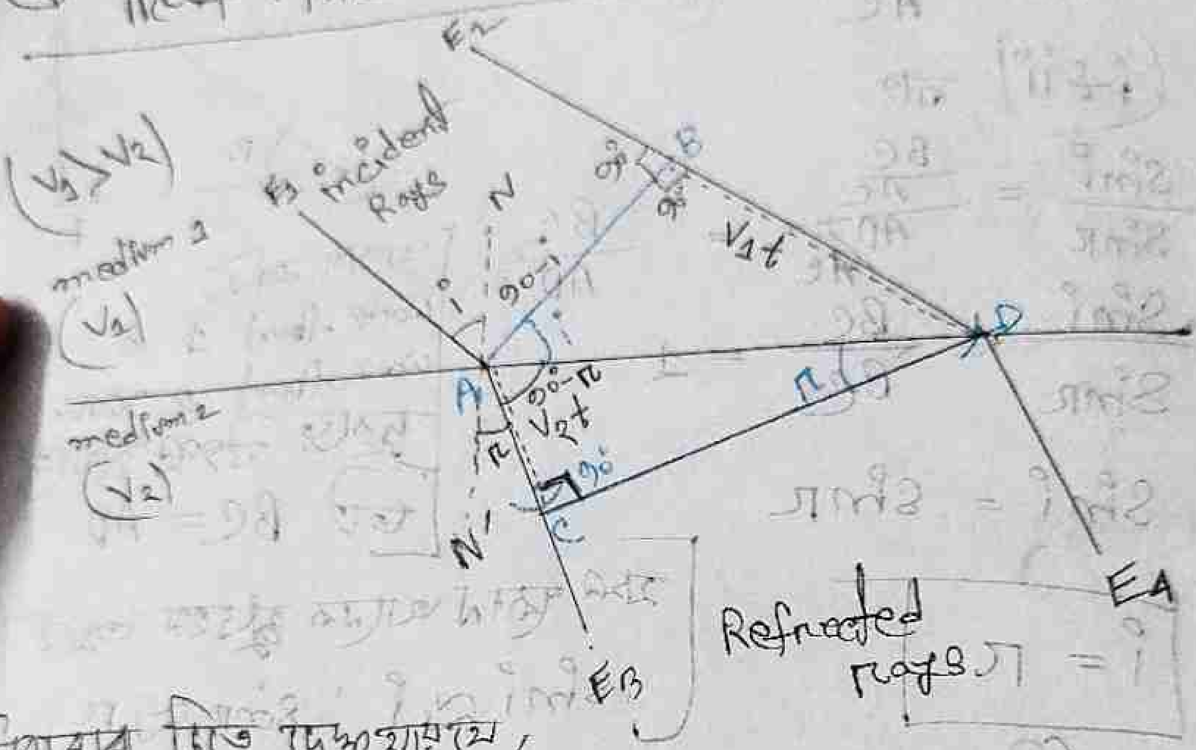
$$\Rightarrow \boxed{i = r}$$

[যখন কোন কোণের ক্ষুদ্রতম তখন $\sin i \approx i$, $\sin r \approx r$]

(Proved)

∴ Huygens এর আলোর প্রতিফলনের সূত্রে দেখা যায়, আলোর আপতন ও প্রতিফলন কোণ সমান।

২ Proof for law of Refraction



উপরের চিত্রে দেখা যায় যে,
medium 1 (যেখানে আলোর বেগ v_1 এবং E_1, E_2 incident রশ্মি তারপর medium 2 যেখানে আলোর বেগ v_2 এবং E_3, E_4 refracted rays রশ্মি। t সময়ে আলো medium (1) এ যেই দূরত্ব অতিক্রম করবে তারথেকে কম দূরত্ব অতিক্রম করবে medium (2) থেকে কারন ($v_1 > v_2$) ∴ $\boxed{BD > AC}$ $\boxed{v_1t > v_2t}$

চিত্র॥ AB = incident wave-front ; CD = Refracted wave-front.

$\angle NAD = 90^\circ$; $\angle E_1AN = i$; $\angle BAE_1 = 90^\circ$

$\therefore \angle NAB = \angle BAE_1 - \angle E_1AN = 90^\circ - i$

$\therefore \angle BAD = \angle NAD - \angle NAB = i$

$\therefore \boxed{\angle BAD = i}$

আবার, $\angle DAN' = 90^\circ$; $\angle E_3AN' = r$

$\therefore \angle E_3AD = \angle DAN' - \angle E_3AN' = 90^\circ - r$

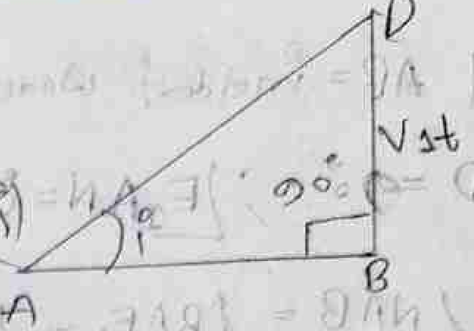
$\Rightarrow \angle E_3AD = 90^\circ - r$

আবার প্রতিসৃত wavefront CD ছেদক ray E_3, E_4 এর সাথে 90° কোণ উৎপন্ন করে তাই $\angle ACD = 90^\circ$

$\therefore \Delta ACD$ হতে $\angle CAD = 90^\circ - r$; $\angle ACD = 90^\circ$ হলে $\angle ADC$ হবে $= r$ কারণ ত্রিভুজের তিন কোণের ~~সমষ্টি~~ 180° $\therefore \angle A + \angle C + \angle D = 180^\circ$ হয়

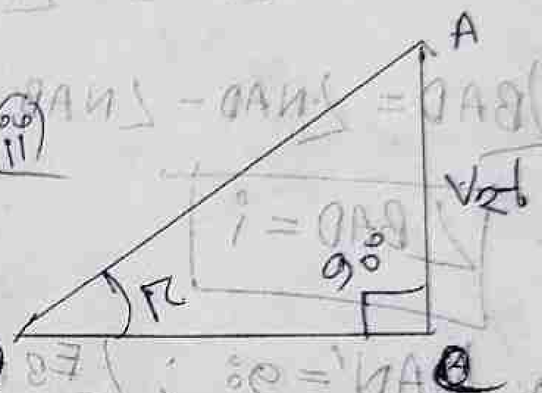
∴ Δ ABD হতে পাই,

$$\therefore \sin i = \frac{BD}{AD} = \frac{V_1 t}{AD} \quad \text{—(i)}$$



∴ Δ ACD হতে পাই,

$$\sin r = \frac{AC}{AD} = \frac{V_2 t}{AD} \quad \text{—(ii)}$$



(i ÷ ii) করে পাই,

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{V_1 t / AD}{V_2 t / AD} = \frac{V_1}{V_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{V_1}{V_2} = \text{constant (Proved)}}$$ যেহেতু বেগ constant তাই,

আবার আমরা জানি, বেগ ও প্রতিসরাঙ্কে $V \propto \frac{1}{\mu}$

$$\boxed{\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\mu_2}{\mu_1} = {}_1\mu_2} \qquad \therefore \boxed{\frac{V_1}{V_2} = \frac{\mu_2}{\mu_1}}$$

→ [হাইগেন্সের নীতি হতে স্নেলের সূত্র প্রতিপাদিত হলো]

Chapter - 2

Problem // $\vec{\nabla}.\vec{B}=0$ when $\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ or divergence of magnetic field is zero; proved.

Maxwell এর বাকি equation হতে,

১ম $\vec{\nabla}.\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon}$ 3rd $\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

২য় $\vec{\nabla}.\vec{B}=0$ 4th $\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu(\vec{J}+\epsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t})$

আমরা জানি, $\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})=0$

curl $\vec{E}$ এর divergence করলে তা শূন্য হয়।

$\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\times\vec{E})=\vec{\nabla}.\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) \Rightarrow 0=-\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}.\vec{B})$

$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}.\vec{B}=0}$ (Proved)

Displacement current density $\Rightarrow \vec{J}_D=\epsilon\frac{\partial E}{\partial t}$

Problem // Maxwell এর 1st equation হতে কুলম্বের সূত্র প্রমাণ কর।

We know Maxwell 2nd equation, $\vec{\nabla}.\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon}$

∴ আয়তনের সাপেক্ষে যোগজীকরণ করে পাই, $\vec{q}$ আয়তনের মোট চার্জ,

$\int_V \vec{\nabla}.\vec{E}\,dv=\int_V\frac{1}{\epsilon}.\rho\,dv=\frac{q}{\epsilon}$

$\Rightarrow$ Gauss theorem হতে পাই $\oint_V \vec{\nabla}.\vec{A}.\,dv = \oint_S \vec{A}\,ds$

$$\Rightarrow \int_S \vec{E}\,d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon} \Rightarrow \vec{E}\oint_S ds = q/\epsilon$$

$$\Rightarrow \vec{E}.\,(4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon} \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

$$\frac{\vec{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{r^2}}$$ → কুলম্বের সূত্র।

Problem Maxwell এর 4th equation হতে equation of continuity প্রমাণ কর।

Maxwell এর 4th equation হলো,

$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right) = \mu\left(\vec{J} + \epsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$ এর equation এর

continuity হলো, $\boxed{\operatorname{div}\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$

Maxwell এর 4th equation কে div করে পাই

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = \vec{\nabla}\cdot\mu\left(\vec{J}+\epsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

$$\Rightarrow 0 = \mu(\vec{\nabla}\cdot\vec{J}) + \mu\epsilon\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})$$

$$\Rightarrow \left\{\mu(\vec{\nabla}\cdot\vec{J}) + \mu\epsilon\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho}{\epsilon}\right)\right\}\right\} = 0$$ [from maxwell 1st equation]

$$\Rightarrow \mu\ \text{div.}\vec{J} + \mu\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{div.}\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0}$$ Proved

Integral from of maxwell equations

Maxwell first equation এর রূপ / volume integral

① $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

$$\Rightarrow \int_v \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\,dv = \frac{1}{\epsilon_0}\int_v \rho\,dv$$ [আয়তনের নিয়মে]

$$\Rightarrow \boxed{\int_s \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0}q}$$

[Gauss এর সূত্র হতে $\int_v \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,dv = \int_s \vec{A}\cdot d\vec{s}$]

We can write

$\epsilon E = D$ = আয়তনিক অভিক্ষেপণ

$$\Rightarrow \int_S \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{s} = q \quad \Rightarrow \boxed{\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = q} \rightarrow \text{1st Integral formula.}$$

Maxwell 1st Integral equation হতে বলা যায় যে, একটি পৃষ্ঠতল কর্তৃক পরিসীমিত আয়তনে মোট তড়িৎ সরণ ($\vec{D}$) ঐ আয়তনের নীট চার্জের সমান।

Maxwell 2nd Integral form equation | volume Integral.

$$\text{(ii)}\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B}\, dv =$$

$$\Rightarrow \boxed{\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0}$$

কোনো আবদ্ধতলে মোট ~~বহির্গামী~~ চৌম্বক ফ্লাক্সের মান শূন্য।

Maxwell 3rd law Integral formula | surface Integral

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \cancel{\int (\vec{\nabla} \times \vec{E})\, dv = \int_V \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}\, dv}$$

$$\Rightarrow \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E})\, d\vec{s} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, d\vec{s}$$

$$\Rightarrow \boxed{\oint_C \vec{E}\, d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}}$$

Stockes law হতে

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E})\, d\vec{s} = \oint_C \vec{E}\, d\vec{l}$$

~~কোনো~~ সীমাবদ্ধ পথে মোট তড়িৎ চালকবল ঐ ~~পথ কর্তৃক~~ আবদ্ধ পৃষ্ঠতলে অতিক্রমকারী মোট চৌম্বক ফ্লাক্সের সময়ের সাপেক্ষে পরিবর্তনের ~~হার~~ সমান।

Maxwell 4th integral formula,

$$(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = \mu\left(\vec{J}+\epsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

$$\Rightarrow \int_S (\vec{\nabla}\times\vec{B})\, d\vec{s} = \mu\int_S \left(\vec{J}+\epsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{s}$$ [Stockes law প্রয়োগ করে]

$$\Rightarrow \boxed{\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu\int_S \left(\vec{J}+\epsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) d\vec{s}}$$

কোনো ~~বদ্ধ~~ সীমাবদ্ধ পথের মোট তড়িৎ চালকবল ঐ পথ দ্বারা আবদ্ধ পৃষ্ঠ তলে অতিক্রম কারী পরিবহন প্রবাহ চৌম্বক ফ্লাক্স ও তড়িৎ সরণের সময়ের সাপেক্ষে পরিবর্তনের সমষ্টির সমান।

Problem|| দেখাও যে তড়িৎ চৌম্বক তরঙ্গ সমীকরণকে নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায় - $(\vec{\nabla}^2+\vec{k}^2)\vec{E}=0$ যেখানে $\vec{k}$ = তরঙ্গ ভেক্টর, তরঙ্গমান $\frac{2\pi}{\lambda}$।

we know, $\nabla^2\cdot\vec{E} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$

$$= \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{--- (1)}$$

সমসত্ত্বিক তড়িৎ তরঙ্গের জন্য প্রমাণ কর যে

$\vec{E} = E_0 e^{i\omega t}$

$\Rightarrow \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega E_0 e^{i\omega t}$

$\Rightarrow \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = i^2\omega^2 E_0 e^{i\omega t} = -1\,\omega^2 E_0 e^{i\omega t}$

$$\boxed{\begin{aligned}\omega &= 2\pi\nu = 2\pi\frac{c}{\lambda} \\ &= \frac{2\pi}{\lambda}\cdot c \\ &= kc\end{aligned}}$$

$\Rightarrow \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -(kc)^2 E_0 e^{i\omega t}$

$\Rightarrow \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -k^2c^2\cdot\vec{E}$

এখন $\Rightarrow \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -k^2c^2\vec{E}$ এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই

$\nabla^2\cdot\vec{E} = \dfrac{1}{c^2}(-k^2c^2\vec{E})$

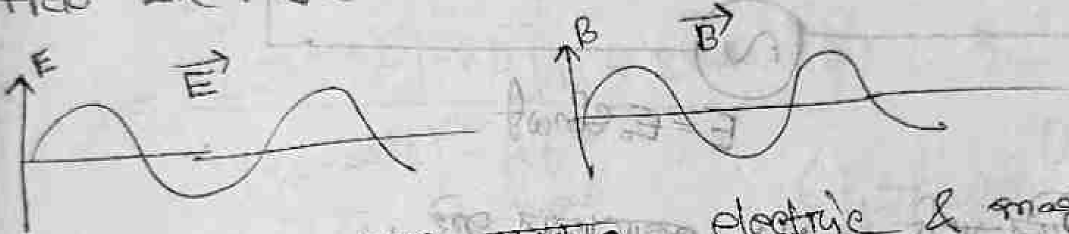
$\Rightarrow \nabla^2\cdot\vec{E} + k^2\vec{E} = 0$

$\Rightarrow (\nabla^2 + k^2)\cdot\vec{E} = 0$

$\therefore (\nabla^2 + k^2)\cdot\vec{E} = 0$ (Proved)

Equation of ~~eq~~ continuity proof only basis of ~~lo~~ ~~lo~~ General logic

প্রতিটি ~~নিরীক্ষ~~ আবর্তিত গতিশীল আধানের ক্ষেত্রে সবসময় electric & magnetic field থাকে। একে বলে electromagnetic wave থাকে।



electromagnetic wave মূলত electric & magnetic field থাকে যা মূলত পরস্পর লম্বভাবে অবস্থান করে এবং তাদের যে লব্ধি বেগ থাকে যেটা তাদের সাথে লম্বভাবে অবস্থান করে এবং যেটার বেগ মূলত আলোর বেগের সমান।

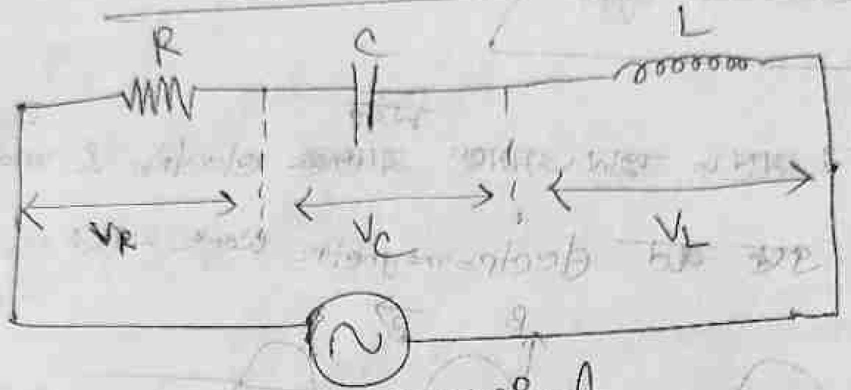
চার্জের সংরক্ষণশীলতাকেই equation of continuity বলে।

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

যদি স্থির অবস্থা ধরা হয় তবে আমরা জানি স্থির অবস্থায় সময়ের সাথে চার্জ প্রবাহ ~~সময়ের~~ পরিবর্তনের হার শূন্য $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ হয় তাই স্থির অবস্থায় equation of continuity হবে $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$

current density ~~charge density~~

RCL circuit



$E = E_0 \sin\omega t$

∴ ~~উক্তের সার্কিটের মধ্যে~~ KVL প্রয়োগ করে পাই

$$V_R + V_C + V_L = E_0 \sin\omega t$$

$$\Rightarrow IR + \frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} = E_0 \sin\omega t$$

$$\Rightarrow R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} + L\frac{d^2 i}{dt^2} = E_0 \omega \cos\omega t \quad \left[\frac{d}{dt} \text{ দ্বারা গুন করে}\right]$$

$$\Rightarrow L\frac{d^2 i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = E_0 \omega \cos\omega t \quad \left[\frac{dq}{dt} = i\right]$$

$$\Rightarrow LD^2 i + R.D.i + \frac{1}{C}.i = E_0 \omega \cos\omega t \quad \left[\text{Let } \frac{d}{dt} = D\right]$$

$$\Rightarrow i\left(LD^2 + RD + \frac{1}{C}\right) = \cancel{E_0 \cos\omega t}\ E_0 \omega \cos\omega t$$

$$\Rightarrow i = \frac{E_0 \omega \cos\omega t}{LD^2 + RD + 1/C}$$

যদি $D^2 = -\omega^2$

$$\Rightarrow i = \frac{E_0 \omega \cos\omega t}{-\omega^2 L + \frac{1}{C} + RD} = \frac{E_0 \omega \cos\omega t}{\left(\frac{1}{C} - \omega^2 L\right) + RD}$$

$$\Rightarrow i = \frac{\left[\left(\frac{1}{C} - \omega^2 L\right) - RD\right] E_0 \omega \cos\omega t}{\left[\left(\frac{1}{C} - \omega^2 L\right) - RD\right]\left\{\left(\frac{1}{C} - \omega^2 L\right) + RD\right\}}$$

[কনজুগেট দ্বারা গুণ করে পাই]

$$\Rightarrow i = \frac{\left[\left(\frac{1}{C} - \omega^2 L\right) - RD\right] E_0 \omega \cos\omega t}{\left(\frac{1}{C} - \omega^2 L\right)^2 - R^2 D^2}$$

$D = \frac{d}{dt}$

$$\Rightarrow i = \frac{E_0 \omega \left[\left(\frac{1}{C} - \omega^2 L\right)\cos\omega t - R(-\omega)\sin\omega t\right]}{\left(\frac{1}{C} - \omega^2 L\right)^2 + R^2 \omega^2}$$

$$\Rightarrow i = \frac{\omega^2 E_0 \left[\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)\cos\omega t + R\sin\omega t\right]}{\omega^2 \left[\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 + R^2\right]}$$

$$\Rightarrow i = \frac{E_0 \left[\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)\cos\omega t + R\sin\omega t\right]}{\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 + R^2}$$

$$\Rightarrow i = \frac{E_0 \left[\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)\cos\omega t + R\sin\omega t\right]}{\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 + R^2}$$

Let $\frac{1}{\omega C} - \omega L = A\sin\phi$ | $R = A\cos\phi$

$$\Rightarrow i = \cancel{\frac{E_0\left[A\sin\phi\cos\omega t + A\cos\phi\sin\omega t\right]}{A\sin^2\phi + A\cos^2\phi}}$$

$$\Rightarrow i = \cancel{\frac{E_0 A\sin(\omega t+\phi)}{A(\sin^2\phi+\cos^2\phi)} = E_0\sin(\omega t+\phi)}$$

$$\Rightarrow \cancel{i = E_0\sin(\omega t+\phi)}$$

$\therefore$ Amplitude হবে

$$A^2\sin^2\phi + A^2\cos^2\phi = \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 + R^2$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 + R^2} \rightarrow \text{Amplitude}$$

আবার,

$$\cancel{\tan\phi} = \frac{A\sin\phi}{A\cos\phi} = \frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R}$$

$$\Rightarrow \tan\phi = \frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R}$$

$$\therefore \phi = \tan^{-1}\left[\frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R}\right] \rightarrow \text{phase}$$

$$\therefore i = \frac{E_0 A\left[\sin\phi\cos\omega t + \cos\phi\sin\omega t\right]}{\left(\frac{1}{\omega C}-\omega L\right)^2 + R^2}$$

$$\Rightarrow i = \frac{E_0 A \sin(\omega t+\phi)}{\left(\frac{1}{\omega C}-\omega L\right)^2+R^2}$$

এখানে, A এর মান বসিয়ে পাই,

$$\Rightarrow i = \frac{E_0\sqrt{\left(\frac{1}{\omega C}-\omega L\right)^2+R^2}\cdot\sin(\omega t+\phi)}{\left(\frac{1}{\omega C}-\omega L\right)^2+R^2}$$

$$\Rightarrow i = \frac{E_0\sin(\omega t+\phi)}{\sqrt{\left(\frac{1}{\omega C}-\omega L\right)^2+R^2}}$$

$$\Rightarrow i = \frac{E_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{\omega C}-\omega L\right)^2+R^2}}\sin(\omega t+\phi)$$

$$\Rightarrow i = i_0\sin(\omega t+\phi)$$

এটি মূলত AC সার্কিটের সমীকরণ, এর বলা যেতে
পারে যে RCL সার্কিট হলো AC সার্কিট যেখানে

$$i_0 = \frac{E}{\sqrt{\left(\frac{1}{\omega C}-\omega L\right)^2+R^2}}$$

∴ সার্কিটের প্রতিবাধ / Impedance

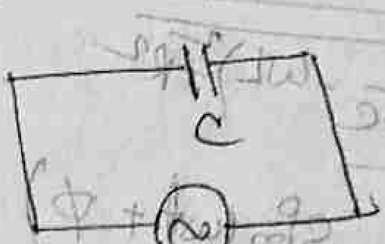
We know, $i = \frac{V}{R}$ ∴ $i_0 = \dfrac{E_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 + R^2}}$

∴ সার্কিটের Impedance, $Z = \sqrt{\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 + R^2}$

∴ সার্কিটে ধারকের Impedance, $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$

∴ সার্কিটের আবেশকের Impedance, $X_L = \omega L$

AC - Circuit Containing Capacitor



$E = E_0 \sin\omega t$

ধারকের দুইপ্রান্তের বিভব,

$V = \frac{q}{C}$, AC সরবরাহকৃত

বিভব $= E_0 \sin\omega t$

∴ KVL করলে,

$\frac{q}{C} = E_0 \sin\omega t$

$\Rightarrow q = C E_0 \sin\omega t$ —— (1)

আমরা জানি, ধারকের মধ্যে প্রবাহিত তড়িৎ,

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} CE_0 \sin\omega t$$

$$\Rightarrow i = C\omega E_0 \cos\omega t$$

$$\Rightarrow i = \frac{E_0}{\left(\frac{1}{C\omega}\right)} \cos\omega t$$

$$\Rightarrow i = \frac{E_0}{\left(1/C\omega\right)} \sin\left(\omega t + \pi/2\right)$$

$$\Rightarrow i = \underbrace{i_0}_{\text{বিস্তার}} \sin\left(\omega t + \pi/2\right)$$ → AC কারেন্টের জন্য প্রযোজ্য

এখানে, $i_0 = \frac{E_0}{1/C\omega}$ = Current Amplitude = প্রবাহ মাত্রার বিস্তার

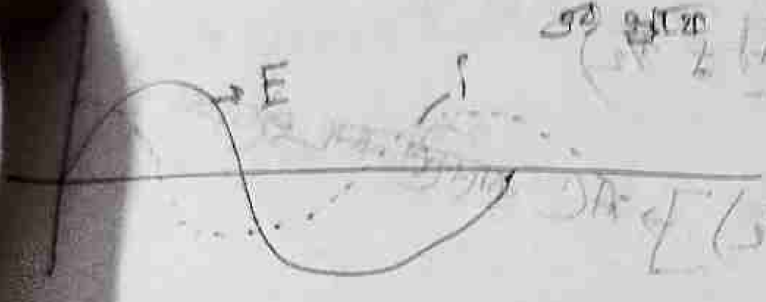
$1/C\omega$ → বিস্তার

এখানে, ধারকের Reactance $X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}$

If $f \to$ high then $X_C \to$ low অর্থাৎ উচ্চ কম্পাঙ্কের বিভিন্ন তড়িৎ প্রবাহ ধারকের মধ্যদিয়ে ~~কম বাধায় অতিক্রম করতে~~ ~~DC~~ পারবে। উচ্চ কম্পাঙ্কের তড়িৎ প্রবাহিত হয় বলে একে ~~High~~ Bypass Condenser বলে।

If $f \to$ low, $X_c \to$ high. যদি প্রত্যাবর্তী বিভবের কম্পাঙ্ক কম হয় এবং তা থাকলে বিভবের Reactance বৃদ্ধি পাবে এবং অধিক মানে বিভব বাধা পাবে। একে Blocking condenser বলে।

এক মুহূর্তে



Capacitor বর্তনীর ক্ষমতা, P

$$P = E \cdot i = E_0 \sin\omega t \cdot i_0 \sin(\omega t + \pi/2)$$

$$= E_0 i_0 \sin\omega t \cos\omega t = E_0 i_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\sin\omega t \cos\omega t$$

$$= \frac{E_0 i_0}{2} \sin 2\omega t$$

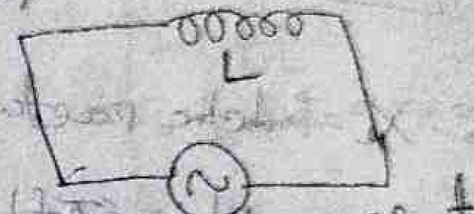
$$P_{avg} = \frac{\int_0^{2\pi/\omega} \frac{E_0 i_0}{2} \sin 2\omega t \, dt}{2\pi/\omega} = 0$$

এই চক্রের জন্য Capacitor circuit এর ক্ষমতা = Zero

একই সময়ে দুই রাশি উৎপন্ন হয় পরবর্তিতে তা reverse হয়ে যায় তাই ($\omega \to \frac{2\pi}{\omega}$) সময় পরে [illegible] [illegible] শূন্য থাকে।

AC circuit containing ~~Inducting~~ Inductor

আমরা জানি,



E.M.F ~~E~~ $E = -\frac{d\phi}{dt}$

$\phi = Li$

$\Rightarrow E = -L\frac{di}{dt}$

$\therefore$ KVL প্রয়োগ করে পাই,

$E_0 \sin\omega t = L\frac{di}{dt}$

$\Rightarrow di = \frac{E_0}{L}\sin\omega t \, . dt$

$\Rightarrow \int di = \frac{E_0}{L}\int \sin\omega t \, dt$

$\Rightarrow I = -\frac{E_0}{L}\frac{\cos\omega t}{\omega} = -\frac{E_0}{\omega L}\sin(\omega t - \pi/2)$

$\Rightarrow I = \frac{E_0}{\omega L}\sin\omega t$ —— (1)

∴ তড়িৎ প্রবাহের শীর্ষমান / বিস্তার

$I_0 = \frac{E_0}{\omega L}$

$\Rightarrow \boxed{I = I_0 \sin\omega t}$ → উক্ত সমীকরণটি হলো AC সমীকরণ
ক্রমিক পরিবর্তিত প্রবাহ এর ক্ষেত্রে [illegible]

X_L = inductive reactance = আবেশজনিত প্রতিঘাত

$= \omega L = 2\pi f L$

অর্থাৎ $f \to$ high হলে $X_L \to$ high হবে

$f \to$ low " $X_L \to$ low হবে।

$I = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega L} \sin(\omega t - \pi/2)$

$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin\omega t$

অর্থাৎ তড়িচ্চালক ও I ($\pi/2$) Phase difference হয়।

ঃ- বিপরীত প্রতি Emf বিবেচনা করলে

$$E = -L\frac{dI}{dt} = -L\frac{d}{dt}\left(I_0 \sin(\omega t - \pi/2)\right)$$

$$\Rightarrow E = -L I_0 \cos(\omega t + \pi/2)\cdot\omega = -L\omega I_0 \cos(\omega t - \pi/2)$$

$$I_0 = \frac{E_0}{\omega L}$$

$$\Rightarrow I_0 \cdot \omega L = E_0$$

$$\Rightarrow E = -E_0 \cos(\omega t - \pi/2)$$

$$\Rightarrow \boxed{E = -E_0 \sin \omega t}$$

→ বিপরীত ~~প্রতি~~ তড়িৎ চালক বল

ঃ- বর্তনীর Power

$$I = -\frac{E_0}{\omega L}\cos\omega t$$

$$\therefore Power = E \cdot I$$

$$= -\frac{E_0^2}{\omega L}\sin\omega t \cos\omega t$$

$$= -\frac{E_0^2}{2\omega L}\sin 2\omega t$$

ঃ- Average power

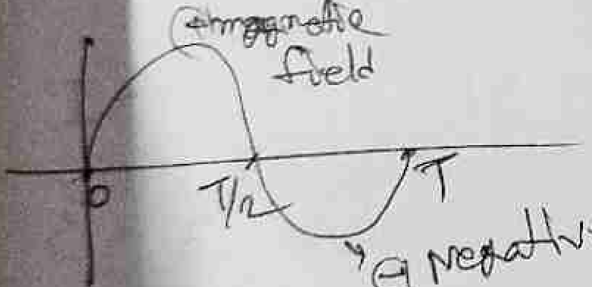
$$P_{avg} = \frac{1}{T}\int_0^T -\frac{E_0^2}{2\omega L}\sin 2\omega t \, dt$$

$$\Rightarrow P_{avg} = -\frac{E_0^2}{2\omega L T}\int_0^T \sin 2\omega t \, dt = \frac{E_0^2}{2\omega L T}\left[\frac{\cos 2\omega t}{2\omega}\right]_0^T$$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ হলে

$P_{avg} = 0$ আসে। অর্থাৎ AC circuit এ শুধু Inductor লাগালে তার পূর্ণ চক্রে যেই Power আসে তা মূলত হলো, প্রথম Half circle magnetic field তৈরী করে এবং পরবর্তী Half circle যে magnetic field বিলীন করে যায় কারণে ~~মূলত~~ পূর্ণ চক্রে যেই power তৈরী হয় তা বিলীন হয়ে যায়।

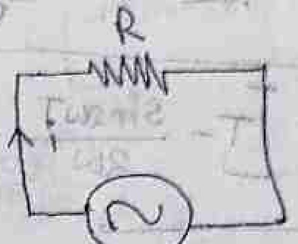
∴ শুধু আবেশযুক্ত বর্তনীতে গড় power zero.



Wattless current || শুধু Inductor যুক্ত circuit এর মধ্যে ~~এক~~ পূর্ণ চক্রের power zero হওয়ায় এ circuit এর মধ্যে যেই তড়িৎ প্রবাহিত হয় তাকে মূলত wattless current বলে।

1 AC Circuit containing a resistance

দিক পরিবর্তিত প্রবাহমান Circuit এর মধ্যে যদি Resistance যুক্ত করে KVL প্রয়োগ করে,



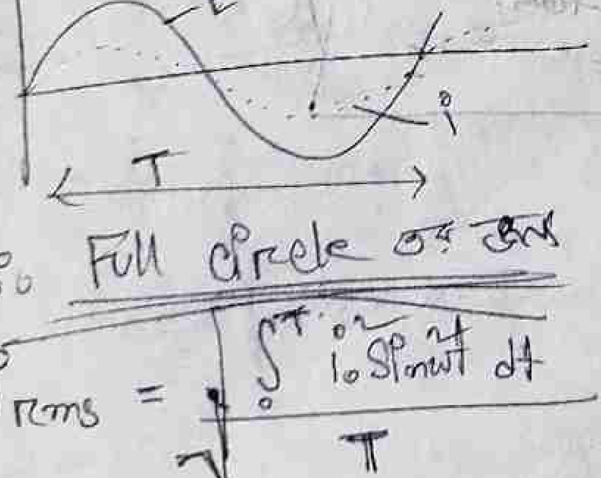
$V = E$

$\Rightarrow iR = E_0 \sin\omega t$

$\Rightarrow i = \frac{E_0}{R} \sin\omega t \Rightarrow i = i_0 \sin\omega t$

$i_0 \rightarrow$ ~~সর্বোচ্চ~~ তড়িৎ প্রবাহের শীর্ষমান

দেখা যাচ্ছে যে, $i = i_0 \sin\omega t$ তড়িৎ প্রবাহ ও তড়িৎচালক $E = E_0 \sin\omega t$ শক্তির অবস্থান সমদশায় সমান, অর্থাৎ এদের phase সমান।



∴ Full circle এর জন্য i_{rms} এর তড়িৎ প্রবাহ

$$i_{rms} = \sqrt{\frac{\int_0^T i_0^2 \sin^2\omega t \, dt}{T}} = \sqrt{\frac{i_0^2}{T} \frac{1}{2} \int_0^T (1 - \cos 2\omega t) \, dt}$$

$$= \sqrt{\frac{i_0^2}{2T}\left[t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right]_0^T}$$

$$= \sqrt{\frac{i_0^2}{2T}\left[T - \frac{\sin 2\omega T}{2\omega} - 0 + 0\right]} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\boxed{T = 2\pi}$$

$$= \sqrt{\frac{i_0^2}{2 \cdot \frac{2\pi}{\omega}}\left[\frac{2\pi}{\omega} - 0\right]}$$

$$\boxed{\sin n\pi = 0,\ n = 1, 2, 3}$$

$$= \sqrt{\frac{i_0^2}{2}} = \frac{i_0}{\sqrt{2}} = 70.7\%\ I_0$$

$$\therefore \boxed{i_{rms} = \frac{i_0}{\sqrt{2}}},\quad E_{rms} = i_{rms} \cdot R = \frac{i_0 R}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_{rms} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}}$$

Change

∴ Total power, $P = E_{rms} \cdot i_{rms}$

গড় ক্ষমতা =

Iavr for Half circle ।

$$I_{av} = \int_0^{T/2} \frac{i_0 \sin\omega t}{T/2}\, dt = \frac{2i_0}{T}\left[-\cos\omega t\right]_0^{T/2}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$= \frac{2i_0}{T}\left[-\frac{\cos\omega \cdot T/2}{\omega} + \frac{\cos 0^\circ}{\omega}\right]$$

$$= \frac{2i_0}{T}\left[-\frac{\cos\pi}{\omega} + \frac{\cos 0^\circ}{\omega}\right] = \frac{2i_0}{T\omega}\left[(-1)(-1)+1\right]$$

$$= \frac{4i_0}{\frac{2\pi}{\omega}\cdot\omega} = \frac{2i_0}{\pi}$$

$$\Rightarrow I_{av} = \frac{2}{\pi} i_0 = 63.7\%\ I_0$$

Full circle এর জন্য Iavr এর

$$I_{av} = \int_0^{T} \frac{i_0 \sin\omega t}{T/2} = \frac{i_0}{T}\int_0^{T} \sin\omega t\, dt$$

$$= \frac{i_0}{T}\left[-\cos\omega t\right]_0^{T} = \frac{i_0}{T}\left[-\cos\omega T + \cos 0^\circ\right]$$

$$= \frac{i_0}{T}\left[-\cos 2\pi + \cos 0^\circ\right] = \frac{i_0}{T} \times 0$$

$I_{av} = 0$ । পূর্ণ চক্রের জন্য average value zero

Problem ||

Maxwell সমীকরণসমূহের ভৌত তাৎপর্য লিখ।

① $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, সরাসরি স্থির তড়িৎ চার্জের গাউসের সূত্রের ফল

② $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$, সরাসরি চৌম্বক ক্ষেত্রে গাউসের সূত্র প্রয়োগের ফল।

③ $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, তড়িৎ চৌম্বক আবেশের ক্ষেত্রে ফ্যারাডের ও লেঞ্জের সমন্বিত সূত্র

④ $(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = \mu\left(\vec{J} + \epsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$, অ্যাম্পিয়ারের সূত্রের পরিমার্জিত রূপ।

ভৌত তাৎপর্য।

(i) তড়িৎ ক্ষেত্র E ধনাত্মক চার্জ হতে বের হয়ে ঋণাত্মক চার্জে মিলিত হয়।

চৌম্বক মেরু একক ভাবে বিচ্ছিন্ন অবস্থায় কোথাও থাকতে পারে না।

(iii) চৌম্বক ক্ষেত্রের পরিবর্তন করে তড়িৎ ক্ষেত্রে পরিবর্তন করা সম্ভব।

(iv) ~~তড়িৎ~~ চৌম্বক ক্ষেত্র সৃষ্টির মাধ্যম দুটি। (i) তড়িৎ ঘনত্ব দ্বারা

ও (ii) তড়িৎ ক্ষেত্রের পরিবর্তন দ্বারা।

\# তড়িৎ চৌম্বকীয় ক্ষেত্রে শক্তির সংরক্ষণশীলতা সম্পর্কিত পয়েন্টিং এর উপপাদ্য প্রতিষ্ঠা কর।

পয়েন্টিং ভেক্টর| তড়িৎ চৌম্বকীয় তরঙ্গ দ্বারা একক ক্ষেত্রফলে একক সময়ে সঞ্চালিত শক্তিকে পয়েন্টিং ভেক্টর বলে।

maxwell এর 3rd ও 4th সূত্র হলো,

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{(i)}, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu\left(\vec{J} + \underbrace{\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{\text{তড়িৎ প্রবেশ্যতা}}\right) \quad \text{(ii)}$$

μ : চৌম্বক প্রবেশ্যতা

$$\text{i} \times \vec{B} - \text{ii} \times \vec{E}$$

$$\left\{(\text{ii} \times \vec{E}) - (\text{i} \times \vec{B})\right\}$$

$$\vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = \mu\left(\vec{J}\cdot\vec{E} + \epsilon\cdot\vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) - \left(-\vec{B}\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{\nabla}\times\vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = \mu\left[(\vec{J}\cdot\vec{E}) + \left(\epsilon\vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{B}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)\right] \quad \text{(iii)}$$

we know,

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E}) - \vec{E}(\vec{\nabla}\times\vec{B})$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{B} &= \mu\vec{H} \\ \vec{D} &= \epsilon\cdot\vec{E}\end{aligned}}$$

$\therefore$ (iii) এ প্রতিস্থাপন করলে,

$$\Rightarrow -\vec{\nabla}(\vec{E}\times\vec{B}) = \mu(\vec{J}\cdot\vec{E})$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{B}) = \mu\left[\vec{J}\cdot\vec{E} + \left[\epsilon\vec{E}\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{B}\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right]\right]$$

$$\Rightarrow \mu\left[\vec{J}\cdot\vec{E} + \left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\cdot\epsilon\vec{E}) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}\cdot\vec{B}\right]\right] = -\vec{\nabla}(\vec{E}\times\vec{B})$$

$$\Rightarrow \vec{J}\cdot\vec{E} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\epsilon\vec{E}^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}^2 = -\vec{\nabla}\left(\vec{E}\times\frac{\vec{B}}{\mu}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{J}\cdot\vec{E} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}\cdot(\epsilon\vec{E}) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}\cdot\vec{B} = -\vec{\nabla}\left(\vec{E}\times\frac{\vec{B}}{\mu}\right)$$

$$\therefore \boxed{\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu},\ \cancel{\vec{E} = \epsilon\vec{D}}\ \ \vec{D} = \epsilon\vec{E}}$$

$$\Rightarrow \vec{J}\cdot\vec{E} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}\cdot\vec{D} + \frac{\mu}{2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}\cdot\vec{H} = -\vec{\nabla}(\vec{E}\times\vec{H})$$

∴ S পৃষ্ঠতল দ্বারা সীমাবদ্ধ V ঘন বস্তু সমাকলন করে

$$\Rightarrow \int_V \vec{J}\cdot\vec{E}\,dv + \frac{1}{2}\int_V \frac{\partial}{\partial t}\left[(\vec{E}\cdot\vec{D}) + \mu(\vec{B}\cdot\vec{H})\right]dv = -\int_V \vec{\nabla}(\vec{E}\times\vec{H})\,dv$$

$$\Rightarrow \int_V \vec{J}\cdot\vec{E}\,dv + \frac{1}{2}\int_V \frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{E}\cdot\vec{D} + \mu(\vec{B}\cdot\vec{H})\right]dv = -\int_S (\vec{E}\times\vec{H})\cdot d\vec{S}$$

Pointing vector

প্রমাণ কর Maxwell এর electromagnetic wave একটি অনুপ্রস্থ তরঙ্গ।

আমরা ধরি, electromagnetic wave টির বেগ z অক্ষ বরাবর হলে, মুক্ত মাধ্যমে maxwell এর সমীকরণ হতে পাই,

$$\frac{\partial \vec{E}_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \vec{B}_z}{\partial z} = 0$$

Maxwell 3rd equation হতে পাই,

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}_z}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} \pm \frac{\partial E_y}{\partial y}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{B}_z}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{B}_z = \text{constant}$$ সময় নিরপেক্ষ

দেখা যাচ্ছে E_z ও B_z উভয়েই স্থান ও সময়ের উপর নির্ভরশীল electromagnetic wave অংশ তরঙ্গের নয়। যা মূলত electromagnetic wave এর বৈশিষ্ট্য।

মুক্তস্থানে Maxwell সমীকরণসমূহ লেখ।

Ans// মুক্তস্থানে চার্জ ঘনত্ব, $\rho = 0$ এবং প্রবাহ ঘনত্ব, $\vec{J} = 0$ হয় তাই maxwell এর সমীকরণ চারটি হবে;

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu\left(\vec{J} + \epsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon}, \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}}$$

মুক্তস্থানে

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu\epsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

or

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \epsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

বৈদ্যুতিক দিক নিরপেক্ষ মাধ্যমে ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণসমূহ লিখ।

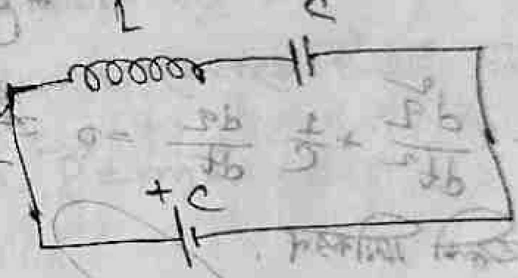
Ans// বৈদ্যুতিক দিক নিরপেক্ষকের ক্ষেত্রে, মাধ্যমের জন্য $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$, $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$ হয়। এখানে ϵ হলো তড়িৎ ভেদনযোগ্যতা, μ হলো চৌম্বক প্রবেশ্যতা।

৫. দিক নিয়মের মাধ্যমে ম্যাক্সওয়েল সমীকরণগুলো হল

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon$ | $\vec{\nabla}\cdot\vec{H} = 0$ | $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\mu\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ | $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} + \varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$\boxed{\text{LC Circuit এর ব্যবকলনীয় সমীকরণ লিখ}}$

শক্তির সংরক্ষণশীল নীতির সাহায্যে LC বর্তনীর জন্য ব্যবকলনীয় সমীকরণ প্রতিষ্ঠা করা যায়।



∴ ~~ধারকের ধারকে সঞ্চিত শক্তির পরিমাণ~~

~~$U_C = \frac{1}{2}Cq^2$~~

$U_C = \frac{1}{2C}q^2$ অথবা ধারকে স্মরণ হলে/

Inductor কয়েলে সঞ্চিত শক্তির পরিমাণ $U_B = \frac{1}{2}Li^2$

∴ যেকোনো মুহূর্তে বর্তনীর মোট শক্তি, $U = U_C + U_B$

যেহেতু (i ও q) সময়ের সাথে পরিবর্তন হলেও (U) ধ্রুব থাকে

কারণ U_C বাড়লে U_B কমবে এবং U_B কমলে U_C বাড়বে

$\therefore \frac{dU}{dt} = 0$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\frac{q^2}{2C} + \frac{1}{2} L i^2\right] = 0. \Rightarrow \frac{2q}{2C}\frac{dq}{dt} + \frac{2L}{2} i \frac{di}{dt} = 0$

$\Rightarrow \cancel{\frac{2q}{2C}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{2} L\, 2i \frac{di}{dt} = 0} \Rightarrow \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} + L \frac{d}{dt}\frac{dq}{dt} = 0$

$\Rightarrow \cancel{\frac{q}{2C}\frac{dq}{dt} + \frac{2Li}{2}\frac{di}{dt} = 0} \Rightarrow \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} + L\frac{d^2q}{dt^2}$

$\Rightarrow \cancel{\frac{i}{C} + L\frac{d}{dt}}$ $\cancel{\frac{d^2q}{dt^2}}$

$\Rightarrow L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} = 0$ ~~এটি হবে~~ হয়েছে LC বর্তনীর

অবকলনী সমীকরণ.

Chapter 1

ভারকেন্দ্র কী | প্রত্যেক বস্তু বা সিস্টেমের ক্ষেত্রে এমন একটি বিন্দু আছে, সেই বিন্দুতে বল প্রয়োগ করলে বস্তুটির রৈখিক গতি প্রাপ্ত হয়। কোনো প্রকার ঘূর্ণীয় বা কৌণিক গতি হয় না। ঐ বিন্দুকে বস্তু বা সিস্টেমের ভারকেন্দ্র বলে।

রৈখিক ভরবেগের সংজ্ঞা | কোনো গতিশীল বস্তুর ভর এবং রৈখিক বেগের গুণফলকে রৈখিক ভরবেগ বলে। এ ভরবেগকে $\vec{P}$ দ্বারা সূচিত করা হয়। রৈখিক ভরবেগ, $\vec{P} = m\vec{v}$

তরঙ্গের উপরিপাতন | যদি দুইটি তরঙ্গ মাধ্যমের কোন কণাকে একসাথে অতিক্রম করে তবে কণাটি তরঙ্গদ্বয়ের জন্য পৃথক পৃথক ভাবে আন্দোলিত হয়। কোনো মুহূর্তের কণাটির সরণ তরঙ্গদ্বয় কর্তৃক কণার পৃথক পৃথক সরণের বীজগাণিতিক সমষ্টির সমান। যদি দুইটি তরঙ্গ কর্তৃক মাধ্যমের কোন কণার পৃথক পৃথক সরণ যথাক্রমে y_1 ও y_2 হয় তবে;
লব্ধি সরণ, $y = y_1 + y_2$ → সমদশা

বিপরীত দশায় $y = y_1 - y_2$

বীট॥ প্রায় সমান তীব্রতা ও কম্পাঙ্ক বিশিষ্ট দুটি উৎস হতে একই সময়ে শব্দ উৎপন্ন করলে এরা পরস্পর মিলে একটি লব্ধি শব্দ সৃষ্টি করে, এই লব্ধি শব্দের তীব্রতা পর্যায়ক্রমে হ্রাস ও বৃদ্ধি পায়। শব্দ প্রাবল্যের এরূপ হ্রাস ও বৃদ্ধি কেই বীট বলে।

বীট	ব্যতিচার
প্রায় সমান কম্পাঙ্ক ও বিস্তারের দুটি শব্দ তরঙ্গের এককালীন উপরিপাতনের ফলে শব্দ প্রাবল্যের পর্যায়ক্রমিক হ্রাস বৃদ্ধিকে বীট বলে।	সমান কম্পাঙ্ক ও বিস্তারের দুটি শব্দের উপরিপাতনের নীরব ও প্রবল তর শব্দের সৃষ্টি হলে তাকে ব্যতিচার বলে
তরঙ্গ দুটির মধ্যে দশা - পার্থক্য সময়ের সাথে পরিবর্তন হবে	তরঙ্গদ্বয়ের মধ্যে দশা পার্থক্য সময়ের সাথে অপরিবর্তিত
লব্ধি বিস্তার, $A=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\omega t}$	লব্ধি বিস্তার - $A=2a\cos\frac{\pi n}{\lambda}$, $n=$ path difference
বীটের সাহায্যে অজানা কম্পাঙ্ক ও সুরশলাকার বিশুদ্ধতা পরীক্ষা করা যায়।	ব্যতিচারের সাহায্যে তরঙ্গদৈর্ঘ্য ও আলোর বেগ নির্ণয় করা হয়।

স্থ ক তরঙ্গের ব্যতিচারের শর্ত

1. ব্যতিচার সৃষ্টিকারী তরঙ্গ দুটির বিস্তার সমান হতে হবে।
2. কম্পাঙ্কদ্বয় সমান হতে হবে।
3. প্রাবল্যের দিক দিয়ে তরঙ্গ দুটি একই রূপ হবে।
4. গঠনমূলক ব্যতিচারের ক্ষেত্রে তরঙ্গ দুটির সর্বক্ষেত্রে পথপার্থক্য শূন্য OR λ এর জোড় গুণিতক হবে।
5. ধ্বংসকারী ব্যতিচারের ক্ষেত্রে তরঙ্গ দুটির সর্বক্ষেত্রে পথপার্থক্য $\lambda/2$ এর বিজোড় গুণিতক
6. ব্যতিচারের কারণে গঠনমূলক ও ধ্বংসকারী ~~ব্যতিচার~~ ব্যতিচার পরপর পাশাপাশি থাকিবে।

প্রশ্ন: এক প্রান্তে দৃঢ়ভাবে আবদ্ধ একটি কঠিন বস্তুর জন্য অয়লারের গতির সমীকরণ প্রতিষ্ঠিত কর এবং সমীকরণ প্রয়োগ করে দৃঢ় বস্তুর বল মুক্ত গতির বর্ণনা কর।

Solve// আমরা জানি, একটি স্থিরবিন্দুর সাপেক্ষে কোনো দৃঢ় বস্তুর প্রতি একটি টর্ক N এর ক্রিয়ার ~~ফলে~~ জন্য যে সম্পন্ন হয় যে, কৌনিক ভরবেগের পরিবর্তনের হার ক্রিয়াশীল টর্কের সমান হবে। — (1)

অর্থাৎ $\left(\frac{dL}{dt}\right) = N$ ————

আমরা জানি, ~~তিনটি~~ প্রধান অক্ষের সাপেক্ষে দৃঢ় বস্তুর কৌনিক ভরবেগকে নিম্নরূপে লেখা যায়। — (2)

$$L = I_1 \omega_m \hat{i} + I_2 \omega_y \hat{j} + I_3 \omega_z \hat{k}$$

এখানে দৃঢ় বস্তুর জড়তার ভ্রামক, $= I$

প্রধান অক্ষের সাপেক্ষে কৌনিক বেগের উপাংশ $= \omega$

মূলত চলমান অক্ষাংশের সাপেক্ষে প্রধান জড়তার ভ্রামক

এবং একক ভেক্টর $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ সময়ের সাথে অপরিবর্তিত থাকে।

তাই $\left(\frac{dL}{dt}\right) = I_1 \dot{\omega}_x \hat{i} + I_2 \dot{\omega}_y \hat{j} + I_3 \dot{\omega}_z \hat{k}$ —— (3)

(1) নং সমীকরণ কে নিম্নরূপে লিখা যায়,

$$\left(\frac{dL}{dt}\right) + \omega \times L = N$$

∴ x অক্ষের উপাংশ

$$N_x = N \cdot \hat{i} = I_1 \dot{\omega}_x + (\omega_y L_z - \omega_z L_y)$$

$$\Rightarrow N_x = I_1 \dot{\omega}_x - (I_2 - I_3)\,\omega_y \omega_z \quad \text{—— (4)}$$

একই ভাবে,

$$N_y = I_2 \dot{\omega}_y - (I_3 - I_1)\,\omega_z \omega_x \quad \text{—— (5)}$$

$$N_z = I_3 \dot{\omega}_z - (I_1 - I_2)\,\omega_x \omega_y \quad \text{—— (6)}$$

সমীকরণ (4,5,6) হলো দৃঢ় বস্তুর গতির ক্ষেত্রে অয়লারের সমীকরণ।

Problem// দৃঢ় বস্তুর বল মুক্ত গতি আলোচনা কর।

যেখানে, অয়লারের সমীকরণ সমূহ প্রয়োগ করা যায়, যেখানে বস্তুর উপর কোন নিট বল ক্রিয়া করে না। পৃথিবীর ঘূর্ণনকে বিবেচনা করিলে দেখা যায় বস্তুর অভিকেন্দ্র হয় স্থির থাকবে অথবা সুষম গতি সম্পন্ন হবে যেন কৌণিক ভরবেগের শুধুমাত্র ভরকেন্দ্রে সাপেক্ষে গতির উপবৃত্তি নির্ধারিত করা হয়।

অয়লারের সমীকরণ হবে

$N = 0$ হয় তখন

$$\left.\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_x &= (I_2 - I_3)\,\omega_y \omega_z \\ I_2 \dot{\omega}_y &= (I_3 - I_1)\,\omega_z \omega_x \\ I_3 \dot{\omega}_z &= (I_1 - I_2)\,\omega_x \omega_y \end{aligned}\right\} \text{———} (1)$$

Problem

অয়লারের কোন ϕ, θ, ψ এর সাংকেতিক অয়লারের গতির সমীকরণসমূহ, দৃঢ় বস্তুর জন্য অয়লারের গতির সমীকরণসমূহ নিরূপণ কর।

Solve//

মনে করি, অয়লার কোণসমূহ সাধিক স্থানাঙ্ক রূপে অবস্থিত, দৃঢ় বস্তুর একটি বিন্দু স্থির থাকলে এর প্রতিসমবিহীন ঘূর্ণন গতি হবে, অয়লার কোণ এ স্থানে দৃঢ় বস্তুর অবস্থান সম্পূর্ণ রূপে প্রকাশ করিবে, এরূপ অবস্থায় ~~লক্ষ্যাঙ্ক~~ ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান, $L = T - V$ অয়লার কোণ ϕ, θ, ψ

এ, ~~অনাপেক্ষ~~ অনাপেক্ষক অনাপেক্ষক এখানে সংরক্ষণশীল বলের ক্ষেত্রে ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান কে নিম্নরূপে প্রকাশ করতে পারি,

$$L = T(\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}, \phi, \theta, \psi) - V(\phi, \theta, \psi)$$

$$= \frac{1}{2}(I_1 \omega_x^2 + I_2 \omega_y^2 + I_3 \omega_z^2) - V(\phi, \theta, \psi) \quad \text{--- (1)}$$

এখানে I_1, I_2, I_3 হলো স্থির বিন্দুর সাপেক্ষে প্রধান জড়তার ভ্রামক এবং- গতিশীল অয়লার কোণ গুলোর মাধ্যমে কৌণিক বেগ এর- গতিশীল অয়লার কোণ গুলোর মাধ্যমে সাধারণ স্থানাঙ্কসমূহের সাধারণীকৃত বল হবে যদি উপাংশের উপর নির্ভর করে। এক্ষেত্রে স্থানাঙ্কসমূহের ক্রিয়াশীল টর্কের উপাংশ। যদি প্রধান z- অক্ষের অক্ষের সাপেক্ষে ক্রিয়াশীল টর্কের উপাংশ। যদি প্রধান z- অক্ষের সাপেক্ষে ঘূর্ণন কোণ (ψ) হয় তাহলে, তাহলে কৌণিক বেগ $(\omega_\psi = \dot{\psi})$ হবে এবং ক্রিয়াশীল টর্কের z-উপাংশ হবে ~~এর~~ সাধারণীকৃত বল।

$$N_z = -\frac{\partial V}{\partial \psi}$$

এবং- (ψ) স্থানাঙ্কের জন্য ল্যাগ্রাঞ্জের গতির সমীকরণ হবে।

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} = -\frac{\partial V}{\partial \psi} = N_z \quad \text{--- (2)}$$

এখন আমরা কোণের সাহায্যে কৌণিক বেগের উপাংশগুলোকে প্রকাশ করেছি।

$$\omega_x = \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi$$

$$\omega_y = \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi$$

$$\omega_z = \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}$$

এবং গতিশক্তি হলো, $T = \frac{1}{2}(I_1\omega_x^2 + I_2\omega_y^2 + I_3\omega_z^2)$

এ থেকে আমরা পাই

$$\frac{\partial\omega_x}{\partial\dot{\psi}} = 0, \quad \frac{\partial\omega_y}{\partial\dot{\psi}} = 0, \quad \frac{\partial\omega_z}{\partial\dot{\psi}} = 1$$

$$\frac{\partial\omega_x}{\partial\psi} = \omega_y, \quad \frac{\partial\omega_y}{\partial\psi} = -\omega_x, \quad \frac{\partial\omega_z}{\partial\psi} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial T}{\partial\dot{\psi}} = \frac{\partial T}{\partial\omega_x}\frac{\partial\omega_x}{\partial\dot{\psi}} + \frac{\partial T}{\partial\omega_y}\frac{\partial\omega_y}{\partial\dot{\psi}} + \frac{\partial T}{\partial\omega_z}\frac{\partial\omega_z}{\partial\dot{\psi}}$$

$$= I_1\omega_x\cdot 0 + I_2\omega_y\cdot 0 + I_3\omega_z\cdot 1$$

$$= I_3\omega_z$$

এবং $\frac{\partial T}{\partial\psi} = \frac{\partial T}{\partial\omega_x}\frac{\partial\omega_x}{\partial\psi} + \frac{\partial T}{\partial\omega_y}\frac{\partial\omega_y}{\partial\psi} + \frac{\partial T}{\partial\omega_z}\cdot\frac{\partial\omega_z}{\partial\psi}$

$$= I_1\omega_x\omega_y + I_2\omega_y(-\omega_x) + I_3\omega_z\cdot 0$$

$$= (I_1 - I_2)\omega_x\omega_y$$

∴ $\frac{\partial T}{\partial \psi}$ ও $\frac{\partial T}{\partial \psi}$ এর মান (ii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই

$$\frac{d}{dt}(I_3 \omega_z) - (I_1 - I_2)\omega_x \omega_y = N_z$$

$$\Rightarrow I_3 \dot{\omega}_z - (I_1 - I_2)\omega_x \omega_y = N_z$$

এটি z অক্ষের জন্য অয়লার সমীকরণ। x, y, z ও 1, 2, 3 এর বিন্যাস দ্বারা আমরা অনুরূপ উক্ত সমীকরণগুলো পাওয়া যায়,

Problem: একটি দৃঢ় বস্তুর ঘূর্ণনের ফলে প্রতি ~~[illegible]~~ অক্ষসমূহের একটি অক্ষ যখন প্রতিসম তখন অয়লারের কোণ এর মাধ্যমে গতি শক্তির রাশি বের কর।

যদি স্থির অক্ষের সাপেক্ষে দৃঢ় বস্তুর গতির সমীকরণের কোনো [illegible] বেগের একটি মত উপাদান সংশ্লিষ্ট হবে এবং তা হলো সুতরাং এর ক্ষেত্রে ঘূর্ণন অক্ষের ও z অক্ষের সাপেক্ষে;

$\omega_z = \omega$; $\omega_x = \omega_y = 0$

$$\therefore L = \hat{i}L_x + \hat{j}L_y + \hat{k}L_z$$

$$= \hat{i}(I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z) + \hat{j}(I_{yx}\omega_y + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z)$$

$$+ \hat{k}(I_{zx}\omega_z + I_{zy}\omega_z + I_{zz}\omega_z)$$

$\therefore$ ~~$L = \omega$~~ ($\hat{i}$ $L = \hat{i} I_{xz} \omega_z + \hat{j} I_{yz} \omega_z + \hat{k} I_{zz} \omega_z$

$\Rightarrow L = \omega \left(I_{xz} \hat{i} + I_{yz} \hat{j} + \hat{k} I_{zz} \right)$

$\therefore$ সমীকরণটির দিক হবে।

$N = \frac{dL}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \left(\hat{i} I_{xz} + \hat{j} I_{yz} + \hat{k} I_{zz} \right)$

$= \omega \cdot \left(I_{xz} \frac{d\hat{i}}{dt} + I_{yz} \frac{d\hat{j}}{dt} + I_{zz} \frac{d\hat{k}}{dt} \right)$

$+ \dot{\omega} \left(\hat{i} I_{xz} + \hat{j} I_{yz} + \hat{k} I_{zz} \right)$

$\frac{d\hat{i}}{dt} = \hat{j} \omega_z = \hat{j} \omega$; $\frac{d\hat{j}}{dt} = -\hat{i}\omega$; $\frac{d\hat{k}}{dt} = 0$

$\therefore$ ~~$N = \hat{i} N_x + \hat{j} N_y + \hat{k} N_k$~~

~~$= \hat{i} \left(I_{xz} \omega - I_{yz} \omega^2 \right)$~~

$\therefore$ আমরা দেখতে পাই, $N_x = N_y = 0$ এবং

$I_{xz} = I_{yz} = 0$ এবং

$N_z = I_{zz} \dot{\omega} = I \dot{\omega}$

$\therefore$ I হলো প্রতিটি জড়তার ভ্রামক বা ঘূর্ণন অক্ষের সাপেক্ষে বস্তুর জড়তার ভ্রামক,

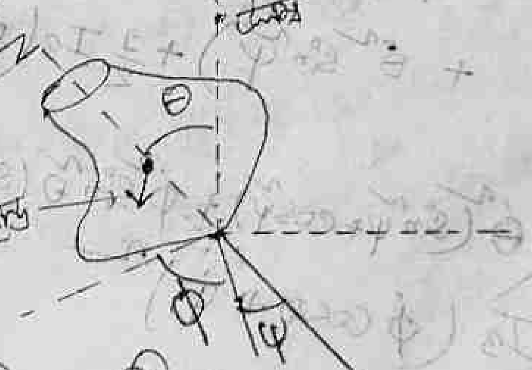
∴ গতিশক্তির রাশিমালা হবে, $T = \frac{1}{2} \omega . L$

$$= \frac{1}{2} \omega . I_{zz} \omega$$

$$= \frac{1}{2} I \omega^2$$

Problem|| প্রতিসম লাটিমের গতির সাধারণ প্রকৃতি বর্ণনা কর। দ্রুত আবর্তনরত লাটিম যে ভাবে উল্লম্ব অক্ষের সাপেক্ষে ঘুরতে পারে তা নির্ণয় কর।

মনে করি, প্রতিসম অক্ষসমূহের একটি হবে যা বস্তু যুক্ত স্থানাঙ্ক ব্যবস্থার z-অক্ষ বরাবর। লাটিমের একটি বিন্দু স্থির রেখে অয়লার কোণ সমূহ (ϕ, θ, ψ) দিয়ে এর অবস্থান সম্পূর্ণরূপে নির্দেশ করা যাবে। ধরি স্থির বিন্দু হতে লাটিমের ভরকেন্দ্রের দূরত্ব (l)।



চিত্রঃ প্রতিসম লাটিমের গতি

প্রতিসম লাটিমের জড়তার ভ্রামক z-অক্ষের দিকে।
অর্থাৎ I_3, এবং দুটি অটল জড়তার ভ্রামক হতে সমান সমান
এর প্রতিসাম্যের দরুন $I_1 = I_2$ ও তত্ত্বের গতিশক্তি

$$T = \frac{1}{2} I_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2$$

অয়লার কোণ (ϕ, θ, ψ) এর ভিত্তিতে,

$$\omega_1 = \dot{\phi} \sin\theta \sin\psi + \dot{\theta} \cos\psi$$
$$\omega_2 = \dot{\phi} \sin\theta \cos\psi - \dot{\theta} \sin\psi$$
$$\omega_3 = \dot{\phi} \cos\theta + \dot{\psi}$$

∴ গতিশক্তি,

$$T = \frac{1}{2} I_1 \Big(\dot{\phi}^2 \sin^2\theta \sin^2\psi + \cancel{2 \dot{\phi}\dot{\theta} \sin\theta \sin\psi \cdot \cos\psi} + \dot{\theta}^2 \cos^2\psi$$
$$+ \dot{\phi}^2 \sin^2\theta \cos^2\psi - \cancel{2 \dot{\phi}\dot{\theta} \sin\theta \cos\psi \sin\psi}$$
$$+ \dot{\theta}^2 \sin^2\psi \Big) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\phi} \cos\theta + \dot{\psi})^2$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} I_1 \Big(\dot{\theta}^2 (\sin^2\psi + \cos^2\psi) + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta (\sin^2\psi + \cos^2\psi) \Big)$$
$$+ \frac{1}{2} I_3 (\dot{\phi} \cos\theta + \dot{\psi})^2$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} I_1 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta \right) + \frac{1}{2} I_3 \left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta \right)^2 \quad \text{--- (1)}$$

∴ লাটিমের ভর, m ও অভিকর্ষজ ত্বরণ g হলে তার বিভব শক্তি হবে $mgl\cos\theta$। এবং লাগ্রাঞ্জিয়ান যা এভাবে লেখা যায়।

$$L = T - V = \frac{1}{2} I_1 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta \right) + \frac{1}{2} I_3 \left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta \right)^2 - mgl\cos\theta \quad \text{--- (2)}$$

যেহেতু লাগ্রাঞ্জিয়ানে স্থানাংক ϕ ও ψ স্বতন্ত্র ভাবে আসেনি কাজেই ওরা চক্রীয় স্থানাংক হবে এবং এদের আনুষঙ্গিক ভরবেগ, ~~p_ψ, p~~ p_ϕ, p_ψ প্রতিক্ষেত্রে ধ্রুবক হবে।

∴ একটি ~~ঘূ~~ ঘূর্ণন কোণের অনুবন্ধী ভরবেগ হলো ঘূর্ণন অক্ষবরাবর মোট কৌণিক ভরবেগের উপাংশ, যা ϕ ও ψ এর জন্য যথাক্রমে Z-অক্ষবরাবর।