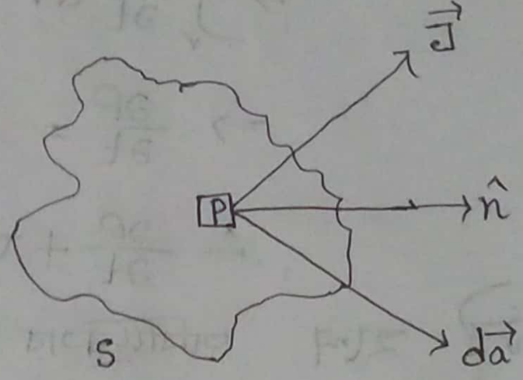
Electrodynamics → 305

Parvez

Chapter-1

প্র-1ঃ অবিচ্ছিন্নতার সমীকরণ নির্ণয় কর?

সমাধান



ধরা যাক কোন পরিবাহকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল S। এর মধ্য দিয়ে i মাত্রার তড়িৎ প্রবাহিত হচ্ছে। কোন ক্ষেত্র উপাদান $d\vec{a}$ এর মধ্য দিয়ে কোন বিন্দু P বিবেচনা করা যাক যার প্রবাহ ঘনত্ব $\vec{J}$ তাহলে S ক্ষেত্র হতে নির্গত মোট প্রবাহমাত্রা হবে,

$$i = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{a} \quad \text{—— (i)}$$

এখানে S ক্ষেত্রটি বদ্ধ অথবা উন্মুক্ত হতে পারে।

ধরা যাক কোন পরিবাহকের মধ্য দিয়ে তড়িৎ প্রবাহিত হচ্ছে। S ক্ষেত্র কর্তৃক V আয়তনের চার্জ ঘনত্ব ρ, তাহলে পরিবাহকের একক আয়তনে প্রবাহ বৃদ্ধির পরিমান $\frac{d\rho}{dt}$।

∴ সম্পূর্ণ V আয়তনে প্রবাহমাত্রার মোট বৃদ্ধি $\int_V \frac{d\rho}{dt} dv$ —— (ii)

(i) নং অনুসারে কোন আবদ্ধ পৃষ্ঠতল S অতিক্রমকারী প্রবাহমাত্রা হলোঃ

$$\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{a}\text{ ।}$$

সিস্টেমের মোট চার্জ সংরক্ষিত থাকে বলে আমরা লিখতে পারি,

$$\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t} dv + \oint_S \vec{J}\cdot d\vec{a} = 0 \quad \text{—— (iii)}$$

গসের ডাইভারজেন্স উপপাদ্য প্রয়োগ করে ক্ষেত্র সমাকলনকে আয়তন

সমাকলনে রূপান্তরিত করে পাই,

$$\int_v \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \oint_v \vec{\nabla}\cdot\vec{J}\, dv = 0$$

$$\Rightarrow \int_v \frac{\partial \rho}{\partial t} dv = -\int_v \nabla\cdot\vec{J} dv$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla\cdot\vec{J}$$

$$\therefore \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{J} = 0 \text{ --- (iv)}$$

এইটিই হলো অবিচ্ছিন্নতার সমীকরণ। যা কোনো পরিবাহকের মধ্যে দিয়ে চার্জ প্রবাহের অসংরক্ষনশীলতা ব্যাখ্যা করে। অর্থাৎ,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \text{ অথবা } \nabla\cdot\vec{J} = 0$$

Note: ম্যাক্সওয়েলের চারটি সমীকরন:

(i) $\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ [Gauss law of Electrodynamics]

(ii) $\nabla\cdot\vec{B} = 0$ [Gauss law of magnatostastic]

(iii) $\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

(iv) $\nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

সরন প্রবাহ $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E}$

চৌম্বক আবেশ $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$

Qn-2: ম্যাক্সওয়েলের সমীকরনের সাহায্যে অবিচ্ছিন্নতার সমীকরন প্রতিপাদন কর?

সমাধান

আমরা জানি, অবিচ্ছিন্নতার সমীকরন হলো:-

$$\nabla\cdot\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

যেখানে, $\vec{J}$ = প্রবাহ ঘনত্ব

ρ = চার্জ ঘনত্ব

CS CamScanner

প্রমান:- ম্যাক্সওয়েলের চতুর্থ সমীকরণ থেকে পাই,

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \quad \text{——— (i)}$$

এখানে, $\vec{H}$ = চৌম্বক ক্ষেত্রের মান।

$\vec{J}$ = প্রবাহ ঘনত্ব।

$\vec{D}$ = তড়িৎ সরণ ভেক্টর।

(i) নং সমীকরণে ডাইভারজেন্স তত্ত্ব প্রয়োগ করে পাই,

$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{H}) = \nabla\cdot\left(\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)$$

$$\Rightarrow 0 = \nabla\cdot\vec{J} + \nabla\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow 0 = \nabla\cdot\vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec{D}) \quad \text{——— (ii)}$$

ম্যাক্সওয়েলের প্রথম সমীকরণ হতে,

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \nabla\cdot\varepsilon_0\vec{E} = \rho$$

$$\Rightarrow \nabla\cdot\vec{D} = \rho \quad \text{——— (3)}$$

(iii) নং এর মান (ii) নং এ বসাই,

$$\nabla\cdot\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

ইহাই হলো অবিচ্ছিন্নতার সমীকরণ।

প্রশ্ন-৪: ম্যাক্সওয়েলের তড়িৎ চুম্বকীয় ব্যবকলন সমীকরণ সমূহ লিখ এবং সমীকরণ গুলোর ব্যবকলিত রূপ বের কর?

সমাধান

ম্যাক্সওয়েলের ক্ষেত্র সমীকরণ চারটির ব্যবকলনীয় রূপ হলো:-

CamScanner

(i) $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$

(ii) $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

(iii) $\nabla \times E = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

(iv) $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

এখানে,
$\vec{D}$ = তড়িৎ সরণ ভেক্টর
$\vec{B}$ = চৌম্বক ক্ষেত্র
$\vec{E}$ = তড়িৎক্ষেত্র
$\vec{H}$ = চৌম্বক ক্ষেত্র প্রবল্য
ρ = চার্জ ঘনত্ব

(i) $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ প্রতিপাদন: গসের তত্ত্বানুসারে তড়িৎ ক্ষেত্রের কোন বদ্ধ তলের উপর তড়িৎ প্রাবল্য $\vec{E}$ এর অভিলম্ব উপাংশের তল সমাকলন $\oint \vec{E} \cdot ds$ ঐ পৃষ্ঠ কর্তৃক আবদ্ধ মোট চার্জের $\frac{1}{\varepsilon_0}$ গুণের সমান। তাহলে তড়িৎ ফ্লাক্স,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\rho = \frac{q}{v}$$
$$\Rightarrow \rho = \frac{q}{\int_v dv}$$
$$\Rightarrow q = \rho \int_v dv$$

বা, $$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_v \rho\, dv$$

$$\Rightarrow \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_v \frac{\rho}{\varepsilon_0} dv \quad \text{(i)}$$

গস ডাইভারজেন্স তত্ত্ব হতে,

$$\oint_s \vec{E} \cdot ds = \int_v \nabla \cdot \vec{E}\, dv \quad \text{(ii)}$$

(i) ও (ii) নং সমীকরন তুলনা করে পাই,

$$\int_v \nabla \cdot \vec{E}\, dv = \int_v \frac{\rho}{\varepsilon_0} dv$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \varepsilon_0 \vec{E} = \rho \qquad [\because (D = \varepsilon_0 \vec{E})]$$

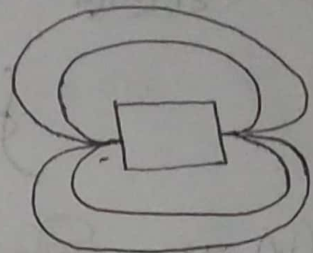
$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

এটিই ম্যাক্সওয়েলের প্রথম সমীকরনের ব্যবকলনী রূপ।

CamScanner

(ii) $\nabla\cdot\vec{B}=0$ প্রতিপাদনঃ আমরা জানি, কোন আবদ্ধ পৃষ্ঠতলে প্রবেশকারী চৌম্বক ক্ষেত্ররেখা ঐ পৃষ্ঠ ত্যাগকারী ক্ষেত্ররেখার সংখ্যার সমান। কাজেই কোন আবদ্ধ পৃষ্ঠতলে অতিক্রমকারী চৌম্বক ফ্লাক্স সর্বদাই শূন্য। অর্থাৎ,

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = 0 \quad \text{——— (i)}$$



তল সমাকলনকে আয়তন সমাকলনে রূপান্তর করে পাই,

$$\int_V \nabla\cdot\vec{B}\, dV = 0$$

নির্বাচিত আয়তন অনির্ধারিত কাজেই,

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0$$

এটিই ম্যাক্সওয়েলের দ্বিতীয় সমীকরণের ব্যবকলনী রূপ।

(ii) $\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ প্রতিপাদনঃ ফ্যারাডের সূত্রানুসারে, কোন আবদ্ধ লুপে আবিষ্ট e.m.f

$$e = -\frac{\partial\phi_B}{\partial t}$$

$$= -\oint \frac{\partial B}{\partial t}\cdot d\vec{s}$$

কারন S পৃষ্ঠতলে চৌম্বক ফ্লাক্স

$$\phi_B = \oint \vec{B}\cdot d\vec{s}$$

$$\therefore e = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\oint \vec{B}\cdot d\vec{s}\right] \quad \text{——— (i)}$$

একক চার্জকে সম্পূর্ণ বর্তনী ঘুরিয়ে আনতে ক্রিয়াশীল কাজই হলো ঐ e.m.f e। সুতরাং,

$$e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \text{ ——— (ii)}$$

(i) ও (ii) নং সমীকরণ হতে,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}\right] \text{ ——— (iii)}$$

স্টোকের তত্ত্বানুসারে পথ সমাকলনকে তল সমাকলনে রূপান্তর করে পাই,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_s (\nabla \times \vec{E})\, d\vec{s} \text{ ——— (iv)}$$

(ii) ও (iv) নং সমীকরণ তুলনা করে পাই,

$$e = \oint_s (\nabla \times \vec{E})\, d\vec{s} \text{ ——— (v)}$$

(i) ও (v) নং সমীকরণ তুলনা করে পাই,

$$\oint_s (\nabla \times \vec{E})\, d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}\right]$$

$$\Rightarrow (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ ——— (vi)}$$

এটিই ম্যাক্সওয়েলের তৃতীয় ক্ষেত্র সমীকরণের ব্যবকলনী রূপ।

(iv) $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ এর প্রতিপাদন :- [qn :- Same হবে, ম্যাক্সওয়েল কিভাবে অ্যাম্পিয়ারের সূত্রের অতিক্ত রূপ পরিবর্ধন করেন ?]

অ্যাম্পিয়ারের সূত্রানুসারে পাই,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \text{ ——— (i)}$$

আবার, $\vec{B} = \vec{H} \mu_0$

(i) নং সমীকরণে $\vec{B}$ এর মান বসাই,

$$\oint \vec{H}\mu_0 \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$\Rightarrow \mu_0 \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$\Rightarrow \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \quad \text{--- (ii)}$$

আবার, $\oint_s \vec{J} \cdot d\vec{s} = I \quad \text{--- (iii)}$

(ii) ও (iii) নং সমীকরণ হতে,

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_s \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad \text{--- (iv)}$$

(iv) নং সমীকরণে স্টোকসের তত্ত্বানুসারে পথ সমাকলনকে তল সমাকলনে রূপান্তর করে পাই,

$$\oint_s \text{curl}\, \vec{H} \cdot d\vec{s} = \oint_s \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

$$\Rightarrow \text{curl}\, \vec{H} = \vec{J} \quad \text{--- (v)}$$

অবিচ্ছিন্নতার সমীকরণ হতে, আমরা জানি,

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \text{--- (vi)}$$

(v) নং সমীকরণে ডাইভারজেন্স প্রয়োগ করে পাই,

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot \vec{J}$$

$$\Rightarrow 0 = \nabla \cdot \vec{J}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{--- (vii)}$$

(v) নং সমীকরণ স্থিতি অবস্থার শর্ত নির্দেশ করে। যখন চার্জ ঘনত্ব সময়ের সাথে অপরিবর্তিত থাকে। কাজেই সময় নির্ভর ক্ষেত্রের জন্য

(v) নং সমীকরণকে পরিমার্জিত করার প্রয়োজন।
বিজ্ঞানী ম্যাক্সওয়েল মোট প্রবাহঘনত্বকে অসম্পূর্ণ মনে করেন এবং প্রবাহ ঘনত্ব $\vec{J}$ এর সাথে $\vec{J}'$ রাশি যুক্ত করেন। তাহলে (v) নং সমীকরণ হবে,

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \vec{J}' \quad \text{——— (viii)}$$

(viii) নং সমীকরণের ডাইভারজেন্স নিয়ে পাই,

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot (\vec{J} + \vec{J}')$$

$$\Rightarrow 0 = \nabla \cdot \vec{J} + \nabla \cdot \vec{J}'$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{J}' = -\nabla \cdot \vec{J}$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{J}' = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \text{——— (ix)}$$

গাউসের সূত্র হতে, $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow \rho = \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}$$

$$\Rightarrow \rho = \nabla \cdot (\varepsilon_0 \vec{E}) \quad \text{——— (x)}$$

(ix) নং সমীকরণে ρ এর মান বসাই,

$$\nabla \cdot \vec{J}' = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot (\varepsilon_0 \vec{E})$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{J}' = \nabla \left[\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \vec{E})\right]$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{J}' = \nabla \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\therefore \vec{J}' = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{——— (xi)}$$

$\vec{J}'$ এর মান (viii) নং এ বসাই,

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

এটিই অ্যাম্পিয়ারের সূত্রের পরিমার্জিত রূপ এবং ম্যাক্সওয়েলের চতুর্থ ক্ষেত্র সমীকরণের ব্যবকলিত রূপ।

প্রশ্ন-৫: ম্যাক্সওয়েলের ক্ষেত্র সমীকরণ চারটির ভৌত তাৎপর্য লিখ?

সমাধান

(i) $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ এর ভৌত তাৎপর্য:

এখানে, $\vec{D}$ = তড়িৎ সরণ ভেক্টর।

ρ = মুক্ত চার্জ ঘনত্ব।

এই সূত্রটি স্থির তড়িৎক্ষেত্রে গাউসের সূত্রের ফল। সুতরাং তড়িৎ সরণ $\vec{D}$ ধনাত্মক চার্জ হতে বের হয়ে ঋণাত্মক চার্জে মিলিত হয়।

(ii) $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ এর ভৌত তাৎপর্য:

এখানে,

B = চৌম্বক আবেশ

এই সূত্রটি স্থির তড়িৎক্ষেত্র গাউসের সূত্রের ফল। কোন আবদ্ধ পৃষ্ঠতলে প্রবেশকারি চৌম্বক ক্ষেত্ররেখা উক্ত পৃষ্ঠ ত্যাগকারী ক্ষেত্ররেখার সংখ্যার সমান। কাজেই কোন আবদ্ধ পৃষ্ঠতলে অতিক্রমকারী চৌম্বক ফ্লাক্স ~~[illegible]~~ সর্বদায় শূন্য।

(iii) $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ এর ভৌত তাৎপর্য:

এখানে,

$\vec{E}$ = তড়িৎ ক্ষেত্র

$\vec{B}$ = চৌম্বক ক্ষেত্র

এটি ফ্যারাডে ও লেঞ্জের তড়িৎ চুম্বকীয় আবেশ সূত্রের সমন্বিত রূপ। সুতরাং চৌম্বক ক্ষেত্রের পরিবর্তন করে তড়িৎক্ষেত্রের সৃষ্টি করা সম্ভব।

(iv) $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ এর ভৌত তাৎপর্য:

এখানে, $\vec{H}$ = চৌম্বক ক্ষেত্র প্রাবল্য।

$\vec{D}$ = তড়িৎ সরন ভেক্টর।

$\vec{J}$ = তড়িৎ প্রবাহ ঘনত্ব।

এই সমীকরণটি অ্যাম্পিয়ার এর সূত্রের পরিমার্জিত রূপ যা বিজ্ঞানি ম্যাক্সওয়েল কর্তৃক পরিমার্জিত। সাধারণ তড়িৎ প্রবাহ ঘনত্ব $\vec{J}$ তড়িৎ সরন $(\vec{D})$ পরিবর্তন দ্বারা তড়িৎ পরিবাহকের ক্ষেত্রে প্রথম রাশিটি $(\vec{J})$ এবং শূন্য মাধ্যমে দ্বিতীয় রাশিটি চৌম্বক ক্ষেত্র তৈরির জন্য দায়ী।

Qn-5: ম্যাক্সওয়েলের ক্ষেত্র সমীকরণগুলোর সমাকলিত রূপ বের কর এবং ভৌত তাৎপর্য লিখ?

সমাধান

ম্যাক্সওয়েলের ক্ষেত্র সমীকরণগুলোর সমাকলিত রূপ হতে এদের ভৌতিক তাৎপর্য উপলব্ধি করা যায়।

প্রথম সমীকরণ: আমরা জানি,

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

সমীকরণটিকে যেকোন আয়তন V এর উপর সমাকলন করে পাই,

$$\int_V \nabla \cdot \vec{D}\, dv = \int_V \rho\, dv$$

গসের তত্ত্ব প্রয়োগ করে পাই,

$$\int_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = \int_V \rho\, dv$$

$$\Rightarrow \int_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = q$$

Note,

$$\rho = \frac{q}{V}$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{q}{\int_V dv}$$

$$\therefore q = \int_V \rho\, dv$$

এটিই ম্যাক্সওয়েলের প্রথম সমীকরণের সমাকলিত রূপ।

ভৌত তাৎপর্য: যেকোনো পৃষ্ঠতল কর্তৃক সীমিত আয়তনের মোট তড়িৎ সরণ ঐ আয়তনের নিট চার্জের সমান।

২য় সমীকরণ: আমরা জানি,

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0$$

যেকোন আয়তন V এর উপর সমাকলন করে পাই,

$$\int_V \nabla\cdot\vec{B}\, dv = 0$$

গসের তত্ত্বানুসারে পাই,

$$\int_S \vec{B}\cdot d\vec{s} = 0$$

এটিই ম্যাক্সওয়েলের ২য় সমীকরণের সমাকলিত রূপ।

ভৌত তাৎপর্য: কোন আবদ্ধ পৃষ্ঠতল হতে বহির্গামী মোট চৌম্বক ফ্লাক্স শূন্য।

৩য় সমীকরণ: আমরা জানি,

$$\nabla\times E = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

কোন পৃষ্ঠতল S এর উপর সমীকরণটি সমাকলন করে পাই,

$$\int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{s} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{s}$$

স্টোকসের সূত্র প্রয়োগ করে বামপাশের তল সমাকলনকে পথ সমাকলনে রূপান্তর করে পাই,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

এটিই ম্যাক্সওয়েলের ৩য় সূত্র সমীকরণের সমাকলিত রূপ।

ভৌত তাৎপর্য:- কোন সংবৃত্ত পথের মোট তড়িচ্চালক বল ঐ পথ কর্তৃক আবদ্ধ পৃষ্ঠতল অতিক্রমকারী চৌম্বক ফ্লাক্সের সময় সাপেক্ষে ব্যবকলনের সমান।

চতুর্থ সমীকরণ : আমরা জানি,

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

কোন পৃষ্ঠতল S এর উপর সমীকরণটি সমাকলন করে পাই,

$$\int_S (\nabla \times \vec{H}) d\vec{s} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) d\vec{s}$$

স্টোকসের সূত্র প্রয়োগ করে বামপাশের তলসমাকলনকে পথ সমাকলনে রূপান্তর করে পাই,

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \cdot d\vec{s}$$

এটিই ম্যাক্সওয়েলের চতুর্থ সমীকরণের সমাকলিত রূপ।

তাৎপর্য: কোন সংবৃত্ত পথের মোট তড়িচ্চালক বল ঐ পথ কর্তৃক সীমিত পৃষ্ঠতল অতিক্রমকারী পরিবহন প্রবাহ ও তড়িৎ সরণের সময় সাপেক্ষে ব্যবকলনের সমষ্টির সমান।

প্রশ্ন-6:- দুইটি মাধ্যমের অন্তঃতলে $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}$ ও $\vec{H}$ এর জন্য সীমান্ত শর্ত বের কর?

সমাধান

১. $\vec{B}$ এর জন্য সীমান্ত শর্ত: আমরা জানি, চুম্বকের জন্য গাউসের সূত্রের ব্যবকলন রূপ হলো:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

এবার একটি বদ্ধতল S দ্বারা আবদ্ধ আয়তন এর উপর সমাকলন করে পাই,

$$\int \vec{\nabla}\cdot\vec{B}\, dv = 0$$

বামপাশে ডাইভারজেন্স তত্ত্ব প্রয়োগ করে পাই,

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = 0$$

অর্থাৎ, $$\oint_c \vec{B}\cdot\hat{n}\, ds = 0 \quad \text{———— (i)}$$

এখানে, $\hat{n}$ হলো ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র তলীয় উপাদান ds এর উপর বহির্মুখী লম্ব।

এখন দুইটি মাধ্যমে 1 এবং 2 অন্তঃতলে পিলবক্স আকৃতির একটি বেলনাকৃতির তল চিত্রানুযায়ী বিবেচনা করি। পিলবক্স তলটি দুটি প্রান্ত তল S_1 ও S_2 এবং দুটি বেলনাকৃতি বদ্ধতল S_1' ও S_2' এর সমন্বয়ে গঠিত।

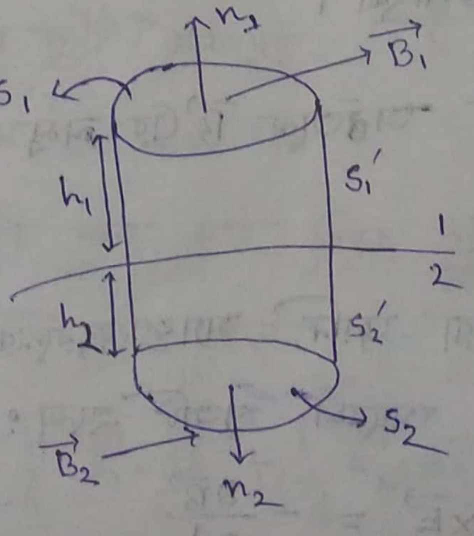


Fig: দুইটি মাধ্যমের অন্তঃতল পিল-বক্স আকৃতির তল।

সমীকরণ ① কে এই পিল-বক্স আকৃতির তলে প্রয়োগ করে পাই,

$$\int_{S_1} \vec{B_1}\cdot\vec{n_1}\, ds + \int_{S_2} \vec{B_2}\cdot\vec{n_2}\, ds + \int_{S_1'} \vec{B_1}\cdot\hat{n}_1\, ds + \int_{S_2'} \vec{B_2}\cdot\hat{n}_2\, ds = 0$$

যদি চৌম্বক আবেশ ক্ষেত্র $\vec{B}$ এর সর্বক্ষেত্র নির্দিষ্ট মান থাকে এবং পিলবক্সটিকে সংকুচিত করে দুইটি মাধ্যমের অর্থাৎ S_1 ও S_2 দুটি মাধ্যমের সীমানায় প্রলম্বিত হওয়ার ফলে $h_1 \to 0$ এবং $h_2 \to 0$ এর জন্য $S_1' = 0$ ও $S_2' = 0$ এর জন্য আমরা পাই,

$$\int_{S_1} \vec{B_1}\cdot\hat{n}_1\, ds + \int_{S_2} \vec{B_2}\cdot\vec{n_2}\, ds = 0$$

এখানে, $S_1 = S_2 = A$ বিবেচনা করে পাই,

$$(\vec{B_1}\cdot\hat{n}_1 + \hat{B_2}\cdot\hat{n}_2)A = 0$$

বা, যেহেতু $A \neq 0$

$$\vec{B_1}\cdot\hat{n}_1 + \vec{B_2}\cdot\vec{n_2} = 0$$

বা, $B_{1n} - B_{2n} = 0$

বা, $B_{1n} = B_{2n}$

এখানে, B_{1n} হলো মাধ্যম 1-এর $\vec{B}$ এর লম্ব উপাংশ এবং B_{2n} হলো মাধ্যম 2-এর $\vec{B}$ এর লম্ব উপাংশ।

অর্থাৎ দুইটি মাধ্যম 1 ও 2 এর অন্তঃতলে $\vec{B}$ এর লম্ব উপাংশ B_{1n} ও B_{2n} হলো সমান।

2. $\vec{E}$ এর সীমান্ত শর্তঃ- আমরা জানি, ম্যাক্সওয়েলের ফ্যারাডের তড়িৎ-চৌম্বক আবেশ সূত্রটি হলো:-

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

CamScanner

এবার উভয় দিকে একটি বদ্ধ রেখা দ্বারা আবদ্ধ তলের উপর সমাকলন করে পাই,

$$\int_S \vec{\nabla}\times\vec{E}\cdot\hat{n}\, ds = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot\hat{n}\, ds$$

বা, $$\int_S \vec{\nabla}\times\vec{E}\cdot d\vec{s} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot\hat{n}\, ds$$

বামপাশে স্টোকসের সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$$\oint_C \vec{E}\cdot dl = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot\hat{n}\, ds \qquad \text{——— (i)}$$

এবার আমরা দুইটি মাধ্যমের (1 ও 2) অন্তঃতলে একটি আয়তাকার লুপ নিম্নের চিত্রানুযায়ী বিবেচনা করি। এবার সমীকরণ (i) এর বামপক্ষটি আয়তাকার লুপে প্রয়োগ করে পাই,

$$\int_a^b \vec{E_1}\cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{E_1}\cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{E_2}\cdot d\vec{l} +$$

$$\int_d^e \vec{E_2}\cdot d\vec{l} + \int_e^f \vec{E_2}\cdot d\vec{l} + \int_f^a \vec{E_1}\cdot d\vec{l} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot\hat{n}\, ds$$

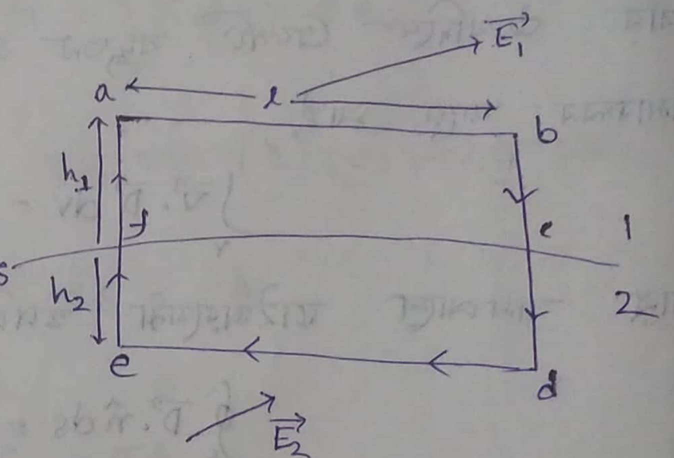


Fig: দুটি মাধ্যমের অন্তঃতলে আয়তাকার লুপ।

যদি আয়তাকার লুপটিকে সংকুচিত করে $h_1 \to 0$ এবং $h_2 \to 0$ এর জন্য দুইটি মাধ্যমের ~~অসী~~ সীমানায় ২য়, ৩য়, ৫ম এবং ৬ষ্ঠ তার চারটির জন্য ইন্টিগ্রালগুলো শূন্য হবে এবং $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ এর মান সর্বত্র নির্দিষ্ট হওয়ার জন্য ডানপক্ষটি শূন্য হবে।

অতএব আমরা পাই, $$\int_a^b \vec{E_1}\cdot d\vec{l} + \int_d^e \vec{E_2}\cdot d\vec{l} = 0$$

বা, $E_{1t} \cdot l - E_{2t} \cdot l = 0$

যেহেতু $l \neq 0$ সেহেতু $E_{1t} - E_{2t} = 0$

অর্থাৎ, $E_{1t} = E_{2t}$

এখানে, E_{1t} ও E_{2t} হলো যথাক্রমে মাধ্যম 1-এ $\vec{E}$ এর স্পর্শক উপাংশ ও মাধ্যম 2-এ $\vec{E}$ এর স্পর্শক ও $\vec{E}$ এর সমতল উপাংশ। অতএব দুইটি মাধ্যমের অন্তঃতলে $\vec{E}$ এর স্পর্শক সমান।

3. $\vec{D}$ এর জন্য সীমান্ত শর্ত:- ম্যাক্সওয়েলের সূত্র থেকে আমরা জানি, স্থির তড়িতের জন্য গাউসের সূত্রটি হলো:-

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

এবার উভয়দিকে একটি বদ্ধতল S দ্বারা আবদ্ধ আয়তন V এর উপর সমাকলন করে পাই,

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{D} \, dv = \int_V \rho \, dv$$

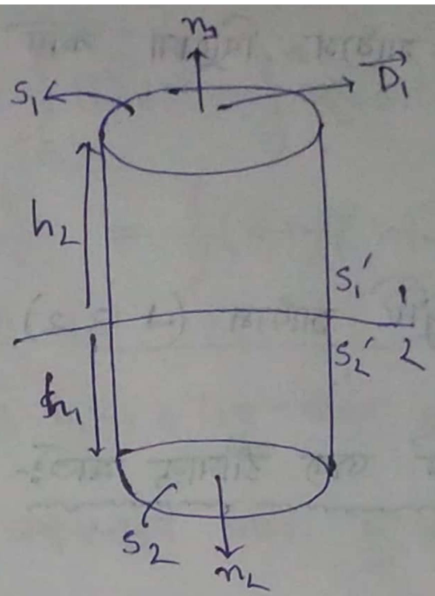
এবার বামপাশে ডাইভারজেন্স উপপাদ্যটি প্রয়োগ করে পাই,

$$\oint_S \vec{D} \cdot \hat{n} \, ds = \int_V \rho \, dv \quad \text{——— (i)}$$

এখানে, $\hat{n}$ হলো ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র তলীয় উপাদান ds এর উপর বহির্মুখী লম্ব একক ভেক্টর।

এবার দুটি মাধ্যম 1 এবং 2 এর অন্তঃতলে একটি পিলবক্স আকৃতির বেলনাকৃতির বল বিবেচনা করি। এই পিল বক্সটির দুটি প্রান্ত তল S_1 ও S_2 এবং দুটি বেলনাকৃতির তল S_1' ও S_2'।

এবার সমীকরণ ① এর বামপক্ষটিকে চিত্রের পিল বক্সের উপর প্রয়োগ করে পাই,



$$\int_{S_1} \vec{D_1}\cdot\hat{n}_1\,ds + \int_{S_2}\vec{D_2}\cdot\hat{n}_2\,ds + \int_{S_1'}\vec{D_1}\cdot\hat{n}_1\,ds$$

$$+\int_{S_2'}\vec{D_2}\cdot\hat{n}_2\,ds = \int \rho\,dv \qquad (2)$$

ধরি, পিল-বক্সটি সংকুচিত করে $h_1 \to 0$ ও $h_2 \to 0$ এর জন্য অন্তঃতলে $S_1 = S_2 = A$ বিবেচনা করি। অতএব, এক্ষেত্রে আয়তনীয় চার্জ ঘনত্ব ρ এর পরিবর্তে তলীয় চার্জ ঘনত্ব ব্যবহার করে পাই,

$$\lim_{h_1\to 0,\ h_2\to 0} \int_v \rho\,dv = \int_A \sigma\,dA = \sigma A$$

ইহাকে ব্যবহার করে দুইটি মাধ্যমের অন্তঃতল (2) কে লিখতে পারি,

$$\int_{S_1}\vec{D_1}\cdot\hat{n}_1\,ds + \int_{S_2}\vec{D_2}\cdot\hat{n}_2\,ds = \sigma A$$

বা, $\vec{D_1}\,\hat{n}_1\,S_1 + \vec{D_2}\cdot\hat{n}_2\,S_2 = \sigma A$

বা, $(\vec{D_1}\hat{n}_1 + \vec{D_2}\cdot\hat{n}_2)A = \sigma A$

$\therefore$ i.e $D_{1n} - D_{2n} = \sigma \qquad [S_1 = S_2 = A]$

অর্থাৎ, মাধ্যম-1 এ D এর লম্ব উপাংশ এবং 2 এ D এর লম্ব উপাংশের পার্থক্য হলো তলীয় চার্জ ঘনত্ব σ এর সমান। যদি আমরা একটি

চার্জমুক্ত মাধ্যম বিবেচনা করি অর্থাৎ $\sigma = 0$ এর জন্য

$$D_{1n} - D_{2n} = 0$$

$$\text{বা, } D_{1n} = D_{2n}$$

অর্থাৎ, দুটি মাধ্যম (1 ও 2) এর আন্তঃতলে $\vec{D}$ এর লম্ব উপাংশ হলো সমান।

৪. $\vec{H}$ এর জন্য সীমান্ত শর্তঃ- আমরা জানি ম্যাক্সওয়েলের রূপান্তরিত অ্যাম্পিয়ারের সূত্রটি হলো :-

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{——— (i)}$$

এবার একটি বদ্ধলুপ দ্বারা আবদ্ধ তল S এর উপর উভয় দিকে সমাকলন করে পাই,

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot \hat{n}\, d\vec{s} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \cdot \hat{n}\, ds$$

$$\text{বা, } \int_S \vec{\nabla} \times \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \cdot \hat{n}\, ds$$

এবার বামপাশে স্টোকসের উপপাদ্যটি প্রয়োগ করে পাই,

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \cdot \hat{n}\, ds \quad \text{——— (i)}$$

এবার, দুটি মাধ্যম 1 ও 2 এর আন্তঃতলে একটি আয়তাকার লুপ চিত্রানুযায়ী বিবেচনা করি।

এবার সমীকরণ (i)-এর বাম পক্ষটিকে আয়তাকার লুপে করে পাই,

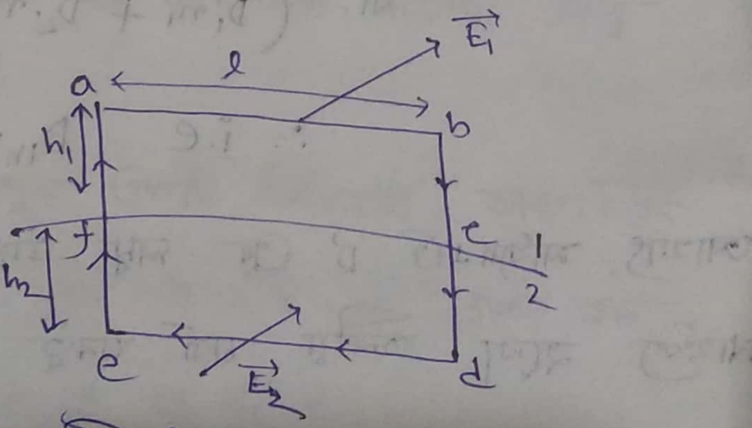


fig:- দুটি মাধ্যমের অন্তঃতলে আয়তাকার লুপ

$$\int_a^b \vec{H_1}\cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{H_1}\cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{H_2}\cdot d\vec{l} + \int_d^e \vec{H_2}\cdot d\vec{l} + \int_e^f \vec{H_2}\cdot d\vec{l} + \int_f^a \vec{H_1}\cdot d\vec{l}$$

$$= \int \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\hat{n}\cdot ds \quad \text{--- (2)}$$

এবার যদি লুপটিকে সংকুচিত করে $h_1 \to 0$ ও $h_2 \to 0$ (এক কথা) অনুঃতলে ২য়, ৩য়, ~~...~~ ৫ম ও ৬ষ্ঠ এই চারটি সমাকলনের মান শূন্য হবে, এবং এই $h_1 \to 0$ ও $h_2 \to 0$ লিমিটে,

$$\int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot \hat{n}\, ds \to 0$$

$$\text{এবং} \int \vec{J}\cdot d\vec{s} = J_{S1}\, l$$

যেখানে, J_{S1} হলো $\vec{H}$ এর উপাংশের দিকে তলীয় কারেন্ট ঘনত্বের উপাংশ।

-এখন (ii) নং হতে পাই,

$$\int_a^b \vec{H_1}\cdot d\vec{l} + \int_d^e \vec{H_2}\cdot d\vec{l} = J_{S1}\, l$$

বা, $H_{1t}\, l - H_{2t}\, l = J_{S1}\, l$

বা, $(H_{1t} - H_{2t})\, l = J_{S1}\, l$

$\therefore H_{1t} - H_{2t} = J_{S1}$

মাধ্যমের নির্দিষ্ট পরিবাহিতার জন্য $J_{S1} = 0$, অতএব আমরা পাই,

$$H_{1t} - H_{2t} = 0$$

$$\therefore H_{1t} = H_{2t}$$

অর্থাৎ দুটি মাধ্যমের অনুঃতলে $\vec{H}$ এর স্পর্শকীয় উপাংশ হবে সমান।

CS CamScanner

প্র-৭ঃ- স্কেলার এবং ভেক্টর বিভবের পরিপ্রেক্ষিতে দুটি যুগল সমীকরণ বের কর যা ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণের সমস্ত তথ্য ধারণ করে?

সমাধান

আমরা জানি ম্যাক্সওয়েলের ক্ষেত্র সমীকরণগুলো হলো:

$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho \quad \text{——} (i) \qquad \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad \text{——} (3)$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0 \quad \text{——} (2) \qquad \nabla\times H=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \quad \text{——} (4)$$

আমরা জানি; কোন ভেক্টর ক্ষেত্রের কার্লের অভিসারিতা শূন্য i.e.

$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})=0 \quad \text{——} (5)$$

(5) এবং (2) নং তুলনা করে পাই,

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A} \quad \text{——} (6)$$ যেখানে, A হলো চৌম্বক ক্ষেত্রের ভেক্টর বিভব।

এখন, 6 নং এর মান (iii) নং এ ব্যবহার করে পাই,

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{d}{dt}(\nabla\times\vec{A})$$

$$\Rightarrow \nabla\times\vec{E}=-\nabla\times\frac{d\vec{A}}{dt}$$

$$\Rightarrow \nabla\times\vec{E}+\nabla\times\frac{d\vec{A}}{dt}=0$$

$$\Rightarrow \nabla\times\left(\vec{E}+\frac{d\vec{A}}{dt}\right)=0$$

$$\Rightarrow \nabla\times\left(\vec{E}+\frac{d\vec{A}}{dt}\right)+0=0$$

$$\Rightarrow \nabla\times\left(\vec{E}+\frac{d\vec{A}}{dt}\right)+\nabla\times(\nabla\phi)=0$$

$$\Rightarrow \nabla\times\left(\vec{E}+\frac{d\vec{A}}{dt}\right)=-\nabla\times(\nabla\phi)$$

$$\Rightarrow \vec{E}+\frac{d\vec{A}}{dt}=-\nabla\phi$$

$$\therefore \vec{E}=-\nabla\phi-\frac{d\vec{A}}{dt} \quad \text{——} (7)$$

CS CamScanner

সুতরাং, $\vec{B} = \mu\vec{H} \Rightarrow \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$ ——— (8)

এবং, $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ ——— (9)

(8) এবং (9) এর মান (5) ব্যবহার করে পাই,

$$\nabla \times \frac{\vec{B}}{\mu} = \vec{J} + \frac{d}{dt}(\varepsilon\vec{E})$$

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{B} = \mu\vec{J} + \mu\varepsilon\frac{d\vec{E}}{dt} \quad \text{——— (10)}$$

6 নং থেকে (10) নং এ ব্যবহার করে পাই,

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu\vec{J} + \mu\varepsilon\frac{d\vec{E}}{dt}$$

$$\Rightarrow \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} = \mu\vec{J} + \mu\varepsilon\frac{d\vec{E}}{dt} \quad \text{——— (11)}$$

$$\left[\because \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}\right]$$

$$\Rightarrow \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} = \mu\vec{J} + \mu\varepsilon\frac{d}{dt}\left[-\nabla\phi - \frac{d\vec{A}}{dt}\right]$$

$$\Rightarrow \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} = \mu\vec{J} - \nabla\left(\mu\varepsilon\frac{d\phi}{dt}\right) - \mu\varepsilon\frac{d^2A}{dt^2}$$

$$\Rightarrow -\mu\vec{J} = \nabla^2\vec{A} - \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla\left(\mu\varepsilon\frac{d\phi}{dt}\right) - \mu\varepsilon\frac{d^2A}{dt^2}$$

$$\Rightarrow -\mu\vec{J} = \nabla^2\vec{A} - \mu\varepsilon\frac{d^2\vec{A}}{dt^2} - \nabla\left[\nabla\cdot\vec{A} + \mu\varepsilon\frac{d\phi}{dt}\right]$$

$$\Rightarrow \nabla^2\vec{A} - \mu\varepsilon\frac{d^2A}{dt^2} - \nabla\left[\nabla\cdot\vec{A} + \mu\varepsilon\frac{d\phi}{dt}\right] = -\mu\vec{J}$$

আবার, (i) নং হতে পাই, $\nabla\cdot\vec{D} = \rho$

$$\Rightarrow \nabla\cdot(\varepsilon\vec{E}) = \rho$$

$$\Rightarrow \nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad \text{——— (12)}$$

7 নং এর মান (12) নং এ ব্যবহার করে পাই,

CamScanner

$$\nabla\cdot\left[-\nabla\phi-\frac{d\vec{A}}{dt}\right]=\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow -\nabla\cdot\nabla\phi-\nabla\cdot\frac{d\vec{A}}{dt}=\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow -\nabla^2\phi-\frac{d}{dt}(\nabla\cdot\vec{A})=\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \nabla^2\phi+\frac{d}{dt}(\nabla\cdot\vec{A})=-\frac{\rho}{\varepsilon}$$

এই সমীকরণের বামপার্শে $-\mu\varepsilon\frac{d^2\phi}{dt^2}$ ব্যবহার করে পাই,

$$\nabla^2\phi-\mu\varepsilon\frac{d^2\phi}{dt^2}+\frac{d}{dt}(\nabla\cdot\vec{A})+\mu\varepsilon\cdot\frac{d^2\phi}{dt^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \nabla^2\phi-\mu\varepsilon\frac{d^2\phi}{dt^2}+\frac{d}{dt}\left[\nabla\cdot\vec{A}+\mu\varepsilon\frac{d\phi}{dt}\right]=-\frac{\rho}{\varepsilon}$$

ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

যা তরঙ্গ সমীকরণ নির্দেশ করে। কাজেই উক্ত লরেঞ্জ শর্ত প্রয়োগ করে দেখানো যায়, ভেক্টর ও স্কেলার বিভব তরঙ্গ সমীকরণ সিদ্ধ করে।

প্রশ্ন-৪ঃ তড়িৎ চৌম্বক শক্তি ঘনত্ব $u=\frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{H}\cdot\vec{B})$ বা $u=\frac{1}{2}(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{2}\mu_0H^2)$ প্রতিপাদন কর এবং পয়েন্টিং ভেক্টর এর রাশিমালা বের কর?

সমাধান

ম্যাক্সওয়েলের ফিল্ড সমীকরণ থেকে জানি,

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad \text{—— (i)}$$

এবং $$\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \quad \text{—— (ii)}$$

(i) এর উভয়দিকে বামে $\vec{H}$ এর সাথে ডট গুনন নিয়ে পাই,

$$\vec{H}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad \text{—— (iii)}$$

আবার (2) এর উভয়দিকে বামে $\vec{E}$ এর সাথে ডট গুনন নিয়ে পাই,

$$\vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{H}) = \vec{E}\cdot\vec{J} + \vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{--- (4)}$$

আবার (3) হতে (4) কে বিয়োগ করে পাই,

$$\vec{H}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{E} - \vec{E}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{H} = -\vec{H}\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E}\cdot\vec{J} - \vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{--- (5)}$$

ভেক্টর সম্পর্ক থেকে জানি,

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A} - \vec{A}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{B}$$

ইহাকে (5) এ ব্যবহার করে পাই,

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{H}) = -\vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{E}\cdot\vec{J} \quad \text{--- (6)}$$

এখানে, $\vec{H}\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{H}\cdot\frac{\partial}{\partial t}(\mu\vec{H}) = \mu H\frac{\partial H}{\partial t}$ $[\because \vec{B} = \mu\vec{H}]$

$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mu H^2\right)$ [μ হলো মাধ্যমের প্রবেশ্যতা ধ্রুবক]

$= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\cdot\mu H\cdot H\right]$

$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mu\vec{H}\cdot\vec{H}\right)$

$\therefore \vec{H}\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}\right)$

আবার, $\vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{E}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\epsilon\vec{E} = \epsilon E\frac{\partial E}{\partial t}$ $[\because \vec{D} = \epsilon\vec{E}]$

$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\epsilon E^2\right)$ [ϵ হলো মাধ্যমের পরাবৈদ্যুতিক ধ্রুবক]

$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\cdot\epsilon EE\right)$

$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\cdot\epsilon\vec{E}\cdot\vec{E}\right)$

$\therefore \vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}\right)$

ইহাকে (6) নং এ ব্যবহার করে পাই,

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{H}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{B}\cdot\vec{H})\right] - \vec{J}\cdot\vec{E} \quad \text{--- (7)}$$

এখানে, $\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}$ এবং $\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$ হলো যথাক্রমে তড়িৎ শক্তি ঘনত্ব ও চৌম্বক শক্তি ঘনত্ব অতএব তড়িৎ চৌম্বক শক্তি ঘনত্ব পাই,

$$U = \frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{B}\cdot\vec{H})$$

অথবা

$$V = \frac{1}{2}(\epsilon E^2 + \mu H^2)$$

[প্রমাণিত]

সমীকরণ (7) এর ডানপাশের ২য় টার্মটি ক্ষেত্র আয়তনে ধনাত্মক জুল হিটার নির্দেশ করে। অতএব (7) এর ডানপাশের প্রথম টার্মটি তড়িৎ চৌম্বক শক্তি ঘনত্বের হার নির্দেশ করে। এবার (7) এর উভয়দিকে একটি বদ্ধতল S দ্বারা আবদ্ধ আয়তন V এর উপর সমাকলন করে পাই,

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{H})\,dv = -\frac{d}{dt}\int_V \frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{B}\cdot\vec{H})\,dv - \int_V \vec{J}\cdot\vec{E}\,dv$$

অতএব, $-\int_V \vec{J}\cdot\vec{E}\,dv = \frac{d}{dt}\int_V \frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{B}\cdot\vec{H})\,dv + \int_V \vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{H})\,dv$

ডানপাশের ২য় পদটিতে ডাইভারজেন্স উপপাদ্য প্রয়োগ করে পাই,

$$-\int_V \vec{J}\cdot\vec{E}\,dv = \frac{d}{dt}\int_V \frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{B}\cdot\vec{H})\,dv + \oint_S (\vec{E}\times\vec{H})\cdot\hat{n}\,ds \quad (8)$$

এখানে, $\vec{J}\cdot\vec{E}$ টার্মটি দুইটি টার্মের সমন্বয়ে গঠিত। ডানপাশের প্রথম টার্মটি হলো V আয়তনে সঞ্চিত তড়িৎ চৌম্বক শক্তির পরিবর্তনের হার এবং দ্বিতীয় টার্মটি হলো একটি তলীয় সমাকলন এই সমীকরণটিকে পয়েন্টিং উপপাদ্য বলা হয়

এখানে, $\vec{E}\times\vec{H}$ টার্মটি পয়েন্টিং ভেক্টর বলা হয় এবং ইহাকে $\vec{P}$ বা $\vec{S}$ দ্বারা নির্দেশ করা হয়। অতএব পয়েন্টিং ভেক্টর

$$\vec{P} \text{ বা } \vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$$

CS CamScanner

এই পয়েন্টিং ভেক্টরটি একক সময়ে অতিক্রান্ত তড়িৎ চৌম্বক শক্তি নির্দেশ করে। S.I সিস্টেমে এই পয়েন্টিং ভেক্টর এর একক হলো watts/m^2 এই পয়েন্টিং ভেক্টর এর দিক হলো ডান হস্ত স্ক্রু নিয়মানুসারে E ও H এর উপর লম্ব।

প্র-৭: ম্যাক্সওয়েলের পীড়ন টেন্সর ব্যাখ্যা করে দেখাও যে,

$$T_{pq} = \epsilon_0 \left(E_p E_q - \frac{1}{2} \delta_{pq} E^2 \right)$$

সমাধান

ম্যাক্সওয়েল তার দক্ষ তত্ত্বে বিবেচনা করেন যে, তড়িৎ চৌম্বক ক্ষেত্রের মাধ্যমে একটি বস্তু থেকে অন্য একটি বস্তুতে অথবা ক্রিয়া ক্ষেত্রশক্তি হিসেবে স্থানান্তরিত হয়। তিনি বিবেচনা করেন যে, স্থির তড়িৎ ক্ষেত্র হলো একটি পীড়ন স্থানান্তরকারি মাধ্যম।

একটি স্থির তড়িৎ ক্ষেত্রে একটি বদ্ধ তল দ্বারা একটি আবদ্ধ আয়তন বিবেচনা করি। যদি এই আয়তনের উপর ক্রিয়াশীল বল আয়তনকে আবদ্ধকারি তল দিয়ে স্থানান্তরিত হয় তবে স্থানান্তরিত বলকে ক্ষেত্র পীড়ন টেন্সর T এর আকারে প্রকাশ করা যায়। এই পীড়ন মাধ্যমের অনুপস্থিতিতে ও ক্রিয়া করে। প্রকৃতপক্ষে ইহা একটি ভৌত ধারণা এবং প্রকৃতপক্ষে বাস্তবতা হলো ইহা কুলম্বের সূত্র দ্বারা একটি দূরত্বে অবস্থিত চার্জের মধ্যকার বল। কোন একটি দূরত্বে এই অবস্থানীয় প্রকৃত ক্রিয়াকে স্থানান্তরকারী বলকে টেন্সর এর মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়। ধরি পীড়ন টেন্সর T এর pq^{th} একটি উপাদান T_{pq} ধরি একটি ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র তল ds দিয়ে স্থানান্তরিত dF বলের উপাদানটি হলো dF_p এবং ds_q হলো

qth এর দিকে dS তলের উপাংশ। পীড়ন টেন্সর হিসাবে এই dF_p কে লেখা যায়:

$$dF_p = \sum_{q=1}^{3} T_{pq}\, dS_q \quad \text{———} \quad (i)$$

টেন্সর T হলো প্রতিসাম্যিক সমীকরণ (i) কে লিখতে পারি,

$$dF_p = T_{pq}\, dS_q$$

$$\text{বা,}\quad F_p = \int T_{pq}\, dS_q \quad \text{———} \quad (ii)$$

এই বল হলো আয়তনীয় বলের pth উপাংশ। এবার টেন্সর আকারে গাউসের ডাইভারজেন্স তত্ত্ব প্রয়োগ করে পাই,

$$\int \frac{\partial T_{pq}}{\partial x_q}\, dv = \int T_{pq}\, dS_q$$

পীড়ন টেন্সর হিসেবে আয়তনীয় বলের pth উপাংশ পাই,

$$F_{vp} = \frac{\partial T_{pq}}{\partial x_q} \quad \text{———} \quad (3)$$

যদি সমীকরণ (3) এর মাধ্যমে আয়তনীয় বলটিকে T এর টেন্সর ডাইভারজেন্স হিসাবে প্রকাশ করা হয়। তবে T রাশিটি সমীকরণ (2) দ্বারা প্রদর্শিত তলীয়-পীড়ন টেন্সর নির্দেশ করে। আয়তনীয় বল F_{vp} এর সাথে সংশ্লিষ্ট টেন্সরটি unique নয় কেননা অন্য শূন্য ডাইভারজেন্স সহ একটি অতিরিক্ত টেন্সরকে তার সাথে যোগ করা যেতে পারে। যাই ইলেকট্রিক-এর অনুপস্থিতিতে আয়তনীয় বল সমীকরণটিকে লিখা হয়।

$$\vec{F} = \rho\vec{E} = (\vec{\nabla}\cdot\vec{D})\,\vec{E}$$

টেন্সর প্রতীকে এ সমীকরণটিকে লিখা যায়।

$$F_{vp} = \epsilon_0 E_p \frac{\partial E_q}{\partial x_q} = \epsilon_0 \left[\frac{\partial}{\partial x_q}(E_p E_q) - E_q \frac{\partial E_p}{\partial x_q}\right] \quad (4)$$

CamScanner

আমরা জানি, স্থির তড়িৎ ক্ষেত্র এর জন্য $\vec{E}$ এর curl হলো শূন্য। অর্থাৎ

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$

অতএব আমরা লিখতে পারি $\quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x_q} = \frac{\partial E_q}{\partial x_p} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{বা, } E_q \frac{\partial E_p}{\partial x_q} = E_q \frac{\partial E_q}{\partial x_p} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_p} (E_q E_q)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_p} (E)^2$$

এখানে, E হলো $\vec{E}$ এর মান। এই সমীকরণটিকে লেখা যায়,

$$E_q \frac{\partial E_p}{\partial x_q} = \frac{1}{2} \delta_{pq} \frac{\partial}{\partial x_q} E^2 = \frac{\partial}{\partial x_q} \left(\frac{1}{2} \delta_{pq} E^2 \right) \quad \text{——— (5)}$$

অতএব, (4) কে লিখতে পারি,

$$f_{vp} = \epsilon_0 \left[\frac{\partial}{\partial x_q} (E_p E_q) - \frac{\partial}{\partial x_q} \left(\frac{1}{2} \delta_{pq} E^2 \right) \right] \quad \text{——— (6)}$$

(3) এবং (6) কে তুলনা করে পাই,

$$T_{pq} = \epsilon_0 \left(E_{pq} - \frac{1}{2} \delta_{pq} E^2 \right) \quad \text{——— (7)}$$

ইহাই হলো ম্যাক্সওয়েলের স্ট্রেস টেন্সর এর রাশিমালা।

ইহাকে ম্যাট্রিক্স আকারে লিখা যায়,

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) & E_x E_y & E_x E_z \\ E_y E_x & \frac{1}{2}(E_y^2 - E_z^2 - E_x^2) & E_y E_z \\ E_z E_x & E_y E_z & \frac{1}{2}(E_z^2 - E_y^2 - E_x^2) \end{bmatrix}$$

এখানে, δ_{pq} রূপান্তরের সহগ গুলো প্রদান করে এবং

$$\delta_{pq} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ইহা হলো Rank-two বিশিষ্ট প্রতিসাম্য টেন্সর।

প্রশ্ন-১০ঃ- গেজ রূপান্তর বলতে কি বুঝ ব্যাখ্যা কর?

সমাধান

গেজ রূপান্তরঃ- ভেক্টর ও স্কেলার বিভবকে নতুন এবং ভৌতভাবে সমতুল্য বিভব আপেক্ষকে রূপান্তর করালে গেজ রূপান্তর বলে। এটি এমন একটি রূপান্তর যা সিস্টেমের ভৌত অবস্থার পরিবর্তন না করে তার বর্ননা পদ্ধতিকে পরিবর্তন করে।

গেজ রূপান্তর সাধারনত একটি গেজ ফাংশনের মাধ্যমে সংজ্ঞায়িত হয়। এই ফাংশন সিস্টেমের ভৌত বৈশিষ্ট্যগুলিকে অপরিবর্তিত রেখে সমীকরন বা ভেক্টর ফিল্ডগুলির রূপ পরিবর্তন করে। ইলেকট্রো ম্যাগনেটিজমে গেজ রূপান্তরের মাধ্যমে ভেক্টর পটেনশিয়াল (A) এবং স্কেলার পটেনশিয়াল ϕ কে একটি নির্দিষ্ট উপায়ে পরিবর্তন করা হয়। যেখানে ইলেকট্রিক ফিল্ড (E) এবং ম্যাগনেটিক ফিল্ড (B) অপরিবর্তিত থাকে।

$$A' = A + \nabla x, \quad \phi' = \phi - \frac{\partial x}{\partial t}$$

অর্থাৎ গেজ রূপান্তর হলো এমন এক ধরনের রূপান্তর যা সিস্টেমের ভৌত বৈশিষ্ট্য পরিবর্তন না করে তার গানিতিক প্রকাশ-পদ্ধতিকে পরিবর্তন করে। এটি ভৌত সিমেট্রি এবং সংরক্ষন নীতির সাথে গভীরভাবে সম্পর্কিত।

প্রশ্ন-১১ঃ- কুলম্ব গেজ ও লরেন্জ গেজের সুবিধাগুলো লিখ?

সমাধান

কুলম্ব গেজের সুবিধাঃ-

১. কুলম্ব গেজ সাধারণত বৈদ্যুতিক ক্ষেত্রে ব্যবহৃত হয় এবং এটি $\nabla \cdot A = 0$ সাথে কাজ করে।

২. স্থির চৌম্বক ক্ষেত্র বিশ্লেষণে গাণিতিক সমীকরণ সহজভাবে সমাধান করা যায়।

৩. কুলম্ব গেজ ব্যবহারে চৌম্বক ভেক্টর পটেনশিয়াল এর সরলীকরণ করা সম্ভব যা ক্ষেত্রের বিশ্লেষণ সহজ করে।

৪. স্থিতিশীল সিস্টেমের ক্ষেত্রে এটি চৌম্বক ক্ষেত্রের নিখুঁত বিশ্লেষণে খুব সহায়ক।

লরেঞ্জ গেজের সুবিধা:

১. লরেঞ্জ গেজ চৌম্বক এবং তড়িৎ ক্ষেত্রের প্রতিসম সমাধান প্রদান করে যেখানে, $\nabla \cdot A + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$।

২. সময় পরিবর্তনশীল তড়িৎ চৌম্বক ক্ষেত্রের ক্ষেত্রে লরেঞ্জ গেজ অধিক কার্যকর।

৩. এটি রিলেটিভিস্টিক ক্ষেত্রে ক্ষেত্রের সমীকরণ সমাধানে স্বাভাবিক সমাধান প্রদান করে।

৪. এটি বিশেষ আপেক্ষিকতার সাথে সামঞ্জস্যপূর্ণ এবং ক্ষেত্রের প্রতিটি অংশকে যুক্ত রাখে।

Chapter-2

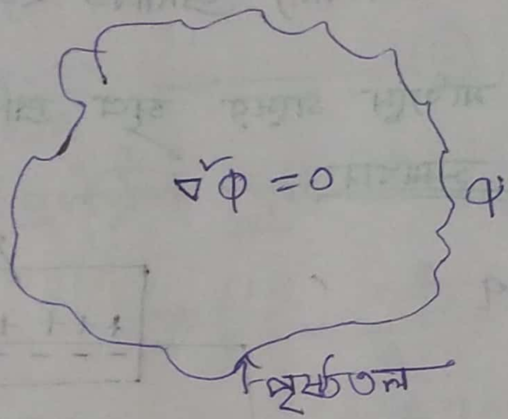
প্র-1:- একতার উপপাদ্য বর্ণনা ও প্রমাণ কর?

সমাধান

একতার উপপাদ্যটি হলো:-

প্রদত্ত প্রান্তিক শর্তের অধীনে ল্যাপ্লাস সমীকরণের একটি ও কেবলমাত্র একটি সমাধান আছে অর্থাৎ অদ্বিতীয়।

প্রমাণ:- একতার উপপাদ্য অনুযায়ী প্রদত্ত কোন আয়তন আবদ্ধকারী পৃষ্ঠতলে বিভব ϕ প্রদত্ত থাকলে ল্যাপ্লাস সমীকরণ এর সমাধান হবে অদ্বিতীয়।



ধরি প্রদত্ত কোন V আয়তনে ল্যাপ্লাস সমীকরণের দুটি সমাধান ϕ_1 ও ϕ_2 আছে

$$\therefore \nabla^2\phi_1 = 0$$

$$\text{ও } \nabla^2\phi_2 = 0$$

একতার উপপাদ্য অনুসারে ϕ_1 ও ϕ_2 একই হবে।

প্রমাণের জন্য মনে করি,

ϕ_1 ও ϕ_2 ভিন্ন এবং এদের ব্যবধান ϕ_3

$$\therefore \phi_3 = \phi_1 - \phi_2 \text{ ——— (i)}$$

$$\nabla^2\varphi_3 = \nabla^2\varphi_1 - \nabla^2\varphi_2 = 0$$

তাহলে φ_3 অবশ্যই ল্যাপ্লাসের সমীকরণকে সিদ্ধ করবে।

(i) নং সমীকরণ অনুসারে দেখা যায়,

প্রদত্ত পৃষ্ঠতলে φ_3 এর চরম ও অবম মান থাকবে কিন্তু ল্যাপ্লাসের সমীকরণ স্থানীয় চরম অথবা অবমের অনুমোদন দেয় না। সকল চরম ও অবম প্রান্তিক তলেই সৃষ্টি হয়।

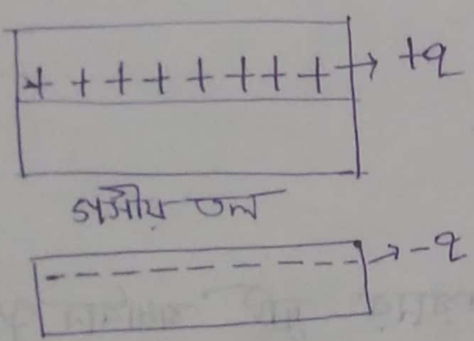
কিন্তু প্রান্তিক তলে বা পৃষ্ঠতলে φ_1 ও φ_2 নির্দিষ্ট, তাই পৃষ্ঠতলে φ_3 এর মান শূন্য হবে। তাহলে

$$\varphi_1 = \varphi_2$$

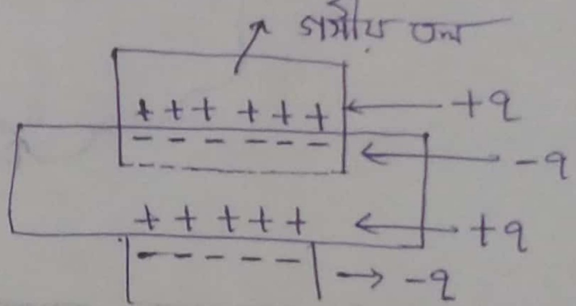
অতএব অনন্যতা উপপাদ্য প্রমাণিত হয়।

Qn-2:- ডাই ইলেকট্রিক মাধ্যমে গসের সূত্র প্রতিপাদন কর?

সমাধান



চিত্র: ডাই ইলেকট্রিক ব্যতীত সমান্তরাল পাত ধারক।



চিত্র: ডাই ইলেকট্রিক সহ সমান্তরাল পাত ধারক।

ধরি, প্রত্যেক পাতের ক্ষেত্রফল A. দুটি পাতের মধ্যবর্তী ব্যবধান d. এবং দুটি পাতের +q ও -q চার্জ ব্যাটারি সংযোগের মাধ্যমে প্রদান করা হলো।

মনে করি, ডাই ইলেকট্রিক ব্যতীত ও ডাই ইলেকট্রিক সহ ধারক দুটির মাঝখানে তড়িৎ ক্ষেত্র প্রাবল্য যথাক্রমে E_0 ও E. পরাবিদ্যুৎ

CamScanner

এ আবিষ্ট চার্জের পরিমাণ q'. চিত্রানুযায়ী দুটি গাউসিয়ান তল বিবেচনা করি। যারা q ও (+q', −q') চার্জ আবদ্ধ করে। চিত্রে ডাই-ইলেকট্রিক ব্যতীত ধারকটিতে গাউসের সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E_0}\cdot d\vec{s} = q$$

$$\Rightarrow \varepsilon_0 \cdot E_0 A = q$$

$$\Rightarrow E_0 = \frac{q}{\varepsilon_0 A} \quad \text{———— (i)}$$

পুনরায় ডাই-ইলেকট্রিক সহ-ধারকটিতে গাউসের সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$$\varepsilon_0 \oint E\cdot ds = +q - q' \quad \text{———— (ii)}$$

বা, $\varepsilon_0 E A = q - q'$

$$\Rightarrow E = \frac{q-q'}{\varepsilon_0 A} \quad \text{———— (iii)}$$

আমরা জানি, ডাই ইলেকট্রিক ধ্রুবক $k = \frac{E_0}{E}$

বা, $k = \dfrac{\frac{q}{\varepsilon_0 A}}{\frac{q-q'}{\varepsilon_0 A}}$

বা, $k = \frac{q}{q-q'}$

বা, $kq - kq' = q$

বা, $q' = \frac{kq-q}{k}$

এটাই হলো ডাই ইলেকট্রিক আবিষ্ট চার্জের পরিমাণ।

অতএব (ii) নং হতে পাই, $\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = q - q\left(1-\frac{1}{k}\right)$

বা, $\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q}{k}$

বা, $\varepsilon_0 \oint k\vec{E}\cdot d\vec{s} = q$

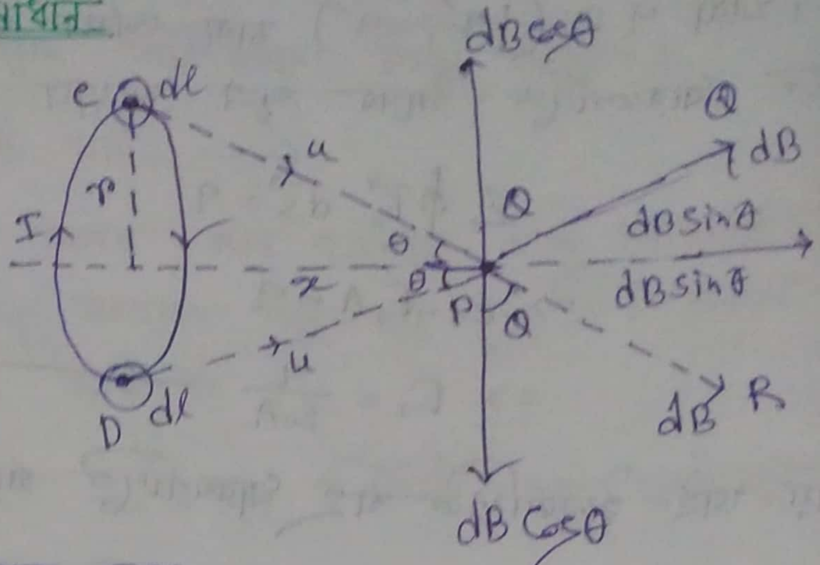
এটাই হলো ডাই ইলেকট্রিক মাধ্যমের জন্য গাউসের সূত্র।

CamScanner

প্র-৩: বৃত্তাকার পরিবাহীর অক্ষের উপর চৌম্বকক্ষেত্র নির্ণয় কর?

সমাধান

এখানে, C বিন্দুর dl অংশের জন্য P বিন্দুতে চৌম্বক ক্ষেত্র,



$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I\,dl \sin 90^\circ}{u^2}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I\,dl}{u^2}$$

একইভাবে D বিন্দুতে dl অংশের জন্য

P বিন্দুতে চৌম্বকক্ষেত্র,

$$dB = \frac{\mu_0 I\,dl}{4\pi u^2}$$

$dB\cos\theta$ উপাংশটি পরস্পরকে প্রশমিত করে।

সমগ্র বৃত্তাকার পরিবাহির জন্য P বিন্দুতে চৌম্বক ক্ষেত্র,

$$B = \int dB \sin\theta$$

$$= \int \frac{\mu_0 I\,dl}{4\pi u^2} \cdot \frac{r}{u}$$

$$= \frac{\mu_0 I r}{4\pi u^3} \int dl$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{r}{u^3} \cdot 2\pi r$$

চিত্র হতে,

$$u = (r^2+x^2)^{1/2}$$

$$\Rightarrow u^3 = (r^2+x^2)^{3/2}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2\pi r^2}{(r^2+x^2)^{3/2}}$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{\cancel{2\pi}\, r^2}{(r^2+x^2)^{3/2}}$$

∴ যদি N সংখ্যক কুণ্ডলের লুপ দিয়ে থাকে

$$B = N \cdot \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{r^2}{(r^2+x^2)^{3/2}}$$

Ans

৭ন-৫: তিনটি তড়িৎ ভেক্টর $\vec{D}$, $\vec{P}$ এবং $\vec{E}$ এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর ?

সমাধান

তড়িৎ বিজ্ঞানে $\vec{P}$, $\vec{E}$ ও $\vec{D}$ তড়িৎ ভেক্টর হিসেবে ব্যাখ্যায়িত হয়। এখানে P হলো পরাবৈদ্যুতিক মাধ্যমের মেরুবর্তিতা $\vec{P}$, $\vec{E}$ হলো তড়িৎ ক্ষেত্র এবং $\vec{D}$ হলো তড়িৎ সরণ ভেক্টর।

পরাবৈদ্যুতিক মাধ্যমের একক আয়তনে তড়িৎ দ্বিমেরু ভ্রামকের সংখ্যাকে মেরুবর্তিতা $\vec{P}$ বলে। মাধ্যমের একক আয়তনে তড়িৎ দ্বিমেরুর সংখ্যা N এবং প্রতি দ্বিমেরু ভ্রামক $\vec{P_i}$ হলে, মেরুবর্তিতা হলো:-

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^{n} \vec{P_i}$$

$$= N\vec{P} \quad \text{——— (i)}$$

যখন $\vec{P}$ হলো ΔV আয়তনে গড় দ্বিমেরু ভ্রামক।

ধারকের মুক্ত চার্জ q এবং পোলারায়িত পৃষ্ঠ চার্জ q′ হলে ধারকের পাত দ্বয়ের মাঝে উৎপন্ন তড়িৎ ক্ষেত্রের মান হয়

$$E = \frac{q}{\varepsilon_0 A} - \frac{q'}{\varepsilon_0 A} \quad \text{——— (ii)}$$

যেখানে, A হলো ধারকের প্রত্যেক পাতের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল। একই ধারক মাধ্যম শূন্য অবস্থায় থাকলে তড়িৎ ক্ষেত্র হবে,

$$E_0 = \frac{q}{\varepsilon_0 A} \quad \text{——— (iii)}$$

CS CamScanner

আবার আমরা জানি,

পরাবৈদ্যুতিক ধ্রুবক $k = \frac{E_0}{E}$

$$\Rightarrow E_0 = Ek$$

E_0 এর মান (iii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$Ek = \frac{q}{\epsilon_0 A}$$

$$\text{বা, } E = \frac{q}{k\epsilon_0 A} \quad \text{—— (iv)}$$

মনে করি, বৈদ্যুতিক ক্ষেত্রের অভ্যন্তরে A ক্ষেত্রফলে q' পরিমাণ চার্জ আছে তাহলে, পোলারায়ন $P = \frac{q'}{A}$ —— (v)

এখন (ii) নং হতে পাই,

$$E = \frac{q}{\epsilon_0 A} - \frac{q'}{\epsilon_0 A}$$

$$\Rightarrow \frac{q}{k\epsilon_0 A} = \frac{q}{\epsilon_0 A} - \frac{q'}{\epsilon_0 A}$$

$$\Rightarrow \frac{q}{\epsilon_0 A} = \frac{q}{k\epsilon_0 A} + \frac{q'}{\epsilon_0 A}$$

$$\text{বা, } \cancel{\frac{q}{A} = \epsilon_0 \frac{1}{\epsilon_0}\left(\frac{q}{kA} + \frac{q'}{A}\right)}$$

বা, $\cancel{\frac{q}{k}} +$

$$\Rightarrow \frac{q}{A} = \epsilon_0 \left(\frac{q}{k\epsilon_0 A} + \frac{q'}{\epsilon_0 A}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{q}{A} = \epsilon_0 E + P \quad [\text{v ও iv নং এর মান বসিয়ে}]$$

এই সমীকরণের ডানপাশের রাশিকে তড়িৎ সরণ বলা হয় এবং D দ্বারা প্রকাশ করা হয়। সুতরাং

CamScanner

$$D = \varepsilon_0 E + P$$

এবং $D = \frac{q}{A}$

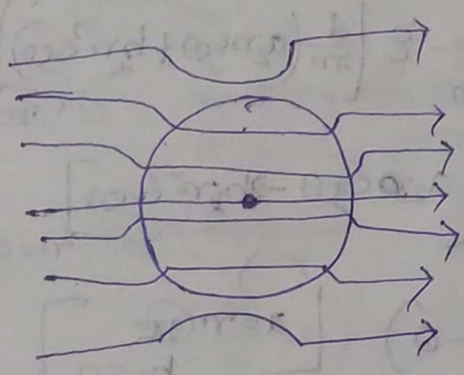
তাহলে, লিখা যায় $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

ইহাই তড়িৎ ক্ষেত্র ভেক্টর $\vec{D}, \vec{E}$ ও $\vec{P}$ এর মধ্যে সম্পর্ক।

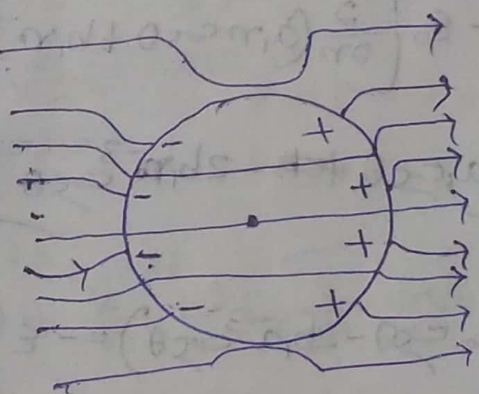
প্রশ্ন-৫: সুষম তড়িৎক্ষেত্রে একটি পরাবৈদ্যুতিক গোলক স্থাপন করা হলো। গোলকের বাইরে কোন বিন্দুতে এবং অভ্যন্তরে তড়িৎ বিভব ও ক্ষেত্র ভেক্টরের উপাংশগুলো নির্ণয় কর?

সমাধান

শূন্যস্থানে ক্রিয়াশীল E_0 মানের সুষম তড়িৎ ক্ষেত্রে K পরাবৈদ্যুতিক ধ্রুবক এবং a ব্যাসার্ধের একটি পরাবৈদ্যুতিক পদার্থের অনাহিত গোলক বিবেচনা করা যাক। গোলীয় স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় মূলবিন্দুকে বিবেচ্য গোলকের কেন্দ্র বিবেচনা করি। ফলে:



চিত্র: ক



চিত্র: খ

এখানে, গোলকের বহিঃস্থ কোন বিন্দুতে তড়িৎ বিভবের জন্য পাই,

$$V_1(r,\theta) = a_1 r \cos\theta + b_1 r^{-2}\cos\theta \quad \text{---} (i)$$

আবার, গোলকের অভ্যন্তরে তড়িৎ বিভব হবে

$$V_2(r,\theta) = a_2 r \cos\theta + b_2 r^{-2}\cos\theta \quad \text{---} (ii)$$

এখানে $r\to\infty$ এর জন্য প্রান্তিক শর্তের জন্য $a_1 = -E_0$ এবং $r=0$ এর জন্য $b_2=0$ পাওয়া যায়। প্রান্তিক অবস্থানে বিভবের অবিচ্ছিন্নতার আকার হলো

$$V_1(a,\theta) = V_2(a,\theta)$$

তাহলে,

$$a_1 . a\cos\theta + b_1 a^{-2}\cos\theta = a_2 a\cos\theta + b_2 a^{-2}\cos\theta$$

$$\Rightarrow -E_0 a\cos\theta + b_1 a^{-2}\cos\theta = a_2 a\cos\theta + 0$$

$$\Rightarrow \cos\theta\left(-E_0 a + b_1 a^{-2}\right) = a_2 a\cos\theta$$

$$\Rightarrow -E_0 a + b_1 a^{-2} = a_2 a \quad \text{--- (iii)}$$

আমরা জানি, তড়িৎ সরণ ভেক্টর $\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = -\varepsilon\nabla V$ এর উলম্ব উপাংশ হলো $D_n = -\varepsilon\frac{\partial V}{\partial r}$ এবং $r=a$ অবস্থানে $\vec{D}$ এর উলম্ব উপাংশের অবিচ্ছিন্নতার শর্ত $D_{1n} = D_{2n}$ অনুসারে পাই,

$$-\left(\varepsilon_0\frac{\partial V_1}{\partial r}\right)_{r=a} = -\left(\varepsilon\frac{\partial V_2}{\partial r}\right)_{r=a}$$

$$\text{বা, } -\varepsilon_0\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(a_1 r\cos\theta + b_1 r^{-2}\cos\theta\right)\right]_{r=a} = -\varepsilon\left[\frac{d}{\partial r}\left(a_2 r\cos\theta + b_2 r^{-2}\cos\theta\right)\right]_{r=a}$$

$$\text{বা, } -\varepsilon_0\left[a_1\cos\theta - 2b_1 r^{-3}\cos\theta\right]_{r=a} = -\varepsilon\left[a_2\cos\theta - 2b_2 r^{-3}\cos\theta\right]_{r=a}$$

$$\text{বা, } -\varepsilon_0\left(-E_0\cos\theta - 2b_1 a^{-3}\cos\theta\right) = -\varepsilon\left(a_2\cos\theta - 0\right) \quad \left[a=r \text{ এবং } b_2=0\right]$$

$$\text{বা, } \cos\theta\left(-E_0 - 2b_1 a^{-3}\right) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\cdot a_2\cos\theta$$

$$\text{বা, } -\left(E_0 + 2b_1 a^{-3}\right) = k a_2$$

$$\text{বা, } E_0 + 2b_1 a^{-3} = k a_2 \quad \text{--- (iv)}$$

যেখানে, $k = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ ।

(iii) নং হতে পাই,

$$E_0 a + b_1 a^{-2} = a_2 a$$

$$\Rightarrow a_2 = -E_0 + a^{-3} \quad \text{—— (v)}$$

a_2 এর মান (iv) এ বসিয়ে পাই,

$$\Rightarrow E_0 + 2b_1 a^{-3} = k \cdot (-E_0 + a^{-3})$$

$$\Rightarrow 2b_1 a^{-3} = -kE_0 + \frac{1}{a^3}$$

$$\Rightarrow \frac{2b_1}{a^3} = \frac{-kE_0 a^3 + 1}{a^3}$$

$$\Rightarrow$$

(iii) ও (iv) নং সমীকরণ সমাধান করে পাই,

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= -\frac{3E_0}{k+2} \\ b_1 &= \frac{k-1}{k+2} a^3 E_0 \end{aligned}\right\} \text{—— (v)}$$

সুতরাং, গোলকের বাইরের অঞ্চলের যেকোন বিন্দুর জন্য বিভব

(i) নং এ ~~a_2 এবং $b_2 = 0$~~ $a_1 = -E_0$ এবং b_1 এর মান বসিয়ে পাই,

$$V_1(r,\theta) = -E_0 r\cos\theta + \frac{k-1}{k-2} a^3 E_0 \frac{1}{r^2} \cos\theta$$

$$= -E_0 r \cos\theta \left(1 - \frac{k-1}{k+2} \cdot \frac{a^3}{r^3}\right) \quad \text{—— (vi)}$$

এবং গোলকের অভ্যন্তরে যেকোন বিন্দুর বিভব,

(ii) নং এ a_2 এবং b_2 এর মান বসিয়ে পাই,

$$V_2(r,\theta) = -\frac{3}{k+2} \cdot E_0 r \cos\theta + 0$$

$$\Rightarrow V_2(r,\theta) = -\frac{3}{k+2} \cdot E_0 r\cos\theta \qquad \text{(vii)}$$

$\vec{E}$ ও $\vec{D}$ ভেক্টরের উপাংশগুলো (vi) ও (vii) নং সমীকরণের ব্যবকলিত মান থেকে পাওয়া যায়।
অতএব গোলকের বাইরে তড়িৎ ক্ষেত্র উপাংশ

$$\left.\begin{aligned} E_{1r} &= \left(1 + \frac{2(k-1)a^3}{(k+2)r^3}\right) E_0 \cos\theta \\ \text{এবং } E_{1\theta} &= -\left(1 - \left(\frac{k-1}{k+2}\right)\cdot\frac{a^3}{r^3}\right) E_0 \sin\theta \end{aligned}\right\} \text{(viii)}$$

এবং গোলকের অভ্যন্তরে তড়িৎ ক্ষেত্র উপাংশ

$$\left.\begin{aligned} E_{2r} &= \frac{3}{k+2} E_0 \cos\theta \\ \text{ও } E_{2\theta} &= -\frac{3}{k+2} E_0 \sin\theta \end{aligned}\right\} \text{(ix)}$$

অর্থাৎ গোলকের অভ্যন্তরে তড়িৎ বলরেখাগুলো z-অক্ষের সমান্তরাল হবে এবং ক্ষেত্র ভেক্টরের মান ধ্রুবক হবে।
তড়িৎ ক্ষেত্র ভেক্টরের এই ধ্রুবক মান হবে,

$$E_2 = \frac{3}{k+2} E_0 \qquad \text{(x)}$$

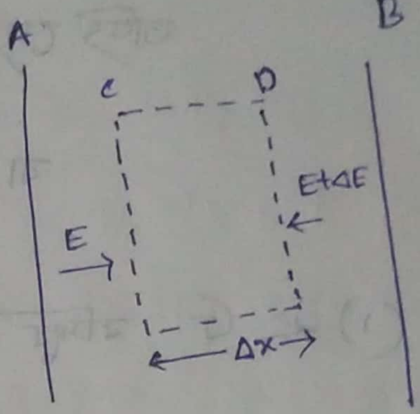
অনুরূপভাবে গোলকের অভ্যন্তরে সরণ ভেক্টরও ধ্রুবক হবে। $\vec{D}$ ভেক্টরের ধ্রুব মান হলো:

$$\boxed{D_2 = \varepsilon E_2 = \frac{3\varepsilon}{k+2} E_0}$$

প্র-৬:- কার্তেসীয় ~~ব্যবস্থা~~ ব্যবস্থায় পয়সনের সমীকরণ ও ল্যাপ্লাসের সমীকরণ নির্ণয় কর ?

সমাধান

ধরা যাক, ধারকের মাঝে ওর প্লেটের সমান্তরালে অবস্থিত কোন স্তরের ক্ষেত্র চার্জ ঘনত্ব ধ্রুবক, তবে ধনাত্মক x- অক্ষের দিকে এ চার্জ ঘনত্ব বৃদ্ধি পায়। ধনাত্মক ক্ষেত্র চার্জের দরুন চার্জ ঘনত্ব বৃদ্ধি পাচ্ছে বিবেচনা করা যাক। প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল α এবং C স্তরে তড়িৎ তীব্রতা, অর্থাৎ প্রতি একক ক্ষেত্রফলে বলরেখার সংখ্যা E হলে D স্তরে তড়িৎ ক্ষেত্র,



চিত্র:-১

$$\vec{E}_d = (\vec{E} + \Delta\vec{E}) = \vec{E} + \frac{d\vec{E}}{dx}\Delta x$$

যেখানে, x-অক্ষে Δx দূরত্বের জন্য ক্ষেত্রের পরিবর্তন হলো $\Delta\vec{E}$। তাহলে C স্তরে তল সমাকলন হবে $= -\vec{E}\cdot\vec{\alpha}$ এবং D স্তরে বহির্মুখী তল সমাকলন হবে;

$$\left(\vec{E} + \frac{d\vec{E}}{dx}\Delta x\right)\cdot\vec{\alpha}$$

সুতরাং $(\alpha\Delta x)$ উপাদানের উপর তড়িৎ ক্ষেত্র $\vec{E}$ এর তল সমাকলন

$$= \left(\vec{E} + \frac{d\vec{E}}{dx}\Delta x\right)\cdot\vec{\alpha} - \vec{E}\cdot\vec{\alpha}$$

$$= \alpha\Delta x\frac{dE}{dx}$$ [গসের উপপাদ্য অনুসারে তল সমাকলন আবদ্ধ চার্জের 4π গুণ]

আবার, যদি একক আয়তনের ক্ষেত্র চার্জ ρ হয়, তবে $\alpha\Delta x$ আয়তনের চার্জ হবে $\alpha\rho\Delta x$ তাহলে,

$$\alpha\Delta x\frac{dE}{dx} = 4\pi\rho\alpha\Delta x$$

CS CamScanner

বা, $\frac{dE}{dx} = 4\pi\rho \longrightarrow$ (i)

এখন, আমরা জানি,

তড়িৎ ক্ষেত্র $E = -\frac{d\phi}{dx}$ [ϕ = বিভব অপেক্ষক]

$$বা, \frac{dE}{dx} = -\frac{d^2\phi}{dx^2}$$

এই মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$-\frac{d^2\phi}{dx^2} = 4\pi\rho$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\phi}{dx^2} = -4\pi\rho \longrightarrow \text{(ii)}$$

এটিই একমাত্রিক ক্ষেত্রে পয়সনের সমীকরণ।

ত্রিমাত্রিক ক্ষেত্রে পয়সনের সমীকরণের হবে?

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{d^2\phi}{dy^2} + \frac{d^2\phi}{dz^2} = -4\pi\rho \longrightarrow \text{(iii)}$$

সমীকরণটিকে এস আই এককে পরিমাপ করার জন্য ডানপাশে $4\pi\epsilon_0$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{d^2\phi}{dy^2} + \frac{d^2\phi}{dz^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \longrightarrow \text{(iv)}$$

ইহাই নির্ণেয় পয়সনের সমীকরণ। যেখানে,

ল্যাপ্লাস অপারেটর,

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$$

ল্যাপ্লাসের সমীকরণ ঃ
যেখানে চার্জ ঘনত্ব শূন্য হলে অর্থাৎ $\frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$ হলে

(iv) নং থেকে লিখা যায় :-

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{d^2\phi}{dy^2} + \frac{d^2\phi}{dz^2} = 0$$

এটিই ল্যাপ্লাসের সমীকরণ।

এখন (i) নং সমীকরণ থেকে লিখা যায়

$$\frac{d\vec{E}}{dx} + \frac{d\vec{E}}{dy} + \frac{d\vec{E}}{dz} = 0$$

$$\Rightarrow \text{div}.\vec{E} = 0$$

আবার, আমরা জানি, $\vec{E} = -\text{grad}\,\phi$

সুতরাং, ল্যাপ্লাসের সমীকরণের ভেক্টর রূপ হলো:-

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d\phi}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{d\phi}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{d\phi}{dz}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \text{grad}\cdot\text{div}.\vec{E} = 0$$

ল্যাপ্লাসিয়ান অপারেটরের মাধ্যমে প্রকাশ করে পাই,

$$\boxed{\nabla^2\phi = 0}$$

ইহাই হলো ল্যাপ্লাসিয়ান সমীকরণ।

CamScanner

প্রশ্ন-7: দেখাও যে মেরুকৃত বস্তুর বিভব তলীয় চার্জের ঘনত্ব $\sigma_b = \vec{P}.\hat{n}$ প্লাস আয়তন চার্জের ঘনত্ব $\rho_b = -\vec{\nabla}.\vec{P}$ দ্বারা উৎপাদিত বিভবের হিসাবে গণ্য হয়।

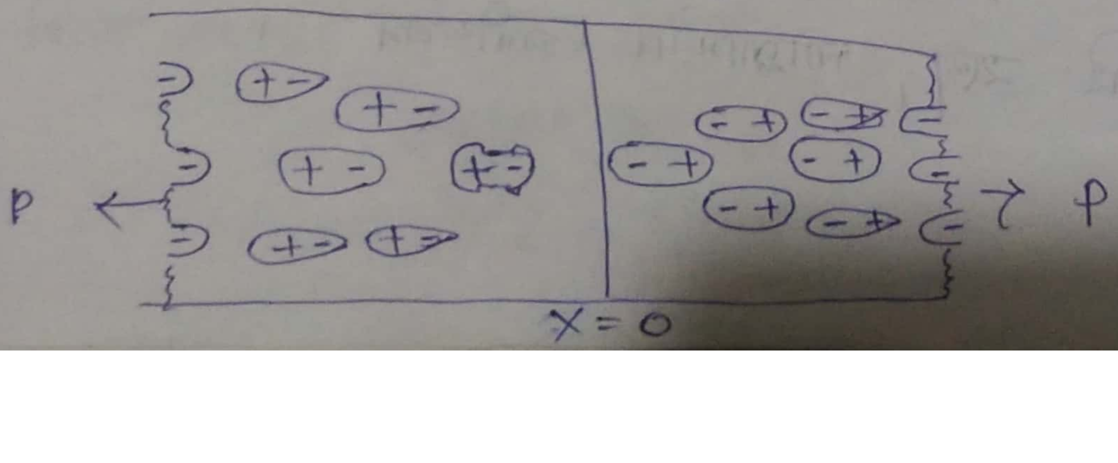
সমাধান

সুষমভাবে পোলারায়িত বা মেরুবর্তিত কোন মাধ্যম বিবেচনা করি। যার মেরুবর্তিতা $\vec{P}$। মাধ্যমের কোন ঘন আয়তনের প্রতিটি দ্বিমেরুর ধনাত্মক প্রান্ত প্রতিবেশি দ্বিমেরুর ঋনাত্মক প্রান্তের মুখোমুখি অবস্থান করবে এবং দ্বিমেরুগুলোর সমান্তরাল অবস্থা গ্রহন করবে ফলে মাধ্যমের নিট চার্জ ঘনত্ব শূন্য হবে। তড়িৎ ক্ষেত্রের দিকে বরাবর মাধ্যমের পৃষ্ঠতলে অসম ধনচার্জ সৃষ্টি হবে এবং ঠিক বিপরীত পৃষ্ঠতলে সমপরিমান ঋনচার্জ সৃষ্টি হবে।

ধনাত্মক চার্জযুক্ত পৃষ্ঠতলে কোন ক্ষেত্র A বিবেচনা করা যাক। তড়িৎ দ্বিমেরুর দৈর্ঘ্য l হলে Al আয়তনে তড়িৎ ভ্রামক হবে $Al\vec{P} = Ap\vec{l}$ (কারন $\vec{P}$ ও l এর অভিমুখ একই)। সুতরাং পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফলে p পরিমান অতিরিক্ত চার্জ জমা হবে। মেরুবর্তনের দরুন এ অতিরিক্ত পৃষ্ঠ চার্জ ঘনত্বকে σ_p লিখে পাই,

$$\sigma_p = \vec{P}\cdot\hat{n} \quad \text{———} \quad (i)$$

যখন $\hat{n}$ হলো বহির্গামী লম্ব একক ভেক্টর।



এখন ধরা যাক, মাধ্যমের পোলারায়ন সুষম নয়, বরং মাধ্যমের বিভিন্ন অংশে এর মান বিভিন্ন। এরূপ ক্ষেত্রে তলমাত্রিক ঘনত্ব σ_p এর পরিবর্তে কেবল আয়তনের চার্জ ρ_p বিবেচনা করি।

ধরা যাক, মাধ্যমের V আয়তন সীমাবদ্ধকারি পৃষ্ঠতল S। তাহলে মাধ্যমের পোলারায়নের দরুন V আয়তনে সীমাবদ্ধকারি পৃষ্ঠতল S তে উদ্ভূত পোলারায়িত চার্জ q_p নিম্নের সমীকরণ হতে পাওয়া যায়,

$$q_p = \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{a} \quad \text{——— (ii)}$$

আবার, আমরা জানি, $-q_p$ চার্জের দরুন

$$-q_p = \oint_V \rho_p \, dV \quad \text{——— (iii)}$$

(ii) ও (iii) নং সমীকরণ হতে পাই,

$$\Rightarrow \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{a} = -\oint_V \rho_p \, dV \quad \text{——— (iv)}$$

(iv) নং সমীকরণের বামপার্শ্বে গাউসের অপসারিতা তত্ত্ব প্রয়োগ করে পাই,

$$\oint_V \nabla \cdot \vec{P} \, dV = -\oint_V \rho_p \, dV$$

$$\Rightarrow \rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$$

ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ যা মাধ্যমের চার্জ-ঘনত্বের সাথে পোলারায়নের সম্পর্ক স্থাপন করে।

CamScanner

Chapter-4

প্রশ্ন-১ঃ- মুক্তস্থানে তাড়িতচৌম্বক তরঙ্গের সমীকরণ প্রতিপাদন কর?

সমাধান

আমরা জানি, ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণ;

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

মুক্তস্থানের জন্য, $\vec{J} = 0, \rho = 0$ এবং $\sigma = 0$ হয় তাহলে,

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = 0 \quad \text{——— (i)}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad \text{——— (ii)}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{——— (3)}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{——— (4)}$$

(3) নং সমীকরণের কার্ল প্রয়োগ করি,

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = \vec{\nabla}\times\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$$

বা, $\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \vec{\nabla}^2\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{B})$

[$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \vec{\nabla}^2\vec{A}$]

বা, $0 - \vec{\nabla}^2\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\mu_0\vec{H})$

[মুক্তস্থান এর জন্য $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}$, $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$]

বা, $\vec{\nabla}^2\vec{E} = \mu_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{H})$

বা, $\vec{\nabla}^2\vec{E} = \mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)$ [4 নং ব্যবহার করে]

বা, $\vec{\nabla}^2 \cdot \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$

বা, $\vec{\nabla}^2 \cdot \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ ——— (5)

এই সমীকরণকে $\vec{E}$ এর জন্য ইলেকট্রোম্যাগনেটিক তরঙ্গ সমীকরণ বলা হয়।

এখন (4) নং সমীকরণে curl প্রয়োগ করে পাই,

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)$$

বা, $\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{H}) - \vec{\nabla}^2 \cdot \vec{H} = \vec{\nabla} \times \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0 \vec{E})$

$$\left[\begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \mu_0 \vec{H} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \end{array}\right]$$

বা, $0 - \vec{\nabla}^2 \vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{E})$

বা, $-\vec{\nabla}^2 \vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{E})$

বা, $-\vec{\nabla}^2 \vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$

বা, $\vec{\nabla}^2 \cdot \vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mu_0 \vec{H}}{\partial t^2}$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}^2 \cdot \vec{H} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

এই সমীকরণকে $\vec{H}$ এর জন্য ইলেকট্রোম্যাগনেটিক তরঙ্গ সমীকরণ বলা হয়।

আমরা জানি, সাধারণ তরঙ্গ সমীকরণ,

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad \text{———} \quad (6)$$

(5) ও (6) নং সমীকরণ তুলনা করে পাই,

$$\frac{1}{v^2} = \mu_0 \epsilon_0 \Rightarrow v^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}}$$

CamScanner

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0} \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0}} = \sqrt{10^7 \times 9\times10^9}$$

$$বা, v = \sqrt{9\times10^{16}} = 3\times10^8 ms^{-1}$$

$$\therefore v = c \text{ হয়}$$

প্রশ্ন-২: দেখাও যে, তরঙ্গ সমীকরণকে নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায়:-

$(\nabla^2 + k^2)\vec{E} = 0$ যেখানে, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ হলো তরঙ্গ সংখ্যা

সমাধান

আমরা জানি,

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad \text{——— (i)}$$

এখন সময়ের সাথে দ্বিগুণভাবে পরিবর্তনশীল তড়িৎ ক্ষেত্রের জন্য আমরা লিখতে পারি,

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t}$$

$$বা, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega \vec{E}_0 e^{i\omega t}$$

$$বা, \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = i^2 \omega^2 \vec{E}_0 e^{i\omega t} \quad [i^2 = -1]$$

$$= -\omega^2 \vec{E}$$

কিন্তু $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi c}{\lambda} = kc$ যেখানে, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$তাহলে, \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -k^2 c^2 \vec{E}$$

এখন (i) নং হতে পাই,

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2}(-k^2 c^2 \vec{E})$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0$$

$$\therefore (\nabla^2 + k^2)\vec{E} = 0$$

[Showed]

qn-3: প্রমাণ কর যে, ম্যাক্সওয়েল এর তড়িৎচৌম্বক তরঙ্গ তির্যক তরঙ্গ।

সমাধান

আমরা জানি,

$$\nabla^2 E = \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad \text{—— (i)}$$

$$\nabla^2 H = \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \quad \text{—— (ii)}$$

তরঙ্গ সমীকরণের সাধারণ সমাধান হলো:

$$\psi = \psi_0 e^{i(kx-\omega t)}$$

তাহলে সমীকরণ (i) থেকে পাই,

$$E = E_0 e^{i(kz-\omega t)} \quad \text{—— (iii)}$$

এবং (ii) নং হতে, $H = H_0 e^{i(kz-\omega t)}$ —— (iv)

(iii) নং কে ~~ক~~ z এর সাপেক্ষে ব্যবকলন করে পাই,

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(E_0 e^{i(kz-\omega t)}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial E}{\partial z} = E_0 e^{i(kz-\omega t)} \cdot ik$$

$$\therefore \frac{\partial E}{\partial z} = E \cdot ik \quad \text{—— (v)}$$

এখন, $\frac{\partial}{\partial z} = ik$

পরাবৈদ্যুতিক মাধ্যম ও মুক্তস্থান এর জন্য ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণ হলো:—

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\hat{k}\frac{\partial}{\partial z} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\Rightarrow \hat{k}(ik) \cdot \vec{E} = 0$$

$$\therefore \hat{k} \cdot \vec{E} = 0$$

CamScanner

তড়িৎ ক্ষেত্র ও তড়িৎ ক্ষেত্রের দিক যদি 90° হয় তাহলে,

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0$$
$$\Rightarrow \hat{k}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \vec{H} = 0$$
$$\Rightarrow \hat{k}\,(ik)\,\vec{H} = 0$$
$$\therefore \hat{k} \cdot \vec{H} = 0$$

তড়িৎ ক্ষেত্র, চৌম্বক ক্ষেত্র এবং তাড়িতচৌম্বক ক্ষেত্রের দিক 90° হয়।
সুতরাং, ম্যাক্সওয়েলের তাড়িতচৌম্বক তরঙ্গ তির্যক তরঙ্গ।

প্রশ্ন-4: সূর্যের ব্যাসার্ধ $7\times10^{8}m$। সূর্য থেকে নির্গত শক্তির হার 3.8×10^{26} ওয়াট হলে সূর্য পৃষ্ঠে পয়েন্টিং ভেক্টরের মান নির্ণয় কর?

সমাধান

একক সময়ে পৃষ্ঠতলের একক ক্ষেত্রফলের মধ্যে দিয়ে অতিক্রান্ত ক্ষেত্র শক্তিই হলো পয়েন্টিং ভেক্টর। আমরা জানি,

$$P = \frac{U}{S}$$
$$= \frac{3.8\times10^{26}}{4\pi r^2}$$
$$= \frac{3.8\times10^{26}}{4\times3.1416\times(7\times10^{8})^2}$$
$$= 6.172\times10^{7}\ wm^{-2}$$

Ans

এখানে,
সূর্যের ব্যাসার্ধ
$r = 7\times10^{2}\ m$
এবং
নির্গত শক্তি
$U = 3.8\times10^{26}\ w$

প্রশ্ন-5: পরিবাহি মাধ্যমে তাড়িতচৌম্বক তরঙ্গের সমীকরণ প্রতিপাদন কর?

সমাধান

তরঙ্গ সমীকরণ $\vec{E}$ এর জন্য: $\nabla^2\vec{E} - \mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$ ——— (i)

উপরোক্ত সমীকরণের জন্য z-অক্ষ বরাবর তড়িচ্চুম্বকীয় তরঙ্গের সমাধান হবে,

$$\vec{E} = E_0 e^{i(kz-\omega t)} \quad \text{------ (ii)}$$

(ii) নং কে (i) নং এ ব্যবহার করে পাই,

$$\nabla^2\left[E_0 e^{i(kz-\omega t)}\right] - \mu\sigma\frac{\partial}{\partial t}\left[E_0 e^{i(kz-\omega t)}\right] - \mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[E_0 e^{i(kz-\omega t)}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[E_0 e^{i(kz-\omega t)}\right] - \mu\sigma\frac{\partial}{\partial t}\left[E_0 e^{i(kz-\omega t)}\right] - \mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[E_0 e^{i(kz-\omega t)}\right] = 0$$

$$\Rightarrow E_0 e^{i(kz-\omega t)}\cdot(ik)^2 - \mu\sigma E_0 e^{i(kz-\omega t)}\cdot(-i\omega) - \mu\varepsilon E_0 e^{i(kz-\omega t)}\cdot(-i\omega)^2 = 0$$

$$\Rightarrow E_0 e^{i(kz-\omega t)}\left[(ik)^2 - \mu\sigma(-i\omega) - \mu\varepsilon(-i\omega)^2\right] = 0$$

$$\Rightarrow \left(i^2k^2 + \mu\sigma i\omega - \mu\varepsilon i^2\omega^2\right) = 0 \quad \left[\text{যেখানে, } E_0 e^{i(kz-\omega t)} \neq 0\right]$$

$$\Rightarrow \left(-k^2 + \mu\sigma i\omega + \mu\varepsilon\omega^2\right) = 0 \quad \text{যেখানে, } i^2 = -1$$

$$\Rightarrow k^2 = \mu\sigma i\omega + \mu\varepsilon\omega^2 \quad \text{------ (3)}$$

এখানে, k হলো জটিল পরিমাপক সুতরাং

আমরা লিখতে পারি,

$$k = \alpha + i\beta \Rightarrow k^2 = (\alpha + i\beta)^2 \Rightarrow k^2 = \alpha^2 + 2\alpha i\beta + i^2\beta^2$$

$$\Rightarrow k^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha i\beta \quad \text{------ (4)}$$

(3) ও (4) নং এর বাস্তব ও অবাস্তব অংশ তুলনা করে পাই,

$$\alpha^2 - \beta^2 = \mu\varepsilon\omega^2 \quad \text{------ (5)}$$

$$2\alpha\beta = \mu\sigma\omega \quad \text{------ (6)}$$

$$\therefore \beta = \frac{\mu\sigma\omega}{2\alpha} \quad \text{------ (7)}$$

CamScanner

(7) নং হতে (ক) নং এ ব্যবহার করে পাই,

$$\alpha^2 - \left(\frac{\mu\sigma\omega}{2\alpha}\right)^2 = \mu\varepsilon\omega^2$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - \frac{\mu^2\sigma^2\omega^2}{4\alpha^2} = \mu\varepsilon\omega^2$$

$$\Rightarrow 4(\alpha^2)^2 - \mu^2\sigma^2\omega^2 = \mu\varepsilon\omega^2(4\alpha^2)$$

$$\Rightarrow 4(\alpha^2)^2 - (4\mu\varepsilon\omega^2)\alpha^2 - \mu^2\sigma^2\omega^2 = 0$$

~~ইহা~~ এই সমীকরণ সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণের $ax^2+bx+c=0$ এর অনুরূপ। যেখানে,

$$a=4,\ b=-4\mu\varepsilon\omega^2,\ c=-\mu^2\sigma^2\omega^2$$

এবং $x=\alpha^2$

$$\therefore x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = \frac{-(-4\mu\varepsilon\omega^2)\pm\sqrt{(-4\mu\varepsilon\omega^2)^2-4.(4)(-\mu^2\sigma^2\omega^2)}}{2.4}$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = \frac{4\mu\varepsilon\omega^2\pm\sqrt{16\mu^2\varepsilon^2\omega^4+16\mu^2\sigma^2\omega^2}}{8}$$

$$= \frac{4\mu\varepsilon\omega^2\pm 4\mu\omega\sqrt{\omega^2\varepsilon^2+\sigma^2}}{8}$$

$$= \frac{4\mu\varepsilon\omega^2\pm 4\mu\omega\sqrt{\omega^2\varepsilon^2\left(1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}\right)}}{8}$$

$$= \frac{4\mu\varepsilon\omega^2\pm 4\mu\omega^2\varepsilon\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}}{8}$$

$$= \frac{4\mu\varepsilon\omega^2\left[1\pm\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}\right]}{8}$$

$$\Rightarrow \alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[1\pm\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}\right]^{1/2} \quad \text{——— (8)}$$

অনুরূপভাবে, $\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}}\left[-1 \pm \sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}}\right]$ ———— (9)

এখন, $\vec{E} = E_0 e^{i(kz-\omega t)}$

$$= E_0 e^{i[(\alpha+i\beta)z-\omega t]}$$

$$= E_0 e^{i\alpha z + i^2\beta z - i\omega t}$$

$$= E_0 e^{i\alpha z - \beta z - i\omega t}$$

$$= E_0 e^{-\beta z} \cdot e^{i(\alpha z-\omega t)}$$

$$= \frac{E_0 e^{i(\alpha z-\omega t)}}{e^{\beta z}} \quad \text{———— (10)}$$

উপরোক্ত সমীকরণ হতে দেখা যায় যে তড়িৎচৌম্বক তরঙ্গের বাঁধ ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ পরিবাহি মাধ্যমে ব্যাখ্যা করা যায়। ধরি, $\beta = \frac{1}{z}$ সুতরাং $\beta z = 1$

যে গভীরতায় তরঙ্গের শক্তি মূল শক্তির $\frac{1}{e}$ অংশে হ্রাস পায় তাকে ভেদন গভীরতা বা স্কিন গভীরতা বলে। একে δ দিয়ে প্রকাশ করা হয়। আমরা জানি,

$$\delta = \frac{1}{\beta}$$

$$\vec{E}(z) = \frac{E_0 e^{i(\alpha z-\omega t)}}{e^{\beta z}}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_z = \frac{\vec{E}}{e}$$

এখানে, β এর মান বসিয়ে পাই,

$$\delta = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2}{\mu\epsilon}}\left[-1 \pm \sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2}\right]^{-1/2}$$

~~[illegible]~~ এর জন্য, good conductors

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$$

সুতরাং,

$$\delta = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2}{\mu\epsilon}} \cdot \left[-1 \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2}\right]^{-1/2}$$

$$\Rightarrow \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\omega^2\varepsilon}} \cdot \left[-1 \pm \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)\right]^{-1/2}$$

$$\Rightarrow \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\omega^2\varepsilon}} \cdot \left[\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right]^{-1/2}$$

$$\Rightarrow \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\omega^2\varepsilon} \times \frac{\omega\varepsilon}{\sigma}}$$

$$\therefore \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}}$$

ইহা দ্বারা ভেদনের গভীরতার রাশিমালা এই পর্যন্ত পাওয়া যায়।

আবার, আমরা জানি

দশাবেগ $v = \frac{\omega}{\alpha}$

$$= \frac{\omega}{\omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}} \cdot \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}\right]^{1/2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\mu\varepsilon}} \cdot \left[1 \pm \sqrt{1 \pm \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}\right]^{-1/2}$$

Good conductor এর ক্ষেত্রে

$$\therefore \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} >> 1 \text{ তাহলে,}$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{\mu\varepsilon}} \left(\frac{\omega\varepsilon}{\sigma}\right)^{1/2}$$

$$\therefore v = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}$$

আবার, প্রতিসরাঙ্ক $n = \frac{c}{v}$

$$= \frac{c}{\sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}}$$

$$\therefore n = c\sqrt{\frac{\mu\sigma}{2\omega}}$$

Qn-6 :- অপরিবাহি মাধ্যমে তড়িৎচৌম্বক তরঙ্গের সমীকরণ ব্যাখ্যা কর?

<u>সমাধান</u>

অপরিবাহী বিশুদ্ধ-সমদৈশিক মাধ্যমের জন্য প্রবাহ ঘনত্ব $J = \sigma E = 0$ হবে। আবার এরূপ মাধ্যম দিক নিরপেক্ষ হবে যদি চার্জের আয়তনিক বণ্টন শূন্য হয়, অর্থাৎ $\rho = 0$। কাজেই $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ এবং $\vec{B} = \mu\vec{H}$ বিবেচনা করে সমদৈশিক মাধ্যমের জন্য ম্যাক্সওয়েলের চারটি সমীকরণ গুলোকে নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায়,

$$\cancel{\nabla\times\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}} \quad \nabla\cdot\vec{D} = 0 \Rightarrow \nabla\cdot\varepsilon\vec{E} = 0 \quad \therefore \nabla\cdot\vec{E} = 0 \quad \text{--- (i)}$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0 \Rightarrow \nabla\cdot\mu\vec{H} = 0 \quad \therefore \nabla\cdot\vec{H} = 0 \quad \text{--- (2)}$$

$$\nabla\times\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \nabla\times\vec{H} = \varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{--- (3)}$$

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu\vec{H}) = -\mu\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \text{--- (4)}$$

(3) নং সমীকরণের উভয় পাশের কার্ল নিয়ে পাই,

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{H}) = \nabla\times\varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \nabla(\nabla\cdot\vec{H}) - (\nabla\cdot\nabla)\vec{H} = \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{E}) \quad \text{--- (5)}$$

সমীকরণ (1) ও (4) থেকে (5) নং এ ব্যবহার করে পাই,

$$0 - \nabla^2\vec{H} = \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left[-\frac{\partial}{\partial t}(\mu\vec{H})\right]$$

$$\Rightarrow -\nabla^2\vec{H} = -\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \nabla^2\vec{H} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{H} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad \left[\text{যেখানে, } v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \text{ ধ্রুবক}\right]$$

সুতরাং, $v^2 = \frac{1}{\mu\epsilon} \Rightarrow \mu\epsilon = \frac{1}{v^2}$

তদ্রুপ এক্ষেত্রে $\vec{E}$ এর জন্য প্রমাণ করা যাবে.

(5) নং সমীকরণের কার্ল নিয়ে পাই,

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \times \left(-\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right)$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{E}) - (\nabla \cdot \nabla)\vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{H}) \quad \text{---(6)}$$

(i) ও (iii) নং সমীকরণদ্বয়ে (6) নং এ ব্যবহার করে পাই,

$$0 - \nabla^2 \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t}\left[\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right]$$

$$\Rightarrow -\nabla^2 \vec{E} = -\mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \left[v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}\right]$$

এখন ধরা যাক, তড়িৎচৌম্বক তরঙ্গ z অক্ষের দিকে প্রবাহমান

সুতরাং, $\vec{\nabla} = \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$ ---(7)

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{---(8)}$$

তাহলে, $\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$ ---(9)

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{——— (10)}$$

সমীকরণ (9) ও (10) নং এর সমাধান হবে,

$$\vec{H} = H_0 e^{i(kz - \omega t)} \quad \text{——— (11)}$$

$$\vec{E} = E_0 e^{i(kz - \omega t)} \quad \text{——— (12)}$$

যেখানে, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

(12) নং হতে z এর সাপেক্ষে ব্যবকলন করে পাই,

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = E_0 e^{i(kz-\omega t)} \cdot (ik)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = (ik) \vec{E}$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial z} = ik \quad \text{——— (13)}$$

আবার,

(12) নং হতে t এর সাপেক্ষে ব্যবকলন করে পাই,

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = E_0 e^{i(kz-\omega t)} \cdot (-i\omega)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = -i\omega \quad \text{——— (14)}$$

$\vec{E}$ ও $\vec{H}$ ভেক্টর পরস্পর লম্ব: এখানে,

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\hat{k} \cdot \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \vec{E} = 0$$

$$\Rightarrow \hat{k} (ik) \cdot \vec{E} = 0$$

$$\Rightarrow \hat{k} \cdot \vec{E} = 0$$

অর্থাৎ, k ও E ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব। আবার z-অক্ষ অর্থাৎ তরঙ্গ প্রবাহের দিক নির্দেশক ভেক্টর হলো $\hat{k}$ অনুদিকে, z-অক্ষের

দিকে $\vec{E}$- ভেক্টরের কোন উপাংশ নেই। সুতরাং $E_z = 0$ ।

অনুরূপভাবে, $\vec{E} = E_x\hat{i}$ অথবা, $\vec{E} = E_y\hat{j}$

সুতরাং, $\nabla\cdot\vec{H} = 0$

$$\Rightarrow \hat{k}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\vec{H} = 0$$

$$\Rightarrow \hat{k}(ik)\cdot\vec{H} = 0$$

$$\Rightarrow \hat{k}\cdot\vec{H} = 0$$

$$\therefore H_z = 0$$

$$\therefore \vec{H} = H_x\hat{i} \text{ অথবা, } \vec{H} = H_y\hat{j}$$

মাধ্যমের অন্তর্জাত প্রতিরোধ:

ধরি, $\vec{E} = E_x\hat{i}$ এবং $\vec{H} = H_y\hat{j}$

অন্তর্জাত প্রতিরোধ: $\dfrac{E_x}{H_y} = \dfrac{\omega\mu}{k}$ —— (15)

আমরা জানি, $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

$$\Rightarrow k = \frac{2\pi f}{v} \Rightarrow k = \frac{\omega}{v}$$

$$\Rightarrow k = \frac{\omega}{\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}} \Rightarrow k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \text{ —— (16)}$$

(16) নং থেকে (15) নং এ ব্যবহার করে পাই,

$$\frac{E_x}{H_y} = \frac{\omega\mu}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} \Rightarrow \frac{E_x}{H_y} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

তড়িচ্চৌম্বক তরঙ্গের বেগঃ

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

$$\Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{(\mu_r\mu_0)\epsilon_r\epsilon_0}}$$

$$\Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}}$$

$$\therefore v = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}}$$

$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \Rightarrow \epsilon = \epsilon_r\epsilon_0$

$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \Rightarrow \mu = \mu_r\mu_0$

যেখানে, $\mu_r > 1$, $\epsilon_r > 1$

সুতরাং

$v < c$ হবে।

অপরিবাহি মাধ্যমে প্রতিসরাঙ্কঃ-

$$n = \frac{c}{v} \Rightarrow n = \frac{c}{\frac{c}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}}} = \sqrt{\mu_r\epsilon_r}$$

$$\therefore n = \sqrt{\mu_r\epsilon_r}$$

কিন্তু অপরিবাহি এর জন্য $\mu_r = 1$

তাহলে, $n = \sqrt{\epsilon_r}$

$\Rightarrow n^2 = \epsilon_r$ হয়।

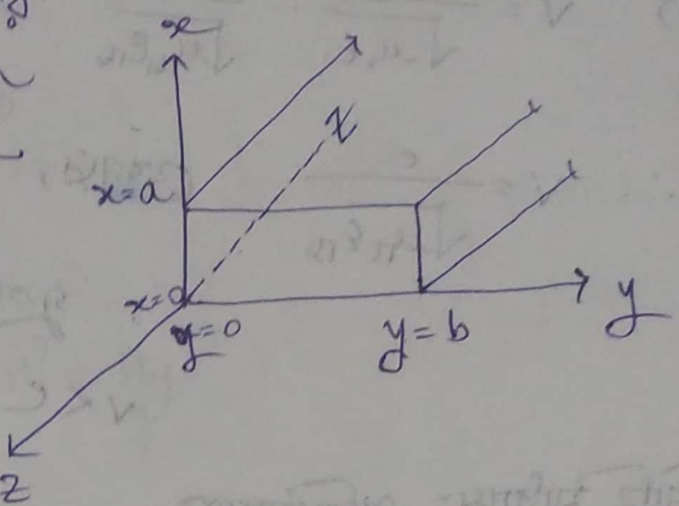
1

chapter-5

প্রশ্ন-১: আয়তাকার তরঙ্গবাহক কি? আয়তাকার তরঙ্গ বাহকের ক্ষেত্রে তরঙ্গ সমীকরণের সমাধান কর?

সমাধান

আয়তাকার তরঙ্গবাহক: তরঙ্গবাহকের জন্য নির্বাচিত ধাতব নলের প্রস্থচ্ছেদ আয়তাকার হলে তাকে আয়তাকার তরঙ্গবাহক বলে।



প্রতিপাদন:- ধরি, এর বাহু-দ্বয়ের দৈর্ঘ্য a ও b এবং তরঙ্গ z অক্ষ বরাবর গমন করছে। আয়তাকার তরঙ্গবাহকে TE তরঙ্গের ক্ষেত্রে আমরা, $E_z(x,y)=0$ এবং $H_z(x,y)\neq 0$

এখন, $H_z(x,y)$ এর জন্য তরঙ্গ সমীকরণ হলো,

$$\nabla^2 \vec{H_z} = -\omega^2\mu\varepsilon H_z$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \vec{H_z}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \vec{H_z}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \vec{H_z}}{\partial z^2} = -\omega^2\mu\varepsilon\vec{H_z}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \vec{H_z}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \vec{H_z}}{\partial y^2}+\gamma^2\vec{H_z} = -\omega^2\mu\varepsilon\vec{H_z}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2}+\gamma^2 H_z+\omega^2\mu\varepsilon\vec{H_z} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2}+(\gamma^2+\omega^2\mu\varepsilon)H_z = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2}+h^2 H_z = 0 \quad \cdots (1)$$

$\left[\because h^2=\gamma^2+\omega^2\mu\varepsilon\right]$

ধরি, $H_2 = XY$ ——— (2) যেখানে, $X(x)$ এবং $Y(y)$
এবং $H_2(x,y)$

(2) নং এর মান (1) নং সমীকরণে ব্যবহার করে পাই

$$\frac{d^2(XY)}{dx^2} + \frac{d^2(XY)}{dy^2} + h^2XY = 0$$

$$\text{বা, } Y\frac{d^2X}{dx^2} + X\frac{d^2Y}{dy^2} + h^2XY = 0$$

$$\text{বা, } \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + h^2 = 0 \quad [XY \text{ দ্বারা ভাগ করে}]$$

$$\text{বা, } \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + h^2 = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}$$

সমীকরণটির বামপার্শ্বে x নির্ভর এবং ডানপার্শ্বে y নির্ভর। কাজেই এটি স্বতঃ ~~[illegible]~~ সিদ্ধ হবে যদি উভয়পার্শ্বে কোন ধ্রুবকের সমান হয়। ধ্রুবকটিকে A^2 ধরে পাই,

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + h^2 = -\frac{1}{Y}\cdot\frac{d^2Y}{dy^2} = A^2 \qquad (3)$$

$$\text{সুতরাং, } \frac{1}{X}\cdot\frac{d^2X}{dx^2} + h^2 = A^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{X}\cdot\frac{d^2X}{dx^2} + h^2 - A^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{X}\cdot\frac{d^2X}{dx^2} + B^2 = 0 \quad [\text{যেখানে, } h^2 - A^2 = B^2]$$

$$\Rightarrow \frac{d^2X}{dx^2} + B^2X = 0 \quad [X \text{ দ্বারা গুণ করে}]$$

এটি একটি 2^{nd} অর্ডার হোমোজেনিয়াস সমীকরণ। এর সাধারণ সমাধান,

$$X = c_1 \cos Bx + c_2 \sin Bx$$

অনুরূপভাবে, $-\frac{1}{Y} \cdot \frac{d^2Y}{dy^2} = A^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{Y} \cdot \frac{d^2Y}{dy^2} + A^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2Y}{dy^2} + A^2Y = 0 \quad \boxed{Y \text{ দ্বারা গুণ করে}}$$

$$\therefore Y = c_3 \cos Ay + c_4 \sin y \longrightarrow (5)$$

(2) নং সমীকরণে মান বসিয়ে পাই,

$$H_z = (c_1 \cos Bx + c_2 \sin Bx)(c_3 \cos Ay + c_4 \sin Ay)$$

$$\Rightarrow H_z = c_1 c_3 \cos Bx \cos Ay + c_1 c_4 \cos Bx \sin Ay + c_2 c_3 \sin Bx \cos Ay + c_2 c_4 \sin Bx \sin Ay \longrightarrow (6)$$

এটিই হলো H_z এর সাধারণ সমাধান।

সীমান্তিক শর্ত মতে,

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dX}{dx} = 0 \text{ যখন } x = 0 \text{ এবং } x = a \\ \frac{dY}{dy} = 0 \quad " \quad y = 0 \text{ এবং } y = b \end{array}\right\} \longrightarrow (7)$$

~~$X = c_1 \cos Bx + c_2 \sin Bx$~~

(4) নং কে ব্যবকলন করে পাই, $\frac{dX}{dx} = -c_1 B \sin Bx + c_2 B \cos Bx$

যখন $x = 0$ তখন $c_2 B = 0$ এবং $c_2 = 0$ কারণ $B \neq 0$

যখন $x = a$ তখন $-c_1 B \sin Bx = 0$

কিন্তু $c_1 \neq 0$ অতএব, $-\sin B x = 0$

$$\Rightarrow \sin B x = 0$$

$$\Rightarrow \sin B x = \sin l\pi \quad (l = 0, 1, 2, 3 - - - -)$$

$$\Rightarrow Ba = l\pi$$

$$\therefore B = \frac{l\pi}{a}$$

$$\therefore X = c_1 \cos \frac{l\pi}{a} x \text{ ———— } (8)$$

আবার, (5) নং সমীকরণে ব্যবহার করে পাই,

$$\frac{dY}{dy} = -c_3 A \sin Ay + c_4 A \cos Ay$$

যখন $y = 0$ তখন, $c_4 A = 0$ এবং $c_4 = 0$

যখন $y = b$ তখন $-c_3 A \sin Ab = 0$

$$\Rightarrow \sin Ab = \sin l'\pi$$

$$\therefore A = \frac{l'\pi}{b}$$

$$\therefore Y = c_3 \cos \frac{l'\pi}{b} y \text{ ———— } (9)$$

(6) নং সমীকরণ হতে চূড়ান্ত সমাধান দাঁড়ায়,

$$H_z = c_1 c_3 \cos \frac{l\pi x}{a} \cos \frac{l'\pi}{a} y \text{ ———— } (10)$$

$$\Rightarrow H_z = H_0 \cos \frac{l\pi x}{a} \cos \frac{l'\pi}{a} y$$

এখানে, l ও l' দুটি প্যারামিটার। তাই এদের মানের উপর সেটি তরঙ্গের বাহকের মোডের সংজ্ঞায়িত করে। তাই TE তরঙ্গের ll' মোড বলা হয়।

ছেদন কম্পাঙ্ক ও তরঙ্গদৈর্ঘ্যঃ আমরা জানি,

$$k^2 - A^2 = B^2$$

$$\Rightarrow k^2 = A^2 + B^2$$

$$= \left(\frac{l\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{l'\pi}{b}\right)^2$$

$$= \frac{l^2\pi^2}{a^2} + \frac{l'^2\pi^2}{b^2}$$

$$= \pi^2\left[\frac{l^2}{a^2} + \frac{l'^2}{b^2}\right]$$

$$\therefore k = \pi\left[\frac{l^2}{a^2} + \frac{l'^2}{b^2}\right]^{1/2}$$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ সম্পর্ক অনুসারে ছেদন তরঙ্গদৈর্ঘ্যের জন্য পাই,

$$\left(\frac{1}{\lambda}\right)_{ll'} = \frac{k}{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\pi\left[\frac{l^2}{a^2} + \frac{l'^2}{b^2}\right]^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{l^2}{a^2} + \frac{l'^2}{b^2}\right]^{1/2}$$

এবং, $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = kc$

$$(\omega)_{ll'} = \pi c\left[\frac{l^2}{a^2} + \frac{l'^2}{b^2}\right]^{1/2}$$

Ans

প্রশ্ন-২ঃ একটি ফাঁপা আয়তাকার তরঙ্গবাহকের জন্য $a = 6\,cm$ এবং $b = 4\,cm$ প্রযুক্ত সিগন্যালের কম্পাঙ্ক 3 GHz। TE_{10} মোডে নির্ণয় কর।
(i) ছেদন তরঙ্গদৈর্ঘ্য (ii) বাহক তরঙ্গদৈর্ঘ্য (iii) দশা ধ্রুবক (iv) দশাবেগ (v) গুচ্ছবেগ

সমাধান

(i) TE_{10} মোডের জন্য ছেদন তরঙ্গদৈর্ঘ্যঃ-

$$(\lambda_c)_{10} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \left(\frac{0}{b}\right)^2}}$$

$$= 2a$$
$$= 2 \times 6\,cm$$
$$= 12\,cm \quad \text{Ans}$$

(ii) বাহক তরঙ্গদৈর্ঘ্য $\lambda_g = \dfrac{\lambda_0}{\sqrt{1 - (\lambda_0/\lambda_c)^2}}$

এখন, $\lambda_0 = \dfrac{c}{f} = \dfrac{3 \times 10^{10}}{3 \times 10^{9}} = 10\,cm$

অতএব, $\lambda_g = \dfrac{10}{\sqrt{1 - \left(\frac{10}{12}\right)^2}}$

$$= 18.2\,cm \quad \text{Ans}$$

(iii) দশা ধ্রুবক $k_g = \dfrac{2\pi}{\lambda_g} = \dfrac{2 \times 3.14}{18.2}$

$$= 0.345\,cm^{-1} \quad \text{Ans}$$

(iv) দশা বেগ $v_p = \dfrac{c}{\sqrt{1 - (\lambda_0/\lambda_c)^2}} = \dfrac{3 \times 10^{10}\,cm}{\sqrt{1 - \left(\frac{10}{12}\right)^2}\,sec}$

$$= 5.5 \times 10^{10}\,cm/sec \quad \text{Ans}$$

CS CamScanner

(v) সুতরাং $v_g = c\sqrt{1-(\lambda_0/\lambda_c)^2}$

$$= 3\times10^{10}\sqrt{1-(10/12)^2}$$

$$= 1.22\times10^{10}\ \text{cm/sec}$$ Ans

Qn-3: ফাঁপা আয়তাকার তরঙ্গবাহক তৈরিতে সাধারণত কোন ধরনের উপাদান ব্যবহৃত হয়? কেন?

সমাধান

ফাঁপা আয়তাকার তরঙ্গবাহক তৈরিতে সাধারণত ধাতব উপাদান ব্যবহার করা হয়। এর প্রধান কারণ হলো তরঙ্গ বাহনটি বিদ্যুতিক সংকেত বা মাইক্রোওয়েভ তরঙ্গ পরিবহনের জন্য উচ্চ কার্যক্ষমতা নিশ্চিত করে।

ব্যবহৃত সাধারণ উপাদানসমূহ:

১. তামা: তামা উচ্চতর তড়িৎ পরিবাহিতা সম্পন্ন, যা তাপ এবং বিদ্যুতিক ক্ষতি কমাতে সহায়ক। এটি ক্ষয়রোধ প্রতিরোধী এবং প্রয়োজনীয় যান্ত্রিক দৃঢ়তা প্রদান করে।

২. অ্যালুমিনিয়াম: হালকা ওজন এবং যথেষ্ট তড়িৎ পরিবাহিতা রয়েছে। ক্ষয়রোধ থেকে রক্ষা পেতে এর উপর সাধারণত অক্সাইড লেয়ার যা বিশেষ আবরণ ব্যবহার করা হয়।

৩. পিতল: তামার তুলনায় কম ব্যয়বহুল এবং শক্তিশালী। তড়িৎ পরিবাহিতার দিক থেকে কিছুটা কম কার্যকর হলেও নির্দিষ্ট ক্ষেত্রে এটি ব্যবহার উপযোগি।

৪. স্টেইনলেস স্টিল: যেখানে যান্ত্রিক স্থায়িত্ব এবং ক্ষয়রোধ প্রতিরোধের বেশি প্রয়োজন, সেখানে এটি ব্যবহৃত হয়। এটির তড়িৎ পরিবাহিতা

CS CamScanner

তুলনামূলক কম, তবে কিছু নির্দিষ্ট পরিবেশে প্রতি কার্যকর।

কেন ধাতব উপাদান ব্যবহার করা হয়:-

তরঙ্গ বাহনের ভেতরের দেয়াল তরঙ্গ প্রতিফলিত করে তরঙ্গের ক্ষয় রোধ করে। ধাতু এতে কার্যকর। মাইক্রোওয়েভ তরঙ্গ পরিবহনের সময় তাপ উৎপন্ন হয়, যা ধাতু সহজে সহ্য করতে পারে। ধাতু দীর্ঘস্থায়ী এবং বিভিন্ন পরিবেশগত অবস্থার সাথে মানিয়ে নিতে সক্ষম।

এজন্য ফাঁপা আয়তাকার তরঙ্গ বাহন তৈরিতে ধাতব উপাদানই আদর্শ।

প্র:৫: ভিতরের উচ্চতা এবং প্রশস্ততা b বিশিষ্ট একটি ফাঁপা আয়তনের তরঙ্গ বাহকের জন্য অনুপ্রস্থ চৌম্বক (TM) মোডের প্রকৃতি নিয়ে কাজ করো। বিশেষত, অনুদৈর্ঘ্য বৈদ্যুতিক ক্ষেত্র, চৌম্বকীয় কাট-অফ কম্পাঙ্ক এবং দশা ও গ্রুপ গতি দূর কর ?

সমাধান

অনুদৈর্ঘ্য বৈদ্যুতিক ক্ষেত্র নির্ণয়: আমরা জানি,

$$\vec{E}_{(t)}(x,y) = -\frac{j\omega\mu}{(\omega^2\mu\epsilon-k^2)} \cdot \hat{m} \times \nabla_t H_z(x,y)$$

$$= -\frac{j\omega\mu}{(\omega^2\mu\epsilon-k^2)}\, \hat{m} \times \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j}\right) H_0 \cos\frac{l\pi x}{a}\cos\frac{l'\pi y}{b}$$

$$= -\frac{j\omega\mu}{(\omega^2\mu\epsilon-k^2)} \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{j} - \frac{\partial}{\partial y}\hat{i}\right) H_0 \cos\frac{l\pi x}{a}\cos\frac{l'\pi y}{b}$$

$$= -\frac{j\omega\mu H_0}{(\omega^2\mu\epsilon-k^2)} \left[\hat{i}\frac{l'\pi}{b}\cos\frac{l\pi x}{a}\sin\frac{l'\pi y}{b} - \hat{j}\frac{l\pi}{a}\sin\frac{l\pi x}{a}\cos\frac{l'\pi y}{b}\right]$$

এ সমীকরণ হতে সহজেই $E_x(x,y)$ এবং $E_y(x,y)$ নির্ণয় করা যায়।

ছেদন কম্পাঙ্ক ও তরঙ্গদৈর্ঘ্য:- আমরা জানি,

$$B^2 = k'^2 - A^2$$

$$\text{বা, } k'^2 = B^2 + A^2$$

$$= \left(\frac{l\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{l'\pi}{b}\right)^2$$

$$= \pi^2\left[\frac{l^2}{a^2} + \frac{l'^2}{b^2}\right] \quad \text{--- (i)}$$

এখানে, l ও l' অচল মোডকে নির্দেশ করে। এখন $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ সমাধানকে অনুসারে (i) নং হতে পাই,

$$\Rightarrow \left(\frac{2\pi}{\lambda_c}\right)^2_{ll'} = \pi^2\left[\frac{l^2}{a^2} + \frac{l'^2}{b^2}\right]$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{\lambda_c}\right)^2_{ll'} = \frac{\pi^2}{4\pi^2}\left[\frac{l^2}{a^2} + \frac{l'^2}{b^2}\right]$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{\lambda_c}\right)_{ll'} = \frac{1}{2}\left[\frac{l^2}{a^2} + \frac{l'^2}{b^2}\right]^{1/2} \quad \text{--- (ii)}$$

আবার আমরা জানি, $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ তাহলে (ii) নং হতে পাই,

$$\Rightarrow \left(\frac{2\pi c}{\lambda_c}\right)_{ll'} = \pi c\left[\frac{l^2}{a^2} + \frac{l'^2}{b^2}\right]^{1/2}$$

$$\Rightarrow (\omega_c)_{ll'} = \pi c\left[\frac{l^2}{a^2} + \frac{l'^2}{b^2}\right]^{1/2} \quad \text{Ans}$$

দশাবেগ: তরঙ্গের দশাবেগ,

$$V_p = \frac{\omega}{k}$$

আবার আমরা জানি, $k_0 = \frac{\omega}{c}$ বসিয়ে পাই,

$$V_p = \frac{k_0 c}{k} = \frac{c k_0}{\sqrt{k_0^2 - k'^2}}$$

$$= \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{k'}{k_0}\right)^2}}$$

যেহেতু $k^2 = k_0^2 - k'^2$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ সম্পর্ক অনুসরণ করে পাই,

$$V_p = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2}}$$, এটাই দশাবেগের রাশিমালা।

গুচ্ছবেগ:- এখন তরঙ্গপ্রবাহকের অক্ষ বরাবর শক্তি প্রবাহের বেগকে গুচ্ছ বেগ বলে। গুচ্ছ বেগের সংজ্ঞানুসারে,

$$V_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}\left[c\left(k^2 - k'^2\right)^{1/2}\right] = \frac{1}{2}c\left(k^2 - k'^2\right)^{-1/2} \cdot 2k$$

$$= \frac{c}{\left[1 - \left(\frac{k'}{k}\right)^2\right]^{1/2}} = \frac{c}{\left[1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2\right]^{1/2}}$$

এটাই হলো গুচ্ছবেগের রাশিমালা।

chapter - 6

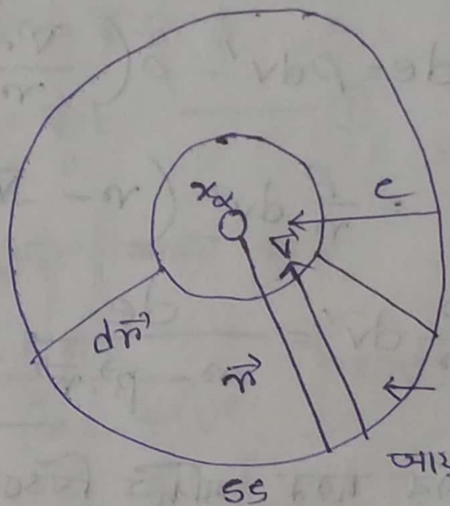
Qn-1 :- লিনার্ড-উইচার্ট বিভব বলতে কি বুঝ? উহাদের ভৌত তাৎপর্য ব্যাখ্যা কর?

সমাধান

লিনার্ড ও উইয়েচার্ট সর্বপ্রথম গতিশীল আয়নিত চার্জ এবং তড়িৎচৌম্বক সংকেত বাহকের আপেক্ষিক বেগ বিবেচনা করে মন্দিত বিভবকে আপেক্ষিক তত্ত্বীয় বিভবে রূপান্তরিত করেন। তাই আপেক্ষিক তত্ত্বীয় মন্দিত বিভবকে লিনার্ড ও উইয়েচার্ট বিভব বলা হয়।

প্রকৃতপক্ষে লিনার্ড-উইয়েচার্ট মন্দিত বিভবকে আপেক্ষিক তত্ত্বীয় রূপে রূপান্তরের জন্য নিম্নরূপ পদ্ধতি অনুসরণ করেন:-

একটি গোলীয় তল বিবেচনা করি যা মুক্তস্থানে তড়িৎচৌম্বক তরঙ্গের বেগে (c) কেন্দ্রবিন্দু x_0 তে বিলুপ্ত হয়। ধরা যাক বিবেচ্য গোলীয় তল কর্তৃক অধিকৃত আয়তন উপাদান $dv' = ds\,dr$



উক্ত চার্জের আয়তনিক উপাদান dv',

যেখানে,

ds = গোলীয় তলের ক্ষেত্র উপাদান

dr = ($dt = \frac{dr}{c}$) সময়ে গোলক কর্তৃক অতিক্রান্ত অরীয় দূরত্ব।

আয়তনিক চার্জের বেগ v' হলে r' এর দিকে বেগের উপাংশ হবে

$= \left(\frac{\vec{v}'\cdot\vec{r}'}{r}\right)$ এবং তাই বিলুপ্তি গোলক আয়তনিক চার্জের সাথে অধিক্ষন বিরাজ করে।

এর ফলে বিলুপ্তি গোলক ক্ষেত্রে x_α তে অতিরিক্ত তথ্য বহন করবে। চার্জের আয়তনিক ঘনত্ব ρ হলে বিলুপ্তি গোলকের দরুন ক্ষেত্র x_α তে বাহিত চার্জ:

$$= \rho \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{r}}{r}\right) dt\, ds$$

$$= \rho \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{r}}{rc}\right) ds\, dr \quad \left[dt = \frac{dr}{c}\right]$$

$$= \rho \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{r}}{rc}\right) dv' \text{ ——— (i)}$$

সুতরাং, dv' আয়তনে নিট চার্জ উপাদান de হবে, dv' আয়তনের মোট চার্জ এবং অপসারিত মাত্রের দরুন ক্ষেত্রবিন্দু x_α তে বাহিত চার্জের বিয়োগফল; অর্থাৎ,

$$de = \rho dv' - \rho\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{r}}{rc}\right) dv'$$

$$= \frac{\rho}{r} dv' \left(r - \frac{\vec{v}\cdot\vec{r}}{c}\right)$$

$$\text{বা, } \frac{\rho}{r} dv' = \frac{de}{r - \vec{\beta}\cdot\vec{r}} \quad \left[\text{যেখানে, } \vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}\right] \text{ ——— (ii)}$$

আয়তনিক চার্জের দরুন মন্দিত বিভব হবে,

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\rho}{r} \vec{v}\, dv'$$

$$\text{এবং } \phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int \frac{\rho}{r} \cdot dv' \text{ ——— (iii)}$$

সমীকরণ (ii) নং এর মান সমীকরণ (iii) এ বসিয়ে পাই,

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c}\int \frac{\vec{\beta}\, de}{r - \vec{\beta}\cdot\vec{r}} \quad \left[\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}\right]$$

এবং $$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{de}{r - \vec{\beta}\cdot\vec{r}} \qquad \text{—— (iv)}$$

(iv) নং সমীকরণদ্বয়কে আধার কণাদের লিনার্ড- উইয়েচার্ট বিভব বলা হয়।

প্রশ্ন-২: ধ্রুব বেগে চলমান বিন্দু আধানের জন্য বিভবগুলো বের কর?

সমাধান:

মনে করি, কোন একটি বস্তুকণা $t=0$ কি সময়ে মূলবিন্দু থেকে ধ্রুববেগে যাত্রা শুরু করল। তাহলে,

$$\vec{w}(t) = 0 + \vec{v}t$$

$$\Rightarrow w(t) = \vec{v}t \qquad \text{—— (i)}$$

আবার, লিনার্ড- উইয়েচার্ট বিভব থেকে আমরা জানি,

$$V(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{qc}{(rc - \vec{r}\cdot\vec{v})} \quad \left[\text{যেখানে, } e = q\right]$$

—— (ii)

আমরা জানি,

$(rc - \vec{r}\cdot\vec{v})$ এখানে, t_r ব্যবহার করে পাই,

$$|\vec{r} - \vec{v}t_r| = c(t - t_r)$$

$$\Rightarrow r^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{v}t_r + v^2t_r^2 = c^2(t^2 - 2tt_r + t_r^2)$$

$$\Rightarrow (v^2 - c^2)t_r^2 + 2(c^2t - \vec{r}\cdot\vec{v})t_r + (r^2 - c^2t^2) = 0 \qquad \text{—— (iii)}$$

CamScanner

(ii) নং থেকে সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণের সাথে তুলনা করলে,

$$t_r = \frac{-\{-2(c^2t - \vec{r}.\vec{v})\} \pm \sqrt{4(c^2t - \vec{r}.\vec{v})^2 - 4(v^2-c^2)(r^2-c^2t^2)}}{2(v^2-c^2)}$$

$$\Rightarrow t_r = \frac{(c^2t - \vec{r}.\vec{v}) \pm \sqrt{(c^2t - \vec{r}.\vec{v})^2 - (v^2-c^2)(r^2-c^2t^2)}}{(c^2-v^2)}$$

এখানে, $\vec{v} = 0$ এর জন্য,

$$t_r = \frac{c^2t \pm \sqrt{c^4t^2 + c^2r^2 - c^4t^2}}{c^2}$$

$$= \frac{c^2t \pm cr}{c^2}$$

$$\therefore t_r = t \pm \frac{r}{c}$$

এখন, $r = c(t-t_r)$ এবং $\hat{r} = \frac{\vec{r} - vt_r}{c(t-t_r)}$

$$\therefore r\left(1 - \hat{r}.\frac{\vec{v}}{c}\right) = c(t-t_r)\left[1 - \frac{\vec{v}}{c}.\frac{(\vec{r} - vt_r)}{c(t-t_r)}\right]$$

$$= c(t-t_r) - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c} - \frac{v^2}{c}t_r$$

$$= \frac{1}{c}\left[c^2t - \vec{r}.\vec{v}) - (c^2-v^2)t_r\right]$$

$$-(v^2-c^2)(r^2-c^2t^2)$$

$$= \frac{1}{c}\left[(c^2t - \vec{r}.\vec{v}) - (\cancel{c^2-v^2})\left(\frac{(c^2t - \vec{r}.\vec{v}) \pm \sqrt{(c^2t - \vec{r}.\vec{v})^2}}{\cancel{c^2-v^2}}\right)\right]$$

$$\therefore r\left(1 - \hat{r}.\frac{\vec{v}}{c}\right) = \frac{1}{c}\sqrt{(c^2t - \vec{r}.\vec{v})^2 + (c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}$$

CamScanner

সুতরাং ~~[illegible]~~ বিন্দু চার্জের দরুন তড়িৎ বিভব হবে,

$$V(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qc}{\sqrt{(c^2t - \vec{r}\cdot\vec{v})^2 + (c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}}$$

এবং

$$A(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{qc\vec{v}}{\sqrt{(c^2t - \vec{r}\cdot\vec{v})^2 + (c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}}$$ Ans

Qn-3: একটি স্পন্দনরত তড়িৎ দ্বিপোলের জন্য ভেক্টর বিভব ও স্কেলার বিভবের রাশি নির্ণয় কর?

সমাধান

ভেক্টর বিভব: আমরা জানি, মন্দিত চৌম্বক ভেক্টর বিভব হলো

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \left[\frac{\vec{J}}{r}\right] dv' \quad \text{——— (i)}$$

আবার, যেকোন সময়ের সাথে দ্বিপোল ভ্রামকের পরিবর্তন

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(Q\,d\vec{l}) = \frac{dQ}{dt}\,d\vec{l} = I\,d\vec{l} \quad \text{——— (ii)}$$

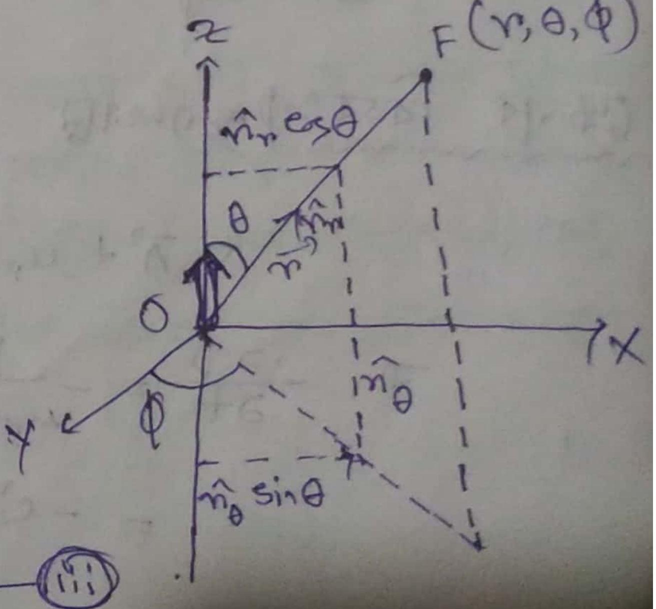
অর্থাৎ, $\int \vec{J}\,dv' = I\,d\vec{l}$ হলে,

(ii) নং ব্যবহার করে পাই,

$$\int \vec{J}\,dv' = \dot{p}$$

তাহলে (i) নং হতে পাই,

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r}\cdot[\dot{p}] \quad \text{——— (iii)}$$



(iii) নং সমীকরণ হতে দেখা যায় যে,

ভেক্টর বিভব $\vec{A}$, $\hat{n}$ এর সমানুপাতিক এবং অর্থাৎ দোলকের অক্ষের সমান্তরাল

কাজেই দোলকের অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর $\hat{n}$ হলে (iii) নং কে লিখা যায়,

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \cdot [\dot{p}]\, \hat{n} \longrightarrow \text{(iv)}$$

যদি অভিলম্ব একক ভেক্টরের অরীয় এবং কৌণিক উপাংশ যথাক্রমে $\hat{n}_r$ ও $\hat{n}_\theta$ হয় তাহলে চিত্রানুসারে,

$$\hat{n} = \hat{n}_r \cos\theta - \hat{n}_\theta \sin\theta$$

এইমান (iv) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \cdot [\dot{p}] \left(\hat{n}_r \cos\theta - \hat{n}_\theta \sin\theta\right)$$

এই সমীকরণ হতে ভেক্টর বিভবের নিম্নরূপ উপাংশগুলো পাওয়া যায়,

$$\left.\begin{aligned} A_r &= \frac{\mu_0}{4\pi r} \cdot [\dot{p}] \cos\theta \\ A_\theta &= -\frac{\mu_0}{4\pi r} [\dot{p}] \sin\theta \end{aligned}\right\} \longrightarrow \text{(v)}$$

এবং $A_\phi = 0$

স্কেলার বিভব: ϕ শূন্যস্থানে লরেঞ্জ শর্ত হলো;

$$\nabla \cdot \vec{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

বা, $$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \cdot \nabla \cdot \vec{A}$$

$$= -c^2\, \nabla \cdot \vec{A}$$

[কারণ শূন্যস্থানের জন্য $\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$]

এখন উপরের সমীকরণকে পোলার স্থানাঙ্কে প্রকাশ করে পাই,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -c^2 \left[\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}\right]$$

এই সমীকরণের (v) নং সমীকরণের মান বসিয়ে পাই,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -c^2\left[\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{r^2\mu_0[\dot{p}]\cos\theta}{4\pi r}\right\} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{-\frac{\mu_0[\dot{p}]\sin^2\theta}{4\pi r}\right\}\right]$$

বা, $$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\mu_0 c^2}{4\pi}\left[\frac{[\dot{p}]\cos\theta}{r^2} + \frac{r\cos\theta}{r^2}\left(-\frac{\ddot{p}}{c}\right) - \frac{2}{r^2}\frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta}[\dot{p}]\right]$$

যেখানে,

বা, $$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{[p]}{r^2} + \frac{[\dot{p}]}{rc}\right]\cos\theta\right\}$$ $$\frac{\partial}{\partial t}[\dot{p}] = -\ddot{p}/c$$

$$\therefore \phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\left[\frac{[p]\cos\theta}{r^2} + \frac{[\dot{p}]\cos\theta}{rc}\right]$$

ইহাই নির্ণেয় তড়িৎ দ্বিপোলের জন্য স্কেলার বিভবের মান।

উদা-৫ঃ- একটি প্রসম্বন্ধ প্রান্ত অ্যান্টেনা সজ্জায় ৫টি অর্ধতরঙ্গ দ্বিপোল আবলম্ব তার রয়েছে। আবলম্ব তারগুলোর সাধারণ ব্যবধান 50 cm এবং এরা 100 cm তরঙ্গদৈর্ঘ্য অপারেট করছে। প্রতি উপাদান সমদশায় 0.5 অ্যাম্পিয়ার তড়িৎ পরিবহন করছে। বিকিরণ ক্ষমতা এবং প্রধান লোবের অর্ধ প্রস্থ নির্ণয় কর।

সমাধান

অ্যানটেনা কর্তৃক বিকীর্ণ ক্ষমতা হলো

$$P = RI_{rms}^2$$

n সংখ্যক আলোক তার সমন্বয়ে গঠিত অবস্থার প্রবাহ সমদশা সম্পন্ন হলে,

$$P = nRI_{rms}^2 \text{ হয় ।}$$

যেখানে, $n = 4$, $I_{rms} = 0.5$ A

R = অর্ধতরঙ্গ অ্যানটেনায় বিকিরণ রোধ $= 73.2\,\Omega$, অতএব

$$P = 4 \times 73.2 \times (0.5)^2$$

$$= 73.2 \text{ ওয়াট}$$

আবার, আমরা জানি, $\cos\phi_1 = \frac{\lambda}{nd}$

$$= \frac{100}{4 \times 50}$$

যেখানে,
$\lambda = 100$
$d = 50$

$$\Rightarrow \cos\phi_1 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \phi_1 = \cos^{-1}(1/2)$$

$$= 60^\circ$$

অতএব; অর্ধপ্রস্থ $\beta = 90^\circ - 60^\circ$

$$= 30^\circ \quad \text{Ans}$$

প্রশ্ন-৮: ট্রেনের আপেক্ষিক কী? একটি অর্ধতরঙ্গ অ্যানটেনার জন্য তড়িৎ ও চৌম্বক ক্ষেত্রের রাশি নির্ণয় কর?

সমাধান

গ্রীনের অপেক্ষক:- $G(\vec{r}, \vec{r}\,') = \dfrac{\exp(ik|\vec{r} - \vec{r}\,'|)}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$ এই সমীকরণটিকে গ্রীনের অপেক্ষক বলে।

তড়িৎ ও চৌম্বক ক্ষেত্র:- আমরা জানি, ক্ষেত্রবিন্দু ও উৎসবিন্দুর দূরত্ব r হলে

$$\vec{E} = -\frac{j\omega I_0 \, dl \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \cdot e^{-j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)} \hat{n}_\theta \quad \text{——— (i)}$$

এখন,

ধরা যাক, dl দৈর্ঘ্য উপাদান হতে ক্ষেত্র বিন্দু $F(x_a)$ এর দূরত্ব r'।

তাহলে উপরোক্ত সমীকরণ অনুসারে পাই,

$$\vec{E} = -\frac{j\omega \, dl I_0 \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r'} e^{-j\omega(t - r/c)} \hat{n}_\theta$$

$$\text{বা, } d\vec{E} = -\frac{j\omega I_0 \, dl \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r'} \cdot e^{-j\omega(t - r/c)} \hat{n}_\theta \quad \text{——— (ii)}$$

এখন, $\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ ব্যবহার করে এবং $r' = r - l\cos\theta$ এবং $\frac{d^2 p}{dt^2} = \frac{dI}{dt} \cdot dl$

ব্যবহার করে (ii) নং হতে পাই,

$$\vec{E} = -\frac{j\omega I_0 \sin\theta}{8\pi\epsilon_0 c^2 r} \cdot e^{-j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)} \int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} \left[e^{-j\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right)(\cos\theta + 1)} + e^{-j\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right)(\cos\theta + 1)} \right] dl \, \hat{n}_\theta$$

$$= -\frac{j\omega I_0 \sin\theta}{8\pi\epsilon_0 c^2 r} \cdot e^{-j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)} \left[\frac{\lambda e^{-j\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right)(\cos\theta + 1)}}{-2\pi l(\cos\theta + 1)} + \frac{\lambda e^{-j\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right)(\cos\theta - 1)}}{-2\pi l j(\cos\theta - 1)} \right]_{-\lambda/4}^{\lambda/4} \hat{n}_\theta$$

$$= -\frac{j I_0 \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 c r} e^{-j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)} \left[\frac{\sin\left\{\frac{\pi}{2}(\cos\theta + 1)\right\}}{\cos\theta + 1} + \frac{\sin\left\{\frac{\pi}{2}(\cos\theta - 1)\right\}}{\cos\theta - 1} \right] \hat{n}_\theta$$

CS CamScanner

এখন, $\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$, $\sin\left\{\frac{\pi}{2}(\cos\theta \pm 1)\right\} = \pm \cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)$,

এবং. $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ hm^{-1}$, $c = 3\times10^{8}\ ms^{-1}$

মানগুলো বসিয়ে পাই,

$$\vec{E} = -\frac{\mu_0 c I_0}{2\pi r} \cdot e^{-j\omega(t-\frac{r}{c})} \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}(\cos\theta)\right]}{\sin\theta}\hat{n}_\theta$$

বা, $$\vec{E} = \left\{-j\left(\frac{60}{r}\right) I_0\, e^{-j\omega(t-\frac{r}{c})} \cdot \frac{\cos\frac{\pi\cos\theta}{2}}{\sin\theta}\cdot\hat{n}_\theta\right\}$$ ভোল্ট/মিটার

ইহাই নির্ণেয় তড়িৎ ক্ষেত্র।

যখন, $\theta \to 0$.

$$\lim_{\theta\to0} \frac{\cos\left(\frac{1}{2}\pi\cos\theta\right)}{\sin\theta} = \lim_{\theta\to0}\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\pi\cos\theta\right)(\pi/2)\sin\theta}{\cos\theta} = 0$$

যা প্রমাণ করে যে, $\theta \to 0$ হলে $\vec{E} \to 0$। এটি আমরা প্রমাণ করছে যে, $\vec{E}$ ভেক্টর কম্পোনেন্ট নিরপেক্ষ। এখন.

আবার, আমরা জানি,

$$\vec{B} = \frac{|\vec{E}|}{c}\hat{n}_\phi$$

$\vec{E}$ এর মান এই সমীকরণে বসিয়ে পাই

$$\vec{B} = \frac{j\mu_0 I_0}{2\pi r}\cdot e^{-j\omega(t-\frac{r}{c})}\cdot\frac{\cos\left(\frac{1}{2}\pi\cos\theta\right)}{\sin\theta}\hat{n}_\phi$$ ওয়েবার/মিটার^2

এটিই হলো চৌম্বক ক্ষেত্রের সমীকরণ।

প্রশ্ন-৫ঃ- ফেজড অ্যানটেনা অ্যারের কার্যকারিতা আলোচনা কর?

সমাধান

অ্যানটেনা অ্যারে হল একাধিক অ্যানটেনার সমন্বয়ে গঠিত একটি ব্যবস্থা যা ইলেকট্রোম্যাগনেটিক তরঙ্গ প্রেরণ বা গ্রহণের ক্ষমতা উন্নত করতে ব্যবহৃত হয়। অ্যানটেনা অ্যারের কার্যকারিতা এবং সুবিধাগুলো নিম্নরূপ :—

১. অ্যানটেনা অ্যারে রেডিয়েশন প্যাটার্নকে নির্দিষ্ট একটি দিকে কেন্দ্রীভূত করতে পারে। এটি সিগন্যালের শক্তি বাড়ায় এবং অপ্রয়োজনীয় দিকের বিশৃঙ্খলা কমায়। যেমন, টেলিকমিউনিকেশন টাওয়ারে ডিরেকশনাল অ্যানটেনা অ্যারে ব্যবহার করা হয়।

২. একক অ্যানটেনার তুলনায় অ্যারের মাধ্যমে বেশি শক্তিশালী সিগন্যাল তৈরি করা যায়। এটি অ্যানটেনা সিস্টেমের কার্যকারিতা ও প্রসারনশীলতা বাড়ায়।

৩. অ্যানটেনা অ্যারে ব্যবহার করে রেডিয়েশন প্যাটার্নের আকার নিয়ন্ত্রন করা যায়। এটি নির্দিষ্ট ব্যবহারকারীর দিকে সিগন্যালের শক্তি বাড়ায় এবং বাকি দিকগুলোতে কমায়।

৪. বিম স্টিয়ারিং প্রযুক্তির মাধ্যমে অপ্রয়োজনীয় দিক থেকে আসা ইন্টারফেরেন্স দূর করা যায়। এটি সিস্টেমের কার্যকারিতা ও নির্ভরযোগ্যতা বাড়ায়।

৫. একাধিক অ্যানটেনা একত্রে ব্যবহারের ফলে মাল্টিপাথ ফেডিং-য়ের সমস্যা কমে। এটি বিশেষত মোবাইল যোগাযোগ এবং রাডার সিস্টেমে কার্যকর।

৬. ~~ডিজিটাল~~ মর্ডার্ন অ্যানটেনা ব্যবস্থায় ডিজিটাল সিগন্যাল প্রসেসিং ব্যবহার করা হয়, যা বিমের গতি, দিক এবং আকারের নিয়ন্ত্রণে আরও উন্নত সুবিধা প্রদান করে।

৭. 5G এবং wi-fi প্রযুক্তিতে উচ্চগতি ও নির্ভরযোগ্য যোগাযোগের ক্ষেত্রে ভূমিকা রাখে। দূরবর্তী সিগন্যাল প্রেরণ ও গ্রহণে উপগ্রহ ও অন্তর্প্রসারেন্স এবং MRI সিস্টেমে ব্যবহৃত হয়।

সুতরাং, অ্যানটেনা ব্যবস্থার কার্যকারিতা নির্ভর করে এর সঠিক নকশা ও ব্যবহার পদ্ধতির উপর। এটি সিগন্যালের শক্তি ও কার্যকারিতা বাড়াতে অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ।