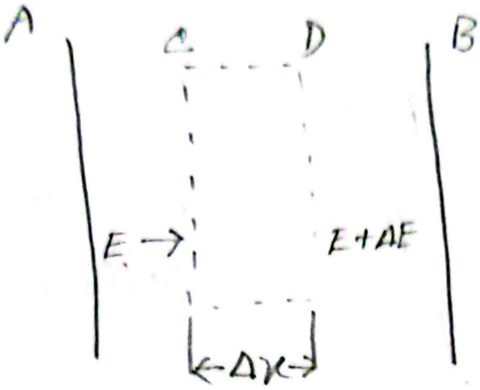
প্র। পয়সনের সমীকরণ বের কর ও আলোচনা কর।

→ যদি পাতদ্বয়ের মাঝে কোন চার্জ থাকে তবে প্রাপ্ত সম্পর্ককে পয়সনের সমীকরণ বলে।



ধরা যাক পাতদ্বয়ের মাঝে একক মাত্রের সমান্তরালে অবস্থিত স্তরের কোন চার্জ ঘনত্ব ধ্রুবক, তবে x অক্ষের দিকে চার্জ ঘনত্ব বৃদ্ধি পায়। প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল α এবং C স্তরে তড়িৎ তীব্রতা অর্থাৎ প্রতি একক ক্ষেত্রফলে বলরেখার সংখ্যা E হলে D স্তরে তড়িৎ ক্ষেত্র,

$$\vec{E}_d = (\vec{E} + \Delta\vec{E})$$

$$= E + \frac{dE}{dx}\Delta x$$

D স্তরে বহির্গামী ফ্লাক্স সমানুপাতিক হবে,

$$\left(E + \frac{dE}{dx}\cdot\Delta x\right)\cdot\alpha$$

$$= \left(E + \frac{dE}{dx}\Delta x\right)\cdot\alpha - E\cdot\alpha$$

$$= \alpha\Delta x\frac{dE}{dx}$$

[C স্তরে ফ্লাক্স সমানুপাতিক $-E\cdot\alpha$]

গাউসের উপপাদ্য অনুসারে কোনো আবদ্ধ তলের উপর মোট আবিষ্ট আবেশ মোট চার্জের 4π গুণ। যদি একক আয়তনের মোট চার্জ ρ হয় তাহলে $\alpha\Delta x$ আয়তনের চার্জ হবে $\alpha\rho\Delta x$।

$$\alpha\Delta x \frac{dE}{dx} = 4\pi\rho\alpha\Delta x$$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dx} = 4\pi\rho \quad \text{—— (1)}$$

এখানে, $E = -\frac{d\phi}{dx}$, ϕ এর ঋণাত্মক নতিমাত্রাই তড়িৎ ক্ষেত্র $\vec{E}$।

$$\Rightarrow \frac{dE}{dx} = -\frac{d^2\phi}{dx^2}$$

(1) হতে পাই

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -4\pi\rho \quad \text{—— (2)}$$

এটি একমাত্রিক ক্ষেত্রে পয়সনের সমীকরণ। ত্রিমাত্রিক ক্ষেত্রে,

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{d^2\phi}{dy^2} + \frac{d^2\phi}{dz^2} = -4\pi\rho$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{d^2\phi}{dy^2} + \frac{d^2\phi}{dz^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad [\because 4\pi\epsilon_0 \text{ দ্বারা ভাগ করে}]$$

$$\Rightarrow \nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \left[\because \nabla^2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}\right]$$

∴ এটিই পয়সনের সমীকরণ।

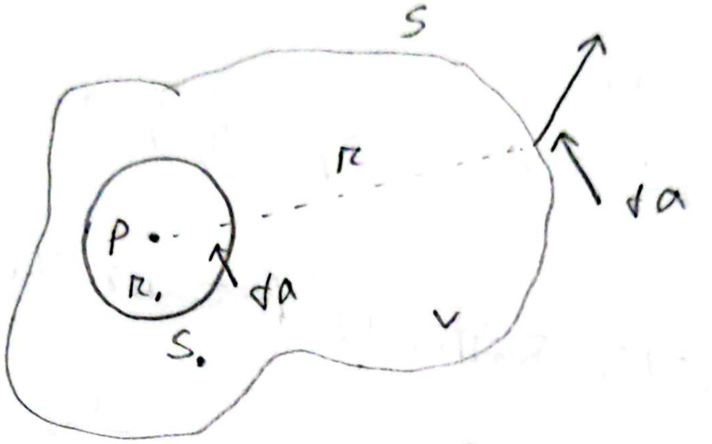
সমাধান : আমরা জানি, পয়সনের সমীকরণ,

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

গ্রিনের উপপাদ্য হতে,

$$\oint(\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi)\cdot d\vec{a} = \int_V(\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi)dV$$

ধরা যাক একটি অপেক্ষক $\psi(r) = \frac{1}{r}$



এখানে S_0 এবং S পৃষ্ঠতল দ্বারা সীমাবদ্ধ $V-V_0$ আয়তনে গ্রিনের উপপাদ্য প্রয়োগ করে,

$$\int_{V-V_0}\left[\phi\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\nabla^2\phi\right]dV = \oint_S\left[\phi\nabla\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\nabla\phi\right]\cdot da$$

$$+\oint_{S_0}\left[\phi\nabla\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\nabla\phi\right]\cdot da \qquad (1)$$

এখানে, S_0 এর উপর $d\vec{a}$ ভেক্টরের দিক অন্তর্মুখী অথচ S তলের উপর $d\vec{a}$ এর দিক বহির্মুখী।

$$\therefore \nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

$$= -\frac{x\hat{i}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{y\hat{j}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{z\hat{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$= -\frac{x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}$$

$$= -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$= -\frac{r\hat{r}}{r^3}$$

$$= -\frac{\hat{r}}{r^2}$$

আবার, আমরা জানি,

$$\oint_{S_0} \phi \nabla\left(\frac{1}{r}\right)\cdot d\vec{a} = \frac{1}{r_0^2}\oint_{S_0} \phi\, da$$

যদি r_0 কে শূন্যের সমীপবর্তী বিবেচনা করা যায় তবে,

$$\left[\oint_{S_0} \phi \nabla\left(\frac{1}{r}\right) da\right]_{r_0 \to 0} = \frac{1}{r_0^2}\, 4\pi r_0^2 \phi(P)$$

$$= 4\pi\phi(P)$$

$$= 0$$

① নং সমীকরণ হতে,

$$-\int_V \frac{1}{r}\nabla^2\phi\, dV = \oint_S \left[\phi\nabla\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\nabla\phi\right] da + 4\pi\phi(P)$$

$$\Rightarrow 4\pi\phi(P) = \oint_S \left[\frac{1}{r}\nabla\phi - \phi\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\right] da - \int_V \frac{1}{r}\nabla^2\phi\, dV$$

V আয়তন সমগ্র তলাবলের বাইরে চার্জ শূন্য বিধায়

$$4\pi V(P) = \oint_S \left[\frac{1}{r}\nabla V - V\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\right] da - \int_V \frac{1}{r}\nabla^2 V\, dV$$

এখানে $\nabla^2 V = -\rho/\epsilon$ ব্যবহার করে

$$4\pi V(P) = \oint_s \left[\frac{1}{r}\nabla V - V\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\right] da + \int_v \frac{\rho}{\epsilon r} dV$$

$$\Rightarrow V(P) = \frac{1}{4\pi}\oint_s \left[\frac{1}{r}\nabla V - V\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\right] da + \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_v \frac{\rho}{r} dV$$

$\rho = 0$ বিধায়,

$$\therefore V(P) = \frac{1}{4\pi}\oint_s \left[\frac{1}{r}\nabla V - V\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\right]\cdot d\vec{a}$$

এটিই পয়সনের সমীকরণের সমাধান।

প্র ল্যাপ্লাসের সমীকরণ বের কর ও সমাধান কর।

→ যদি মাধ্যমের মাঝে মুক্ত চার্জ না থাকে এবং বলরেখাসমূহ মাধ্যমে ব্যাপকভাবে ছড়িয়ে পড়ে তবে যে সম্পর্ক পাওয়া যায় তাকে ল্যাপ্লাসের সমীকরণ বলে।

[বি:দ্র: পয়সনের সমীকরণ প্রমাণ করতে হবে আগে]

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{d^2\phi}{dy^2} + \frac{d^2\phi}{dz^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

মুক্ত চার্জ ঘনত্ব শূন্য হলে,

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{d^2\phi}{dy^2} + \frac{d^2\phi}{dz^2} = 0$$

এটিই ল্যাপ্লাসের সমীকরণ। সমীকরণকে ভেক্টর আকারে প্রকাশ করার জন্য ① নং এ $\rho = 0$ বসিয়ে

$$\frac{dE}{dx}+\frac{dE}{dy}+\frac{dE}{dz}=0$$

$$\Rightarrow \text{div}\cdot E=0$$

আমরা জানি,

$$E=-\text{grad}\,\phi$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(\frac{d\phi}{dy}\right)+\frac{d}{dz}\left(\frac{d\phi}{dz}\right)=0$$

$$\Rightarrow \text{grad}\cdot\text{div}\cdot E=0$$

ল্যাপ্লাসিয়ান অপারেটরের মাধ্যমে প্রকাশ করে,

$$\nabla^2\phi=0$$

সমাধান: যদি তড়িৎ বিভব V একটি চলক নির্ভর হয় অর্থাৎ $V=V(x)$ হয় তবে,

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2}=0$$

দুইবার সমাকলন করে,

$$V(x)=ax+b$$

বর্তুলাকার স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় $V=V(r)$ নিয়ে,

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV}{dr}\right)=0$$

এই সমীকরণের সমাধান,

$$V(r)=-\frac{a}{r}+b$$

বেলনাকৃতি স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় বিভব অপেক্ষক θ ও z নিরপেক্ষ হয়,

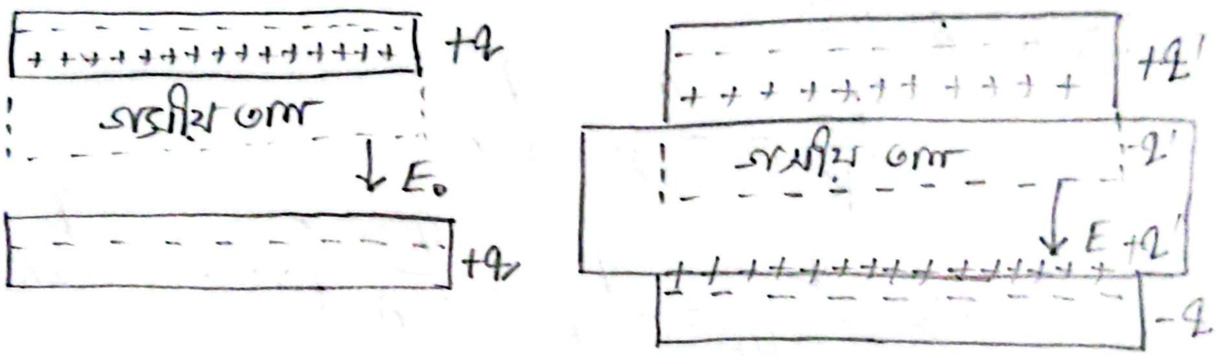
$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right)=0$$

যার সাধারণ সমাধান হলো,

$$V(r) = a\ln r + b$$

প্রশ্ন: পরাবৈদ্যুতিক মাধ্যমে গাউসের সূত্র প্রতিপাদন কর।

→ দুটি সমান্তরাল পাত ধারক বিবেচনা করা যাক। একটি পরাবিদ্যুৎমুক্ত এবং অপরটি পরাবিদ্যুৎযুক্ত।



ধরা যাক উভয় ধারকে +q পরিমাণ চার্জ প্রদান করা হলো। পাতদ্বয়ের মধ্যে উৎপন্ন তড়িৎ ক্ষেত্রের মান E_0 এবং দ্বিতীয় ধারকের মধ্যবর্তী স্থানে তড়িৎ ক্ষেত্রের মান E। তাহলে গাউসের সূত্রানুসারে,

$$\oint E\cdot\epsilon_0\cdot d\vec{a} = \epsilon_0 E_0 A$$

$$\Rightarrow \epsilon_0 E_0 A = q$$

$$\therefore E_0 = \frac{q}{\epsilon_0 A} \quad \text{——} \quad (1)$$

পরাবিদ্যুৎযুক্ত ধারকের ক্ষেত্রে গাউসের সূত্র হতে,

$$\epsilon_0 \oint E \cdot da = \epsilon_0 EA$$

$$\Rightarrow \epsilon_0 EA = (q - q') \quad \text{—— (2)}$$

$$\Rightarrow E = \frac{q}{\epsilon_0 A} - \frac{q'}{\epsilon_0 A} \quad \text{—— (3)}$$

আবার মাধ্যমের পরাবৈদ্যুতিক ধ্রুবক K হলে,

$$K = \frac{E_0}{E}$$

$$\Rightarrow E = \frac{E_0}{K}$$

সমীকরণ (3) হতে,

$$\frac{E_0}{K} = \frac{q}{\epsilon_0 A} - \frac{q'}{\epsilon_0 A}$$

$$\Rightarrow \frac{q}{\epsilon_0 KA} = \frac{q}{\epsilon_0 A} - \frac{q'}{\epsilon_0 A} \quad \left[\because E_0 = \frac{q}{\epsilon_0 A}\right]$$

$$\Rightarrow q' = q\left(1 - \frac{1}{K}\right) \quad \text{—— (4)}$$

সমীকরণ (2) ও (4) হতে,

$$\epsilon_0 \oint E \cdot da = q - q\left(1 - \frac{1}{K}\right)$$

$$= q - q + \frac{q}{K}$$

$$= \frac{q}{K}$$

$$\therefore \epsilon_0 K \oint E \cdot da = q$$

∴ এটিই পরাবৈদ্যুতিক মাধ্যমে গাউসের সূত্র।

প্র. তিনটি তড়িৎ ভেক্টর $\vec{P}$, $\vec{E}$, $\vec{D}$ এর মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন কর।

→ পরাবৈদ্যুতিক মাধ্যমের একক আয়তনে তড়িৎ দ্বিমেরু ভ্রামকের সমষ্টিকে মেরুবর্তন $\vec{P}$ বলে। একক আয়তনে তড়িৎ দ্বিমেরুর সংখ্যা N এবং দ্বিমেরু ভ্রামক P_i হলে মেরুবর্তন,

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum \vec{P_i} = N\vec{P} \quad \text{—— (1)}$$

যখন $\vec{P}$ হলো ΔV আয়তনে গড় দ্বিমেরু ভ্রামক।

পরাবৈদ্যুতিক মাধ্যমে সমান্তরাল পাত ধারক বিবেচনা করলে ধারকের মুক্ত চার্জ q এবং সমাবর্তিত চার্জ q' হলে তড়িৎ ক্ষেত্রের মান হবে,

$$E = \frac{q}{\epsilon_0 A} - \frac{q'}{\epsilon_0 A} \quad \text{—— (2)}$$

ধারক মাধ্যম শূন্য অবস্থায় থাকলে তড়িৎ ক্ষেত্র

$$E_0 = \frac{q}{\epsilon_0 A} \quad \text{—— (3)}$$

আবার পরাবৈদ্যুতিক ধ্রুবক $K = \frac{E_0}{E}$ হলে সমীকরণদ্বয় হতে,

$$\frac{q}{A} = \epsilon_0 \left(\frac{q}{K\epsilon_0 A}\right) + \frac{q'}{A} \quad \text{—— (4)}$$

$\frac{q'}{A}$ রাশিকে মেরুবর্তন বা পোলারায়ন বলে।

$$\therefore \text{মেরুবর্তন } P = \frac{q'}{A} \quad \text{—— (5)}$$

ফিতাটির দৈর্ঘ্যকে l ধরি,

$$P = \frac{q'l}{Al}$$

$Al = \Delta V$ এবং $q'l =$ দ্বিমেরু ভ্রামক $= p$

$$\therefore P = \frac{p}{\Delta V}$$

আবার সমীকরণ ③ হতে,

$$\frac{q}{A} = \varepsilon_0 E + P$$

এই সমীকরণের ডানপক্ষকে তড়িৎ সরণ বলা হয় এবং D দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

$$\therefore D = \varepsilon_0 E + P$$

এবং $D = \frac{q}{A}$

$$\therefore \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$\therefore$ এটিই $\vec{P}, \vec{E}, \vec{D}$ এর মধ্যে সম্পর্ক।

প্র: পরাবিদ্যুতিক মাধ্যমে গাউসের সূত্রের ব্যবকলনীয় রূপ বের কর।

→ প্রথমে গাউসের সূত্র প্রমাণ করতে হবে।

মনে করি কোনো মাধ্যমের V_0 আয়তন সীমাবদ্ধকারী কোনো পৃষ্ঠতল S_0 এর জন্য গাউসের সূত্র প্রয়োগ করে,

$$\oint_{S_0} \epsilon_0 E \cdot da = \int_{V_0} (\rho + \rho_p)\, dV$$

আমরা জানি, $\rho_p = -\nabla \cdot P$

$$= \int_{V_0} \rho\, dV - \int_{V_0} \nabla \cdot P\, dV$$

অপসারিতার তত্ত্ব প্রয়োগ করে,

$$\oint_{S_0} (\epsilon_0 E + P)\, da = \int_{V_0} \rho\, dV$$

পরাবিদ্যুতিক মাধ্যমের তড়িৎ সরণ ভেক্টর $D = \epsilon_0 E + P$

$$\oint_{S_0} D \cdot da = \int_{V_0} \rho\, dV$$

সমীকরণের বামপার্শ্বকে আয়তন সমাকলনে করে,

$$\int_{V_0} \nabla \cdot D\, dV = \int_{V_0} \rho\, dV$$

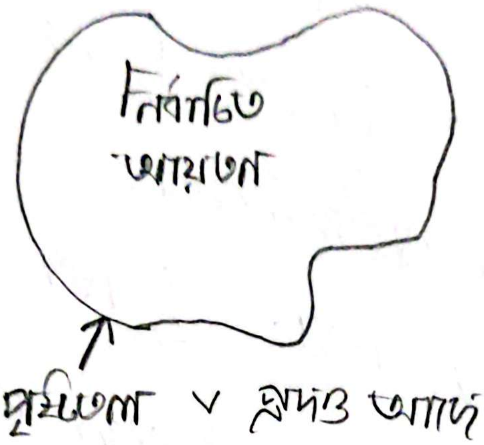
$$\therefore \nabla \cdot D = \rho$$

এটিই পরাবিদ্যুতিক মাধ্যমে গাউসের সূত্রের ব্যবকলনীয় রূপ।

☐ অদ্বিতীয়তা বা এককতা উপপাদ্য প্রমাণ কর ।

→ প্রদত্ত সীমাস্থিত শর্তাধীন ল্যাপ্লাসের সমীকরণের একটি এবং কেবলমাত্র একটিই সমাধান রয়েছে অর্থাৎ অদ্বিতীয় সমাধান ।

প্রমাণ: এ তত্ত্বানুসারে কোনো আয়তন বেষ্টনকারী পৃষ্ঠতলে স্থির ϕ থাকলে ল্যাপ্লাস সমীকরণের অদ্বিতীয় সমাধান।



ধরা যাক কোনো আয়তনে ল্যাপ্লাস সমীকরণের দুটি সমাধান ϕ_1 ও ϕ_2 রয়েছে । তাহলে,

$$\nabla^2\phi_1 = 0$$
$$\nabla^2\phi_2 = 0$$

অদ্বিতীয়তা উপপাদ্য অনুসারে ϕ_1 ও ϕ_2 একই হবে।

ধরা যাক ϕ_1 ও ϕ_2 ভিন্ন এবং এদের ব্যবধান

$$\phi_3 = \phi_1 - \phi_2 \quad \text{—— (1)}$$

তাহলে অবশ্যই ল্যাপ্লাসের সমীকরণ সিদ্ধ করবে।

$$\therefore \nabla^2\phi_3 = \nabla^2\phi_1 - \nabla^2\phi_2 = 0 \quad \text{—— (2)}$$

① নং সমীকরণ অনুসারে দেখা যায় প্রদত্ত দ্রবণগুলো ϕ_3 চরম ও অবম মান থাকবে। কিন্তু ল্যাপলাসের সমীকরণ স্থানীয় চরম বা অবমের অনুমোদন দেয় না। দ্রবণগুলো ϕ_1 ও ϕ_2 নির্দিষ্ট তবে দ্রবণগুলো ϕ_3 এর চরম ও অবম মান অবশ্যই শূন্য হবে।

$$\therefore \phi_1 = \phi_2$$

বিভব অপেক্ষক ϕ পয়সনের সমীকরণ অনুসরণ করে।

অতএব,
$$\nabla^2 \phi_1 = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
$$\nabla^2 \phi_2 = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
$$\therefore \nabla^2 \phi_3 = \nabla^2 \phi_1 - \nabla^2 \phi_3$$
$$= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} + \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
$$= 0$$

সুতরাং দেখা যায় বিভব ব্যবধান $\phi_3 = \phi_1 - \phi_2$ ল্যাপলাসের সমীকরণ স্বীকার করে তবে $\phi_3 = 0$ এবং $\phi_1 = \phi_2$।

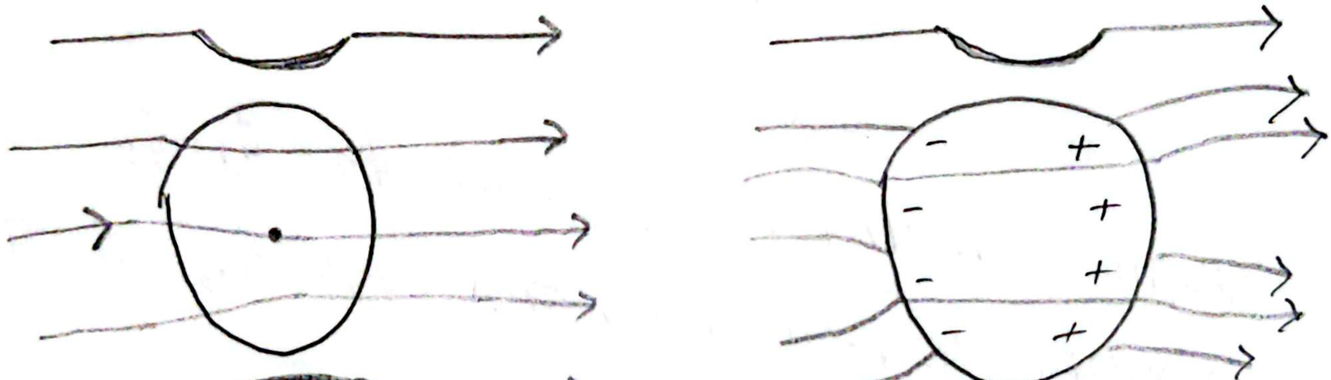
প্র। সুষম তড়িৎ ক্ষেত্রে স্থাপিত একটি পরাবিদ্যুৎক গোলকের বাহিরের ও অভ্যন্তরের কোন বিন্দুতে তড়িৎ বিভব ও সেই ক্ষেত্রের উপাংশগুলো নির্ণয় কর।

→ মনে করি ক্রিয়াশীল E_0 মানের সুষম তড়িৎ ক্ষেত্রে K মাত্রাঙ্কের এবং a ব্যাসার্ধের একটি পরাবিদ্যুৎক পদার্থের অচার্জিত গোলক বিবেচনা করা যাক। গোলীয় স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় মূলবিন্দুকে গোলকের কেন্দ্র বিবেচনা করে গোলকের বাহিঃস্থ কোন বিন্দুতে তড়িৎ বিভব,

$$V_1(r,\theta) = a_1 r\cos\theta + b_1 r^{-2}\cos\theta \quad \text{—— (1)}$$

আবার গোলকের অভ্যন্তরে বিভব হবে,

$$V_2(r,\theta) = a_2 r\cos\theta + b_2 r^{-2}\cos\theta \quad \text{—— (2)}$$



$r \to \infty$ হলে $a_1 = -E_0$ এবং $r=0$ অবস্থানে $b_2 = 0$।

প্রান্তিক অবস্থানে বিভবের আচরণ হলো $V_1(a,\theta) = V_2(a,\theta)$।

$\therefore -E_0 a\cos\theta + b_1 a^{-2}\cos\theta = a_2 a\cos\theta$

$\Rightarrow -E_0 a + b_1 a^{-2} = a_2 a$ —— (3)

আমরা জানি, তড়িৎ সরণ ভেক্টর $\vec{D} = \epsilon\vec{E} = -\epsilon\nabla V$ এর অভিলম্ব উপাংশের জন্য $D_n = -\epsilon\frac{dV}{dr}$ ।

$\therefore -\left(\epsilon_0\frac{\partial V_1}{\partial r}\right) = -\left(\epsilon\frac{\partial V_2}{\partial r}\right)$

$\Rightarrow -\epsilon_0\left[-E_0\cos\theta - 2b_1 a^{-3}\cos\theta\right] = -\epsilon\left[a_2\cos\theta\right]$

$\Rightarrow E_0 + 2b_1 a^{-3} = -Ka_2$ —— (4) $\left[\because K = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right]$

সমীকরণ (3) ও (4) সমাধান করে পাই,

$$a_2 = -\frac{3E_0}{K+2}$$

$$b_1 = \frac{K-1}{K-2}a^3E_0$$

$\therefore$ গোলকের বাইরের এলাকায় তড়িৎ বিভব

$$V_1(r,\theta) = -\left(1 - \frac{K-1}{K+2}\frac{a^3}{r^3}\right)E_0 r\cos\theta$$

এবং গোলকের অভ্যন্তরে,

$$V_2(r,\theta) = -\frac{3}{K+2}E_0 r\cos\theta$$

$$= -\frac{3}{K+2}E_0 z$$

আবার গোলকের বাহিরে,

$$E_{1r} = \left(1 + \frac{2(K-1)a^3}{(K+2)r^3}\right) E_0 \cos\theta$$

$$E_{1\theta} = -\left(1 - \frac{(K-1)a^3}{(K+2)r^3}\right) E_0 \sin\theta$$

এবং গোলকের ভিতরে,

$$E_{2r} = \frac{3}{K+2} E_0 \cos\theta$$

$$E_{2\theta} = -\frac{3}{K+2} E_0 \sin\theta$$

$\therefore$ E ভেক্টরের চূড়ান্ত মান হলো, $E_2 = \dfrac{3}{K+2} E_0$

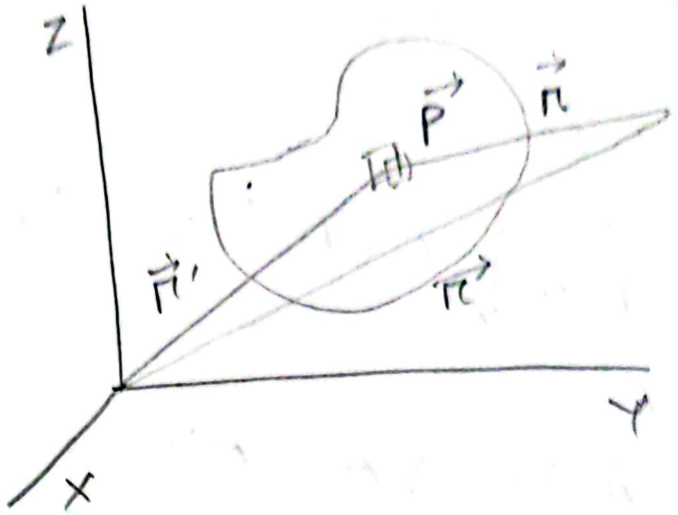
D " " " " $D_2 = \epsilon E_2 = \dfrac{3\epsilon}{K+2} E_0$

E একটি তড়িৎ চতুর্মেরুর জন্য তড়িৎ বিভবের রাশিমালা নির্ণয় কর।

→

প্র. দেখাও যে, মেরুকৃত বস্তুর বিভব আয়তন চার্জের ঘনত্ব দ্বারা $\rho_b = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$ এবং তলীয় বন্ধ চার্জের ঘনত্ব $\sigma_b = \vec{P}\cdot\hat{n}$।

→



একটি নির্দিষ্ট মেরুবর্তিত ডাই ইলেকট্রিক বিবেচনা করি। যার প্রত্যেকটি বিন্দু $\vec{r}'$ কে মেরুকরায়ন দ্বারা ব্যাখ্যা করা যায়।

P বিন্দুতে বিভব,

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{r^2} \quad \text{—(1)} \quad [\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}']$$

এখানে, $\vec{p} = \vec{P}\cdot dv = \vec{P}(\vec{r}')\,dv'$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{P}(\vec{r}')\cdot\vec{r}}{r^2}\,dv'$$

∴ মোট বিভব $$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'}\frac{\vec{P}(\vec{r}')\,\hat{r}}{r^2}\,dv' \quad \text{—(2)}$$

$$\Rightarrow \nabla'\left(\frac{1}{(\vec{r}-\vec{r}')}\right) = -\frac{1}{(r-r')^2}\,\nabla'(r-r')$$

Bestron

$$\Rightarrow \vec{\nabla}'\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{(-1)(-1)\hat{r}}{r^2}$$

$$\Rightarrow \nabla'\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\hat{r}}{r^2} \quad \text{--- (3)}$$

(3) এর মান (2) এ বসিয়ে,

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'} \vec{P}(\vec{r}')\,\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{r}\right) dV' \quad \text{--- (4)}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{আমরা জানি,} \\ \vec{\nabla}\cdot(f\vec{A}) = f\nabla A + A\nabla f \\ \Rightarrow A\cdot\nabla f = \nabla(f\vec{A}) - f\vec{\nabla}\cdot\vec{A} \end{array}} \rightarrow \text{formula}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'}\left\{\vec{\nabla}'\cdot\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\vec{P}(\vec{r}') - \frac{1}{r}\,\vec{\nabla}'\,\vec{P}(\vec{r}')\right\} dV'$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\int_{V'}\vec{\nabla}'\,\frac{\vec{P}(\vec{r}')}{r}\,dV' - \int_{V'}\frac{1}{r}\,\vec{\nabla}'\cdot\vec{P}\,dV'\right\} \quad \text{--- (5)}$$

ডাইভারজেন্স উপপাদ্য হতে,

$$\int_{V}\nabla\cdot A\,dV = \oint_S A\,d\vec{a} = \oint_S A\cdot\hat{n}\,da$$

এখানে (5) নং এর ১ম অংশে ব্যবহার করে,

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\oint_s \frac{\vec{P}}{r}\cdot\hat{n}\,da + \int_{V'} -\frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{P}}{r}\,dV'\right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\oint_s \frac{\vec{P}\cdot\hat{n}}{r}\,da + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'}\frac{(-\nabla\cdot P)}{r}\,dV' \quad \text{—— (6)}$$

আমরা জানি, r দূরের কোনো বিন্দুতে চার্জ ডিস্ট্রিবিউশন এর জন্য বিভব,

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho}{r}\,dV'$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\oint_s \frac{\sigma}{r}\,da \quad \text{—— (7)}$$

(6) ও (7) তুলনা করে,

$$\vec{P}\cdot\hat{n} = \sigma_b$$

$$-\vec{\nabla}'\cdot\vec{P} = \rho_b$$

(Proved)

ভৌ সংবেদ্যতা, প্রবেশ্যতা ও পরাবৈদ্যুতিক ধ্রুবক:-

কোনো মাধ্যমের মেরুবর্তিতা সেই তড়িৎ ক্ষেত্রের সমানুপাতিক। অর্থাৎ, $\vec{P} = \chi_e E$ ।
এখানে χ_e একটি আনুপাতিক রাশি যাকে মাধ্যমের সংবেদ্যতা বলে।

কোনো মাধ্যমের মেরুবর্তিতা ও তড়িৎ ক্ষেত্রের মানের অনুপাতকে ঐ মাধ্যমের সংবেদ্যতা বলে।

আবার তড়িৎ সরণ, $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

$$= \varepsilon_0 E + \chi_e E$$

$$= E(\varepsilon_0 + \chi_e)$$

$$= \varepsilon \vec{E}$$

যখন $\varepsilon = \varepsilon_0 + \chi_e$

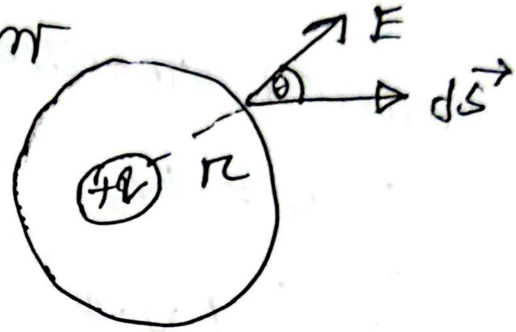
অতএব, কোনো মাধ্যমের সংবেদ্যতা ও শূন্য মাধ্যমের তড়িৎ প্রবেশ্যতার সমষ্টিকে উক্ত মাধ্যমের প্রবেশ্যতা বলে।

আবার, কোনো মাধ্যমের প্রবেশ্যতা এবং শূন্য মাধ্যমের তড়িৎ প্রবেশ্যতার অনুপাতকে পরাবৈদ্যুতিক ধ্রুবক বলে।

$$K = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$
$$= \frac{\varepsilon_0 + \chi_e}{\varepsilon_0}$$
$$= 1 + \frac{\chi_e}{\varepsilon_0}$$

৫। স্থির তড়িৎ এর বেলায় কুলম্বের সূত্র থেকে গাউসের সূত্র বের কর পয়সন ও ল্যাপলাসের সমীকরণ বের কর।

→ ধরি- চিত্রানুযায়ী একটি বদ্ধতল একটি চার্জ (+q) কে আবদ্ধ করে আছে। +q থেকে r দূরত্বে তলটির উপর কোনো বিন্দুতে তড়িৎ প্রাবল্য-



$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \quad \text{——(1)}$$

এবার তলটির উপর r দূরত্বে যে বিন্দুতে তড়িৎক্ষেত্র প্রাবল্য E সেখানে ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র তলীয় উপাদান $\vec{dS}$ বিবেচনা করি। এবং E, dS এর মধ্যবর্তী কোণ হলো θ।

$$E \cdot dS = E\,dS\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}\, dS\cos\theta \quad \text{——(2)}$$

ধরি, dS তলটির বিন্দু ঘনকোণ

$$d\Omega = \frac{dS\cos\theta}{r^2} \quad \text{——(3)}$$

$$\therefore E\cdot dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot q . d\Omega$$

$$\Rightarrow \oint_S E\cdot dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int d\Omega \quad \text{—— (৪)} \qquad \left[\because \int d\Omega = 4\pi\right]$$

$$\Rightarrow \oint_S E\cdot dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\times 4\pi$$

$$\Rightarrow \oint_S E\cdot dS = q/\epsilon_0$$

ডাইভারজেন্স থিওরেমের নিয়মে,

$$\int_V \nabla\cdot E\, dV = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho\, dV$$

$$\Rightarrow \int_V \left[\nabla\cdot E - \rho/\epsilon_0\right] dV = 0$$

এখানে, $\nabla\cdot E - \rho/\epsilon_0 = 0$

$$\Rightarrow \nabla\cdot E = \rho/\epsilon_0 \quad \text{—— (৫)}$$

$$\Rightarrow \nabla\cdot \epsilon_0 E = \rho$$

$$\Rightarrow \nabla\cdot D = \rho$$

এটি স্থির তড়িৎ এর <u>গাউসের সমীকরণ</u>।

আবার আমরা জানি,

$$E = -\nabla V \quad \text{—— (৬)}$$

(৫) নং হতে $\nabla\cdot E = \rho/\epsilon_0$

$$\Rightarrow \nabla(-\nabla V) = \rho/\epsilon_0$$

$$\Rightarrow \nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0$$

ইহাই লাপ্লাসের সমীকরণ।

আবার, $\rho = 0$ হলে,

$$\nabla^2 V = 0$$

ইহাই হলো লাপ্লাসের সমীকরণ।

প্র: মেরুবদ্ধ বা সোসাবায়ন চার্জ ব্যাখ্যা দাও।

→ সুষমভাবে সোলারায়িত কোনো মাধ্যম বিবেচনা করা যাক যার মেরুবর্তিতা $\vec{P}$। মাধ্যমের কোনো ঘন আয়তনের প্রতিটি দ্বিমেরুর ধনাত্মক প্রান্ত প্রতিবেশী দ্বিমেরুর ঋণাত্মক প্রান্তের মুখোমুখি অবস্থান করবে এবং দ্বিমেরুগুলো সমান্তরাল সজ্জা গ্রহণ করবে ফলে মাধ্যমের নিট চার্জ ঘনত্ব শূন্য হবে। তবে $\vec{P}$ ভেক্টর দিক বরাবর মাধ্যমের পৃষ্ঠতলে আসম ধনচার্জ সৃষ্টি হবে এবং ঠিক বিপরীত পৃষ্ঠতলে সমপরিমাণে ঋণাত্মক চার্জ সৃষ্টি হবে।

তখন মেরুবর্তনের দরুন চার্জঘনত্ব কে σ_p লিখি,

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

আবার মেরুবর্তী চার্জ q_p,

$$q_p = \oint \vec{P} \cdot d\vec{a}$$

Bestron™

অতএব নির্দিষ্ট কোনো আয়তন অভ্যন্তরী বদ্ধ চার্জ q_p হলে ঐ আয়তনে $-q_p$ পরিমাণ চার্জ থেকে যাবে।

$$-q_p = \oint_V \rho_p \, dV$$

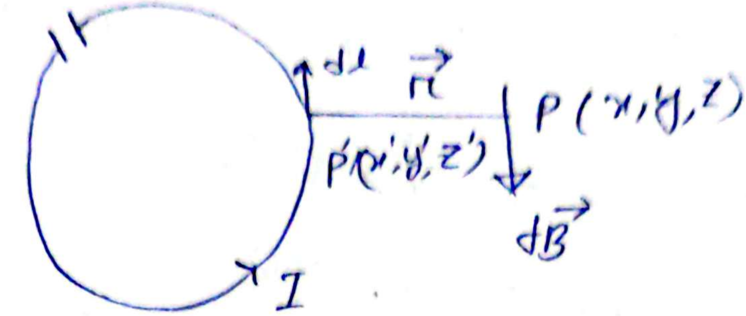
$$\Rightarrow \oint_S P \cdot da = -\oint \rho_p \, dV$$

$$\Rightarrow \oint_V \nabla \cdot P \, dV = -\oint_V \rho_p \, dV$$ [গাউসের ডাইভারজেন্স তত্ত্ব হতে]

$$\Rightarrow \rho_p = -\nabla \cdot P$$

প্র। দেখাও যে, চৌম্বক আবেশের ডাইভারজেন্স শূন্য অর্থাৎ $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$।

→



একটি তড়িৎ প্রবাহী লুপের $P'(x',y',z')$ বিন্দুতে অবস্থিত একটি ক্ষুদ্র উপাদান $I\cdot dl$ এর জন্য $P(x,y,z)$ বিন্দুতে একটি চৌম্বক আবেশ ক্ষেত্র $d\vec{B}$ উৎপন্ন হয়।

বায়োট স্যাভার্ট সূত্র অনুসারে P বিন্দুতে চৌম্বক ক্ষেত্র

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint \frac{d\vec{l}\times r}{r^3}$$

এবং $$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\vec{\nabla}\cdot\oint \frac{d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint \vec{\nabla}\cdot\frac{d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint\left\{\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{dl\times r}{r^3}\right)\right\}$$

$$\left[\because \nabla\cdot(A\times B) = \vec{B}(\nabla\times A) - \vec{A}(\nabla\times B)\right]$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\oint \frac{\vec{r}}{r^3}(\nabla\times dl) - d\vec{l}\left(\nabla\times\frac{r}{r^3}\right)\right\}\Big] \quad \text{—(1)}$$

এখানে, $\nabla \times dl = 0$ কারণ $P'(x', y', z')$ বিন্দুতে $d\vec{l}$ ফাংশন নয়।

আবার, $\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2} = -\frac{r}{r^2}\frac{r}{r} = -\frac{r}{r^3}$

$$\therefore \nabla \times \frac{r}{r^3} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)$$

আমরা জানি, $\nabla \times \nabla\phi = 0$

অনুরূপভাবে, $\nabla \times \frac{r}{r^3} = -\nabla \times \nabla\left(\frac{1}{r}\right) = 0$

$$\Rightarrow \nabla \times \frac{r}{r^3} = 0$$

সমীকরণ (1) এ মান বসিয়ে,

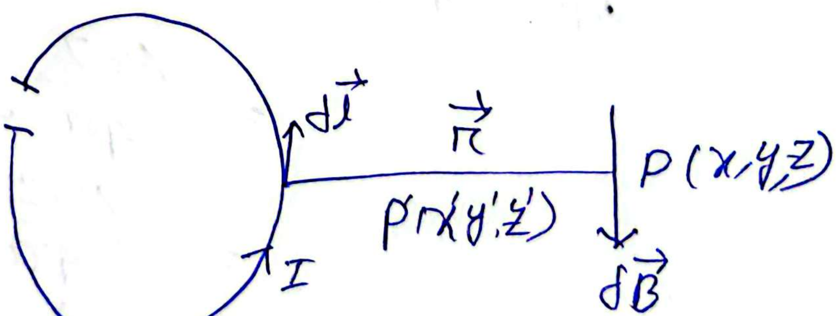
$$\nabla \cdot B = 0$$

(Showed)

⊞ দেখাও যে চৌম্বক ভেক্টর বিভব $\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint \frac{d\vec{l}}{r}$ //

এবং $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \frac{J\,dV'}{r}$

→



অনুযায়ী চৌম্বক আবেশ $\vec{B}$,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint \frac{d\vec{l} \times r}{r^3}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint d\vec{l} \times \nabla\left(\frac{1}{r}\right) \quad (1) \quad \left[\because \nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}\right]$$

আমরা জানি, $A\nabla\times B - \vec{B}\times\nabla A$

$$\nabla\times(A\vec{B}) = \nabla \cancel{\times(A\vec{B}) - A\vec{\nabla}\times\vec{B}}$$

ধরি, $A = \frac{1}{r}$, $\vec{B} = d\vec{l}$

$$\Rightarrow -\vec{B}\times\nabla A = \nabla\times(AB) - A\nabla\times\vec{B}$$

$$\Rightarrow -dl\times\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \nabla\times\left(\frac{1}{r}dl\right) - \frac{1}{r}\nabla\times dl$$

এখানে, $\nabla\times dl = 0$ হলে,

$$\Rightarrow -d\vec{l}\times\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \nabla\times\left(\frac{1}{r}d\vec{l}\right) \quad (2)$$

(2) নং এর মান (1) এ বসিয়ে,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint \nabla\times\left(\frac{1}{r}d\vec{l}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \nabla\times\left[\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint\frac{dl}{r}\right]$$

$$= \nabla\times A \qquad \left[A = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint\frac{dl}{r}\right]$$

যদি প্রবাহ ঘনত্ব J হয়,

$$I = J\cdot dS$$

এবং $dS\cdot dl = dv'$

$$\Rightarrow \frac{I}{J}dl = dv'$$

$$\Rightarrow I dl = J dv'$$

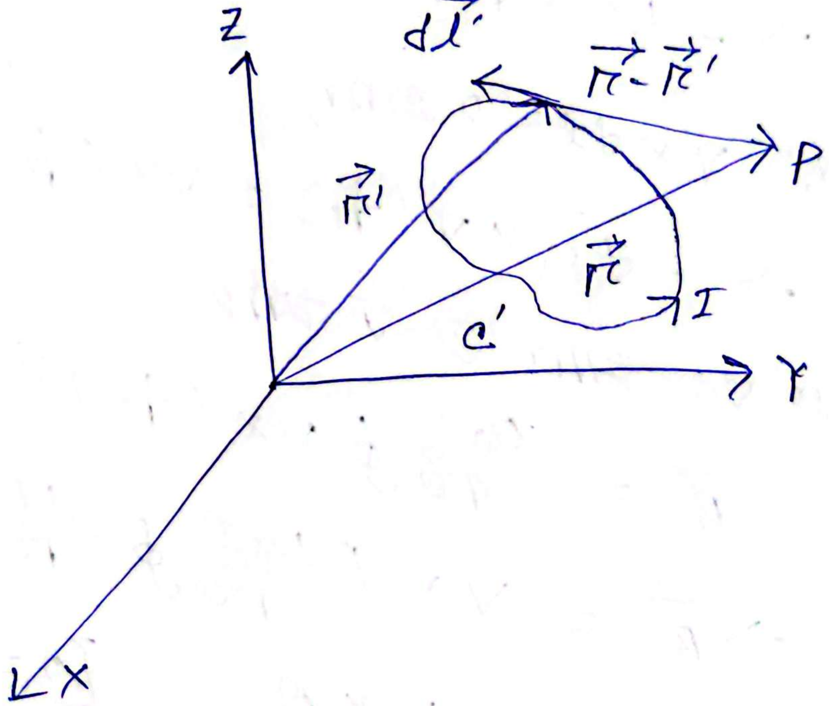
$$\therefore \vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint \frac{dl}{r}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\oint \frac{J\,dv'}{r}$$

(Showed)

প্র দেখাও যে একটি কারেন্ট লুপের ভেক্টর বিভব হলো $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}$ এবং স্কেলার বিভব $\phi_m = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{\vec{m}\cdot\vec{r}}{r^3}\right]$

→



চিত্রে I তড়িৎ প্রবাহী একটি কারেন্ট লুপ প্রদর্শন করা হলো। $d\vec{l}'$ একটি লুপ উপাদান বিবেচনা করি। এবং P বিন্দুতে ভেক্টর বিভব,

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{v'} \frac{J\,dv'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

আমরা জানি, $J\,dv = I\,dl'$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{c'} \frac{I\,dl'}{|r - r'|}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{c'} dl' \frac{1}{(r^2 - 2 \cdot r \cdot r'\cos\theta + r'^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{c'} dl' \frac{1}{(r^2 + r'^2 - 2r \cdot r')^{1/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{c'} dl' \frac{1}{r^{2\,1/2}\left(1 + \frac{r'^2}{r^2} - \frac{2rr'}{r^2}\right)^{1/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\oint_{c'} dl' \left(1 + \frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r \cdot r'}{r^2}\right)^{-1/2}$$

দ্বিপদী বিস্তৃতি করে পাই,

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\oint_{c'}\left[1 + \frac{r' \cdot r}{r^2} + \frac{1}{2r^4}\left\{3(r' \cdot r)^2 - r^2 \cdot r'^2\right\} + \cdots\right] dl'$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\left[\oint_{c'} dl' + \frac{r' \cdot r}{r^2} dl' + \oint_{c'} \frac{3(r' \cdot r)^2 - r^2 \cdot r'^2}{2r^4} dl' + \cdots\right] \quad (1)$$

এবার $r' \ll r$ হলে উৎসের মানগুলো নগণ্য বিবেচনা করে

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\left[\oint_{c'} dl' + \oint_{c'} \frac{r'\cdot r}{r^2}\, dl'\right]$$

এখানে, $\oint_{c'} d\vec{l} = 0$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\oint_{c'} \frac{r'\cdot r}{r^2}\cdot dl'$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3}\oint_{c'} (r'\cdot r)\, dl' \quad \text{—— (2)}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3}\oint_{c'} \frac{1}{2}\vec{r}\times(dl'\times r') \quad \text{—— (3)}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3}\left[1/2 \oint (r' \times I dl')\right]\times\vec{r}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi r^3}(\vec{m}\times\vec{r})$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3} \checkmark$$

আবার আমরা জানি,

চৌম্বক ক্ষেত্র $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$

$$= \vec{\nabla}\times\left[\frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{m\times r}{r^3}\right)\right]$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla}\times\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}$$

$\because A\times(B\times C) = (A\cdot C)B - (A\cdot B)C$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\left(\nabla\cdot\frac{\vec r}{r^3}\right)m - (\nabla\cdot m)\frac{\vec r}{r^3}\right]$$

$$\because \nabla\cdot\frac{\vec r}{r^3} = 0$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left(-(\nabla\cdot m)\frac{\vec r}{r^3}\right)$$

$$\boxed{= -\vec\nabla\left[\frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{m\cdot\vec r}{r^3}\right]}$$

$$= -\vec\nabla\,\phi_m$$

[showed]

প্র: বায়ু হতে পরিবাহী মাধ্যমের অভ্যন্তরে তড়িৎ চুম্বক তরঙ্গের লম্ব আপতনের জন্য দেখাও যে, $R = 1 - 4\pi\frac{\mu}{\mu_0}\frac{\delta}{\lambda_0}$

→ আমরা জানি দুই-ডাইইলেকট্রিক পরিবাহী মাধ্যমের অভ্যন্তরে প্রতিফলন সহগ $R = 1 - 2\sqrt{2\frac{\mu_2}{\mu_1}\left(\frac{\epsilon_1}{\sigma_2}\right)\omega}$

বায়ু হতে মাধ্যমের অভ্যন্তরের জন্য

$\mu_2 = \mu$, $\mu_1 = \mu_0$, $\sigma_2 = \sigma$, $\epsilon_1 = \epsilon_0$

$$R = 1 - 2\sqrt{2\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)\left(\frac{\omega\epsilon_0}{\sigma}\right)}$$

$$= 1 - 2\sqrt{2\,\frac{\mu\omega\epsilon_0}{\mu_0}\,\frac{2}{\mu\omega\delta^2}}$$

যেখানে, ত্বক গভীরতা

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}}$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{2}{\mu\omega\delta^2}$$

আবার, $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$, $c = \nu\lambda_0$

$$= 2\pi\nu \cdot \frac{\lambda_0}{2\pi}$$

$$= \omega \cdot \frac{\lambda_0}{2\pi}$$

$$R = 1 - 2\omega\mu\delta \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}$$

$$= 1 - 2\omega\mu\delta \frac{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}{\mu_0}$$

$$= 1 - 2\omega\mu \frac{\delta}{c\mu_0}$$

$$= 1 - 2\omega\mu\delta \cdot \frac{2\pi}{\omega\lambda_0\mu_0}$$

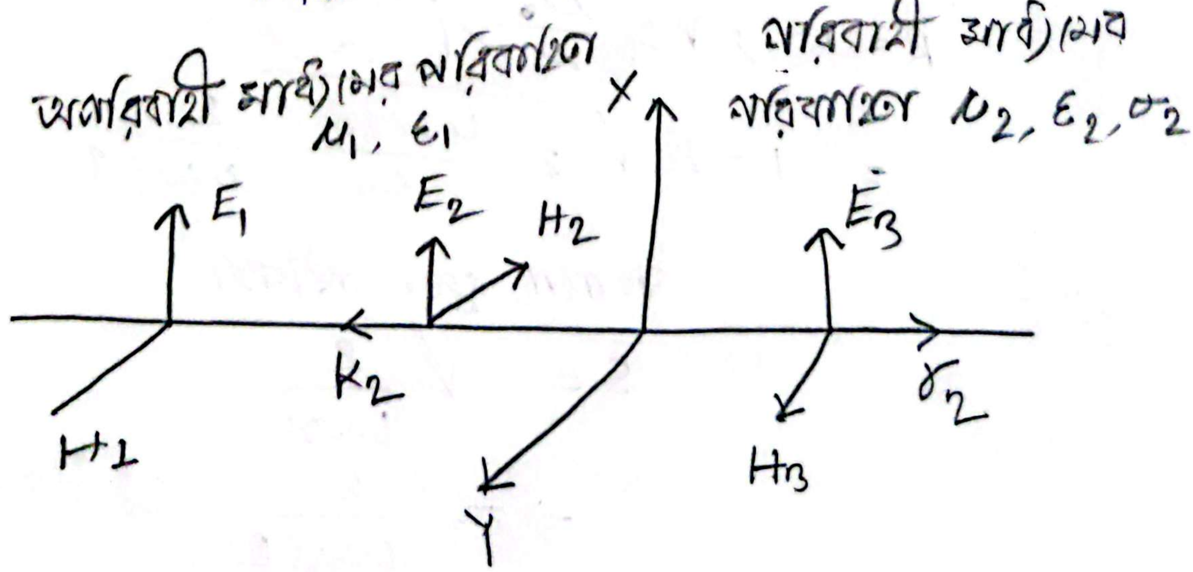
$$= 1 - 4\pi\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)\delta/\lambda_0$$

(showed)

প্র দেখাও কোনো সুপরিবাহীর উপর লম্বভাবে আপতিত সমতল তড়িৎ চৌম্বকীয় তরঙ্গের বেলায় প্রতিফলন সহগ

$$R = 1 - \sqrt{\frac{8\mu_2\omega\epsilon_1}{\mu_1\sigma}}$$ ।

→



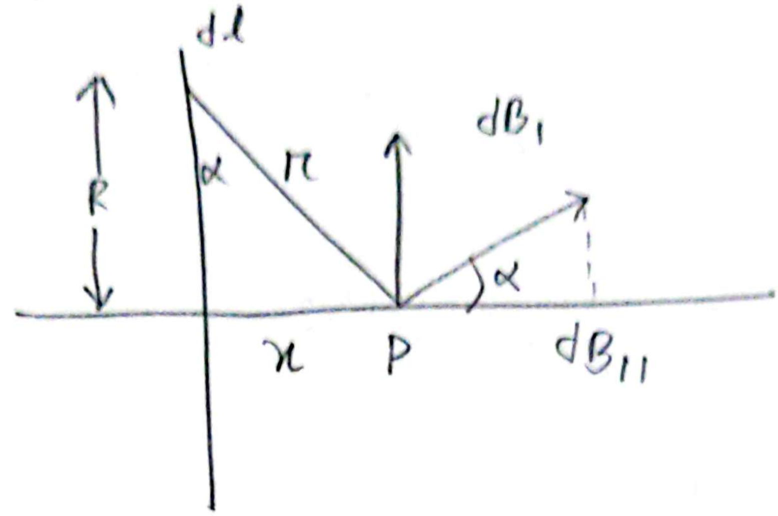
ধরি, একটি অপরিবাহী মাধ্যম μ_1, ϵ_1 এবং পরিবাহী মাধ্যম $\mu_2 \epsilon_2 \sigma_2$ । $z=0$ বিন্দুতে সমতলের আপতিত একটি তড়িৎ চৌম্বক তরঙ্গ বিবেচনা করি,

x অক্ষ বরাবর অপরিবাহী মাধ্যমের তড়িৎ ক্ষেত্রগুলো,

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= \hat{i}\, E_{10}\, e^{j(k_1 z - \omega t)} \\ E_2 &= \hat{i}\, E_{20}\, e^{-j(k_2 z + \omega t)} \end{aligned}\right\} \text{---} (1)$$

প্র: একটি বৃত্তাকার কারেন্ট লুপের অক্ষের উপর চৌম্বক ক্ষেত্র নির্ণয় কর।

→



dB_{11} লুপের জন্য,

$$B = \int dB_{11}$$

বায়োট-স্যাভার্টের সূত্রানুসারে,

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \sin 90^\circ}{r^2}$$

$$= \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} \quad \text{——— (i)}$$

$$dB_{11} = dB \cos\alpha$$

$$= \frac{\mu_0 I \cos\alpha \, dl}{4\pi r^2} \quad \text{——— (ii)}$$

যদি লুপের কেন্দ্র থেকে P বিন্দুর দূরত্ব x

$$r = \sqrt{R^2 + x^2}$$

এবং $\cos\alpha = \frac{R}{r}$

$$= \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

অতএব, $B = \dfrac{\mu_0 I R}{4\pi (R^2+x^2)^{3/2}} \int dl$

$$= \frac{\mu_0 I R}{4\pi (R^2+x^2)^{3/2}} \times 2\pi R \qquad \left[\int dl = 2\pi R\right]$$

$$= \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}$$

যদি $x >> R$ হয়,

$$= \frac{\mu_0 I R^2}{2x^3}$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{NIA}{x^3} \qquad \left[A = \pi R^2\right]$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{m}{x^3} \qquad \left[m = NIA\right]$$

ঘ। মুক্ত স্থানে তরঙ্গ সমীকরণ প্রতিপাদন কর।

→ আমরা জানি ; মুক্তস্থানে $J=0$, $\rho=0$, $\sigma=0$

$\mu=1$, $\epsilon=1$

সরণ ভেক্টর $\vec{D}=\epsilon_0 E$, চৌম্বক আবেশ $\vec{B}=\mu_0 H$

ম্যাক্সওয়েলের ৩য় সমীকরণ হতে,

$$\nabla\times E=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \nabla\times\nabla\times E=-\left(\nabla\times\frac{\partial B}{\partial t}\right)$$

$$=-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{B})$$

$$=-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mu_0 H)$$

$$=-\mu_0\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times H)$$

আবার,

$$\nabla\times H=\frac{\partial D}{\partial t}=\epsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \nabla\times\nabla\times E=-\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad \text{--- (1)}$$

কিন্তু $\nabla\times\nabla\times E=\nabla(\nabla\cdot E)-\nabla^2 E$

যেখানে, $\nabla\cdot D=\frac{1}{\epsilon_0}\nabla\cdot E=0$

(1) হতে, $$\nabla^2 E=\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad \text{--- (2)}$$

অনুরূপভাবে, $$\nabla^2 H=\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \quad \text{--- (3)}$$

সমীকরণ ② ও ③ হতে, তরঙ্গের সাধারণ সমীকরণ,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

এর সাথে তুলনা করে,

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi \times 10^{-7} \times 8.8542 \times 10^{-12}}}$$

$$= 2.9999 \times 10^{8} \ m/s$$

যা শূন্যস্থানে আলোর দ্রুতির সমান।

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

সুতরাং তাড়িৎচৌম্বক তরঙ্গ শূন্যস্থানে আলোর বেগে সঞ্চালিত হয়।

ঙ) দেখাও যে, তরঙ্গ সমীকরণকে নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায় $(\nabla^2 + K^2)E = 0$, যেখানে $K = \frac{2\pi}{\lambda}$ তরঙ্গ সংখ্যা।

→ ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণসমূহ,

$$\nabla \cdot D = 0 \quad (1), \qquad \nabla \cdot B = 0 \quad (2)$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (3)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial D}{\partial t} \quad (4)$$

$$D = \epsilon_0 E, \quad \vec{B} = \mu_0 H,$$

সমীকরণ (3) এর কার্ল নিয়ে,

$$\nabla \times (\nabla \times E) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times B)$$

$$\Rightarrow \nabla(\nabla \cdot E) - \nabla^2 E = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mu_0 H)$$

$$\Rightarrow \nabla(\nabla \cdot E) - \nabla^2 E = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times H)$$

$$\Rightarrow \nabla \frac{1}{\epsilon_0}(\nabla \cdot D) - \nabla^2 E = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times H)$$

$$\Rightarrow -\nabla^2 E = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial D}{\partial t}\right)$$

$$\Rightarrow -\nabla^2 E = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} E$$

$$\Rightarrow \nabla^2 E = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad (5)$$

যেখানে, $E = E_0 e^{j(Kz - \omega t)}$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\omega^2 E_0 e^{j(Kz - \omega t)}$$

$$= -\omega^2 E$$

(5) হতে, $\nabla^2 E = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$

$$\Rightarrow \nabla^2 E - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

$$\Rightarrow \nabla^2 E - \mu_0 \epsilon_0 (-\omega^2 E) = 0$$

$$\Rightarrow \nabla^2 E + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 E = 0 \qquad \left[c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}\right]$$

$$\Rightarrow \nabla^2 E + \frac{\omega^2}{c^2} E = 0$$

$$\Rightarrow \nabla^2 E + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 E = 0 \qquad k = \omega\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \frac{\omega}{c}$$

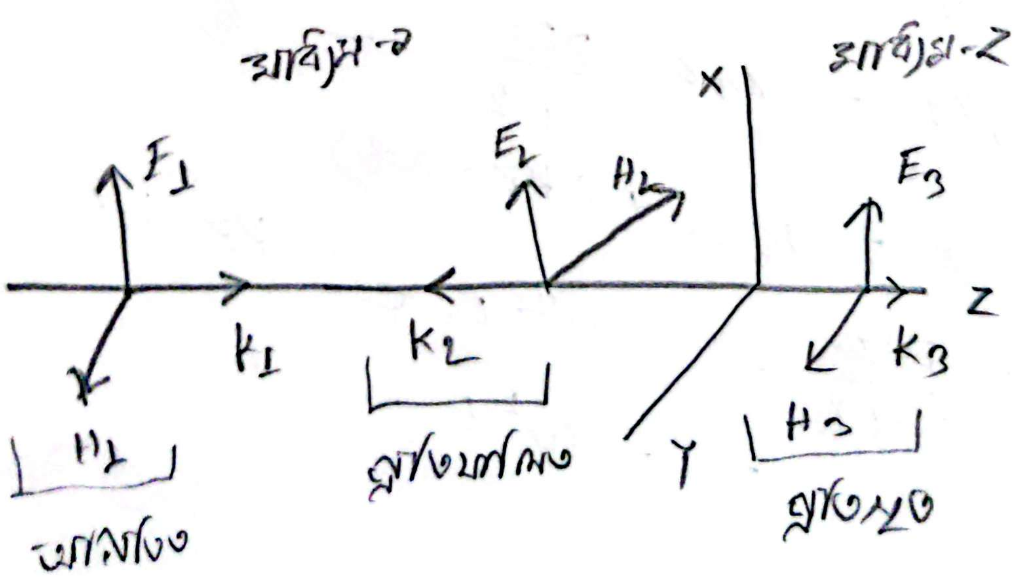
$$\Rightarrow \nabla^2 E + k^2 E = 0$$

$$\Rightarrow (\nabla^2 + k^2) E = 0$$

(Showed)

প্র. দুটি অপরিবাহী মাধ্যমের অন্তঃতলে লম্ব আপতনের প্রতিফলন ও প্রতিসরণ ব্যাখ্যা কর। প্রতিফলন সহগ ও প্রতিসরণ সহগের রাশিমালা বের কর এবং দেখাও যে $T + R = 1$।

→



আমরা জানি, $K = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$\Rightarrow K = \frac{2\pi}{V/\nu}$$

$$\Rightarrow K = \frac{2\pi\nu}{V}$$

$$\Rightarrow K = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

$V = \nu\lambda$

$\Rightarrow \lambda = \frac{V}{\nu}$

$\omega = 2\pi\nu$

$V = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$

আবার, $K_1 = K_2 = \omega\sqrt{\mu_1\epsilon_1}$ মাধ্যম-১ এর জন্য

$K_3 = \omega\sqrt{\epsilon_2\mu_2}$ " 2 " "

x অক্ষ বরাবর সমবর্তিত ক্ষেত্রগুলো হলো:

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= \hat{i}\, E_{10}\, e^{j(K_1 z - \omega t)} \\ E_2 &= \hat{i}\, E_{20}\, e^{-j(K_2 z + \omega t)} \\ E_3 &= \hat{i}\, E_{30}\, e^{j(K_3 z - \omega t)} \end{aligned}\right\} \text{———} (1)$$

ম্যাক্সওয়েলের তৃতীয় সূত্র হতে পাই,

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} = -\mu\frac{\partial H}{\partial t} \quad [\because B = \mu H]$$

$$\Rightarrow \vec{H} = -\frac{1}{\mu}\int(\nabla \times E)\,dt \;[\text{সমাকলন করে}]$$

$$= -\frac{1}{\mu_1}\int \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_{10}e^{j(K_1 z-\omega t)} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{\mu_1}\int (-\hat{j})\left(-\frac{\partial}{\partial z} E_{10} e^{j(k_1 z - \omega t)}\right) dt$$

$$= -\frac{1}{\mu_1}\int \hat{j}\, j k_1 \cdot E_{10} e^{j(k_1 z - \omega t)} dt$$

$$= -\frac{1}{\mu_1}\hat{j}\cdot jk_1 \frac{E_{10} e^{j(k_1 z - \omega t)}}{-\omega j}$$

$$= -\frac{\hat{j}}{\mu_1}\omega\sqrt{\mu_1\epsilon_1}\frac{E_{10} e^{j(k_1 z - \omega t)}}{\omega} \qquad [k = \omega\sqrt{\epsilon_1\mu_1}]$$

$$= \hat{j}\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} E_{10} e^{j(kz - \omega t)}$$

$$\left.\begin{aligned}
\hat{H}_1 &= \hat{j}\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} E_{10} e^{j(kz-\omega t)} \\
\hat{H}_2 &= -j\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} E_{20} e^{-j(kz+\omega t)} \\
\hat{H}_3 &= j\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} E_{30} e^{+j(kz-\omega t)}
\end{aligned}\right\} \text{ --- } (2)$$

দুটি মাধ্যমের আন্তঃতলে তড়িৎ ক্ষেত্রের $\vec{E}$ এর পদ স্পর্শানুক অংশ আরোপ করে.

$$E_{1t} + E_{2t} = E_{3t}$$

$$\Rightarrow E_{10} e^{j(k_1 z - \omega t)} + E_{20} e^{-j(k_2 z + \omega t)} = E_{30} e^{j(k_3 z - \omega t)}$$

$$\Rightarrow E_{10} + E_{20} = E_{30} \text{ --- } (3)$$

আবার দুটি মাধ্যমের চৌম্বক ক্ষেত্রের $\vec{H}$ এর এর জন্য সীমাবদ্ধতা শর্ত আরোপ করে,

$$H_{1t} + H_{2t} = H_{3t}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{10} - \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{20} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} E_{30} \quad \text{--- (4)}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} (E_{10} - E_{20}) = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_2}} (E_{10} + E_{20}) \quad [\text{(3) হতে}]$$

$$\Rightarrow E_{20}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\right) = E_{10}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{E_{20}}{E_{10}} = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}} \quad \text{--- (5)}$$

$E_{20} = E_{30} - E_{10}$ (4) এ বসিয়ে,

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{10} - \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} (E_{30} - E_{10}) = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} E_{30}$$

$$\Rightarrow E_{30}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} + \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\right) = 2\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{10}$$

$$\Rightarrow \frac{E_{30}}{E_{10}} = \frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}} \quad \text{--- (6)}$$

সমীকরণ ৫ ও ৬ এর জন্য $\mu_2 \approx \mu_1 = \mu_0$ হলে,

$$\frac{E_{20}}{E_{10}} = \frac{\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_0}} - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_0}}}{\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_0}} + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_0}}} = \frac{\sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2}}$$

$$= \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad \text{--- ৭}$$

অনুরূপভাবে,

$$\frac{E_{30}}{E_{10}} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \quad \text{--- ৮}$$

$\therefore$ প্রতিফলন সহগ,

$$R_n = \frac{E_2 \times H_2}{E_1 \times H_1}$$

$$= \frac{1/2\, c_1 \epsilon_1\, E_{20}^{*} E_{20}}{1/2\, c_1 \epsilon_1\, E_{10}^{*} E_{10}}$$

$$= \left(\frac{E_{20}}{E_{10}}\right)^{*} \left(\frac{E_{20}}{E_{10}}\right)$$

$$= \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 \quad \text{--- ৯}$$

প্রতিসরণ সহগ $T_n = \dfrac{E_3 \times H_3}{E_1 \times H_1}$

$$= \frac{1/2\, c_2 \varepsilon_2 E_{30}^{*} E_{30}}{1/2\, c_1 \varepsilon_1 E_{10}^{*} E_{10}}$$

$$= \frac{\varepsilon_1 \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}}}{\varepsilon_1 \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}} \left(\frac{E_{30}}{E_{10}}\right)^{*} \left(\frac{E_{30}}{E_{10}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{\varepsilon_2/\mu_0}}{\sqrt{\varepsilon_1/\mu_0}} \left(\frac{E_{30}}{E_{10}}\right)^{*} \left(\frac{E_{30}}{E_{10}}\right)$$

$$= \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{4n_1^2}{(n_1+n_2)^2}$$

$$= \frac{4 n_1 n_2}{(n_1+n_2)^2} \quad \text{—— (10)}$$

$$\therefore R_n + T_n = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 + \left(\frac{4 n_1 n_2}{(n_1+n_2)^2}\right)$$

$$= \frac{(n_1 - n_2)^2 + 4 n_1 n_2}{(n_1+n_2)^2}$$

$$= \frac{(n_1+n_2)^2}{(n_1+n_2)^2}$$

$$= 1$$

$\therefore R_n + T_n = 1$ যাহা শক্তির সংরক্ষণশীলতার নির্দেশক

দেখাও যে, ম্যাক্সওয়েলের তাড়িতচৌম্বক তরঙ্গ তীর্যক তরঙ্গ।

→ ধরা যাক, সমতল তরঙ্গ z অক্ষের দিকে প্রবাহমান। তাহলে $\vec{E}$ এবং $\vec{H}$ ভেক্টরের পরিবর্তন শুধুমাত্র z অক্ষের দিকেই ঘটে। সুতরাং

$$\left.\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}(z,t) \\ \vec{H} &= H(z,t) \end{aligned}\right\} \quad \text{--- (1)}$$

ম্যাক্সওয়েলের সূত্র হতে,

$$\nabla \cdot D = 0 \qquad [\because D = \epsilon_0 E]$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot (\epsilon_0 E) = 0$$

$$\Rightarrow \epsilon_0 \nabla \cdot E = 0$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot E = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

আবার, $\nabla \cdot B = 0$

$$\Rightarrow \nabla \cdot (\mu_0 H) = 0$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot H = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

আবার,
$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\Rightarrow (\nabla \times E)_z = -\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}$$

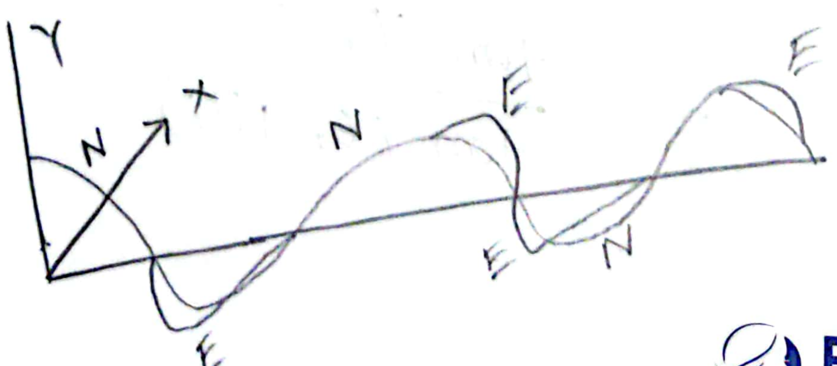
কিন্তু $(\nabla \times E)_z = \hat{k}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) = 0$

$$\therefore \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0$$

সুতরাং দেখা যায় সময়ের সাথে Hz অপরিবর্তিত থাকে। তদ্রূপভাবে Ez উপাংশটি ও অপরিবর্তিত থাকে। সুতরাং, $E_z = H_z = 0$

$$E_z = E_x\hat{i} + E_y\hat{j}$$
$$H_z = H_x\hat{i} + H_y\hat{j}$$

যেহেতু $\vec{E}$ ও $\vec{H}$ এর কোনো z উপাংশ নেই অতএব তরঙ্গ z অক্ষের দিকে সঞ্চালিত হলে তাই বৈদ্যুতিক তরঙ্গ প্রবাহের দিকের সাথে লম্বভাবে ক্রিয়াশীল হবে, অর্থাৎ ম্যাক্সওয়েলের তাড়িতচৌম্বক তরঙ্গ তীর্যক তরঙ্গ।



প্রশ্ন দেখাও যে, ব্রুস্টারের কোণ $\theta_B = \cot^{-1}\left(\frac{n_1}{n_2}\right)$ ।

→ কোনো আপতন কোণের জন্য আপতন ও প্রতিসরণ কোণের যোগফল $\pi/2$ হয় তাকে ব্রুস্টার কোণ বলে।

ফ্রেনেলের সমীকরণ অনুসারে আমরা পাই,

$$\frac{E_{oR}}{E_{oi}} = \frac{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)\cos\theta_t - \cos\theta_i}{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)\cos\theta_t + \cos\theta_i} \quad \text{--- (1)}$$

যখন আপতিত তরঙ্গ সমবর্তিত তখন তড়িৎ ক্ষেত্র আপতন তলের সমান্তরাল। স্নেলের সূত্রানুসারে,

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i} \quad \text{--- (2)}$$

$$\therefore \frac{E_{oR}}{E_{oi}} = \frac{\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i}\cdot\cos\theta_t - \cos\theta_i}{\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i}\cos\theta_t + \cos\theta_i}$$

$$= \frac{\sin\theta_t\cos\theta_t - \sin\theta_i\cos\theta_i}{\sin\theta_t\cos\theta_t + \sin\theta_i\cos\theta_i}$$

$$= \frac{\tan(\theta_t - \theta_i)}{\tan(\theta_t + \theta_i)}$$

এখন ব্রুস্টারের কোণের জন্য,

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i}$$

$$= \frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_B}$$

$$= \frac{\sin(\pi/2 - \theta_B)}{\sin\theta_B} \qquad [\theta_t + \theta_i = \pi/2]$$

$$= \cot\theta_B$$

$$\therefore \theta_B = \cot^{-1}\left(\frac{n_1}{n_2}\right)$$

(showed)

প্র 1.5 প্রতিসরণাঙ্কের কাচের পৃষ্ঠে আপতিত আলো 45° কোণে আপতিত হলে সমবর্তনের মাত্রা নির্ণয় কর।

→ স্নেলের সূত্রানুসারে,

$$\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i} = \frac{n_1}{n_2}$$

$$\Rightarrow \sin\theta_t = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i$$

$$= \frac{\sin 45^\circ}{1.5}$$

$$= \frac{1}{1.5 \times \sqrt{2}}$$

$$\therefore \theta_t = \sin^{-1}\left(\frac{1}{1.5 \times \sqrt{2}}\right) = 28.1^\circ$$

এখানে $R_N = \dfrac{\sin^2(\theta_i - \theta_t)}{\sin^2(\theta_i + \theta_t)}$

$$= \frac{\sin^2(45 - 28.1)}{\sin^2(45 + 28.1)}$$

$$= 0.09337$$

$$R_P = \frac{\tan^2(\theta_i - \theta_t)}{\tan^2(\theta_i + \theta_t)}$$

$$= \frac{\tan^2(45 - 28.1)}{\tan^2(45 + 28.1)}$$

$$= 0.00851$$

সমবর্তন হার $= \dfrac{R_N - R_P}{R_N + R_P}$

$$= \frac{0.09337 - 0.00851}{0.09337 + 0.00851}$$

$$= 83\%$$

ঘ) প্রমাণ কর যে, প্রত্যেক সংকট কোণ অপেক্ষা অধিক কোণে আপতিত হলে কোন রশ্মি দ্বিতীয় মাধ্যমে প্রবাহিত হয় না।

→ স্নেলের সূত্রানুসারে পাই,

$$\sin\theta_i = \frac{n_2}{n_1}\sin\theta_t \quad \text{—— (1)}$$

এখানে $\frac{n_2}{n_1} < 1$ হলে $\theta_i < \theta_t$ হবে। আপতন কোণের প্রেক্ষিতে প্রতিসরণ কোণ $\theta_t = 90^\circ$ হয়। তরঙ্গ ঘন মাধ্যম হতে হালকা মাধ্যমের দিকে প্রবাহিত হলে বিবেচনা যে কোণে আপতিত হলে প্রতিসরণ কোণ 90° হয় তাকে সংকট কোণ বা ক্রান্তি কোণ বলে (θ_c)। $\theta_t = \theta_c$ বসিয়ে

$$\sin\theta_c = \frac{n_2}{n_1}\sin 90^\circ = \frac{n_2}{n_1} \quad \text{—— (2)}$$

এখন $\theta_i > \theta_c$ হলে (1) হতে,

$$\sin\theta_i = \frac{n_2}{n_1}\sin\theta_t$$

$$\Rightarrow \sin\theta_t = \frac{\sin\theta_i}{\frac{n_2}{n_1}}$$

$$= \frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_c} > 1 \quad \left[\sin\theta_c = \frac{n_2}{n_1}\right]$$

কোনো বাস্তব কোণের সাইন একের চাইতে অধিক হতে পারে না অর্থাৎ θ_t জটিল রাশি হবে।

$$\cos\theta_t = \sqrt{1-\sin^2\theta_t}$$

$$= j\sqrt{\sin^2\theta_t - 1}$$

$$= j\left\{\left(\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_c}\right)^2 - 1\right\}^{1/2}$$

$$= jb$$

এখানে, $b = \left\{\left(\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t}\right)^2 - 1\right\}^{1/2}$

আমরা জানি,

$$E_t = E_{0t}\, e^{j(\omega\sqrt{\epsilon_2\mu_2})\, n_t \cdot r_i - \omega t]}$$

$$= E_{0t}\, e^{[-j\{\omega t - \omega\sqrt{\epsilon_2\mu_2}(x\sin\theta_t + z\cos\theta_t)\}]}$$

$$= E_{0t}\, e^{[-\omega(\sqrt{\epsilon_2\mu_2})bz]} \times e^{[-j\{\omega t - \omega(\sqrt{\epsilon_2\mu_2})x\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_c}\}]}$$

এ সমীকরণ থেকে দেখা যায় যে, $\theta_i > \theta_c$ হলে প্রতিসৃত তরঙ্গ আপতন মাধ্যমের পৃষ্ঠতলের সমান্তরালে প্রবাহিত হয় এবং পৃষ্ঠ লম্বিক কোনো শক্তি প্রবাহিত হয় না।

প্র: ত্বক গভীরতা কী? পরিবাহী মাধ্যমের maxwell এর তরঙ্গ সমীকরণ সমাধান বের করে ত্বক গভীরতা বের কর।

→ যে গভীরতায় তরঙ্গের শক্তি মূল মানের $\frac{1}{e}$ অংশে হ্রাস পায় তাকে ত্বক গভীরতা বলে।

ম্যাক্সওয়েলের ৩য় সমীকরণের curl নিয়ে,

$$\nabla\times\nabla\times E = -\nabla\times\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \nabla\times\nabla\times E = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times B)$$

$$\Rightarrow \nabla(\nabla\cdot E) - \nabla^2 E = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 J + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}\right)$$

$$\Rightarrow \nabla\cdot 0 - \nabla^2 E = -\frac{\partial}{\partial t}\mu_0\epsilon_0\frac{\partial E}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\mu_0 J$$

$$\Rightarrow \nabla^2 E = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}E + \mu_0\sigma\frac{\partial}{\partial t}E \quad [J=\sigma E]$$

$$\Rightarrow \nabla^2 E - \mu_0\sigma\frac{\partial}{\partial t}E - \mu\epsilon\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad \text{--- (1)}$$

ধরি তরঙ্গটি z অক্ষ বরাবর চলমান। অতএব,

$$E(z) = E_0 e^{i(kz-\omega t)}$$

তবে, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial z^2}E_0 e^{i(kz-\omega t)} - \mu\sigma\frac{\partial}{\partial t}E_0 e^{i(kz-\omega t)} - \mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_0 e^{i(kz-\omega t)} = 0$$

$$\Rightarrow (ik)^2 E_0 e^{i(kz-\omega t)} + \mu\sigma i\omega E_0 e^{i(kz-\omega t)} - \mu\varepsilon (i\omega)^2 E_0 e^{i(kz-\omega t)} = 0$$

$$\Rightarrow E_0 e^{i(kz-\omega t)} (-k^2 + \mu\sigma j\omega + \mu\varepsilon\omega^2) = 0$$

$$\therefore E_0 e^{i(kz-\omega t)} \neq 0$$

$$\Rightarrow -k^2 + \mu\sigma j\omega + \mu\varepsilon\omega^2 = 0$$

$$\Rightarrow k^2 = \mu\sigma i\omega + \mu\varepsilon\omega^2 \quad \text{—— (2)}$$

এখানে k একটি জটিল রাশি যার মধ্যে বাস্তব(α) এবং অবাস্তব (β) বিদ্যমান।

$$\therefore k = \alpha + j\beta$$

$$\Rightarrow k^2 = (\alpha + j\beta)^2$$

$$= \alpha^2 + (j\beta)^2 + 2\alpha\beta i$$

$$= (\alpha^2 - \beta^2) + (2\alpha\beta) i \quad \text{—— (3)}$$

সমীকরণ (2) ও (3) তুলনা করে,

$$\alpha^2 - \beta^2 = \mu\varepsilon\omega^2 \quad \text{—— (4)}$$

এবং $2\alpha\beta = \mu\sigma\omega$ —— (5)

$$\Rightarrow \beta = \frac{\mu\sigma\omega}{2\alpha} \quad \text{—— (6)}$$

(6) এর মান (4) এ বসিয়ে,

$$(\alpha^2 - \beta^2) = \mu\varepsilon\omega^2$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - \left(\frac{\mu\sigma\omega}{2\alpha}\right)^2 = \mu\varepsilon\omega^2$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - \frac{\mu^2\sigma^2\omega^2}{4\alpha^2} = \mu\varepsilon\omega^2$$

$$\Rightarrow 4\alpha^4 - \mu^2\sigma^2\omega^2 - 4\alpha^2\mu\varepsilon\omega^2 = 0$$

[$4\alpha^2$ দ্বারা গুণ করে]

$$\Rightarrow 4(\alpha^2)^2 - (4\mu\varepsilon\omega^2)\alpha^2 - \mu^2\sigma^2\omega^2 = 0$$

$ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে,

$a=4$, $b=-4\mu\varepsilon\omega^2$, $c=-\mu^2\sigma^2\omega^2$,

$x=\alpha^2$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = \frac{-(-4\mu\varepsilon\omega^2) \pm \sqrt{(-4\mu\varepsilon\omega^2)^2 - 4\cdot 4(-\mu^2\sigma^2\omega^2)}}{2\times 4}$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = \frac{4\mu\varepsilon\omega^2 \pm \sqrt{16\mu^2\varepsilon^2\omega^4 + 16\mu^2\sigma^2\omega^2}}{8}$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = \frac{4\mu\varepsilon\omega^2 \pm 4\mu\omega\sqrt{\omega^2\varepsilon^2+\sigma^2}}{8}$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = \frac{4\mu\varepsilon\omega^2 \pm 4\mu\omega\sqrt{\omega^2\varepsilon^2\left(1+\frac{\alpha^2}{\omega^2\varepsilon^2}\right)}}{8}$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = \frac{4\mu\varepsilon\omega^2 \pm 4\mu\varepsilon\omega^2\sqrt{1+\alpha^2/\omega^2\varepsilon^2}}{8}$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = 4\mu\varepsilon\omega^2\left(\frac{1\pm\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{\omega^2\varepsilon^2}}}{\cancel{8}\,2}\right)$$

$$\Rightarrow \alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left(1\pm\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{\omega^2\varepsilon^2}}\right)^{1/2} \quad \text{--- (7)}$$

α এর মান ⑥ নং এ বসিয়ে,

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left(-1\pm\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{\omega^2\varepsilon^2}}\right)^{1/2} \quad \text{--- (8)}$$

এখানে,

$$E = E_0 e^{i(kz-\omega t)}$$

$$= E_0 e^{i[(\alpha+i\beta)z-\omega t]}$$

$$= E_0 e^{i(\alpha z+i\beta z-\omega t)}$$

$$= E_0 e^{i\alpha z-\beta z-i\omega t}$$

$$E(r,t) = E_0 e^{-\beta z} e^{i(\alpha z-\omega t)} \quad \text{--- (9)}$$

তাই তরঙ্গটি সমতলীয় তরঙ্গের সমাধান।

এখন ধরি, $\beta = \frac{1}{z}$

$$\Rightarrow \beta z = 1$$

$$E(r,t) = E_0 e^{-1} e^{i(\alpha z - \omega t)}$$

$$= \frac{E_0 e^{i(\alpha z - \omega t)}}{e}$$

$$= \frac{\vec{E}_z}{e}$$

$$= \frac{\vec{E}}{e}$$

$$= e^{-1} E \quad \text{——} \ (10)$$

ভেদন গভীরতা $\delta = \frac{1}{\beta}$ ।

$$\therefore \beta = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}} \left[-1 \pm \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}}\right]^{1/2}$$

$$\delta = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2}{\mu\epsilon}} \left[-1 \pm \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}}\right]^{-1/2}$$

যদি, $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} >> 1$ হয়

$$= \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2}{\mu\epsilon}} \left[-1 \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2}\right]^{-1/2}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\mu\epsilon\omega^2}} \left(-1 \pm \frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^{-1/2}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\mu\epsilon\omega^2}\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^{-1/2}} \qquad 1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2} \approx \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\mu\epsilon\omega^2} \times \frac{\omega\epsilon}{\sigma}}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}}$$

ইহাই স্কিন গভীরতার সমীকরণ।

প্রশ্ন: গ্রুপ বেগ কাকে বলে? গ্রুপ বেগ $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ প্রতিপাদন কর।

→ দুই বা ততোধিক তরঙ্গমালা সমন্বয়ে গঠিত অংশগুলোর সঞ্চারণ বেগই হলো গ্রুপ বেগ।

স্বতন্ত্র তরঙ্গের বেগকে দশা বেগ বলে।

<u>প্রতিপাদন:</u> $v_g = \frac{d\omega}{dk}$

z-অক্ষ বরাবর প্রবাহমান তড়িৎ চুম্বকীয় দুটি তরঙ্গমালা বিবেচনা করা যাক যাদের কম্পাঙ্ক ω_1, ω_2।

$$E_1 = E_0 \cos \omega_1 \left(t - \frac{z}{v_1}\right)$$

$$E_2 = E_0 \cos \omega_2 \left(t - \frac{Z}{V_2}\right)$$

লব্ধি তরঙ্গ $E = E_1 + E_2$

$$= E_0 \cos \omega_1 \left(t - \frac{Z}{V_1}\right) + E_0 \cos \omega_2 \left(t - \frac{Z}{V_2}\right)$$

$$= E_0 \left[\cos \omega_1 \left(t - \frac{Z}{V_1}\right) + \cos \omega_2 \left(t - \frac{Z}{V_2}\right)\right]$$

$$= 2E_0 \cos \left[\frac{\omega_1}{2}\left(t - \frac{Z}{V_1}\right) + \frac{\omega_2}{2}\left(t - \frac{Z}{V_2}\right)\right]$$

$$\times \cos \left[\frac{\omega_1}{2}\left(t - \frac{Z}{V_1}\right) - \frac{\omega_2}{2}\left(t - \frac{Z}{V_2}\right)\right] \quad \text{--- (1)}$$

ধরা যাক $\omega_1 = \omega$, $\omega_2 = \omega + d\omega$,

$\omega_1 - \omega_2 = -d\omega$

$\omega_1 + \omega_2 = 2\omega + d\omega \approx 2\omega$ যেখানে $d\omega << \omega$

অনুরূপভাবে, $\frac{\omega_1}{V_1} + \frac{\omega_2}{V_2} = \frac{2\omega}{V}$ যেখানে $\frac{V_1 + V_2}{2} = V$

$$= 2E_0 \cos \omega \left(t - \frac{Z}{V}\right) \cos \left[-\frac{d\omega}{2} t + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_2}{V_2} - \frac{\omega_1}{V_1}\right) Z\right]$$

$$= 2E_0 \cos \frac{d\omega}{2} \left[t - \frac{d(\omega/V)}{d\omega} Z\right] \cos \omega \left(t - Z/V\right)$$

এখন, $\frac{\omega_2}{v_2} - \frac{\omega_1}{v_1} = d\left(\frac{\omega}{v}\right)$ তখন বিস্তার,

$$2E_0 \cos\frac{d\omega}{2}\left[t - \frac{d(\omega/v)}{d\omega} z\right]$$

$$= 2E_0 \cos\frac{d\omega}{2}\left[t - \frac{z}{v_g}\right]$$

এখানে $v_g = \frac{d\omega}{d(\omega/v)} = \frac{d\omega}{d(kv/v)} = \frac{d\omega}{dk}$

(প্রমাণিত)

☐ তড়িৎ চৌম্বক তরঙ্গের পোলারায়ন ব্যাখ্যা কর এবং (i) সমতলীয় পোলারায়ন (ii) উপবৃত্তাকার পোলারায়ন (iii) বৃত্তাকার পোলারায়ন ব্যাখ্যা কর।"

→ একটি তড়িৎ চৌম্বক তরঙ্গে যার তড়িৎ ভেক্টর তরঙ্গ চলার দিকের সাথে একটি নির্দিষ্ট দিকে অবস্থান করে তাকে তড়িৎ চৌম্বক তরঙ্গের পোলারায়ন বলে।

আমরা Z অক্ষ বরাবর চলমান যে কোনো সমতলীয় সমবর্তিত তড়িৎ চৌম্বক তরঙ্গ বিবেচনা করি। যদি E এর উপাংশদ্বয় x ও y অক্ষ বরাবর E_1 ও E_2 হয় তবে,

$E_1 = E_{10}\, e^{j(kz-\omega t)}$ $\quad$ $E_2 = E_{20}\, e^{j(kz-\omega t)}$

$= \hat{i} E_{10}\, e^{j(kz-\omega t)}$ $\quad$ $= \hat{j} E_{20}\, e^{j(kz-\omega t)}$

$$E(r,t) = (\hat{i} E_{10} + \hat{j} E_{20})\, e^{j(kz-\omega t)}$$

(i) <u>সমতলীয় পোলারায়ন:</u> যদি $E(r,t)$ সমতলীয় সমবর্তিত হয় তবে E_{10} এবং E_{20} একই দশায় থাকে

$$E_0 = \sqrt{(E_{10})^2 + (E_{20})^2}$$

সমাবর্তন ভেক্টর E যেমন i এর সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা হলো,

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{E_{20}}{E_{10}}\right)$$

(ii) <u>বৃত্তাকার পোলারায়ন:</u> যদি E_{10} এবং E_{20} একই বাস্তব মান E_0 থাকে এবং দশা পার্থক্য 90° হয়,

$$\vec{E}(r,t) = E_0(\hat{i} \pm \hat{j})\, e^{j(kz-\omega t)}$$

$$E_x(r,t) = E_0 \cos(kz-\omega t)$$

$$E_y(r,t) = \pm E_0 \sin(kz-\omega t)$$

অতএব, $E_x^2 + E_y^2 = E_0^2$ যা একটি বৃত্তের সমীকরণ।

(iii) **উপবৃত্তাকার সমাবর্তন:** যদি E_{10} এবং E_{20} এর মান সমান না হয় তবে,

$$E_x(r,t) = E_{10}\cos(kz-\omega t)$$

$$E_y(r,t) = E_{20}\sin(kz-\omega t)$$

$$\therefore \frac{E_x^2}{E_{10}^2} + \frac{E_y^2}{E_{20}} = 1$$

যা একটি উপবৃত্তের সমীকরণ। অতএব লব্ধি তরঙ্গটি হবে উপবৃত্তাকার সমবর্তিত।

◻ বিচ্ছুরণ, স্বাভাবিক ও অস্বাভাবিক বিচ্ছুরণের সংজ্ঞা।

→ যখন তড়িৎ চৌম্বক তরঙ্গের কম্পাঙ্কের সাথে কোনো মাধ্যমের প্রতিসরণ সূচক পরিবর্তিত হয় তখন মাধ্যমটিকে বিচ্ছুরণশীল বলা হয়। এই বিচ্ছুরণকে $\left(\frac{dn}{d\omega}\right)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। আবার তরঙ্গদৈর্ঘ্যের বৃদ্ধির সাথে এর প্রতিসরণ সূচক হ্রাস পায় তাকে স্বাভাবিক বিচ্ছুরণ বলা হয়। কখনও কখনও মাধ্যমের মধ্য দিয়ে বিকিরণ প্রবেশের সাথে বিকিরণ শক্তি শোষনের ফলে স্বল্প অংশে (দৈর্ঘ্য) মাত্রায় (দৈর্ঘ্য) বৃদ্ধির সাথে প্রতিসরণ সূচক

বৃদ্ধি পায় তাকে অস্বাভাবিক বিচ্ছুরণ বলে।

প্র আয়তাকার তরঙ্গবাহক এর মধ্যে দিয়ে এবং এর মধ্যে তরঙ্গের সমীকরণের সমাধান কর। অনুদৈর্ঘ্য চৌম্বক ক্ষেত্র, ভেক্টর বিভব, উপাদান ও ক্রান্তি মান বের কর।

→ ম্যাক্সওয়েলের তড়িৎ চৌম্বক তরঙ্গ সমীকরণ লিখতে পারি,

$$\nabla^2 E - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad \text{——} (1)$$

$$\nabla^2 H - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = 0 \quad \text{——} (2)$$

একবর্ণী তড়িৎ চৌম্বকের জন্য,

$$\vec{E}(r,t) = \vec{E}(\vec{r})\, e^{-i\omega t}$$

$$\vec{H}(r,t) = \vec{H}(r)\, e^{-i\omega t}$$

আমরা পাই,

$$\nabla^2 E + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 E = 0 \quad \text{——} (3)$$

$$\nabla^2 E + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 H = 0 \quad \text{——} (4)$$

এখানে আমরা TE অবস্থা বিবেচনা করি যেখানে তরঙ্গটি z অক্ষ বরাবর চলমান অতএব $E_z = 0$ এবং E_x, E_y, H_x, H_y, H_z $e^{i\gamma z}$ এর সমানুপাতিক। তরঙ্গদৈর্ঘ্য $\lambda = \frac{2\pi}{\gamma}$ । z দিকের স্থানীয় পরিবর্তন হবে $e^{i2\pi z/\lambda}$

ম্যাক্সওয়েলের ৩য় সূত্র হতে,

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \nabla \times E(\vec{r}) \cdot e^{-i\omega t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 H)$$

$$\Rightarrow e^{-i\omega t} \cdot \nabla \times E(\vec{r}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} H(\vec{r})\, e^{-i\omega t}$$

$$\Rightarrow e^{-i\omega t} \cdot \nabla \times E(\vec{r}) = \mu_0 i\omega \vec{H}(\vec{r}) \cdot e^{-i\omega t}$$

$$\Rightarrow \nabla \times E(\vec{r}) = i\omega\mu_0 H(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E_x & E_y & 0 \end{vmatrix} = i\omega\mu_0[\hat{i}H_x + \hat{j}H_y + \hat{k}H_z]$$

$$\Rightarrow \hat{i}(0 - \partial/\partial z\, E_y) + \hat{j}\,\partial/\partial z\, E_x + \hat{k}(\partial/\partial x\, E_y - \partial/\partial y\, E_x)$$

$$= i\omega_0\mu_0[\hat{i}H_x + \hat{j}H_y + \hat{k}H_z]$$

অনুরূপভাবে $\hat{i}$ এর সহগ তুলনা করে পাই,

$$-\partial/\partial z\, E_y = i\omega\mu_0 H_x$$

$$\Rightarrow -i\gamma E_y = i\omega\mu_0 H_x$$

$$\Rightarrow E_y = -\frac{\omega\mu_0}{\gamma} H_x$$

$$\Rightarrow E_y = -\frac{\omega\mu_0\lambda}{2\pi} H_x \quad \text{—(5)}$$

এখানে,

$E_y \sim e^{i\gamma z}$

$\therefore \partial/\partial z\, E_y \sim i\gamma E_y$

$\gamma = 2\pi/\lambda$

উপাদানসমূহ হতে $\hat{j}$ এর সহগ পৃথক করে পাই,

$$\partial/\partial z\, E_x = i\omega\mu_0 H_y$$

এখানে,
$E_x \sim e^{i\gamma z}$
$\partial/\partial z\, E_x \sim i\gamma E_x$
$\gamma = 2\pi/\lambda$

$$\Rightarrow i\gamma E_x = i\omega\mu_0 H_y$$

$$\Rightarrow E_x = \frac{\omega\mu_0\lambda}{2\pi} H_y \quad \text{—— (6)}$$

উপাদানসমূহ হতে $\hat{k}$ এর সহগ পৃথক করে,

$$\partial/\partial x\, E_y - \partial/\partial y\, E_x = i\omega\mu_0 H_z \quad \text{—— (7)}$$

ম্যাক্সওয়েলের ৪র্থ সমীকরণ হতে,

$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$$

বায়ুশূন্য মাধ্যমের জন্য $J = 0$, $\vec{D} = \epsilon_0 E$

$$\Rightarrow \nabla \times H(r)\, e^{-i\omega t} = \epsilon_0(-i\omega) E(r)\, e^{-i\omega t}$$

$$\Rightarrow \nabla \times H(r) = -i\omega\epsilon_0 E(r)$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = -i\omega\epsilon_0(\hat{i}E_x + \hat{j}E_y + \hat{k}\cdot 0)$$

$$\Rightarrow \hat{i}\,(\partial/\partial y\, H_z - \partial/\partial z\, H_y) - \hat{j}\,(\partial/\partial x\, H_z - \partial/\partial z\, H_x)$$
$$+ \hat{k}\,(\partial/\partial x\, H_y - \partial/\partial y\, H_x) = -i\omega\epsilon_0(\hat{i}E_x + \hat{j}E_y) \quad \text{—— (8)}$$

অনুরূপভাবে হতে î এর সহগ পৃথক করে,

$$\cancel{\partial/\partial x\, E_y - \partial/\partial y\, E_x = i\omega\mu_0 H_z} \quad \text{—— (9)}$$

$$\partial/\partial y\, H_z - \partial/\partial z\, H_y = -i\omega\epsilon_0 E_x$$

এখানে, $H_y \sim e^{i\gamma z}$

$$\Rightarrow \partial/\partial y\, H_z - i\, 2\pi/\lambda\, H_y = -i\omega\epsilon_0 E_x \quad \text{—— (9)}$$

$\Rightarrow \partial/\partial z\, H_z \sim i\gamma H_y = i\frac{2\pi}{\lambda} H_y$

ĵ এর সহগ পৃথক করে

$$\partial/\partial z\, H_x - \partial/\partial x\, H_z = -i\omega\epsilon_0 E_y$$

$$\Rightarrow i\, 2\pi/\lambda\, H_x - \partial/\partial x\, H_z = -i\omega\epsilon_0 E_y \quad \text{—— (10)}$$

অনুরূপভাবে, $\partial/\partial z\, H_x \sim i\, 2\pi/\lambda\, H_x$

$\hat{k}$ এর সহগ পৃথক করে.

$$\partial/\partial x\, H_y - \partial/\partial y\, H_x = 0 \quad \text{—— (11)}$$

সমীকরণ (5) এর মান (10) এ বসাই

$$\partial/\partial y\, H_z - i\frac{2\pi}{\lambda} H_y = -i\omega\epsilon_0 \frac{\omega\mu_0\lambda}{2\pi} H_y$$

$$\Rightarrow \partial/\partial y\, H_z = \left(\frac{2\pi i}{\lambda} - i\omega\epsilon_0 \frac{\omega\mu_0\lambda}{2\pi}\right) H_y \quad \text{—— (12)}$$

সমীকরণ (4) এর মান (10) এ বসাই,

$$\frac{2\pi i}{\lambda} H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = -i\omega\epsilon_0 \left(-\frac{\omega\mu_0\lambda}{2\pi} H_x\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial H_z}{\partial x} = \left(\frac{2\pi i}{\lambda} - \frac{i\mu_0\epsilon_0\omega^2\lambda}{2\pi}\right) H_x \quad \text{—— (13)}$$

Hz এর মান বের করে (৭) নং কে লিখা যায়

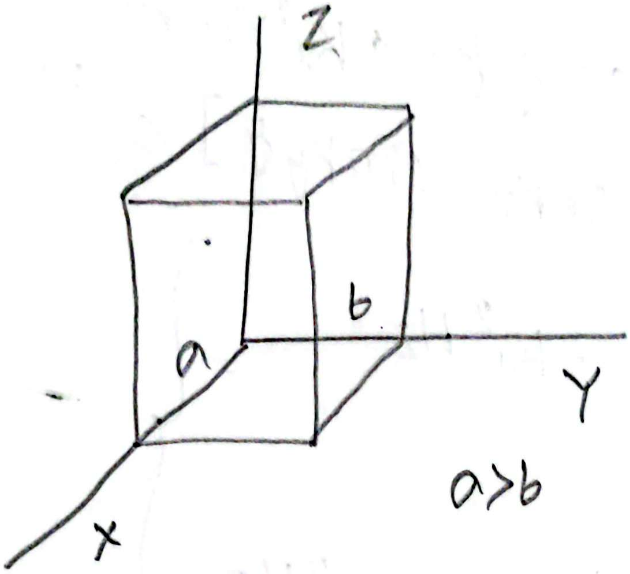
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} H_z + \frac{\partial^2}{\partial y^2} H_z + \frac{\partial^2}{\partial z^2} H_z + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 H_z = 0 \quad \text{—— (৭)}$$

যেহেতু $H_z \sim e^{i\gamma z}$

$$\Rightarrow H_z = e^{i\frac{2\pi z}{\lambda}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial z^2} H_z = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 H_z$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) H_z + \left[\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\right] H_z = 0 \quad \text{—— (১৫)}$$



চিত্র: আয়তাকার wave guide

আয়তাকার তরঙ্গ গাইড চিত্রানুযায়ী বিবেচনা করে এই সমীকরণটি সমাধান করা যায়,

$$H_z(x,y,z) = [A\cos k_x x \cos k_y y + B\cos k_x x \sin k_y y + C\sin k_x x \cos k_y y + D\sin k_x x \sin k_y y] e^{i\frac{2\pi z}{\lambda}} \quad \text{— (16)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial H_z}{\partial x} = [-Ak_x \sin k_x x \cos k_y y - Bk_x \sin k_x x \sin k_y y + Ck_x \cos k_x x \sin k_y y + Dk_x \cos k_x x \sin k_y y] e^{i\frac{2\pi z}{\lambda}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = [-Ak_x^2 \cos k_x x \cos k_y y - Bk_x^2 \cos k_x x \sin k_y y - Ck_x^2 \sin k_x x \cos k_y y - Dk_x^2 \sin k_x x \sin k_y y] e^{i\frac{2\pi z}{\lambda}}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = -k_x^2 H_z \\ &\text{অনুরূপভাবে,} \\ &\frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} = -k_y^2 H_z \end{aligned}\right\} \quad \text{— (17)}$$

(17) এর মান (15) তে বসিয়ে

$$(-k_x^2 H_z - k_y^2 H_z) + \left[\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\right] H_z = 0$$

$$\because H_z \neq 0$$

$$\Rightarrow (k_x^2 + k_y^2) - \left[\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\right] = 0 \quad \text{— (18)}$$

সমীকরণ (17) হতে পাই,

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = \left(\frac{2\pi i}{\lambda} - \frac{i\mu_0\epsilon_0\omega^2\lambda}{2\pi}\right)H_y$$

$$\Rightarrow H_y = \frac{\partial H_z/\partial y}{\left(\frac{2\pi i}{\lambda} - \frac{i\mu_0\epsilon_0\omega^2\lambda}{2\pi}\right)}$$

H_y এর মান (6) এ বসিয়ে,

$$E_x = \frac{\omega\mu_0\lambda}{2\pi}\left\{\frac{\partial H_z/\partial y}{\frac{2\pi i}{\lambda} - \frac{i\mu_0\epsilon_0\omega^2\lambda}{2\pi}}\right\} \qquad (19)$$

∴ কেবলমাত্র $\sin K_y y$ টার্ম থাকলে E_x এর অস্তিত্ব থাকবে।

$$\therefore \sin K_y b = 0$$

$$\Rightarrow K_y b = n\pi \qquad [\because y = b]$$

$$\therefore K_y = \frac{n\pi}{b}$$

(16) সমীকরণের কেবলমাত্র $\cos K_y y$ টার্মটি থাকবে

$$K_x = \frac{m\pi}{a}$$

H_z এর মান,

$$H_z = A\cos K_x x \cos K_y y\, e^{2\pi i z/\lambda}$$

$$= A\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)e^{2\pi i z/\lambda} \quad \text{--- (20)}$$

এখানে, m এবং n এর সম্ভাব্য প্রতিটি মানের জোড়া একটি মোড প্রদান করে যাকে TE বা transverse electric mn-mode বলা হয়।

$\therefore K_x = \frac{m\pi}{a}$, $K_y = \frac{n\pi}{b}$ মান (18) নং বসিয়ে,

$$\left\{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right\} - \left\{\omega^2\mu_0\varepsilon_0 - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\right\} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_0 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = \omega^2\frac{1}{c^2} - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda c/\lambda}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

ইহাই আয়তাকার wave guide এর সমীকরণ।

λ কে λ_g দ্বারা প্রকাশ করা হয়। λ_g = ~~wa~~ guide wavelength।

যখন $\lambda_g \to \infty$ তখন λ_0 কে cut-off wavelength বলে।

∴ $\lambda_g \to \infty$ এর জন্য $\lambda_0 = \lambda_c$ ব্যবহার করে

$$\left(\frac{2\pi}{\infty}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_c}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{4\pi^2}{\lambda_c^2} - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{4}{\lambda_c^2} = \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}$$

$$\Rightarrow \lambda_c^2 = \frac{4}{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$$

$$\therefore \lambda_c = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}$$

এটিই cut-off wave length এর সমীকরণ।

আবার, $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ হলে আমরা পাই,

$$\omega_c = \pi c \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right]$$

দশা বেগ $V_p = \frac{\omega}{K}$

$$K_0 = \frac{\omega}{c}$$

$$\Rightarrow \omega = cK_0$$

$$V_p = \frac{\omega}{K}$$

$$\Rightarrow V_p = \frac{cK_0}{K}$$

$$= \frac{cK_0}{\sqrt{K_0^2 - K'^2}}$$

$$= \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{K'}{K_0}\right)^2}}$$

$$= \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2}} \quad \left[K = \frac{2\pi}{\lambda}\right]$$

গ্রুপবেগ $= \frac{d\omega}{dK}$

$$= \frac{d}{dK}\left[c\,(K^2 - K'^2)^{1/2}\right]$$

$$= \frac{c}{\left[1 - \left(\frac{K'}{K}\right)^2\right]^{1/2}}$$

$$= \frac{c}{\left[1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2\right]^{1/2}}$$

(প্রমাণিত)

প্র] 10cm বিকিরণ এবং 6 cm প্রস্থের একটি আয়তাকার ওয়েভ গাইডের কাট অফ তরঙ্গ কত? গাইডের কাট অফ কম্পাঙ্ক কত?

→ প্রধান মোডের ক্ষেত্রে, $m = 0, n = 1, b = 6\,cm$

আমরা জানি, কাটঅফ তরঙ্গ দৈর্ঘ্য,

$$\lambda_c = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{0}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2}}$$

$$= 12\,cm$$

আমরা জানি,

$$\frac{1}{\lambda_g^2} + \frac{1}{\lambda_c^2} = \frac{1}{\lambda_0^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda_g^2} = \frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda_c^2}$$

$$= \frac{1}{(10)^2} - \frac{1}{(12)^2}$$

$$= 18\,cm$$

৫। একটি ফাঁপা আয়তাকার তরঙ্গ পরিবাহের মাপ হলো $a = 6cm$, $b = 4cm$ ব্যবহৃত সিগন্যালের কম্পাঙ্ক হলো $3GHz$ TE_{10} মোডের জন্য নিম্নের রাশিগুলো গণনা কর।

(a) কাট অফ তরঙ্গদৈর্ঘ্য (b) গাইড তরঙ্গদৈর্ঘ্য (λ_g) (c) দশা ধ্রুবক (K_g) (d) দশা বেগ V_p (e) গ্রুপবেগ (V_g)।

→ আমরা জানি,

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda_g}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

যখন $\lambda_g \to \infty$ তখন $\lambda_0 = \lambda_c$

$$\Rightarrow 0 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_c}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

$$\therefore \lambda_c = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}$$

TE_{10} মোডের জন্য $m = 1$, $n = 0$

এখানে, $a = 6cm$, $b = 4cm$

$$(\lambda_c)_{10} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + 0}}$$

$$= 2 \times a$$

$$= 2 \times 6$$

$$= 12\,cm$$

(b) $\frac{1}{\lambda_0^2} = \frac{1}{\lambda_c^2} + \frac{1}{\lambda_g^2}$

$\lambda_c = 12cm$, $f_0 = 3GHz$
$= 3\times10^9 Hz$

$c = f_0\lambda_0$

$\Rightarrow \lambda_0 = \frac{c}{f_0} = \frac{3\times10^{10}}{3\times10^9}$

~~= 10 cm~~

$= 10cm$

$\therefore \frac{1}{\lambda_g^2} = \frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda_c^2}$

$\Rightarrow \lambda_g = \frac{1}{\sqrt{1/\lambda_0^2 - \frac{1}{\lambda_c^2}}} = 18.2cm$

(c) $K_g = \frac{2\pi}{\lambda_g} = \frac{2\times3.14}{18.2} = 0.345 cm^{-1}$

(d) $v_p = \frac{c}{\left[1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2\right]^{1/2}} = \frac{3\times10^{1}}{0.55}$
$= 5.5\times10^{10} cm/sec$

(e) $v_g = c\left[1-\left(\frac{\lambda_g}{\lambda_c}\right)^2\right]^{1/2}$
$= 1.65\times10^{10} cm/sec$

☐ **TE মোড:** প্রান্তিক শর্তানুসারে যেখানে মান $E_z(a_1, a_2)$ অথবা $H_z(a_1, a_2)$ এর অশূন্য বর্তমান থাকবে বা উভয়ের অশূন্য থাকবে। যখন $H_z(a_1, a_2)$ এর অশূন্য থাকে এবং $E_z(a_1, a_2) = 0$ হয় তখন তরঙ্গকে তির্যক তাড়িত তরঙ্গ বলে। এর প্রান্তিক শর্ত হলো,

$$\frac{\partial}{\partial n} H_z(a_1, a_2) = 0$$

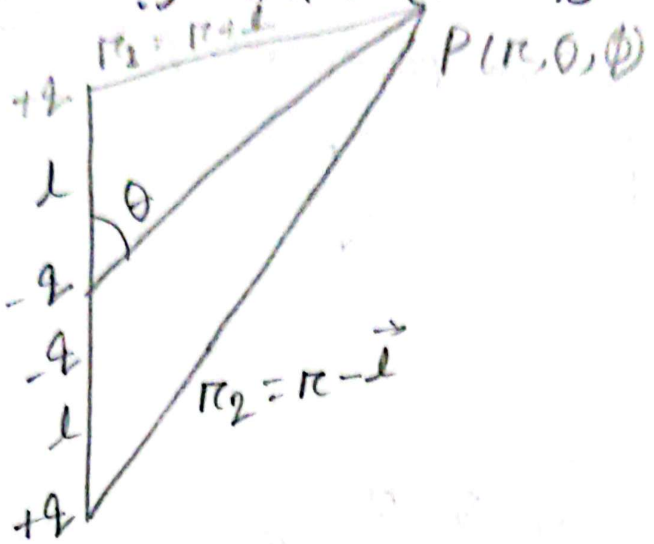
☐ **TM মোড:** এক্ষেত্রে $E_z(a_1, a_2)$ এর অশূন্য থাকবে এবং $H_z(a_1, a_2) = 0$ অর্থাৎ তরঙ্গ সঞ্চালনের দিকে E ভেক্টরের উপাংশ থাকবে কিন্তু চৌম্বক ক্ষেত্রের $\vec{H}$ এর কোনো উপাংশ থাকবে না। এর প্রান্তিক শর্ত,

$$E_z(a_1, a_2) = 0$$

☐ **TEM মোড:** তরঙ্গবাহকের মধ্য দিয়ে তরঙ্গ সঞ্চালনের মোড এবং ধরনের অন্যতম মোডের সৃষ্টি হয় যাতে $E_z(a_1, a_2)$, $H_z(a_1, a_2)$ এর অশূন্য বিলীন হয়। এ মোডকে TEM মোড বলে।

☐ একটি তড়িৎ চতুর্মেরুর জন্য তড়িৎ বিভবের রাশিমালা নির্ণয় কর।

→ সমপরিমানের দুটি ধনাত্মক চার্জ এবং দুটি ঋণাত্মক চার্জ দ্বারা গঠিত তড়িৎ সিস্টেমকে তড়িৎ চতুর্মেরু বলে।



ধনাত্মক চার্জের অবস্থানের সাপেক্ষে কোনো বিন্দু $P(r,\theta,\phi)$ বিবেচনা করা যাক। P বিন্দুর বিভব

$$V(r,\theta,\phi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{r_1} + \frac{q}{r_2} - \frac{2q}{r}\right]$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\left[\frac{r}{r_1} + \frac{r}{r_2} - 2\right] \quad \text{—} (1)$$

$\frac{r}{r_1}$ ও $\frac{r}{r_2}$ কে আলাদাভাবে r, l, θ এর সাপেক্ষে প্রকাশ করা যাবে,

$$r_1 = |\vec{r} + \vec{l}|$$

খ. ভেক্টর বিভব এবং স্কেলার বিভব কি? এর মান লরেঞ্জ গেজ এবং কুলম্ব গেজ প্রয়োগ করে ম্যাক্সওয়েল সমীকরণ বের কর।

+ electromagnetic potensial দুই প্রকার।

① vector Potential $(\vec{A})$

② scalar potensial (ϕ)

আমরা জানি,

$$\nabla \cdot B = 0$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot B = \nabla (\nabla \times A)$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \nabla \times A \quad \text{--- (1)}$$

আবার ম্যাক্সওয়েলের তৃতীয় সমীকরণ হতে

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \nabla \times E = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$$

$$\Rightarrow \nabla \times E = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times A)$$

$$\Rightarrow \nabla \times E = \nabla \times \left(-\frac{\partial A}{\partial t}\right)$$

$$\Rightarrow \nabla \times E + \nabla \times \frac{\partial A}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \nabla \times \left(E + \frac{\partial A}{\partial t}\right) = 0$$

আমরা জানি, $\nabla \times \nabla \phi = 0$

$$\Rightarrow \nabla \times \left(E + \frac{\partial A}{\partial t}\right) + \nabla \times \nabla \phi = 0$$

CamScanner

$$\Rightarrow \nabla \times \left(E + \frac{\partial A}{\partial t}\right) = -\nabla \times \nabla \phi$$

$$\Rightarrow E + \frac{\partial A}{\partial t} = -\nabla \phi \quad \text{--- (2)}$$

(2) নং সমীকরণকে স্কেলার বিভব বলে।

(2) নং হতে, $E = -\nabla \phi - \frac{\partial A}{\partial t}$ — (3) যা কে ভেক্টর বিভব বলা হয়।

আবার, $\nabla \cdot E = \rho/\epsilon_0$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \left(-\nabla \phi - \frac{\partial A}{\partial t}\right) = \rho/\epsilon_0$$

$$\Rightarrow -\nabla^2 \phi - \partial/\partial t\,(\nabla \cdot A) = \rho/\epsilon_0$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \phi + \partial/\partial t\,(\nabla \cdot A) = -\rho/\epsilon_0 \quad \text{--- (4)}$$

আবার,

$$\nabla \times B = \mu_0 J + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \nabla \times (\nabla \times A) = \mu_0 J + \mu_0 \epsilon_0\, \partial/\partial t \left(-\nabla \phi - \frac{\partial A}{\partial t}\right)$$

$$\Rightarrow \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A = \mu_0 J - \mu_0 \epsilon_0 \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} A$$

$$\Rightarrow \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \nabla^2 A\right) + \nabla\left(\nabla \cdot A + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = \mu_0 J$$

$$\Rightarrow \left(\nabla^2 A - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}\right) - \nabla\left(\nabla\cdot A + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = -\mu_0 J \quad \text{—} (৫)$$

আমরা জানি,

লরেঞ্জ শর্ত হলো, $\nabla\cdot A + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$

এই শর্তটি যদি ভেক্টর বিভব ও স্কেলার বিভব দিয়ে যায় তাকে লরেঞ্জ গেজ বলে।

এই শর্তকে (৫) নং এ বসাই,

$$\left(\nabla^2 A - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}\right) - \underbrace{\nabla\left(\nabla\cdot A + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}\right)}_{0} = -\mu_0 J$$

$$\Rightarrow \nabla^2 A - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu_0 J \quad \text{—} (৬)$$

এই সমীকরণকে ভেক্টর বিভব এর জন্য তরঙ্গ সমীকরণ বলে।

আবার,

$$\nabla\cdot A + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \nabla\cdot A = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad \text{—} (৭)$$

(৭) এর মান (৪) এ বসাই,

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t}\left(-\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = -\rho/\epsilon_0$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \phi - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\rho/\epsilon_0$$

ইহাকে স্কেলার বিভবের জন্য তরঙ্গ সমীকরণ বলে।

যদি $\nabla \cdot A = 0$ কে কুলম্ব গেজ বলে। $\nabla \cdot A = 0$ হলে ⑦ নং সমীকরণ zero হবে আর বাকি ⑥ নং হতে,

$$\nabla^2 \phi = -\rho/\epsilon_0 \text{ হবে।}$$

প্রঃ ম্যাক্সওয়েলের পীড়ন টেন্সর ব্যাখ্যা কর।

→ বিজ্ঞানী ম্যাক্সওয়েলের মতে স্থির তড়িৎ ক্ষেত্র হলো পীড়ন স্থানান্তরের মাধ্যম। যেটি মাধ্যম কোনো অঞ্চলে ঐ তড়িৎ ও চৌম্বক ক্ষেত্রের কারণে বল এবং শক্তি প্রবাহ বোঝাতে ব্যবহৃত হয়। যখন তড়িৎ ও চৌম্বক ক্ষেত্র একটি নির্দিষ্ট অঞ্চলে উপস্থিত থাকে তখন ঐ অঞ্চলের চারপাশে চাপ সৃষ্টি হয়।

স্থির তড়িৎ ক্ষেত্র কোনো পৃষ্ঠতল দ্বারা সীমাবদ্ধ একটি আয়তন বিবেচনা করা যাক। যদি ঐ আয়তনে ক্রিয়াশীল বল আয়তন বেষ্টনকারী পৃষ্ঠতল অতিক্রম করে বাইরের দিকে প্রবাহমান হয় তাহলে তদ্রূপ সঞ্চালনশীল বলকে পীড়ন টেন্সর (T) বলে।

একটি পীড়ন টেন্সর T এর PQ তম উপাংশকে T_{PQ} লেখা যায়। ধরি ds পৃষ্ঠতল অতিক্রমকারী প্রবাহমান বল dF এর উপাংশ dF_P এবং

q-তম দিকে পৃষ্ঠতলের উপাংশ ds_q

$$\therefore dF_p = \sum_{q=1}^{3} T_{pq}\, ds_q \quad \text{—— (1)}$$

$$\Rightarrow dF_p = T_{pq}\, ds_q$$

$$\Rightarrow F_p = \int T_{pq}\, ds_q$$ [সমাকলন করে]

$$\Rightarrow F_p = \int T_{pq}\, ds_q + \int F_{vp}\, dV \quad \text{—— (2)}$$ [F_{vp} = আয়তন বলের p তম উপাংশ]

আবার, $\overset{\int T_{pq}\, ds_q}{\cancel{\int F_{vp}\, dV}} = \int \frac{\partial T_{pq}}{\partial x_q}\, dV$

$$\Rightarrow F_{vp}\, dV = \frac{\partial T_{pq}}{\partial x_q}\, dV$$ [$\because \int T_{pq}\, ds_q = \int F_{vp}\, dV$]

$$\Rightarrow F_{vp} = \frac{\partial T_{pq}}{dx_q} \quad \text{—— (3)}$$

স্থিরবিদ্যুতিক বল থাকলে,

$$F_v = \rho E$$

$$\Rightarrow F_v = (\nabla \cdot D) E$$ [$\because \nabla \cdot D = \rho$]

$$\Rightarrow F_{vp} = (\nabla \cdot \varepsilon_0 E_q) E_p$$ [$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_q}$]

$$\Rightarrow F_{vp} = \varepsilon_0 E_p \left(\frac{\partial E_q}{\partial x_q} \right)$$

$$\Rightarrow F_{vp} = \varepsilon_0 \left[E_p \frac{\partial E_q}{\partial x_q} \right] \quad \text{--- (4)}$$

$$\Rightarrow F_{vp} = \varepsilon_0 \left[\frac{\partial}{\partial x_q} (E_p E_q) \right]$$

$$\Rightarrow F_{vp} = \varepsilon_0 \left[E_p \frac{\partial}{\partial x_2} E_q + E_q \frac{\partial}{\partial x_q} E_p \right]$$

$$\Rightarrow F_{vp} = \varepsilon_0 \left[\frac{\partial}{\partial x_q} (E_p E_q) - E_q \frac{\partial}{\partial x_q} E_p \right] \quad \text{--- (5)}$$

এখানে,

$$\frac{\partial}{\partial x_q} E_p E_q = E_p \frac{\partial}{\partial x_q} E_q + E_q \frac{\partial}{\partial x_q} E_p$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_q} (E_p \cdot E_q) = 2 E_q \frac{\partial}{\partial x_q} E_p \quad [\because p = q]$$

$$\Rightarrow E_q \frac{\partial}{\partial x_q} E_p = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_q} (E_p E_q)$$

$$\Rightarrow E_q \frac{\partial}{\partial x_q} E_p = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_q} (\delta_{pq} E \cdot E)$$

$$\Rightarrow E_q \frac{\partial}{\partial x_q} E_p = \frac{\partial}{\partial x_q} \left(\frac{1}{2} \delta_{pq} E^2 \right)$$

এখানে,
$\delta_{pq} = 1$
$\delta_{pq} = 0$
$p = q$ হলে,
$E_p = E_q = E$

(5) হতে পাই,

$$F_{vp} = \varepsilon_0 \left[\frac{\partial}{\partial x_q} (E_p E_q) - \frac{\partial}{\partial x_q} \left(\frac{1}{2} \delta_{pq} E^2 \right) \right]$$

$$= \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial x_q} \left[(E_p E_q) - \left(\frac{1}{2} \delta_{pq} E^2 \right) \right] \quad \text{--- (6)}$$

③ নং ও মান বসিয়ে,

$$\frac{\partial}{\partial x_q} T_{pq} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial x_q}\left[E_p E_q - \frac{1}{2}\delta_{pq} E^2\right]$$

$$\Rightarrow T_{pq} = \varepsilon_0 \left(E_p E_q - \frac{1}{2}\delta_{pq} E^2\right) \longrightarrow (7)$$

একে ম্যাক্সওয়েলের পীড়ন টেনসর বলা হয়।

আবার, $T = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} 1/2(E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) & E_x E_y & E_x E_z \\ E_x E_y & 1/2(E_y^2 - E_z^2 - E_x^2) & E_y E_z \\ E_x E_z & E_y E_z & 1/2(E_z^2 - E_x^2 - E_y^2) \end{bmatrix}$

এখানে, $\delta_{pq} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$T = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} 1/2\, E^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2(-E^2) & 0 \\ 0 & 0 & 1/2(-E^2) \end{bmatrix}$$

$$= \varepsilon_0/2 \begin{bmatrix} E^2 & 0 & 0 \\ 0 & -E^2 & 0 \\ 0 & 0 & -E^2 \end{bmatrix}$$

$$|T_{pq} - \delta_{pq}\lambda| = 0$$

$$\therefore \lambda_1 = \varepsilon_0/2\, E^2$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = -\varepsilon_0/2\, E^2$$