chapter-1 = তরঙ্গ সমীকরণের ধারনা

Qn-1: তরঙ্গ অপেক্ষক কী? এর ভৌত তাৎপর্য উল্লেখ কর?

Qn-2: নর্মায়ন, অভিলম্বিকতা ও নর্মায়িত বলতে কী বুঝ?

Qn-3: পরীক্ষা দ্বারা অনিশ্চয়তা নীতি প্রমান কর?

Qn-4: অনিশ্চয়তা নীতি বর্ননা কর এবং প্রতিপাদন কর?

Qn-5: অনিশ্চয়তা নীতি থেকে দেখাও যে, নিউক্লিয়াসের মধ্যে ইলেকট্রন থাকতে পারে না?

প্রশ্ন-১: তরঙ্গ অপেক্ষক কি ও এর ভৌত তাৎপর্য উল্লেখ কর?

সমাধান

তরঙ্গ ফাংশন বা অপেক্ষক হলো এমন একটি ফাংশন যারা একটি কোয়ান্টাম কণার কণা ধর্ম ও তরঙ্গ ধর্ম বহন করে। তরঙ্গ ফাংশনকে $\psi(\vec{r},t)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। ম্যাক্স প্লাঙ্কের সংজ্ঞানুসারে $\psi(\vec{r},t)$ বলতে আমরা বুঝি $\vec{r}$ অবস্থানে t সময়ে একটি কণাকে পাওয়ার সম্ভাবনার বিস্তার। তরঙ্গ ফাংশন $\psi(\vec{r},t)$ হলো সাধারণত জটিল রাশি এবং Single valued ($-\infty$ তে এবং $+\infty$ তে এর মান শূন্য) ও well behaved function (Continious function) এই $\psi(\vec{r},t)$ কোন পরিমাপযোগ্য রাশি নয়। এই $\psi(\vec{r},t)$ এর ভৌত তাৎপর্য বুঝার জন্য আমরা সম্ভাবনা ঘনত্বের অবতারণা করব। $\psi^*(\vec{r},t)\,\psi(\vec{r},t) = |\psi(\vec{r},t)| = \psi^*\psi$ হলো সম্ভাবনার ঘনত্ব এবং ইহা দ্বারা একক আয়তনে একটি কণাকে পাওয়া যাওয়ার সম্ভাবনা বুঝায়। যে কণাটির জন্য এই তরঙ্গ ফাংশন $\psi(\vec{r},t)$ সংজ্ঞায়িত করা হয়েছে। অতএব আয়তনীয় উপাদান $d\tau$ এ কণাটি পাওয়ার সম্ভাব্যতা হলো $\psi^*\psi\, d\tau$। অতএব সমগ্র বিশ্ব ব্রহ্মাণ্ডে কণাটি পাওয়ার সম্ভাব্যতা হবে 1। অর্থাৎ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*\psi\, d\tau = 1$$

$$\boxed{\begin{aligned}\psi &= a+ib\\ \psi^* &= a-ib\end{aligned}}$$

ইহাকে নর্মায়ন সম্পর্ক বা নর্মায়ন শর্ত বলা হয়।

প্রশ্ন-২: অভিলম্বিক, নর্মায়িত অপেক্ষক, এবং অভিনর্মি অপেক্ষক বলতে কি বুঝ?

সমাধান

অভিলম্বিক:- যদি কোন অপেক্ষক $\psi_1(\vec{r},t)$ এবং অপর একটি অপেক্ষক $\psi_2(\vec{r},t)$ এর অনুবন্ধি জটিল $\psi_2^*(\vec{r},t)$ এর গুনফলকে $a \le x \le b$ ব্যবধিতে সমাকলন করলে শূন্য পাওয়া যায়, তবে $\psi_1(\vec{r},t)$ এবং $\psi_2(\vec{r},t)$ অপেক্ষকদ্বয়কে (a,b) ব্যবধিতে পরস্পরের অভিলম্বিক বলা হয়। গানিতিকভাবে,

$$\int_a^b \psi_2^*(\vec{r},t)\,\psi_1(\vec{r},t)\,d\tau = 0$$

উদাহরন:- 1.

$$\left.\begin{matrix} \cos x, & \cos 2x, & \cos 3x \\ \sin x, & \sin 2x, & \sin 3x \end{matrix}\right\} \text{ --- (i)}$$

সেটটি x এর $(-\pi, \pi)$ ব্যবধিতে অভিলম্বিক।

কারন সেটটির যে কোন সদস্য এবং অপর একটি সদস্যের অনুবন্ধি জটিলের গুনফলকে $-\pi$, হতে π সীমার মধ্যে সমাকলন করলে শূন্য পাওয়া যায়।

নর্মায়িত অপেক্ষক:- $d\tau$ আয়তন উপাদানের মধ্যে একটি কনা প্রাপ্তির সম্ভাবনা হলো $\psi^*\psi\, d\tau$ বা $|\psi|^2 d\tau$।

বিশ্বের কনাটি অবশ্যই পাওয়া যায় বিধায়, মোট সম্ভাব্যতা '1' হবে।

অর্থাৎ,

$$\int \psi^*(\vec{r},t)\,\psi(\vec{r},t)\,d\tau = 1$$

উপরের সমীকরনকে নিম্নরূপেও প্রকাশ করা যায়।

$$\int |\psi(\vec{r},t)|^2 d\tau = 1$$

একটি তরঙ্গ অপেক্ষক যা উপরের সমীকরণ সিদ্ধ করে তাকে একটি নর্মায়িত অথবা সাধারণভাবে নর্মায়িত অপেক্ষক বলে।

অভিনর্মি অপেক্ষক:- যেসব অপেক্ষক একই সাথে অভিলম্বিক ও নর্মায়িত হয় তাদেরকে অভিনর্মি অপেক্ষক এবং অপেক্ষকের এরূপ-ধর্মকে অভিনর্মিতা বলে।

তরঙ্গ অপেক্ষক ψ প্রায়শই নর্মায়িত হয় না। তবে একটি ধ্রুবক A দ্বারা গুণ করলে $A\psi$ তরঙ্গ সমীকরণের সমাধান হবে। ধ্রুবকটি এমনভাবে নির্বাচন করা হলো যেন $A\psi$ নর্মায়িত হয়।

$A\psi$ নর্মায়িত হলে নিম্নের শর্ত সিদ্ধ হবে,

$$\int (A\psi)^* A\psi \, d\tau = 1$$

$$\Rightarrow \int A\psi^* A\psi \, d\tau = 1$$

$$\Rightarrow \int |A|^2 \psi^* \psi \, d\tau = 1$$

$$\Rightarrow |A|^2 \int \psi^* \psi \, d\tau = 1$$

$$\Rightarrow |A|^2 = \frac{1}{\int \psi^* \psi \, d\tau}$$

এখানে, $|A|$ কে নর্মায়ন ধ্রুবক বা স্বাভাবিকরণ ধ্রুবক বলে।

অভিনর্মি অপেক্ষকের ক্ষেত্রে সাধারণভাবে লিখা যায়, $\int \psi_m^*(\vec{r},t)\psi_n(\vec{r},t) d\tau = \delta_{mn}$

যখন, $m=n$ তখন $\delta_{mn}=1$ এবং ψ_m বা ψ_n নর্মায়িত।

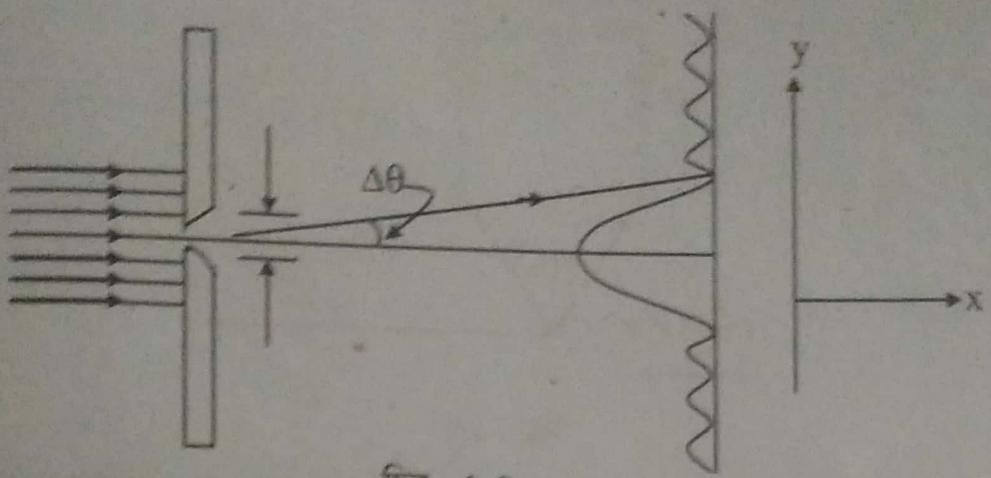
যখন $m \neq n$ তখন $\delta_{mn}=0$ এবং ψ_m ও ψ_n পরস্পর অভিলম্বিক।

১.১০.১ অনিশ্চয়তা নীতির প্রমাণ (Prove of uncertainty principle) [জা.বি. (স)-২০১২, ২০১৫]

এ অনুচ্ছেদে অনিশ্চয়তা প্রমাণের জন্য দুটি পরীক্ষণের বিবরণ দেয়া হলো :

১. রেখাছিদ্র (slit) দ্বারা ইলেকট্রনের অপবর্তন পরীক্ষা থেকে অনিশ্চয়তা নীতির প্রমাণ : ধরা যাক, একটি সূক্ষ্ম রেখাছিদ্র বা চিরের উপর অতি দূরবর্তী উৎস থেকে ইলেকট্রন রশ্মি আপতিত হচ্ছে। চিরের মধ্য দিয়ে গমনের দরুন অপবর্তনের কারণে ইলেকট্রন রশ্মি চতুর্দিকে ছড়িয়ে পড়বে। এ ছড়িয়ে পড়াকে মূল তরঙ্গের একই কম্পাঙ্কে বিভিন্ন দিকে পরিভ্রমণরত সমতলীয় রশ্মির উপরিপাতন নীতির সাহায্যে ব্যাখ্যা করা যায়। অপবর্তনের দরুন পর্দায় অপবর্তন ঝালরের সৃষ্টি হয়। অপবর্তন কোণ $\Delta\theta$ হলে সর্বনিম্ন অপবর্তন প্যাটার্নের জন্য, আমরা পাই

$$d \sin \Delta\theta = \lambda$$



চিত্র : ১.৪

ছিদ্রের প্রস্থ $d = \Delta y$ এবং $\Delta\theta$ খুবই ক্ষুদ্র হলে,

$$\Delta y \Delta\theta = \lambda$$

বা,
$$\Delta y = \frac{\lambda}{\Delta\theta} \quad \text{.........} \quad (১.৪৯)$$

আদি অবস্থায় ইলেকট্রন রশ্মি x-অক্ষ বরাবর ভ্রমণরত থাকে, তাই y-অক্ষ বরাবর এদের ভরবেগের কোন উপাংশ থাকে না। ছিদ্রে বিচ্যুতির ফলে y-অক্ষ বরাবর ভরবেগের সংযোজন ঘটে। ইলেকট্রনের আদি ভরবেগ p হলে, y-অক্ষ বরাবর p-এর উপাংশ

$$\Delta p_y = p \sin\Delta\theta \cong p\Delta\theta \quad \text{.........} \quad (১.৫০)$$

সমীকরণ (১.৪৯) এবং (১.৫০) গুণন করে পাই,

$$\Delta y \Delta p_y = \lambda p = h \quad \text{.........} \quad (১.৫১)$$

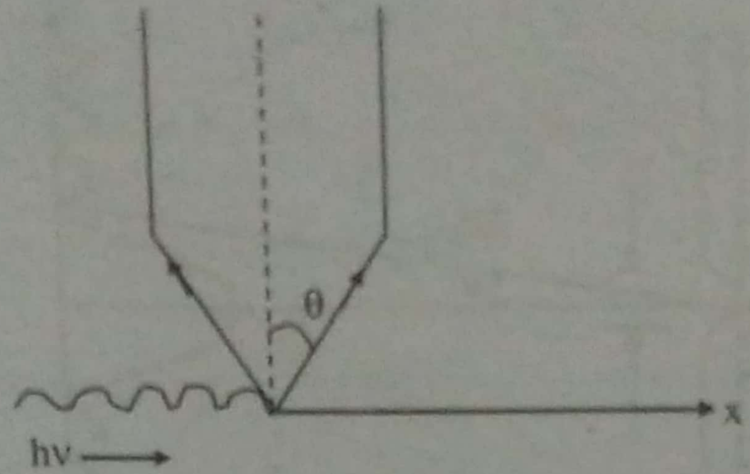
এটিই হাইজেনবার্গের অনিশ্চয়তা নীতি।

২. হাইজেনবার্গের গামা রশ্মি অণুবীক্ষণ পরীক্ষা : উচ্চ বিশ্লেষণী ক্ষমতাসম্পন্ন অণুবীক্ষণ যন্ত্রের সাহায্যে ইলেকট্রনের অবস্থান নিরীক্ষণ করা যাক।

আলোকতত্ত্বানুসারে দেখা যায় যে, $(\lambda/2\sin\theta)$-এর সমান অথবা এটি অপেক্ষা কম দূরত্বে অবস্থিত দুটি বিন্দুকে অণুবীক্ষণ যন্ত্র বিশ্লেষণ করতে পারে না। এখানে λ হলো ইলেকট্রনকে উদ্ভাসিত করা আলোকের তরঙ্গদৈর্ঘ্য এবং θ হলো অণুবীক্ষণ যন্ত্রের কৌণিক উন্মেষ। অন্যকথায় ইলেকট্রনের অবস্থান নির্ণয় করার অনিশ্চয়তা,

$$\Delta x \geq (\lambda/2\sin\theta) \quad \text{.........} \quad (১.৫২)$$

এ সম্পর্ক থেকে স্পষ্টভাবে বলা যায় যে, তরঙ্গদৈর্ঘ্য λ যতই ক্ষুদ্রতর হবে অবস্থানের অনিশ্চয়তাও ততই কম হবে। তাই এক্ষেত্রে ক্ষুদ্র তরঙ্গদৈর্ঘ্যের গামা রশ্মি অধিক ফলপ্রসূ হয়।



চিত্র : ১.৫

কম্পটন প্রভাব থেকে আমরা জানি, ক্ষুদ্র তরঙ্গদৈর্ঘ্যের ফোটন $h\nu/c$ ভরবেগে প্রতিক্ষিপ্ত (recoil) হয়। এ ছাড়া ইলেকট্রন দেখার জন্য ইলেকট্রনকে 2θ কোণে অণুবীক্ষণে প্রবেশ করতে হয়। তাই x-অক্ষ অর্থাৎ অণুবীক্ষণের অক্ষের অভিলম্ব বরাবর ইলেকট্রন তথা ফোটনের ভরবেগের উপাংশের অনিশ্চয়তা হবে,

$$\Delta p_x = (2h\nu/c)\sin\theta$$

$$= \frac{2h}{\lambda}\sin\theta \quad \text{.......} \quad (১.৫৩)$$

(১.৫২) ও (১.৫৩) নং সমীকরণদ্বয় গুণন করে পাই,

$$\Delta x \Delta p_x = h$$

অতএব অনিশ্চয়তা নীতি প্রমাণিত হলো।

প্রঃ-৭ অনিশ্চয়তা নীতি কি? হাইজেনবার্গের অনিশ্চয়তা নীতিটি প্রমাণ কর?

সমাধান:

অনিশ্চয়তা নীতি :- হাইজেনবার্গের অনিশ্চয়তা নীতিটি হলো একটি গতিশীল ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র কণার অবস্থান ও আইনানুগ ভরবেগ একই সাথে সঠিকভাবে নিরূপণ করা যায় না। গাণিতিকভাবে এই নীতিটিকে লিখা যায়

$$\Delta x \Delta P_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

এর অর্থ হলো যদি একটি কণার অবস্থান x ও আইনানুগ ভরবেগ P_x একই সময়ে নিরূপণ করা যায় তবে অবস্থানের অনিশ্চয়তা Δx ও ভরবেগের অনিশ্চয়তার (ত্রুটি) ΔP_x এর গুণফল হবে $\frac{\hbar}{2}$ এর সমান বা তার চেয়ে বেশি।

শক্তি E ও সময় t এর জন্য এই হাইজেনবার্গের অনিশ্চয়তা নীতিটি হলো

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2$$

প্রমাণ: অপারেটর x এবং P_x ব্যবহার করে আমরা অবস্থানের প্রত্যাশিত মান বা গড়মান $\langle x \rangle$ এবং ভরবেগের প্রত্যাশিত মান বা গড়মান $\langle P_x \rangle$ গণনা করতে পারি। গড়মান $\langle x \rangle$ থেকে অবস্থানের গড় বর্গ বিচ্যুতি :-

$$(\Delta x)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* (x - \langle x \rangle)^2 \psi \, dx \quad \text{——— (i)}$$

একইভাবে গড়মান $\langle P_x \rangle$ থেকে ভরবেগের গড় বর্গ বিচ্যুতি,

$$(\Delta P_x)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* (P_x - \langle P_x \rangle)^2 \psi \, dx \quad \text{——— (ii)}$$

এখন $(\Delta x)^2 (\Delta P_x)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* (x - \langle x \rangle)^2 \psi \, dx \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* (P_x - \langle P_x \rangle)^2 \psi \, dx$

যার, $\alpha = x - \langle x \rangle$ এবং $\beta = P_x - \langle P_x \rangle$

অতএব, $$(\Delta x)^2 (\Delta P_x)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \alpha^2 \psi \, dx \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \beta^2 \psi \, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \alpha\alpha \psi \, dx \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \beta\beta \psi \, dx$$

যেহেতু α ও β হার্মিশিয়ান সেহেতু,

$$(\Delta x)^2 (\Delta P_x)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^* \psi^* \alpha \psi \, dx \int_{-\infty}^{\infty} \beta^* \psi^* \beta \psi \, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha\psi)^* (\alpha\psi) \, dx \int_{-\infty}^{\infty} (\beta\psi)^* (\beta\psi) \, dx \qquad \text{(ii)}$$

Schwartz's অসমতা থেকে আমরা পাই,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^* f \, dx \int_{-\infty}^{\infty} g^* g \, dx \geq \left| \int_{-\infty}^{\infty} f^* g \, dx \right|^2$$

তাহলে (ii) নং হতে পাই,

$$(\Delta x)^2 (\Delta P_x)^2 \geq \left| \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha\psi)^* (\beta\psi) \, dx \right|^2$$

$$\geq \left| \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^* \psi^* \beta \psi \, dx \right|^2$$

$$\geq \left| \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \alpha \beta \psi \, dx \right|^2$$ [α হার্মিশিয়ান অপারেটর]

$$(\Delta x)^2 (\Delta P_x)^2 \geq \left| \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \left\{ \frac{1}{2} (\alpha\beta - \beta\alpha) + \frac{1}{2} (\alpha\beta + \beta\alpha) \right\} \psi \, dx \right|^2$$

$$\geq \left| \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \frac{1}{2} (\alpha\beta - \beta\alpha) \psi \, dx \right|^2 + \left| \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \frac{1}{2} (\alpha\beta + \beta\alpha) \psi \, dx \right|^2 \qquad \text{(iii)}$$

এখানে, $\alpha\beta - \beta\alpha = (x - \langle x\rangle)(P_x - \langle P_x\rangle) - (P_x - \langle P_x\rangle)(x - \langle x\rangle)$

$$= xP_x - x\langle P_x\rangle - \langle x\rangle P_x + \langle x\rangle\langle P_x\rangle - P_x x + P_x\langle x\rangle + \langle P_x\rangle x - \langle P_x\rangle\langle x\rangle$$

$$= xP_x - P_x x$$

$$= [x, P_x]$$

আমরা জানি, $[x, P_x] = i\hbar$

$$\therefore \alpha\beta - \beta\alpha = i\hbar$$

এক্ষেত্রে $\alpha\beta + \beta\alpha = 0$

অতএব আমরা পাই,

$$(\Delta x)^2 (\Delta P_x)^2 \geq \left|\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \frac{1}{2} i\hbar \psi\, dx\right|^2 + \left|\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \frac{1}{2} \times 0 \psi\, dx\right|^2$$

$$\geq \frac{1}{4}\hbar^2 \left|\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi\, dx\right|^2 + 0$$

নর্মায়িত তরঙ্গ ফাংশনের জন্য $\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi\, dx = 1$

অতএব আমরা পাই, $(\Delta x)^2 (\Delta P_x)^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}$

অর্থাৎ, $(\Delta x).(\Delta P_x) \geq \frac{\hbar}{2}$ ——— (4) [Proved]

~~আবার আমরা জানি,~~

~~২নং প্রশ্নের উত্তর:~~

২নং প্রশ্ন :- সময় ও শক্তির জন্য অনিশ্চয়তা নীতিটি বর্ণনা কর।

প্রমাণ:- ১নং প্রশ্নের থেকে $(\Delta x).(\Delta P_x) \geq \frac{\hbar}{2}$ পর্যন্ত লিখতে ——— (1)

হয়ে তারপরে,

আমরা জানি, $E = \frac{P_x^2}{2m}$

বা, $\Delta E = \frac{\Delta P_x^2}{2m} \cdot \Delta P_x = \frac{P_x}{m} \cdot \Delta P_x$

অতএব, $\Delta x \cdot \Delta P_x = \Delta x \cdot \frac{m}{P_x} \cdot \Delta E$ [মান বসিয়ে]

$= \Delta x \cdot \frac{m}{mv} \cdot \Delta E$

$= \Delta x \cdot \frac{1}{v} \Delta E$

কিন্তু, বেগ, $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ তাহলে,

$\Delta x \cdot \Delta P_x = \Delta x \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \Delta E$

$= \Delta t \cdot \Delta E$

এই মান (4) নং এ ব্যবহার করে পাই,

$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2$ [প্রমাণিত]

প্রশ্ন-3: পরীক্ষা দ্বারা অনিশ্চয়তা নীতি প্রমাণ কর?

সমাধান

মূল বইয়ের 28 page-এ উত্তর।

প্রশ্ন-5: অনিশ্চয়তা থেকে দেখাও যে, কোনটি নিউক্লিয়াসের মধ্যে ইলেকট্রন থাকতে পারে না?

সমাধান

আমরা জানি, পরমাণুর নিউক্লিয়াসের ব্যাসার্ধ 10^{-14} m অনুক্রমের হয়। সুতরাং ইলেকট্রন নিউক্লিয়াসের অভ্যন্তরে আবদ্ধ থাকতে হলে এর অবস্থানের অনিশ্চয়তা অবশ্যই 2×10^{-14} মিটারের অধিক হবে না।

অবস্থানের অনিশ্চয়তা Δx এবং ভরবেগের অনিশ্চয়তা ΔP হলে,

$$\Delta x \Delta P = \frac{h}{4\pi}$$

$$= \frac{h}{4\pi \times \Delta x}$$

$$= \frac{6.62\times10^{-34}\ J/s}{4\times3.1416\times2\times10^{-14}\ m}$$

$$= 2.634\times10^{-21}\ kgms^{-1}$$

যেখানে,
$\Delta x = 2\times10^{-14}\ m$
$h = 6.62\times10^{-34}\ J/s$

এখন, ভরবেগের অনিশ্চয়তা-এ মানের হলে ইলেকট্রনের ভরবেগের ন্যূনতম পক্ষে এ মানের সমতুল্য হবে। $P = 2.634\times10^{-21}\ kgms^{-1}$

এখন, ইলেকট্রনের শক্তি $\Rightarrow E = \frac{p^2}{2m}$

$$= \frac{(2.634\times10^{-21})^2}{2\times9.1\times10^{-31}}\ J$$

$$= \frac{3.812\times10^{-12}}{1.6\times10^{-19}}\ eV$$

$$= 23.8\times10^{6}\ eV$$

$$= 23.8\ MeV$$

এর অর্থ হলো ইলেকট্রন নিউক্লিয়াসের অভ্যন্তরে থাকতে হলে একে 23.8 mev শক্তির অধিকারী হতে হবে।

কিন্তু পরীক্ষালব্ধ ফলাফল হতে দেখা যায় ইলেকট্রনের শক্তি 4 mev এর অধিক হয় না। তাই সিদ্ধান্ত নেওয়া যায়, নিউক্লিয়াসের মধ্যে ইলেকট্রন থাকতে পারে না।

২। [The normalized wave function of a particle along a straight line is

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{\sigma\sqrt{\pi}}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\exp\left(\frac{ikx}{\hbar}\right)$$

where the probability of finding particle is maximum?]

সমাধান : প্রদত্ত তরঙ্গ অপেক্ষকটি গসিয়ান তরঙ্গগুচ্ছ প্রকাশ করে। এ তরঙ্গ অপেক্ষক সমন্বিত কোন কণার অবস্থানের প্রত্যাশিত মান

$$<x> = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* x \psi\, dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/\sigma^2} x dx$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} z dz \qquad \left[\frac{x^2}{\sigma^2} = z \text{ ধরে}\right]$$

$$= 0$$

[কারণ $\int_{-\infty}^{\infty} x^{2x+1} e^{x^2} dx = 0$ যখন $n = 0, 1, 2 \ldots\ldots\ldots$]

এবং

$$<x^2> = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* x^2 \psi\, dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2/\sigma^2} dx$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z^2} dz \qquad \text{যখন } \frac{x^2}{\sigma^2} = z^2$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{\sigma^2}{2}$$

এখন

$$\Delta x = \left[<x^2> - <x>\right]^{1/2}$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2}} = 0.71\sigma \approx \sigma$$

অতএব কণাটিকে মূলবিন্দু অর্থাৎ $x=0$-এর উভয়পার্শ্বে $\Delta x \approx \sigma$ বিস্তৃতির অঞ্চলে প্রাপ্তির সম্ভাব্যতা সর্বাধিক। এছাড়া কণাটির সম্ভাব্যতা ঘনত্ব

$$|\psi(x)|^2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-x^2/\sigma^2}$$

সুতরাং $x=0$ অথবা মূলবিন্দুতে এ সম্ভাব্যতা সর্বাধিক এবং মূলবিন্দুর উভয়পার্শ্বে $|x|>\sigma$ অঞ্চলে সম্ভাব্যতা সূচকিয় হারে হ্রাস পায়।

গাণিতিক সমস্যা-১.২ : দেখাও যে,

$$\psi(r,t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int A(p)\exp\left[\frac{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}{\hbar}\right]dp$$

দ্বারা নির্দেশিত ত্রিমাত্রিক তরঙ্গ মোড়ক নিম্নের আংশিক ব্যবকলনী সমীকরণ (শ্রোডিঙ্গার সমীকরণ) সিদ্ধ করে

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + \frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0$$

[Show that,

$$\psi(r,t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int A(p)\exp\left[\frac{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}{\hbar}\right]dp$$

the three dimension wave packet r represented by this equation satisfics the following partial differential equation (Schrodinger equation)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + \frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0]$$

সমাধান : আমরা জানি,

$$\psi(r,t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int A(p)\exp\left[\frac{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et}{\hbar}\right]dp \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots (i)$$

তাহলে
$$\frac{\partial\psi(r,t)}{\partial t} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int A(p)\left(\frac{-iE}{\hbar}\right)\exp\left[\frac{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et}{\hbar}\right]dp \quad \ldots\ldots (ii)$$

এবং
$$\nabla^2\psi = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int A(p)\left(-\frac{p^2}{\hbar^2}\right)\exp\left[\frac{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}{\hbar}\right]dp \ \ldots \quad \ldots\ldots (iii)$$

(ii) ও (iii) নং সমীকরণকে প্রদত্ত ব্যবকলনী সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int A(p)\left(\frac{-p^2}{\hbar^2}\right)\exp\left[\frac{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}{\hbar}\right]dp\right\}$$
$$+\frac{\hbar}{i}\left\{\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int A(p)\left(\frac{-iE}{\hbar}\right)\exp\left[\frac{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}{\hbar}\right]dp\right\} = 0$$

বা, $$\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int A(p)\left(\frac{p^2}{2m}-E\right)\exp\left[\frac{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}{\hbar}\right]dp=0$$

$\therefore$ L.H.S = R.H.S

কারণ $E=p^2/2m$ ।

গাণিতিক সমস্যা-১.৩ : একটি গসিয়ান অপেক্ষক নিম্নরূপে প্রদত্ত

$$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{\sigma\sqrt{\pi}}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

যখন σ হলো তরঙ্গ মোড়কের প্রস্থ । বিস্তার অপেক্ষক $A(k)$ নির্ণয় কর ।

[A Gaussian function is given as

$$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{\sigma\sqrt{\pi}}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

where σ is the width of the wave packet. Find the amplitude function A(k).]

সমাধান : আমরা জানি, বিস্তার অপেক্ষক

$$A(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)e^{-ikx}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\sigma\sqrt{\pi}}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)e^{-ikx}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma\sqrt{\pi}}}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{-(ikx\sigma^2+x^2)}{2\sigma^2}\right]dx$$

$\exp\left[\frac{\sigma^2k^2}{2}\right]$ দিয়ে গুণ ও ভাগ করে পাই,

$$A(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma\sqrt{\pi}}}\right)\left(\frac{1}{\exp\left[\frac{\sigma^2k^2}{2}\right]}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{-(2ikx\sigma^2+x^2)+\sigma^4k^2}{2\sigma^2}\right]dx$$

$$=\frac{\exp\left[-\frac{\sigma^2k^2}{2}\right]}{\sqrt{2\pi}\left(\sqrt{\sigma\sqrt{\pi}}\right)}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{-(x+ik\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right]dx$$

$$= \frac{\exp\left(-\frac{\sigma^2 k^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}\left(\sqrt{\sigma\sqrt{\pi}}\right)}\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}}\exp\left(-\frac{\sigma^2 k^2}{2}\right)$$

এটিই নির্ণেয় বিস্তার অপেক্ষক।

গাণিতিক সমস্যা-১.৪ : হাইড্রোজেন পরমাণুর ভূমি অবস্থায় ভরবেগ তরঙ্গ অপেক্ষক নির্ণয় কর।

[Find the ground state momentum wave function of hydrogen atom.]

সমাধান : স্থানাঙ্ক নির্দেশনায় ভূমি অবস্থায় হাইড্রোজেন পরমাণুর তরঙ্গ অপেক্ষক হলো

$$\psi(r) = \left(\frac{1}{\pi a_0^3}\right)^{1/2} e^{-r/a_0}$$

যখন a_0 হলো প্রথম বোর কক্ষের ব্যাসার্ধ। আনুষঙ্গিক ভরবেগ তরঙ্গ অপেক্ষক হবে

$$A(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\left(\frac{1}{\pi a_0^3}\right)^{1/2} \int e^{-r/a_0} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, d\vec{r}$$

ভূমি অবস্থায় তরঙ্গ অপেক্ষক অরীয় দূরত্ব r-এর মাধ্যমে প্রদত্ত বিধায় $\vec{k}$ ভেক্টরের দিককে $\vec{r}$-এর দিকে বিবেচনা করা যায়। তাহলে $\vec{k}\cdot\vec{r} = kr\cos\theta$। গোলীয় মেরুবর্তী স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায়

$$d\tau = d\vec{r} = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

কাজেই

$$A(k) = \frac{1}{2^{3/2}\pi^2 a_0^{3/2}} \int_0^{\infty}\int_0^{\pi} \left[e^{-r/a_0 - ikr\cos\theta}\right] r^2 dr \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$= \frac{(2a_0)^{3/2}}{\pi(k^2 a_0^2 + 1)^2}$$

গাণিতিক সমস্যা-১.১০ : $1keV$ ইলেকট্রনের অবস্থান ও ভরবেগ একই সাথে নিরূপণ করা হলো। যদি এর অবস্থান $1\overset{o}{A}$ -এর মধ্যে নির্ধারিত হয়, তবে ভরবেগের অনিশ্চয়তার শতকরা হার কত?

[The position and momentum of 1 keV electron is determind at a time. If its position is determined within 1Å, what will be the percentage of uncertainty in momentum?]

সমাধা : আমরা জানি,

$$E = 1keV = 10^3 eV$$

$$= 10^3 \times 1 \cdot 6 \times 10^{-19} J$$

$$= 1 \cdot 6 \times 10^{-16} J$$

আবার

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

বা, $$p^2 = 2mE$$

$$= 2 \times 9 \cdot 1 \times 10^{-31} \times 1 \cdot 6 \times 10^{-16}$$

বা, $$p = 1 \cdot 71 \times 10^{-23}$$

পুনরায়

$$\Delta p = \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{1 \cdot 05 \times 10^{-34}}{-1 \times 10^{-10}}$$

$$= 1 \cdot 05 \times 10^{-23}$$

ভরবেগের অনিশ্চয়তা শতকরা হার,

$$= \frac{\Delta p}{p} \times 100\%$$

$$= \frac{1.05 \times 10^{-23}}{1.71 \times 10^{-23}} \times 100\%$$

$$= 61 \cdot 4\%$$

উত্তর : $61 \cdot 4\%$ ।

গাণিতিক সমস্যা-১.১১ : হাইড্রোজেন পরমাণুতে ইলেকট্রন গড়ে প্রোটন হতে $0 \cdot 5\text{Å}$ দূরত্বে আছে। (1) ইলেকট্রনের ভরবেগের ন্যূনতম অনিশ্চয়তা নির্ণয় কর। (2) ইলেকট্রনের ন্যূনতম গতিশক্তি নির্ণয় কর।

[In hydrogen atom electron is at a average distance of 0.5Å from the proton. (1) Find the minimum uncertainty in momentum of the electron. (2) Calculate the minimum Kinetic energy of the electron.]

[জা.বি. (স)-২০১৩]

সমাধান : প্রোটন হতে ইলেকট্রনের গড় দূরত্ব $0\cdot5\text{Å} = 0\cdot5\times10^{-10}m$ । সুতরাং হাইড্রোজেন পরমাণুতে ইলেকট্রনের অবস্থানের অনিশ্চয়তা $\Delta x = 0\cdot5\times10^{-10}m$ -এর অধিক নয় । আমরা পাই,

$$\Delta x\cdot\Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

বা,
$$\Delta p \geq \frac{\hbar}{2\Delta x}$$

$$= \frac{1\cdot054\times10^{-34}}{2\times0\cdot5\times10^{-10}}$$

$$= 1\cdot054\times10^{-24}\,kg\,ms^{-1}$$

এখন ন্যূনতম শক্তি,

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

ইলেকট্রনের ন্যূনতম ভরবেগ $p = 1\cdot054\times10^{-24}\,kg\,ms^{-1}$

$\therefore$
$$E = \frac{(1\cdot054\times10^{-24})^2}{2\times9\cdot1\times10^{-31}}$$

$$= 0\cdot061\times10^{-19}\,J$$

$$= 0\cdot038\,eV$$

উত্তর : $0\cdot038eV$ ।

chapter-2

qn-1: মুক্ত কণার জন্য সময় নির্ভরশীল শ্রোডিঞ্জারের সমীকরণ প্রতিপাদন কর এবং এর সমাধান বের কর?

qn-2: মুক্ত কণার জন্য সময় অনির্ভর শ্রোডিঞ্জারের সমীকরণ প্রতিপাদন কর এবং সমাধান বের কর?

qn-3: স্থির অবস্থা বলতে কি বুঝ? শক্তির প্রত্যাশিত মান নির্ণয় কর?

qn-4: সম্ভাবনার প্রবাহ ঘনত্ব-অবিচ্ছিন্নতার সমীকরণ নির্ণয় কর?

qn-5: A ও E ধ্রুবক হলে (i) A বের কর (ii) $\psi^*\psi$-এর ভৌত তাৎপর্য আলোচনা কর? অবস্থান ভেক্টর ও শক্তির প্রত্যাশিত মান নির্ণয় কর?

প্রশ্ন-২: একটি মুক্ত কণার জন্য সময় অনির্ভরশীল শ্রোডিঞ্জার সমীকরণটি ও সমাধান।

Deduce the time independent Schrodinger wave equation and Solve it.

সমাধান: তরঙ্গ সৃষ্টির জন্য যে রাশির পর্যাবৃত্ত পরিবর্তন ঘটে সেটিই হলো তরঙ্গ অপেক্ষক ψ। অর্থাৎ,

$$\psi = Ae^{i(kx-\omega t)} \quad \text{---------- (i)}$$

আইনস্টাইনের ফোটন তত্ত্ব সমীকরণ অনুসারে,

$$E = h\nu$$
$$= \frac{h}{2\pi}\cdot\nu\cdot 2\pi$$
$$E = \hbar\omega$$
$$\Rightarrow \omega = \frac{E}{\hbar} \quad \text{---------- (ii)}$$

A = তরঙ্গের বিস্তার

ω = কৌণিক কম্পাঙ্ক

k = সঞ্চারণ ধ্রুবক

h = প্লাঙ্কের ধ্রুবক

ν = কম্পাঙ্ক

$\hbar = \frac{h}{2\pi}$ এবং $\omega = 2\pi\nu$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$

আবার, ডি ব্রগলীর সমীকরণ হতে পাই,

$$\lambda = \frac{h}{p}$$
$$\Rightarrow p = \frac{h}{\lambda}$$
$$= \frac{h}{2\pi}\cdot\frac{2\pi}{\lambda}$$
$$\Rightarrow p = \hbar k$$
$$\Rightarrow k = \frac{p}{\hbar} \quad \text{---------- (iii)}$$

ω ও k এর মান (i) নং সমীকরণে বসাই,

$$\psi = Ae^{i(kx-\omega t)}$$
$$\Rightarrow \psi = Ae^{i\left(\frac{px}{\hbar}-\frac{E}{\hbar}t\right)} \quad \text{---------- (iv)}$$

[ω ও k এর মান বসিয়ে]

(iv) নং সমীকরণকে x এর সাপেক্ষে 2 বার ব্যবকলন করি,

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi = A.e^{i\left(\frac{px}{\hbar}-\frac{E}{\hbar}t\right)}.\, i.\frac{p}{\hbar}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi = Ai^2\frac{p^2}{\hbar^2}e^{i\left(\frac{px}{\hbar}-\frac{E}{\hbar}t\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = i^2 \frac{p^2}{\hbar^2}\cdot\psi$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -\frac{p^2}{\hbar^2}\psi$$

$$\Rightarrow p^2\psi = -\hbar^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \quad \text{——— (v)}$$

(iv) নং সমীকরণকে সময় t এর সাপেক্ষে ব্যবকলন করে পাই,

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = A e^{i\left(\frac{px}{\hbar} - \frac{E}{\hbar}\cdot t\right)}\, i\frac{E}{\hbar}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar}\cdot\psi$$

$$\Rightarrow E\psi = -\frac{\hbar}{i}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial t} \quad \text{——— (vi)}$$

এখন,
আলোর বেগের তুলনায় কম বেগে চলমান কণার মোট শক্তি, গতিশক্তি ও বিভব শক্তির সমষ্টি।

$$E = \frac{p^2}{2m} + V$$

উভয়পক্ষে ψ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$E\psi = \frac{p^2}{2m}\psi + V\psi$$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V\psi$$

$$\Rightarrow i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V\psi \quad \text{——— (vii)}$$

এটিই একমাত্রিক শ্রোডিঞ্জার সমীকরণ।

ত্রিমাত্রিক ক্ষেত্রে রূপান্তর করলে হয়,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\psi + V(x, y, z, t) = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

এখন, ল্যাপলাসিয়ান অপারেটর, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

CamScanner

তাহলে, $-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + v(x,y,z,t)\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$ ——— (viii)

আবার, আমরা জানি, শক্তি অপারেটর $E = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ তাহলে,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + v\psi = E\psi$$

$$\Rightarrow \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi - v\psi + E\psi = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + (E-v)\psi = 0$$

মুক্ত কনার ক্ষেত্রে, $v=0$

$$\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + E\psi = 0 \quad \text{——— (ix)}$$

এটিই মুক্ত কনার জন্য সময় নিরপেক্ষ শ্রোডিঙ্গার সমীকরণ।

<u>সমাধানঃ</u> আমরা জানি,

$$i\hbar\frac{\partial\psi(r,t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + v(\vec{r})\right]\psi(r,t)$$

ধরি, $\psi(r,t) = \psi(\vec{r})\,\phi(t)$

$$\therefore i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r})\phi(t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + v(\vec{r})\right]\psi(\vec{r})\phi(t)$$

উভয়পক্ষকে $\psi(\vec{r})\phi(t)$ দ্বারা ভাগ করি,

$$\frac{1}{\phi(t)}\cdot i\hbar\frac{\partial\phi(t)}{\partial t} = \frac{1}{\psi(\vec{r})}\cdot\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + v(\vec{r})\right]\psi(\vec{r})$$

এখানে, L.H.S t চলকের উপর নির্ভরশীল এবং R.H.S হলো $\vec{r}$ চলকের উপর নির্ভরশীল।

সুতরাং, ধরি, L.H.S = R.H.S = Constant = E

$$\therefore\ i\hbar \frac{1}{\phi(t)} \cdot \frac{\partial \phi(t)}{\partial t} = E \quad \text{——— (i)}$$

এবং, $$\frac{1}{\psi(\vec{r})}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r})\right]\psi(\vec{r}) = E \quad \text{——— (ii)}$$

(i) নং সমীকরণ হতে পাই,
$$i\hbar \frac{1}{\phi(t)} \cdot \frac{\partial \phi(t)}{\partial t} = E$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial \phi(t)}{\phi(t)} = E\partial t$$

উভয়পক্ষকে সমাকলন করে পাই,

$$\int \frac{1}{\phi(t)} \partial \phi(t) = \frac{1}{i\hbar} E \int dt$$

$$\Rightarrow \ln \phi(t) = \frac{1}{i\hbar} Et + \ln A$$

$$\Rightarrow \ln \phi(t) - \ln A = -\frac{i}{\hbar} Et$$

$$\Rightarrow \ln \frac{\phi(t)}{A} = -\frac{i}{\hbar} \cdot Et$$

$$\Rightarrow \frac{\phi(t)}{A} = e^{-\frac{i}{\hbar} Et}$$

$$\Rightarrow \phi(t) = Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et)}$$

যেহেতু, $\psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) \cdot \phi(t)$

$$\therefore \psi(\vec{r}, t) = \sum_n A_n \psi_n(\vec{r}) \cdot e^{-i/\hbar (E_n t)}$$

ইহাই সময় নির্ভরশীল শ্রোডিঙ্গার সমীকরণের সমাধান।

প্রশ্ন-২: মুক্তকণার জন্য সময় অনির্ভর শ্রোডিঞ্জার সমীকরণ প্রতিপাদন কর এবং এর সমাধান বের কর ?

<u>সমাধান</u>

আমরা জানি,

সময় নির্ভরশীল শ্রোডিঞ্জার সমীকরণ হলো :-

$$i\hbar \frac{d\psi}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + v(\vec{r})\psi \quad \text{——— (i)}$$

যখন, $\psi = (x, y, z, t) = \psi(\vec{r}, t)$

এখন, চলক পৃথকীকরণ সম্ভব হলে, ধরা যাক

$$\psi(\vec{r}, t) = u(\vec{r}) \cdot f(t)$$

$$\boxed{\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}}$$

তাহলে (i) নং সমীকরণকে লিখা যায়,

$$i\hbar u \frac{df}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} f \cdot \nabla^2 u + v(\vec{r}) \cdot f u$$

$$\Rightarrow \frac{i\hbar u}{uf} \cdot \frac{df}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{f}{uf} \cdot \nabla^2 u + V(\vec{r}) \cdot \frac{f \cdot u}{uf}$$

$$\Rightarrow \frac{i\hbar}{f} \cdot \frac{df}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{1}{u}\nabla^2 u + v(\vec{r}) \quad \text{——— (ii)}$$

এই সমীকরণের বামপক্ষ শুধু t এবং ডানপক্ষ শুধু $\vec{r}$ এর অপেক্ষক।

সুতরাং, উভয়পক্ষকে একটি আধারণ ধ্রুবক E এর সমান ধরা যায়।

$$\frac{i\hbar}{f} \cdot \frac{df}{dt} = E \quad \text{——— (iii)}$$

এবং $-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{1}{u} \cdot \nabla^2 u + v(\vec{r}) = E$ ——— (iv)

(iv) নং সমীকরণকে সময় নিরপেক্ষ শ্রোডিঞ্জার তরঙ্গ সমীকরণ বলা হয়।

সমাধানঃ (iii) নং সমীকরণ হতে পাই,

$$i\hbar \frac{1}{f} \cdot \frac{\partial f}{\partial t} = E$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{f} = \frac{1}{i\hbar} \cdot E \partial t$$

উভয়পক্ষকে সমাকলন করে পাই,

$$\int \frac{\partial f}{\partial f} = \frac{1}{i\hbar} E \int \partial t$$

$$\Rightarrow \ln f = \frac{1}{i\hbar} E \cdot t + \ln A$$

$$\Rightarrow \ln f - \ln A = -\frac{-1}{i\hbar} \cdot Et$$

$$\Rightarrow \ln \frac{f}{A} = -\frac{i^2}{i\hbar} Et$$

$$\Rightarrow \frac{f}{A} = e^{-\frac{i}{\hbar}(Et)}$$

$$\Rightarrow f = Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et)}$$

যেহেতু, $\psi(\vec{r}, t) = u(\vec{r}) \cdot f(t)$

$$\therefore \psi(\vec{r}, t) = A\psi(\vec{r})\, e^{-\frac{i}{\hbar}(Et)}$$

ইহাই হলো মুক্ত কনার জন্য সময় নিরপেক্ষ শ্রোডিঞ্জার সমীকরণের সমাধান।

Qn-6%:- শক্তির প্রত্যাশিত মান নির্নয় কর ?
(Find the expectation value of energy).

Solved:- কোয়ান্টামতত্ত্বে যে কোন ভৌতিক ফাংশন $f(x)$ এর গড়মান বা প্রত্যাশিত মানের সমীকরণ হলো:

$$\langle f(x)\rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* f(x)\, \psi\, dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi\, dx} \quad \text{(ii)}$$

যদি তরঙ্গ ফাংশনটি নর্মায়িত হয় তবে $\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* dx = 1$ হবে

তাহলে প্রত্যাশিত মান হবে $\langle f(x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* f(x)\, \psi\, dx$

নির্ভরশীল ও অনির্ভরশীল

Qn-7:- স্থির অবস্থা বলতে কি বোঝায় ? সময় নিরপেক্ষ শ্রোডিঞ্জার সমীকরণ প্রতিপাদন কর এবং সমীকরণটির সমাধান কর ?
(what is meant by stationary state ? Deduce time independent schrodinger wave equation and Solved it.)

Solve:- স্থির অবস্থা:- প্রত্যেক বিন্দুতে সম্ভাব্যতা ঘনত্ব সময় নিরপেক্ষ হলেই ব্যবস্থার অস্তিত্ব বিদ্যমান থাকে এবং এর ফলে গতীয় চলক সমূহের প্রত্যাশিত মানসমূহ (Expectation Values) সময়ের সাথে অপরিবর্তিত থাকে এরূপ অবস্থাকেই স্থির অবস্থা বলে।

২য় অধ্যায় → শ্রোডিঞ্জার সমীকরণ :—

qn-1:- সম্ভাবনা প্রবাহ ঘনত্ব কী ?

= আমরা জানি, $J = S(r,t) = \left[\psi^* \frac{\hbar}{im} \nabla\psi\right]$ এর বাস্তব অংশ।

এখানে $S(r,t)$ কে সম্ভাবনা প্রবাহ ঘনত্ব বলে এবং এই সমীকরণটিকে সম্ভাবনার প্রবাহ ঘনত্বের সমীকরণ বলে।

qn-2:

আরেনফাস্টের উপপাদ্য বিবৃত কর ?

= তরঙ্গ অপেক্ষক ψ দ্বারা বর্ণিত তরঙ্গগুচ্ছের গড় গতি যথাযথই সিদ্ধ হয়।

qn-3: মুক্তকণার জন্য সময় নির্ভর শ্রোডিংগার সমীকরণটি লিখ ?

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2\psi$$

qn-4: তরঙ্গ মোড়ক কাকে বলে ?

= অনেক ক্ষেত্রে ψ একটিমাত্র কণাকে নির্দেশ করে এবং কেবল সীমিত অঞ্চলে ψ এর মান শূন্য নয়। এই সীমিত অঞ্চলকে তরঙ্গ মোড়ক বলে।

প্রশ্ন-৫: সম্ভাবনার প্রবাহ ঘনত্ব অবিচ্ছিন্নতার সমীকরণ নির্ণয় কর?

সমাধান

আমরা জানি, সময় নির্ভর শ্রোডিঞ্জারের সমীকরণটি হলো :-

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \quad \text{—— (i)}$$

উভয় দিকে জটিল যুগ্ম নিয়ে পাই,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi^* + V\psi^* = -i\hbar\frac{\partial\psi^*}{\partial t} \quad \text{—— (ii)}$$

(i) এর উভয়দিকের বামপাশে ψ^* দ্বারা গুন করি,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi^*\nabla^2\psi + V\psi^*\psi = i\hbar\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} \quad \text{—— (iii)}$$

(ii) এর উভয়দিকে বামে ψ দ্বারা গুন করে পাই,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi\nabla^2\psi^* + V\psi\psi^* = -i\hbar\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t} \quad \text{—— (iv)}$$

সমীকরণ (iii) থেকে (4) বিয়োগ করে পাই,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi^*\nabla^2\psi + V\psi^*\psi + \frac{\hbar^2}{2m}\psi\nabla^2\psi^* - V\psi\psi^* = i\hbar\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} + i\hbar\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}$$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\psi^*\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\psi^*\right] = i\hbar\left[\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} + \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right]$$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\psi^*\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\psi^*\right] = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\psi)$$

$$\Rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\psi) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\psi^*\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\psi^*\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\psi) = -\frac{\hbar}{2mi}\left[\psi^*\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\psi^*\right]$$

সমীকরণটির উভয়দিকে একটি বদ্ধতল S- দ্বারা আবদ্ধ আয়তন V এর উপর সমাকলন করে পাই,

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\psi)\,dv = -\frac{\hbar}{2mi}\int_V \left[\psi^*\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\psi^*\right] dv$$

সমীকরণটির ডানপাশে গ্রীনের আন্ডে ব্যবহার করে পাই,

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dv = -\frac{\hbar}{2im}\int_A \left[\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right] d\vec{A}$$

যেখানে, $\vec{S} = \frac{\hbar}{2im}\left(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right)$ কে বলা হয় সম্ভাবনার প্রবাহ ঘনত্ব। অতএব আমরা পাই,

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dv = -\int_A \vec{S}\cdot d\vec{A}$$

ডানপাশে ডাইভারজেন্স তত্ত্ব ব্যবহার করে পাই,

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\cdot dv = -\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{S}\,dv$$

$$\Rightarrow \int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{S}\right] dv = 0$$

অতএব আমরা পাই,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{S} = 0$$

ইহাই হলো অবিচ্ছিন্নতার সমীকরণ।

গাণিতিক সমস্যা-২.১ : একটি তরঙ্গ অপেক্ষক $\psi = \frac{1}{r}\exp(ikr)$ যখন $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ । তরঙ্গ অপেক্ষকটির সম্ভাব্যতা প্রবাহ ঘনত্ব কত? ফলাফলের ভৌত তাৎপর্যের ব্যাখ্যা দাও।

[A wave function is $\psi = \frac{1}{r}\exp(ikr)$ where $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. What is the probability current density of the wave function. Explain the physical significance of the result.]

সমাধান : আমরা জানি, সম্ভাব্যতা প্রবাহ ঘনত্ব হলো,

$$S = \left[\psi^* \frac{\hbar}{im}\nabla\psi\right] \text{-এর বাস্তব অংশ}$$

$$= \left[\frac{1}{r}\exp(-ikr)\frac{\hbar}{im}\left\{\frac{ik}{r}\exp(ikr) - \frac{1}{r^2}\exp(ikr)\right\}\right] \text{ এর বাস্তব অংশ}$$

$$= \left[\frac{1}{r}\exp(-ikr)\exp(ikr)\left\{\frac{\hbar k}{mr} - \frac{\hbar}{imr^2}\right\}\right] \text{-এর বাস্তব অংশ}$$

$$= \frac{\hbar k}{mr^2} = \frac{p}{mr^2} = \frac{v}{r^2}$$

যখন v হলো কণার বেগ।

ভৌত ব্যাখ্যা : ভৌতভাবে এ ফলাফল কণার দিক নিরপেক্ষ বর্তুলীয় তরঙ্গ নির্দেশ করে এবং এর তীব্রতা বিপরীতবর্গীয় সূত্রের নিয়মানুযায়ী হ্রাস পেতে থাকে।

9×10^{-28} gm ভরের একটি ইলেকট্রনের অবস্থানের অনিশ্চয়তা গণনা কর। যার 3×10^{3} cm/sec গতির অনিশ্চয়তা নিয়ে গতিশীল হয়।

উত্তর $m = 9\times10^{-28}$ gm

$\Delta v = 3\times10^{3}$ cm/sec.

$\Delta x = ?$

আমরা জানি,

$$\Delta x \Delta p = \hbar/2$$

বা, $\Delta x \cdot \Delta(mv) \simeq \hbar/2$

বা, $\Delta x \, m \Delta v \simeq \hbar/2$

বা. $\Delta x = \dfrac{\hbar}{2m\Delta v} = \dfrac{h}{4\pi m \Delta v}$

$$= \frac{6.63\times10^{-27}\ \text{erg sec.}}{4\cdot 3.14\times 9\times10^{-28}\times 3\times10^{3}\ \text{m/sec.}}$$

$= \ldots\ldots = $ cm.

একটি ইলেকট্রনের গতি হলে 2×10^{4} cm/sec যার 0.01% সঠিক ইলেকট্রনের অবস্থানটিকে কত সঠিকভাবে নিরূপণ করে?

$m = 9\times10^{-28}$ gm.

$h = 6.62\times10^{-27}$ erg sec.

যেহেতু 0.01% অনিশ্চয়তার নিশ্চিয়তার বিশিষ্ট সঠিক বেগের অনিশ্চয়তা

$$\Delta v = \frac{0.01}{100}\times 2\times10^{4} = 18\times10^{-28}\ \text{gm}\cdot\text{cm/sec}$$

অনিশ্চয়তার নীতি হতে

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \simeq \hbar/2$$

বা, $\Delta x \simeq \dfrac{h}{4\pi \cdot \Delta p_x} = \dfrac{6.63\times10^{-27}}{4\times3.14\times18\times10^{-28}}$

$= 0.2932$ cm.

chapter-3

Qn-1: শ্রোডিঞ্জার, হাইজেনবার্গ ও ডিরাক চিত্রের ব্যাখ্যা দাও?

***

সমাধান

শ্রোডিঞ্জার চিত্র: যে চিত্রে কোন ব্যবস্থার তরঙ্গ অপেক্ষক বা অবস্থা ভেক্টর সময় নির্ভর কিন্তু অপারেটর সময় অনির্ভর তাকে শ্রোডিঞ্জার চিত্র বলে। শ্রোডিঞ্জার চিত্রে তরঙ্গ ফাংশন ψ এবং অপারেটর $\hat{A}$ হলে লিখা যায়,

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi_s(t) \neq 0$$

কিন্তু অপারেটর $\frac{\partial \hat{A}}{\partial t} = 0$

হাইজেনবার্গ চিত্র: যে চিত্রে অবস্থা ভেক্টর সময় নিরপেক্ষ এবং অপারেটর সময় নির্ভর তাকে হাইজেনবার্গ চিত্র বলে। হাইজেনবার্গ চিত্রে তরঙ্গ ফাংশন বা অবস্থা ভেক্টর ψ সময় নিরপেক্ষ এবং অপারেটর $\hat{A}$ সময় নির্ভর। অতএব হাইজেনবার্গ চিত্রে:-

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi = 0$$

এবং $\frac{\partial \hat{A}}{\partial t} = 0$

ডিরাক চিত্র:- যে চিত্রে উভয় তরঙ্গ ফাংশন ও অপারেটর সময় নির্ভর সেই চিত্রকে ডিরাক চিত্র বলে। যদি তরঙ্গ ফাংশন ψ এবং অপারেটর $\hat{A}$ হয়। তাহলে $\frac{\partial \psi}{\partial t} \neq 0$

এবং $\frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \neq 0$

Qn-২ঃ অপারেটরের চিহ্ন গতির সমীকরণ প্রতিপাদন কর?

***

সমাধান

কোয়ান্টাম বলবিদ্যার স্বীকার্য থেকে আমরা জানি,

$$E\psi = \hat{H}\psi$$ এখানে, $\hat{H}$ = হ্যামিল্টনিয় অপারেটর

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}\psi \quad \text{———} (i)$$

এবং, $$\frac{d\psi^*}{dt} = -\frac{i\hat{H}^*\psi^*}{\hbar} \quad \text{———} (ii)$$

অতএব, অপারেটরের প্রত্যাশিত মান,

$$\langle \hat{A}_s \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{A}_s \psi \, d\tau$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\langle \hat{A}_s \rangle = \frac{d}{dt}\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{A}_s \psi \, dx \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\langle \hat{A}_s \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{d\psi^*}{dt} \right\} A_s \psi \, dx + \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \left\{ \frac{dA_s}{dt} \right\} \psi \, dx + \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* A_s \left\{ \frac{d\psi}{dt} \right\} dx$$

(i) ও (ii) এর মান সমীকরণটিতে বসাই,

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{A}_s \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{i\hat{H}^*\psi^*}{\hbar} \right) A_s \psi \, dx + \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \left(\frac{dA_s}{dt} \right) \psi \, dx + \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* A_s \left(\frac{\hat{H}\psi}{i\hbar} \right) dx$$

$$= -\frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} H\psi^* A_s \psi \, dx + \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* A_s H \psi \, dx$$

$$= \frac{1}{i\hbar} \int \psi^* (A_s H - H A_s) \psi \, dx$$

$$= \frac{1}{i\hbar} \int \psi^* [A_s, H_s] \psi \, dx$$

$$\therefore \quad = \frac{1}{i\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* [A_S, H_S]\psi \, dx$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\langle \hat{A}_S \rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle [A_S, H_S] \rangle$$

এটিই ~~হাইজেনবার্গ~~ শ্রোডিঞ্জার চিত্রে গতির সমীকরণ।

Qn-3: হাইজেনবার্গ চিত্রে অবস্থা ভেক্টরের গতির সমীকরণ বের কর?

***

সমাধান

~~কোয়ান্টাম বলবিদ্যার স্বীকার্য থেকে আমরা জানি,~~

$$\cancel{E\psi = \hat{H}\psi}$$

$$\Rightarrow i\hbar \cancel{\frac{\delta \psi_s(t)}{\delta t} = H_s \psi_s(t)} \quad \text{—— (ii)}$$

আমরা জানি, হাইজেনবার্গ চিত্রে অপারেটর Q_H এবং শ্রোডিঞ্জার চিত্রে অপারেটর Q_S এর মধ্যে সম্পর্ক হলো:-

$$Q_H = U Q_S U^{\dagger} \quad \text{—— (i)}$$

এখানে, $U = e^{iHt/\hbar}$ হলো একটি ইউনিটারি অপারেটর।

সমীকরণ (i) এর উভয়দিকে সময়ের সাপেক্ষে ব্যবকলন করে পাই,

$$\frac{dQ_H}{dt} = \frac{d}{dt}(U Q_S U^{\dagger})$$

$$= \frac{dU}{dt} \cdot Q_S \cdot U^{\dagger} + U Q_S \frac{dU^{\dagger}}{dt} + U \frac{dQ_S}{dt} U^{\dagger} \quad \text{—— (iii)}$$

যেহেতু, ইউনিটারি অপারেটর $U = e^{iHt/\hbar}$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial t} = e^{iHt/\hbar} \cdot \frac{iH}{\hbar}$$

$$= \frac{i}{\hbar} UH$$

আবার, $U^{+} = e^{-iHt/\hbar}$

$$\Rightarrow \frac{dU^{+}}{dt} = \left(\frac{\partial U}{dt}\right)^{+} = \left(\frac{i}{\hbar} \cdot UH\right)^{+} = -\frac{i}{\hbar} H U^{+}$$ [যেখানে, H = হ্যামিলটোনিয়ান]

$\frac{dU}{dt}$ ও $\frac{dU^{+}}{dt}$ এর মান (ii) এ বসাই

$$\frac{dQ_H}{dt} = \frac{i}{\hbar} UHQ_sU^{+} - \frac{i}{\hbar} UQ_sHU^{+} + U\frac{\partial Q_s}{\partial t} \cdot U^{+}$$

$$= \frac{i}{\hbar}\left(UHQ_sU^{+} - UQ_sHU^{+}\right) + U \frac{\partial Q_s}{dt} \cdot U^{+}$$

$$= \frac{i}{\hbar} U \left[HQ_s - Q_sH\right] U^{+} + U \frac{\partial Q_s}{dt} U^{+}$$

$$= \frac{i}{\hbar} U \left[H, Q_s\right] U^{+} + U \frac{\partial Q_s}{dt} U^{+}$$

$$= \frac{i}{\hbar} \cdot \left[H, Q_H\right] + \frac{\partial Q_H}{\partial t}$$ [(i) নং সমীকরণ ব্যবহার করে]

$$\therefore \frac{dQ_H}{dt} = \frac{i}{\hbar} \left[H, Q_H\right] + \frac{\partial Q_H}{\partial t}$$

ইহাই হলো হাইজেনবার্গ চিত্রে গতির সমীকরণ।

প্র-৫ঃ ডিরাক চিত্রে গতির সমীকরণ প্রতিপাদন কর?

সমাধান

ডিরাক চিত্রের শর্তানুসারে, $\frac{\partial \psi}{\partial t} \neq 0$

এবং $\frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \neq 0$

ডিরাক চিত্রে হ্যামিল্টনিয়ান অপারেটর H_I কে দুইটি অংশে ভাগ করা হয়,

$$H_I = H_0 + H_I' \text{ ——— (i)}$$

এখানে, H_0 হলো অবিচলিত হ্যামিল্টনিয়ান এবং H_I' হলো ভৌত সিস্টেম গঠনকারী কনার মধ্যে মিথস্ক্রিয়া।

মিথস্ক্রিয়া অংশ H_I' সময়ের উপর নির্ভর করে। মিথস্ক্রিয়া চিত্রে একটি অপারেটর Q_I এবং অবস্থান ভেক্টর $|\psi_I\rangle$ এর সাথে ঐকিক রূপান্তরের মাধ্যমে স্রোডিঞ্জার চিত্রের সাথে সম্পর্ক হলো:-

$$Q_I = e^{\frac{iH_0t}{\hbar}} Q_S e^{-\frac{iH_0t}{\hbar}} \text{ ——— (ii)}$$

এবং, $$|\psi_I H\rangle = e^{iH_0t/\hbar}|\psi H\rangle \text{ ——— (iii)}$$

তাহলে, (ii) হতে, $$Q_I = UQ_SU^+ \text{ ——— (iv)}$$

$$\Rightarrow \frac{dQ_I}{dt} = \frac{d}{dt}\left[UQ_SU^+\right]$$

$$= \frac{dU}{dt}Q_S U^+ + UQ_S\frac{dU^+}{dt} + U\frac{\partial Q_S}{\partial t}U^+ \text{ ——— (v)}$$

এখানে, $U = e^{iH_0t/\hbar}$ এবং $U^+ = e^{-\frac{iH_0t}{\hbar}}$

$$\Rightarrow \frac{dU}{dt} = e^{iH_0t/\hbar}\cdot\frac{iH_0}{\hbar} = \frac{i}{\hbar}\cdot UH_0$$

$$\Rightarrow \frac{dU^+}{dt} = \left(\frac{dU}{dt}\right)^+ = \left(\frac{i}{\hbar}\cdot UH_0\right)^+ = -\frac{i}{\hbar}\cdot H_0U^+$$

এই মানগুলোকে (v) নং এ বসাই,

$$\frac{dQ_I}{dt} = \frac{i}{\hbar}UH_0Q_SU^+ + UQ_S\left(-\frac{i}{\hbar}\cdot H_0U^+\right) + U\frac{\partial Q_S}{\partial t}U^+$$

$$\Rightarrow \frac{dQ_I}{dt} = \frac{i}{\hbar}\left(U Q_s U^+ H_0 - H_0 U Q_s U^+\right) + U \frac{\partial Q_s}{\partial t} U^+$$

$$= \frac{i}{\hbar}\left(Q_I H_0 - H_0 Q_I\right) + U \frac{\partial Q_s}{dt} U^+$$

অতএব, $\frac{\partial Q_I}{dt} = \frac{i}{\hbar}\left[Q_I, H_0\right] + \frac{\partial Q_I}{\partial t}$

ইহাই হলো ডিরাক চিত্রের গতির সমীকরণ।

প্রশ্ন-৫ঃ শ্রোডিঞ্জার, হাইজেনবার্গ ও ডিরাক চিত্রের মৌলিক পার্থক্য সমূহ লিখ?

★★★ সমাধান

আইটেম	শ্রোডিঞ্জার চিত্র	হাইজেনবার্গ চিত্র	মিথস্ক্রিয়া চিত্র
১. অবস্থান ভেক্টর	ইহা সময় নির্ভর	ইহা সময় অনির্ভর	ইহা সময় নির্ভর
২. গাণিতিক ব্যাখ্যা	$\frac{\partial}{\partial t}\psi \neq 0$ $\frac{\partial}{\partial t}\hat{A}_s = 0$	$\frac{\partial}{\partial t}\psi = 0$ $\frac{\partial}{\partial t}\hat{A} \neq 0$	$\frac{\partial}{\partial t}\psi \neq 0$ $\frac{\partial}{\partial t}\hat{A} \neq 0$
৩. অপারেটর	অপারেটর সময় অনির্ভর	অপারেটর সময় নির্ভর	অপারেটর সময় নির্ভর
3. গতির সমীকরণ	যেকোনো অপারেটর A_s এর জন্য গতির সমীকরণ হবেঃ- $i\hbar \frac{d}{dt}\langle A_s\rangle = \langle [A_s, H]\rangle$	কোনো অপারেটর Q_H এর জন্য গতির সমীকরণ হবেঃ- $\frac{dQ_H}{dt} = \frac{1}{\hbar}[H, Q_H] + \frac{\partial Q_H}{\partial t}$	যেকোনো অপারেটর Q_I এর জন্য গতির সমীকরণ হবেঃ- $\frac{dQ_I}{dt} = \frac{i}{\hbar}[Q_I, H_0] + \frac{\partial Q_I}{\partial t}$

প্রশ্ন-6: হাইজেনবার্গ চিত্র প্রয়োগ করে দেখাও যে,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{dv}{dx}$$

***

সমাধান

হাইজেনবার্গ চিত্রে কোন অপারেটর $\hat{A}$- এর সময়জাতক হলো:-

$$\frac{d\hat{A}(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{A}(t), \hat{H}\right] \text{ ——— (i)}$$

অপারেটর, $\hat{A} = x$ হলে,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{x}, \hat{H}\right] \text{ ——— (ii)}$$

কিন্তু আমরা জানি, এক্সমাত্রিক হার্মোনিক দোলকের ক্ষেত্রে,

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + m\omega^2 x^2$$

তাহলে,

$$\left[\hat{x}, \hat{H}\right] = \frac{1}{2m}\left[x, p^2\right] + m\omega^2\left[x, x^2\right]$$

$$= \frac{1}{2m}\left[x, pp\right] + 0 \quad \left[\text{যেখানে, } \left[x, x^2\right] = 0\right]$$

$$= \frac{1}{2m}\left\{\left[x, p\right]p + p\left[x, p\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2m} \cdot 2i\hbar p$$

$$= \frac{i\hbar p}{m}$$

তাহলে, (ii) নং হতে পাই, $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{i\hbar} \cdot \dfrac{i\hbar p}{m}$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = \frac{p}{m} \quad \text{[Proved]}$$

আবার, অপারেটর $A = P$ হলে, ⓘ নং অনুসারে,

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \cdot [P, H] \quad \text{——— (iii)}$$

এখন, আমরা জানি, $H = \frac{p^2}{2m} + V$

তাহলে,

$$[P, H] = \frac{1}{2m} [P, p^2] + [P, V]$$

$$= 0 + [P, V]$$

$$= [P, V]$$

এখন, $[P, V] \psi(x) = (PV - VP) \psi(x)$

$$= -i\hbar \frac{d}{dx} (V\psi(x)) + i\hbar V \frac{d\psi(x)}{dx}$$

$$= -i\hbar \frac{dV}{dx} \psi(x) - i\hbar V \frac{d\psi(x)}{dx} + i\hbar V \cdot \frac{d\psi(x)}{dx}$$

$$\Rightarrow \therefore [P, V] \psi(x) = -i\hbar \frac{dV}{dx} \psi(x)$$

$$\therefore [P, V] = -i\hbar \frac{dV}{dx}$$

(iii) নং সমীকরণ হতে পাই,

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [P, H]$$

$$= \frac{1}{i\hbar} [P, V] = \frac{1}{i\hbar} \cdot -i\hbar \cdot \frac{dV}{dx}$$

$$\therefore \frac{dP}{dt} = -\frac{dV}{dx} \quad \text{[Proved]}$$

প্রশ্ন-৭: সমতা অপারেটর একটি হারমিশিয়ান অপারেটর প্রমাণ কর ?
***

সমাধান

সমতা অপারেটরকে $\hat{\pi}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এটি একটি রৈখিক অপারেটর। কোনো চলক x- এর একটি অপেক্ষকের ক্ষেত্রে সমতা অপারেটরকে নিম্নরূপ সংজ্ঞায়িত করা হয় ;

$$\hat{\pi}\psi(x) = \psi(-x) \quad \text{(i)}$$

মনেকরি, দুটি অপেক্ষক ψ_1 ও ψ_2 বিবেচনা করা যাক।

তাহলে (i) নং অনুসারে লিখা যায়,

$$\hat{\pi}[\psi_1(x) + \psi_2(x)] = \psi_1(-x) + \psi_2(-x)$$

$$= \hat{\pi}\psi_1(x) + \hat{\pi}\psi_2(x) \quad \text{(ii)}$$

অনুরূপভাবে লিখা যায়, $\hat{\pi}c\psi(x) = c\psi(-x)$ (iii)

$= c\hat{\pi}\psi(x)$ [যেখানে, c = একটি ধ্রুবক]

সমীকরণ (ii) ও (iii) অনুসারে বলা যায় যে, $\hat{\pi}$ একটি রৈখিক অপারেটর,

আবার স্কেলার - গুণনের ক্ষেত্রে:-

$$(\hat{\pi}\psi_1, \psi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^*(-x)\,\psi_2(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^*(x')\,\psi_2(-x')\,dx'$$

[যেখানে, $x' = -x$ ব্যবহার করে।]

দেখা যায় চলকের পরিবর্তনের সমাকলনের মানের কোন পরিবর্তন ঘটে না। অতএব:-

$$(\hat{\pi}\psi_1, \psi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^*(x)\cdot\psi_2(-x)\,dx$$

$= (\psi_1, \hat{\pi}\psi_2)$

অতএব, অসমতা অপারেটর $\hat{\pi}$ একটি হারমিশিয়ান অপারেটর।

প্রশ্ন- অসমতা অপারেটরের আইগেনমান নির্ণয় কর অথবা দেখাও যে অসমতা অপারেটরের আইগেনমান ± 1.

সমাধান

ধরা যাক, অসমতা অপারেটর $\hat{\pi}$ কোন ফাংশন $\psi(x)$-কে অপারেট করে λ আইগেন মান প্রদান করে। তাহলে,

$$\hat{\pi}\psi = \lambda\psi$$

$$\text{বা, } \hat{\pi}^2\psi = \hat{\pi}(\hat{\pi}\psi) = \hat{\pi}(\lambda\psi)$$

$$= \lambda\hat{\pi}\psi = \lambda^2\psi \quad \text{---------- (i)}$$

আবার,

$$\hat{\pi}^2\psi(x) = \hat{\pi}[\hat{\pi}\psi(x)]$$

$$= \hat{\pi}\psi(-x)$$

$$= \psi(x) \quad \text{---------- (ii)}$$

(i) ও (ii) নং সমীকরণ তুলনা করে পাই,

$$\lambda^2\psi = \psi$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = 1$$

$$\therefore \lambda = \pm 1$$

অর্থাৎ, অসমতা অপারেটর এর আইগেনমান $\lambda = \pm 1$। $\lambda = +1$ আইগেনমানের অনুষঙ্গী আইগেন ফাংশনকে জোড় ফাংশন বলে। একে ψ_e দিয়ে প্রকাশ

করা হয়। জোড় ফাংশনের ক্ষেত্রে $\psi_e(x) = \psi_e(-x)$ হয়। আবার $\lambda = -1$ আইগেনমানের অনুবর্তী আইগেন ফাংশনকে বিজোড় আইগেন ফাংশন বলে। একে ψ_o দিয়ে প্রকাশ করা হয়। বিজোড় আইগেন ফাংশনের ক্ষেত্রে $\psi_o(x) = -\psi_o(-x)$ হয়।

প্রশ্ন-৭: ভরবেগ অপারেটরের আইগেন অপেক্ষক ও আইগেনমান নির্ণয় কর?

সমাধান

মনে করি, $\hat{P}_x$ একটি অপারেটর এবং আইগেন ফাংশন $\psi(x)$ এবং আইগেন মান λ।

$\hat{P} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$

আমরা জানি, $\hat{P}_x \psi(x) = \lambda \psi(x)$

$$\Rightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi(x) = \lambda\psi(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\psi(x)}{\psi(x)} = \frac{\lambda\,\partial x}{-i\hbar}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\psi(x)}{\psi(x)} = \frac{i\lambda\,\partial x}{\hbar} \quad \text{——— (i)}$$

(i) নং সমীকরণকে উভয় পক্ষ সমাকলন করি,

$$\int\frac{\partial\psi(x)}{\psi(x)} = \frac{i\lambda}{\hbar}\int\partial x$$

$$\Rightarrow \ln\psi(x) = \frac{i\lambda}{\hbar}x + k$$

$$\Rightarrow \psi(x) = e^{\frac{i\lambda x}{\hbar} + k}$$

$$\Rightarrow \psi(x) = e^{\frac{i\lambda x}{\hbar}}\cdot e^{k} \quad \text{যেখানে, } \boxed{e^{k} = \text{ধ্রুবক}}$$

——— (ii)

$\psi(x)$ ভৌতভাবে গ্রহণযোগ্য তরঙ্গ অপেক্ষক হলে λ এর মান বাস্তব হবে।

ধরি, আইগেন মান $\lambda = P$

$\therefore$ নর্মায়নের সূত্রানুসারে,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \psi \, dx = 1 \quad \text{——— (3)}$$

এখন, $\psi(x) = e^{i\lambda x/\hbar} \cdot c$ যেখানে, $e^k = e$

$$\therefore \psi^*(x) = e^{-i\lambda x/\hbar} \cdot c \quad \text{——— (4)}$$

(ii) ও (iv) নং থেকে (3) নং এ বসাই,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i\lambda x}{\hbar}} \cdot c \, e^{i\lambda x/\hbar} \cdot c \, dx = 1$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^0 \cdot c^2 \, dx = 1$$

$$\Rightarrow c^2 \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot dx = 1 \qquad \left[1 \cdot dx = 2\pi\hbar \right.$$

$$\Rightarrow c^2 \left[2\pi\hbar \right] = 1$$

$$\Rightarrow c^2 = \frac{1}{2\pi\hbar}$$

$$\therefore c = \sqrt{\frac{1}{2\pi\hbar}} \quad \text{——— (v)}$$

(5) নং এর মান (ii) নং এ বসাই,

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\hbar}} \cdot e^{\frac{i\lambda x}{\hbar}}$$

ইহাই নির্ণেয় আইগেন ফাংশন।

প্রশ্ন-২০: কোয়ান্টাম বলবিদ্যায় স্বীকার্য সমূহ লিখ?

সমাধান:-

কোয়ান্টাম বলবিদ্যার স্বীকার্যসমূহ নিম্নরূপ:-

(i) একটি সিস্টেমের প্রত্যেকটি ভৌত অবস্থানের সাথে একটি অবস্থান ভেক্টর বা তরঙ্গ ফাংশন সংশ্লিষ্ট থাকে যাহা সিস্টেমের সমস্ত বৈশিষ্ট্য বহন করে।

(ii) প্রত্যেকটি ভৌত রাশির সাথে একটি হারমিশিয়ান অপারেটর সংশ্লিষ্ট থাকে। যেমন

রৈখিক ভরবেগের সাথে সংশ্লিষ্ট অপারেটর

$\hat{P} \to -i\hbar\nabla$।

শক্তি অপারেটর $\hat{E} \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$

(iii) একটি ভৌত চলকের সঠিক পরীক্ষনের সম্ভাব্য ~~মান~~ সুনির্দিষ্ট মান হবে ভৌত চলকটির সাথে সংশ্লিষ্ট আইগেন মান।

(iv) ψ অবস্থানে একটি সিস্টেমের একটি চলক f এর প্রত্যাশিত মান

$$\langle f \rangle = \frac{\int \psi^* \hat{f} \psi \, dx}{\int \psi^* \psi \, dx}$$

(v) একটি অবস্থান ভেক্টর $|\psi|A\rangle$ এর সময় বিবর্তনকে নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করা যায়:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$$

এখানে $\hat{H}$ কে বলা হয় হ্যামিল্টনিয়ান অপারেটর এবং ইহা হলো

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}$$ যেখানে, $\hat{T}$ = গতিশক্তি অপারেটর।

$\hat{V}$ = পটেনশিয়াল শক্তি অপারেটর।

প্রশ্ন-1: ভূমি বা 1S অবস্থায় হাইড্রোজেন পরমাণুর নর্মালিত তরঙ্গ ফাংশন

$$\psi_{lmn} = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} \cdot e^{-r/a_0}$$

হলে এ পরমাণুর বিভবশক্তির প্রত্যাশিত মান বের কর?

সমাধান

এখানে, বিভবশক্তি $V = -\frac{e^2}{r}$ এর প্রত্যাশিত মান হবে,

$$\langle V \rangle = \int \psi^*_{lmn} \left(-\frac{e^2}{r}\right) \psi_{lmn} \, d\tau$$

$$= e^2 \int \psi^2_{lmn} \left(\frac{1}{r}\right) d\tau \quad \text{---------- (i)}$$

আমরা জানি,

বর্তুলীয় স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় আয়তন উপাদান

$$d\tau = r^2 dr \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

তাহলে (i) নং হতে পাই,

$$\langle V \rangle = -e^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}}\right)^2 \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} r^2 \frac{e^{-2r/a_0}}{r} dr$$

$$= -\frac{e^2}{\pi a_0^3} \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} \left[\phi\right]_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-2r/a_0} r \, dr$$

$$= -\frac{e^2}{\pi a_0^3} (1+1)(2\pi - 0) \int_0^{\infty} e^{-2r/a_0} r \, dr$$

$$= -\frac{e^2}{\pi a_0^3} (4\pi) \int_0^{\infty} e^{-2r/a_0} r \, dr \quad \text{---------- (ii)}$$

কিন্তু $\int_0^\infty e^{-ax} x^n dx = \frac{\lfloor n}{a^{n+1}}$ আদর্শ সমাকলন অনুসারে,

$$\int_0^\infty e^{-\frac{2}{a_0}\cdot r} \cdot r^1 \cdot dr = \frac{1}{(2/a_0)^{1+1}} = \frac{1}{\left(\frac{2}{a_0}\right)^2}$$

এখন, (ii) নং হতে পাই,

$$\langle v \rangle = -\frac{4e^2}{a_0^3} \cdot \frac{1}{\left(\frac{2}{a_0}\right)^2}$$

$$= -\frac{4e^2}{a_0^3} \cdot \frac{a_0^2}{4}$$

$$= -\frac{e^2}{a_0}$$

$$= -\frac{e^2}{\hbar^2/me^2} \quad \left[\text{যেখানে, } a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}\right]$$

$$= -e^2 \times \frac{me^2}{\hbar^2}$$

$$\langle v \rangle = -\frac{me^4}{\hbar^2}$$

ইহাই নির্ণেয় বিভবশক্তির প্রত্যাশিত মান।

প্র-2:- H পরমাণুর সর্বনিম্ন অবস্থানে নিউক্লিয়াস থেকে ইলেকট্রনের আয়ত দূরত্ব r বের কর বা দূরত্বের প্রত্যাশিত মান বের কর?

যেখানে, $\psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0}$

সমাধান

দেওয়া আছে H পরমাণুর সর্বনিম্ন অবস্থানে তরঙ্গ ফাংশন

$$\psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0}$$

এখন, r-এর প্রত্যাশিত মান হবে,

$$\langle r \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{100}^* \, r \, \psi_{100} \, d\tau$$

$$= \int_{r=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} \cdot e^{-r/a_0} \cdot r \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} \cdot e^{-r/a_0} r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi$$

$$\Rightarrow \langle r \rangle = \frac{1}{\pi a_0^3} \int_{r=0}^{\infty} r^3 e^{-2r/a_0} dr \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta d\theta \cdot \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi$$

$$= \frac{1}{\pi a_0^3} \cdot 4\pi \int_{r=0}^{\infty} r^3 e^{-2r/a_0} dr$$

ধরি,

$$x = \frac{2r}{a_0} \Rightarrow dr = \frac{a_0}{2} dx$$

অতএব,

$$\langle r \rangle = \frac{4}{a_0^3} \int_{x=0}^{\infty} \frac{a_0^3 x^3 e^{-x}}{8} \times \frac{a_0}{2} dx$$

$$= \frac{4}{a_0^3} \cdot \frac{a_0^4}{16} \int_{x=0}^{\infty} x^3 e^{-x} dx$$

$$= \frac{a_0}{4} \times 3!$$

$$= \frac{a_0}{4} \times 3 \times 2 \times 1$$

$$= \frac{3}{2} a_0$$

$$\therefore \langle r \rangle = \frac{3}{2} a_0$$

ইহাই নির্ণেয় $\langle r \rangle$ এর প্রত্যাশিত মান।

প্রশ্ন-৩: হাইড্রোজেন পরমাণুর ভূমি অবস্থার তরঙ্গ ফাংশন $\psi'_{100} = e^{-r/a_0}$ কে নর্মায়ন কর?

সমাধান

ধরি, নর্মায়িত তরঙ্গ ফাংশন,

$$\psi_{100} = N\psi'_{100}$$

আমরা জানি, নর্মায়নের শর্তানুসারে,

$$\int \psi^*_{100}\,\psi_{100}\,d\tau = 1$$

$$\text{বা, } \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} Ne^{-r/a_0}\cdot Ne^{-r/a_0}\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi = 1$$

$$\text{বা, } |N|^2 \int_0^{\infty} e^{-2r/a_0}\, dr \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 1 \quad \text{——— (i)}$$

এখন, $\int_0^{2\pi} d\phi = [\phi]_0^{2\pi} = 2\pi - 0 = 2\pi$

আবার, $\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta = [-\cos\theta]_0^{\pi}$

$$= [\cos\theta]_{\pi}^{0}$$

$$= (\cos 0^\circ - \cos\pi)$$

$$= 1 - (-1)$$

$$= 2$$

এবং, $\int_0^{\infty} r^2 e^{-2r/a_0}\, dr$

$$= \left[r^2 \cdot \frac{e^{-2r/a_0}}{\frac{2}{a_0}}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 2r\, \frac{e^{-2r/a_0}}{-2/a_0}\cdot dr$$

$$= 2\times\frac{a_0}{2}\int_0^{\infty} r e^{-2r/a_0}\, dr$$

$$= a_0\left[r \cdot \frac{e^{-2r/a_0}}{-2/a_0}\right]_0^\infty - a_0\int_0^\infty 1 \cdot \frac{e^{-2r/a_0}}{-2/a_0}\,dr$$

$$= +\frac{a_0^2}{2}\left[\frac{e^{-2r/a_0}}{-2/a_0}\right]_0^\infty$$

$$= -\frac{a_0^3}{4}(0-1)$$

$$= +\frac{a_0^3}{4}$$

আবার, (i) নং সমীকরণ হতে পাই,

$$|N|^2 \cdot \frac{a_0^3}{4} \times 2 \times 2\pi = 1$$

$$\Rightarrow |N|^2 = \frac{1}{\pi a_0^3}$$

$$\therefore N = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}}$$

নর্মায়নের তরঙ্গ ফাংশন, $\psi_{100} = N\psi'_{100}$

$$= \frac{1}{(\pi a_0^3)^{1/2}} \cdot e^{-r/a_0}$$

$$\therefore \psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} \cdot e^{-r/a_0}$$

Ans

qn:-4 ψ_{100} এর মান নির্ণয় কর ?

সমাধান

আমরা জানি, $\psi_{nlm} = \left[\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!} \cdot \left(\frac{2}{na_0}\right)^3 \cdot \frac{(n-l-1)!}{2n\{(n+l)!\}^3}\right]^{1/2} e^{-r/na_0} \times \left(\frac{2r}{na_0}\right)^l$

$L_{n+l}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na_0}\right) e^{im\phi} \cdot P_l^m \cos\theta$ ——— (i)

H_{100} স্টেটের অবিচ্ছিন্ন অবস্থানের জন্য, $n=1, l=0, m=0$ তাহলে,

(i) নং হতে আমরা পাই,

$$\psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} \cdot e^{-r/a_0}$$

Qn:-5 কৌণিক ভরবেগের সংজ্ঞা দাও? নিম্নের বিনিময় সম্পর্কগুলো প্রতিপাদন কর?

সমাধান

কৌণিক ভরবেগঃ- কোন কনার কৌণিক ভরবেগ বলতে ঐ অক্ষ সাপেক্ষে কনাটির রৈখিক ভরবেগের ভ্রামককে বুঝায়। এটি একটি ভেক্টর রাশি।

গানিতিকভাবে কৌণিক ভরবেগ $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$

যেখানে, $\vec{L} = \hat{i}L_x + \hat{j}L_y + \hat{k}L_z$ এবং $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$

$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$

$\vec{P} = \hat{i}P_x + \hat{j}P_y + \hat{k}P_z$

এখন,
$$\vec{r} \times \vec{P} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(yP_z - zP_y) - \hat{j}(xP_z - zP_x) + \hat{k}(xP_y - yP_x)$$

অতএব, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$

$$\Rightarrow \hat{i}L_x + \hat{j}L_y + \hat{k}L_z = \hat{i}(yP_z - zP_y) - \hat{j}(xP_z - zP_x) + \hat{k}(xP_y - yP_x)$$

এখানে, $L_x = yP_z - zP_y$ এবং $\hat{L}_x = -i\hbar\left[y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right]$

$L_y = zP_x - xP_z$ $\quad\hat{L}_y = -i\hbar\left[z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right]$

$L_z = xP_y - yP_x$ $\quad\hat{L}_z = -i\hbar\left[x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right]$

যেখানে, $\hat{P}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$, $\hat{P}_y = -i\hbar\frac{\partial}{\partial y}$, $\hat{P}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial z}$

এবং $\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$

$x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$ - চক্রীয় ক্রম

Qn-1:- $[\hat{L}_x, \hat{L}_y]$ এর মান নির্ণয় কর?

সমাধান

এখানে,

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = (\hat{L}_x\hat{L}_y - \hat{L}_y\hat{L}_x)$$

$$= \left(-i\hbar y\frac{\partial}{\partial z} + i\hbar z\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(-i\hbar z\frac{\partial}{\partial x} + i\hbar x\frac{\partial}{\partial z}\right) -$$

$$\left(-i\hbar z\frac{\partial}{\partial x} + i\hbar x\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(-i\hbar y\frac{\partial}{\partial z} + z\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$= i^2\hbar^2\left[+y\frac{\partial}{\partial z}z\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial z}\cdot x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}z\frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial y}\cdot x\frac{\partial}{\partial z}\right] - i^2\hbar^2$$

$$\left[+z\frac{\partial}{\partial x}y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}z\frac{\partial}{\partial y} - x\frac{\partial}{\partial z}\cdot y\frac{\partial}{\partial z} + x\frac{\partial}{\partial z}z\frac{\partial}{\partial y}\right]$$

$$= i^2\hbar^2\left[y\frac{\partial}{\partial z}\cdot z\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial z}x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\cdot z\frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial y}x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}y\frac{\partial}{\partial z} + \right.$$

$$\left. z\frac{\partial}{\partial x}\cdot z\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}\cdot y\frac{\partial}{\partial z} - x\frac{\partial}{\partial z}z\frac{\partial}{\partial y}\right]$$

$$= i^2\hbar^2\left[y\frac{\partial}{\partial x} - 0 - 0 + 0 + 0 + 0 + 0 - x\frac{\partial}{\partial y}\right]$$

$$= i^2\hbar^2 \left[y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} \right]$$

$$= i\hbar \left\{ i\hbar \left(-x\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial x} \right) \right\}$$

$$= i\hbar \hat{L}_z$$

$$\therefore \left[\hat{L}_x, \hat{L}_y \right] = i\hbar \hat{L}_z$$

$x \to y \to z \to x$

ঘোরে দেখি।

একইভাবে, $\left[\hat{L}_y, \hat{L}_z \right] = i\hbar \hat{L}_x$

$$\left[\hat{L}_z, \hat{L}_x \right] = i\hbar \hat{L}_y$$

<u>qn-2:</u> $$\vec{L} \times \vec{L} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ L_x & L_y & L_z \\ L_x & L_y & L_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left(L_yL_z - L_zL_y\right) - \hat{j}\left(L_xL_z - L_zL_x\right) + \hat{k}\left(L_xL_y - L_yL_x\right)$$

$$= \hat{i}\left[L_y, L_z\right] - \hat{j}\left[L_x, L_z\right] + \hat{k}\left[L_x, L_y\right]$$

$$= \hat{i}\left(i\hbar L_x\right) - \hat{j}\left(-i\hbar L_y\right) + \hat{k}\left(i\hbar L_z\right)$$

$$= i\hbar \left(\hat{i}L_x + \hat{j}L_y + \hat{k}L_z\right)$$

$$\therefore \vec{L} \times \vec{L} = i\hbar \hat{L}$$ <u>Ans</u>

<u>qn-3:</u> Proved that, $\left[\hat{L}_x, x\right] = 0$, $\left[\hat{L}_y, y\right] = 0$, $\left[\hat{L}_z, z\right] = 0$

এখানে, $\left[\hat{L}_x, \hat{x}\right]\psi$

$$= \left(\hat{L}_x\hat{x} - \hat{x}\hat{L}_x\right)\psi$$

$$= \left[(-i\hbar)\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)x - x(-i\hbar)\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]\psi$$

$$= -i\hbar\left[\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)x\psi - x\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi\right]$$

$$= -i\hbar\left[y\frac{\partial}{\partial z}(x\psi) - z\frac{\partial}{\partial y}(x\psi) - x\left(y\frac{\partial}{\partial z}\psi - z\frac{\partial}{\partial y}\psi\right)\right]$$

$$= -i\hbar\left[\cancel{xy\frac{\partial\psi}{\partial z}} - \cancel{xz\frac{\partial\psi}{\partial y}} - \cancel{xy\frac{\partial\psi}{\partial z}} + \cancel{xz\frac{\partial\psi}{\partial y}}\right]$$

$$= -i\hbar \times 0$$

বা, $[\hat{L}_x, \hat{x}]\psi = 0$ এইভাবে, $[\hat{L}_y, \hat{y}] = 0$

$\therefore [\hat{L}_x, \hat{x}] = 0$ এবং $[\hat{L}_z, \hat{z}] = 0$ হবে।

qn-4: Proved that (i) $[\hat{L}_x, y] = i\hbar z$ (ii) $[\hat{L}_y, z] = i\hbar x$ এবং

(iii) $[\hat{L}_y, x] = -i\hbar z$

সমাধান

(i)

আমরা জানি, $[\hat{L}_x, \hat{y}] = \hat{L}_x\hat{y} - \hat{y}\hat{L}_x$

তাহলে, $[\hat{L}_x, \hat{y}]\psi = (\hat{L}_x\hat{y} - \hat{y}\hat{L}_x)\psi$

$$= \left[(-i\hbar)\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)\hat{y} - \hat{y}(-i\hbar)\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]\psi$$

$$= -i\hbar\left[\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)y\psi - y\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi\right]$$

$= -i\hbar\left[\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)y\psi - y\left(y\frac{\partial\psi}{\partial z} - z\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\right]$

$= -i\hbar\left[y\frac{\partial}{\partial z}(y\psi) - z\frac{\partial}{\partial y}(y\psi) - y^2\frac{\partial\psi}{\partial z} + yz\frac{\partial\psi}{\partial y}\right]$

~~$= -i\hbar\left[y^2\frac{\partial\psi}{\partial z} - z\psi\, y - y^2\frac{\partial\psi}{\partial z} + yz\frac{\partial\psi}{\partial y}\right]$~~

$= -i\hbar\left[\cancel{y^2\frac{\partial\psi}{\partial z}} - z\psi - \cancel{zy\frac{\partial\psi}{\partial y}} - \cancel{y^2\frac{\partial\psi}{\partial z}} + \cancel{yz\frac{\partial\psi}{\partial y}}\right]$

$= -i\hbar(-z\psi)$

$= i\hbar\psi z$

বা, $[\hat{L}_x, \hat{y}]\psi = i\hbar z\psi$

$\therefore [\hat{L}_x, \hat{y}] = i\hbar z$ $\boxed{\text{Proved}}$

অনুরূপভাবে, $[\hat{L}_y, \hat{z}] = i\hbar x$

এবং $[\hat{L}_y, x] = -i\hbar z$

Qn-5: Proved that, $[\hat{L}_x, \hat{P}_x]\psi = 0$

সমাধান

এখানে, $[\hat{L}_x, \hat{P}_x]\psi = (\hat{L}_x\hat{P}_x - \hat{P}_x\hat{L}_x)\psi$

$= \left[(-i\hbar)\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right) - \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)(-i\hbar)\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]\psi$

$= i\hbar^2\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x} - i\hbar^2\frac{\partial}{\partial x}\left(y\frac{\partial\psi}{\partial z} - z\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\Big]$

$$= i^2\hbar^2 \left[y \frac{\partial^2\psi}{\partial z \partial x} - z \frac{\partial^2\psi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(y \frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(z \frac{\partial\psi}{\partial y}\right) \right]$$

$$= i^2\hbar^2 \left[\cancel{y \frac{\partial^2\psi}{\partial z \partial x}} - \cancel{z \frac{\partial^2\psi}{\partial y \partial x}} - \cancel{y \frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial z}} + \cancel{z \frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial y}} \right]$$

$$= i^2\hbar^2 \times 0$$

বা, $[\hat{L}_x, \hat{P}_x]\psi = 0$ একইভাবে, $[\hat{L}_y, \hat{P}_y] = 0$

$\therefore [\hat{L}_x, \hat{P}_x] = 0$ $[\hat{L}_z, \hat{P}_z] = 0$

প্রমাণিত

প্রশ্ন-6: প্রমাণ কর যে, কৌণিক ভরবেগের বর্গ অপারেটর $\hat{L}^2$ এর উপাদানগুলোর সাথে বিনিময় করে?

উত্তর/সমাধান:

আমরা জানি, $\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$

এবং $\hat{L}^2$ এর উপাদান হলো $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$,

এখন, $[\hat{L}^2, \hat{L}_x] = [\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2, \hat{L}_x]$

$$= [\hat{L}_x^2, \hat{L}_x] + [\hat{L}_y^2, \hat{L}_x] + [\hat{L}_z^2, \hat{L}_x]$$

$$= [\hat{L}_x\hat{L}_x, \hat{L}_x] + [\hat{L}_y\hat{L}_y, \hat{L}_x] + [\hat{L}_z\hat{L}_z, \hat{L}_x]$$

$$= [\hat{L}_x, \hat{L}_x]\hat{L}_x + \hat{L}_x[\hat{L}_x, \hat{L}_x] + [\hat{L}_y, \hat{L}_x]\hat{L}_y + \hat{L}_y[\hat{L}_y, \hat{L}_x] + [\hat{L}_z, \hat{L}_x]\hat{L}_z + \hat{L}_z[\hat{L}_z, \hat{L}_x]$$

$= 0 + 0 + (-i\hbar \hat{L}_z)\hat{L}_y + \hat{L}_y(-i\hbar \hat{L}_z) + (i\hbar \hat{L}_y)L_z + \hat{L}_z(i\hbar \hat{L}_y)$

$= -i\hbar \cancel{\hat{L}_z}\hat{L}_y - i\hbar \cancel{\hat{L}_z}\hat{L}_y + i\hbar \cancel{\hat{L}_z}\hat{L}_y + i\hbar \cancel{\hat{L}_z}\hat{L}_y$

$= 0$

$\therefore [\hat{L}^2, \hat{L}_x] = 0$ এখানেও, $[\hat{L}^2, \hat{L}_y] = 0$, $[\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0$

অর্থাৎ, কৌণিক ভরবেগ এর বর্গ L^2- এর উপাদানের সাথে বিনিময় করে।

প্রশ্ন-৭: show that, (i) $[\hat{J}_+, \hat{J}_-] = 2\hbar \hat{J}_z$ (ii) $[\hat{J}_z, \hat{J}_+] = \hbar \hat{J}_+$

সমাধান

আমরা জানি, $\hat{J}_+ = \hat{J}_x + i\hat{J}_y$

এবং, $\hat{J}_- = \hat{J}_x - i\hat{J}_y$

এখন, $[\hat{J}_+, \hat{J}_-] = J_+J_- - J_-J_+$

$= (J_x + iJ_y)(J_x - iJ_y) - (J_x + iJ_y)(J_x - iJ_y)$

$= \hat{J}_x^2 - i\hat{J}_x\hat{J}_y + i\hat{J}_y\hat{J}_x + \hat{J}_y^2 - \hat{J}_x^2 - i\hat{J}_x\hat{J}_y + i\hat{J}_y\hat{J}_x - \hat{J}_y^2$

$= -2i\hat{J}_x\hat{J}_y + 2i\hat{J}_y\hat{J}_x$

$= 2i(\hat{J}_y\hat{J}_x - \hat{J}_x\hat{J}_y)$

$= 2i[\hat{J}_y, \hat{J}_x]$

$= 2i(-i\hbar J_z)$

$= -2i^2\hbar J_z$

$= -2(-1)\hbar J_z$

$\Rightarrow [\hat{J}_+, \hat{J}_-] = 2\hbar \hat{J}_z$

Ans

(ii) এখানে, $[\hat{J}_z, \hat{J}_+] = (\hat{J}_z\hat{J}_+ - \hat{J}_+\hat{J}_z)$

$$= \hat{J}_z(\hat{J}_x + i\hat{J}_y) - (\hat{J}_x + i\hat{J}_y)\hat{J}_z$$

$$= \hat{J}_z\hat{J}_x + i\hat{J}_z\hat{J}_y - \hat{J}_x\hat{J}_z - i\hat{J}_y\hat{J}_z$$

$$= (\hat{J}_z\hat{J}_x - \hat{J}_x\hat{J}_z) + i(\hat{J}_z\hat{J}_y - \hat{J}_y\hat{J}_z)$$

$$= [\hat{J}_z, \hat{J}_x] + i[\hat{J}_z, \hat{J}_y]$$

$$= i\hbar\hat{J}_y + i.(-i\hbar\hat{J}_x)$$

$$= i\hbar\hat{J}_y + \hbar\hat{J}_x$$

$$= \hbar(\hat{J}_x + i\hat{J}_y)$$

$$= \hbar\hat{J}_+$$

$\therefore [\hat{J}_z, \hat{J}_+] = \hbar\hat{J}_+$ $\boxed{\text{Proved}}$