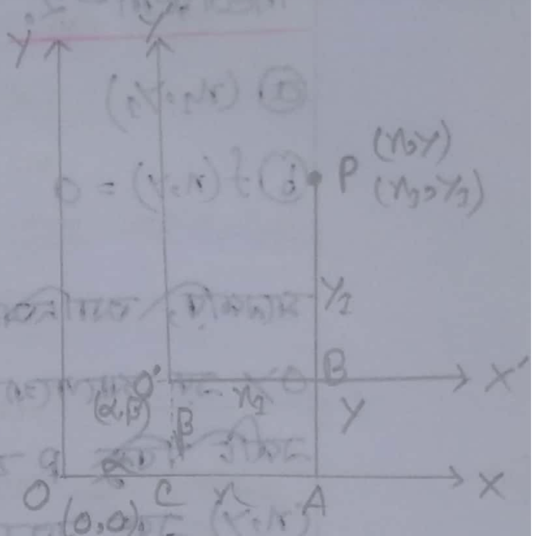
* অধ্যায় – ১ *

1 chap

Theorem – 1

(a) (x_1, y_1)

(b) $f(x, y) = 0$



(a) মনেকরি, আদিঅক্ষ OX, OY এর সাপেক্ষে কোনো একটি বিন্দু P যার স্থানাংক (x, y) এবং নতুন অক্ষদ্বয় O'X', O'Y' এর সাপেক্ষে ঐ একই বিন্দুর স্থানাংক (x_1, y_1)। যেখানে $O'X' \parallel OX$, $O'Y' \parallel OY$ এবং O' এর স্থানাংক (α, β)। P বিন্দু থেকে OX অক্ষের উপর লম্ব টানি। যারা O'X' অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করে। আবার O' বিন্দু হতে OX এর উপর লম্ব টানি যা OX কে C বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে,

$$x = OA = OC + CA$$
$$= OC + O'B$$
$$x = \alpha + x_1$$
$$\therefore x_1 = x - \alpha$$

এবং

$$y = PA = AB + PB$$
$$= O'C + PB$$
$$y = \beta + y_1$$
$$\therefore y_1 = y - \beta$$

নতুন অক্ষ সাপেক্ষে (x, y) এর রূপান্তরিত স্থানাংক,

$$(x_1, y_1) = (x - \alpha, y - \beta)$$

(b) আমরা জানি, $P(x, y)$ এর সমীকরণ $f(x, y) = 0$

এখানে, $x = \alpha + x_1$, $y = \beta + y_1$

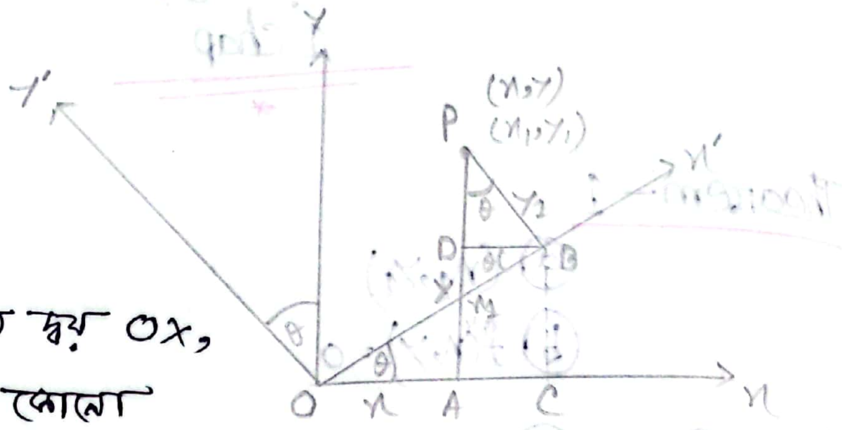
সুতরাং নতুন অক্ষ সাপেক্ষে $f(x, y) = 0$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ হবে

$$f(x_1 + \alpha, y_1 + \beta) = 0$$

Theorem-2:

ⓐ (x_1, y_1)

ⓑ $f(x, y) = 0$



মনেকরি, অক্ষিদ্বয় দ্বয় OX, OY এর সাপেক্ষে কোনো একটি বিন্দু P যার স্থানাঙ্ক (x, y) এবং নতুন অক্ষ দ্বয় OX', OY' এর সাপেক্ষে ঐ একই বিন্দুর স্থানাঙ্ক $P(x_1, y_1)$ যেখানে অক্ষ সমূহ θ কোণে আবর্তিত হয়। যেখানে $\angle xOX' = \angle YOY' = \theta$,

P বিন্দু হতে Ox এর উপর PA লম্ব অংকন করি এবং OX' অক্ষের উপর PB লম্ব অংকন করি। আবার B বিন্দু হতে Ox এর উপর BC এবং PA এর উপর BD লম্ব অংকন করি।

এখানে,

$OB = x_1$, $PB = y_1$

$OA = x$, $PA = y$

$\angle PBD = 90°\theta$

$\angle P = \theta$

$\therefore \Delta PBD$ হতে, $\cos\theta = \frac{PD}{PB} = \frac{PD}{y_1}$

$\Rightarrow PD = y_1\cos\theta$.

$\sin\theta = \frac{BD}{PB} = \frac{BD}{y_1}$

$\Rightarrow BD = y_1\sin\theta$

আবার, ΔOBC হতে, $\cos\theta = \frac{OC}{OB} = \frac{OC}{x_1}$

$$\Rightarrow OC = x_1\cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{BC}{OB} = \frac{BC}{x_1}$$

$$\Rightarrow BC = x_1\sin\theta$$

আবার,

$$x = OA = OC - AC = OC - BD$$

$$\therefore x = x_1\cos\theta - y_1\sin\theta \quad \text{——— (i)}$$

$$y = PA = PD + AD = PD + BC$$

$$\therefore y = y_1\cos\theta + x_1\sin\theta \quad \text{——— (ii)}$$

$$(i)\times\cos\theta + (ii)\times\sin\theta \longrightarrow$$

$$x\cos\theta = x_1\cos^2\theta - \cancel{y_1\sin\theta\cos\theta}$$

$$y\sin\theta = \cancel{y_1\sin\theta\cos\theta} + x_1\sin^2\theta$$

$$x\cos\theta + y\sin\theta = x_1\cos^2\theta + x_1\sin^2\theta$$

$$\Rightarrow x\cos\theta + y\sin\theta = x_1(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

$$\Rightarrow x\cos\theta + y\sin\theta = x_1\cdot 1$$

$$\therefore x_1 = x\cos\theta + y\sin\theta .$$

$$(ii)\times\cos\theta - (i)\times\sin\theta \longrightarrow$$

$$y\cos\theta = y_1\cos^2\theta + \cancel{x_1\sin\theta\cos\theta}$$

$$\underset{-}{x\sin\theta} = \underset{-}{\cancel{x_1\sin\theta\cos\theta}} \underset{+}{-} y_1\sin^2\theta$$

$$y\cos\theta - x\sin\theta = y_1\cos^2\theta + y_1\sin^2\theta$$

$$\Rightarrow y\cos\theta - x\sin\theta = y_1(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

$$\Rightarrow y_1 = y\cos\theta - x\sin\theta$$

∴ নির্ণেয় নতুন স্থানাংক,

$$(x_1, y_1) = (x\cos\theta + y\sin\theta,\ -x\sin\theta + y\cos\theta)$$

(b) a নং হতে পাই,

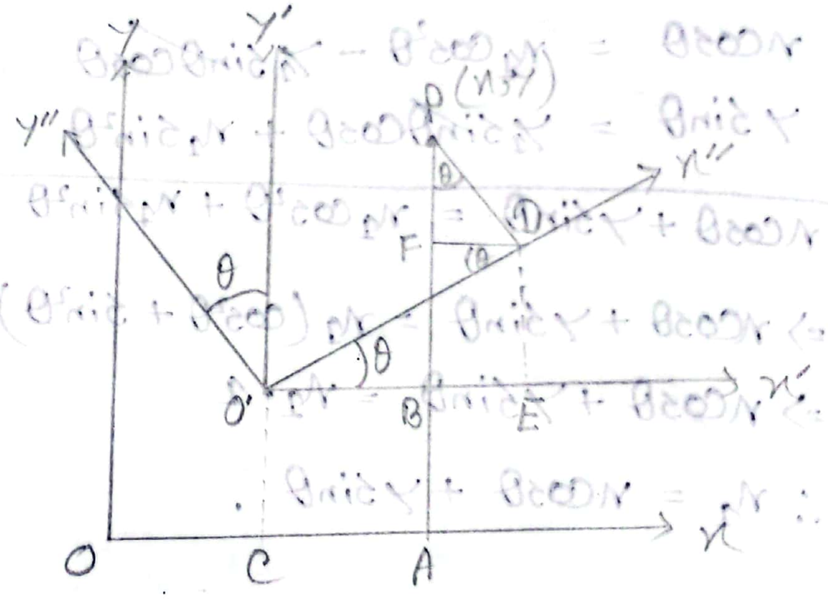
$$x = x_1\cos\theta - y_1\sin\theta$$

$$y = x_1\sin\theta + y_1\cos\theta$$

সুতরাং নতুন অক্ষ সাপেক্ষে $f(x,y)=0$ সমীকরণের রূপান্তরিত সমীকরণ হবে

$$f(x_1\cos\theta - y_1\sin\theta,\ x_1\sin\theta + y_1\cos\theta) = 0$$

Theorem – 3:



মনেকরি, আদিঅক্ষদ্বয় Ox, Oy এর সাপেক্ষে কোনো একটি বিন্দু P এর স্থানাংক (x,y) এবং নতুন অক্ষদ্বয় $O'x'$ ও $O'y'$ এ একই বিন্দুর স্থানাংক (h,k)। O' এর স্থানাংক (α,β)। P বিন্দু হতে Ox এর উপর PA লম্ব অংকন করি। যা $O'x'$ অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করে। O' বিন্দু হতে

On এর উপর লম্ব টানি যা On কে C বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে,

$$x = OA = OC + AC \qquad y = PA = PB + BA$$
$$= OC + O'B \qquad = PB + O'C$$
$$x = \alpha + h \qquad y = k + \beta$$
$$\therefore h = x - \alpha \qquad \therefore k = y - \beta$$

আবার,
মনেকরি O' বিন্দুকে স্থির রেখে $O'x'$ এবং $O'y'$ অক্ষদ্বয়কে θ কোণে আবর্তন করলে (h, k) এর নতুন স্থানাংক (x_1, y_1) এবং $O'x'$ ও $O'y'$ এর নতুন অক্ষ হবে $O'x''$, $O'y''$।

তাহলে, $O'B = h$, $PB = k$

$O'D = x_1$, $PD = y_1$

$\angle O'DF = \angle DPF = \theta$

ΔPFD হতে,

$$\cos\theta = \frac{PF}{PD} = \frac{PF}{y_1}$$

$$\therefore PF = y_1 \cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{FD}{PD} = \frac{FD}{y_1}$$

$$\therefore FD = y_1 \cos\theta$$

আবার, $\Delta EDO'$ হতে

$$\sin\theta = \frac{ED}{O'D} = \frac{ED}{x_1}$$

$$\Rightarrow ED = x_1 \sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{O'E}{O'D} = \frac{O'E}{x_1}$$

$$\therefore O'E = x_1\cos\theta$$

এখন,

$h = O'B = O'E - BE$

$= O'E - FD$ [$BE = FD$

$= x_1\cos\theta - y_1\sin\theta$ —— (i)

$k = PB = PF + FB$

$= PF + DE$ [$FB = DE$

$= y_1\cos\theta + x_1\sin\theta$ —— (ii)

(i) $\times \cos\theta$ + (ii) $\times \sin\theta$

$h\cos\theta = x_1\cos^2\theta - y_1\cancel{\cos\theta\sin\theta}$

$k\sin\theta = y_1\cancel{\cos\theta\sin\theta} + x_1\sin^2\theta$

$h\cos\theta + k\sin\theta = x_1\cos^2\theta + x_1\sin^2\theta$

$\Rightarrow h\cos\theta + k\sin\theta = x_1(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$

$\therefore x_1 = h\cos\theta + k\sin\theta$ —— (iii)

(ii) $\times \cos\theta$ − (i) $\times \sin\theta$

$k\cos\theta = y_1\cos^2\theta + x_1\cancel{\sin\theta\cos\theta}$

$h\sin\theta = x_1\cancel{\cos\theta\sin\theta} - y_1\sin^2\theta$

$k\cos\theta - h\sin\theta = y_1\cos^2\theta + y_1\sin^2\theta$

$\Rightarrow k\cos\theta - h\sin\theta = y_1(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$

$\therefore y_1 = k\cos\theta - h\sin\theta$ ——— (iv)

$h = O'B$

$= CA$

$= OA - OC$

$= x - \alpha$

$k = PB$

$= PA - BA$

$= y - \beta$

h ও k এর মান (iii) ও (iv) নং এ বসিয়ে পাই—

$x_1 = (x-\alpha)\cos\theta + (y-\beta)\sin\theta$

$y_1 = (y-\beta)\cos\theta - (x-\alpha)\sin\theta$

$\therefore (x,y)$ এর রূপান্তরিত স্থানাঙ্ক $(x_1, y_1) = \{(x-\alpha)\cos\theta + (y-\beta)\sin\theta,$
$(y-\beta)\cos\theta - (x-\alpha)\sin\theta\}$

(b) a হতে পাই,

$x = \alpha + h$

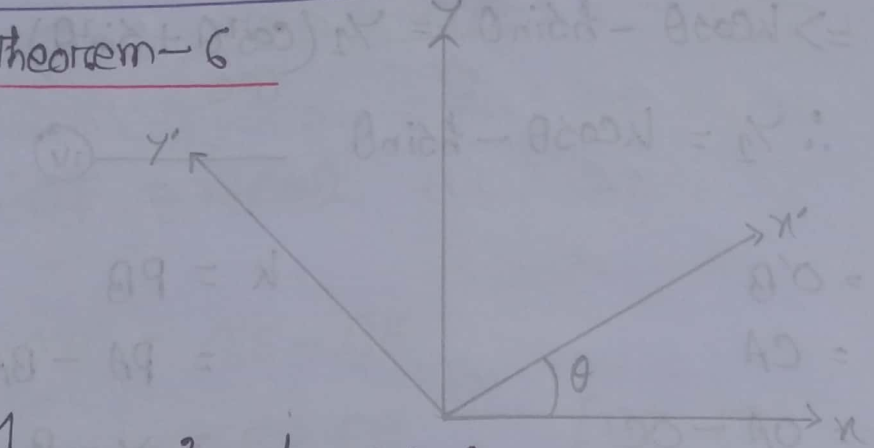
$= \alpha + x_1\cos\theta - y_1\sin\theta$

$y = \beta + k$

$= \beta + x_1\sin\theta + y_1\cos\theta$

$f(x,y) = 0$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ $f(\alpha + x_1\cos\theta - y_1\sin\theta,$
$\beta + x_1\sin\theta + y_1\cos\theta) = 0$

উপপাদ্য/Theorem-6



প্রদত্ত সমীকরণ $ax^2+2hxy+by^2=0$ ——— (1)

এখন অক্ষদ্বয়কে একই দিকে θ কোণে আবর্তন করলে (1) নং এর রূপান্তরিত সমীকরণ হবে

$$a(x_1\cos\theta-y_1\sin\theta)^2+2h(x_1\cos\theta-y_1\sin\theta)(x_1\sin\theta+y_1\cos\theta)+b(x_1\sin\theta+y_1\cos\theta)^2=0$$

$$\Rightarrow a(x_1^2\cos^2\theta-2x_1y_1\sin\theta\cdot\cos\theta+y_1^2\sin^2\theta)+2h(x_1^2\sin\theta\cos\theta+x_1y_1\cos^2\theta-x_1y_1\sin^2\theta-y_1^2\sin\theta\cos\theta)+b(x_1^2\sin^2\theta+2x_1y_1\sin\theta\cos\theta+y_1^2\cos^2\theta)=0$$

$$\Rightarrow ax_1^2\cos^2\theta-2ax_1y_1\sin\theta\cos\theta+ay_1^2\sin^2\theta+2hx_1^2\sin\theta\cos\theta+2hx_1y_1\cos^2\theta-2hx_1y_1\sin^2\theta-2hy_1^2\sin\theta\cos\theta+bx_1^2\sin^2\theta+2bx_1y_1\sin\theta\cos\theta+by_1^2\cos^2\theta=0$$

$$\Rightarrow x_1^2(a\cos^2\theta+2h\sin\theta\cos\theta+b\sin^2\theta)+2x_1y_1(h\cos^2\theta-h\sin^2\theta-a\sin\theta\cos\theta+b\sin\theta\cos\theta)+y_1^2(a\sin^2\theta-2h\sin\theta\cos\theta+b\cos^2\theta)$$

$$\Rightarrow a_1x_1^2+2h_1x_1y_1+b_1y_1^2=0$$

$$\Rightarrow a_1x^2+2h_1xy+b_1y^2=0 \qquad \left[\begin{array}{l}x_1=x\\ y_1=y\end{array}\right.$$

এখানে, $a_1=a\cos^2\theta+2h\sin\theta\cos\theta+b\sin^2\theta$

$*2\cos^2\theta = \cos 2\theta + 1$

$*2\sin^2\theta = 1 - \cos 2\theta$

$*\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$h_1 = h\cos^2\theta - h\sin^2\theta - a\sin\theta\cos\theta + b\sin\theta\cos\theta$

$b_1 = a\sin^2\theta - 2h\sin\theta\cos\theta + b\cos^2\theta$

$\therefore a_1 + b_1 = a\cos^2\theta + \cancel{2h\sin\theta\cos\theta} + b\sin^2\theta + a\sin^2\theta - \cancel{2h\sin\theta\cos\theta} + b\cos^2\theta$

$= a(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + b(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$

$a_1 + b_1 = a + b$

$2a_1 = 2(a\cos^2\theta + 2h\cos\theta\sin\theta + b\sin^2\theta)$

$= 2a\cos^2\theta + 4h\cos\theta\sin\theta + 2b\sin^2\theta$

$= a.2\cos^2\theta + 2h.2\sin\theta\cos\theta + b.2\sin^2\theta$

$= a(\cos 2\theta + 1) + 2h\sin 2\theta + b(1 - \cos 2\theta)$

$= a\cos 2\theta + a + 2h\sin 2\theta + b - b\cos 2\theta$

$= (a+b) + 2h\sin 2\theta + \cos 2\theta(a-b)$

$2b_1 = 2(a\sin^2\theta - 2h\sin\theta\cos\theta + b\cos^2\theta)$

$= 2a\sin^2\theta - 4h\sin\theta\cos\theta + 2b\cos^2\theta$

$= a.2\sin^2\theta - 2h.2\sin\theta\cos\theta + b.2\cos^2\theta$

$= a(1 - \cos 2\theta) - 2h.\sin 2\theta + b(\cos 2\theta + 1)$

$= a - a\cos 2\theta - 2h\sin 2\theta + b\cos 2\theta + b$

$= (a+b) - 2h\sin 2\theta - \cos 2\theta(a-b)$

$= (a+b) - \{2h\sin 2\theta + \cos 2\theta(a-b)\}$

$2h_1 = 2(h\cos^2\theta - h\sin^2\theta - a\sin\theta\cos\theta + b\sin\theta\cos\theta)$

CamScanner

$$= 2h\cos^2\theta - 2h\sin^2\theta - 2a\sin\theta\cos\theta + 2b\sin\theta\cos\theta$$

$$= h\cdot 2\cos^2\theta - h\cdot 2\sin^2\theta - a\cdot 2\sin\theta\cos\theta + b\cdot 2\sin\theta\cos\theta$$

$$= h(\cos 2\theta + 1) - h(1 - \cos 2\theta) - a\sin 2\theta + b\sin 2\theta$$

$$= h\cos 2\theta + \cancel{h} - \cancel{h} + h\cos 2\theta - a\sin 2\theta + b\sin 2\theta$$

$$= 2h\cos 2\theta - \sin 2\theta\,(a-b)$$

$$\therefore (2a_1)\times(2b_1) = \{(a+b) + (a-b)\cos 2\theta + 2h\sin 2\theta\} \times \{(a+b) - \{(a-b)\cos 2\theta + 2h\sin 2\theta\}\}$$

$$\Rightarrow 4a_1b_1 = (a+b)^2 - \cancel{(a^2-b^2)\cos 2\theta} - \cancel{(a+b)2h\sin 2\theta} + \cancel{(a^2-b^2)\cos 2\theta} - (a-b)^2\cos^2 2\theta - 2h(a-b)\sin 2\theta\cos 2\theta + \cancel{(a+b)2h\sin 2\theta} - (a-b)2h\sin 2\theta\cos 2\theta - 4h^2\sin^2 2\theta$$

$$= (a+b)^2 - 4h(a-b)\sin 2\theta\cos 2\theta - 4h^2\sin^2 2\theta - (a-b)^2\cos^2 2\theta$$

$$= (a+b)^2 - \left[\{(a-b)\cos 2\theta\}^2 + 2(a-b)\cos 2\theta\cdot 2h\sin 2\theta + (2h\sin 2\theta)^2\right]$$

$$= (a+b)^2 - \{(a-b)\cos 2\theta + 2h\sin 2\theta\}^2$$

$$\therefore (2h_1)^2 = \{2h\cos 2\theta - (a-b)\sin 2\theta\}^2 \qquad [\text{বর্গ করে}$$

$$\Rightarrow 4h_1^2 = (2h\cos 2\theta)^2 - 2\cdot 2h\cos 2\theta\cdot(a-b)\sin 2\theta + \{(a-b)\sin 2\theta\}^2$$

$$= 4h^2\cos^2 2\theta - 4h(a-b)\sin 2\theta\cos 2\theta + (a-b)^2\sin^2 2\theta$$

$$\therefore 4a_1b_1 - 4h_1^2 = (a+b)^2 - \{(a-b)\cos 2\theta + 2h\sin 2\theta\}^2 - 4h^2\cos^2 2\theta$$
$$+ 4h(a-b)\sin 2\theta\cos 2\theta - (a-b)^2\sin^2 2\theta$$

$$\Rightarrow 4(a_1b_1 - h_1^2) = (a+b)^2 - (a-b)^2\cos^2 2\theta - 4h(a-b)\cos 2\theta\sin 2\theta$$
$$- 4h^2\sin^2 2\theta - 4h^2\cos^2 2\theta + 4h(a-b)\cos 2\theta\sin 2\theta$$
$$- (a-b)^2\sin^2 2\theta$$

$$\Rightarrow 4(a_1b_1 - h_1^2) = (a+b)^2 - (a-b)^2(\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta) - 4h^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$

$$\Rightarrow 4(a_1b_1 - h_1^2) = (a+b)^2 - (a-b)^2 - 4h^2$$

$$\Rightarrow 4(a_1b_1 - h_1^2) = 4ab - 4h^2$$

$$\Rightarrow 4(a_1b_1 - h_1^2) = 4(ab - h^2)$$

$$\Rightarrow a_1b_1 - h_1^2 = ab - h^2$$

$\therefore a+b$ এবং $ab-h^2$ অচ্যুত থাকে।

Step $\rightarrow$

(i) a_1, b_1, h_1 বের করতে হবে

(ii) $(a_1 + b_1)$

(iii) $(2a_1, 2b_1, 2h_1)$

(iv) $(2a_1 \times 2b_1)$

(v) $(2h_1)^2$

(vi) $(2a_1 \times 2b_1) - (2h_1)^2$

CamScanner

Ex-3:

$(3, 30^\circ)$ বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক $(3\cos 30^\circ, -3\sin 30^\circ)$

$$= \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

$(5, 150^\circ)$ বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক $(5\cos 150^\circ, 5\sin 150^\circ)$

$$= \left(-\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$(5, 210^\circ)$ বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক $(5\cos 210^\circ, 5\sin 210^\circ)$

$$= \left(-\frac{5\sqrt{3}}{2}, -\frac{5}{2}\right)$$

ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{3\sqrt{3}}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{5\sqrt{3}}{2} & \frac{5}{2} & 1 \\ -\frac{5\sqrt{3}}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -5 & 5 & 1 \\ -5 & -5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}\, 3(5+5) - (-3)(-5+5) + 1(25+25)$$

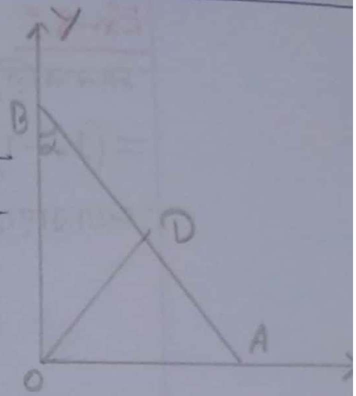
$$= \frac{\sqrt{3}}{8}(10 + 0 + 50)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8} \times 80$$

$$= 10\sqrt{3} \text{ বর্গ একক।}$$

$\therefore$ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $10\sqrt{3}$ বর্গ একক।

Ex- 5:



মনেকরি, মূলবিন্দু হতে p একক দূরত্বে অবস্থিত AB সরলরেখা Y অক্ষের সাথে α কোণ উৎপন্ন করে। যেখানে সরলরেখাটি X ও Y অক্ষদ্বয়কে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে।

সরলরেখাটির সমীকরণ

$$\frac{x}{OA} + \frac{y}{OB} = 1 \quad \text{——— (i)}$$

এখন $OD \perp AB$ হলে $OD = p$

ΔOBD হতে $\sin\alpha = \frac{OD}{OB}$

$$\Rightarrow OB = \frac{OD}{\sin\alpha} = \frac{p}{\sin\alpha}$$

আবার, ΔOAD হতে $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{OD}{OA}$

$$\Rightarrow OA = \frac{OD}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{p}{\cos\alpha}$$

(i) হতে পাই,

$$\frac{x\cos\alpha}{p} + \frac{y\sin\alpha}{p} = 1$$

$$\Rightarrow x\cos\alpha + y\sin\alpha = p \quad \text{——— (ii)}$$

এখন কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্কের মধ্যে সম্পর্ক

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

(ii) হতে পাই,

$$r\cos\theta\cos\alpha + r\sin\theta\sin\alpha = p$$

$$\Rightarrow r\cos(\theta - \alpha) = p$$

ইহাই নির্ণেয় আকার।

Ex-8:

মনেকরি, অক্ষদ্বয়ের দিক অপরিবর্তিত রেখে মূলবিন্দুকে $(\alpha, \beta) = (1, -1)$ বিন্দুতে স্থানান্তর করায় $P(x, y)$ এর রূপান্তরিত স্থানাংক $P(x_1, y_1)$ হয়। এখন

$$x = x_1 + \alpha = x_1 + 1$$

$$y = y_1 + \beta = y_1 - 1$$

তাহলে প্রদত্ত সমীকরণ $ax^2 + by + c = 0$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ

$$\Rightarrow a(x_1+1)^2 + b(y_1-1) + c = 0$$

$$\Rightarrow a(x_1^2 + 2x_1 + 1) + by_1 - b + c = 0$$

$$\Rightarrow ax_1^2 + 2ax_1 + a + by_1 - b + c = 0$$

$$\Rightarrow ax_1^2 + by_1 + 2ax_1 + a - b + c = 0 \quad \text{---} (1)$$

এখন,

$(x_1, y_1) = (x, y)$ বসিয়ে (1) নং সমীকরণ পাই,

$$\therefore ax^2 + by + 2ax + a - b + c = 0 \quad \text{A.}$$

Ex-11

মনেকরি, মূলবিন্দুর অবস্থান অপরিবর্তিত রেখে অক্ষদ্বয়কে $45°$ কোণে আবর্তন করে (x, y) এর রূপান্তরিত স্থানাংক (x_1, y_1)।

দে. আছে,

$\theta = 45°$

তাহলে,

$$x = x_1\cos\theta - y_1\sin\theta$$

$$= x_1\cos 45° - y_1 \sin 45°$$

$$= x_1 \frac{1}{\sqrt{2}} - y_1 \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - y_1)$$

$$y = x_1\sin\theta + y_1\cos\theta$$
$$= x_1\sin 45^\circ + y_1\cos 45^\circ$$
$$= x_1\frac{1}{\sqrt{2}} + y_1\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1+y_1)$$

প্রদত্ত সমীকরণ, $x^2-y^2=5$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ হবে

$$\Rightarrow \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1-y_1)\right\}^2 - \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1+y_1)\right\}^2 = 5$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}(x_1-y_1)^2 - \frac{1}{2}(x_1+y_1)^2 = 5$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left\{(x_1-y_1)^2 - (x_1+y_1)^2\right\} = 5$$
$$\Rightarrow (x_1-y_1)^2 - (x_1+y_1)^2 = 10$$
$$\Rightarrow x_1^2 - 2x_1y_1 + y_1^2 - x_1^2 - 2x_1y_1 - y_1^2 = 10$$
$$\Rightarrow -4x_1y_1 - 10 = 0$$
$$\Rightarrow -2(2x_1y_1+5) = 0$$
$$\Rightarrow 2x_1y_1 + 5 = 0$$

এখন, $(x_1, y_1) = (x, y)$ বসিয়ে পাই

$$\therefore 2xy + 5 = 0$$

A.

Ex — 12

মনেকরি, মূলবিন্দুকে স্থানান্তরিত না করে অক্ষদ্বয়কে 45° কোণে আবর্তন করে (x, y) এর রূপান্তরিত স্থানাংক (x_1, y_1) হবে।

$\theta = 45^\circ$

তাহলে,

$$x = x_1\cos\theta - y_1\sin\theta$$
$$= x_1\cos45^\circ - y_1\sin45^\circ$$
$$= x_1\frac{1}{\sqrt2} - y_1\frac{1}{\sqrt2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt2}(x_1 - y_1)$$

$$y = x_1\sin\theta + y_1\cos\theta$$
$$= x_1\sin45^\circ + y_1\cos45^\circ$$
$$= x_1\frac{1}{\sqrt2} + y_1\frac{1}{\sqrt2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt2}(x_1 + y_1)$$

প্রদত্ত সমীকরণ $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$ রূপান্তরিত সমীকরণ

$$\Rightarrow \left\{\frac{1}{\sqrt2}(x_1-y_1)\right\}^2 - 2\left\{\frac{1}{\sqrt2}(x_1-y_1)\cdot\frac{1}{\sqrt2}(x_1+y_1)\right\} + \left\{\frac{1}{\sqrt2}(x_1+y_1)\right\}^2$$
$$+ 2\left\{\frac{1}{\sqrt2}(x_1-y_1)\right\} - 4\left\{\frac{1}{\sqrt2}(x_1+y_1)\right\} + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(x_1-y_1)^2 - \frac{2}{2}(x_1-y_1)(x_1+y_1) + \frac{1}{2}(x_1+y_1)^2$$
$$+ \sqrt2(x_1-y_1) - 2\sqrt2(x_1+y_1) + 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x_1-y_1)^2 + (x_1+y_1)^2 - 2(x_1^2 - y_1^2) + 2\sqrt2(x_1-y_1)$$
$$- 4\sqrt2(x_1+y_1) + 6 = 0$$

$$\Rightarrow (\cancel{x_1^2} - \cancel{2x_1y_1} + y_1^2 + \cancel{x_1^2} + \cancel{2x_1y_1} + y_1^2 - \cancel{2x_1^2} + 2y_1^2$$
$$+ 2\sqrt2x_1 - 2\sqrt2y_1 - 4\sqrt2x_1 - 4\sqrt2y_1 + 6) = 0$$

$$\Rightarrow 4y_1^2 - 2\sqrt2x_1 - 6\sqrt2y_1 + 6 = 0$$

এখন, $(x_1, y_1) = (x, y)$ বসিয়ে পাই

$$\therefore 4y^2 - 2\sqrt{2}x - 6\sqrt{2}y + 6 = 0$$ A:

Ex-14

মূলবিন্দুর অবস্থান স্থির রেখে অক্ষদ্বয়কে $\theta = 30°$ কোণে আবর্তন করিলে প্রদত্ত সমীকরণ এর রূপান্তরিত সমীকরণ হবে $x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 - 2a^2 = 0$

$$\therefore x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 - 2a^2 = 0$$

$$\Rightarrow (x_1\cos\theta - y_1\sin\theta)^2 + 2\sqrt{3}(x_1\cos\theta - y_1\sin\theta)(x_1\sin\theta + y_1\cos\theta) - (x_1\sin\theta + y_1\cos\theta)^2 - 2a^2 = 0$$

$$\Rightarrow x_1^2\cos^2\theta - 2x_1y_1\sin\theta\cos\theta + y_1^2\sin^2\theta + 2\sqrt{3}(x_1^2\sin\theta\cos\theta + x_1y_1\cos^2\theta - x_1y_1\sin^2\theta - y_1^2\sin\theta\cos\theta) - (x_1^2\sin^2\theta + 2x_1y_1\sin\theta\cos\theta + y_1^2\cos^2\theta) - 2a^2 = 0$$

$$\Rightarrow x_1^2\cos^2\theta - 2x_1y_1\sin\theta\cos\theta + y_1^2\sin^2\theta + 2\sqrt{3}x_1^2\sin\theta\cos\theta + 2\sqrt{3}x_1y_1\cos^2\theta - 2\sqrt{3}x_1y_1\sin^2\theta - 2\sqrt{3}y_1^2\sin\theta\cos\theta - x_1^2\sin^2\theta - 2x_1y_1\sin\theta\cos\theta - y_1^2\cos^2\theta - 2a^2 = 0$$

$$\Rightarrow x_1^2\cos^2 30° - 4x_1y_1\sin 30°\cos 30° + y_1^2\sin^2 30° + 2\sqrt{3}x_1^2\sin 30°\cos 30° + 2\sqrt{3}x_1y_1\cos^2 30° - 2\sqrt{3}x_1y_1\sin^2 30° - 2\sqrt{3}y_1^2\cos 30°\sin 30° - x_1^2\sin^2 30° - y_1^2\cos^2 30° - 2a^2 = 0$$

$$\Rightarrow x_1^2\frac{3}{4} - 4x_1y_1\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + y_1^2\frac{1}{4} + 2\sqrt{3}x_1^2\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3}x_1y_1\frac{3}{4} - 2\sqrt{3}x_1y_1\frac{1}{4} - 2\sqrt{3}y_1^2\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} - x_1^2\frac{1}{4} - y_1^2\cdot\frac{3}{4} - 2a^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3x_1^2}{4} - \sqrt{3}x_1y_1 + \frac{y_1^2}{4} + \frac{3x_1^2}{2} + \frac{3\sqrt{3}x_1y_1}{2} - \frac{\sqrt{3}x_1y_1}{2} - \frac{3y_1^2}{2} - \frac{x_1^2}{4} - \frac{3y_1^2}{4} - 2a^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3x^2-4\sqrt{3}x_1y_1+y_1^2+6x_1^2+6\sqrt{3}x_1y_1-2\sqrt{3}x_1y_1-6y_1^2-x_1^2-3y_1^2-8a^2}{4}=0$$

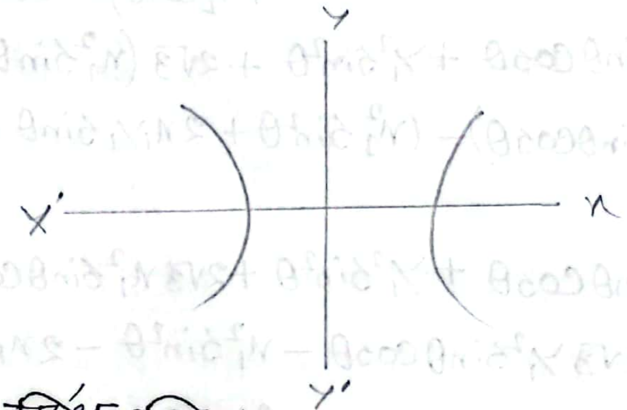
$$\Rightarrow 8x_1^2-8y_1^2-8a^2=0$$

$$\Rightarrow x_1^2-y_1^2-a^2=0$$

$$\Rightarrow x_1^2-y_1^2=a^2 \quad \text{——— (1)}$$

(1) নং সমীকরণ নির্ণেয় সমীকরণ।

এখানে, (1) নং সমীকরণটি একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্দেশ করে। যার কেন্দ্র $O(0,0)$।



ইহাই নির্ণেয় চিত্র।

Ex-18

মূলবিন্দুকে $(\alpha, \beta) = (2,3)$ বিন্দুতে স্থানান্তর করিলে প্রদত্ত সমীকরণের রূপান্তরিত সমীকরণ

$$3x^2+2xy+3y^2-18x-22y+50=0$$

$$\Rightarrow 3(x_1+2)^2+2(x_1+2)(y_1+3)+3(y_1+3)^2-18(x_1+2)-22(y_1+3)+50=0$$

$$\Rightarrow 3(x_1^2+4x_1+4)+2(x_1y_1+3x_1+2y_1+6)+3(y_1^2+6y_1+9)-18x_1-36-22y_1-66+50=0$$

$$\Rightarrow 3x_1^2+12x_1+12+2x_1y_1+6x_1+4y_1+12+3y_1^2+18y_1+27-18x_1-22y_1-52=0$$

$$\Rightarrow 3x_1^2+3y_1^2+2x_1y_1-1=0$$

এখন, $(x_1, y_1) = (x, y)$ বসিয়ে পাই

$$\therefore 3x^2+3y^2+2xy-1=0$$

ঘ. আছে,

$\theta = 45°$ অক্ষদ্বয়কে আবর্তন করতে হবে। তাহলে ① নং এর রূপান্তরিত সমীকরণ

$$\Rightarrow 3(x_1\cos\theta - y_1\sin\theta)^2+3(x_1\sin\theta+y_1\cos\theta)^2+2(x_1\cos\theta-y_1\sin\theta)(x_1\sin\theta+y_1\cos\theta)-1=0$$

$$\Rightarrow 3(x_1\cos45°-y_1\sin45°)^2+3(x_1\sin45°+y_1\cos45°)^2+2(x_1\cos45°-y_1\sin45°)(x_1\sin45°+y_1\cos45°)-1=0$$

$$\Rightarrow 3\left(x_1\cdot\frac{1}{\sqrt2}-y_1\frac{1}{\sqrt2}\right)^2+3\left(x_1\frac{1}{\sqrt2}+y_1\frac{1}{\sqrt2}\right)^2+2\left(x_1\frac{1}{\sqrt2}-y_1\frac{1}{\sqrt2}\right)\left(x_1\frac{1}{\sqrt2}+y_1\frac{1}{\sqrt2}\right)-1=0$$

$$\Rightarrow 3\left(\frac{x_1}{\sqrt2}-\frac{y_1}{\sqrt2}\right)^2+3\left(\frac{x_1}{\sqrt2}+\frac{y_1}{\sqrt2}\right)^2+2\left(\frac{x_1}{\sqrt2}-\frac{y_1}{\sqrt2}\right)\left(\frac{x_1}{\sqrt2}+\frac{y_1}{\sqrt2}\right)-1=0$$

$$\Rightarrow \frac{3}{(\sqrt2)^2}(x_1-y_1)^2+\frac{3}{(\sqrt2)^2}(x_1+y_1)^2+2\left\{\left(\frac{x_1}{\sqrt2}\right)^2-\left(\frac{y_1}{\sqrt2}\right)^2\right\}-1=0$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}(x_1^2-2x_1y_1+y_1^2)+\frac{3}{2}(x_1^2+2x_1y_1+y_1^2)+2\left(\frac{x_1^2}{2}-\frac{y_1^2}{2}\right)-1=0$$

$$\Rightarrow 3(x_1^2-2x_1y_1+y_1^2)+3(x_1^2+2x_1y_1+y_1^2)+2(x_1^2-y_1^2)-2=0$$

$$\Rightarrow 3x_1^2-6x_1y_1+3y_1^2+3x_1^2+6x_1y_1+3y_1^2+2x_1^2-2y_1^2-2=0$$

$$\Rightarrow 8x_1^2+4y_1^2-2=0$$

$\Rightarrow 4x_1^2 + 2y_1^2 - 1 = 0$

ইহাই নির্ণেয় রূপান্তরিত সমীকরণ।

Ex – 19

অক্ষের দিক অপরিবর্তিত রেখে মূলবিন্দুকে $(1, -2)$ বিন্দুতে স্থানান্তর করলে প্রদত্ত সমীকরণের রূপান্তরিত সমীকরণ হবে।

$x = x_1 + \alpha \qquad\qquad y = y_1 + \beta$

$= x_1 + 1 \qquad\qquad = y_1 - 2$

প্রদত্ত সমীকরণ

$14x^2 - 4xy + 11y^2 - 36x + 48y + 41 = 0$

$\Rightarrow 14(x_1+1)^2 - 4(x_1+1)(y_1-2) + 11(y_1-2)^2 - 36(x_1+1) + 48(y_1-2) + 41 = 0$

$\Rightarrow 14(x_1^2 + 2x_1 + 1) - 4(x_1y_1 - 2x_1 + y_1 - 2) + 11(y_1^2 - 4y_1 + 4) - 36x_1 - 36 + 48y_1 - 96 + 41 = 0$

$\Rightarrow 14x_1^2 + 28x_1 + 14 - 4x_1y_1 + 8x_1 - 4y_1 + 8 + 11y_1^2 - 44y_1 + 44 - 36x_1 + 48y_1 - 91 = 0$

$\Rightarrow 14x_1^2 + 11y_1^2 - 4x_1y_1 - 25 = 0$

এখন, $(x_1, y_1) = (x, y)$ বসিয়ে

$\therefore 14x^2 + 11y^2 - 4xy - 25 = 0$ ——— (i)

আবার, অক্ষকে $\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ কোণে আবর্তন করিলে (i) নং এর রূপান্তরিত সমীকরণ হবে,

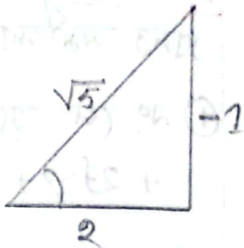
$14x^2 - 4xy + 11y^2 - 25 = 0$

$\Rightarrow 14(x_1\cos\theta - y_1\sin\theta)^2 - 4(x_1\cos\theta - y_1\sin\theta)(x_1\sin\theta + y_1\cos\theta) + 11(x_1\sin\theta + y_1\cos\theta)^2 - 25 = 0$ ——— (ii)

এখানে,

$$\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \tan\theta = -\frac{1}{2}$$



$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

(ii) নং হতে পাই,

$$14\left(\frac{x_1 2}{\sqrt{5}} + \frac{y_1}{\sqrt{5}}\right)^2 - 4\left(\frac{2x_1}{\sqrt{5}} + \frac{y_1}{\sqrt{5}}\right)\left(-\frac{x_1}{\sqrt{5}} + \frac{2y_1}{\sqrt{5}}\right) + 11\left(-\frac{x_1}{\sqrt{5}} + \frac{2y_1}{\sqrt{5}}\right)^2 - 25 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{14}{(\sqrt{5})^2}(2x_1+y_1)^2 - 4\left(\frac{2x_1+y_1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{2y_1-x_1}{\sqrt{5}}\right) + \frac{11}{(\sqrt{5})^2}(2y_1-x_1)^2 - 25 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{14}{5}(4x_1^2+4x_1y_1+y_1^2) - \frac{4}{5}(2x_1+y_1)(2y_1-x_1) + \frac{11}{5}(4y_1^2-4x_1y_1+x_1^2) - 25 = 0$$

$$\Rightarrow 56x_1^2+56x_1y_1+14y_1^2-4(4x_1y_1-2x_1^2+2y_1^2-x_1y_1)+44y_1^2-44x_1y_1+11x_1^2-125=0$$

$$\Rightarrow 67x_1^2+12x_1y_1+58y_1^2-12x_1y_1+8x_1^2-8y_1^2-125=0$$

$$\Rightarrow 75x_1^2+50y_1^2-125=0$$

$$\Rightarrow 3x_1^2+2y_1^2-5=0$$

এখন, $(x_1, y_1) = (x, y)$ বসিয়ে

$$\therefore 3x^2+2y^2-5=0$$

ইহাই নির্ণেয় রূপান্তরিত সমীকরণ।

$*a_1+b_1=a+b$
$*a_1b_1-h_1^2=ab-h^2$
$*a_1b_1=ab-h^2$

Ex - 23

প্রদত্ত সমীকরণ $19x^2+5xy+7y^2-13=0$ —— (i)

(i) নং কে বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ এর সাথে তুলনা করে পাই।

যেখানে,

$a=19$, $b=7$, $h=\frac{5}{2}$, $c=-13$

$f=0$, $g=0$

ধরি, xy পদ অপসারণ করার জন্য রূপান্তরিত সমীকরণ হবে $a_1x^2+b_1y^2+c=0$

$\Rightarrow a_1x^2+b_1y^2-13=0$ —— (ii)

এখন,

$a_1+b_1=a+b$

$=19+7=26$

$\therefore a_1b_1=ab-h^2$

$=(19\times7)-\left(\frac{5}{2}\right)^2$

$=133-\frac{25}{4}$

$=\frac{532-25}{4}=\frac{507}{4}$

$\therefore (a_1-b_1)^2=(a_1+b_1)^2-4a_1b_1$

$=(26)^2-4\cdot\frac{507}{4}$

$=676-507$

$(a_1-b_1)=\sqrt{169}=13$

$\therefore a_1+b_1=26$
$a_1-b_1=13$
$2a_1=39$
$\Rightarrow a_1=\frac{39}{2}$

$a_1+b_1=26$
$a_1-b_1=13$ ($-$, $+$, $-$)
$2b_1=13$
$\Rightarrow b_1=\frac{13}{2}$

$*\alpha = \frac{hf-bg}{ab-h^2}$ (হাগ ব্যাগ) $*\beta = \frac{gh-af}{ab-h^2}$ (গাফ)

$* c_1 = \alpha g + \beta f + c$

---

a_1 ও b_1 এর মান (ii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই

$$\Rightarrow \frac{39}{2}x^2 + \frac{13}{2}y^2 - 13 = 0$$

$$\Rightarrow 39x^2 + 13y^2 - 26 = 0$$

$$\Rightarrow 13(3x^2 + y^2 - 2) = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 + y^2 - 2 = 0$$

$$\therefore 3x^2 + y^2 = 2$$

ইহাই নির্ণেয় রূপান্তরিত সমীকরণ।

Ex-26:

প্রদত্ত সমীকরণ $17x^2 + 18xy - 7y^2 - 16x - 32y - 18 = 0$ ——— (i)

(i) নং কে সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই।

$$a = 17,\ b = -7,\ c = -18,\ f = -16,\ g = -8,\ h = 9$$

এখন, একঘাত পদ (x, y) অপসারণের জন্য মূলবিন্দুকে (α, β) বিন্দুতে স্থানান্তর করে পাই

$$\alpha = \frac{hf - bg}{ab - h^2}$$

$$= \frac{(9 \times -16) - (-7 \times -8)}{(17 \times -7) - 9^2}$$

$$= \frac{-144 - (+56)}{-119 - 81}$$

$$= \frac{-144 - 56}{-200}$$

$$= \frac{-200}{-200} = 1$$

$$\beta = \frac{gh - af}{ab - h^2}$$

$$= \frac{(-8\times 9) - (17\times -16)}{(17\times -7) - 9^2}$$

$$= \frac{200}{-200} = -1$$

$$\therefore c_1 = \alpha g + \beta f + c$$

$$= 1(-8) + (-1\times -16) + (-18)$$

$$= -8 + 16 - 18$$

$$= -10$$

মনেকরি, (i) নং এর একঘাত পদগুলি অপসারণ করলে রূপান্তরিত সমীকরণ

$$17x^2 + 18xy - 7y^2 + c_1 = 0$$

$$\Rightarrow 17x^2 + 18xy - 7y^2 - 10 = 0$$

$$\Rightarrow 17x^2 + 18xy - 7y^2 = 10 \quad \text{--- (ii)}$$

(ii) নং এ xy পদ অপসারণ করলে রূপান্তরিত সমীকরণ হবে

$$a_1x^2 + b_1y^2 + c_1 = 0$$

$$\Rightarrow a_1x^2 + b_1y^2 - 10 = 0 \quad \text{--- (iii)}$$

$$\therefore a_1 + b_1 = a + b = 17 - 7 = 10$$

$$\therefore a_1b_1 = ab - h^2 = (17\times -7) - 9^2 = -119 - 81$$

$$= -200$$

$$\therefore (a_1 - b_1)^2 = (a_1 + b_1)^2 - 4a_1b_1$$

$$= (10)^2 - 4\cdot(-200)$$

$$= 100 + 800$$

$a_1 - b_1 = \sqrt{900} = 30$

$a_1 + b_1 = 10$
$a_1 - b_1 = 30$
$2a_1 = 40$
$\Rightarrow a_1 = 20$

$a_1 + b_1 = 10$
$a_1 - b_1 = 30$
$2b_1 = -20$
$\Rightarrow b_1 = -10$

$\therefore a_1$ ও b_1 এর মান (iii) নং এ বসিয়ে পাই

$$a_1x^2 + b_1y^2 - 10 = 0$$
$$\Rightarrow 20x^2 - 10y^2 - 10 = 0$$
$$\Rightarrow 10(2x^2 - y^2 - 1) = 0$$
$$\therefore 2x^2 - y^2 - 1 = 0$$

ইহাই নির্ণেয় রূপান্তরিত সমীকরণ।

Ex – 27:

প্রদত্ত সমীকরণ $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ —— (1)

অক্ষদ্বয়কে θ কোণে আবর্তন করি, মূলবিন্দুকে স্থির রাখিয়ে আয়তাকার অক্ষদ্বয়কে θ কোণে আবর্তন করা হইল। (1) নং এর রূপান্তরিত সমীকরণ হবে

$$a(x_1\cos\theta - y_1\sin\theta)^2 + 2h(x_1\cos\theta - y_1\sin\theta)(x_1\sin\theta + y_1\cos\theta) + b(x_1\sin\theta + y_1\cos\theta)^2 + 2g(x_1\cos\theta - y_1\sin\theta) + 2f(x_1\sin\theta + y_1\cos\theta) + c = 0$$

$$\Rightarrow a(x_1^2\cos^2\theta - 2x_1y_1\sin\theta\cos\theta + y_1^2\sin^2\theta) + 2h(x_1^2\sin\theta\cos\theta + x_1y_1\cos^2\theta - x_1y_1\sin^2\theta - y_1^2\sin\theta\cos\theta) + b(x_1^2\sin^2\theta + 2x_1y_1\sin\theta\cos\theta + y_1^2\cos^2\theta) + 2gx_1\cos\theta - 2gy_1\sin\theta + 2fx_1\sin\theta + 2fy_1\cos\theta + c = 0$$

$\Rightarrow a x_1^2\cos^2\theta - 2ax_1y_1\sin\theta\cos\theta + ay_1^2\sin^2\theta + 2hx_1^2\sin\theta\cos\theta + 2hx_1y_1\cos^2\theta - 2hx_1y_1\sin^2\theta - 2hy_1^2\sin\theta\cos\theta + bx_1^2\sin^2\theta + 2bx_1y_1\sin\theta\cos\theta + by_1^2\cos^2\theta + 2gx_1\cos\theta - 2gy_1\sin\theta + 2fx_1\sin\theta + 2fy_1\cos\theta + c = 0$

$\Rightarrow (a\cos^2\theta + b\sin^2\theta + 2h\sin\theta\cos\theta)x_1^2 + (a\sin^2\theta + b\cos^2\theta - 2h\sin\theta\cos\theta)y_1^2 + 2x_1(g\cos\theta + f\sin\theta) + 2y_1(-g\sin\theta + f\cos\theta) + 2x_1y_1(-a\cos\theta\sin\theta + b\sin\theta\cos\theta + h\cos^2\theta - h\sin^2\theta) + c = 0$

$\Rightarrow a_1x_1^2 + 2h_1x_1y_1 + b_1y_1^2 + 2g_1x_1 + 2f_1y_1 + c_1 = 0$

এখন,

$(x_1, y_1) = (x, y)$ বসিয়ে

$\therefore a_1x^2 + 2h_1xy + b_1y^2 + 2g_1x^2 + 2f_1y^2 + c_1 = 0$

Ex-27:

যেখানে,

$a_1 = a\cos^2\theta + b\sin^2\theta + 2h\sin\theta\cos\theta$

$b_1 = a\sin^2\theta + b\cos^2\theta - 2h\sin\theta\cos\theta$

$g_1 = g\cos\theta + f\sin\theta$

$f_1 = -g\sin\theta + f\cos\theta$

$h_1 = -a\cos\theta\sin\theta + b\sin\theta\cos\theta + h\cos^2\theta - h\sin^2\theta$

$\therefore a_1 + b_1 = a\cos^2\theta + b\sin^2\theta + 2h\sin\theta\cos\theta + a\sin^2\theta + b\cos^2\theta - 2h\sin\theta\cos\theta$

$*2\cos^2\theta = \cos 2\theta + 1$

$*2\sin^2\theta = 1 - \cos 2\theta$

$= a(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + b(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$

$= a + b$

$\therefore a_1 + b_1 = a + b$ অভ্যন্তর রাশি।

আবার,
$g_1^2 + f_1^2 = (g\cos\theta + f\sin\theta)^2 + (-g\sin\theta + f\cos\theta)^2$

$= g^2\cos^2\theta + \cancel{2gf\sin\theta\cos\theta} + f^2\sin^2\theta + g^2\sin^2\theta - \cancel{2gf\sin\theta\cos\theta} + f^2\cos^2\theta$

$= g^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + f^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$

$= g^2 + f^2$

$\therefore g_1^2 + f_1^2 = g^2 + f^2$ অভ্যন্তর রাশি।

এখন,
$2a_1 = 2(a\cos^2\theta + b\sin^2\theta + 2h\sin\theta\cos\theta)$

$= 2a\cos^2\theta + 2b\sin^2\theta + 4h\sin\theta\cos\theta$

$= a \cdot 2\cos^2\theta + b\, 2\sin^2\theta + 2h \cdot 2\sin\theta\cos\theta$

$= a(\cos 2\theta + 1) + b(1 - \cos 2\theta) + 2h \cdot \sin 2\theta$

$= a\cos 2\theta + a + b - b\cos 2\theta + 2h\sin 2\theta$

$= (a+b) + \{\cos 2\theta(a-b) + 2h\sin 2\theta\}$

$2b_1 = 2(a\sin^2\theta + b\cos^2\theta - 2h\sin\theta\cos\theta)$

$= 2a\sin^2\theta + 2b\cos^2\theta - 4h\sin\theta\cos\theta$

$= a \cdot 2\sin^2\theta + b \cdot 2\cos^2\theta - 2h \cdot 2\sin\theta\cos\theta$

$= a(1 - \cos 2\theta) + b(\cos 2\theta + 1) - 2h\sin 2\theta$

$$= a - a\cos 2\theta + b\cos 2\theta + b - 2h\sin 2\theta$$

$$= (a+b) - \{\cos 2\theta\,(a-b) + 2h\sin 2\theta\}$$

$$2h_1 = 2(-a\sin\theta\cos\theta + b\sin\theta\cos\theta + h\cos^2\theta - h\sin^2\theta)$$

$$= -a\cdot 2\sin\theta\cos\theta + b\cdot 2\sin\theta\cos\theta + 2h\cos^2\theta - 2h\sin^2\theta$$

$$= -a\sin 2\theta + b\sin 2\theta + h\cdot 2\cos^2\theta - h\cdot 2\sin^2\theta$$

$$= -\sin 2\theta\,(a-b) + h(\cos 2\theta + 1) - h(1 - \cos 2\theta)$$

$$= -\sin 2\theta\,(a-b) + h\cos 2\theta + h - h + h\cos 2\theta$$

$$= -\sin 2\theta\,(a-b) + 2h\cos 2\theta$$

$$= 2h\cos 2\theta - (a-b)\sin 2\theta$$

$$\therefore\ 2a_1 \times 2b_1 = \{(a+b) + \cos 2\theta\,(a-b) + 2h\sin 2\theta\} \times \{(a+b) - \{\cos 2\theta\,(a-b) + 2h\sin 2\theta\}\}$$

$$\Rightarrow 4a_1b_1 = (a+b)^2 - (a+b)(a-b)\cos 2\theta - (a+b)2h\sin 2\theta + \cos 2\theta\,(a+b)(a-b) - \cos^2 2\theta\,(a-b)^2 - 2h\sin 2\theta\cos 2\theta\,(a-b) + (a+b)2h\sin 2\theta - 2h\sin 2\theta\cos 2\theta\,(a-b) - 4h^2\sin^2 2\theta$$

$$= (a+b)^2 - (a^2-b^2)\cos 2\theta + (a+b)4h\sin 2\theta - \cos^2 2\theta\,(a-b)^2 - 4h\sin 2\theta\cos 2\theta - 4h^2\sin^2 2\theta$$

$$= (a+b)^2 \cancel{+ 4h\sin 2\theta (a+b)} - \cos^2 2\theta (a-b)^2 - 4h^2\sin^2 2\theta$$
$$- 4h\sin 2\theta \cos 2\theta (a-b)$$

$$= (a+b)^2 - 4h\sin 2\theta \cos 2\theta (a-b) - 4h^2\sin^2 2\theta - \cos^2 2\theta (a-b)^2$$
$$= (a+b)^2 - \{\{\cos 2\theta (a-b)\}^2 + 2\cdot\cos 2\theta (a-b)\cdot 2h\sin 2\theta + (2h\sin 2\theta)^2\}$$
$$= (a+b)^2 - \{\cos 2\theta (a-b) + 2h\sin 2\theta\}^2$$

$$\therefore (2h_1)^2 = \{2h\cos 2\theta - (a-b)\sin 2\theta\}^2$$
$$\Rightarrow 4h_1^2 = (2h\cos 2\theta)^2 - 2\cdot 2h\cos 2\theta\cdot (a-b)\sin 2\theta + \{(a-b)\sin 2\theta\}^2$$
$$= 4h^2\cos^2 2\theta - 4h(a-b)\sin 2\theta \cos 2\theta + (a-b)^2\sin^2 2\theta$$

এখন,
$$4a_1b_1 - 4h_1^2 = (a+b)^2 - \{\cos 2\theta (a-b) + 2h\sin 2\theta\}^2 - 4h^2\cos^2 2\theta$$
$$+ 4h(a-b)\sin 2\theta \cos 2\theta - (a-b)^2\sin^2 2\theta$$

$$\Rightarrow 4(a_1b_1 - h_1^2) = (a+b)^2 - (a-b)^2\cos^2 2\theta - 4h(a-b)\cos 2\theta \sin 2\theta$$
$$- 4h^2\sin^2 2\theta - 4h^2\cos^2 2\theta + 4h(a-b)\cos 2\theta \sin 2\theta$$
$$- (a-b)^2\sin^2 2\theta$$

$$\Rightarrow 4(a_1b_1 - h_1^2) = (a+b)^2 - (a-b)^2(\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta) - 4h^2(\sin^2 2\theta$$
$$+ \cos^2 2\theta)$$

$$\Rightarrow 4(a_1b_1-h_1^2) = (a+b)^2-(a-b)^2-4h^2$$

$$\Rightarrow 4(a_1b_1-h_1^2) = 4ab-4h^2$$

$$\Rightarrow 4(a_1b_1-h_1^2) = 4(ab-h^2)$$

$$\therefore a_1b_1-h_1^2 = ab-h^2$$

সুতরাং $a_1b_1-h_1^2 = ab-h^2$ অসুস্থ বাকি।

অধ্যায় – ২য়

২

উপপাদ্য – ২:

মনেকরি, সাধারন দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ ——— (i) দুইটি সরলরেখা প্রকাশ করে। এবং ঐ সরলরেখাদ্বয় পরস্পর কে (α,β) বিন্দুতে ছেদ করে। এখন অক্ষদ্বয়ের দিকের কোনো পরিবর্তন না করে মূলবিন্দুকে (α,β) বিন্দুতে স্থানান্তর করিলে নতুন অক্ষদ্বয় অনুসারে (i) নং এর রূপান্তরিত সমীকরণ হবে ⟶

$$a(x_1+\alpha)^2+2h(x_1+\alpha)(y_1+\beta)+b(y_1+\beta)^2+2g(x_1+\alpha)+2f(y_1+\beta)+c=0$$

$$\Rightarrow a(x_1^2+2x_1\alpha+\alpha^2)+2h(x_1y_1+x_1\beta+y_1\alpha+\alpha\beta)+b(y_1^2+2y_1\beta+\beta^2)$$
$$+2gx_1+2g\alpha+2fy_1+2f\beta+c=0$$

$$\Rightarrow ax_1^2+2ax_1\alpha+a\alpha^2+2hx_1y_1+2hx_1\beta+2hy_1\alpha+2h\alpha\beta+by_1^2+2by_1\beta$$
$$+b\beta^2+2gx_1+2g\alpha+2fy_1+2f\beta+c=0$$

$$\Rightarrow ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+2x_1(a\alpha+h\beta+g)+2y_1(h\alpha+b\beta+f)+a\alpha^2$$
$$+2h\alpha\beta+b\beta^2+2g\alpha+2f\beta+c=0 \quad \text{——— (ii)}$$

যেহেতু (ii) নং সমীকরণটি নতুন মূলবিন্দুগামী সরলরেখা প্রকাশ করে সেহেতু সমীকরণটি x_1, y_1 এর একটি সমমাত্রিক দ্বিঘাত সমীকরণ হবে।

∴ (ii) নং সমীকরণ হতে

$$\therefore 2(a\alpha+h\beta+g)=0$$
$$\Rightarrow a\alpha+h\beta+g=0 \quad \text{——— (iii)}$$

$$\therefore 2(h\alpha+b\beta+f)=0$$
$$\Rightarrow h\alpha+b\beta+f=0 \quad \text{——— (iv)}$$

$\therefore a\alpha^2 + 2h\alpha\beta + b\beta^2 + 2g\alpha + 2f\beta + c = 0$

$\Rightarrow a\alpha^2 + h\alpha\beta + h\alpha\beta + b\beta^2 + g\alpha + g\alpha + f\beta + f\beta + c = 0$

$\Rightarrow a\alpha^2 + h\alpha\beta + g\alpha + b\beta^2 + h\alpha\beta + f\beta + g\alpha + f\beta + c = 0$

$\Rightarrow \alpha(a\alpha + h\beta + g) + \beta(b\beta + h\alpha + f) + g\alpha + f\beta + c = 0$

$\Rightarrow \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 + g\alpha + f\beta + c = 0$ [(iii) ও (iv) এর মান বসে

$\Rightarrow g\alpha + f\beta + c = 0$ ——— (v)

এখন,

(iii), (iv) ও (v) নং হতে α, β অপসরণ করে পাই

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0 \quad \text{——— (vi)}$$

(vi) নং এর বামপক্ষের রাশিটিকে Δ দ্বারা প্রকাশ করা হয়

$$\Delta = \begin{vmatrix} \overset{+}{a} & \overset{-}{h} & \overset{+}{g} \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow a(bc - f^2) - h(ch - fg) + g(fh - bg) = 0$

$\Rightarrow abc - af^2 - ch^2 + fgh + fgh - bg^2 = 0$

$\Rightarrow abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$

এখন,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$$

(proved)

আবার,

ছেদবিন্দুর স্থানাংক নির্ণয়:

(iii) ও (iv) নং সমীকরণ আরগুনন / বজ্রগুনন করে পাই

$a\alpha + h\beta + g = 0$

$h\alpha + b\beta + f = 0$

$$\frac{\alpha}{hf - bg} = \frac{\beta}{gh - af} = \frac{1}{ab - h^2}$$

এখানে, $\dfrac{\alpha}{hf - bg} = \dfrac{1}{ab - h^2}$ $\qquad$ $\dfrac{\beta}{gh - af} = \dfrac{1}{ab - h^2}$

$\Rightarrow \alpha = \dfrac{hf - bg}{ab - h^2}$ $\qquad$ $\Rightarrow \beta = \dfrac{gh - af}{ab - h^2}$

$\therefore$ ছেদবিন্দুর স্থানাংক $(\alpha, \beta) = \left(\dfrac{hf - bg}{ab - h^2}, \dfrac{gh - af}{ab - h^2}\right)$

(Showed)

উপপাদ্য – 4:

মনেকরি, $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ——— (i)

(i) নং দ্বারা দুটি সমান্তরাল সরলরেখা নির্দেশ করলে আমরা পাই

$lx + my + n = 0$

$lx + my + n' = 0$

এখন,

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = (lx + my + n)(lx + my + n')$

$= l^2x^2 + lmxy + lxn' + m^2y^2 + lmxy$

$+ mn'y + lnx + mny + nn'$

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c = l^2x^2+2lmxy+m^2y^2$$
$$lx(n+n')+my(n+n')+nn' \text{ ——— } (ii)$$

(ii) নং এর উভয়পক্ষের সহগ সমীকৃত করে পাই

$a = l^2$ ——— (iii)

$h = lm$ ——— (iv)

$b = m^2$ ——— (v)

$2g = l(n+n')$ ——— (vi)

$2f = m(n+n')$ ——— (vii)

$c = nn'$ ——— (viii)

(iii) ও (v) গুণ করে পাই

$ab = l^2m^2$

$\Rightarrow ab = (lm)^2$

$\Rightarrow ab = h^2$

$\Rightarrow \frac{ab}{bh} = \frac{h^2}{bh}$ [bh দ্বারা ভাগ করে]

$\Rightarrow \frac{a}{h} = \frac{h}{b}$

$\therefore a:h = h:b$ ——— (ix)

(iv) ও (vii) নং গুণ করে পাই

$h \times 2f = lm \times m(n+n')$

$\Rightarrow 2hf = lm^2(n+n')$ ——— (x)

(v) ও (vi) গুণ করে পাই

$b \times 2g = m^2 \times l(n+n')$

$\Rightarrow 2bg = lm^2(n+n')$ ——— (xi)

(x) ÷ (xi) করে পাই

$$\frac{2hf}{2bg} = \frac{lm^2(n+n')}{lm^2(n+n')}$$

$$\Rightarrow \frac{hf}{bg} = 1$$

$$\Rightarrow hf = bg$$

$$\Rightarrow \frac{h}{b} = \frac{g}{f}$$

$\Rightarrow h:b = g:f$ ——— (xii)

(ix) ও (xii) নং হতে

$$a:h = h:b = g:f$$

আবার, (iii) ও (iv) হতে $\longrightarrow h^2 = ab$

(x) ও (xi) হতে $\longrightarrow hf = bg$

$\Rightarrow (hf)^2 = (bg)^2$ [বর্গ করে

$$\Rightarrow abf^2 = b^2g^2$$

$$\Rightarrow af^2 = bg^2$$

(vi) নং হতে, $l(n+n') = 2g$

$$\Rightarrow n+n' = \frac{2g}{l}$$

$\Rightarrow n+n' = \frac{2g}{\sqrt{a}}$ [(iii) নং হতে $l^2 = a$

$\Rightarrow l = \sqrt{a}$

(vii) নং হতে,

$$m(n+n') = 2f$$

$$\Rightarrow n+n' = \frac{2f}{m}$$

$$\Rightarrow n+n' = \frac{2f}{\sqrt{b}}$$

[(v) নং হতে $m^2 = b$
$\Rightarrow m = \sqrt{b}$]

সরলরেখা দুটির মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \left|\frac{c_1 - c_2}{\sqrt{x\text{ সহগ}^2 + y\text{ সহগ}^2}}\right|$

$$= \left|\frac{n-n'}{\sqrt{l^2+m^2}}\right|$$

$$= \frac{\sqrt{(n-n')^2}}{\sqrt{l^2+m^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{(n+n')^2 - 4nn'}}{\sqrt{l^2+m^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\left(\frac{2g}{\sqrt{a}}\right)^2 - 4c}}{\sqrt{l^2+m^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{4g^2}{a} - 4c}}{\sqrt{l^2+m^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{4g^2 - 4ac}{a}}}{\sqrt{l^2+m^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{4(g^2-ac)}{a}}}{\sqrt{l^2+m^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{4(g^2-ac)}{a} \times \frac{1}{(l^2+m^2)}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{g^2-ac}{a(a+b)}}$$

অনুরূপ,

$$= \frac{\sqrt{(n+n')^2-4nn'}}{\sqrt{l^2+m^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\left(\frac{2f}{\sqrt{b}}\right)^2-4c}}{\sqrt{l^2+m^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{4f^2}{b}-4c}}{\sqrt{a+b}}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{4f^2-4bc}{b}}}{\sqrt{a+b}}$$

$$= \sqrt{\frac{4(f^2-bc)}{b} \times \frac{1}{a+b}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{f^2-bc}{b(a+b)}}$$

$\therefore$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $2\sqrt{\frac{g^2-ac}{a(a+b)}}$, $2\sqrt{\frac{f^2-bc}{b(a+b)}}$

এখন, যদি সরলরেখাদ্বয় সমান্তরাল হয়, তবে $h^2-ab=0$
এবং রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব শূন্য হবে। অর্থাৎ

$$h^2-ab=0 \quad \text{———} \quad (xiii)$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{\frac{g^2-ac}{a(a+b)}}=0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{g^2-ac}{a(a+b)}}=0$$

$$\Rightarrow \frac{g^2-ac}{a(a+b)}=0$$

$$\Rightarrow g^2-ac=0$$

$$\Rightarrow g^2=ac \quad \text{———} \quad (xiv)$$

আবার,

$$2\sqrt{\frac{f^2-bc}{b(a+b)}}=0$$

$$\Rightarrow \frac{f^2-bc}{b(a+b)}=0$$

$$\Rightarrow f^2-bc=0$$

$$\Rightarrow f^2=bc \quad \text{———} \quad (xv)$$

(xiv) ÷ (xv) করে পাই

$$\frac{g^2}{f^2}=\frac{ac}{bc}$$

$$\Rightarrow \frac{f^2}{g^2}=\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow af^2=bg^2 \quad \text{———} \quad (xvi)$$

এখন, (xiii) ÷ (xiv)

$$\frac{h^2}{g^2} = \frac{ab}{ac}$$

$$\Rightarrow \frac{h^2}{g^2} = \frac{b}{c}$$

$$\Rightarrow ch^2 = bg^2 \text{ ——— (xvii)}$$

এখন, (xvi) ও (xvii) হতে পাই

$$af^2 = bg^2 = ch^2 \quad \text{(proved)}$$

উপপাদ্য — 5

প্রদত্ত সমমাত্রিক দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ——— (i)

ধরি, (i) নং সমীকরণটি দুটি সরলরেখা প্রকাশ করলে সরলরেখাদ্বয় হবে

$$\left.\begin{array}{ll} y = m_1x & y = m_2x \\ \Rightarrow y - m_1x = 0 & \Rightarrow y - m_2x = 0 \end{array}\right\} \text{(ii)}$$

(i) ও (ii) নং হতে পাই

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = (y - m_1x)(y - m_2x)$$

$$= y^2 - m_2xy - m_1xy + m_1m_2x^2$$

$$\Rightarrow ax^2 + 2hxy + by^2 = m_1m_2x^2 - xy(m_1 + m_2) + y^2$$

$$\Rightarrow ax^2 + 2hxy + by^2 = m_1m_2x^2 + 2 \cdot \frac{-(m_1+m_2)}{2} + 1 \cdot y^2 \text{ ——— (iii)}$$

(iii) নং সমীকরণের উভয় পক্ষের সহগ সমীকৃত করে পাই

$$a = m_1m_2 \qquad h = -\frac{(m_1+m_2)}{2} \qquad b = 1$$

এখন, প্রদত্ত সরলরেখাদ্বয় হতে সমদূরবর্তী বিন্দু সমূহের সঞ্চার পথ উক্ত সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডক হবে।

সুতরাং,

$y = m_1x$ ও $y = m_2x$ সরলরেখা দ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হবে।

$$\Rightarrow \frac{y - m_1x}{\sqrt{1^2 + (-m_1)^2}} = \pm \frac{y - m_2x}{\sqrt{1^2 + (-m_2)^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{y - m_1x}{\sqrt{1 + m_1^2}} = \pm \frac{y - m_2x}{\sqrt{1 + m_2^2}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y - m_1x}{\sqrt{1 + m_1^2}}\right)^2 = \left(\pm \frac{y - m_2x}{\sqrt{1 + m_2^2}}\right)^2$$ বর্গ করে

$$\Rightarrow \frac{(y - m_1x)^2}{\left(\sqrt{1 + m_1^2}\right)^2} = \frac{(y - m_2x)^2}{\left(\sqrt{1 + m_2^2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{(y - m_1x)^2}{(1 + m_1^2)} = \frac{(y - m_2x)^2}{(1 + m_2^2)}$$

$$\therefore (y - m_1x)^2 (1 + m_2^2) = (y - m_2x)^2 (1 + m_1^2)$$

$$\Rightarrow (y^2 - 2m_1xy + m_1^2x^2)(1 + m_2^2) = (y^2 - 2m_2xy + m_2^2x^2)(1 + m_1^2)$$

$$\Rightarrow y^2 - 2m_1xy + m_1^2x^2 + m_2^2y^2 - 2m_1m_2^2xy + \cancel{m_1^2m_2^2x^2} =$$
$$y^2 - 2m_2xy + m_2^2x^2 + m_1^2y^2 - 2m_1^2m_2xy + \cancel{m_1^2m_2^2x^2}$$

$$\Rightarrow m_1^2x^2 + m_2^2y^2 - 2m_1xy - 2m_1m_2^2xy = m_2^2x^2 + m_1^2y^2 - 2m_2xy - 2m_1^2m_2xy$$

$$\Rightarrow m_1^2x^2 + m_2^2y^2 - m_2^2x^2 - m_1^2y^2 = 2m_1xy + 2m_1m_2^2xy - 2m_2xy - 2m_1^2m_2xy$$

$$\Rightarrow x^2(m_1^2 - m_2^2) - y^2(m_1^2 - m_2^2) = 2xy(m_1 - m_2) - 2m_1m_2xy(m_1 - m_2)$$

$$\Rightarrow x^2(m_1+m_2)(m_1-m_2) - y^2(m_1+m_2)(m_1-m_2) = 2xy(m_1-m_2) - 2m_1m_2xy(m_1-m_2) \quad \text{(iv)}$$

এখন, $h = -\dfrac{(m_1+m_2)}{2}$ $\therefore m_1m_2 = a$

$$\Rightarrow -(m_1+m_2) = 2h$$

$$\Rightarrow (m_1+m_2) = -2h$$

$$\therefore (m_1-m_2)^2 = (m_1+m_2)^2 - 4m_1m_2$$

$$= (-2h)^2 - 4a$$

$$= 4h^2 - 4a$$

$$(m_1-m_2) = \sqrt{4(h^2-a)}$$

$$\Rightarrow m_1 - m_2 = 2\sqrt{h^2-a}$$

(iv) নং হতে পাই

$$\Rightarrow x^2(-2h)(2\sqrt{h^2-a}) - y^2(-2h)(2\sqrt{h^2-a}) = 2xy(2\sqrt{h^2-a}) - 2axy(2\sqrt{h^2-a})$$

$$\Rightarrow -2hx^2 + 2hy^2 = 2xy - 2axy$$

$$\Rightarrow -2h(x^2-y^2) = -2xy(a-1)$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-y^2}{a-1} = \frac{xy}{h}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-y^2}{a-b} = \frac{xy}{h} \quad [b=1 \text{ (iii) নং হতে}$$

(proved)

উপপাদ্য – 6

প্রমাণ দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ দ্বারা ২টি সরলরেখা প্রকাশ করে যার ছেদবিন্দু (α, β) এখন অক্ষদ্বয়ের দিকের কোনো পরিবর্তন না করে মূলবিন্দুকে (α, β) বিন্দুতে স্থানান্তর করলে নতুন অক্ষদ্বয় সাপেক্ষে সমীকরণটির রূপান্তরিত সমীকরণ হবে।

$$ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2=0 \text{ ——— (1)}$$

এবং (α, β) বিন্দুতে মূলবিন্দু স্থানান্তরিত হলে

$$x = x_1+\alpha \qquad \Rightarrow x_1 = x-\alpha$$

$$y = y_1+\beta \qquad \Rightarrow y_1 = y-\beta$$

আমরা জানি,

$ax^2+2hxy+by^2=0$ রেখার দ্বারা যদি দুটি সরলরেখা প্রকাশ করে তাদের অন্তর্গত সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হবে।

$$\frac{x^2-y^2}{a-b} = \frac{xy}{h}$$

তাহলে (1) নং রেখাদ্বয় দ্বারা সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হবে

$$\Rightarrow \frac{x_1^2 - y_1^2}{a-b} = \frac{x_1 y_1}{h}$$

$$\Rightarrow \frac{(x-\alpha)^2 - (y-\beta)^2}{a-b} = \frac{(x-\alpha)(y-\beta)}{h}$$

(proved)

Ex - 1

দে. আছে, x, y এর সমমাত্রিক দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ —— (i)

$$\frac{ax^2}{x^2} + \frac{2hxy}{x^2} + \frac{by^2}{x^2} = 0$$ [x^2 দ্বারা ভাগ করে

$$\Rightarrow a + 2h\frac{y}{x} + b\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow b\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2h\left(\frac{y}{x}\right) + a = 0 \text{ —— (ii)}$$

এখানে, (ii) নং $\frac{y}{x}$ এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ

ধরি, (ii) নং সমীকরণের মূল দুইটি (m_1, m_2)

তাহলে (ii) নং হতে পাই,

$$b\cdot\left(\frac{y}{x} - m_1\right)\left(\frac{y}{x} - m_2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y}{x} - m_1\right)\left(\frac{y}{x} - m_2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} - m_1 = 0 \quad \text{অথবা} \quad \frac{y}{x} - m_2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = m_1 \qquad \Rightarrow \frac{y}{x} = m_2$$

$$\therefore y = m_1 x \qquad \therefore y = m_2 x$$

∴ ইহাই নির্ণেয় উক্ত সমীকরণের দুটি মূলবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ

Ex-3

প্রদত্ত সমীকরণ $\lambda x^2 - 10xy + 12y^2 + 5x - 16y - 3 = 0$ —— (i)

এখন, $\lambda x^2 + 2(-5)xy + 12y^2 + 2\cdot\frac{5}{2}x + 2(-8)y + (-3) = 0$ —— (ii)

(ii) নং কে $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই।

$\lambda = a \quad h = -5 \quad b = 12 \quad g = \frac{5}{2} \quad f = -8$

$c = -3$

প্রদত্ত সমীকরণ একজোড়া সরলরেখা প্রকাশ করলে শর্তমতে,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda\cdot 12(-3) + 2\cdot(-8)\cdot\frac{5}{2}\cdot(-5) - \lambda(-8)^2 - 12\left(\frac{5}{2}\right)^2 - (3)(-5)^2 = 0$$

$$\Rightarrow -36\lambda + 200 - 64\lambda - 75 + 75 = 0$$

$$\Rightarrow -100\lambda + 200 = 0$$

$$\Rightarrow 100\lambda = 200$$

$$\therefore \lambda = 2$$

$\therefore \lambda = 2$ হলে প্রদত্ত সমীকরণ একজোড়া সরলরেখা প্রকাশ করবে।

Ex-4:

প্রদত্ত সমীকরণ $12x^2+7xy-12y^2-x+7y-1=0$ ——— (1)

(1) নং কে সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ এর সাথে তুলনা করে পাই

$a=12 \quad b=-12 \quad c=-1 \quad f=\frac{7}{2} \quad g=-\frac{1}{2} \quad h=\frac{7}{2}$

যদি (1) নং সমীকরণটি দুটি যুগল সরলরেখা প্রকাশ করে। তাহলে

$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$ হতে হবে

$$L.H.S = abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2$$

$$= 12\times-12\times-1+2\cdot\frac{7}{2}\cdot-\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{2}-12\left(\frac{7}{2}\right)^2-(-12)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2-(-1)\cdot\left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$=44-\frac{49}{4}-49\cdot3+3+\frac{49}{4}$$

$$=147-147=0 \quad \text{(proved)}$$

ধরি, ছেদবিন্দুর স্থানাংক (α,β)

$$\alpha=\frac{hf-bg}{ab-h^2}=\frac{\frac{7}{2}\cdot\frac{7}{2}-\left\{(-12)\cdot-\frac{1}{2}\right\}}{(12\times-12)-\left(\frac{7}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{\frac{49}{4}-6}{-144-\frac{49}{4}}$$

$$=\frac{\frac{49-24}{4}}{\frac{-576-49}{4}}$$

$$= \frac{25}{-625} \quad = -\frac{1}{25}$$

$$\beta = \frac{gh - af}{ab - h^2} = \frac{-\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{2} - 12\cdot\frac{7}{2}}{(12\times -12) - \left(\frac{7}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{-\frac{7}{4} - 42}{-144 - \frac{49}{4}}$$

$$= \frac{\frac{-7-168}{4}}{\frac{-576-49}{4}}$$

$$= \frac{-175}{-625} \quad = \frac{7}{25}$$

∴ ছেদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\alpha, \beta) = \left(-\frac{1}{25}, \frac{7}{25}\right)$

এখন,

নির্ণেয় সমীকরণ

$$12x^2 + 7xy - 12y^2 - x + 7y - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 12x^2 + x(7y-1) - 12y^2 + 7y - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 12x^2 + x(7y-1) + (-12y^2 + 7y - 1) = 0 \quad \text{———— (11)}$$

(11) নং হতে,

$$x = \frac{-(7y-1) \pm \sqrt{(7y-1)^2 - 4\cdot 12(-12y^2+7y-1)}}{2\cdot 12}$$

$$= \frac{-7y+1 \pm \sqrt{49y^2 - 14y + 1 + 576y^2 - 336y + 48}}{24}$$

$$= \frac{-7y+1 \pm \sqrt{625y^2 - 350y + 49}}{24}$$

$$= \frac{-7y+1 \pm \sqrt{(25y)^2 - 2\cdot 25y \cdot 7 + 7^2}}{24}$$

$$= \frac{-7y+1 \pm \sqrt{(25y-7)^2}}{24}$$

$$x = \frac{-7y+1 \pm (25y-7)}{24}$$

$\therefore x = \dfrac{-7y+1+(25y-7)}{24}$

$\Rightarrow 24x = 18y - 6$

$\Rightarrow 24x - 18y + 6 = 0$

$\Rightarrow 6(4x - 3y + 1) = 0$

$\therefore 4x - 3y + 1 = 0$

অথবা, $x = \dfrac{-7y+1-(25y-7)}{24}$

$\Rightarrow 24x = -32y + 8$

$\Rightarrow 24x + 32y - 8 = 0$

$\Rightarrow 8(3x + 4y - 1) = 0$

$\therefore 3x + 4y - 1 = 0$

∴ ইহাই নির্ণেয় যুগল সমীকরণ।

Ex — 9:

দে. আছে,

প্রদত্ত সমীকরণ

$$x^2 + 6xy + 9y^2 + 4x + 12y - 5 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + x(6y+4) + (9y^2 + 12y - 5) = 0 \quad \text{——— (1)}$$

(1) নং হতে,

$$x = \frac{-(6y+4) \pm \sqrt{(6y+4)^2 - 4\cdot 1\,(9y^2 + 12y - 5)}}{2\cdot 1}$$

$\Rightarrow 2x = -6y - 4 \pm \sqrt{36y^2 + 48y + 16 - 36y^2 - 48y + 20}$

$\Rightarrow 2x = -6y - 4 \pm \sqrt{36}$

$\Rightarrow 2x = -6y - 4 \pm 6$

$\Rightarrow 2x = -6y - 4 + 6$

$\Rightarrow 2x + 6y - 2 = 0$

$\Rightarrow 2(x + 3y - 1) = 0$

$\therefore x + 3y - 1 = 0$ ——— (ii)

অথবা,

$2x = -6y - 4 - 6$

$\Rightarrow 2x + 6y + 10 = 0$

$\Rightarrow 2(x + 3y + 5) = 0$

$\therefore x + 3y + 5 = 0$ ——— (iii)

(ii) নং সমীকরণের ঢাল $m_1 = -\frac{x \text{ সহগ}}{y \text{ সহগ}} = -\frac{1}{3}$

(iii) " " " $m_2 = -\frac{1}{3}$

যেহেতু $m_1 = m_2$ সেহেতু

রেখা দুটির মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \left| \frac{c_2 - c_1}{\sqrt{1^2 + 3^2}} \right|$

$= \left| \frac{5 - (-1)}{\sqrt{1 + 9}} \right|$

$= \frac{5 + 1}{\sqrt{10}}$

$= \frac{6}{\sqrt{10}}$

$= \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{5}$

$$= \frac{10\cdot 3}{5\sqrt{10}} = \frac{3\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}}{5\cdot\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{5} \text{ (showed)}$$

Ex – 12:

প্রদত্ত সমীকরণ $x^2 - 10xy + 9y^2 = 0$ ——— (1)

(1) নং কে সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

$$\therefore a = 1 \quad h = -5 \quad b = 9 \quad f = 0 \quad g = 0 \quad c = 0$$

এখন, $\Delta = abc + 2hgf - af^2 - bg^2 - ch^2$

$$= 1\times 9\times 0 + 2\times -5\times 0\times 0 - 1\times 0^2 - 9\times 0^2 - 0\times(-5)^2$$

$$= 0 + 0 - 0 - 0 - 0$$

$$= 0$$

যেহেতু (1) নং রেখাটি সমমাত্রিক দ্বিঘাত সমীকরণ এবং $\Delta = 0$ এজন্য সরলরেখা দুটির ছেদবিন্দু হবে $(0,0)$

তাহলে, সরলরেখা দুটির সমদ্বিখণ্ডক রেখার সমীকরণ হবে

$$\therefore \frac{(x-\alpha)^2 - (y-\beta)^2}{a-b} = \frac{(x-\alpha)(y-\beta)}{h}$$

$$\Rightarrow \frac{(x-0)^2 - (y-0)^2}{1-9} = \frac{(x-0)(y-0)}{-5}$$

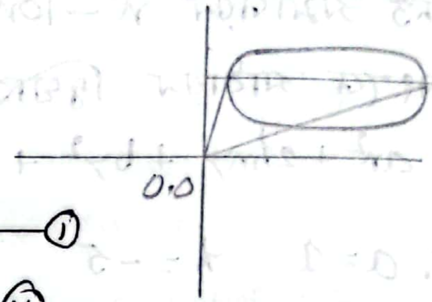
$$\Rightarrow \frac{x^2 - y^2}{-8} = \frac{xy}{-5}$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 5y^2 = 8xy$$

$\therefore 5x^2 - 8xy - 5y^2 = 0$

ইহাই নির্ণেয় সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ। (showed)

Ex – 15



দে. আছে,

প্রদত্ত সরলরেখা $lx + my = 1$ ——— (i)

এবং কৌণিক $ax^2 + by^2 = 1$ ——— (ii)

(i) ও (ii) নং হতে সমমাত্রিক দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় করি পাই,

$ax^2 + by^2 = (lx + my)^2 \cdot 1^2$ (সরলরেখাকে বর্গ করতে হবে)

$\Rightarrow ax^2 + by^2 = l^2x^2 + 2lmxy + m^2y^2$

$\Rightarrow ax^2 + by^2 - l^2x^2 - 2lmxy - m^2y^2 = 0$

$\Rightarrow x^2(a - l^2) - 2lmxy + y^2(b - m^2) = 0$

ইহাই নির্ণেয় মূল বিন্দুর সাথে (i) ও (ii) নং এর ছেদ বিন্দু দ্বয়ের সংযোগকারী সরলরেখার সমীকরণ।

Ex-20

প্রদত্ত সরলরেখা $y = mx + c$

$\Rightarrow y - mx = c$

$\Rightarrow \frac{y - mx}{c} = 1$ ——— (i)

এবং কৌণিক $y^2 = 4ax$ ——— (ii)

(i) ও (ii) নং থেকে (x,y) অসমমাত্রিক দ্বিঘাত সমীকরণে রূপান্তরিত করে পাই

$$\therefore y^2 = 4ax\left(\frac{y-mx}{c}\right)$$

$$\Rightarrow cy^2 = 4axy - 4amx^2$$

$$\Rightarrow 4amx^2 - 4axy + cy^2 = 0 \text{ ——— (iii)}$$

এখন,

(iii) নং কে সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই

$A = 4am \quad H = -2a \quad B = c \quad F = 0 \quad G = 0 \quad C = 0$

দুইটি সরলরেখা সমপাতিত হওয়ার শর্ত হলো

$\therefore$ x^2 এর সহগ $\times$ y^2 এর সহগ $=$ (h এর মান)^2

$$\Rightarrow AB = H^2$$

$$\Rightarrow 4am \cdot c = (-2a)^2$$

$$\Rightarrow 4amc = 4a^2$$

$$\Rightarrow a = mc$$

$$\Rightarrow c = \frac{a}{m} \quad \text{(proved)}$$

Ex-22:

১ম অংশ,

দে. আছে,

সরলরেখার সমীকরণ $bx + ay = ab$

$$\Rightarrow \frac{bx+ay}{ab} = 1 \text{ ——— (i)}$$

এবং বক্ররেখা $x^2+y^2 = c^2$ ——— (ii)

(i) ও (ii) নং দ্বারা গঠিত অসমমাত্রিক দ্বিঘাত সমীকরণ হবে

$$x^2+y^2 = c^2\left(\frac{bx+ay}{ab}\right)^2$$

$$\Rightarrow x^2+y^2 = c^2\left(\frac{b^2x^2+2abxy+a^2y^2}{a^2b^2}\right)$$

$$\Rightarrow a^2b^2x^2+a^2b^2y^2 = b^2c^2x^2+2abc^2xy+a^2c^2y^2$$

$$\Rightarrow a^2b^2x^2+a^2b^2y^2-b^2c^2x^2-2abc^2xy-a^2c^2y^2=0$$

$$\Rightarrow x^2b^2(a^2-c^2)-2abc^2xy+a^2y^2(b^2-c^2)=0 \text{ --- (iii)}$$

২য় অংশ,

যদি $bx+ay=ab$ সরলরেখাটি $x^2+y^2=c^2$ বৃত্তকে স্পর্শ করে তবে (iii) নং দ্বারা প্রকাশিত সরলরেখাদ্বয় পরস্পর সমাপতিত হবে।

$$b^2(a^2-c^2)\cdot a^2(b^2-c^2) = (-abc^2)^2$$

$$\Rightarrow \cancel{b^2}(a^2-c^2)\cdot\cancel{a^2}(b^2-c^2) = \cancel{a^2b^2}c^4$$

$$\Rightarrow (a^2-c^2)(b^2-c^2) = c^4$$

$$\Rightarrow a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2+c^4 = c^4$$

$$\Rightarrow a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2 = c^4-c^4$$

$$\Rightarrow a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2 = 0$$

$$\Rightarrow a^2b^2 = a^2c^2+b^2c^2$$

$$\therefore a^2c^2+b^2c^2 = a^2b^2$$

(proved)

Ex-6 :

প্রদত্ত সমীকরণ $6x^2-5xy-6y^2+14x+5y+4=0$ ——— (1)

(1) নং কে সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$a=6 \quad b=-6 \quad c=4 \quad h=-\frac{5}{2} \quad g=7 \quad f=\frac{5}{2}$

এখন,
$$\Delta = abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2$$
$$=(6\times-6\times4)+\left(2\times\frac{5}{2}\times7\times-\frac{5}{2}\right)-6\times\left(\frac{5}{2}\right)^2-(-6\times7^2)-4\times\left(-\frac{5}{2}\right)^2$$
$$=-144-\frac{175}{2}-\frac{150}{4}+294-25$$
$$=\frac{-576-350-150+1176-100}{4}$$
$$=\frac{-1176+1176}{4}$$
$$=0$$

∴ প্রদত্ত সমীকরণ একজোড়া সরলরেখা প্রকাশ করে।

ছেদবিন্দু নির্ণয়:

ধরি, ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক (α, β)

$$\alpha = \frac{hf-bg}{ab-h^2} = \frac{-\frac{5}{2}\times\frac{5}{2}-(-6\times7)}{(6\times-6)-\left(-\frac{5}{2}\right)^2}$$
$$=\frac{-\frac{25}{4}+42}{-36-\frac{25}{4}}$$
$$=\frac{\frac{-25+168}{4}}{\frac{-144-25}{4}}$$

$$= \frac{143}{-169} = -\frac{11}{13}$$

$$\beta = \frac{gh - af}{ab - h^2} = \frac{\left(7 \times -\frac{5}{2}\right) - 6 \times \frac{5}{2}}{(6 \times -6) - \left(-\frac{5}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{-\frac{35}{2} - 15}{-36 - \frac{25}{4}}$$

$$= \frac{\frac{-35-30}{2}}{\frac{-144-25}{4}}$$

$$= -\frac{65}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{4}^{2}}{-169}$$

$$= \frac{130}{169} = \frac{10}{13}$$

$$\therefore (\alpha, \beta) = \left(-\frac{11}{13}, \frac{10}{13}\right)$$

সরলরেখা দুয়ের সমীকরণ নির্ণয়:

নির্ণয় সমীকরণ,

$$6x^2 - 5xy - 6y^2 + 14x + 5y + 4 = 0$$

$$\Rightarrow 6x^2 - x(5y - 14) - (6y^2 - 5y - 4) = 0$$

$$\Rightarrow 6x^2 + x(-5y + 14) + (-6y^2 + 5y + 4) = 0$$

$$x = \frac{-(-5y+14) \pm \sqrt{(-5y+14)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-6y^2 + 5y + 4)}}{2 \cdot 6}$$

$$= \frac{5y-14 \pm \sqrt{25y^2-140y+196+144y^2-120y-96}}{12}$$

$$= \frac{5y-14 \pm \sqrt{169y^2-260y+100}}{12}$$

$$= \frac{5y-14 \pm \sqrt{(13y)^2-2\cdot 13y\cdot 10+(10)^2}}{12}$$

$$= \frac{5y-14 \pm \sqrt{(13y-10)^2}}{12}$$

$$= \frac{5y-14 \pm (13y-10)}{12}$$

$$x = \frac{5y-14+(13y-10)}{12}$$

$\Rightarrow 12x = 18y-24$

$\Rightarrow 12x-18y+24=0$

$\Rightarrow 6(2x-3y+4)=0$

$\therefore 2x-3y+4=0$

অথবা, $$x = \frac{5y-14-13y+10}{12}$$

$\Rightarrow 12x = -8y-4$

$\Rightarrow 12x+8y+4=0$

$\Rightarrow 4(3x+2y+1)=0$

$\therefore 3x+2y+1=0$

$\therefore$ ইহাই নির্ণেয় যুগল সমীকরণ।

কোণ নির্ণয়: ধরি, রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ θ

$$\tan\theta = \frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{2\sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2-(6\times -6)}}{6-6}$$

$\Rightarrow \tan\theta = \frac{2\sqrt{\frac{25}{4}+36}}{0}$

$\Rightarrow \tan\theta = \infty$

$\Rightarrow \tan\theta = \tan 90^\circ$

$\therefore \theta = 90^\circ$ Ans.

Ex-29

প্রদত্ত সমীকরণ $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ——— (i)

এবং সরলরেখা $lx + my + n = 0$ ——— (ii)

যেহেতু (i) নং সমীকরণটি (x, y) এর একটি সমমাত্রিক দ্বিঘাত সমীকরণ সেহেতু সমীকরণটি দ্বারা দুটি মূলবিন্দুগামী সরলরেখা প্রকাশ করবে।

$y = m_1 x$ ——— (iii)

$y = m_2 x$ ——— (iv)

তাহলে,

$m_1 + m_2 = -\frac{xy \text{ এর সহগ}}{y^2 \text{ এর সহগ}} = -\frac{2h}{b}$

$m_1 m_2 = \frac{x^2 \text{ এর সহগ}}{y^2 \text{ এর সহগ}} = \frac{a}{b}$

(iii) ও (iv) নং রেখার ছেদবিন্দু $(0, 0)$

এখন, (ii) ও (iii) নং হতে পাই-

$lx + my + n = 0$

$\Rightarrow lx + m(m_1 x) + n = 0$

$\Rightarrow lx + mm_1 x + n = 0$

$$\Rightarrow x(l+mm_1) = -n$$

$$\Rightarrow x = -\frac{n}{(l+mm_1)}$$

x এর মান (iii) নং এ বসাই,

$$y = m_1 x = -\frac{m_1 n}{l+mm_1}$$

(ii) ও (iii) নং রেখার ছেদবিন্দু $(x, y) = \left(-\frac{n}{l+mm_1}, -\frac{m_1 n}{l+mm_1}\right)$

আবার,

(ii) ও (iv) নং হতে পাই,

$$lx + my + n = 0$$

$$\Rightarrow lx + m(m_2 x) + n = 0$$

$$\Rightarrow lx + mm_2 x = -n$$

$$\Rightarrow x(l+mm_2) = -n$$

$$\therefore x = -\frac{n}{l+mm_2}$$

x এর মান (iv) নং এ বসাই,

$$y = m_2 x = -\frac{m_2 n}{l+mm_2}$$

(ii) ও (iv) নং রেখার ছেদবিন্দু $(x, y) = -\frac{n}{l+mm_2}, -\frac{m_2 x}{l+mm_2}$

(ii), (iii) ও (iv) নং দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{n}{l+mm_1} & -\frac{m_1 n}{l+mm_1} & 1 \\ -\frac{n}{l+mm_2} & -\frac{m_2 n}{l+mm_2} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -\frac{n}{l+mm_1} & -\frac{m_1 n}{l+mm_1} \\ -\frac{n}{l+mm_2} & -\frac{m_2 n}{l+mm_2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{m_2 n^2}{(l+mm_1)(l+mm_2)} - \frac{m_1 n^2}{(l+mm_1)(l+mm_2)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{m_2 n^2 - m_1 n^2}{(l+mm_1)(l+mm_2)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{n^2(m_2-m_1)}{(l+mm_1)(l+mm_2)}\right)$$

$$= \frac{n^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{(m_2-m_1)^2}}{l^2 + lmm_2 + lmm_1 + m^2 m_1 m_2}$$

$$= \frac{n^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{(m_2+m_1)^2 - 4m_1m_2}}{l^2 + lm(m_1+m_2) + m^2(m_1m_2)}$$

$$= \frac{n^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{\left(-\frac{2h}{b}\right)^2 - 4\cdot\frac{a}{b}}}{l^2 + lm\left(-\frac{2h}{b}\right) + m^2\cdot\frac{a}{b}}$$

$$= \frac{n^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{\frac{4h^2}{b^2} - \frac{4a}{b}}}{l^2 - \frac{2hlm}{b} + \frac{am^2}{b}}$$

$$= \frac{n^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{\frac{4h^2 - 4ab}{b^2}}}{\frac{bl^2 - 2hlm + am^2}{b}}$$

$$= \frac{n^2}{2} \cdot \frac{\frac{\sqrt{4(h^2-ab}}{(\sqrt{b})^2}}{\frac{bl^2-2hlm+am^2}{b}}$$

$$= \frac{n^2}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}\sqrt{h^2-ab}}{\cancel{b}} \times \frac{\cancel{b}}{am^2-2hlm+bl^2}$$

$$= \frac{n^2(\sqrt{h^2-ab})}{am^2-2hlm+bl^2}$$

(showed)

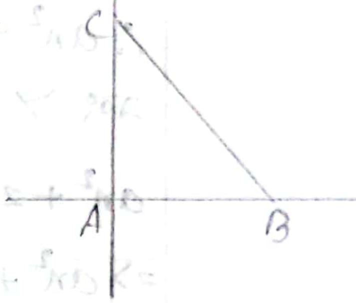
Ex – 30

দে·ওয়াছে, Δ

প্রদত্ত সমীকরণ $ax^2+2hxy+by^2=0$ দ্বারা প্রকাশিত দুটি সরলরেখা হবে

$$y=m_1x \Rightarrow y-m_1x=0$$

$$y=m_2x \Rightarrow y-m_2x=0$$



সুতরাং, $m_1+m_2 = -\frac{2h}{b}$, $m_1m_2 = \frac{a}{b}$

ধরি, ABC ত্রিভুজে

$AB = y-m_1x=0$

$AC = y-m_2x=0$

$BC = lx+my-1=0$

যদি $\angle A = 90^\circ$ হয় তাহলে

$AB \perp AC$ হবে

যেহেতু,

$a+b=0$

[$ax^2+2hxy+by^2=0$ সমীকরণ থেকে AB ও AC সমীকরণ সমাধান করলে $a+b=0$ পাওয়া যাবে।

আবার,

$\angle B = 90^\circ$ হলে

$AB \perp BC$ তাহলে

BC রেখার ঢাল $= -\frac{l}{m}$

AC " " $= m_1$

$$lx + my = 1$$
$$\Rightarrow my = 1 - lx$$
$$\Rightarrow y = \frac{1}{m} - \frac{l}{m} \cdot x$$

যেহেতু $AB \perp BC$ সেহেতু

$$-\frac{l}{m} \times m_1 = -1$$
$$\Rightarrow m_1 = \frac{m}{l}$$

এখন,

$\therefore ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$

এবং $y = m_1 x$ হতে পাই

$$ax^2 + 2hx \cdot (m_1 x) + b(m_1 x)^2 = 0$$
$$\Rightarrow ax^2 + 2hx^2 m_1 + bm_1^2 x^2 = 0$$
$$\Rightarrow x^2(a + 2hm_1 + bm_1^2) = 0$$
$$\Rightarrow a + 2hm_1 + bm_1^2 = 0$$
$$\Rightarrow a + 2h\left(\frac{m}{l}\right) + b\left(\frac{m}{l}\right)^2 = 0$$
$$\Rightarrow a + \frac{2hm}{l} + \frac{bm^2}{l^2} = 0$$
$$\Rightarrow \frac{al^2 + 2hlm + bm^2}{l^2} = 0$$
$$\therefore al^2 + 2hlm + bm^2 = 0$$

এখন, $\angle C = 90^\circ$ হয় তাহলে

$AC \perp BC$

$$\Rightarrow -\frac{l}{m}\cdot m_2 = -1$$

$$\Rightarrow m_2 = \frac{m}{l}$$

আবার,

$$ax^2+2hxy+by^2=0$$

এবং $y = m_2x$ হতে পাই

অনুরূপভাবে,

$$al^2+2hlm+bm^2=0$$

তাহলে রেখা তিনটির সমকোণী হওয়ার শর্ত

$$(a+b)=0 \quad \text{বা} \quad al^2+2hlm+bm^2=0$$

$$\therefore (a+b)(al^2+2hlm+bm^2)=0$$

(proved)

Ex-33

প্রদত্ত সমীকরণ $ax^4+bx^3y+cx^2y^2+dxy^3+ay^4=0$ ——— (i)

(i) নং সমীকরণটি 4টি সরলরেখা প্রকাশ করবে।

ধরি, দুটি যুগল সরলরেখার সমীকরণ হবে

$$lx^2+2mxy+ny^2=0 \quad \text{——— (ii)}$$

(ii) নং দ্বারা প্রকাশিত সরলরেখাদ্বয়ের কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হবে

$$\frac{x^2-y^2}{l-n} = \frac{xy}{m}$$

$$\Rightarrow mx^2-my^2 = lxy-nxy$$

$$\Rightarrow mx^2-my^2-lxy+nxy=0 \quad \text{——— (iii)}$$

(ii) × (iii) করে পাই

$$(lx^2+2mxy+ny^2)(mx^2-my^2-lxy+nxy)=0$$

$$\Rightarrow lmx^4-lmx^2y^2-l^2x^3y+lnx^3y+2m^2x^3y-2m^2xy^3-2mlx^2y^2+2mnx^2y^2$$
$$+mnx^2y^2-mny^4-lnxy^3+n^2xy^3=0$$

$\Rightarrow lmx^4 + x^3y(2m^2 - l^2 + ln) + x^2y^2(3mn - 3ml) + xy^3(n^2 - ln - 2m^2)$

$- mny^4 = 0$ ———— (iv)

(i) ও (iv) নং হতে পাই

$$\frac{lm}{a} = \frac{2m^2 + nl - l^2}{b} = \frac{3mn - 3ml}{c} = \frac{n^2 - nl - 2m^2}{d}$$

$$= -\frac{mn}{a}$$

$\therefore$ ১ম ও ৫ম থেকে

$$\frac{lm}{a} = -\frac{mn}{a}$$

$\Rightarrow l = -n$

$\therefore$ ১ম ও ৩য় থেকে

$$\frac{lm}{a} = \frac{3mn - 3ml}{c}$$

$\Rightarrow \frac{-mn}{a} = \frac{3mn + 3mn}{c}$ $[l = -n]$

$\Rightarrow -\frac{mn}{a} = \frac{6mn}{c}$

$\Rightarrow -c = 6a$

$\Rightarrow 6a + c = 0$

$\therefore$ ২য় ও ৪র্থ থেকে

$$\frac{2m^2 + nl - l^2}{b} = \frac{n^2 - nl - 2m^2}{d}$$

$\Rightarrow \frac{2m^2 - n^2 - n^2}{b} = \frac{n^2 + n^2 - 2m^2}{d}$ $[l = -n]$

$$\Rightarrow \frac{2m^2 - 2n^2}{b} = \frac{2n^2 - 2m^2}{d}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{2}(m^2 - n^2)}{b} = \frac{-\cancel{2}(m^2 - n^2)}{d}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b} = -\frac{1}{d}$$

$$\Rightarrow b = -d$$

$$\therefore b + d = 0$$

$\therefore 6a + c = 0$, $b + d = 0$ (proved)

Ex – 40 :

দেওয়া আছে, $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ——— (i)

$a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 = 0$ ——— (ii)

(i) ও (ii) নং (x, y) এর সমমাত্রিক দ্বিঘাত সমীকরণ হয় তবে একটি করে যুগল সরলরেখা প্রকাশ করবে।

(i) নং হতে একটি রেখা

$y = mx$ ——— (iii)

(ii) নং হতে অপর রেখা

$y = -\frac{1}{m}x$ [(iii) নং হতে, পরস্পর লম্ব হলে]

(i) ও (iii) হতে

$\therefore ax^2 + 2hx(mx) + b(mx)^2 = 0$

$\Rightarrow ax^2 + 2hmx^2 + bm^2x^2 = 0$

$\Rightarrow x^2(a + 2hm + bm^2) = 0$

$\therefore a + 2hm + bm^2 = 0$ ——— (v)

(ii) ও (iv) নং হতে

$\therefore a'x^2+2h'x\left(-\frac{1}{m}x\right)+b'\left(-\frac{1}{m}\cdot x\right)^2=0$

$\Rightarrow a'x^2-\frac{2h'x^2}{m}+\frac{b'x^2}{m^2}=0$

$\Rightarrow x^2\left(a'-\frac{2h'}{m}+\frac{b'}{m^2}\right)=0$

$\Rightarrow \left(a'-\frac{2h'}{m}+\frac{b'}{m^2}\right)=0$

$\Rightarrow \frac{a'm^2-2h'm+b'}{m^2}=0$

$\therefore a'm^2-2h'm+b'=0$ ——— (vi)

(v) ও (vi) ~~বজ্রগুণন~~ / আড়গুণন করে পাই

$bm^2-2hm+a=0$

$a'm^2-2h'm+b'=0$

$$\frac{m^2}{2hb'+2h'a}=\frac{m}{aa'-bb'}=\frac{1}{-2h'b-2ha'}$$

$$\Rightarrow \frac{m^2}{2(hb'+h'a)}=\frac{m}{aa'-bb'}=\frac{1}{-2(h'b+ha')}$$

২য় ও ৩য় অনুপাত থেকে

$$\frac{m}{aa'-bb'}=\frac{1}{-2(h'b+ha')}$$

$$\Rightarrow m=\frac{aa'-bb'}{-2(ha'+h'b)}$$

১ম ও ২য় অংশ হতে

$$\frac{m^2}{2(hb'+h'a)} = \frac{m}{aa'-bb'}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{2(h'a+hb')} = \frac{1}{aa'-bb'}$$

$$\Rightarrow \frac{\dfrac{aa'-bb'}{-2(a'h+b'h')}}{2(ah'+b'h)} = \frac{1}{aa'-bb'}$$

$$\Rightarrow \frac{aa'-bb'}{-2(a'h+b'h')} \times \frac{1}{2(ah'+b'h)} = \frac{1}{aa'-bb'}$$

$$\Rightarrow (aa'-bb') = -4(a'h+bh')\cdot(ah'+b'h)$$ [আড়গুণন করে

$$\therefore (aa'-bb') + 4(a'h+bh')\cdot(ah'+b'h) = 0$$

(proved)

Ex-50:

ক. দে. আছে, প্রদত্ত সমীকরণ $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ —— (1)

(1) নং দ্বারা দুটি সরলরেখা প্রকাশ করবে,

ধরি, $l_1x + m_1y + n_1 = 0$ —— (i)

$l_2x + m_2y + n_2 = 0$ —— (ii)

এখন,

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c = (l_1x+m_1y+n_1)(l_2x+m_2y+n_2)$$

$= l_1 l_2 x^2 + l_1 m_2 xy + l_1 n_2 x + l_2 m_1 xy + m_1 m_2 y^2 + m_1 n_2 y$
$+ l_2 n_1 x + n_1 m_2 y + n_1 n_2$

$= l_1 l_2 x^2 + xy(l_1 m_2 + l_2 m_1) + m_1 m_2 y^2 + x(l_1 n_2 + l_2 n_1)$
$+ y(m_1 n_2 + n_1 m_2) + n_1 n_2$ ——— (iv)

(iv) নং এ সহগ সমীকৃত করে পাই

$a = l_1 l_2$, $2h = (l_1 m_2 + l_2 m_1)$, $b = m_1 m_2$, $c = n_1 n_2$

$2g = (l_1 n_2 + l_2 n_1)$, $2f = (m_1 n_2 + m_2 n_1)$

(ii) ও (iii) নং সরলরেখার মধ্যবর্তী দূরত্ব

$$\left|\frac{c_1}{\sqrt{(x \text{ সহগ})^2 + (y \text{ সহগ})^2}}\right| = \left|\frac{c_2}{\sqrt{(x \text{ সহগ})^2 + (y \text{ সহগ})^2}}\right|$$

$$\Rightarrow \left|\frac{n_1}{\sqrt{(l_1)^2 + (m_1)^2}}\right| = \left|\frac{n_2}{\sqrt{(l_2)^2 + (m_2)^2}}\right|$$

$$\Rightarrow \frac{n_1^2}{l_1^2 + m_1^2} = \frac{n_2^2}{l_2^2 + m_2^2}$$ বর্গ করে

$$\Rightarrow n_1^2(l_2^2 + m_2^2) = n_2^2(l_1^2 + m_1^2)$$

$$\Rightarrow n_1^2 l_2^2 + n_1^2 m_2^2 = n_2^2 l_1^2 + n_2^2 m_1^2$$

$$\Rightarrow n_1^2 l_2^2 - n_2^2 l_1^2 = n_2^2 m_1^2 - n_1^2 m_2^2$$

$$\Rightarrow (n_1 l_2)^2 - (n_2 l_1)^2 = (n_2 m_1)^2 - (n_1 m_2)^2$$

$$\Rightarrow (l_2n_1 + l_1n_2)(l_2n_1 - l_1n_2) = (n_2m_1 + n_1m_2)(n_2m_1 - n_1m_2)$$

$$\Rightarrow 2g\sqrt{(l_2n_1 - l_1n_2)^2} = 2f\sqrt{(n_2m_1 - n_1m_2)^2}$$

$$\Rightarrow g\sqrt{(l_2n_1 + l_1n_2)^2 - 4l_1l_2 \cdot n_1n_2} = f\sqrt{(n_2m_1 + n_1m_2)^2 - 4n_1n_2 \cdot m_1m_2}$$

$$\Rightarrow g\sqrt{(2g)^2 - 4ac} = f\sqrt{(2f)^2 - 4bc}$$

$$\Rightarrow g\sqrt{4g^2 - 4ac} = f\sqrt{4f^2 - 4bc}$$

$$\Rightarrow g^2(4g^2 - 4ac) = f^2(4f^2 - 4bc)$$

$$\Rightarrow g^2(g^2 - ac) = f^2(f^2 - bc)$$

$$\Rightarrow g^4 - g^2ac = f^4 - f^2bc$$

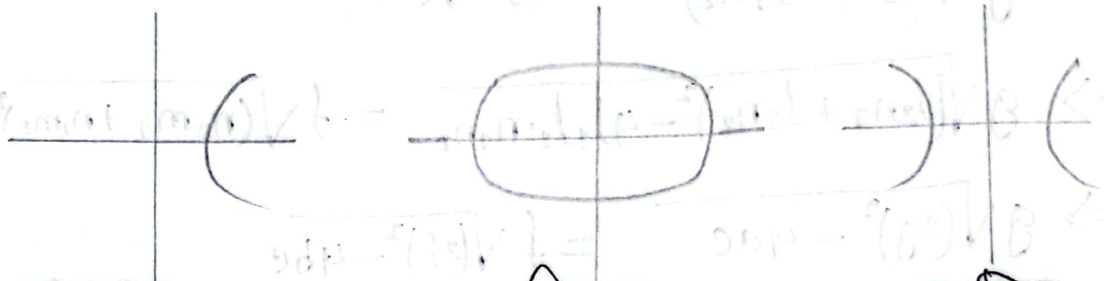
$$\Rightarrow g^4 - f^4 = g^2ac - f^2bc$$

$$\Rightarrow g^4 - f^4 = c(ag^2 - bf^2)$$

(proved)

* অধ্যায় – ৩য় *

* ৩য় *



পরাবৃত্ত

$y^2 = 4ax$

$x^2 = 4ay$

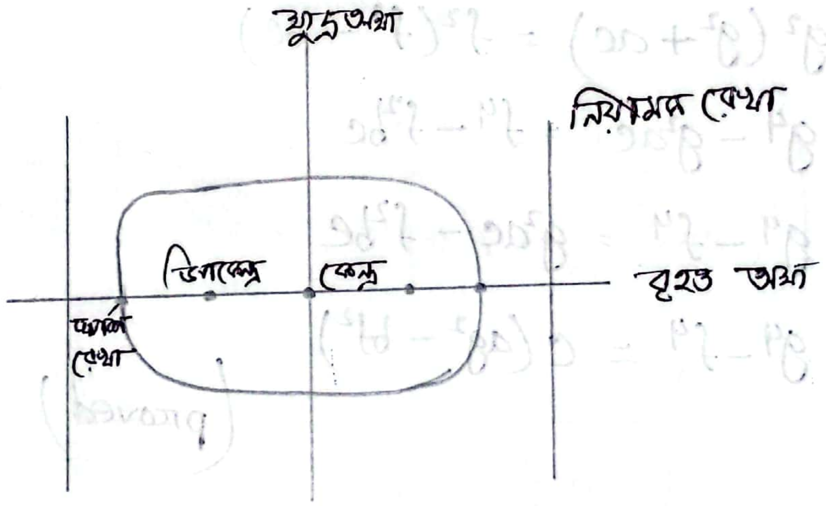
উপবৃত্ত

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

অধিবৃত্ত

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

*



* প্রকৃতি নির্ণয়:

(i) $\Delta \neq 0$, $ab - h^2 > 0$ উপবৃত্ত

(ii) $\Delta \neq 0$, $ab - h^2 < 0$ অধিবৃত্ত

(iii) $\Delta \neq 0$, $ab - h^2 = 0$ পরাবৃত্ত।

* $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ আদর্শ আকারে প্রকাশ করতে হবে। মূলবিন্দুকে (α, β) বিন্দুতে স্থানান্তর করতে হবে। xy পদ অপসারণ করতে হবে।

Ex-2

① দে-আছে,

প্রদত্ত সমীকরণ $x^2+xy+y^2+x+y-1=0$ ——— ①

① নং কে সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ এর সাথে তুলনা করে পাই।

$a=1,\ b=1,\ c=-1,\ h=\frac{1}{2},\ f=\frac{1}{2},\ g=\frac{1}{2}$

এখন,

$$\Delta = abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2$$
$$=(1\times1\times-1)+2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-1\left(\frac{1}{2}\right)^2-1\left(\frac{1}{2}\right)^2-(-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$=-1+\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{4}}+\cancel{\frac{1}{4}}$$
$$=-1$$

আবার, $ab-h^2 = 1\times1-\left(\frac{1}{2}\right)^2$
$$=1-\frac{1}{4}=\frac{4-1}{4}=\frac{3}{4}>0$$

এখানে দেখা যাচ্ছে যে, $\Delta\neq0$, এবং $ab-h^2>0$ এজন্য ① নং সমীকরণটির প্রকৃতি হবে উপবৃত্ত।

কেন্দ্র নির্ণয়:

আমরা জানি,
$$\alpha=\frac{hf-bg}{ab-h^2}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-1\cdot\frac{1}{2}}{1\cdot1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}$$
$$=\frac{\frac{1-2}{4}}{\frac{4-1}{4}}=-\frac{1}{3}$$

$$\beta=\frac{gh-af}{ab-h^2}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-1\cdot\frac{1}{2}}{1\cdot1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{\frac{1-2}{4}}{\frac{4-1}{4}} = -\frac{1}{3}$$

① নং সমীকরণটির কেন্দ্র হবে $(\alpha, \beta) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ Ans

Ex-2

(ii) প্রদত্ত সমীকরণ $x^2 - 4xy - 2y^2 + 10x + 4y = 0$ ——— ①

① নং কে দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই

$a = 1$, $b = -2$, $c = 0$, $h = -2$, $g = 5$

$f = 2$

এখন,

$$\Delta = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$$

$$= (1 \times -2 \times 0) + (2 \times 2 \times 5 \times -2) - 1 \times 2^2 - (-2) \times 5^2 - 0 \cdot (-2)^2$$

$$= 0 - 40 - 4 + 50 - 0$$

$$= 6$$

আবার,

$$ab - h^2 = 1 \times (-2) - (-2)^2$$

$$= -2 - 4$$

$$= -6 \quad < 0$$

এখানে দেখা যাচ্ছে যে, $\Delta \neq 0$, $ab - h^2 < 0$ এজন্য ① নং সমীকরণটি হবে অধিবৃত্ত।

কেন্দ্র নির্ণয়:

আমরা জানি,

$$\alpha = \frac{hf - bg}{ab - h^2} = \frac{-2 \times 2 - (-2) \times 5}{1 \times (-2) - (-2)^2}$$

$$= \frac{-4+10}{-2-4} = \frac{6}{-6} = -1$$

$$\beta = \frac{gh-af}{ab-h^2} = \frac{5\times(-2) - 1\times 2}{1\times(-2) - (-2)^2} = \frac{-10-2}{-2-4} = \frac{-12}{-6}$$
$$= 2$$

$\therefore$ ① নং সমীকরণটির কেন্দ্র হবে $(\alpha, \beta) = (-1, 2)$ Ans:

Ex-2

(iii) প্রদত্ত সমীকরণ $6x^2 + 5xy - 6y^2 - 4x + 7y + 11 = 0$ —— ①

① নং কে সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই

$a = 6$, $b = -6$, $c = 11$, $h = \frac{5}{2}$, $g = -2$, $f = \frac{7}{2}$

এখন,
$$\Delta = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$$
$$= (6\times -6\times 11) + 2\times\frac{7}{2}\times(-2)\times\frac{5}{2} - 6\times\left(\frac{7}{2}\right)^2 - (-6)\times(-2)^2 - 11\times\left(\frac{5}{2}\right)^2$$
$$= -66 - \frac{70}{2} - 147 + 24 - \frac{275}{2}$$
$$= \frac{-132 - 70 - 294 + 48 - 275}{2}$$
$$= -\frac{723}{2}$$

আবার, $ab - h^2 = 6\times(-6) - \left(\frac{5}{2}\right)^2$
$$= -36 - \frac{25}{4}$$
$$= \frac{-144-25}{4} = \frac{-169}{4} < 0$$

এখানে দেখা যাচ্ছে যে, $\Delta \neq 0$ এবং $ab-h^2<0$ এজন্য ① নং সমীকরণটি হবে অধিবৃত্ত।

কেন্দ্র নির্ণয়:

আমরা জানি,

$$\alpha = \frac{hf-bg}{ab-h^2} = \frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}-(-6\times -2)}{6\times(-6)-\left(\frac{5}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{35}{4}-12}{-36-\frac{25}{4}}$$

$$= \frac{\frac{35-48}{4}}{\frac{-144-25}{4}}$$

$$= \frac{-13}{-169} = \frac{1}{13}$$

$$\beta = \frac{gh-af}{ab-h^2} = \frac{-2\cdot\frac{5}{2}-6\cdot\frac{7}{2}}{6\times(-6)-\left(\frac{5}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{-5-21}{-36-\frac{25}{4}}$$

$$= \frac{-26}{\frac{-144-25}{4}}$$

$$= -26\times\frac{4}{-169}$$

$$= \frac{8}{13}$$

① নং সমীকরণের কেন্দ্র $(\alpha, \beta) = \left(\frac{1}{13}, \frac{8}{13}\right)$ A.

CamScanner

Ex−2

(iv) প্রদত্ত সমীকরণ $3x^2-2xy-y^2+2x+y-1=0$ —— (1)

(1) নং সমীকরণকে সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy$ $=0$ এর সাথে তুলনা করে পাই

$a=3,\ b=-1,\ c=-1,\ h=-1,\ g=1,\ f=\frac{1}{2}$

এখন,

$$\Delta = abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2$$
$$= 3\times(-1)\times(-1)+2\times\frac{1}{2}\times1\times(-1)-3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-(-1)\times1^2-(-1)\times(-1)^2$$
$$= 3-\cancel{1}-\frac{3}{4}+\cancel{1}+1$$
$$= \frac{12-3+4}{4}$$
$$= \frac{13}{4}$$

আবার,

$$ab-h^2 = 3\times(-1)-(-1)^2$$
$$= -3-1$$
$$= -4 < 0$$

এখানে দেখা যাচ্ছে যে, $\Delta \neq 0$ এবং $ab-h^2<0$ অতএব (1) নং সমীকরণটি হবে অধিবৃত্ত।

কেন্দ্র নির্ণয়:

ধরি, $$\alpha = \frac{hf-bg}{ab-h^2} = \frac{-1\times\frac{1}{2}-(-1)\times1}{3\times(-1)-(-1)^2} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{-3-1}$$
$$= \frac{\frac{-1+2}{2}}{-4} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{-4} = -\frac{1}{8}$$

$$\beta = \frac{gh-af}{ab-h^2} = \frac{1\times(-1)-3\times(\frac{1}{2})}{3\times(-1)-(-1)^2}$$

$$= \frac{-1-\frac{3}{2}}{-3-1}$$

$$= \frac{\frac{-2-3}{2}}{-4}$$

$$= \frac{-5}{2}\times\frac{1}{-4} = \frac{5}{8}$$

$\therefore$ ① নং সমীকরণের কেন্দ্র $(\alpha, \beta) = \left(-\frac{1}{8}, \frac{5}{8}\right)$ A.

Ex-3

① প্রদত্ত সমীকরণ $8x^2+4xy+5y^2-16x-14y+13=0$ —— ①

① নং কে সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ এর সাথে তুলনা করে পাই

$a=8$, $b=5$, $c=13$, $h=2$, $g=-8$, $f=-7$

এখন, $\Delta = abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2$

$= (8\times5\times13)+2\times(-7)(-8)\times2-8(-7)^2-5\times(-8)^2-13(2)^2$

$= 520+224-392-320-52$

$= 744-764$

$= -20$

* C_1 ডানে বসালে মান বের করার সময় (−) ব্যবহার করতে হবে।

* C_1 বামে " " " " " (−) " " " না।

আবার,

$$ab - h^2 = 8\times5 - 2^2$$
$$= 40 - 4$$
$$= 36 > 0$$

যেহেতু $a \neq 0$ এবং $ab - h^2 > 0$ সেহেতু (i) নং সমীকরণটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্দেশ করে।

ধরি, উপবৃত্তের কেন্দ্র (α, β)

$$\alpha = \frac{hf - bg}{ab - h^2} = \frac{2\cdot(-7) - 5\cdot(-8)}{8\times5 - (2)^2} = \frac{-14+40}{40-4} = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}$$

$$\beta = \frac{gh - af}{ab - h^2} = \frac{-8\times2 - 8\times(-7)}{8\times5 - (2)^2} = \frac{-16+56}{36} = \frac{40}{36} = \frac{10}{9}$$

$$\therefore (\alpha, \beta) = \left(\frac{13}{18}, \frac{10}{9}\right)$$

এখন, অক্ষদ্বয়ের দিক অপরিবর্তিত রেখে মূলবিন্দুকে (α, β) বিন্দুতে স্থানান্তর করলে সমীকরণটি পাওয়া যাবে।

$$8x^2 + 4xy + 5y^2 = C_1 \quad \text{——— (ii)}$$

এখন, $C_1 = -(\alpha g + \beta f + c)$

$$= -\left(\frac{13}{18}\times(-8) + \frac{10}{9}\times(-7) + 13\right)$$
$$= -\left(-\frac{104}{18} - \frac{70}{9} + 13\right)$$
$$= -\left(\frac{-104 - 140 + 234}{18}\right) = -\frac{-10}{18} = \frac{5}{9}$$

c_1 এর মান (ii) এ বসিয়ে

$$8x^2+4xy+5y^2=\frac{5}{9} \quad \text{—— (iii)}$$

এখন অক্ষদ্বয়কে এমনভাবে আবর্তন করি যাতে xy পদ অপসারিত হয়। তাহলে সমীকরণটি হবে

$$a_1x^2+b_1y^2=\frac{5}{9} \quad \text{—— (iv)}$$

আমরা জানি,

$$a_1+b_1=a+b=8+5=13$$

$$a_1b_1=ab-h^2=36$$

$$\therefore (a_1-b_1)^2=(a_1+b_1)^2-4a_1b_1$$

$$=(13)^2-4\cdot 36$$

$$=169-144$$

$$(a_1-b_1)=\sqrt{25}$$

$$\Rightarrow (a_1-b_1)=5$$

$$\therefore \begin{aligned} a_1+b_1&=13\\ a_1-b_1&=5\\ \hline 2a_1&=18\\ \Rightarrow a_1&=9 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a_1+b_1&=13\\ a_1-b_1&=5\\ \hline 2b_1&=8\\ \Rightarrow b_1&=4 \end{aligned}$$

a_1 ও b_1 এর মান (iv) নং এ বসিয়ে পাই

$$9x^2+4y^2=\frac{5}{9}$$

$$\Rightarrow 81x^2+36y^2=5$$

$$\Rightarrow \frac{81x^2}{5}+\frac{36y^2}{5}=1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{\frac{5}{81}} + \frac{y^2}{\frac{5}{36}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{5}}{9}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{5}}{6}\right)^2} = 1$$

Ex- 3

(vi) প্রদত্ত সমীকরণ $4x^2 - 4xy + y^2 - 8x - y + 6 = 0$ ——— (1)

(1) নং কে সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই

$a = 4$, $b = 1$, $c = 6$, $h = -2$, $g = -4$, $f = -\frac{1}{2}$

এখন,

$$\Delta = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$$
$$= (4 \times 1 \times 6) + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-4) \times (-2) - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1 \times (-4)^2 - 6 \times (-2)^2$$
$$= \cancel{24} - 8 - 1 - 16 - \cancel{24}$$
$$= -25$$

আবার,

$$ab - h^2 = 4 \times 1 - (-2)^2 = 4 - 4 = 0$$

এখানে দেখা যাচ্ছে যে, $\Delta \neq 0$ এবং $ab - h^2 = 0$ সেজন্য (1) নং সমীকরণটি পরাবৃত্ত সমীকরণ নির্দেশ করবে।

~~ধরি, পরাবৃত্তের কেন্দ্র (α, β)~~

$$\cancel{\alpha = \frac{hf - bg}{ab - h^2} = \frac{-2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 \times (-4)}{4 \times 1 - (-2)^2} = \frac{1 + 4}{4 - 4} = \frac{5}{0} =}$$

$\therefore 4x^2 - 4xy + y^2 - 8x - y + 6 = 0$

$\Rightarrow 4x^2 - 4xy + y^2 = 8x + y - 6$

$\Rightarrow (2x)^2 - 2\cdot 2x\cdot y + y^2 = 8x + y - 6$

$\Rightarrow (2x-y)^2 = 8x+y-6$

$\Rightarrow (2x-y+k)^2 - k^2 + 2ky - 4kx = 8x+y-6$

$\Rightarrow (2x-y+k)^2 = k^2 - 2ky + 4kx + 8x + y - 6$

$= x(4k+8) + y(1-2k) + k^2 - 6$ —— (ii)

$(2x+(-y)+k)^2 = (2x)^2 + (-y)^2 + k^2 + 2\cdot 2x\cdot(-y) + 2(-y)\cdot k + 2\cdot k\cdot 2x$

$= 4x^2 + y^2 + k^2 - 4xy - 2yk + 4kx$

মনেকরি, (ii) নং এ $(2x-y+k)=0$ এবং $x(4k+8)+y(1-2k)+k^2-6=0$ সরলরেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব। তাহলে

$2(4k+8) - (1-2k) = 0$

$\Rightarrow 8k+16-1+2k=0 \Rightarrow 10k+15=0 \Rightarrow 10k=-15$

$\Rightarrow k = -\frac{15}{10} = -\frac{3}{2}$

k এর মান (ii) নং এ বসাই

$\left(2x-y-\frac{3}{2}\right)^2 = x\left\{4\left(-\frac{3}{2}+8\right)\right\} + y\left(1-2\left(-\frac{3}{2}\right)\right) + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 6$

$= x(-6+8) + y(1+3) + \frac{9}{4} - 6$

$= -6x + 8x + y + 3y + \frac{9-24}{4}$

$= 2x + 4y - \frac{15}{4}$

$\left(2x-y-\frac{3}{2}\right)^2 = 2\left(x+2y-\frac{15}{8}\right)$

$\Rightarrow \left(\frac{2x-y-\frac{3}{2}}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}\right)^2\cdot(\sqrt{5})^2 = 2\left(\frac{x+2y-\frac{15}{8}}{\sqrt{1^2+2^2}}\right)\cdot\sqrt{5}$

$\Rightarrow \left(\frac{2x-y-\frac{3}{2}}{\sqrt{5}}\right)^2\cdot 5 = 2\left(\frac{x+2y-\frac{15}{8}}{\sqrt{5}}\right)\sqrt{5}$

$\Rightarrow Y^2\cdot 5 = 2X\sqrt{5}$

$\Rightarrow Y^2 = \frac{2X\sqrt{5}}{5} = \frac{2X}{\sqrt{5}} = 2\cdot\frac{2X}{2\sqrt{5}} = 4\frac{1}{2\sqrt{5}}X$

যেখানে, $Y = \frac{2x-y-\frac{3}{2}}{\sqrt{5}}$, $X = \frac{x+2y-\frac{15}{8}}{\sqrt{5}}$

Ex-3

(1x) প্রদত্ত সমীকরণ $8x^2-4xy+5y^2-16x-14y+17=0$ —— (i)

(i) নং কে সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ এর সাথে তুলনা করে পাই —

$a=8,\ b=5,\ c=17,\ h=-2,\ g=-8,\ f=-7$

এখন, $\Delta = abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2$

$= (8\times5\times17)+2\times(-7)\times(-8)\times(-2)-8\times(-7)^2-5\times(-8)^2-17\times(-2)^2$

$= 680-224-392-320-68$

$= -324$

আবার, $ab-h^2 = 8\times5-(-2)^2 = 40-4 = 36$

যেহেতু $\Delta\neq0$, $ab-h^2>0$ সেহেতু (i) নং সমীকরণটি উপবৃত্ত প্রকাশ করবে।

ধরি, উপবৃত্তের কেন্দ্র (α, β)

$$\alpha = \frac{hf-bg}{ab-h^2} = \frac{(-2\times-7)-5\times(-8)}{8\times5-(-2)^2} = \frac{14+40}{40-4} = \frac{54}{36} = \frac{3}{2}$$

$$\beta = \frac{gh-af}{ab-h^2} = \frac{(-8\times-2)-8\times(-7)}{8\times5-(-2)^2} = \frac{16+56}{40-4} = \frac{72}{36} = 2$$

$\therefore (\alpha,\beta) = \left(\frac{3}{2}, 2\right)$

এখন অক্ষদ্বয়কে ~~সমান্তরালে~~ দিক অপরিবর্তিত রেখে মূলবিন্দুকে (α,β) বিন্দুতে স্থানান্তর করে পাই

$8x^2-4xy+5y^2 = c_1$ —— (ii)

$c_1 = -(\alpha g+\beta f+c)$

$= -\left(\frac{3}{2}\times-8+2\times(-7)+17\right)$

$= -(-12-14+17)$

$= -(-9) = 9$

c_1 এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই

$8x^2-4xy+5y^2 = 9$ —— (iii)

এখন অক্ষদ্বয়কে এমনভাবে আবর্তন করি যাতে xy পদ অপসারিত হয়। তাহলে সমীকরণটি হবে

$a_1x^2+b_1y^2 = 9$ —— (iv)

আমরা জানি,

$a_1+b_1 = a+b = 8+5 = 13$

$a_1b_1 = ab-h^2 = 8\times5-(-2)^2 = 40-4 = 36$

$(a_1-b_1)^2 = (a_1+b_1)^2-4a_1b_1$

$= (13)^2-4\cdot36$

$= 169-144$

$(a_1-b_1) = \sqrt{25}$

$= 5$

$\therefore a_1+b_1 = 13$

$a_1-b_1 = 5$

$2a_1 = 18$

$\Rightarrow a_1 = 9$

$a_1+b_1 = 13$

$a_1-b_1 = 5$

$2b_1 = 8$

$\Rightarrow b_1 = 4$

a_1 ও b_1 এর মান (iv) নং এ বসাই

$9x^2+4y^2 = 9$

$$\Rightarrow \frac{9x^2}{9} + \frac{4y^2}{9} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{\frac{9}{9}} + \frac{y^2}{\frac{9}{4}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{3}{3}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = 1$$

$$\therefore \text{(ii)} \quad \frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = 1 \qquad A.$$

Ex-3

(vii) প্রদত্ত সমীকরণ $9x^2+24xy+16y^2+22x+46y+9=0$ ——— (1)

(1) নং কে সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ এর সাথে তুলনা করে পাই

$a=9,\ b=16,\ c=9,\ h=12,\ g=11,\ f=23$

এখন, $\Delta = abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2$

$= (9\times16\times9)+2\times23\times11\times12-9\times(23)^2-16\times(11)^2-9\times(12)^2$

$= 1296+6072-4761-1936-1296$

$= -625$

আবার, $ab-h^2 = 9\times16-(12)^2 = 144-144 = 0$

যেহেতু, $\Delta \neq 0$ এবং $ab-h^2=0$ সেহেতু (1) নং সমীকরণটি পরাবৃত্ত নির্দেশ করে।

$\therefore 9x^2+24xy+16y^2+22x+46y+9=0$

$\Rightarrow 9x^2+24xy+16y^2 = -22x-46y-9$

$\Rightarrow (3x)^2+2\cdot3x\cdot4y+(4y)^2 = -22x-46y-9$

$\Rightarrow (3x+4y)^2 = -22x-46y-9$

$$\Rightarrow (3x+4y+k)^2 - 2(3x+4y)\cdot k - k^2 = -22x-46y-9$$

$$(3x+4y+k)^2 = \{(3x+4y)+k\}^2 = (3x+4y)^2 + 2\cdot(3x+4y)k + k^2$$

$$\Rightarrow (3x+4y+k)^2 - 6xk - 8yk - k^2 = -22x-46y-9$$

$$\Rightarrow (3x+4y+k)^2 = -22x-46y-9+6xk+8yk+k^2$$

$$\Rightarrow (3x+4y+k)^2 = x(6k-22)+y(8k-46)+k^2-9 \quad \text{——— (ii)}$$

মনেকরি, (ii) নং এ $(3x+4y+k)=0$ এবং $x(6k-22)+(8k-46)+k^2-9=0$ সরলরেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব। তাহলে,

$$3(6k-22)+4(8k-46)=0$$

$$\Rightarrow 18k-66+32k-184=0$$

$$\Rightarrow 50k = 250$$

$$\Rightarrow k = \frac{250}{50} = 5$$

(k) এর মান (ii) এ বসাই

$$(3x+4y+5)^2 = x(6\cdot5-22)+y(8\times5-46)+5^2-9$$

$$= x\cdot 8 + y(-6)+25-9$$

$$= 8x-6y+16$$

$$(3x+4y+5)^2 = 2(4x-3y+8)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3x+4y+5}{\sqrt{3^2+4^2}}\right)^2\cdot(\sqrt{25})^2 = 2\left(\frac{4x-3y+8}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}\right)\cdot\sqrt{25}$$

$$\Rightarrow Y^2\cdot 25 = 2\cdot X\cdot\sqrt{25}$$

$$\Rightarrow Y^2 = \frac{2X\sqrt{25}}{25} = \frac{2X}{\sqrt{25}}$$

$$\Rightarrow y^2 = 2\cdot\frac{2x}{2\sqrt{25}} = 4\cdot\frac{1}{2\cdot 5}\cdot x$$

$$\therefore y^2 = 4\cdot\frac{1}{10}\cdot x$$

যেখানে, $y = \dfrac{3x+4y+5}{5}$, $x = \dfrac{4x-3y+8}{5}$ Ans:

Ex-6

(ii) প্রদত্ত সমীকরণ $x^2-5xy+y^2+8x-20y+15=0$ ——— (i)

(i) নং কে সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ এর সাথে তুলনা করে পাই

$a=1,\ b=1,\ c=15,\ h=-\frac{5}{2},\ g=4,\ f=-10$

এখন,

$$\Delta = abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2$$

$$= 1\times1\times15+2\times(-10)\times4\times\left(-\frac{5}{2}\right)-1\times(-10)^2-1\times4^2-15\times\left(-\frac{5}{2}\right)^2$$

$$= 15+200-100-16-\frac{375}{4}$$

$$= \frac{60+800-400-64-375}{4}$$

$$= \frac{21}{4}$$

আবার,

$$ab-h^2 = 1\times1-\left(-\frac{5}{2}\right)^2 = 1-\frac{25}{4} = \frac{4-25}{4}$$

$$= \frac{-21}{4} < 0$$

যেহেতু $\Delta \neq 0$ এবং $ab-h^2<0$ সেহেতু (i) নং সমীকরণটি অধিবৃত্ত নির্দেশ করে।

-ছবি,
অধিবৃত্তের কেন্দ্র (α, β)

$$\alpha = \frac{hf - bg}{ab - h^2} = \frac{-10\times(-\frac{5}{2}) - 1\times 4}{1\times 1 - (-\frac{5}{2})^2}$$

$$= \frac{25-4}{1-\frac{25}{4}} = \frac{21}{-\frac{21}{4}}$$

$$= 21 \times -\frac{4}{21}$$

$$= -4$$

$$\beta = \frac{gh - af}{ab - h^2} = \frac{4\times(-\frac{5}{2}) - 1\times(-10)}{1\times 1 - (-\frac{5}{2})^2}$$

$$= \frac{-10+10}{1-\frac{25}{4}} = 0$$

$\therefore (\alpha, \beta) = (-4, 0)$

এখন, অক্ষদ্বয়ের দিক অপরিবর্তিত রেখে মূলবিন্দুকে (α, β) বিন্দুতে স্থানান্তর করলে সমীকরণটি পাওয়া যাবে

$$x^2 - 5xy + y^2 = c_1 \text{ ——— (ii)}$$

এখন, $c_1 = -(\alpha g + \beta f + c)$

$$= -(-4\times 4 + 0\times(-10) + 15)$$

$$= -(-16 - 0 + 15)$$

$$= +1$$

c_1 এর মান (ii) নং এ বসাই

$$x^2 - 5xy + y^2 = 1 \text{ ——— (iii)}$$

এখন অক্ষদ্বয়কে এমনভাবে আবর্তন করি যাতে xy পদ অপসারিত হয়। তাহলে সমীকরণটি হবে

$$a_1x^2+b_1y^2=1 \quad \text{--------- (iv)}$$

আমরা জানি,

$$a_1+b_1=a+b=1+1=2$$

$$a_1b_1=ab-h^2=1\times1-\left(-\frac{5}{2}\right)^2=-\frac{21}{4}$$

$$(a_1-b_1)^2=(a_1+b_1)^2-4a_1b_1$$

$$=2^2-4\cdot\left(-\frac{21}{4}\right)=4+21=25$$

$$a_1-b_1=\sqrt{25}=5$$

$$\therefore \quad a_1+b_1=2$$
$$a_1-b_1=5$$
$$\overline{2a_1=7}$$
$$a_1=\frac{7}{2}$$

$$a_1+b_1=2$$
$$a_1-b_1=5$$
$$\overline{2b_1=-3}$$
$$\Rightarrow b_1=-\frac{3}{2}$$

a_1 ও b_1 এর মান (iv) এ বসাই

$$\frac{7}{2}x^2-\frac{3}{2}y^2=1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{\frac{2}{7}}-\frac{y^2}{\frac{2}{3}}=1$$

আবার, (iii) নং হতে, $x^2-5xy+y^2=1$

$$A=1, \quad B=1, \quad H=-\frac{5}{2}$$

এখন, অধিবৃত্তের অক্ষের দৈর্ঘ্য $2a$ হলে

$$\therefore \frac{1}{r^4} - (A+B)\frac{1}{r^2} + (AB - H^2) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^4} - (1+1)\cdot\frac{1}{r^2} + \left\{1\cdot 1 - \left(-\frac{5}{2}\right)^2\right\} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^4} - \frac{2}{r^2} + 1 - \frac{25}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^4} - \frac{2}{r^2} + \frac{4-25}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^4} - \frac{2}{r^2} - \frac{21}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{4 - 8r^2 - 21r^4}{4r^4} = 0$$

$$\Rightarrow -(21r^4 + 8r^2 - 4) = 0$$

$$\Rightarrow 21r^4 + 14r^2 - 6r^2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 7r^2(3r^2+2) - 2(3r^2+2) = 0$$

$$\Rightarrow (3r^2+2)(7r^2-2) = 0$$

$\therefore 3r^2 + 2 = 0$	$7r^2 - 2 = 0$
$\Rightarrow 3r^2 = -2$	$\Rightarrow 7r^2 = 2$
$\Rightarrow r^2 = -\frac{2}{3}$	$\Rightarrow r^2 = \frac{2}{7}$
$\Rightarrow r = i\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\Rightarrow r = \sqrt{\frac{2}{7}}$

এখানে,

$$r_1 = \sqrt{\frac{2}{7}}, \quad r_2 = i\sqrt{\frac{2}{3}}$$

বৃহৎ অক্ষ $= 2r_1 = 2\cdot\sqrt{\frac{2}{7}}$

ক্ষুদ্র অক্ষ $= 2|r_2| = 2\cdot\left|\sqrt{\frac{2}{3}}\right| = 2\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}$

বৃহৎ অক্ষের সমীকরণ

$$\left(A - \frac{1}{e_1^2}\right)(x-\alpha) + H(y-\beta) = 0$$

$$\Rightarrow \left\{1 - \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{2}{7}}\right)^2}\right\}(x+4) + \left(-\frac{5}{2}\right)(y-0) = 0$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{7}{2}\right)(x+4) - \frac{5y}{2} + 0 = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2-7}{2}\right)(x+4) - \frac{5y}{2} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{5}{2}(x+4) - \frac{5y}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-5x - 20 - 5y}{2} = 0$$

$$\Rightarrow -5(x+y+4) = 0$$

$$\therefore x+y+4 = 0$$

ক্ষুদ্র অক্ষের সমীকরণ

$$\left(A - \frac{1}{e_2^2}\right)(x-\alpha) + H(y-\beta) = 0$$

$$\Rightarrow \left\{1 + \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2}\right\}(x+4) + \left(-\frac{5}{2}\right)(y-0) = 0$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{3}{2}\right)(x+4) - \frac{5y}{2} + 0 = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2+3}{2}\right)(x+4) - \frac{5y}{2} = 0$$

$$\Rightarrow +\frac{5}{2}(x+4) - \frac{5y}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{5x+20-5y}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{5(x-y+4)}{2} = 0$$

$\therefore x - y + 4 = 0$

বৃহৎ অক্ষের সমীকরণ $x + y + 4 = 0$

ক্ষুদ্র " " $x - y + 4 = 0$

বৃহৎ অক্ষের ঢাল, $\tan\theta = -\frac{1}{1} = -1$

$\Rightarrow \tan\theta = \tan 135^\circ$

$\Rightarrow \theta = 135^\circ$

ক্ষুদ্র অক্ষের ঢাল, $\tan\theta = \frac{1}{1} = 1$

$\Rightarrow \tan\theta = \tan 45^\circ$

$\Rightarrow \theta = 45^\circ$

Ex-6

(iii) প্রদত্ত সমীকরণ $5x^2 + 2xy + 5y^2 + 26x + 34y + 65 = 0$ ——— (1)

(1) নং সমীকরণকে সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই

$a = 5,\ b = 5,\ c = 65,\ h = 1,\ g = 13,\ f = 17$

এখন,

$\Delta = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$

$= (5 \times 5 \times 65) + 2 \times 17 \times 13 \times 1 - 5 \times (17)^2 - 5 \times (13)^2 - 65 \times 1^2$

$= 1625 + 442 - 1445 - 845 - 65$

$= -288$

আবার, $ab-h^2 = 5\times5 - 1^2 = 25-1 = 24 > 0$

যেহেতু $\Delta \neq 0$ এবং $ab-h^2 > 0$ সেহেতু (i) নং সমীকরণটি উপবৃত্ত নির্দেশ করে।

ধরি,
উপবৃত্তের কেন্দ্র (α, β)

$$\alpha = \frac{hf - bg}{ab-h^2} = \frac{1\times17 - 5\times13}{5\times5 - 1^2} = \frac{17-65}{25-1} = -\frac{48}{24} = -2$$

$$\beta = \frac{gh - af}{ab-h^2} = \frac{13\times1 - 5\times17}{5\times5 - 1^2} = \frac{13-85}{25-1} = -\frac{72}{24} = -3$$

এখন, অক্ষদ্বয়ের দিক অপরিবর্তিত রেখে মূলবিন্দুকে (α, β) বিন্দুতে স্থানান্তর করলে সমীকরণটি হবে

$$5x^2 + 2xy + 5y^2 = c_1 \quad \text{—— (ii)}$$

এখন, $c_1 = -(\alpha g + \beta f + c)$

$= -\{(-2)\times13 + (-3)\times17 + 65\}$

$= -(-26 - 51 + 65)$

$= 12$

c_1 এর মান (ii) নং এ বসাই

$$5x^2 + 2xy + 5y^2 = 12 \quad \text{—— (iii)}$$

এখন অক্ষদ্বয়কে এমনভাবে আবর্তন করি যাতে xy পদ অপসারিত হয়। তাহলে সমীকরণটি হবে

$$a_1x^2 + b_1y^2 = 12 \quad \text{—— (iv)}$$

$a_1 + b_1 = a + b = 5 + 5 = 10$

$a_1 b_1 = ab - h^2 = 5\times5 - 1^2 = 25 - 1 = 24$

$(a_1-b_1)^2 = (a_1+b_1)^2 - 4a_1b_1$

$= (10)^2 - 4\times 24$

$= 100 - 96$

$(a_1-b_1) = \sqrt{4} = 2$

$a_1+b_1 = 10$

$a_1-b_1 = 2$

$2a_1 = 12$

$\therefore a_1 = 6$

$a_1+b_1 = 10$

$a_1-b_1 = 2$

$2b_1 = 8$

$\therefore b_1 = 4$

a_1 ও b_1 এর মান (iv) নং এ বসিয়ে-

$6x^2+4y^2 = 12$

$\Rightarrow \frac{6x^2}{12} + \frac{4y^2}{12} = 1$

$\Rightarrow \frac{x^2}{\frac{12}{6}} + \frac{y^2}{\frac{12}{4}} = 1$

$\Rightarrow \frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{3})^2} = 1$

নির্ণেয় প্রমান আকার।

এখন, (iii) নং হতে $5x^2+2xy+5y^2 = 12$

$\Rightarrow \frac{5}{12}x^2 + \frac{2}{12}xy + \frac{5}{12}y^2 = 1$

$A = \frac{5}{12}$ $\quad B = \frac{5}{12}$ $\quad H = \frac{1}{12}$

এখন, উপবৃত্তের অক্ষের দৈর্ঘ্য $2r$ হলে

$$\frac{1}{r^4} - (A+B)\frac{1}{r^2} + (AB - H^2) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^4} - \left(\frac{5}{12} + \frac{5}{12}\right)\frac{1}{r^2} + \left(\frac{5}{12}\cdot\frac{5}{12} - \left(\frac{1}{12}\right)^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^4} - \left(\frac{10}{12}\right)\frac{1}{r^2} + \left(\frac{25}{144} - \frac{1}{144}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^4} - \frac{10}{12r^2} + \frac{24}{144} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^4} - \frac{5}{6r^2} + \frac{1}{6} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{6 - 5r^2 + r^4}{6r^4} = 0$$

$$\Rightarrow r^4 - 5r^2 + 6 = 0$$

$$\Rightarrow r^4 - 3r^2 - 2r^2 + 6 = 0$$

$$\Rightarrow r^2(r^2 - 3) - 2(r^2 - 3) = 0$$

$$\Rightarrow (r^2 - 3)(r^2 - 2) = 0$$

$r^2 - 3 = 0$	$r^2 - 2 = 0$
$\Rightarrow r^2 = 3$	$\Rightarrow r^2 = 2$
$\Rightarrow r = \sqrt{3}$	$\Rightarrow r = \sqrt{2}$

এখানে, $r_1 = \sqrt{3}$, $r_2 = \sqrt{2}$

বৃহৎ অক্ষ $= 2r_1 = 2\sqrt{3}$

ক্ষুদ্র " $= 2r_2 = 2\sqrt{2}$

বৃহৎ অক্ষের সমীকরণ

$$\left(A - \frac{1}{\lambda_1^2}\right)(x-\alpha) + H(y-\beta) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{5}{12} - \frac{1}{(\sqrt{3})^2}\right)(x+2) + \frac{1}{12}(y+3) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{5}{12} - \frac{1}{3}\right)(x+2) + \frac{(y+3)}{12} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{5-4}{12}\right)(x+2) + \frac{(y+3)}{12} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x+2)}{12} + \frac{(y+3)}{12} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x+2+y+3}{12} = 0$$

$$\Rightarrow x + y + 5 = 0$$

ক্ষুদ্র অক্ষের সমীকরণ

$$\left(A - \frac{1}{\lambda_2^2}\right)(x-\alpha) + H(y-\beta) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{5}{12} - \frac{1}{(\sqrt{2})^2}\right)(x+2) + \frac{1}{12}(y+3) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{5}{12} - \frac{1}{2}\right)(x+2) + \frac{(y+3)}{12} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{5-6}{12}\right)(x+2) + \frac{(y+3)}{12} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-x-2}{12} + \frac{y+3}{12} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-x-2+y+3}{12} = 0$$

$\Rightarrow -(x-y-1)=0$

$\Rightarrow x-y-1=0$

বৃহৎ অক্ষের সমীকরণ $x+y+5=0$

ক্ষুদ্র " " $x-y-1=0$

আবার,

বৃহৎ অক্ষের ঢাল, $\tan\theta = -\frac{1}{1} = -1$

$\Rightarrow \tan\theta = \tan 135°$

$\Rightarrow \theta = 135°$

ক্ষুদ্র অক্ষের ঢাল,

$\tan\theta = \frac{1}{1} = 1$

$\Rightarrow \tan\theta = \tan 45°$

$\Rightarrow \theta = 45°$

পরাবৃত্তের জন্য

* $y^2 = 4ax$
* শীর্ষ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x, y) = (0, 0)$
* উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(x, y) = (a, 0)$
* অক্ষের সমীকরণ $y = 0$
* শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $x = 0$
* নিয়ামক/দিকাক্ষের সমীকরণ $x = -a$
  $\Rightarrow x+a=0$
* উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ $x = a$
  $\Rightarrow x-a=0$
* উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= 4a$

উপবৃত্ত ও অধিবৃত্তের জন্য

* অক্ষের দৈর্ঘ্য নির্ণয় $\longrightarrow \frac{1}{r^4} - (A+B)\frac{1}{r^2} + (AB - H^2) = 0$

r_1 , r_2

* বৃহৎ অক্ষ $= 2r_1$
  ক্ষুদ্র " $= 2r_2$ $\Big\}$ $r_1 > r_2$

* বৃহৎ অক্ষের সমীকরণ $\longrightarrow \left(A - \frac{1}{r_1^2}\right)(x-\alpha) + H(y-\beta) = 0$

* ক্ষুদ্র অক্ষের সমীকরণ $\longrightarrow \left(A - \frac{1}{r_2^2}\right)(x-\alpha) + H(y-\beta) = 0$

* উৎকেন্দ্রিকতা $e = \sqrt{1 - \frac{r_2^2}{r_1^2}}$

* শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\alpha \pm \overset{r_1}{d}\cos\theta , \beta \pm \overset{r_2}{d}\sin\theta)$

* উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(\alpha \pm er_1\cos\theta , \beta \pm er_1\sin\theta)$

* উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $L = \left|\frac{2r_2^2}{r_1}\right|$

* উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ $(\alpha \pm er_1\cos\theta , \beta \pm er_1\sin\theta)$

* দিকাক্ষ বা নিয়ামক রেখার স্থানাঙ্ক

$$\left(\alpha \pm \frac{r_1}{e}\cos\theta , \beta \pm \frac{r_1}{e}\sin\theta\right)$$

Ex-10

প্রদত্ত সমীকরণ $8x^2-4xy+5y^2-16x-14y+17=0$ ——— (i)

(i) নং কে সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ এর সাথে তুলনা করে পাই

$a=8,\ b=5,\ c=17,\ h=-2,\ g=-8,\ f=-7$

এখন,

$$\Delta = abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2$$
$$=(8\times5\times17)+2\times(-7)\times(-8)\times(-2)-8\times(-7)^2-5\times(-8)^2-17\times(-2)^2$$
$$=680-224-392-320-68$$
$$=-324$$

আবার, $ab-h^2=8\times5-(-2)^2=40-4=36>0$

যেহেতু $\Delta\neq0$ এবং $ab-h^2>0$ যেহেতু (i) নং সমীকরণটি উপবৃত্তকে নির্দেশ করবে।

ধরি, উপবৃত্তের কেন্দ্র (α,β)

$$\alpha=\frac{hf-bg}{ab-h^2}=\frac{(-2\times-7)-5\times(-8)}{8\times5-(-2)^2}=\frac{14+40}{40-4}=\frac{54}{36}=\frac{3}{2}$$

$$\beta=\frac{gh-af}{ab-h^2}=\frac{(-8\times-2)-8\times(-7)}{8\times5-(-2)^2}=\frac{16+56}{40-4}=\frac{72}{36}=2$$

$$\therefore(\alpha,\beta)=\left(\frac{3}{2},2\right)$$

এখন, অক্ষদ্বয়ের দিক অপরিবর্তিত রেখে মূলবিন্দুকে (α,β) বিন্দুতে স্থানান্তর করলে সমীকরণটি হবে $8x^2-4xy+5y^2=c_1$ ——— (ii)

যেখানে, $c_1=-(\alpha g+\beta f+c)$

$$=-\left[\left(\frac{3}{2}\times(-8)\right)+2\times(-7)+17\right]$$
$$=-(-12-14+17)$$

$= -(-9) = 9$

c_1 এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই

$$8x^2 - 4xy + 5y^2 = 9 \quad \text{——— (iii)}$$

(iii) নং এ $A = 8$ $H = -2$, $B = 5$

এখন, অক্ষদ্বয়কে এমনভাবে অপবর্তন করি যাতে xy-পদ অপসারিত হয়। তাহলে সমীকরণটি হবে

$$a_1x^2 + b_1y^2 = 9 \quad \text{——— (iv)}$$

এখন, $a_1 + b_1 = A + B = 8 + 5 = 13$

$a_1b_1 = AB - H^2 = 8 \times 5 - (-2)^2 = 40 - 4 = 36$

$\therefore (a_1 - b_1)^2 = (a_1 + b_1)^2 - 4a_1b_1$

$= (13)^2 - 4 \cdot 36$

$= 169 - 144$

$(a_1 - b_1) = \sqrt{25} = 5$

$a_1 + b_1 = 13$

$a_1 - b_1 = 5$

$2a_1 = 18$

$\Rightarrow a_1 = 9$

$a_1 + b_1 = 13$

$-a_1 + b_1 = -5$

$2b_1 = 8$

$\Rightarrow b_1 = 4$

a_1 ও b_1 এর মান (iv) নং এ বসিয়ে পাই

$$9x^2 + 4y^2 = 9$$

$$\Rightarrow \frac{9x^2}{9} + \frac{4y^2}{9} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{\frac{9}{9}} + \frac{y^2}{\frac{9}{4}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = 1 \quad \text{---} \quad (v)$$

(iii) নং হতে,

$$8x^2 - 4xy + 5y^2 = 9$$

$$\Rightarrow \frac{8}{9}x^2 - \frac{4}{9}xy + \frac{5}{9}y^2 = 1$$

$A_1 = \frac{8}{9}$ $\quad B_1 = \frac{5}{9}$ $\quad H_1 = -\frac{2}{9}$

এখন, উপবৃত্তের অক্ষের দৈর্ঘ্য $2r$ হলে

$$\therefore \frac{1}{r^4} - (A_1 + B_1)\frac{1}{r^2} + (A_1 B_1 - H_1^2) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^4} - \left(\frac{8}{9} + \frac{5}{9}\right)\frac{1}{r^2} + \left\{\left(\frac{8}{9} \times \frac{5}{9}\right) - \left(-\frac{2}{9}\right)^2\right\} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^4} - \left(\frac{8+5}{9}\right)\frac{1}{r^2} + \left(\frac{40}{81} - \frac{4}{81}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^4} - \frac{13}{9r^2} + \frac{40-4}{81} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^4} - \frac{13}{9r^2} + \frac{4}{9} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{9 - 13r^2 + 4r^4}{9r^4} = 0$$

$$\Rightarrow 4r^4 - 13r^2 + 9 = 0$$

$$\Rightarrow 4r^4 - 4r^2 - 9r^2 + 9 = 0$$

$$\Rightarrow 4r^2(r^2 - 1) - 9(r^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (r^2 - 1)(4r^2 - 9) = 0$$

$$r^2 - 1 = 0$$
$$\Rightarrow r^2 = 1$$
$$\Rightarrow r = 1$$

$$4r^2 - 9 = 0$$
$$\Rightarrow 4r^2 = 9$$
$$\Rightarrow r^2 = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$
$$\Rightarrow r = \frac{3}{2}$$

এখানে,

$$r_1 = \frac{3}{2} \qquad r_2 = 1$$

বৃহৎ অক্ষ $= 2r_1 = 2\cdot\frac{3}{2} = 3$

ক্ষুদ্র " $= 2r_2 = 2\cdot 1 = 2$

বৃহৎ অক্ষের সমীকরণ

$$\left(A_1 - \frac{1}{r_1^2}\right)(x-\alpha) + H_1(y-\beta) = 0$$
$$\Rightarrow \left(\frac{8}{9} - \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{2}{9}\right)(y-2) = 0$$
$$\Rightarrow \left(\frac{8}{9} - \frac{4}{9}\right)\left(\frac{2x-3}{2}\right) - \frac{(2y-4)}{9} = 0$$
$$\Rightarrow \left(\frac{8-4}{9}\right)\cdot\left(\frac{2x-3}{2}\right) - \frac{2y-4}{9} = 0$$
$$\Rightarrow \frac{4}{9}\left(\frac{2x-3}{2}\right) - \frac{2y-4}{9} = 0$$
$$\Rightarrow \frac{8x-12}{18} - \frac{2y-4}{9} = 0$$
$$\Rightarrow \frac{8x-12-4y+8}{18} = 0$$
$$\Rightarrow 8x - 4y - 4 = 0$$
$$\therefore 2x - y - 1 = 0$$

ক্ষুদ্র অক্ষের সমীকরণ

$$\left(A_1 - \frac{1}{m_2^2}\right)(x-\alpha) + H_1(y-\beta) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{8}{9} - \frac{1}{1^2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{2}{9}\right)(y-2) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{8-9}{9}\right)\left(\frac{2x-3}{2}\right) - \frac{2}{9}(y-2) = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{9}\left(\frac{2x-3}{2}\right) - \frac{2}{9}(y-2) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-2x+3}{18} - \frac{2y-4}{9} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-2x+3-4y+8}{18} = 0$$

$$\Rightarrow -2x-4y+11 = 0$$

$$\Rightarrow -(2x+4y-11) = 0$$

$$\therefore 2x+4y-11 = 0$$

বৃহৎ অক্ষের সমীকরণ $2x - y - 1 = 0$

ক্ষুদ্র " " $2x + 4y - 11 = 0$

বৃহৎ অক্ষের ঢাল $\tan\theta_1 = -\frac{2}{(-1)} = 2$

$$\Rightarrow \tan\theta_1 = 2$$

$$\therefore \theta_1 = \tan^{-1}(2)$$

ক্ষুদ্র অক্ষের ঢাল $\tan\theta_2 = -\frac{2}{4}$

$$\Rightarrow \tan\theta_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \theta_2 = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

উৎকেন্দ্রিকতা $e = \sqrt{1 - \frac{r_2^2}{r_1^2}}$

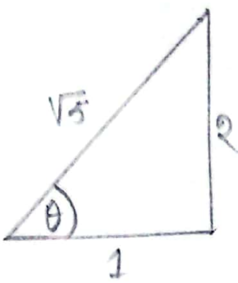
$= \sqrt{1 - \frac{(1)^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}}$

$= \sqrt{1 - \frac{4}{9}}$

$= \sqrt{\frac{9-4}{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

আমরা জানি,

শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\alpha \pm r_1\cos\theta,\ \beta \pm r_1\sin\theta)$



$= \left(\frac{3}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{3}{2},\ 2 \pm \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

$= \left(\frac{3}{2} \pm \frac{3}{2\sqrt{5}},\ 2 \pm \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$

$= \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2\sqrt{5}},\ 2 + \frac{3}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2\sqrt{5}},\ 2 - \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক

$(\alpha \pm er_1\cos\theta,\ \beta \pm er_1\sin\theta)$

$= \left(\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}},\ 2 \pm \frac{\sqrt{5}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\sqrt{5}}\right)$

$= \left(\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2},\ 2 \pm 1\right)$

$= \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2},\ 2+1\right), \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2},\ 2-1\right)$

$= (2, 3), (1, 1)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $L = \left|\frac{2r_2^2}{r_1}\right|$

$= \left|\frac{2\times 1^2}{\frac{3}{2}}\right|$

$= \left|2\times\frac{2}{3}\right| = \left|\frac{4}{3}\right| = \frac{4}{3}$

পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয়ের $\left(\alpha \pm \frac{r_1}{e}\cos\theta,\ \beta \pm \frac{r_1}{e}\sin\theta\right)$

$= \left(\frac{3}{2} \pm \frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}},\ 2 \pm \frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

$= \left(\frac{3}{2} \pm \frac{3}{2}\times\frac{3}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}},\ 2 \pm \frac{3}{\cancel{2}}\times\frac{3}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\sqrt{5}}\right)$

$= \left(\frac{3}{2} \pm \frac{9}{10},\ 2 \pm \frac{9}{5}\right)$

$= \left(\frac{3}{2}+\frac{9}{10},\ 2+\frac{9}{5}\right), \left(\frac{3}{2}-\frac{9}{10},\ 2-\frac{9}{5}\right)$

$= \left(\frac{15+9}{10},\ \frac{10+9}{5}\right), \left(\frac{15-9}{10},\ \frac{10-9}{5}\right)$

$= \left(\frac{24}{10},\ \frac{19}{5}\right), \left(\frac{6}{10},\ \frac{1}{5}\right)$

$= \left(\frac{12}{5},\ \frac{19}{5}\right), \left(\frac{3}{5},\ \frac{1}{5}\right)$

যেহেতু ক্ষুদ্র অক্ষের সমীকরণ $2x+4y-11=0$ সমীকরণটির সমান্তরাল হবে লম্বের, নিয়ামক রেখার।

$\therefore$ সমান্তরাল রেখার সমীকরণ হবে

$2x+4y+k=0$ ——— (vi)

দিকাক্ষের সমীকরণ হবে

$\left(\frac{12}{5}, \frac{19}{5}\right)$ এর জন্য $\longrightarrow$

$$2\cdot\frac{12}{5} + 4\cdot\frac{19}{5} + k_1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{24}{5} + \frac{76}{5} + k_1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{24+76}{5} + k_1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{200}{5} + k_1 = 0$$

$$\therefore k_1 = -\frac{200}{5} = -20$$

$\left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$ এর জন্য

$$2\cdot\frac{3}{5} + 4\cdot\frac{1}{5} + k_2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{6}{5} + \frac{4}{5} + k_2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{6+4}{5} + k_2 = 0$$

$$\Rightarrow k_2 = -\frac{10}{5} = -2$$

$\therefore$ দিকাক্ষের সমীকরণ

$$2x+4y-20=0$$

$$2x+4y-2=0$$

উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ হবে

$(2,3)$, $(1,1)$ বিন্দুগামী এবং $2x+4y+k=0$

$(2,3)$ এর জন্য $\longrightarrow 2\cdot2+4\cdot3+k_1=0$

$\Rightarrow 4 + 12 + k_1 = 0$

$\Rightarrow k_1 = -16$

(1, 1) এর জন্য $\rightarrow 2\cdot 1 + 4\cdot 1 + k_2 = 0$

$\Rightarrow 2 + 4 + k_2 = 0$

$\Rightarrow k_2 = -6$

(ii) ∴ উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ

$2x + 4y - 16 = 0$

$2x + 4y - 6 = 0$

Ex- 14

প্রদত্ত সমীকরণ $x^2 + 2xy + y^2 - 6x - 2y + 4 = 0$ ——— (1)

(1) নং কে সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই

$a = 1,\ b = 1,\ c = 4,\ h = 1,\ g = -3,\ f = -1$

এখন, $\Delta = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$

$= (1\times 1\times 4) + 2\times(-1)\times(-3)\times 1 - 1\times(-1)^2 - 1\times(-3)^2 - 4\times 1^2$

$= 4 + 6 - 1 - 9 - 4$

$= -4$

আবার, $ab - h^2 = 1\times 1 - 1^2 = 1 - 1 = 0$

যেহেতু $\Delta \neq 0$ এবং $ab - h^2 = 0$ সেহেতু (1) নং সমীকরণ হবে পরাবৃত্ত।

এখন, $x^2 + 2xy + y^2 - 6x - 2y + 4 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 6x + 2y - 4$

$$\Rightarrow x^2+2\cdot x\cdot y+y^2 = 6x+2y-4$$

$$\Rightarrow (x+y)^2 = 6x+2y-4$$

$$\left[\begin{aligned} (x+y+k)^2 &= \{(x+y)+k\}^2 \\ &= (x+y)^2+2\cdot(x+y)\cdot k+k^2 \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow (x+y+k)^2-2(x+y)k-k^2 = 6x+2y-4$$

$$\Rightarrow (x+y+k)^2-2xk-2yk-k^2 = 6x+2y-4$$

$$\Rightarrow (x+y+k)^2 = 6x+2y-4+2xk+2yk+k^2$$

$$\Rightarrow (x+y+k)^2 = x(6+2k)+y(2+2k)+k^2-4 \quad \text{——— (ii)}$$

মনেকরি, (ii) নং এ $(x+y+k)=0$ এবং $x(6+2k)+y(2+2k)-k^2-4=0$ সরলরেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব

$$\therefore (6+2k)+(2+2k)=0$$

$$\Rightarrow 6+2k+2+2k=0$$

$$\Rightarrow 8+4k=0$$

$$\Rightarrow 4k=-8$$

$$\Rightarrow k=-\frac{8}{4}=-2$$

k এর মান (ii) এ বসিয়ে

$$(x+y-2)^2 = x(6+2\cdot-2)+y(2+2\cdot-2)+(-2)^2-4$$

$$= x(6-4)+y(2-4)+4-4$$

$$= 2x-2y-0$$

$$\Rightarrow (x+y-2)^2 = 2(x-y)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x+y-2}{\sqrt{1^2+1^2}}\right)^2\cdot(\sqrt{2})^2 = 2\cdot\left(\frac{x-y}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\right)\cdot\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow Y^2\cdot 2 = 2X\cdot\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow Y^2 = \frac{2X\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow Y^2 = 2\cdot\frac{X}{\sqrt{2}} = 2\cdot\frac{2X}{2\sqrt{2}} = 4\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot X$$

যেখানে,

$$Y = \frac{x+y-2}{\sqrt{2}}\quad,\quad X = \frac{x-y}{\sqrt{2}}\quad,\quad a = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

শীর্ষবিন্দুর জন্য $\rightarrow X = 0$, $Y = 0$

$$\Rightarrow \frac{x-y}{\sqrt{2}} = 0 \qquad \Rightarrow \frac{x+y-2}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\Rightarrow x-y = 0 \qquad \Rightarrow x+y-2 = 0$$

$\therefore$

$$\begin{aligned} x+y &= 2\\ x-y &= 0\\ \hline 2x &= 2\\ \Rightarrow x &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x+y &= 2\\ x-y &= 0\\ \hline 2y &= 2\\ \Rightarrow y &= 1 \end{aligned}$$

$\therefore$ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x,y) = (1,1)$

উপকেন্দ্রের জন্য $X = a$, $Y = 0$

$$\Rightarrow \frac{x-y}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \qquad \frac{x+y-2}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\Rightarrow x-y = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow x+y-2 = 0 \text{ ——— (ii)}$$

$$\Rightarrow 2x-2y-1 = 0 \text{ ——— (i)}$$

(i) $\times 1$ + (ii) $\times 2 \Rightarrow$

$\therefore$

$$\begin{aligned} 2x-2y &= 1\\ 2x+2y &= 4\\ \hline 4x &= 5\\ \Rightarrow x &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

(i) $\times 1$ − (ii) $\times 2 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} 2x-2y &= 1\\ 2x+2y &= 4\\ \hline -4y &= -3\\ \Rightarrow y &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$\therefore$ উপকেন্দ্রের স্থানাংক $(x, y) = \left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ

$$x - a = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x-y}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2x-2y-1}{2\sqrt{2}} = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 2y - 1 = 0$$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= 4a = 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

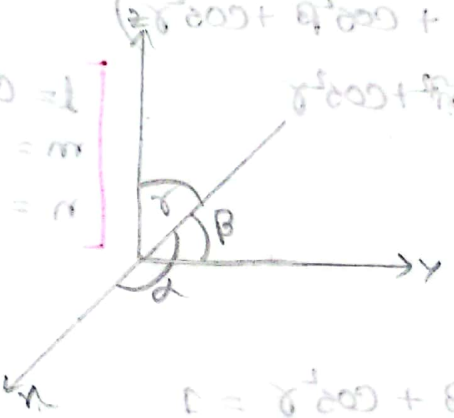
$\therefore$ শীর্ষবিন্দুর স্থানাংক $(1, 1)$, উপকেন্দ্রের স্থানাংক $\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right)$ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ $2x - 2y - 1 = 0$ A:

* অধ্যায়–৬ *

* 6 *

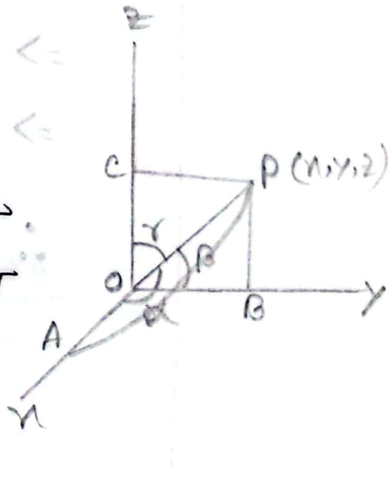
দিক কোসাইন : কোনো সরলরেখা x, y ও z অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যথাক্রমে α, β ও γ কোণ উৎপন্ন করলে $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ কে ঐ সরলরেখার দিক কোসাইন বলা হয়। এদের সাধারণত l, m, n দ্বারা প্রকাশ করা হয়। $l = \cos\alpha$, $m = \cos\beta$, $n = \cos\gamma$

দিক অনুপাত : কোনো সরলরেখার দিক কোসাইন l, m ও n এর সাথে সমানুপাতিক যেকোনো তিনটি সংখ্যা a, b, c কে ঐ সরলরেখার দিক অনুপাত বলে। অর্থাৎ কোনো সরলরেখার দিক কোসাইন l, m, n হলে এবং দিক অনুপাত a, b, c হলে এদের মধ্যে সম্পর্ক হবে $\frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c}$ ।



Theorem–3

উপপাদ্য–৩



প্রমাণ: ধরি, OP সরলরেখার দিক কোসাইন l, m, n যেখানে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y, z) এবং OP সরলরেখা x, y, z অক্ষের যোগবোধক দিকের সাথে α, β, γ কোণ উৎপন্ন করে। তাহলে

ΔOPA হতে,

$$\cos\alpha = \frac{OA}{OP} = \frac{x}{OP}$$

$$\Rightarrow x = OP\cos\alpha \quad \text{———} \quad (1)$$

ΔOPB হতে,

$$\cos\beta = \frac{OB}{OP} = \frac{y}{OP}$$

$$\Rightarrow y = OP\cos\beta \text{ ——— (ii)}$$

ΔOPC হতে,

$$\cos\gamma = \frac{OC}{OP} = \frac{z}{OP}$$

$$\Rightarrow z = OP\cos\gamma \text{ ——— (iii)}$$

এখন, (i), (ii), (iii) বর্গ করে যোগ করে পাই

$$x^2+y^2+z^2 = OP^2\cos^2\alpha + OP^2\cos^2\beta + OP^2\cos^2\gamma$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2 = OP^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)$$

$$\Rightarrow OP^2 = OP^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)$$

$$\Rightarrow 1 = \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma$$

$$\therefore l^2+m^2+n^2 = 1$$

$OP = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}$

$\Rightarrow OP^2 = x^2+y^2+z^2$

$l = \cos\alpha$

$m = \cos\beta$

$n = \cos\gamma$

Note:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1$$

$$\Rightarrow 1-\sin^2\alpha+1-\sin^2\beta+1-\sin^2\gamma = 1$$

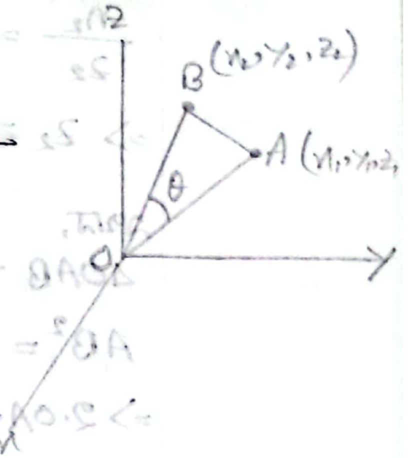
$$\Rightarrow 2-\sin^2\alpha-\sin^2\beta-\sin^2\gamma+1-1 = 0$$

$$\Rightarrow -(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma) = -2$$

$$\therefore \sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma = 2$$

Theorem—6

উপপাদ্য—৫ : (i)



মনেকরি, OA ও OB সরলরেখাদ্বয়ের দিক কোসাইন যথাক্রমে l_1, m_1, n_1 ও l_2, m_2, n_2 যেখানে $\angle AOB = \theta$

ধরি, A ও B এর স্থানাংক যথাক্রমে (x_1, y_1, z_1) ও (x_2, y_2, z_2) তাহলে

$$\frac{l_1}{x_1} = \frac{m_1}{y_1} = \frac{n_1}{z_1} = \frac{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}$$

$$= \frac{1}{OA}$$

এখানে,

$$\frac{l_1}{x_1} = \frac{1}{OA} \qquad\qquad \frac{m_1}{y_1} = \frac{1}{OA}$$

$$\Rightarrow x_1 = OA \cdot l_1 \text{ ——— (i)} \qquad \Rightarrow y_1 = OA \cdot m_1 \text{ ——— (ii)}$$

$$\frac{n_1}{z_1} = \frac{1}{OA}$$

$$\Rightarrow z_1 = OA \cdot n_1 \text{ ——— (iii)}$$

আবার,

$$\frac{l_2}{x_2} = \frac{m_2}{y_2} = \frac{n_2}{z_2} = \frac{\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$= \frac{1}{OB}$$

এখানে,

$$\frac{l_2}{x_2} = \frac{1}{OB} \qquad\qquad \frac{m_2}{y_2} = \frac{1}{OB}$$

$$\Rightarrow x_2 = OB \cdot l_2 \text{ ——— (iv)} \qquad \Rightarrow y_2 = OB \cdot m_2 \text{ ——— (v)}$$

$$\frac{n_2}{z_2} = \frac{1}{OB}$$

$\Rightarrow z_2 = OB \cdot n_2$ ——— (vi)

এখন,

ΔOAB হতে পাই,

$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos\theta$

$\Rightarrow 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos\theta = OA^2 + OB^2 - AB^2$

$= (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - \{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\}$

$= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - \{x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2 + y_1^2 + z_2^2 - 2z_1z_2 + z_1^2\}$

$= \cancel{x_1^2} + \cancel{y_1^2} + \cancel{z_1^2} + \cancel{x_2^2} + \cancel{y_2^2} + \cancel{z_2^2} - \cancel{x_2^2} + 2x_1x_2 - \cancel{x_1^2} - \cancel{y_2^2} + 2y_1y_2 - \cancel{y_1^2} - \cancel{z_2^2} + 2z_1z_2 - \cancel{z_1^2}$

$= 2x_1x_2 + 2y_1y_2 + 2z_1z_2$

$\Rightarrow 2OA \cdot OB \cos\theta = 2(OA \cdot l_1 \times OB \cdot l_2) + 2(OA \cdot m_1 \times OB \cdot m_2) + 2(OA \cdot n_1 \times OB \cdot n_2)$

$\Rightarrow 2OA \cdot OB \cos\theta = 2OA \cdot OB(l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2)$

$\therefore \cos\theta = l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2$ ——— (vii)

(proved)

(ii) (i) নং হতে পাই

$\cos\theta = l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2$ বর্গ করে পাই

$\Rightarrow \cos^2\theta = (l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2)^2$

$\Rightarrow 1 - \sin^2\theta = l_1^2l_2^2 + m_1^2m_2^2 + n_1^2n_2^2 + 2l_1l_2 \cdot m_1m_2 + 2m_1m_2 \cdot n_1n_2 + 2l_1l_2 \cdot n_1n_2$

$$\Rightarrow \sin^2\theta = 1 - l_1^2 l_2^2 - m_1^2 m_2^2 - n_1^2 n_2^2 - 2l_1l_2\cdot m_1m_2 - 2m_1m_2\cdot n_1n_2 - 2l_1l_2\cdot n_1n_2$$

$$\Rightarrow \sin^2\theta = 1\cdot 1 - l_1^2 l_2^2 - m_1^2 m_2^2 - n_1^2 n_2^2 - 2l_1l_2\cdot m_1m_2 - 2m_1m_2\cdot n_1 n_2 - 2l_1l_2\cdot n_1n_2$$

$$\Rightarrow \sin^2\theta = (l_1^2+m_1^2+n_1^2)(l_2^2+m_2^2+n_2^2) - l_1^2l_2^2 - m_1^2m_2^2 - n_1^2n_2^2 - 2l_1l_2m_1m_2 - 2m_1m_2\cdot n_1n_2 - 2l_1l_2\cdot n_1n_2$$

$$\Rightarrow \sin^2\theta = \cancel{l_1^2l_2^2} + l_1^2m_2^2 + l_1^2n_2^2 + m_1^2l_2^2 + \cancel{m_1^2m_2^2} + m_1^2n_2^2 + n_1^2l_2^2 + n_1^2m_2^2 + \cancel{n_1^2n_2^2} - \cancel{l_1^2l_2^2} - \cancel{m_1^2m_2^2} - \cancel{n_1^2n_2^2} - 2l_1l_2\cdot m_1m_2 - 2m_1m_2\cdot n_1n_2 - 2l_1l_2\cdot n_1n_2$$

$$\Rightarrow \sin^2\theta = (l_1m_2)^2 - 2l_1l_2\cdot m_1m_2 + (m_1l_2)^2 + (m_1n_2)^2 - 2m_1m_2\cdot n_1n_2 + (n_1m_2)^2 + (n_1l_2)^2 - 2n_1n_2\cdot l_1l_2 + (n_2l_1)^2$$

$$\Rightarrow \sin^2\theta = (l_1m_2 - m_1l_2)^2 + (m_1n_2 - n_1m_2)^2 + (n_1l_2 - n_2l_1)^2$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \pm\sqrt{(l_1m_2 - l_2m_1)^2 + (m_1n_2 - m_2n_1)^2 + (n_1l_2 - n_2l_1)^2}$$

A.

(iii) আমরা জানি,

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \pm\frac{\sqrt{(l_1m_2 - l_2m_1)^2 + (m_1n_2 - m_2n_1)^2 + (n_1l_2 - n_2l_1)^2}}{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}$$

* লম্ব হওয়ার শর্ত $\theta = 90^\circ$ এবং $l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = \cos 90^\circ = 0$
* সমান্তরাল হওয়ার শর্ত $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$, $\theta = 0^\circ$

Note: যদি সরলরেখা দুয়ের দিক অনুপাত $(a_1, b_1, c_1)(a_2, b_2, c_2)$
* লম্ব হওয়ার শর্ত $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$
* সমান্তরাল হওয়ার শর্ত $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

Ex – 18

① দে· আছে, $O(0,0,0)$; $P(2,-3,4)$, $Q(-1,2,3)$

OP সরলরেখার দিক অনুপাত হবে

$$a = \{(2-0), (-3-0), (4-0)\} = (2,-3,4)$$

OQ সরলরেখার দিক অনুপাত হবে

$$b = \{(-1-0), (2-0), (3-0)\} = (-1,2,3)$$

PQ সরলরেখার দিক অনুপাত হবে

$$c = \{(-1-2), (2+3), (3-4)\} = (-3,5,-1)$$

আবার,

OP রেখার দিক কোসাইন

$$l_1 = \frac{2}{\sqrt{2^2+(-3)^2+4^2}} = \frac{2}{\sqrt{4+9+16}} = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

$$m_1 = -\frac{3}{\sqrt{29}}, \quad n_1 = \frac{4}{\sqrt{29}}$$

OQ এর দিক কোসাইন

$$l_2 = \frac{-1}{\sqrt{(-1)^2+2^2+3^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1+4+9}} = \frac{-1}{\sqrt{14}}$$

$$m_2 = \frac{2}{\sqrt{14}}, \quad n_2 = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

PQ এর দিক কোসাইন

$$l_3 = \frac{-3}{\sqrt{(-3)^2+5^2+(-1)^2}} = \frac{-3}{\sqrt{9+25+1}} = -\frac{3}{\sqrt{35}}$$

$$m_3 = \frac{5}{\sqrt{35}}, \quad n_3 = -\frac{1}{\sqrt{35}}$$

Ex-18

(ii) দে· আছে, $O(0,0,0)$, $P(1,3,-2)$, $Q(3,2,0)$

OP সরলরেখার দিক অনুপাত হবে

$$a = \{(1-0),(3-0),(-2-0)\} = (1,3,-2)$$

OQ সরলরেখার দিক অনুপাত হবে

$$b = \{(3-0),(2-0),(0-0)\} = (3,2,0)$$

PQ সরলরেখার দিক অনুপাত হবে

$$c = \{(3-1),(2-3),(0+2)\} = (2,-1,2)$$

আবার,

OP রেখার দিক কোসাইন

$$l_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2+3^2+(-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+9+4}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$m_1 = \frac{3}{\sqrt{14}}, \quad n_1 = \frac{-2}{\sqrt{14}}$$

OQ রেখার দিক কোসাইন

$$l_2 = \frac{3}{\sqrt{3^2+2^2+0^2}} = \frac{3}{\sqrt{9+4+0}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$m_2 = \frac{2}{\sqrt{13}}, \quad n_2 = \frac{0}{\sqrt{13}} = 0$$

PQ রেখার দিক কোসাইন

$$l_3 = \frac{2}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{2}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$$

$$m_3 = \frac{-1}{3}, \quad n_3 = \frac{2}{3}$$

Ex-19

মনেকরি,

সরলরেখাটি অক্ষত্রয়ের সাথে সমান কোণ α উৎপন্ন করে, তাহলে সরলরেখাটির দিক কোসাইন হবে $\cos\alpha$, $\cos\alpha$, $\cos\alpha$

আমরা জানি,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\Rightarrow 3\cos^2\alpha = 1$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{3} \quad \text{--------- (1)}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

সুতরাং, সরলরেখাটির দিক কোসাইন হবে

$$(\cos\alpha, \cos\alpha, \cos\alpha) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ অথবা } -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

(1) নং সমীকরণ হতে পাই,

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 1 - \sin^2\alpha = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

(Showed)

Note: দুইটি সরলরেখার দিক অনুপাত a_1, b_1, c_1 এবং a_2, b_2, c_2 ও এদের মধ্যবর্তী কোণ θ হলে

$$\cos\theta = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}.$$

Ex-23

ক. জানি,

দিক অনুপাত $\longrightarrow$

$a_1 = 2, \; b_1 = 1, \; c_1 = 1 \qquad a_2 = 4, \; b_2 = \sqrt{3} - 1, \; c_2 = -\sqrt{3} - 1$

$$\cos\alpha = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

$$= \frac{2 \cdot 4 + 1 \cdot (\sqrt{3} - 1) + 1 \cdot (-\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{4^2 + (\sqrt{3} - 1)^2 + (-\sqrt{3} - 1)^2}}$$

$$= \frac{8 + \sqrt{3} - 1 - \sqrt{3} - 1}{\sqrt{4 + 1 + 1} \cdot \sqrt{16 + (\sqrt{3})^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 + 1^2 + (-\sqrt{3})^2 - 2 \cdot (-\sqrt{3}) \cdot 1 + 1^2}}$$

$$= \frac{8 - 2}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{16 + 3 - 2\sqrt{3} + 1 + 3 + 2\sqrt{3} + 1}}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{24}}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{2}$$

$\therefore \cos\alpha = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos\alpha = \cos 60^\circ$

$\Rightarrow \alpha = 60^\circ$

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$ (showed)

Ex-25

দে. আছে,

প্রদত্ত সমীকরণ

$2l+2m-n=0$ ——— (i) $lm+mn+nl=0$ ——— (ii)

(i) নং হতে পাই

$2l+2m=n$

n এর মান (ii) নং এ বসাই

$lm+m(2l+2m)+l(2l+2m)=0$

$\Rightarrow lm+2lm+2m^2+2l^2+2ml=0$

$\Rightarrow 5lm+2m^2+2l^2=0$

$\Rightarrow 2m^2+5lm+2l^2=0$

$\Rightarrow 2m^2+4lm+lm+2l^2=0$

$\Rightarrow 2m(m+2l)+l(m+2l)=0$

$\Rightarrow (m+2l)(2m+l)=0$

$\therefore m+2l=0$ ——— (iii) অথবা $2m+l=0$ ——— (iv)

(i) ও (iii) আড় গুণন করি

$2l+2m-n=0$

$2l+m+0=0$

$$\frac{l}{0+1}=\frac{m}{-2-0}=\frac{n}{2-4}$$

$$\Rightarrow \frac{l}{1}=\frac{m}{-2}=\frac{n}{-2}=\frac{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}$$ সমানুপাতিক ধর্ম অনুসারে

$$\Rightarrow \frac{l}{1}=\frac{m}{-2}=\frac{n}{-2}=\frac{1}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{1}{\sqrt{9}}=\frac{1}{3}$$

$\Rightarrow \frac{l}{1} = \frac{1}{3}$ অথবা $\frac{m}{-2} = \frac{1}{3}$ অথবা $\frac{n}{-2} = \frac{1}{3}$

$\therefore l = \frac{1}{3}$ $\therefore m = \frac{-2}{3}$ $\therefore n = \frac{-2}{3}$

প্রথম সরলরেখাটির দিক কোসাইন হবে $(l_1, m_1, n_1) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

$= \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

(i) ও (iv) নং থেকে বজ্রগুণন করে পাই

$2l + 2m - n = 0$

$l + 2m + 0 = 0$

$$\frac{l}{0+2} = \frac{m}{-1-0} = \frac{n}{4-2}$$

$$\Rightarrow \frac{l}{2} = \frac{m}{-1} = \frac{n}{2} = \frac{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{l}{2} = \frac{m}{-1} = \frac{n}{2} = \frac{1}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow \frac{l}{2} = \frac{1}{3}$ অথবা $\frac{m}{-1} = \frac{1}{3}$ অথবা $\frac{n}{2} = \frac{1}{3}$

$\therefore l = \frac{2}{3}$ $\therefore m = -\frac{1}{3}$ $\therefore n = \frac{2}{3}$

দ্বিতীয় সরলরেখাটির দিক কোসাইন হবে $(l_2, m_2, n_2) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

কোনো সরলরেখা পরস্পর লম্ব হতে হলে $l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$

$\therefore L.H.S = l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2$

$= \left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$

$= -\frac{2}{9} - \frac{2}{9} + \frac{4}{9}$

$$= \frac{4}{9} - \frac{4}{9}$$

$$= 0 = R.H.S$$

সরলরেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব (Showed)

Ex-26 (i)

(i) দে. আছে,

প্রদত্ত সমীকরণ

$$l+m+n=0 \text{ —— (i)} \qquad l^2+m^2-n^2=0 \text{ —— (ii)}$$

(i) নং হতে পাই

$$l+m+n=0$$

$$\Rightarrow n=-l-m$$

$$\Rightarrow n=-(l+m)$$

n এর মান (ii) নং এ বসাই

$$l^2+m^2-\{-(l+m)\}^2=0$$

$$\Rightarrow l^2+m^2-(l+m)^2=0$$

$$\Rightarrow l^2+m^2-l^2-2lm-m^2=0$$

$$\Rightarrow -2lm=0$$

$$\Rightarrow lm=0$$

হয় $l=0$ —— (iii) অথবা $m=0$ —— (iv)

(i) ও (iii) আড় গুনন করে পাই

$$l+m+n=0$$

$$l+0+0=0$$

$$\frac{l}{0-0} = \frac{m}{1-0} = \frac{n}{0-1}$$

$$\Rightarrow \frac{l}{0} = \frac{m}{1} = \frac{n}{-1} = \frac{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}{\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{l}{0} = \frac{m}{1} = \frac{n}{-1} = \frac{1}{\sqrt{0+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow \frac{l}{0} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ অথবা $\frac{m}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ অথবা $\frac{n}{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow l = 0$ $\Rightarrow m = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\Rightarrow n = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

প্রথম সরলরেখাটির দিক কোসাইন হবে $(l_1, m_1, n_1) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(i) ও (iv) নং কে আড় গুনন করে পাই

$$l+m+n=0$$
$$0+m+0=0$$

$$\frac{l}{0-1} = \frac{m}{0-0} = \frac{n}{1-0}$$

$$\Rightarrow \frac{l}{-1} = \frac{m}{0} = \frac{n}{1} = \frac{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}{\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{l}{-1} = \frac{m}{0} = \frac{n}{1} = \frac{1}{\sqrt{1+0+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow \frac{l}{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ অথবা $\frac{m}{0} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ অথবা $\frac{n}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow l = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\Rightarrow m = 0$ $\Rightarrow n = \frac{1}{\sqrt{2}}$

দ্বিতীয় সরলরেখাটির দিক কোসাইন হবে $(l_2, m_2, n_2) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

এখন, সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ θ হলে

$$\cos\theta = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$$

$\Rightarrow \cos\theta = 0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)0 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\Rightarrow \cos\theta = 0 + 0 + \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos\theta = \cos 60^\circ$

$\Rightarrow \theta = 60^\circ$

$\therefore$ সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ 60°।

Ex-26

(ii) দে. আছে,

প্রদত্ত সমীকরণ

$l - 5m + 3n = 0$ ——— (i) $\quad 7l^2 + 5m^2 - 3n^2 = 0$ ——— (ii)

(i) নং হতে পাই,

$l - 5m + 3n = 0$

$\Rightarrow 5m = l + 3n$

$\Rightarrow m = \frac{l+3n}{5}$

m এর মান (ii) নং এ বসাই

$7l^2 + 5\left(\frac{l+3n}{5}\right)^2 - 3n^2 = 0$

$\Rightarrow 7l^2 + 5 \cdot \frac{(l+3n)^2}{25} - 3n^2 = 0$

$\Rightarrow \frac{35l^2 + (l+3n)^2 - 15n^2}{5} = 0$

$\Rightarrow 35l^2 + (l+3n)^2 - 15n^2 = 0$

$\Rightarrow 35l^2 + l^2 + 2l \cdot 3n + (3n)^2 - 15n^2 = 0$

$\Rightarrow 36l^2 + 6ln - 6n^2 = 0$

$\Rightarrow 6(6l^2 + ln - n^2) = 0$

$$\Rightarrow 6l^2 + ln - n^2 = 0$$

$$\Rightarrow 6l^2 + 3ln - 2ln - n^2 = 0$$

$$\Rightarrow 3l(2l+n) - n(2l+n) = 0$$

$$\Rightarrow (2l+n)(3l-n) = 0$$

হয় $2l + n = 0$ ——— (iii) অথবা $3l - n = 0$ ——— (iv)

(i) ও (iii) আড় গুনন করে পাই

$$l - 5m + 3n = 0$$

$$2l + 0 + n = 0$$

$$\frac{l}{-5-0} = \frac{m}{6-1} = \frac{n}{0+10}$$

$$\Rightarrow \frac{l}{-5} = \frac{m}{5} = \frac{n}{10} = \frac{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}{\sqrt{(-5)^2+5^2+(10)^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{l}{-5} = \frac{m}{5} = \frac{n}{10} = \frac{1}{\sqrt{25+25+100}}$$

$$\Rightarrow \frac{l}{-5} = \frac{m}{5} = \frac{n}{10} = \frac{1}{\sqrt{150}} = \frac{1}{\sqrt{25\times 6}} = \frac{1}{5\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow \frac{l}{-5} = \frac{m}{5} = \frac{n}{10} = \frac{1}{5\sqrt{6}}$$

$\Rightarrow \frac{l}{-5} = \frac{1}{5\sqrt{6}}$ অথবা $\frac{m}{5} = \frac{1}{5\sqrt{6}}$ অথবা $\frac{n}{10} = \frac{1}{5\sqrt{6}}$

$\Rightarrow \frac{l}{-1} = \frac{1}{\sqrt{6}}$ $\quad \Rightarrow \frac{m}{1} = \frac{1}{\sqrt{6}}$ $\quad \Rightarrow \frac{n}{2} = \frac{1}{\sqrt{6}}$

$\Rightarrow l = -\frac{1}{\sqrt{6}}$ $\quad \Rightarrow m = \frac{1}{\sqrt{6}}$ $\quad \Rightarrow n = \frac{2}{\sqrt{6}}$

প্রথম সরলরেখাটির দিক কোসাইন হবে $(l_1, m_1, n_1) = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$

(i) ও (iv) নং সে আড় গুনন করে পাই

$$l-5m+3n=0$$
$$3l+0-n=0$$

$$\frac{l}{5-0}=\frac{m}{9+1}=\frac{n}{0+15}$$

$$\Rightarrow \frac{l}{5}=\frac{m}{10}=\frac{n}{15}=\frac{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}{\sqrt{5^2+(10)^2+(15)^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{l}{5}=\frac{m}{10}=\frac{n}{15}=\frac{1}{\sqrt{25+100+225}}$$

$$\Rightarrow \frac{l}{5}=\frac{m}{10}=\frac{n}{15}=\frac{1}{\sqrt{350}}=\frac{1}{\sqrt{25\times 14}}$$

$$\Rightarrow \frac{l}{5}=\frac{m}{10}=\frac{n}{15}=\frac{1}{5\sqrt{14}}$$

$\Rightarrow \frac{l}{5}=\frac{1}{5\sqrt{14}}$ অথবা $\frac{m}{10}=\frac{1}{5\sqrt{14}}$ অথবা $\frac{n}{15}=\frac{1}{5\sqrt{14}}$

$\Rightarrow \frac{l}{1}=\frac{1}{\sqrt{14}}$ $\Rightarrow \frac{m}{2}=\frac{1}{\sqrt{14}}$ $\Rightarrow \frac{n}{3}=\frac{1}{\sqrt{14}}$

$\Rightarrow l=\frac{1}{\sqrt{14}}$ $\Rightarrow m=\frac{2}{\sqrt{14}}$ $\Rightarrow n=\frac{3}{\sqrt{14}}$

দ্বিতীয় সরলরেখাটির দিক কোসাইন হবে $(l_2, m_2, n_2)=\left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$

এখন, সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ θ হলে

$$\cos\theta = l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2$$

$$\Rightarrow \cos\theta=\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right)+\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\cdot\left(\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$$

$$\Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}}+\frac{2}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}}+\frac{6}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{-1+2+6}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}} = \frac{7}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{7}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}\right)$$

$$\therefore \theta = 40.20296589^{\circ}$$

A:

Ex-27

দে. আছে,
~~প্রদত্ত সমীকরণ~~

$$al + bm + cn = 0 \quad \text{——— (i)}$$
$$fmn + gnl + hlm = 0 \quad \text{——— (ii)}$$

(i) নং হতে পাই,

$$-cn = al + bm$$
$$\Rightarrow n = \frac{al+bm}{-c}$$

n এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই

$$fm\left(\frac{al+bm}{-c}\right) + gl\left(\frac{al+bm}{-c}\right) + hlm = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{-c}\left(aflm + bfm^2 + agl^2 + bglm - chlm\right) = 0$$

$$\Rightarrow aflm + bfm^2 + agl^2 + bglm - chlm = 0$$

$$\Rightarrow agl^2 + lm(af + bg - ch) + bfm^2 = 0$$

$$\Rightarrow ag\left(\frac{l}{m}\right)^2 + \frac{l}{m}(af+bg-ch) + bf = 0 \quad \text{——— (iii)}$$

ধরি,
(iii) নং এর দুটি মূল

$\frac{l_1}{m_1}$ ও $\frac{l_2}{m_2}$

সূত্র
$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$
$\alpha\beta = \frac{c}{a}$

মূল গুলোর গুনফল

$$\frac{l_1}{m_1} \times \frac{l_2}{m_2} = \frac{bf}{ag}$$

$$\Rightarrow \frac{l_1 l_2}{bf} = \frac{m_1 m_2}{ag}$$

$$\Rightarrow \frac{l_1 l_2}{\frac{bf}{ab}} = \frac{m_1 m_2}{\frac{ag}{ab}}$$

[উভয়পক্ষের নিচের অংশকে ab দ্বারা ভাগ]

$$\Rightarrow \frac{l_1 l_2}{\frac{f}{a}} = \frac{m_1 m_2}{\frac{g}{b}} \text{ ——— (iv)}$$

অনুরূপভাবে,

$$\frac{m_1 m_2}{\frac{g}{b}} = \frac{n_1 n_2}{\frac{h}{c}} \text{ ——— (v)}$$

তাহলে (iv) ও (v) নং হতে পাই,

$$\frac{l_1 l_2}{\frac{f}{a}} = \frac{m_1 m_2}{\frac{g}{b}} = \frac{n_1 n_2}{\frac{h}{c}} = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\frac{f}{a} + \frac{g}{b} + \frac{h}{c}} \text{ ——— (vi)}$$

যদি সরলরেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব হয় তাহলে $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$

এখন, $$\frac{l_1 l_2}{\frac{f}{a}} = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\frac{f}{a} + \frac{g}{b} + \frac{h}{c}}$$

$$\Rightarrow \frac{l_1 l_2}{\frac{f}{a}} = \frac{0}{\frac{f}{a} + \frac{g}{b} + \frac{h}{c}}$$

$$\Rightarrow l_1 l_2\left(\frac{f}{a}+\frac{g}{b}+\frac{h}{c}\right)=0$$

$$\therefore \frac{f}{a}+\frac{g}{b}+\frac{h}{c}=0$$

সরলরেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে যদি $\frac{f}{a}+\frac{g}{b}+\frac{h}{c}=0$ হয়

যদি সরলরেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হলে $\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$

আমরা জানি,

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}$$

$$\Rightarrow \frac{l_1}{m_1}=\frac{l_2}{m_2}$$

মূলদ্বয় সমান হলে নিশ্চায়ক 0 হয়

$$(af+bg-ch)^2-4\cdot ag\cdot bf=0$$

$$\Rightarrow (af+bg-ch)^2=4agbf$$

$$\Rightarrow af+bg-ch=\pm\sqrt{4agbf}$$

$$\Rightarrow af+bg-ch=\pm 2\sqrt{agbf}$$

$$\Rightarrow af\pm 2\sqrt{agbf}+bg=ch$$

$$\Rightarrow (\sqrt{af})^2\pm 2\sqrt{af}\cdot\sqrt{bg}+(\sqrt{bg})^2=ch$$

$$\Rightarrow (\sqrt{af}\pm\sqrt{bg})^2=ch$$

$$\Rightarrow \sqrt{af}\pm\sqrt{bg}=\pm\sqrt{ch}$$

$$\Rightarrow \sqrt{af}\pm\sqrt{bg}\pm\sqrt{ch}=0$$

$\therefore$ সরলরেখাদ্বয় সমান্তরাল হবে যদি $\sqrt{af}\pm\sqrt{bg}\pm\sqrt{ch}=0$ হয়।

(proved)

Ex-28

দে. অর্থাৎ

প্রদত্ত সমীকরণ

$$al + bm + cn = 0 \quad \text{--- (i)}$$

$$ul^2 + vm^2 + wn^2 = 0 \quad \text{--- (ii)}$$

(i) নং হতে পাই

$$-cn = al + bm$$

$$\Rightarrow n = \frac{al + bm}{-c}$$

n এর মান (ii) নং এ বসাই

$$ul^2 + vm^2 + w\left(\frac{al + bm}{-c}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow ul^2 + vm^2 + w\frac{(al + bm)^2}{c^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{c^2ul^2 + c^2vm^2 + w(al + bm)^2}{c^2} = 0$$

$$\Rightarrow ucl^2 + vc^2m^2 + w(a^2l^2 + 2ablm + b^2m^2) = 0$$

$$\Rightarrow uc^2l^2 + vc^2m^2 + wa^2l^2 + 2ablmw + wb^2m^2 = 0$$

$$\Rightarrow uc^2l^2 + wa^2l^2 + 2ablmw + vc^2m^2 + wb^2m^2 = 0$$

$$\Rightarrow (uc^2 + wa^2)l^2 + 2ablmw + (vc^2 + wb^2)m^2 = 0$$

$$\Rightarrow (uc^2 + wa^2)\left(\frac{l}{m}\right)^2 + 2abw\frac{l}{m} + (vc^2 + wb^2) = 0 \quad \text{--- (iii)}$$

ধরি, (iii) নং এর দুটি মূল $\frac{l_1}{m_1}$, $\frac{l_2}{m_2}$

মূলদ্বয়ের গুণফল

$$\frac{l_1}{m_1} \times \frac{l_2}{m_2} = \frac{vc^2 + wb^2}{uc^2 + wa^2}$$

$$\Rightarrow \frac{l_1 l_2}{vc^2 + wb^2} = \frac{m_1 m_2}{uc^2 + wa^2} \quad \text{--- (iv)}$$

অনুরূপভাবে

$$\frac{m_1m_2}{uc^2+wa^2} = \frac{n_1n_2}{va^2+ub^2} \quad \text{(v)}$$

তাহলে (iv) ও (v) নং হতে পাই

$$\frac{l_1l_2}{vc^2+wb^2} = \frac{m_1m_2}{uc^2+wa^2} = \frac{n_1n_2}{va^2+ub^2} = \frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{vc^2+wb^2+uc^2+wa^2+va^2+ub^2} \quad \text{(vi)}$$

যদি সরলরেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব হয় তাহলে $l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$

এখন

$$\frac{l_1l_2}{vc^2+wb^2} = \frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{vc^2+wb^2+uc^2+wa^2+va^2+ub^2}$$

$$\Rightarrow \frac{l_1l_2}{vc^2+wb^2} = \frac{0}{vc^2+wb^2+uc^2+wa^2+va^2+ub^2}$$

$$\Rightarrow l_1l_2(vc^2+wb^2+uc^2+wa^2+va^2+ub^2)=0$$

$$\Rightarrow va^2+wa^2+wb^2+ub^2+uc^2+vc^2=0$$

$$\Rightarrow a^2(v+w)+b^2(w+u)+c^2(u+v)=0$$

সরলরেখাদ্বয় লম্ব হবে যদি $a^2(v+w)+b^2(w+u)+c^2(u+v)=0$ হয়

যদি সরলরেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হয় তাহলে $\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$

আমরা জানি,

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}$$

$$\Rightarrow \frac{l_1}{m_1}=\frac{l_2}{m_2}$$

মূলদ্বয় সমান হলে নিশ্চায়ক শূন্য হয়।

$$(2abw)^2-4(uc^2+wa^2)(vc^2+wb^2)=0$$

$$\Rightarrow 4a^2b^2w^2-4(uvc^4+uwb^2c^2+vwa^2c^2+w^2a^2b^2)=0$$

$$\Rightarrow \cancel{4a^2b^2w^2}-4uvc^4-4uwb^2c^2-4vwa^2c^2-\cancel{4w^2a^2b^2}=0$$

$\Rightarrow -4\left(uvc^4 + uwb^2c^2 + vwa^2c^2\right) = 0$

$\Rightarrow c^2\left(uvc^2 + uwb^2 + vwa^2\right) = 0$

$\Rightarrow uvc^2 + uwb^2 + vwa^2 = 0$

$\Rightarrow \frac{uvc^2}{uvw} + \frac{uwb^2}{uvw} + \frac{vwa^2}{uvw} = 0$ [উভয়পক্ষকে uvw দ্বারা ভাগ করে]

$\Rightarrow \frac{c^2}{w} + \frac{b^2}{v} + \frac{a^2}{u} = 0$

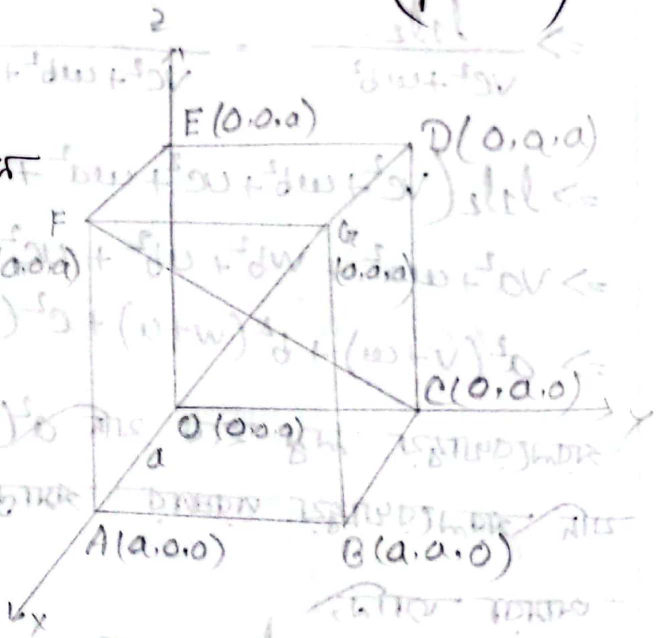
$\Rightarrow \frac{a^2}{u} + \frac{b^2}{v} + \frac{c^2}{w} = 0$

সরলরেখাদ্বয় সমান্তরাল হবে যদি $\frac{a^2}{u} + \frac{b^2}{v} + \frac{c^2}{w} = 0$ হয়।

(proved)

***

Ex—29



মনেকরি, a বাহুবিশিষ্ট একটি ঘনক যাকে OABCDEFG দ্বারা প্রকাশ করা হয়েছে। যেখানে মূলবিন্দু O এবং OA, OC, OE বাহুগুলো X, Y, Z অক্ষ প্রকাশ করে।

এখন,

O বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0,0,0)$

A " " $(a,0,0)$

B " " $(a,a,0)$

C " " $(0,a,0)$

D " " $(0,a,a)$

E বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0,0,a)$

F " " $(a,0,a)$

G " " (a,a,a)

এখানে,

ঘনকের কর্ণ দুটি হলো OG এবং CF

OG কর্ণের দিক অনুপাত $= (a-0,\ a-0,\ a-0) = (a,a,a) = \left(\frac{a}{a}, \frac{a}{a}, \frac{a}{a}\right) = (1,1,1)$

CF " " " $= (a-a,\ 0-a,\ a-0) = (a,-a,a) = \left(\frac{a}{a}, -\frac{a}{a}, \frac{a}{a}\right) = (1,-1,1)$

আমরা জানি,

$$\cos\theta = \frac{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}} = \frac{1-1+1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

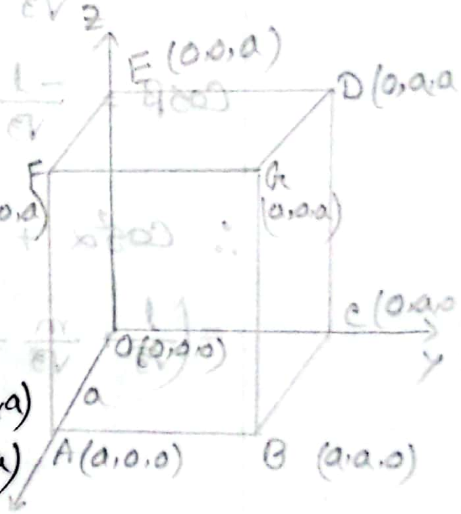
$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$$

(proved)

***

Ex-30 (1)



মনেকরি, a বাহুবিশিষ্ট একটি ঘনক যাকে OABCDEFG দ্বারা প্রকাশ করা হয়েছে। যেখানে মূলবিন্দু O এবং OA, OC এবং OE বাহুগুলো X, Y, Z-অক্ষ প্রকাশ করে।

এখন,

O বিন্দুর স্থানাংক	$(0,0,0)$	D বিন্দুর স্থানাংক	$(0,a,a)$
A " "	$(a,0,0)$	E " "	$(0,0,a)$
B " "	$(a,a,0)$	F " "	$(a,0,a)$
C " "	$(0,a,0)$	G " "	(a,a,a)

এখানে,

ঘনকের চারটি কর্ণ হলো OG, AD, CF এবং EB।

OG কর্ণের দিক অনুপাত $= (a-0,\ a-0,\ a-0) = (a,a,a) = (1,1,1)$

AD " " " $= (0-a,\ a-0,\ a-0) = (-a,a,a) = (-1,1,1)$

CF " " " $= (a-0,\ 0-a,\ a-0) = (a,-a,a) = (1,-1,1)$

EB " " " $= (a-0,\ a-0,\ 0-a) = (a,a,-a) = (1,1,-1)$

আবার,

OG কর্ণের দিক কোসাইন $= \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$

AD " " " $= -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$

CF " " " $= \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$

EB " " " $= \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}$

ধরি, l, m, n দিক কোসাইন বিশিষ্ট সরলরেখাটি OG, AD, CF ও EB চারটি কর্ণের সাথে যথাক্রমে $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ কোণ উৎপন্ন করে।

$$\cos\alpha = \frac{l}{\sqrt{3}} + \frac{m}{\sqrt{3}} + \frac{n}{\sqrt{3}} \qquad \cos\gamma = \frac{l}{\sqrt{3}} - \frac{m}{\sqrt{3}} + \frac{n}{\sqrt{3}}$$

$$\cos\beta = \frac{-l}{\sqrt{3}} + \frac{m}{\sqrt{3}} + \frac{n}{\sqrt{3}} \qquad \cos\delta = \frac{l}{\sqrt{3}} + \frac{m}{\sqrt{3}} - \frac{n}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta$$

$$= \left(\frac{l}{\sqrt{3}} + \frac{m}{\sqrt{3}} + \frac{n}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{-l}{\sqrt{3}} + \frac{m}{\sqrt{3}} + \frac{n}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{l}{\sqrt{3}} - \frac{m}{\sqrt{3}} + \frac{n}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{l}{\sqrt{3}} + \frac{m}{\sqrt{3}} - \frac{n}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{l+m+n}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{-l+m+n}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{l-m+n}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{l+m-n}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$= \frac{(l+m+n)^2}{3} + \frac{(-l+m+n)^2}{3} + \frac{(l-m+n)^2}{3} + \frac{(l+m-n)^2}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\left[(l+m+n)^2 + (-l+m+n)^2 + (l-m+n)^2 + (l+m-n)^2\right]$$

$$= \frac{1}{3}\Big[l^2+m^2+n^2+2lm+2mn+2nl+l^2+m^2+n^2-2lm+2mn-2nl$$
$$+l^2+m^2+n^2-2lm-2mn+2nl+l^2+m^2+n^2+2lm-2mn-2nl\Big]$$

$$= \frac{1}{3}(4l^2+4m^2+4n^2)$$

$$= \frac{1}{3}\{4(l^2+m^2+n^2)\}$$

$$= \frac{4}{3}(l^2+m^2+n^2)$$

$$= \frac{4}{3}\cdot 1 = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+\cos^2\delta = \frac{4}{3} \quad A.$$

Ex-30 (ii)

(i) নং হতে পাই,

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+\cos^2\delta = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow (1-\sin^2\alpha)+(1-\sin^2\beta)+(1-\sin^2\gamma)+(1-\sin^2\delta) = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow 1-\sin^2\alpha+1-\sin^2\beta+1-\sin^2\gamma+1-\sin^2\delta = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow 4-\sin^2\alpha-\sin^2\beta-\sin^2\gamma-\sin^2\delta = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow 4-\frac{4}{3} = \sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma+\sin^2\delta$$

$$\Rightarrow \sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma+\sin^2\delta = \frac{12-4}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\therefore \sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma+\sin^2\delta = \frac{8}{3} \quad A.$$

* অধ্যায় – ১১ *

* 11 Chap *

* প্রয়োজনীয় সূত্র :

① $\vec{a} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

(ii) $|a| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

(iii) $\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\theta = 0$

(iv) $\vec{a}\times\vec{b} = ab\sin\theta = 0$

* b বরাবর $\vec{a}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ $= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$

যেটা বরাবর হবে সেটা 2 বার ব্যবহার হবে। স্কেলার গুনন বোঝায়

* $\vec{b}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{a}$ ভেক্টর এর লম্ব অভিক্ষেপ

$= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\cdot\vec{b}$ ভেক্টর মান বুঝায়

* সমতলীয় ভেক্টর $[\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}] = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

* $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}$

* $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{a}\cdot\vec{d} \\ \vec{b}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{d} \end{vmatrix}$

উপপাদ্য – 6 :

ধরি, $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$

$\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$

$\vec{c} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$

এখন, $(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(b_2c_3 - b_3c_2) - \hat{j}(b_1c_3 - b_3c_1) + \hat{k}(b_1c_2 - b_2c_1)$

সুতরাং, $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_2c_3-b_3c_2 & b_1c_3-b_3c_1 & b_1c_2-b_2c_1 \end{vmatrix}$

$$= \sum(a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 + a_3b_1c_3 - a_3b_3c_1)\hat{i}$$

$$= \sum(a_1b_1c_1 + a_2b_1c_2 + a_3b_1c_3 - a_1b_1c_1 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1)\hat{i}$$

$$= \sum(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_1\hat{i} - \sum(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_1\hat{i}$$

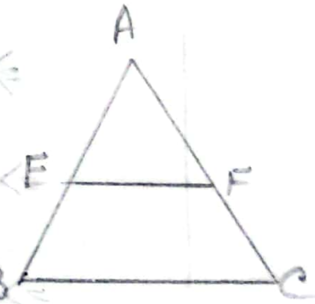
$$= \sum(\vec{a}\cdot\vec{c})b_1\hat{i} - \sum(\vec{a}\cdot\vec{b})c_1\hat{i}$$

$$= (\vec{a}\cdot\vec{c})\sum b_1\hat{i} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\sum c_1\hat{i}$$

$$= (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$$

(proved)

Ex-৪



মনেকরি, ABC একটি ত্রিভুজ। যাহার AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E ও F। প্রমাণ করতে হবে যে, $EF \parallel BC$ এবং $EF = \frac{1}{2}BC$

ধরি, $\vec{A}(\vec{a})$, $\vec{B}(\vec{b})$; $\vec{C}(\vec{c})$

E এর অবস্থান ভেক্টর হবে $= \dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

F " " " " $= \dfrac{\vec{a}+\vec{c}}{2}$

এখানে, $\overrightarrow{BC} = (\vec{c}-\vec{b})$

$$\overrightarrow{EF} = \left(\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2} - \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right) = \left(\frac{\vec{a}+\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}}{2}\right) = \left(\frac{\vec{c}-\vec{b}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{b})$$

$$\therefore \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

যেহেতু BC ও EF এর মধ্যে শুধুমাত্র ধ্রুবকের পার্থক্য বিদ্যমান এবং দিকের কোনো পার্থক্য নেই। সুতরাং BC || EF।

আবার, $|\overrightarrow{EF}| = \left|\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{b})\right|$

$$= \frac{1}{2}|\vec{c}-\vec{b}|$$

$$= \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$$

$\therefore$ EF || BC এবং $EF = \frac{1}{2}BC$ (proved)

Ex- 14

দে. আছে, $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}|$

$$\Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}-\vec{b}|^2$$

$$\Rightarrow (\vec{a}+\vec{b})^2 = (\vec{a}-\vec{b})^2$$

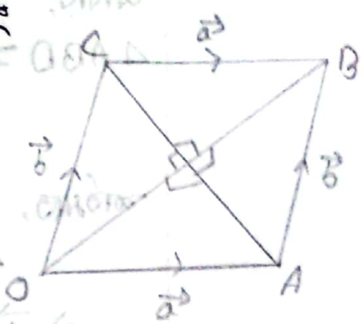
$$\Rightarrow \cancel{\vec{a}^2} + \cancel{\vec{b}^2} + 2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b} = \cancel{\vec{a}^2} + \cancel{\vec{b}^2} - 2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$\Rightarrow 4\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

যেহেতু $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ এর ডট গুনন 0। তাই $\vec{a}$ ভেক্টর $\vec{b}$ ভেক্টরের এর উপর লম্ব।

Ex-26: মনেকরি, OABC রম্বসের $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = \overrightarrow{CB}$ এবং $\overrightarrow{AB} = \vec{b} = \overrightarrow{OC}$ ।



এখন, $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OC}|$

$\Rightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}|$

$\Rightarrow a = b$

ΔOAB হতে পাই,

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{b}$

আবার,

ΔOAC হতে পাই,

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}$

এখন, $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{b} - \vec{a})$

$= b^2 - a^2$

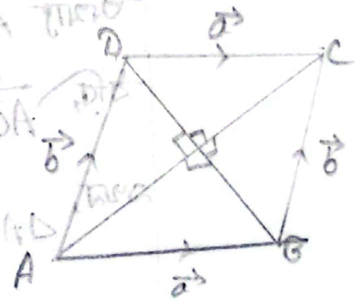
$= a^2 - b^2$ | $a = b$

$\therefore \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

যেহেতু $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{AC}$ ।

সুতরাং কর্ণদ্বয় পরস্পর লম্ব।

Ex-27: মনেকরি, ABCD রম্বসের $\overrightarrow{AB} = \vec{a} = \overrightarrow{CD}$ এবং $\overrightarrow{BC} = \vec{b} = \overrightarrow{AD}$ ।



এখন, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}|$

$\Rightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}|$

$\Rightarrow a = b$

ΔABC হতে পাই, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ ——— (i)

$\therefore \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$

আবার,

$\triangle ABD$ হতে পাই, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \vec{b} - \vec{a} \quad \text{——— (ii)}$$

শর্তমতে,

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$$

$$\Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} - \vec{a}$$

$$\Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2$$

$$\Rightarrow \vec{a}^2 + 2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^2 = \vec{b}^2 - 2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}^2$$

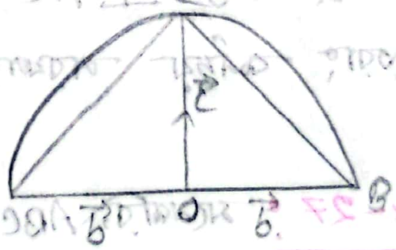
$$\Rightarrow 2\vec{a}\cdot\vec{b} = -2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$\Rightarrow 4\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

সুতরাং, $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব। অর্থাৎ কর্ণদ্বয় সমান হইলে কোণগুলো সমান হয়। সুতরাং রম্বসটি একটি বর্গক্ষেত্র।

Ex-28: মনেকরি, ABC একটি অর্ধবৃত্তস্থ ত্রিভুজ। যাহার কেন্দ্র O এবং ব্যাস AB। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ACB = 90^\circ$। অর্থাৎ $AC \perp BC$।



ধরি, $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ এবং $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$

এখন, $\triangle AOC$ হতে পাই,

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}$$
$$= \vec{b} + \vec{c} \quad \text{——— (i)}$$

আবার,

$\triangle OBC$ হতে পাই, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$

$$= \vec{c} - \vec{b} \quad \text{——— (ii)}$$

(i) ও (ii) নং কে গুণ করে পাই

$$\vec{AC}\cdot\vec{BC} = (\vec{b}+\vec{c})(\vec{c}-\vec{b})$$
$$= c^2 - b^2$$
$$= b^2 - b^2 \qquad | \; c = b$$
$$= 0$$

সুতরাং $\vec{AC} \perp \vec{BC}$ । অর্থাৎ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ সমকোণ ।

Ex – 31

যদি, $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ দুটি ভেক্টর । যাদের মধ্যবর্তী কোণ θ । তাহলে $\vec{a}\times\vec{b}$ =

$|a||b|\sin\theta = ab\sin\theta$ ——— (i)

(i) নং কে বর্গ করি,

$$|\vec{a}\times\vec{b}|^2 = (ab\sin\theta)^2$$
$$= a^2b^2\sin^2\theta$$
$$= a^2b^2(1-\cos^2\theta)$$
$$= a^2b^2 - a^2b^2\cos^2\theta$$
$$\therefore (\vec{a}\times\vec{b})^2 = a^2b^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 \qquad | \; \vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\theta \, |$$

২য় অংশ :

$$n\vec{a} = \vec{b}$$
$$\Rightarrow |n\vec{a}| = |\vec{b}|$$
$$\Rightarrow n|\vec{a}| = |\vec{b}|$$
$$\Rightarrow n = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$$

* $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ এর লম্ব একক ভেক্টর $= \pm\dfrac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}$

* $\vec{a}$ এর লম্ব একক ভেক্টর $\hat{A} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

Ex-36

দে. আছে, $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ $\quad \vec{b} = -4\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

মনেকরি,
$\vec{a}$ ও $\vec{b}$ এর লব্ধি ভেক্টর $\vec{r}$

$$\therefore \vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$$
$$= (2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) + (-4\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$$
$$= 2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k} - 4\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$$
$$= -2\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\therefore |\vec{r}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+9+4} = \sqrt{17}$$

লব্ধি ভেক্টরের সমান্তরাল একক ভেক্টর $\hat{a} = \pm \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

$$= \pm \frac{-2\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}}{\sqrt{17}}$$

$$= \pm \left(-\frac{2}{\sqrt{17}}\hat{i} + \frac{3}{\sqrt{17}}\hat{j} - \frac{2}{\sqrt{17}}\hat{k}\right)$$

A.

* $[\vec{a}.\vec{b}.\vec{c}] = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c}(\vec{a} \times \vec{b})$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

* একটা ভেক্টরের মানের ভেতর একটা মান যখন দুইবার থাকে তখনের মান হবে 0।

Ex – 44

$L.H.S = [\vec{a}+\vec{b} \quad \vec{b}+\vec{c} \quad \vec{c}+\vec{a}]$

$= (\vec{a}+\vec{b}) \cdot \{(\vec{b}+\vec{c}) \times (\vec{c}+\vec{a})\}$

$= (\vec{a}+\vec{b})(\vec{b}\times\vec{c} + \vec{b}\times\vec{a} + \vec{c}\times\vec{c} + \vec{c}\times\vec{a})$

$= (\vec{a}+\vec{b})(\vec{b}\times\vec{c} + \vec{b}\times\vec{a} + \vec{c}\times\vec{a})$

$= \vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}) + \vec{a}(\vec{b}\times\vec{a}) + \vec{a}(\vec{c}\times\vec{a}) + \vec{b}(\vec{b}\times\vec{c}) + \vec{b}(\vec{b}\times\vec{a}) + \vec{b}(\vec{c}\times\vec{a})$

$= \vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}) + 0 + 0 + 0 + 0 + \vec{b}(\vec{c}\times\vec{a})$

$= [\vec{a} \; \vec{b} \; \vec{c}] + [\vec{a} \; \vec{b} \; \vec{c}]$

$= 2[\vec{a} \; \vec{b} \; \vec{c}]$

$= R.H.S$ (proved)

Ex – 45

আমরা জানি,

$[\vec{a}\times\vec{b} \quad \vec{b}\times\vec{c} \quad \vec{c}\times\vec{a}] = (\vec{a}\times\vec{b}) \cdot \{(\vec{b}\times\vec{c}) \times (\vec{c}\times\vec{a})\}$

$= (\vec{a}\times\vec{b}) \cdot \{(\vec{b}\times\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{c} - (\vec{b}\times\vec{c}\cdot\vec{c})\vec{a}\}$

$= (\vec{a}\times\vec{b}) \cdot \{[\vec{a} \; \vec{b} \; \vec{c}]\vec{c} - 0\}$

$= (\vec{a}\times\vec{b}) \cdot [\vec{a} \; \vec{b} \; \vec{c}]\vec{c}$

$= (\vec{a} \; \vec{b} \; \vec{c}) \cdot \{\vec{c}(\vec{a}\times\vec{b})\}$

$= [\vec{a} \; \vec{b} \; \vec{c}][\vec{a} \; \vec{b} \; \vec{c}]$

$= [\vec{a} \; \vec{b} \; \vec{c}]^2$ ——— (1)

ধরি,

$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$

$\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$

$\vec{c} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$

① নং হতে,

$$[\vec{a}\times\vec{b} \quad \vec{b}\times\vec{c} \quad \vec{c}\times\vec{a}]$$

$$= [\vec{a} \; \vec{b} \; \vec{c}][\vec{a} \; \vec{b} \; \vec{c}]$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1a_1 + a_2a_2 + a_3a_3 & a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 & a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 \\ b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3 & b_1b_1 + b_2b_2 + b_3b_3 & b_1c_1 + b_2c_2 + b_1c_3 \\ c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 & c_1b_1 + c_2b_2 + c_3b_3 & c_1c_1 + c_2c_2 + c_3c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{c} \\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{c} \\ \vec{c}\cdot\vec{a} & \vec{c}\cdot\vec{b} & \vec{c}\cdot\vec{c} \end{vmatrix}$$

$$\therefore [\vec{a}\times\vec{b} \quad \vec{b}\times\vec{c} \quad \vec{c}\times\vec{a}] = [\vec{a} \; \vec{b} \; \vec{c}]^2 = \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{c} \\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{c} \\ \vec{c}\cdot\vec{a} & \vec{c}\cdot\vec{b} & \vec{c}\cdot\vec{c} \end{vmatrix}$$

(proved)

Ex-48:

ধরি, $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

$\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$

$\vec{c} = 4\hat{i} - \hat{j} + \lambda\hat{k}$

শর্তমতে,

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 2(2\lambda-3)-(-1)(\lambda+13)+1(-1-8) = 0$$

$$\Rightarrow 4\lambda - 6 + \lambda + 13 - 9 = 0$$

$$\Rightarrow 5\lambda - 3 = 0$$

$$\Rightarrow 5\lambda = 3$$

$$\therefore \lambda = \frac{3}{5} \quad A.$$

Ex-49

ক. আছে,

$\vec{A} = 5\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ $\quad \vec{B} = \hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ $\quad \vec{C} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}$

এখানে, $[\vec{A}\ \vec{B}\ \vec{C}] = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 4 & -2 & -6 \end{vmatrix}$

$$= 5(-18+8) - 1(-6-16) + (-2)(-2-12)$$

$$= -50 + 22 + 28$$

$$= -50 + 50$$

$= 0$ । সমতলীয় হবে ।

Ex-52

$$L.H.S = \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) + \vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a}) + \vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})$$

$$=(\vec{a}\cdot\vec{c})\cdot\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c} + (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{c} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a} + (\vec{c}\cdot\vec{b})\vec{a} - (\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}$$

$$= 0$$

R.H.S (proved)

$* \ \vec{a}\hat{i} = a_1$

$\Rightarrow (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k})\cdot 1\hat{i}$

$= a_1$

Ex-53

(i) ধরি, $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$

এখন, $\vec{a}\cdot\hat{i} = a_1$ $\quad \vec{a}\cdot\hat{k} = a_3$

$\vec{a}\cdot\hat{j} = a_2$

$$L.H.S = (\vec{a}\cdot\hat{i})\hat{i} + (\vec{a}\cdot\hat{j})\hat{j} + (\vec{a}\cdot\hat{k})\hat{k}$$

$$= a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$$

$$= \vec{a}$$

R.H.S (proved)

(ii) দে. আছে,

$\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ $\quad \vec{B} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$

$\vec{C} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$

এখানে, $[\vec{A}\vec{B}\vec{C}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

$= 1(15-16) - 2(10-12) + 3(8-9)$

$= -1 + 4 - 3$

$= 0$ সমতলীয় হবে।

Ex – 57

ধরি, $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ $\quad$ $\vec{l} = l_1\hat{i} + l_2\hat{j} + l_3\hat{k}$

$\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ $\quad$ $\vec{m} = m_1\hat{i} + m_2\hat{j} + m_3\hat{k}$

$\vec{c} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$ $\quad$ $\vec{n} = n_1\hat{i} + n_2\hat{j} + n_3\hat{k}$

$$\therefore [\vec{l}\ \vec{m}\ \vec{n}][\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} l_1a_1 + l_2a_2 + l_3a_3 & l_1b_1 + l_2b_2 + l_3b_3 & l_1c_1 + l_2c_2 + l_3c_3 \\ m_1a_1 + m_2a_2 + m_3a_3 & m_1b_1 + m_2b_2 + m_3b_3 & m_1c_1 + m_2c_2 + m_3c_3 \\ n_1a_1 + n_2a_2 + n_3a_3 & n_1b_1 + n_2b_2 + n_3b_3 & n_1c_1 + n_2c_2 + n_3c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{l}\cdot\vec{a} & \vec{l}\cdot\vec{b} & \vec{l}\cdot\vec{c} \\ \vec{m}\cdot\vec{a} & \vec{m}\cdot\vec{b} & \vec{m}\cdot\vec{c} \\ \vec{n}\cdot\vec{a} & \vec{n}\cdot\vec{b} & \vec{n}\cdot\vec{c} \end{vmatrix}$$

(proved)

Ex – 35

① ধরি, $\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ $\quad$ $\vec{B} = 5\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

এখন, $(\vec{A} \times \vec{B}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

$$= \hat{i}(4+3) - \hat{j}(2-15) + \hat{k}(-1-10)$$
$$= 7\hat{i} + 13\hat{j} - 11\hat{k}$$

আবার, $|\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{7^2 + (13)^2 + (-11)^2}$
$$= \sqrt{49 + 169 + 121}$$
$$= \sqrt{339}$$

$\therefore$ $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর লম্ব একক ভেক্টর $= \pm \dfrac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|}$

$$= \pm \frac{7\hat{i} + 13\hat{j} - 11\hat{k}}{\sqrt{339}}$$

২য় অংশ :

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর অন্তর্ভুক্ত কোণ θ

$$|\vec{A}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$
$$|\vec{B}| = \sqrt{5^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{30}$$

$$\therefore |\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}| \sin\theta$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{|\vec{A} \times \vec{B}|}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{\sqrt{339}}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{30}} = \frac{\sqrt{339}}{\sqrt{420}}$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \sqrt{\frac{339}{420}}$$

$$\Rightarrow \theta = \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{339}{420}}\right)$$

$$\therefore \theta = \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{113}{140}}\right)$$

Ans.

Ex-35

(11) দে. আছে,

$\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ $\qquad$ $\vec{B} = -6\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$

এখন, $(\vec{A} \times \vec{B}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ -6 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(5+3) - \hat{j}(10-6) + \hat{k}(6+6)$

$= 8\hat{i} - 4\hat{j} + 12\hat{k}$

আবার,

$|\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{8^2 + (-4)^2 + (12)^2} = \sqrt{64+16+144} = \sqrt{224}$

$\therefore$ $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর লম্ব একক ভেক্টর $= \pm \dfrac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|}$

$= \pm \dfrac{8\hat{i} - 4\hat{j} + 12\hat{k}}{\sqrt{224}}$

২য় অধ্যায় :

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর অন্তর্ভুক্ত কোণ θ

$|\vec{A}| = \sqrt{2^2+1^2+(-1)^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

$|\vec{B}| = \sqrt{(-6)^2+3^2+5^2} = \sqrt{36+9+25} = \sqrt{70}$

$\therefore |\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}| \sin\theta$

$\Rightarrow \sin\theta = \dfrac{|\vec{A} \times \vec{B}|}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \dfrac{\sqrt{224}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{70}} = \dfrac{\sqrt{224}}{\sqrt{420}}$

$\Rightarrow \sin\theta = \sqrt{\dfrac{224}{420}}$

$\therefore \theta = \sin^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{224}{420}}\right)$ Ans.

Ex-35

(iii) ক. আছে,

$$\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k} \qquad \vec{B} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - 4\hat{k}$$

এখন, $$(\vec{A} \times \vec{B}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(-8+4) - \hat{j}(-4-6) + \hat{k}(-2-6)$$

$$= -4\hat{i} + 10\hat{j} - 8\hat{k}$$

$$\therefore |\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{(-4)^2 + (10)^2 + (-8)^2} = \sqrt{16+100+64} = \sqrt{180}$$

$\therefore$ $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর লম্ব একক ভেক্টর $= \pm \dfrac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|}$

$$= \pm \frac{-4\hat{i} + 10\hat{j} - 8\hat{k}}{\sqrt{180}}$$

২য় অংশ:

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ

$$|\vec{A}| = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{3^2+(-2)^2+(-4)^2} = \sqrt{9+4+16} = \sqrt{29}$$

$$\therefore |\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}| \sin\theta$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{|\vec{A} \times \vec{B}|}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{\sqrt{180}}{3 \cdot \sqrt{29}} = \frac{\sqrt{180}}{3\sqrt{29}}$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{180}}{3\sqrt{29}}$$

$$\therefore \theta = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{180}}{3\sqrt{29}}\right)$$ A.

Ex-18

(i) দে. আছে, $\vec{a} = 2\hat{i} + 6\hat{j} - 3\hat{k}$

$\vec{b} = \hat{i} + 4\hat{j} + 8\hat{k}$

এখন, $\vec{a}.\vec{b} = (2\times1) + (6\times4) + (-3\times8)$

$= 2 + 24 - 24 = 2$

$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 6^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+36+9} = \sqrt{49} = 7$

$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 8^2} = \sqrt{1+16+64} = \sqrt{81} = 9$

$\vec{b}$ বরাবর $\vec{a}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ $= \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{2}{9}$ A.

$\vec{a}$ বরাবর $\vec{b}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ $= \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|} = \frac{2}{7}$ A.

Ex-18

(ii) দে. আছে,

$\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$

$\vec{b} = \hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k}$

এখন, $\vec{a}.\vec{b} = (2\times1) + (-3\times4) + (-1\times-3)$

$= 2 - 12 + 3 = 7$

$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$

$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+16+9} = \sqrt{26}$

$\vec{b}$ বরাবর $\vec{a}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ $= \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{7}{\sqrt{26}}$ A.

$\vec{a}$ বরাবর $\vec{b}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ $= \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|} = \frac{7}{\sqrt{14}}$ A.

Ex-15

(i) দে. আছে,

$\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$; $\vec{b} = 6\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

ধরি, $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ এর মধ্যবর্তী কোণ α

$\therefore \vec{a}.\vec{b} = (2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}).(6\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$

$= 12 + 2 - 6$

$|\vec{a}| = \sqrt{2^2+1^2+(-2)^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$

$|\vec{b}| = \sqrt{6^2+2^2+3^2} = \sqrt{36+4+9} = \sqrt{49} = 7$

আমরা জানি,

$\vec{a}.\vec{b} = ab\cos\alpha$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{ab} = \frac{8}{3.7} = \frac{8}{21}$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{8}{21}$

$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{8}{21}\right)$ A.

Ex-15

(ii) দে. আছে,

$\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ $\quad \vec{b} = 4\hat{i} - 3\hat{k}$

ধরি, $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ এর মধ্যবর্তী কোণ α

$\therefore \vec{a}.\vec{b} = (\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}).(4\hat{i} - 3\hat{k})$

$= 4 + 9 = 13$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2+2^2+(-3)^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{4^2+0^2+(-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

আমরা জানি,

$$\vec{a}.\vec{b} = ab\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{ab} = \frac{13}{5\sqrt{14}}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{13}{5\sqrt{14}}$$

$$\therefore \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{13}{5\sqrt{14}}\right)$$ Ans:

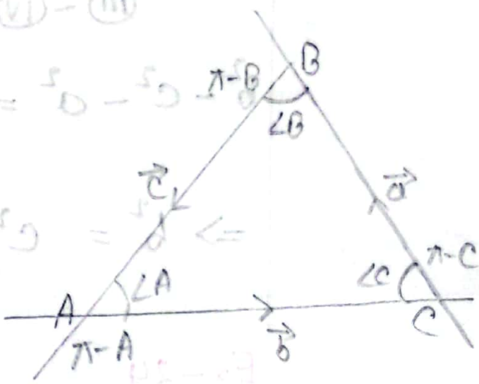
Ex-24

(i) মনেকরি,

$\triangle ABC$ এর $\overrightarrow{CB} = \vec{a}$

$\overrightarrow{AC} = \vec{b}$

$\overrightarrow{BA} = \vec{c}$



$$\therefore \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0 \quad \text{——— (1)}$$

(1) নং হতে পাই,

$$\Rightarrow \vec{a} = -\vec{b} - \vec{c}$$

$$\Rightarrow \vec{a}.\vec{a} = -\vec{b}.\vec{a} - \vec{c}.\vec{a}$$

$$\Rightarrow a^2 = -ab\cos(\pi - C) - ac\cos(\pi - B)$$

$\therefore a^2 = ab\cos C + ac\cos B$ ——— (ii)

অনুরূপভাবে,

$b^2 = bc\cos A + ab\cos C$ ——— (iii)

$c^2 = ca\cos B + bc\cos A$ ——— (iv)

এখন,

(iv) − (ii) − (iii) $\Rightarrow$

$$c^2 - a^2 - b^2 = \cancel{ca\cos B} + \cancel{bc\cos A} - ab\cos C - \cancel{ac\cos B} - \cancel{bc\cos A} - ab\cos C$$

$$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

A:

Ex-24

(ii)

এখন,

(iii) − (iv) − (ii) $\Rightarrow$

$$b^2 - c^2 - a^2 = \cancel{bc\cos A} + \cancel{ab\cos C} - ca\cos B - \cancel{bc\cos A} - \cancel{ab\cos C} - ac\cos B$$

$$\Rightarrow b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos B$$

A:

Ex-24

(iii) এখন,

(ii) − (iii) − (iv) $\Rightarrow$

$$a^2 - b^2 - c^2 = \cancel{ab\cos C} + \cancel{ac\cos B} - bc\cos A - \cancel{ab\cos C} - \cancel{ca\cos B} - bc\cos A$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

A:

Ex – 24

(i) প্রমাণ,

(ii) + (iii) + (iv) $\Rightarrow$

$a^2+b^2+c^2 = ab\cos C + ac\cos B + bc\cos A + ab\cos C + ac\cos B + bc\cos A$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2 = 2ab\cos C + 2ac\cos B + 2bc\cos A$

$\therefore a^2+b^2+c^2 = 2(bc\cos A + ac\cos B + ab\cos C)$ A: