chapter-1

qn:① অবরোধ বা গতীয় বাধা কি? → DU → 2018,

= কোন সিস্টেমের i তম কনার জন্য নিউটনের গতীয় সমীকরণ :-

$$m_i \ddot{r}_i = F_i^{(e)} + \sum F_{ji}$$

গতির এ সমীকরণ সমূহ সমাধানের জন্য ভৌত কারনে কিছু শর্তের উদ্ভব ঘটে অথবা কিছু শর্ত সমীকরণ ব্যবহার করার প্রয়োজনীয়তা দেখা যায়। এই শর্তসমূহকে বাধ্যবাধতা বা অবরোধ বা গতির বাধা বলে।

DU → 2017,

qn-2: স্বাধিনতার মাত্রা কাকে বলে? → DU-2017, 2020,

= যত সংখ্যক স্বতন্ত্র পথে কোন সিস্টেম আরোপিত অবরোধের শর্ত-সমূহ লঙ্ঘন না করে গতিসম্পন্ন করে তাকে ঐ সিস্টেমের স্বাধিনতার মাত্রা বলে।

qn-3: সার্বজনীন স্থানাঙ্ক কী? DU-2017, 2020,

= সার্বজনীন বা সাবিক স্থানাঙ্ক হলো সেসব স্থানাঙ্ক যারা সম্পূর্ন নিরপেক্ষ থেকে পরিবর্তিত হতে পারে। এ স্থানাঙ্কসমূহ এমনই স্বতন্ত্র যে, এমনকি এদের দৈর্ঘ্যের মাত্রা থাকারও প্রয়োজন নেই, যা প্রয়োজন তা হলো এরা সিস্টেমের অবস্থা সম্পূর্নরূপে প্রকাশ করে।

qn-4: সার্বজনীন বেগ বলতে কী বুঝ?

= সময়ের সাপেক্ষে সার্বজনীন স্থানাঙ্ক q_j এর ব্যবকলিত মান $\dot{q}_j = \frac{dq_j}{dt}$ কে সার্বজনিন বেগ বলে। অবরোধ নিরপেক্ষ সিস্টেমের ক্ষেত্রে:-

$$r_i = r_i(q_1, q_2 ---- q_{3N}, t)$$

বা, $\dot{r}_i = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\delta r_i}{\delta q_j}\dot{q}_j + \frac{\delta r_i}{\delta t}$ এ $\dot{q}_j$ সার্বজনীন বেগ নির্দেশকরে

Qn-5: আবর্জনীন ভরবেগ বলতে কি বুঝ? - DU-2018

= কোন সিস্টেমের গতিশক্তি T হলে আবর্জনীন স্থানাঙ্ক q_k এর দরুন আবর্জনীন ভরবেগ p_k কে সংজ্ঞায়িত করে পাই,

$$p_k = \frac{\delta T}{\delta q_k}$$

Qn-6: আবর্জনীন বল বলতে কি বুঝ? → DU-2018, 2020,

= কোন সিস্টেমের উপর ক্রিয়াশীল ΣF_i বলের দরুন সুদ্রাম্পিত $\Sigma \delta r_i$ সরণের জন্য কৃতকাজ বিবেচনা করি, আমরা পাই,

$$\boxed{\delta w = \sum_{i=1}^{N} F_i \cdot \delta r_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} F_i \sum_{j=1}^{3N} \frac{\delta r_i}{\delta q_j} \delta q_j$$

$$= \sum_{j=1}^{N} Q_j \cdot \delta q_j$$

এ সমীকরণের Q_j কে আবর্জনীন বল বলে।

Qn-7: আবর্জনীন বিভব বলতে কি বুঝ?

= অসংরক্ষণশীল সিস্টেমের ক্ষেত্রে আবর্জনীন বল Q_j কে $U(q_j, \dot{q}_j)$ আপেক্ষক থেকে নির্ধারণ করা হয়। উক্তক্ষেত্রে $Q_j = \frac{\delta U}{\delta q_j} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta U}{\delta \dot{q}_j}\right)$ U কে বলা হয় আবর্জনীন বিভব।

Qn-8: আবর্জনীন স্থানাঙ্ক ব্যবহারের সুবিধা লিখ?

= নিচে আবর্জনীন স্থানাঙ্ক ব্যবহারের সুবিধা লিখা হলো:

-
-
-
-

প্র-৭: কনা সিস্টেমের শক্তি সংরক্ষণ সূত্র প্রমাণ কর ? → DU-2018, 2020, 20..

সমাধান: শক্তি সংরক্ষণ সূত্র প্রতিষ্ঠার জন্য কনা সিস্টেমকে 1 অবস্থান হতে 2য় অবস্থানে সরাতে কৃতকাজের পরিমাণ হিসাব করা যাক, আমরা জানি,

$$W_{12} = \sum_i \int_1^2 F_i \cdot dr_i$$

$$= \sum_i \frac{1}{m_i} \int_1^2 \dot{p}_i \cdot p_i \, dt$$

$$= \sum_i \frac{1}{2m_i} \left[p_{i2}^2 - p_{i1}^2 \right]$$

$$\therefore W_{12} = T_2 - T_1 \text{ ——— (i)}$$

অর্থাৎ, কৃতকাজের পরিমাণ দুই অবস্থানের গতিশক্তির পার্থক্যের সমান। একে কার্য শক্তি উপপাদ্য বলা হয়।

এখন,

$$W_{12} = \sum_i \int_1^2 F_i^{(e)} \cdot dr_i + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \int_1^2 F_{ji} \cdot dr_i \text{ ——— (ii)}$$

সংরক্ষণশীল বলের ক্ষেত্রে বিভবশক্তির সংজ্ঞানুসারে জানি,

$$F_i^{(e)} = -\nabla_i V_i$$

$$F_{ij} = -\nabla_i V_{ij}$$

সুতরাং,

$$\sum_i \int_1^2 F_i^{(e)} \cdot dr_i = -\sum_i \int_1^2 (\nabla_i \cdot V_i) \cdot dr_i$$

$$= -\left[\left(\sum_i V_i\right)_2 - \left(\sum_i V_i\right)_1 \right] \text{ ——— (iii)}$$

আবার,

$$\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \int_1^2 F_{ji} \cdot dr_i = \sum_{i \neq j} \int_1^2 \left[F_{ij} \cdot dr_i - F_{ij} \cdot dr_j \right]$$

$$= \sum \int_1^2 F_{ij} \cdot dr_{ij} \text{ ——— (iv)}$$

যখন, $r_{ij} = r_i - r_j$ । এখন V_{ij} নির্ভর করে r_i ও r_j উভয়ের উপর । কাজেই

$$dV_{ij} = \frac{\delta V_{ij}}{\delta r_i} \cdot dr_i + \frac{\delta V_{ij}}{\delta r_j} \cdot dr_j$$

$$= (\nabla_i V_{ij}) \cdot dr_i + (\nabla_j V_{ij}) \cdot dr_j$$

$$= -\left[F_{ij} \cdot dr_i + F_{ji} \cdot dr_j\right]$$

$$= -F_{ij} \cdot dr_{ij}$$

এখন (iv) নং হতে পাই,

$$\sum_{i,j} \int_1^2 F_{ij} \cdot dr_i = -\sum_{i \neq j} \int_1^2 dV_{ij}$$

$$= -\left[\sum_{i \neq j} V_{ij}\right]_1^2 \quad \text{——— (v)}$$

এখানে, $V = \sum_i V_i + \sum_{i \neq j} V_{ij}$ বিবেচনা করে সমীকরণ (iii) ও (v) হতে সিদ্ধান্ত দেওয়া যায় যে, সিস্টেমের উপর সম্পাদিত মোট কার্যের পরিমাণ,

$$W_{12} = -\left[V\right]_1^2 = V_1 - V_2 \quad \text{——— (vi)}$$

(i) ও (vi) নং সমীকরণ হতে পাই,

$$T_2 - T_1 = V_1 - V_2$$

$$\Rightarrow T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

বা সাধারণভাবে $T + V =$ ধ্রুবক

অর্থাৎ ব্যবস্থার মোট শক্তি সময়ের সাপেক্ষে অপরিবর্তিত থাকে যেটি শক্তির সংরক্ষণ সূত্র ।

প্র-10: ডি, অ্যালেমবার্টের নীতি বর্ণনা কর এবং নীতিটি প্রতিষ্ঠিত কর।

DU-2017, 2020, 2021, 2022,

সমাধান: কোনটি সিস্টেমের অপসৃত সরণ বিবেচনা করা যাক এবং ধরা যাক যে ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র পরিবর্তন δr_i সিস্টেমের উপর কোন মুহূর্তে আরোপিত বল এবং অবরোধের শর্তের সাথে সংগতিপূর্ণ হবে। অবরোধের শর্ত সমীঃ সংখ্যা k হলে N সংখ্যক কণা সমন্বয়ে গঠিত সিস্টেমের স্বাধীনতার মাত্রা N না হয়ে (3N-k) হয়। অবরোধের সমীকরণগুলো

$$f_k(r_1, r_2 --- r_N, t) = 0 \quad \text{(i)}$$

সিস্টেমের উপর বলের আবির্ভাব ঘটায় যার ফলে এই সমীকরণগুলো স্বাধীন করাও নিশ্চিত হয়। এভাবে উদ্ভূত বলসমূহকে F_i' বলা হয় এবং F_i বলা হয়। অতএব নিউটনের গতিসূত্রকে লিখা যায়,

$$m_i \ddot{r}_i = F_i + F_i' \quad \text{(ii)}$$

এই সমীকরণের অজ্ঞাত রাশিগুলো হলো r_i ও F_i', অর্থাৎ মোট 6N সংখ্যক রাশি। (r_i-এর N সংখ্যক অবস্থান ভেক্টরের প্রত্যেকের তিনটি করে 3N যোগ N সংখ্যক F_i' এর জন্য এর জন্য 3N)। কিন্তু আমাদের আছে 3N সংখ্যক নিউটনীয় গতির সমীকরণ এবং k সংখ্যক অবরোধের সমীকরণ। সুতরাং অজ্ঞাত রাশিগুলোর মান নির্ধারণের জন্য আরও (3N-k) সংখ্যক সমীকরণের প্রয়োজন হয়। এই সমীকরণসমূহ ডি-অ্যালেমবার্টের নীতি থেকে পাওয়া যায়। এই নীতি অনুসারে,

কোন সিস্টেমের উপর সক্রিয় অবরোধজনিত বলের দ্বারা সম্পন্ন অপসৃত কাজের পরিমাণ শূন্য। গাণিতিকভাবে,

$$\sum_i F_i' \cdot \delta r_i = 0 \quad \text{(iii)}$$

প্রমাণ: ডি-অ্যালেমবার্টের নীতি প্রমাণের জন্য দুটি বস্তুকণা সমন্বয়ে গঠিত সিস্টেম বিবেচনা করা যাক। নির্দেশের সূত্রানুসারে, এই কণাদ্বয়ের উপর অবরোধজনিত বল F_1' ও F_2' পরস্পরের সমান ও বিপরীতমুখি হবে।

এখন দৃঢ়ীকৃত বন্ধনের ক্ষেত্রে আমরা লিখতে পারি,

$$F_1' = -F_2' = -k(r_1 - r_2) \quad \text{(i)}$$

এখানে, অবরোধের সমীকরণ হলো:

$$r_{12}^2 = (r_1 - r_2)\cdot(r_1 - r_2) = c^2 \text{ (ধ্রুবক)}$$

এই অবরোধ লঙ্ঘন করে না এমন অসদৃশ সরণ δr_1 ও δr_2 অবশ্যই নিচের সমীকরণকে সিদ্ধ করবে;

$$(r_1 - r_2)\cdot(\delta r_1 - \delta r_2) = 0 \quad \text{(ii)}$$

(বিন্যাস পরিবর্তনজনিত সরণ অবস্থান ভেক্টরের সমান্তরালে নয়) অতএব, অবরোধজনিত বলের দ্বারা সম্পন্ন অসদৃশ কাজ,

$$\delta W = F_1'\cdot\delta r_1 + F_2'\cdot\delta r_2$$

এখানে (i) নং সমীকরণ অনুসরণ করে পাই,

$$\delta W = -k(r_1 - r_2)\cdot\delta r_1 + k(r_1 - r_2)\cdot\delta r_2$$

$$= -k(r_1 - r_2)\cdot(\delta r_1 - \delta r_2)$$

$$= 0$$

[সমী (ii) ব্যবহার করে]

∴ ডি'অ্যালেমবার্টের নীতি প্রমাণিত হলো।

~~অতএব, $2\mathcal{F}$ ঘর্ষণ বলের দরুন শক্তির অপচয়ের হার নির্দেশ করে।~~

~~এখন ঘর্ষণ বলের কারণে আবদ্ধহীন বলের উপাংশ,~~

$$\cancel{Q_j = \sum_i F_{if}\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q_j} = -\sum \nabla_v \mathcal{F}\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q_j} = -\sum \nabla_v \mathcal{F}\cdot\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_j}}$$

$$\cancel{\Rightarrow Q_j = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j}}$$

~~সুতরাং ল্যাগ্রাঞ্জের সমীকরণ দাঁড়ায়,~~

$$\cancel{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j} = 0}$$

~~ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।~~

প্র-11: ডি-অ্যালেমবার্টের নীতি থেকে ল্যাগ্রাঞ্জের গতির সমীকরণ বের কর।

DU-2018, 2020,

সমাধান

ডি-অ্যালেমবার্টের নীতি থেকে পাই,

$$\sum_i (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i)\,\delta\vec{r}_i = 0$$

$$\Rightarrow \sum_i \vec{F}_i\,\delta\vec{r}_i = \sum_i \dot{\vec{p}}_i\,\delta\vec{r}_i \text{ —— (i)}$$

আবার i তম কণার অবস্থান ভেক্টর $\vec{r}_i$ এবং সাধারণ স্থানাঙ্ক q_j হলে

তাহলে, $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_j, t)$ —— (a)

কণাটির অসদ্ভূত সরণ হবে $\delta r_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\cdot \delta q_j$ —— (b)

(a) নং সমীকরণকে t এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\dot{\vec{r}}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\cdot\frac{dt}{dt}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\cdot\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \quad \text{——— (c)}$$

সমীকরণ (c) হতে q_j এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করি

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad \text{——— (d)}$$

এখন,

$$\sum_i \dot{\vec{p}}_i\cdot\delta\vec{r}_i = \sum_i m_i\ddot{\vec{r}}_i \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\,\delta q_j$$

$$= \sum_i\sum_j m_i \frac{d\dot{\vec{r}}_i}{dt}\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\,\delta q_j$$

$$= \sum_i\sum_j m_i\left[\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}_i\,\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) - \dot{\vec{r}}_i\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta \vec{r}_i}{\delta q_j}\right)\right]\delta q_j$$

$$= \sum_i\sum_j m_i\left[\frac{d}{dt}\,\dot{\vec{r}}_i\,\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} - \dot{\vec{r}}_i\,\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j}\right]\delta q_j$$

$$= \sum_i\sum_j m_i\left[\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{1}{2}\dot{\vec{r}}_i^{\,2}\right)\right\} - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{1}{2}\dot{\vec{r}}_i^{\,2}\right)\right]\delta q_j$$

$$= \sum_j\left[\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{1}{2}m_i\dot{\vec{r}}_i^{\,2}\right)\right\} - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{1}{2}m_i\dot{\vec{r}}_i^{\,2}\right)\right]\delta q_j$$

$$= \sum_j\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}\right]\delta q_j \quad \text{——— (iii)}$$

যেখানে $\boxed{T = \frac{1}{2}\cdot m_i\dot{\vec{r}}_i^{\,2}}$

আবার, সংরক্ষণশীল বলের ক্ষেত্রে, $\vec{F}_i = -\nabla_i V = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i}$

$$\Rightarrow \sum_i \vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i = \sum_i -\frac{\delta V}{\delta \vec{r}_i}\cdot\sum_j\frac{\delta \vec{r}_i}{\delta q_j}\cdot\delta q_j$$

$$\sum_i \vec{F_i} \cdot \delta\vec{r_i} = \sum_j -\frac{\delta V}{\delta q_j} \cdot \delta q_j \text{ ——— (iii)}$$

সমীকরণ (i) ও (ii) ও (iii) হতে পাই,

$$\sum_j -\frac{\delta V}{\partial q_j} \cdot \delta q_j = \sum_j \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}\right] \delta q_j$$

$$\Rightarrow -\frac{\delta V}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}(T - V) = 0$$

বিভব শক্তি V আবার বেগ $\dot{q}_j$ এর উপর নির্ভর করে না।

সুতরাং, $\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(T-V) - \frac{\partial}{\partial q_j}(T-V) = 0$

আবার ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান হলো : $L = T - V$

তাহলে, $\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0}$

ইহাই হলো ল্যাগ্রাঞ্জের গতির সমীকরণ।

9n: দৃঢ় বস্তুর সংজ্ঞা দাও? → DU-2017

= যে সকল বস্তুর আয়তন বা আকারে বল প্রয়োগ করে পরিবর্তন করা যায় না, তাদেরকে দৃঢ় বস্তু বলে।

সাধারন বিষয়

* $\vec{v} = \frac{d}{dt} \cdot \vec{x} = \dot{\vec{x}}$ অর্থাৎ $\vec{v} = \dot{\vec{x}}$ একই কথা।

* $\vec{a} = \frac{d}{dt} \vec{v} = \frac{d}{dt} \cdot \left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right) = \frac{d}{dt} \dot{\vec{x}} = \ddot{\vec{x}}$ অর্থাৎ $\vec{a} = \ddot{\vec{x}}$ একই কথা।

*** রৈখিক ভরবেগের সংরক্ষন সূত্র:- নিউটনের ২য় সূত্র থেকে

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{F_i} + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \vec{F_{ij}} = \dot{\vec{p}}$$

$$\Rightarrow \vec{F_i} = \dot{\vec{p}}$$

সূত্রানুসারে, $\vec{F_i} = \dot{\vec{p}}$

বাহ্যিক বল $\vec{F_i} = 0$ হয় তাহলে

$$\dot{\vec{p}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \int \frac{d\vec{p}}{dt} dt = \text{ধ্রুবক} \quad \left[\text{সমাকলন করে}\right]$$

$$\Rightarrow \vec{p} = \text{ধ্রুবক}$$

*** কৌনিক ভরবেগের সংরক্ষন সূত্র:- → DU-2018

কৌনিক ভরবেগের সংজ্ঞানুসারে পাই, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ —— (i)

আবার বাহ্যিক বল F ক্রিয়া করলে বলের ভ্রামক বা টর্ক τ হবে,

$$\tau = \vec{r} \times \vec{F} \quad \text{—— (ii)}$$

$\vec{L}$ = কৌনিক ভরবেগ

$\vec{r}$ = কনার অবস্থান ভেক্টর

$\vec{p}$ = রৈখিক ভরবেগ

$\vec{F}$ = বাহ্যিক বল

τ = বলের ভ্রামক

সমীকরণ (i) কে ব্যবহার করে পাই,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p})$$

$$= \frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p} + \vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}$$

[v = রৈখিক বেগ
m = বস্তুকণার ভর]

$$= \vec{v}\times(m\vec{v}) + \vec{r}\times\dot{\vec{p}}$$

$$= m(\vec{v}\times\vec{v}) + \vec{r}\times\dot{\vec{p}} \quad [\tau = \vec{r}\times\dot{\vec{p}}]$$

$$= m\cdot 0 + \tau$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \tau$$

যদি বাহ্যিক টর্ক ক্রিয়া না করে অর্থাৎ $\tau = 0$ হয় তাহলে,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \int \frac{d\vec{L}}{dt}\,dt = \text{ধ্রুবক}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{L} = \text{ধ্রুবক}}$$

9n: দেখাও যে একটি দৃঢ় বস্তুর স্বাধীনতার মাত্রার সংখ্যা ছয়?

DU - 2017,

সমাধান.

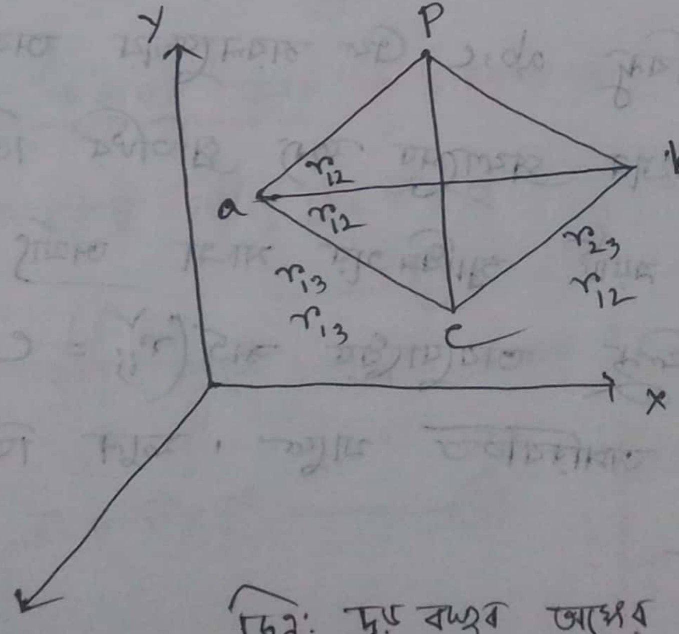
ধরা যাক তিনটি বিন্দু a, b, c যেগুলো সরলরেখায় অবস্থিত নয়। এখন তিনটি বিন্দুর অবস্থান প্রকাশের জন্য প্রতিটির তিনটি করে স্বাধীনতার মাত্রা মিলে মোট নয়টি স্বাধীনতার মাত্রা অর্থাৎ নয়টি স্বতন্ত্র স্থানাঙ্কের প্রয়োজন হয়। কিন্তু অবরোধের শর্ত ($r_{ij}^2 = c_{ij}$) অনুসারে কণাগুলোর পারস্পরিক দূরত্ব অপরিবর্তিত থাকে। ফলে তিনটি অবরোধের জন্য সমীকরণ হবে :-

$$r_{12}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = \text{ধ্রুবক}$$

$$r_{23}^2 = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 = \text{ধ্রুবক}$$

$$r_{13}^2 = (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2 = \text{ধ্রুবক}$$

অতএব সিস্টেমের স্বাধিনতার মাত্রা দাঁড়ায় 9 − 3 = 6 । অন্য একটি কনা S বিবেচনা করি। যার অবস্থান নির্দেশের জন্য তিনটি স্বতন্ত্র স্থানাঙ্কের প্রয়োজন হয়, কিন্তু এক্ষেত্রেও তিনটি অবরোধের সমীকরন পাওয়া যাবে সুতরাং S কনার তিনটি স্বতন্ত্র স্থানাঙ্ক হতে তিনটি অবরোধের সমীকরন বাদ দিলে এর স্বাধীনতার মাত্রা শূন্য হয়ে যায়। সুতরাং a, b, c দ্বারা নির্দেশিত বিন্দু ভিন্ন অন্য যে কোন বিন্দুকে দৃঢ় বস্তুর বিন্যাস বিবেচনা করলে এর জন্য কোন স্বাধিনতার মাত্রা যুক্ত করতে হবে না। অতএব এ থেকে বুঝায় যে, দৃঢ় বস্তুর গতি বর্ননার জন্য ছয়টি স্বতন্ত্র স্বাধিনতার মাত্রা বা স্থানাঙ্কের প্রয়োজন হয়।



চিত্র: দৃঢ় বস্তুর অংশের বিন্যাস

প্রঃ প্রতিসম ল্যাটিস কাকে বলে? DU- 2018

=

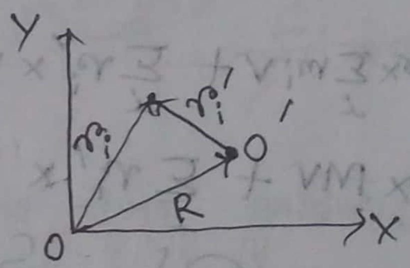
প্রঃ দেখাও যে কোন বিন্দুতে সিস্টেমের মোট কৌণিক ভরবেগ হলো ভরকেন্দ্রের গতির কৌণিক ভরবেগ এবং ভরকেন্দ্রের সাপেক্ষে গতির কৌণিক ভরবেগের যোগফলের সমান? DU- 2021, 2022

সমাধান

প্রসঙ্গ কাঠামোর মূল বিন্দুর O আপেক্ষে কোন কণা সিস্টেমের কৌণিক ভরবেগের দুটি অংশের সমষ্টি রূপে বিবেচনা করা যায়।

(i) সিস্টেমের কণাসমূহের সমস্ত ভর ভরকেন্দ্রে বিবেচনা করে প্রাপ্ত কৌণিক ভরবেগ।

(ii) ভরকেন্দ্রের সাপেক্ষে গতির জন্য প্রাপ্ত কৌণিক ভরবেগ।



ধরা যাক প্রসঙ্গ কাঠামোর মূল বিন্দুর O সাপেক্ষে ভরকেন্দ্রের অবস্থান ভেক্টর R এবং বেগ $V = \frac{dR}{dt} = \dot{R}$ এবং ভরকেন্দ্র O' এর সাপেক্ষে i তম কণার অবস্থান ভেক্টর r_i' এবং বেগ v_i'। তাহলে মূলবিন্দু O এর সাপেক্ষে i-তম কণার

অবস্থান ও বেগ হবে,

$$r_i = r_i' + R \quad \text{—— (i)}$$

$$v_i = v_i' + v \quad \text{—— (ii)}$$

এখন কৌণিক ভরবেগ,

$$L = \sum_i p_i \times r_i$$

$$= \sum_i m_i v_i \times r_i$$

$$= \sum_i m_i (r_i' + R) \times (v_i' + v)$$

$$= \left(\sum_i m_i r_i'\right) \times v_i' + \left(\sum_i m_i r_i'\right) \times v + \sum_i (R \times m_i v) + \sum_i m_i R \times v_i'$$

$$\Rightarrow L = \sum_i (R \times m_i v) + \sum_i r_i' \times m_i v_i' + \left(\sum_i m_i r_i'\right) \times v + R \times \frac{d}{dt} \sum m_i r_i' \quad \text{—— (iii)}$$

এখন, $\sum_i m_i r_i' = \sum_i m_i (r_i - R)$ [চিত্র হতে] $\left[\frac{d}{dt} r_i' = v_i'\right]$

এবং ভরকেন্দ্রের সংজ্ঞানুসারে,

$$\sum_i m_i r_i' = MR - MR = 0$$

এখন (iii) নং এর শেষের দুইটি পদ শূন্য হবে, ~~তাহলে~~

$$L = \sum_i (R \times m_i v) + \sum_i r_i' \times m_i v_i'$$

$$= R \times \sum_i m_i v + \sum_i r_i' \times m_i v_i'$$

$$\Rightarrow L = R \times Mv + \sum_i r_i' \times p_i' \quad \text{—— (iv)}$$

এই সমীকরণ নির্দেশ করে যে সিস্টেমের কৌণিক ভরবেগ ভরকেন্দ্রের কৌণিক ভরবেগ এবং ভরকেন্দ্রের সাপেক্ষে কৌণিক ভরবেগের সমষ্টির সমান।

যদি ভরকেন্দ্র স্থির থাকে অথবা R এর সমানুপাতে /গতিশীল হয় তাহলে (iv) নং সমীকরণ কৌণিক ভরবেগ প্রসঙ্গ বিন্দুর উপর

নির্ভর করবে না ভরকেন্দ্রের অবস্থানের উপর নির্ভর করবে। সুতরাং ব্যবস্থার কৌণিক ভরবেগ হবে,

$$L' = \sum_i r_i' \times P_i'$$

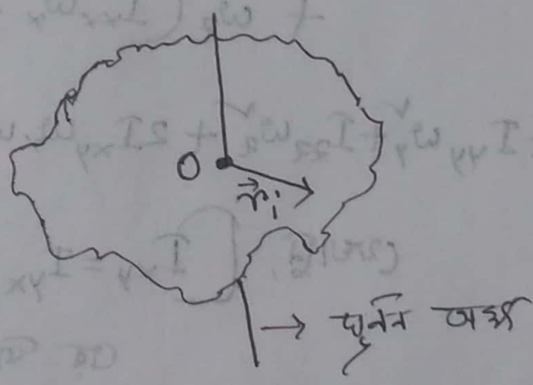
৭n: দেখাও যে, একটি প্রান্ত দৃঢ়ভাবে আবদ্ধ একটি কঠিন বস্তুর কৌণিক বেগ $\vec{\omega}$ এবং কৌণিক ভরবেগ $\vec{L}$ হলে এর গতিশক্তি $T = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{L}$.

DU = 2017

সমাধান

ধরা যাক, একটি দৃঢ় বস্তুর কোন স্থির বিন্দু 0 হতে i তম কনার অবস্থান ভেক্টর r_i বিবেচনা করি। বস্তুটি 0 বিন্দু দিয়ে অতিক্রান্ত অক্ষের সাপেক্ষে ঘুরছে। অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর $\hat{n}$। তাহলে কনা সিস্টেমের গতিশক্তি হবে,

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 \quad \text{——— (i)}$$



এখানে বস্তুটি অসংখ্য কনার উপর সমন্বিতকরণ করা হয়েছে। যেখানে v_i রৈখিক বেগ। এখন, $\vec{v}_i = \vec{\omega}\times\vec{r}_i$

(i) নং হতে পাই, $T = \frac{1}{2}\sum m_i \, (v_i) \, v_i$

$$= \frac{1}{2}\sum m_i \vec{v}_i\cdot\vec{v}_i$$

CamScanner

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \vec{v}_i \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i m_i \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_i \times \vec{v}_i)$$

$$= \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i)$$

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \vec{L} \quad \text{——— (ii)}$$

যেখানে, o বিন্দুর সাপেক্ষে বস্তুর কৌণিক ভরবেগ $L = \sum m_i (r_i \times v_i)$

এখন, ঘূর্ণন গতিশক্তি T কে জড় টেন্সর ভ্রামকের উপাংশ ও জড়তার প্রধান ভ্রামকের উপাংশের মাধ্যমে প্রকাশ করলে। (ii) নং হতে পাই,

$$T = \frac{1}{2}\left[\omega_x L_x + \omega_y L_y + \omega_z L_z\right]$$

$$T = \frac{1}{2}\Big[\omega_x (I_{xx}\omega + I_{yy}\omega_y + I_{zz}\omega_z) + \omega_y (I_{xx}\omega_x + I_{yy}\omega + I_{zz}\omega_z) + \omega_z (I_{xx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{zz}\omega)\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\left[I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2 + 2I_{xy}\omega_x\omega_y + 2I_{yz}\omega_y\omega_z + 2I_{zx}\omega_z\omega_x\right]$$

যেখানে, [$I_{xy} = I_{yx}$ এবং জড় টেন্সর I ও ω এর জন্য $L = I\omega$]

$$\boxed{\Rightarrow T = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \vec{L}}$$

→ যেখানে, দৃঢ় বস্তুর প্রধান অক্ষের সাপেক্ষে কৌণিক ভরবেগ L- কে, $L = I_1\omega_x\hat{i} + I_2\omega_y\hat{j} + I_3\omega_z\hat{k}$ ব্যবহার করা হয়েছে।

chapter-2

Qn:1:- অ্যাটউড যন্ত্র কি? DU-2017-

= দুটি ভিন্ন ভরের বস্তুকে ভরহীন তারের দুটি প্রান্তে যুক্ত করে কোন মসৃন পুলির উপর দিয়ে ঝুলিয়ে দিয়ে যদি ভরদ্বয় অবাধে যদি গতি সম্পাদন করাতে পারে তবে উক্ত ব্যবস্থাকে অ্যাটউড যন্ত্র বলে।

Qn:2:- যৌগিক দোলক কাকে বলে?

= কোন দৃঢ় বস্তু অনুভূমিক অক্ষের সাপেক্ষে উলম্ব তলে দোলন সম্পন্ন করলে তাকে যৌগিক দোলক বলে।

Qn-3:- অয়লারের সমীকরণটি লিখ?

$$= \frac{\delta f}{\delta y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\delta f}{\delta y}\right) = 0$$

Qn-4:- হ্যামিল্টনের নীতি বিবৃত কর? DU-2021, 2020,

= কোন গতিময় সিস্টেমের সম্ভাব্য পথসমূহের মধ্যে যে পথটি বাস্তবিকই অনুসৃত হয় তার জন্য ল্যাগ্রাঞ্জ অপেক্ষকের সময়ের উপর সমাকলনের মান অবিনিষ্ঠ হয়।

Qn-5:- হ্যামিল্টনের নীতির গানিতিক সমীকরণটি লিখ?

$$= \delta \int_{1}^{2} L\,dt = 0$$

Qn-6:- চক্রবদ্ধ বা উপেক্ষণীয় স্থানাঙ্ক কাকে বলে?

= কোন স্থানাঙ্ক ল্যাগ্রাঞ্জ অপেক্ষকে অন্তর্ভুক্ত না থাকলে তাকে চক্রবদ্ধ স্থানাঙ্ক বা অগ্রাহ্য স্থানাঙ্ক বলে। যদি কোন নির্দিষ্ট স্থানাঙ্ক q_k ল্যাগ্রাঞ্জিয়ানে অনুপস্থিত থাকে তাহলে অবশ্যই $\frac{\delta L}{\delta q_k} = 0$ হবে এবং q_k কে বলা হবে চক্রবদ্ধ স্থানাঙ্ক বা উপেক্ষণীয় স্থানাঙ্ক।

প্রশ্ন: হ্যামিল্টনের পরিবর্তনশীল নীতিটি ব্যাখ্যা কর।

সমাধান

উত্তর: মূল বইয়ের ৮০ পৃষ্ঠা।

প্রশ্ন: হ্যামিল্টনের পরিবর্তনশীল নীতি থেকে ল্যাগ্রাঞ্জের গতির সমীকরণ প্রতিপাদন কর।

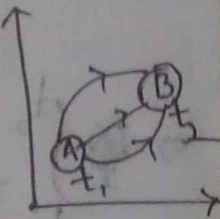
সমাধান

কোনো সংরক্ষণশীল সিস্টেমের জন্য হ্যামিল্টনের পরিবর্তনশীল নীতিটি হলো:- সময় t_1 থেকে t_2 এ সিস্টেমটির গতি এমন হবে যায় যেন রেখা সমাকলন :-

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt$$

এর মান হবে Exterme (সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন) যেখানে $L=T-V$ হলো সিস্টেমের জন্য ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান। অর্থাৎ

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L\,dT = 0 \quad \text{—— (i)}$$ হবে।



এখন আমরা এই হ্যামিল্টনের পরিবর্তনশীল নীতি ব্যবহার করে ল্যাগ্রাঞ্জের গতির সমীকরণ বের করব।

~~সর্বসমীকরণ ব্যবহার করে আমরা (i) থেকে লিখতে পারি,~~

$$\cancel{\sum_j \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j \right) dt = 0} \quad \text{—— (ii)}$$

~~যেখানে,~~ $\cancel{T = T(q_j, \dot{q}_j)}$

অতএব, $\cancel{\delta T = \sum_j \left(\frac{\partial T}{\partial q_j}\delta q_j + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j \right)}$

বিঃদ্রঃ

এখন, L = ল্যাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক হলো $L = T - V$

$$L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$$

অবাসারি পরিবর্তন রীতি অনুসারে,

$$\sum_i \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\cdot \delta \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}\cdot \delta t \right) dt = 0$$

$$\Rightarrow \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i \right) dt = 0$$

[যেখানে, $\frac{\partial L}{\partial t}\cdot \delta t = 0$ হয়]

$$\Rightarrow \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i \, dt + \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\cdot \delta \dot{q}_i \, dt = 0$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i \, dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\int \delta \dot{q}_i \, dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \int \delta \dot{q}_i \, dt = 0$$

[$\int uv\,dx$ এর সূত্র ব্যবহার করে]

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i \, dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i \, dt = 0$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \right] \delta q_i \, dt = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

ইহাই নির্ণেয় ল্যাগ্রাঞ্জের সমীকরণ।

CamScanner

7m: ডি' অ্যালেমবার্টের নীতি থেকে হ্যামিল্টনের নীতি প্রতিপাদন কর?

সমাধান

ডি' অ্যালেমবার্টের নীতি হতে আমরা জানি,

$$\sum_i (\vec{F}_i - \dot{\vec{P}}_i) \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

$$\Rightarrow \sum_i \dot{\vec{P}}_i \, \delta\vec{r}_i = \sum_i \vec{F}_i \, \delta\vec{r}_i \quad \text{------ (i)}$$

এখানে, $\dot{\vec{P}}_i \, \delta\vec{r}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta\vec{r}_i$

$$= \frac{d}{dt}\left(m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}\right) \delta\vec{r}_i$$

$$= \frac{d}{dt}\left(m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \cdot \delta\vec{r}_i\right) - m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \cdot \frac{d}{dt}(\delta\vec{r}_i)$$

এখানে, $\delta\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(\delta\vec{r}_i)$

$$\Rightarrow \dot{\vec{P}}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \frac{d}{dt}\left(m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \cdot \delta\vec{r}_i\right) - m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \, \delta\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \cdot \delta\vec{r}_i\right) - \boxed{\delta\left[\frac{1}{2} m_i \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right)^2\right]}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \cdot \delta\vec{r}_i\right) - \delta\left(\frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2\right)$$

উপরোক্ত (i) এ ব্যবহার করে পাই,

$$\sum_i \left[\frac{d}{dt}\left(m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \cdot \delta\vec{r}_i\right) - \delta\left(\frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2\right)\right] = \sum_i \vec{F}_i \, \delta\vec{r}_i$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\sum_i \left(m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}\right) \cdot \delta\vec{r}_i\right] = \delta \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 + \sum_i \vec{F}_i \, \delta\vec{r}_i$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\sum_i \left(m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}\right) \cdot \delta\vec{r}_i\right] = \delta T + \sum_i \vec{F}_i \, \delta\vec{r}_i \quad \text{------ (ii)}$$

যেখানে, $\boxed{\delta T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2}$

কিন্তু সংরক্ষণশীল সিস্টেমের জন্য,

$$\sum_i \vec{F_i}\cdot\delta\vec{r_i} = -\sum \vec{\nabla}V\cdot\delta\vec{r_i}$$

$$= -\delta V$$

অতএব, (ii)নং হতে পাই,

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_i \left(m_i \frac{d\vec{r_i}}{dt}\right)\cdot\delta\vec{r_i}\right] = \delta T - \delta V$$

$$= \delta(T-V) \quad \text{——— (iii)}$$

এখন (iii)নং এর উভয়দিকে t_1 হতে t_2 পর্যন্ত সমাকলন করে পাই,

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left[\sum_i \left(m_i \frac{d\vec{r_i}}{dt}\right)\cdot\delta\vec{r_i}\right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta(T-V)\,dt$$

$$\Rightarrow \left[\sum_i \left(m_i \frac{d\vec{r_i}}{dt}\right)\cdot\delta\vec{r_i}\right]_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \delta(T-V)\,dt \quad \text{——— (iv)}$$

প্রান্তবিন্দু t_1 এবং t_2 এ $\delta\vec{r_i} = 0$ তাহলে (iv) নং হতে পাই,

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \delta(T-V)\,dt = 0$$

অর্থাৎ $\delta\int_{t_1}^{t_2} (T-V)\,dt = 0$; এখানে, $L = T-V$ হলো ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান।

ইহাই হলো হ্যামিল্টনের নীতি।

প্রশ্নঃ- অয়লারের সমীকরণ ব্যবহার করে প্রমাণ কর যে দুটি বিন্দুর মধ্যে ন্যূনতম দূরত্ব একটি সরলরেখা?

সমাধান

XY সমতলে একটি পথের একটি ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র দৈর্ঘ্য $d\vec{s}$ বিবেচনা করি

এখানে, $d\vec{s} = \hat{i}dx + \hat{j}dy$

$$\Rightarrow |d\vec{s}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

$$\Rightarrow ds = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$= dx\sqrt{1+\dot{y}^2}$$

এখন xy তলের উপর 1 থেকে 2 এর মধ্যেকার রেখার মোট দূরত্ব

$$I = \int_1^2 ds$$

$$= \int_1^2 \sqrt{1+\dot{y}^2}\, dx$$

$$= \int_1^2 f\, dx$$ [যেখানে প্রযতি নির্দেশকের ফাংশন হবে $f = \sqrt{1+\dot{y}^2}$] —— (i)

অয়লার - ল্যাগ্রাঞ্জ গতির সমীকরণ থেকে আমরা জানি,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{—— (ii)}$$

(i) নং হতে পাই, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ এবং $\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \frac{1}{2}\times 2\dot{y}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}$

$$= \frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}$$

অতএব (2) নং এ ব্যবহার করে পাই,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}} = A$$ এখানে A একটি ধ্রুবক

$$\Rightarrow \frac{\dot{y}^2}{1+\dot{y}^2} = A^2$$

$$\Rightarrow \dot{y}^2(1-A^2) = A^2$$

$$\Rightarrow \dot{y}^2 = \frac{A^2}{1-A^2}$$

$$\Rightarrow \dot{y}^2 = \frac{A^2}{1-A^2}$$

$$\Rightarrow \dot{y} = \sqrt{\frac{A^2}{1-A^2}}$$

$$\Rightarrow \dot{y} = m \qquad \left[\text{যেখানে, ধ্রুবক } m = \sqrt{\frac{A^2}{1-A^2}}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = m$$

$$\Rightarrow dy = m\,dx$$

$$\Rightarrow \int dy = \int m\,dx$$

$$\Rightarrow y = mx + c$$

যাহা একটি সরলরেখার সমীকরণ।

অতএব একটি সমতলে দুটি বিন্দুর মধ্যেকার সর্বনিম্ন দূরত্ব হলো একটি সরলরেখা।

প্রশ্ন: দ্বি-দোলকের জন্য ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান এবং গতির সমীকরণগুলো প্রতিপাদন কর?

সমাধান

chapter-4

Qn: হ্যামিল্টনিয়ান কী? (DU-2017)

= একটি অপারেটর $H(q,p,t)$ কে নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত করা যায় -

$$H(q,p,t) = q_i p_i - L(q,\dot{q},t)$$

এখানে H কে হ্যামিল্টনিয়ান বলে।

Qn: পয়সন বন্ধনীর সংজ্ঞা দাও? (DU-2017)

= হ্যামিল্টনের গতির আইনানুগ সমীকরণসমূহ ব্যবহার করে পাই,

$$\frac{dF}{dt} = \sum_i \left[\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial H}{\partial q_i}\right] + \frac{\partial F}{\partial t}$$

এ সমীকরণের বন্ধনীযুক্ত পদকে H এর সাথে F এর পয়সন বন্ধনী বলে। সাধারণভাবে যে কোন দুটি গতিক্রিয়ার চলক X ও Y এর পয়সন বন্ধনীর সংজ্ঞা হলো:

$$[X,Y]_{qp} = \sum_i \left(\frac{\partial X}{\partial q_i}\frac{\partial Y}{\partial p_i} - \frac{\partial X}{\partial p_i}\frac{\partial Y}{\partial q_i}\right)$$

Qn: দশা স্থান কী? (DU-17

= বিন্যাস স্থানের প্রতিটি বিন্দু সিস্টেমের কণাগুলোর অবস্থান নির্দেশ করে এবং ভরবেগ স্থানের প্রতিটি বিন্দু সিস্টেমের কণাগুলোর গতির অবস্থান নির্দেশ করে। সুতরাং q_i ও P_i দিয়ে সংজ্ঞায়িত 2n মাত্রার স্থান একইভাবে সিস্টেমের অবস্থান ও ভরবেগ নির্দেশ করে। 2n মাত্রার এরূপ স্থানকে সকল বস্তুকণার অবস্থান ও ভরবেগ দশা স্থান বলে।

Qn: আইনানুগ রূপান্তর কি? (DU-17, 20, 21, 22)

= আইনানুগ বা ক্যানোনিক্যাল রূপান্তর হলো সেই রূপান্তর যা থেকে স্থানাঙ্ক ও ভরবেগ সম্পর্কিত তথ্য পাওয়া যায়। দশা স্থানে কোন সিস্টেম বিবেচনাধীন স্থানাঙ্ক q_i ও ভরবেগ P_i উভয়ই সুনির্দিষ্ট হয়ে যায়। সাধারণভাবে

$$Q_i = Q_i(q,p,t)$$
$$P_i = P_i(q,p,t)$$

Qn: লেজান্ড্র রূপান্তর কী? (DU-17)

= ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান রূপায়ন থেকে হ্যামিল্টনিয় রূপায়নে উত্তরণের সমস্যাটি হলো সাধারণ সমস্যা যেখানে চলকসমূহ $(q,\dot{q},t)$ থেকে (q,p,t) তে রূপান্তরিত হয়। যে প্রক্রিয়ায় চলকসমূহের এরূপ পরিবর্তন করা হয় তাকে লেজেন্ড্রে রূপান্তর বলে।

Qn: সৃজক অপেক্ষক কী? (2018, 20, 21, 22)

= F অপেক্ষকের নিম্নরূপ চারটি রূপ সম্ভব।

$F_1(q,Q,t)$, $F_2(q,P,t)$, $F_3(p,Q,t)$, $F_4(p,P,t)$

যেহেতু F পুরাতন ও নতুন স্থানাঙ্ক গুচ্ছের অপেক্ষক, তাই এটি পুরাতন থেকে নতুন স্থানাঙ্কগুচ্ছে রূপান্তরকে প্রভাবিত করতে পারে অর্থাৎ রূপান্তর সম্পর্কটি F অপেক্ষকের ধারণা থেকে প্রতিষ্ঠিত করা যেতে পারে। এ কারণে F কে সৃজন বা উৎপাদনকারি অপেক্ষক বলা হয়।

Qn: ল্যাগ্রাঞ্জ বন্ধনীর সংজ্ঞা দাও? (DU-2018, 20)

= q_i ও p_i এর ভিত্তিতে u ও v অপেক্ষকের ল্যাগ্রাঞ্জ বন্ধনীকে $(u,v)_{qp}$ লিখে প্রকাশ করা হয় এবং নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত করা হয়-

$$\{u,v\} = \sum_i \left(\frac{\delta q_i}{\delta u}\cdot\frac{\delta p_i}{\delta v} - \frac{\delta p_i}{\delta u}\cdot\frac{\delta q_i}{\delta v}\right)$$

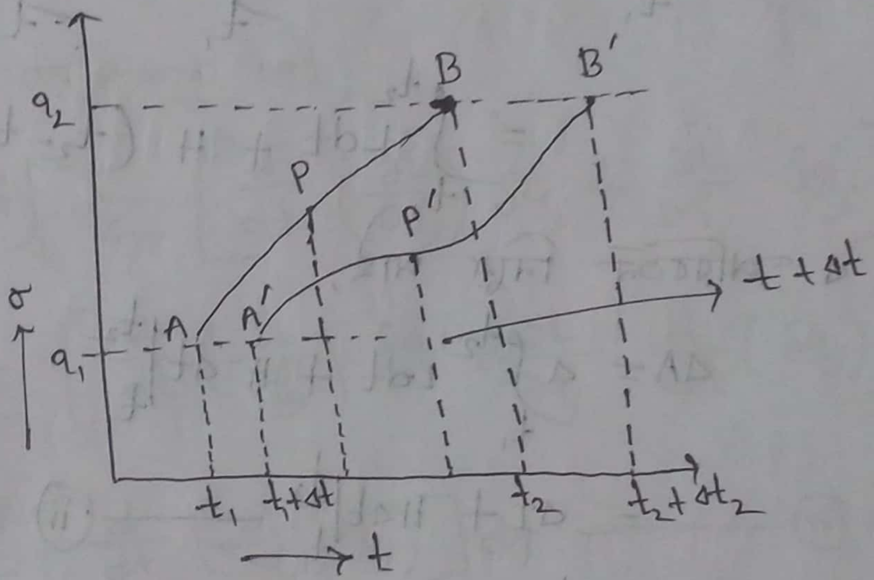
প্রঃ ন্যূনতম ক্রিয়া নীতি বিবৃত ও প্রমাণ কর? (2020, 2021)-DU-(17)

(V.V.I)

সমাধান

নীতিঃ হ্যামিল্টনের রূপায়নের সাথে সংশ্লিষ্ট গুরুত্বপূর্ণ পরিবর্তন নীতিটি হলো ন্যূনতম কার্য নীতি। এই ন্যূনতম কার্য নীতিতে একটি সিস্টেমের পথ সময় এবং অবস্থান স্থানাঙ্কের সাথে পরিবর্তিত হয়। পথের প্রান্ত বিন্দুতে অবস্থান স্থানাঙ্ক স্থির থাকে কিন্তু সময় পরিবর্তিত হয় এই ধরনের পরিবর্তন বা Variation যে নিম্নে প্রদর্শন করা হলো এবং এই পরিবর্তনকে δ এর পরিবর্তে Δ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

Fig: Δ পরিবর্তন



বল বিদ্যায় নিম্নের রাশি $A=\int_{t_1}^{t_2}\sum_j p_j\dot{q}_j\,dt$ কে এ্যাকশন বা Action বলা হয়। সেক্ষেত্রে একটি সংরক্ষণশীল সিস্টেমের বেলা ন্যূনতম ক্রিয়া নীতিটি হলো

$$\Delta\int_{t_1}^{t_2}\sum_j p_j\dot{q}_j\,dt=0$$

এখানে Δ পরিবর্তন বা Variation নির্দেশ করে।

প্রমানঃ আমরা জানি,
ক্রিয়া-বৈশিষ্ট্যের অংশটি হলোঃ

$$A = \int_{t_1}^{t_1} \sum_j p_j \dot{q}_j \, dt \quad \text{——— (i)}$$

এবং হ্যামিল্টনিয়ান,

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L$$

$$\Rightarrow \sum_j p_j \dot{q}_j = H + L$$

ইহাতে (i) নং এ ব্যবহার করে পাই,

$$A = \int_{t_1}^{t_2} (L+H)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} H dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} L dt + H (t_2 - t_1)$$

উভয়দিকে Δ পরিবর্তন নিয়ে পাই,

$$\Delta A = \Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + H \, \Delta t \Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$= \Delta I + H \Delta t \Big|_{t_1}^{t_2} \quad \text{——— (ii)}$$

[এখানে $I = \int_{t_1}^{t_2} L dt$]

আমরা জানি, $\Delta = \delta + \Delta t \frac{d}{dt}$

$$\Rightarrow \Delta I = \delta I + \Delta t \frac{dI}{dt}$$

$$= \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + \Delta t \frac{d}{dt} \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

$$\therefore \Delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + \Delta t \, L \Big|_{t_1}^{t_2} \quad \text{——— (iii)}$$

(3) নং কে (ii) নং এ ব্যবহার করে পাই,

$$\Delta A = \delta \int_{t_1}^{t_2} L\,dt + L\Delta t \Big|_{t_1}^{t_2} + H\,\Delta t \Big|_{t_1}^{t_2} \quad \text{--- (iv)}$$

এখানে,
$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L (q_j, \dot{q}_j)\,dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \cdot \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \cdot \delta \dot{q}_j \right) dt \quad \text{--- (v)}$$

ল্যাগ্রাঞ্জের গতির সমীকরণ থেকে পাই,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)$$

ইহাকে (5) এ ব্যবহার করে পাই,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right] dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) \cdot \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \cdot \frac{d}{dt}(\delta q_j) \right] dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j\right) \right] dt \quad \text{--- (vi)}$$

যেহেতু $\Delta = \delta + \Delta t \frac{d}{dt}$

$$\Rightarrow \Delta q_j = \delta q_j + \Delta t \frac{dq_j}{dt}$$

$$= \delta q_j + \Delta t\, \dot{q}_j$$

অতএব, $\delta q_j = \Delta q_j - \Delta t\, \dot{q}_j$

ইহাকে (6) এ ব্যবহার করে পাই,

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L\,dt = \int_{t_1}^{t_2}\sum_j\left[\frac{d}{dt}(\delta q_j - \Delta t\,\dot{q}_j)\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right]dt$$

$$= \sum_j\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\cdot\dot{q}_j\,\Delta t\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2}$$

প্রান্তবিন্দু t_1 এবং t_2 এ $\delta q_j = 0$ হয় তাহলে,

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L\,dt = -\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\,\Delta t\Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$= -\sum_j p_j\cdot\dot{q}_j\cdot\Delta t\Big|_{t_2}^{t_2}$$

ইহাতে (4) নং এ ব্যবহার করি,

$$\Delta A = -\sum_j p_j\dot{q}_j\,\Delta t\Big|_{t_1}^{t_2} + L\Delta t\Big|_{t_1}^{t_2} + H\Delta t\Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$= \left(H + L - \sum_j p_j\dot{q}_j\right)\Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \Delta A = 0 \qquad \left[H = \sum_j p_j\dot{q}_j - L\right]$$

অর্থাৎ, $\Delta\int_{t_1}^{t_2}\sum_j p_j\dot{q}_j\,dt = 0$

ইহাই হলো ল্যাগ্রাঞ্জের ন্যূনতম কার্য নীতি।

7nঃ পরিবর্তন নীতি থেকে হ্যামিলটনের গতির সমীকরণসমূহ প্রতিষ্ঠা কর। DU-2020

(N.N)

সমাধান

আমরা জানি, হ্যামিলটনের পরিবর্তনশীল নীতি,

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L\,dt = 0 \quad \text{(i)}$$

আমরা জানি যে, একটি সিস্টেমের হ্যামিলটনিয়ান,

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L$$

অতএব, ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান $L = \sum_j p_j \dot{q}_j - H$

ইহাকে (i) নং এ ব্যবহার করে পাই,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_j p_j \dot{q}_j - H(q_j\, p_j\, t)\right] dt = 0$$

$$\Rightarrow \delta \int_{t_1}^{t_2} \sum_j p_j \dot{q}_j\, dt - \delta \int_{t_1}^{t_2} H(q_j\, p_j\, t)\, dt = 0$$

আমরা জানি, $\delta \rightarrow d\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha}$

অতএব, $d\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{t_1}^{t_2} \sum_j p_j \dot{q}_j\, dt - d\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{t_1}^{t_2} H(q_j\, p_j\, t)\, dt = 0$

$$\Rightarrow d\alpha \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left(\frac{\partial p_j}{\partial \alpha} \dot{q}_j + p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \alpha} - \frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_j} \cdot \frac{\partial p_j}{\partial \alpha} - \frac{\partial H}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial \alpha} \right) dt = 0 \quad \text{(ii)}$$

কিন্তু $\frac{\partial t}{\partial \alpha} = 0$ যেহেতু যে কোন পথ বরাবর কনাটির চলার ~~পথ~~ সময় অভিন্ন। এবার বাম পাশের ২য় টার্মটি নিয়ে পাই,

$$\int_{t_1}^{t_2} p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \alpha}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} p_j \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_j}{\partial \alpha}\right) dt$$

$$= p_j \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_j}{\partial \alpha}\right) dt - \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{dp_j}{dt} \int \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_j}{\partial \alpha}\right) dt \right\} dt$$

$$= p_j \frac{\partial q_j}{\partial \alpha}\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_j \frac{\partial q_j}{\partial \alpha} dt$$

যেহেতু $\frac{\partial q_j}{\partial \alpha}$ প্রত্যেকটি প্রান্তবিন্দু t_1 এবং t_2 এ শূন্য। সেহেতু

$$\int_{t_1}^{t_2} p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \alpha} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_j \frac{\partial q_j}{\partial \alpha} dt$$

ইহাকে (2) নং এ ব্যবহার করে পাই,

$$d\alpha \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left[\frac{\partial p_j}{\partial \alpha} \cdot \dot{q}_j - \dot{p}_j \frac{\partial q_j}{\partial \alpha} - \frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_j} \cdot \frac{\partial p_j}{\partial \alpha} \right] dt = 0$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left[\dot{q}_j \, d\alpha \frac{\partial p_j}{\partial \alpha} - \dot{p}_j \, d\alpha \frac{\partial q_j}{\partial \alpha} - \frac{\partial H}{\partial q_j} \cdot d\alpha \frac{\partial q_j}{\partial \alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_j} d\alpha \frac{\partial p_j}{\partial \alpha} \right] dt = 0$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left[\dot{q}_j \delta p_j - \dot{p}_j \delta q_j - \frac{\partial H}{\partial q_j} \cdot \delta p_j \right] dt = 0$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left[\delta p_j \left(\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) - \delta q_j \left(\dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \right] dt = 0$$

যেহেতু p_j এবং q_j হলো অনির্ভরশীল চলক সেহেতু তাদের Variation বা পরিবর্তন δp_j এবং δq_j হলো একে অপরের উপর নির্ভর করে না। অতএব উপরের সমাকলনটির মান শূন্য হওয়ার জন্য δp_j ও δq_j এর প্রত্যেকটি সহগ আলাদাভাবে শূন্য হবে। অর্থাৎ $\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} = 0 \Rightarrow \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$,

এবং $\dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} = 0 \quad \therefore \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$

এই সমীকরণ দুটি হলো হ্যামিল্টনের আইনানুগ গতির সমীকরণ।

---------- ∝ ----------

প্রশ্নঃ ~~ন্যূনতম ক্রিয়া নীতি~~

~~ক্যানোনিক্যাল~~ র

প্রশ্নঃ দেখাও যে, ক্যানোনিক্যাল রূপান্তরে ল্যাগ্রাঞ্জ ব্রাকেট অপরিবর্তিত থাকে? (V.V.I) (DU-2020) (DU-17)

সমাধান

পয়েনক্যারের তত্ত্বের বর্ণনা অনুসারে, আমরা জানি,

$$J_1 = \iint_S \sum_i dq_i \, dp_i \text{ ———— (i)}$$

সমাকলনটি আইনানুগ রূপান্তরের অধীনে অপরিবর্তিত থাকে। দ্বি-মাত্রিক পৃষ্ঠে যে কোন বিন্দুর অবস্থানকে দুটি প্যারামিটার u ও v দ্বারা নির্দেশ করা হয়। অর্থাৎ,

$$\left.\begin{aligned} q_i &= q_i(u,v) \\ p_i &= p_i(u,v) \end{aligned}\right\} \text{ ———— (ii)}$$

(i) নং সমাকলনকে জেকোবিয়ান দ্বারা নতুন চলক (u, v)-তে রূপান্তরিত করা যায়। আমরা লিখতে পারি,

$$dq_i \, dp_i = \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u,v)} . du \, dv \text{ ———— (iii)}$$

যেখানে, জেকোবিয়ান হলো,

$$\frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial q_i}{\partial u} & \frac{\partial p_i}{\partial u} \\ \frac{\partial q_i}{\partial v} & \frac{\partial p_i}{\partial v} \end{vmatrix} \text{ ———— (iv)}$$

আবার J সমাকলন অপরিবর্তিত থাকার অর্থই হলো

$$\iint_S \sum_i dq_i \, dp_i = \iint_S \sum_i dQ_i \, dP_i \text{ ———— (v)}$$

(v) নং ও (iii) নং ব্যবহার করে পাই,

$$\iint_S \sum_i \frac{\partial(q_i, P_i)}{\partial(u,v)} du\, dv = \iint_S \sum_i \frac{\partial(Q_i, P_i)}{\partial(u,v)} du\, dv$$

উপরের সমীকরণটি অভিন্ন হবে যদি,

$$\sum_i \frac{\partial(q_i, P_i)}{\partial(u,v)} = \sum_i \frac{\partial(Q_i, P_i)}{\partial(u,v)}$$

বা, $$\sum_i \begin{vmatrix} \frac{\partial q_i}{\partial u} & \frac{\partial P_i}{\partial u} \\ \frac{\partial q_i}{\partial v} & \frac{\partial P_i}{\partial v} \end{vmatrix} = \sum_i \begin{vmatrix} \frac{\partial Q_i}{\partial u} & \frac{\partial P_i}{\partial u} \\ \frac{\partial Q_i}{\partial v} & \frac{\partial P_i}{\partial v} \end{vmatrix}$$

বা, $$\sum_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial P_i}{\partial v} - \frac{\partial q_i}{\partial v} \frac{\partial P_i}{\partial u} \right) = \sum_i \left(\frac{\partial Q_i}{\partial u} \frac{\partial P_i}{\partial v} - \frac{\partial Q_i}{\partial v} \frac{\partial P_i}{\partial u} \right)$$

অর্থাৎ, $\{u,v\}_{q,P} = \{u,v\}_{Q,P}$

অতএব, প্রমানিত হয় যে, ল্যাগ্রাঞ্জ বন্ধনী আইনানুগ রূপান্তরের অধীনে অপরিবর্তিত থাকে।

9n: লেজান্ডার রূপান্তর ব্যবহার করে হ্যামিলটনের গতির সমীকরণ প্রতিপাদন কর? (DU-2021,22)

সমাধান

মনেকরি কোনো ব্যবস্থার ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান $L(q_j, \dot{q}_j, t)$ এবং হ্যামিল্টনিয়ান $H(q_j, P_j, t)$ তাহলে এদের লেজেন্ডার রূপান্তর হবে,

$$H = \sum_j \dot{q}_j P_j - L$$

$$\Rightarrow dH = \sum_j \dot{q}_j dP_j + \sum_j P_j \cdot d\dot{q}_j - dL \quad \text{——— (i)}$$

আবার, $L = L(q_j, \dot{q}_j, t)$

$$\Rightarrow dL = \frac{\partial L}{\partial q_j} \cdot dq_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \cdot d\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad \text{——— (ii)}$$

dL এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$dH = \sum_j \dot{q}_j dp_j + \sum_j p_j d\dot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad \text{——— (iii)}$$

আবার আমরা জানি
লাগ্রাঞ্জের সমীকরণ,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

এবং আমরা জানি $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ হলে

$$\boxed{\Rightarrow \dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q_j}}$$

p এবং $\dot{p}$ এর মান (iii) নং এ বসিয়ে পাই,

$$dH = \sum_j \dot{q}_j dp_j + \sum_j \cancel{p_j d\dot{q}_j} - \dot{p} dq_j - \cancel{p_j d\dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial t} \cdot dt$$

$$\Rightarrow dH = \sum_j \dot{q}_j dp_j - \dot{p} dq_j - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad \text{——— (iv)}$$

এখানে, $H = H(q_j, p_j, t)$

$$\Rightarrow dH = \frac{\partial H}{\partial q_j} \cdot dq_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} dp_j + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad \text{——— (v)}$$

সমীকরণ (iv) ও (v) তুলনা করে পাই,

$$-\dot{p} = \frac{\partial H}{\partial q_j}$$

$$\text{বা, } \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad \text{——— (vi)}$$

$$\text{এবং } \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad \text{——— (vii)}$$

সমীকরণ (vi) ও (vii) কে হ্যামিল্টনের আইনানুগ সমীকরণ বলে।

Ans: একটি স্বাধীনতার মাত্রার একটি সিস্টেমের হ্যামিল্টনিয়ান হলো:

$$H = \frac{p^2}{2a} - bqpe^{-\alpha t} + \frac{ba}{2} q^2 e^{-\alpha t}(a + be^{-\alpha t}) + \frac{kq^2}{2}$$ (DU-2021)

যেখানে, a, b, α এবং k ধ্রুবক।

(i) হ্যামিল্টনিয়ানের আপেক্ষে ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান বের কর?

(ii) একটি সমতুল্য ল্যাগ্রাঞ্জিয়ানের বের কর যা স্পষ্টভাবে সময়ের উপর নির্ভর করে না।

(iii) দ্বিতীয় ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান আপেক্ষে হ্যামিল্টনিয়ানের কীরূপ হবে এবং এই দুই হ্যামিল্টনিয়ানের মধ্যে সম্পর্ক কি?

সমাধান:

প্রশ্ন: দেখাও যে পয়সন বন্ধনী আইনানুগ রূপান্তরের অধীনে অপরিবর্তিত থাকে। (DU-21)

V.V.I

সমাধান

এখানে প্রমাণ করতে হবে,

$$\therefore [X \cdot Y]_{q,p} = [X \cdot Y]_{Q,P} \quad \text{———} \text{(i)}$$

(i) নং এর ডানপক্ষটি নিয়ে পাই,

$$[X \cdot Y]_{Q,P} = \sum_i \left(\frac{\partial X}{\partial Q_i} \frac{\partial Y}{\partial P_i} - \frac{\partial X}{\partial P_i} \cdot \frac{\partial Y}{\partial Q_i} \right)$$

$$= \sum_{ij} \left\{ \frac{\partial X}{\partial Q_i} \left(\frac{\partial Y}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial q_j}{\partial P_i} + \frac{\partial Y}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial P_i} \right) - \frac{\partial X}{\partial P_i} \left(\frac{\partial Y}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} - \frac{\partial Y}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial Q_i} \right) \right\}$$

$$= \sum_{ij} \left(\frac{\partial X}{\partial Q_i} \cdot \frac{\partial Y}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial q_j}{\partial P_i} + \frac{\partial X}{\partial Q_i} \frac{\partial Y}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial P_i} - \frac{\partial X}{\partial P_i} \frac{\partial Y}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} - \frac{\partial X}{\partial P_i} \cdot \frac{\partial Y}{\partial p_j} \cdot \frac{\partial p_j}{\partial Q_i} \right)$$

$$= \sum_{ij} \left[\left(\frac{\partial X}{\partial Q_i} \cdot \frac{\partial Y}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial P_i} - \frac{\partial X}{\partial P_i} \frac{\partial Y}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \right) + \left(\frac{\partial X}{\partial Q_i} \cdot \frac{\partial Y}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial P_i} - \frac{\partial X}{\partial P_i} \frac{\partial Y}{\partial p_j} \cdot \frac{\partial p_j}{\partial Q_i} \right) \right]$$

$$= \sum_{ij} \left[\frac{\partial Y}{\partial q_j} \left(\frac{\partial X}{\partial Q_i} \cdot \frac{\partial q_j}{\partial P_i} - \frac{\partial X}{\partial P_i} \cdot \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \right) + \frac{\partial Y}{\partial p_j} \left(\frac{\partial X}{\partial Q_i} \cdot \frac{\partial p_j}{\partial P_i} - \frac{\partial X}{\partial P_i} \cdot \frac{\partial p_j}{\partial Q_i} \right) \right]$$

$$= \sum_j \left\{ \frac{\partial Y}{\partial q_j} [X \cdot q_j]_{Q,P} + \frac{\partial Y}{\partial p_j} [X \cdot p_j]_{Q,P} \right\} \quad \text{———} \text{(ii)}$$

সমীকরণ (ii) এর X এর স্থলে q_j এবং Y এর স্থলে X লিখে,

$[q_j, X]_{QP}$ কে লেখা যায়

$$\therefore \left[X \cdot q_j\right]_{Q.P} = -\left[q_j \cdot X\right]_{Q.P}$$

$$= -\sum_m \left\{ \frac{\partial q_j}{\partial Q_m} \cdot \frac{\partial X}{\partial P_m} - \frac{\partial q_j}{\partial P_m} \frac{\partial X}{\partial Q_m} \right\}$$

$$= -\sum_{mk} \left\{ \frac{\partial q_j}{\partial Q_m} \left(\frac{\partial X}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial q_k}{\partial P_m} + \frac{\partial X}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial p_k}{\partial P_m} \right) - \frac{\partial q_j}{\partial P_m} \left(\frac{\partial X}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial q_k}{\partial Q_m} + \frac{\partial X}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial p_k}{\partial Q_m} \right) \right\}$$

$$= -\sum_{mk} \left\{ \frac{\partial q_j}{\partial Q_m} \cdot \frac{\partial X}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial P_m} + \frac{\partial q_j}{\partial Q_m} \cdot \frac{\partial X}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial p_k}{\partial P_m} - \frac{\partial q_j}{\partial P_m} \frac{\partial X}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial q_k}{\partial Q_m} - \frac{\partial q_j}{\partial P_m} \cdot \frac{\partial X}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial p_k}{\partial Q_m} \right\}$$

$$= -\sum_{mk} \left\{ \left(\frac{\partial q_j}{\partial Q_m} \cdot \frac{\partial X}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial q_k}{\partial P_m} - \frac{\partial q_j}{\partial P_m} \cdot \frac{\partial X}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial q_k}{\partial Q_m} \right) + \left(\frac{\partial q_j}{\partial Q_m} \cdot \frac{\partial X}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial p_k}{\partial P_m} - \frac{\partial q_j}{\partial P_m} \frac{\partial X}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial p_k}{\partial Q_m} \right) \right\}$$

$$= -\sum_{mk} \left\{ \frac{\partial X}{\partial q_k} \left(\frac{\partial q_j}{\partial Q_m} \cdot \frac{\partial q_k}{\partial P_m} - \frac{\partial q_j}{\partial P_m} \cdot \frac{\partial q_k}{\partial Q_m} \right) + \frac{\partial X}{\partial p_k} \left(\frac{\partial q_j}{\partial Q_m} \cdot \frac{\partial p_k}{\partial P_m} - \frac{\partial q_j}{\partial P_m} \cdot \frac{\partial p_k}{\partial Q_m} \right) \right\}$$

$$= -\sum_{mk} \left\{ \frac{\partial X}{\partial q_k} \left[q_j \cdot q_k\right]_{Q.P} + \frac{\partial X}{\partial p_k} \left[q_j, p_k\right]_{Q.P} \right\}$$

$\left[q_j \cdot q_k\right]_{Q.P} = 0$

$\left[X \cdot X\right]_{Q.P} = 0$

$\left[q_j \cdot p_k\right]_{Q.P} = \delta_{jk}$

$$= -\sum_{mk} \frac{\partial X}{\partial p_k} \cdot \delta_{jk}$$

$$= -\sum_{k} \frac{\partial X}{\partial p_k}$$

$$\left[\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{যখন } j = k \\ 0 & \text{〃 } j \neq k \end{cases} \right]$$

$$\therefore \left[X \cdot q_j\right]_{Q.P} = -\frac{\partial X}{\partial p_j} \quad \text{———} \quad (3)$$

অনুরূপভাবে,

$$\left[X \cdot p_j\right]_{QP} = \frac{\partial X}{\partial q_j} \quad \text{———} \quad (4)$$

সমীকরণ (3) ও (5) কে (2) এ বসিয়ে পাই,

$$[X.Y]_{Q.P} = \sum_j \left\{ -\frac{\partial Y}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial X}{\partial p_j} + \frac{\partial Y}{\partial p_j} \cdot \frac{\partial X}{\partial q_j} \right\}$$

$$= \sum_j \left(\frac{\partial Y}{\partial p_j} \cdot \frac{\partial X}{\partial q_j} - \frac{\partial X}{\partial p_j} \cdot \frac{\partial Y}{\partial q_j} \right)$$

$$= \sum_j \left(\frac{\partial X}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial Y}{\partial p_j} - \frac{\partial X}{\partial p_j} \cdot \frac{\partial Y}{\partial q_j} \right)$$

$$= [X.Y]_{q.p}$$

$$\therefore [X.Y]_{Q.P} = [X.Y]_{q.p} \quad \boxed{\text{প্রমাণিত}}$$

9n: সৃজন অপেক্ষক $F_1(q, Q, t)$ এবং $F_2(q, P, t)$ এর জন্য বিধেয় রূপান্তর সমীকরণ প্রতিপাদন কর। (DU-2021)

<u>সমাধান:</u>

৭নং দেখাও যে, কোন স্থানাঙ্ক ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান চক্রবদ্ধ হলে এটি হ্যামিলটনিয়ানেও চক্রবদ্ধ হবে।? (DU-22)

সমাধান

ধরা যাক, q_i হলো চক্রবদ্ধ স্থানাঙ্ক। তাহলে এটা ল্যাগ্রাঞ্জে অপেক্ষক অনুপস্থিত থাকবে; কাজেই আমরা পাই, $\dot{P}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

$$\text{বা, } P_i = \text{ধ্রুবক}$$

যদি P_i ধ্রুবক হয়, তাহলে হ্যামিলটনের গতির সমীকরণ অনুসারে,

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0$$

এ থেকে বলা যায় যে, q_i-এর উপর H নির্ভরশীল নয় অর্থাৎ H অপেক্ষকে q_i আবির্ভূত হবে না।

অতএব, হ্যামিলটনিয়ানেও q_i চক্রবদ্ধ হবে।

যদি কোন স্থানাঙ্ক চক্রবদ্ধ হয় তাহলে তা নতুন রূপায়নে চলক সংখ্যা দুই হ্রাস করবে। ধরা যাক, q_n চক্রবদ্ধ, তাহলে P_n একটা ধ্রুবক(α) হবে। কাজেই

$$H = H(q_1, ---, q_{n-1}, P_1, ---P_{n-1}, \alpha)$$

সুতরাং $(2n-2)$ সংখ্যক চলক সংশ্লিষ্ট সমস্যা নিয়ে আমরা আলোচনা করব, যেহেতু সমাকলন ধ্রুবক α ব্যতিত q_n স্থানাঙ্কগুলো অগ্রাহ্য করে সমস্যার সমাধান করা যায়, তাই এখন স্থানাঙ্কগুলো অগ্রাহ্য স্থানাঙ্ক বলে। নিম্নের সমীকরণ হতে q_n সমূহ পাওয়া যায়:

$$\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial P_n} = \frac{\partial H}{\partial \alpha}$$

অগ্রাহ্য স্থানাঙ্ক ল্যাগ্রাঞ্জের রূপায়নে ব্যবহার করা খুব বেশি লাভজনক নয়

কারণ কোন স্থানাঙ্ক q_i ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান L-তে অনুপস্থিত থাকলে, সাধারণভাবে $\dot{q}_i$ সমূহও অনুপস্থিত রয়ে যায়। সেজন্যই সমস্যাকে অধিক চলকের জন্য বিবেচনা করতে হয়।

Ans:- উপরিউক্ত অ্যাটউড মেশিনের ~~হ্যামিল্টোনিয়ান~~ ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান লিখ এবং ~~হ্যামিল্টোনিয়ান~~ উক্ত সমীকরণের সমাধান করে ত্বরণের রাশিমালা নির্ণয় কর? DU (2022)

সমাধান

উপরিউক্ত মেশিনের ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান

$$L=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}_1^2+(m_1-m_2)g$$

এবার, আইনানুগ ভরবেগ $p_{x_1}=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}=(m_1+m_2)\dot{x}_1$

$$\Rightarrow p_{x_1}=(m_1+m_2)\dot{x}_1$$

$$\therefore \dot{x}_1=\frac{p_{x_1}}{(m_1+m_2)} \quad \text{—— (i)}$$

এবার সিস্টেমের হ্যামিল্টোনিয়ান,

$$H=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}_1^2-(m_1-m_2)gx_1+V_0 \quad \cancel{\text{—— (ii)}}$$

$$=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}_1^2\frac{p_{x_1}^2}{(m_1+m_2)^2}-(m_1-m_2)gx_1+V_0$$

$$=\frac{p_{x_1}^2}{2(m_1+m_2)}-(m_1-m_2)gx_1+V_0 \quad \text{—— (ii)}$$

হ্যামিল্টনের গতির সমীকরণ থেকে আমরা পাই,

$$\dot{x}_1=\frac{\partial H}{\partial p_{x_1}}=\frac{p_{x_1}}{(m_1+m_2)} \quad \text{—— (3)}$$

এবং $\dot{P}_{x_1} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = (m_1 - m_2)g$ —— (4)

এবার (3) নং হতে পাই,

$$\ddot{x}_1 = \frac{\dot{P}_{x_1}}{(m_1+m_2)} = \frac{(m_1-m_2)}{m_1+m_2} g$$

অতএব, $\ddot{x}_1 = \frac{(m_1-m_2)}{(m_1+m_2)} g$

ইহাই হলো সিস্টেমের গতির রাশিমালা।

প্রশ্নঃ হ্যামিল্টনের গতির সমীকরণ ব্যবহার করে কেন্দ্রীয় শক্তির অধীনে একটি কণার গতির সমীকরণ প্রতিপাদন কর? (DU - 2022)

সমাধান

যে বল সর্বদা একটি নির্দিষ্ট বিন্দু অভিমুখে ক্রিয়াশীল থাকে তাকে কেন্দ্রীয় বল বলে। এ বলের অধীনে বস্তু কণার গতি সর্বদা একটি তলে সীমাবদ্ধ থাকে, ফলে তলটির (r, θ) স্থানাঙ্কে গতি বর্ণনায় জন্য বিবেচনা করা হয়।

$\therefore$ গতিশক্তি, $T = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$

এবং বিভবশক্তি, $V = V(r)$

সুতরাং ল্যাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক,

$$L = T - V$$

বা, $L = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$

বা, $\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial}{\partial \dot{r}}\left\{\frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)\right\}$

বা, $P_r = \frac{1}{2} \cdot m \cdot 2\dot{r} + 0 - 0$

$$\Rightarrow P_r = m\dot{r}$$

$$\Rightarrow \dot{r} = \frac{P_r}{m}$$

এবং, $P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$

$$= \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}\left\{\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - v(r)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}m\cdot(0 + r^2 \cdot 2\dot{\theta}) - 0$$

$$= \frac{1}{2}m \times 2r^2\dot{\theta}$$

$$= mr^2\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \frac{P_\theta}{mr^2}$$

এখন, হ্যামিলটোনিয়ান, $H = T + V$

$$= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + v(r)$$

$$= \frac{1}{2}m\cdot\left(\frac{P_r^2}{m} + r^2 \cdot \frac{P_\theta^2}{m^2 r^4}\right) + v(r)$$

$$\Rightarrow H = \frac{P_r^2}{2m} + \frac{P_\theta^2}{2mr^2} + v(r)$$

∴ হ্যামিল্টোনিয়ান গতির সমীকরণ হবে,

$$\dot{P}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{P_r^2}{2m} + \frac{P_\theta^2}{2mr^2} + v(r)\right\}$$

$$= -\left(0 + \frac{P_\theta^2}{2m}(-2)r^{-3} + \frac{\partial v(r)}{\partial r}\right)$$

$$\therefore \dot{P}_r = \frac{P_\theta^2}{mr^3} - \frac{\partial v}{\partial r}$$

এবং, $\dot{P}_\theta = \frac{\partial H}{\partial \theta} = 0$

$$\therefore \dot{r} = \frac{\partial H}{\partial P_r} = \frac{\partial}{\partial P_r}\left\{\frac{P_r^2}{2m} + \frac{P_\theta^2}{2mr^2} + V(r)\right\}$$

$$= \frac{2P_r}{2m} + 0 + 0$$

$$\therefore \dot{r} = \frac{P_r}{m} \text{ ——— (i)}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial P_\theta} = \frac{\partial}{\partial P_\theta}\left\{\frac{P_r^2}{2m} + \frac{P_\theta^2}{2mr^2} + V(r)\right\}$$

$$= 0 + \frac{2P_\theta}{2mr^2} + 0$$

$$= \frac{P_\theta}{mr^2}$$

$$\therefore \dot{\theta} = \frac{P_\theta}{mr^2} \text{ ——— (ii)}$$

উপরিউক্ত (i) ও (ii) নং সমীকরণদ্বয়কে কেন্দ্রীয় বলক্ষেত্রের অধীনে কণাটির গতির সমীকরণ বলে। (DU-2022)

প্রশ্ন: পয়সন বন্ধনী এবং ল্যাগ্রাঞ্জ বন্ধনীর মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন কর?

সমাধান   DU-22, 17,

ল্যাগ্রাঞ্জ বন্ধনী $\{u_l, u_i\}$ ও পয়সন বন্ধনী $\{u_l, u_j\}$ হলে এদের মধ্যে সম্পর্ক হবে,

$$\sum_{l=1}^{2n} \{u_l, u_i\}\,[u_l, u_j] = \delta_{ij}$$

সম্পর্কটি নিম্নে প্রমাণিত করা হলো:

ল্যাগ্রাঞ্জ ও প্রয়সন বন্ধনীর সংজ্ঞানুসারে পাই,

$$\sum_{l=1}^{2n}\{u_l,u_i\}[u_l,u_j]=\sum_{l=1}^{2n}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial q_k}{\partial u_l}\frac{\partial p_k}{\partial u_i}-\frac{\partial q_k}{\partial u_i}\frac{\partial p_k}{\partial u_l}\right)\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{\partial u_l}{\partial q_m}\cdot\frac{\partial u_j}{\partial p_m}-\frac{\partial u_l}{\partial p_m}\cdot\frac{\partial u_j}{\partial q_m}\right)\right] \quad \text{———— (i)}$$

এই সমীকরণের ডানপাশের প্রথম পদ নিয়ে পাই

$$\sum_{l=1}^{2n}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial q_k}{\partial u_l}\cdot\frac{\partial p_k}{\partial u_i}\right)\times\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial u_l}{\partial q_m}\cdot\frac{\partial u_j}{\partial p_m}\right]$$

$$\sum_{k,m=1}^{n}\frac{\partial p_k}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial u_j}{\partial p_m}\sum_{l=1}^{2n}\frac{\partial q_k}{\partial u_l}\frac{\partial u_l}{\partial q_m}$$

$$\Rightarrow \sum_{k,m}\frac{\partial p_k}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial u_j}{\partial p_m}\cdot\frac{\partial q_k}{\partial q_m}$$

$$=\sum_{k,m}\frac{\partial p_k}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial u_j}{\partial p_m}\cdot\delta_{km}$$

$$=\sum_{k,m}\frac{\partial p_k}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial u_j}{\partial p_m}\cdot\frac{\partial p_m}{\partial p_k}\quad\left[\delta_{km}=\frac{\partial p_m}{\partial p_k}\text{ প্রমাণ করা যায়}\right]$$

$$=\sum_{k}\frac{\partial p_k}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial u_j}{\partial p_k}\quad\text{———— (ii)}$$

(i) নং এর ডানপাশের শেষ পদ হতে,

$$\sum_{l=1}^{2n}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}-\frac{\partial q_k}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial p_k}{\partial u_l}\right)\left(\sum_{m=1}^{n}-\frac{\partial u_l}{\partial p_m}\cdot\frac{\partial u_j}{\partial q_m}\right)\right]$$

$$=\sum_{k,m=1}^{n}\frac{\partial q_k}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial u_j}{\partial q_m}\cdot\sum_{l=1}^{2n}\frac{\partial p_k}{\partial u_l}\cdot\frac{\partial u_l}{\partial p_m}$$

$$=\sum_{k,m}\frac{\partial q_k}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial u_j}{\partial q_m}\cdot\frac{\partial p_k}{\partial p_m}$$

$$=\sum_{k,m}\frac{\partial q_k}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial u_j}{\partial q_m}\cdot\delta_{km}$$

$$= \sum_{k,m} \frac{\partial q_k}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial q_m} \cdot \frac{\partial q_m}{\partial q_k}$$

$$= \sum_{k} \frac{\partial q_k}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial q_k} \text{ ——— (iii)}$$

সমীকরণ (i) গুনফলের পর অবশিষ্টের বাকি ২টি পদ শূন্য হবে।

যেমন, $- \sum_{k,m=1}^{n} \frac{\partial p_k}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial q_m} \sum_{l=1}^{2n} \frac{\partial q_k}{\partial u_l} \cdot \frac{\partial u_l}{\partial p_m} = 0$

যেহেতু, $\sum_{l=1}^{2n} \frac{\partial q_k}{\partial u_l} \cdot \frac{\partial u_l}{\partial p_m} = \frac{\partial q_k}{\partial p_m} = 0$ হয়।

তাহলে, (ii) ও (iii) নং সমীকরণ (i) নং এ প্রয়োগ করি,

$$\sum_{l=1}^{2n} \{u_l, u_i\} [u_l, u_j] = \sum_{k} \frac{\partial p_k}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial p_k} + \sum_{m} \frac{\partial q_k}{\partial u_i} \frac{\partial u_j}{\partial q_k}$$

$$= \frac{\partial u_j}{\partial u_i} (q_k, p_k)$$

$$= \frac{\partial u_j}{\partial u_i} = \delta_{ij}$$

$\therefore \sum_{l=1}^{2n} \{u_l, u_i\} [u_l, u_j] = \delta_{ij}$ যা ল্যাগ্রাঞ্জ ও পয়সন বন্ধনীর মধ্যে সম্পর্ক নির্দেশ করে।

9n: দেখাও যে, রূপান্তর $P = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$ এবং $Q = \tan^{-1} \frac{q}{p}$ আইনানুগ।

DU-17,

সমাধান (DU-2022)

$P = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$ ও $Q = \tan^{-1} \frac{q}{p}$ রূপান্তরটি আইনানুগ প্রমাণ করার জন্য দেখাতে হবে যে পয়সন বন্ধনী $[Q, P] = 1$ ——— (1)

(i) নং এর রাশিটি লিখে পাই,

$$[Q,P] = \frac{\partial Q}{\partial q}\cdot\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\cdot\frac{\partial P}{\partial q} \quad \text{—— (ii)}$$

এখানে, $Q = \tan^{-1}\left(\frac{q}{p}\right)$

$\Rightarrow \tan Q = \frac{q}{p}$

এবার, $\frac{\partial}{\partial q}[\tan Q] = \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{q}{p}\right)$

$\Rightarrow \sec^2 Q \cdot \frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{1}{p}$

$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{p}{p^2+q^2}$

কিন্তু $\sec^2\theta = 1+\tan^2\theta$
$= 1+\frac{q^2}{p^2}$
$= \frac{p^2+q^2}{p^2}$

একইভাবে, $\frac{\partial Q}{\partial p} = -\frac{q}{\sec^2 Q\, p^2} = -\frac{q}{\frac{p^2+q^2}{p^2}\times p^2} = -\frac{q}{p^2+q^2}$

এবং $P = \frac{1}{2}(q^2+p^2)$

$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial q} = q$ এবং $\frac{\partial P}{\partial p} = p$

মানসমূহ (ii) নং এ বসিয়ে পাই

$$[Q,P] = \frac{p}{(p^2+q^2)}\times p - \frac{(-q)}{p^2+q^2}\times q$$

$$= \frac{p^2+q^2}{p^2+q^2} = 1$$

$\therefore [Q,P] = 1$

অতএব রূপান্তরটি ক্যাননিকাল।

প্রশ্ন: হ্যামিল্টনি রূপান্তরের সুবিধা কি?

সমাধান

মূল বই দেখ (১৪৭) page.

প্রশ্ন: হ্যামিল্টনের ভৌত তাৎপর্য ব্যাখ্যা কর?

সমাধান

মূল বই দেখ ১৪৫ page

প্রশ্ন: দেখাও যে $Q = \log\left(\frac{1}{q}\sin p\right)$; $p = q\cot p$ রূপান্তরটি আইনানুগ। এটি সৃজন অপেক্ষক? (DU-17)

সমাধান

আমরা পাই, $Q = \log\left(\frac{1}{q}\sin p\right)$

$$বা,\ dQ = \frac{1}{\frac{\sin p}{q}}\left\{\frac{q\cdot\cos p\cdot dp - \sin p\cdot dq}{q^2}\right\}$$

$$= \frac{q}{\sin p}\left\{\frac{q\cos p\, dp}{q^2} - \frac{\sin p\, dq}{q^2}\right\}$$

$$= \frac{q}{\sin p}\cdot\frac{\cos p\, dp}{q} - \frac{q}{\sin p}\cdot\frac{\sin p\cdot dq}{q^2}$$

$$= \cot p\, dp - \frac{dq}{q}$$

$$= -\frac{dq}{q} + \cot p\, dp$$

অতএব, $pdq - PdQ = pdq - q\cot p\left(-\frac{dq}{q} + \cot p\, dp\right)$

$$= pdq + \cot p\, dq - q\cot^2 p\, dp$$

$$= (p + \cot p)\, dq - q\cot^2 p\, dp$$

CamScanner

$= \cancel{\frac{\partial q}{\partial q}(qp + q\cot p)\,dq + \partial P}$

$= \frac{\partial}{\partial q}(qp + q\cot p)\,dq + \frac{\partial}{\partial p}(qp + q\cot p)\,dp$

$= \frac{\partial F}{\partial q}\cdot dq + \frac{\partial F}{\partial p}\cdot dp = dF$

এখানে, dF একটি প্রকৃত ব্যবকলনী। অতএব ~~...~~ প্রদত্ত রূপান্তরটি-আইনানুগ। এখানে F-কে সৃজন অপেক্ষক বলে।

দ্বিতীয় অংশ প্রমাণের জন্য পাই,

$$Q = \ln\left(\frac{\sin p}{q}\right)$$

বা, $\frac{\sin p}{q} = e^{Q}$

বা, $\sin p = q e^{Q}$

বা, $\sin^2 p = q^2 e^{2Q}$

বা, $1 - \cos^2 p = q^2 e^{2Q}$

বা, $\cos^2 p = 1 - q^2 e^{2Q}$

বা, $\cos p = (1 - q^2 e^{2Q})^{1/2}$

বা, $\frac{\cos p}{\sin p} = \frac{(1 - q^2 e^{2Q})^{1/2}}{\sin p}$

বা, $\cot p = \frac{(1 - q^2 e^{2Q})^{1/2}}{q e^{Q}}$

এখন, সৃজন অপেক্ষক,

$$F = pq + q\cot p$$
$$= q\sin^{-1}(q e^{Q}) + e^{-Q}(1 - q^2 e^{2Q})^{1/2}$$

এই সৃজন অপেক্ষকের রূপ হবে $F_1 = F(q, Q)$।

chapter-5

প্রশ্ন: প্রসঙ্গ কাঠামো কাকে বলে? DU-21,

সমাধান: ত্রি-মাত্রিক স্থানে কোন বস্তুর গতি বর্ণনার জন্য যে স্থানাঙ্ক ব্যবস্থাকে নির্দিষ্ট করে নেয়া হয় এবং যার সাপেক্ষে বস্তুর গতি সম্পর্কে সিদ্ধান্ত গ্রহন করা হয়, তাকে প্রসঙ্গ কাঠামো বলে।

প্রশ্ন: জড় প্রসঙ্গ কাঠামো বলে? DU-21

সমাধান: পরস্পরের সাপেক্ষে ধ্রুববেগে গতিশীল যে সকল প্রসঙ্গ কাঠামোতে জড়তার সূত্র বা নিউটনের গতি সূত্র অর্জন করা যায়, তাকে জড় প্রসঙ্গ কাঠামো বলে।

প্রশ্ন: আপেক্ষিকতা কাকে বলে? DU-20,22,

সমাধান: গতির সাথে স্থান, কাল ও ভরের নির্ভরশীলতা আপেক্ষিক তত্ত্বের মূল বিষয়বস্তু। স্থান, কাল, জড় বা ভরের মান পর্যবেক্ষকের আপেক্ষিক গতির উপর নির্ভর করে, একেই আপেক্ষিকতা বলে।

প্রশ্ন: লরেঞ্জ রূপান্তর কাকে বলে? DU-22

সমাধান: ১৯৩০ সালে এইচ.এ. লরেঞ্জ তাঁর তড়িৎচুম্বকীয় তত্ত্বের মাধ্যমে সমীকরণগুলোকে প্রথম প্রকাশ করেন। তাই, এই রূপান্তরকে 'লরেঞ্জ রূপান্তর' বলা হয়।

প্রশ্ন: world space কাকে বলে?

সমাধান: লরেঞ্জ রূপান্তর চার-মাত্রিক স্পেসে অভিলম্বিক রূপান্তর মাত্র। উক্ত বিবেচিত চার-মাত্রিক স্পেসকে বিশ্ব-স্পেস বলা হয়।

৭nঃ গ্যালিলিয় রূপান্তর আলোচনা কর? DV-22

অসমাধান

অসমাধানঃ ২৪০ page উত্তর।

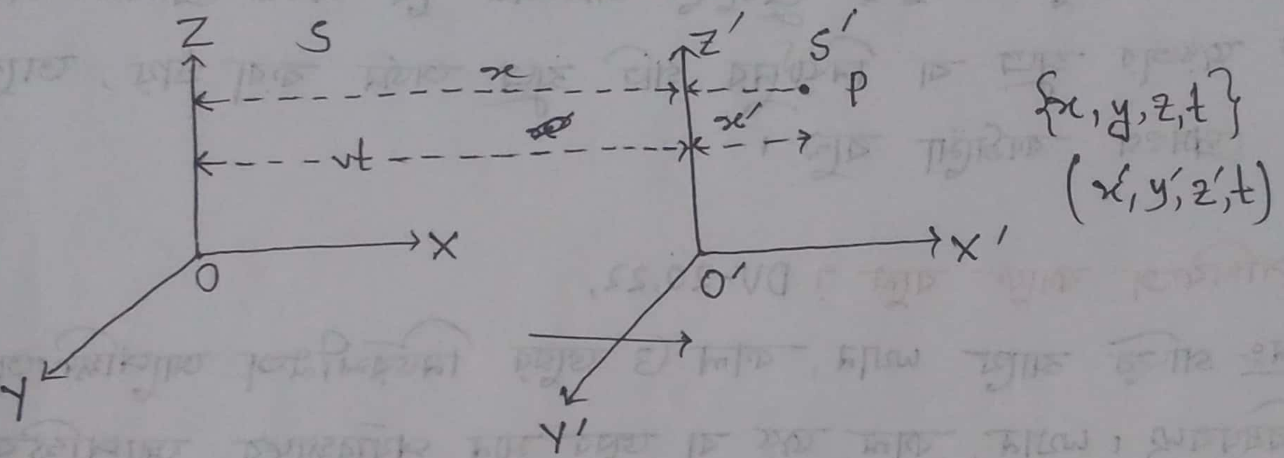
৭nঃ আপেক্ষিকতার বিশেষ তত্ত্বের স্বীকার্যগুলো বর্ণনা ও ব্যাখ্যা কর?

অসমাধান DV-20, 22

অসমাধান ২৩৯ page উত্তর।

৭nঃ লরেঞ্জ রূপান্তর সমীকরণগুলো প্রতিপাদন কর? DV-22

অসমাধান



ধরি, S ও S' দুটি জড় প্রসঙ্গ কাঠামো। S' কাঠামো S এর আপেক্ষে ধনাত্মক x অক্ষ বরাবর v বেগে চলছে।

S এ কোন ঘটনার স্থানাঙ্ক P (x, y, z, t)

S' এ ঐ একই ঘটনার স্থানাঙ্ক P (x', y', z', t')

X- অক্ষে বরাবর রূপান্তরের জন্য গ্যালিলিয়ান সমীকরণ হলো-

$$x' = x - vt$$

এবং $x = x' + vt$

কিন্তু উক্তটিতে সমীকরণ $t = t'$ ধরা হয়েছে, যা একটি পরীক্ষা লব্ধ সিদ্ধান্ত।

লরেন্ৎজ এর অনুমতে,

$$x' = k(x - vt) \quad \text{——— (i)}$$

এবং $$x = k(x' + vt') \quad \text{——— (ii)}$$

এখানে, k একটি সমানুপাতিক ধ্রুবক যা x অথবা t এর উপর নির্ভরশীল নয়। y ও z অক্ষ বরাবর কোনো আপেক্ষিক গতি নেই তাই,

$$y' = y$$

$$z' = z$$

আইনস্টাইনের প্রথম স্বীকার্য হতে আমরা জানি,

সকল জড় প্রসঙ্গ কাঠামোতে পদার্থবিজ্ঞানের সকল সূত্র অপরিবর্তিত থাকে,

তাই (ii) নং সমীকরণে x' এর মান বসাই,

$$x = k\{k(x - vt) + vt'\}$$

বা, $$\frac{x}{k} = kx - kvt + vt'$$

বা, $$vt' = \frac{x}{k} - kx + kvt$$

বা, $$t' = \frac{x}{kv} - \frac{kx}{v} + kt$$

বা, $$t' = kt - \frac{kx}{v}\left(1 - \frac{1}{kv}\right) \quad \text{——— (iii)}$$

আইনস্টাইনের দ্বিতীয় স্বীকার্য হতে, আমরা জানি,

আলোর বেগ সর্বদা ধ্রুবক। এটি উৎস, মাধ্যম ও পর্যবেক্ষকের উপর নির্ভরশীল নয়।

$$x = ct \quad \text{এবং} \quad x' = ct'$$

(i) ও (ii) নং সমীকরণে $x = ct$ এবং $x' = ct'$ বসাই,

$$ct' = k(ct - vt) \quad \text{——— (iv)}$$

এবং

$$ct = k(ct' + vt') \quad \text{——— (v)}$$

(iv) ও (v) নং গুণ করি,

$$ct' \times ct = k(ct - vt) \times k(ct' + vt')$$

$$\Rightarrow c^2 tt' = k^2 tt'(c-v)(c+v)$$

$$\Rightarrow \frac{c^2 tt'}{k^2 tt'} = c^2 - v^2$$

$$\Rightarrow \frac{c^2}{k^2} = c^2 - v^2$$

$$\Rightarrow c^2 = k^2(c^2 - v^2)$$

$$\Rightarrow k = \sqrt{\frac{c^2}{c^2 - v^2}}$$

$$= \frac{c}{\sqrt{c^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}$$

$$\therefore k = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \text{ ——— } (6)$$

k এর মান (i) নং সমীকরণে বসাই, $x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ ——— (7)

k এর মান (iii) নং সমীকরণে বসাই,

$$t' = k\left[t - \frac{x}{v}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\right]$$

$$= \frac{t - \frac{x}{v}\left(1 - 1 + \frac{v^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\Rightarrow t' = \frac{t - \frac{xv}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \text{ ——— } (8)$$

আবার, y অক্ষ ও z অক্ষ বরাবর বেগের কোন পরিবর্তন হয় না। তাই,

$y' = y$ ——— (9) $z' = z$ ——— (10)

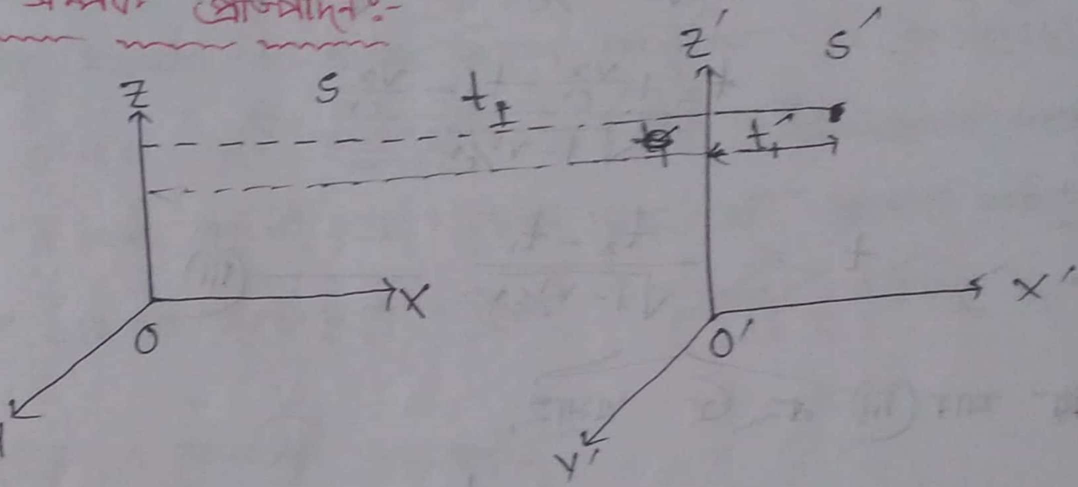
(7), (8), (9) ও (10) নং সমীকরণগুলো লরেন্টজ রূপান্তর বলে।

প্রশ্নঃ কাল দীর্ঘায়ন কী? কাল দীর্ঘায়নের সমীকরণ প্রতিষ্ঠিত কর?

সমাধান DU-21,

কাল দীর্ঘায়নঃ- গতিশীল ঘড়ি নিশ্চল বা স্থির ঘড়ির চেয়ে ধীরে চলে। একে কাল দীর্ঘায়ন বলে। অর্থাৎ কোন পর্যবেক্ষকের সাপেক্ষে গতিশীল ঘড়ি যদি স্থির থাকে, তাহলে ঘড়িটি যে সময় দিত তদপেক্ষা গতিশীল অবস্থায় কম সময় প্রদর্শন করবে। সময় ব্যবধান এর এরূপ প্রসারণকে কাল দীর্ঘায়ন বলে।

কাল দীর্ঘায়নের সম্পর্ক প্রতিপাদনঃ-



ধরা যাক, S' কাঠামো S কাঠামোর সাপেক্ষে v সুষম দ্রুতিতে ধনাত্মক x- অক্ষ বরাবর চলছে। S' কাঠামোর কোন পর্যবেক্ষক কোন সময় ব্যবধান t_1' নির্ণয় করলে S কাঠামোর পর্যবেক্ষক ঐ সময় ব্যবধান নির্ণয় করবেন t_1। কিছুকাল অতিবাহিত হওয়ার পর S'-এর পর্যবেক্ষক t_2' সময় দিলে S-এর পর্যবেক্ষক ঠিক সময় t_2 নির্ণয় করলেন। তাহলে S' কাঠামোর সময় ব্যবধান,

$$t_0 = t_2' - t_1' \quad \text{——— (i)}$$

আবার S কাঠামোর পর্যবেক্ষকের নিকট সময় ব্যবধান

$$t = t_2 - t_1 \quad \text{——— (ii)}$$

বিপরীত লরেঞ্জ রূপান্তর অনুসারে পাই,

$$t_1 = \frac{t_1' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

এবং $$t_2 = \frac{t_2' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

t_1 ও t_2 এর মান (ii) নং এ বসাই,

$$t = \frac{t_2' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \frac{t_1' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$= \frac{t_2' + \frac{vx'}{c^2} - t_1' - \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$t = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad \text{—— (iii)}$$

(i) এর মান (iii) নং এ বসাই,

$$\Rightarrow t = \frac{t_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

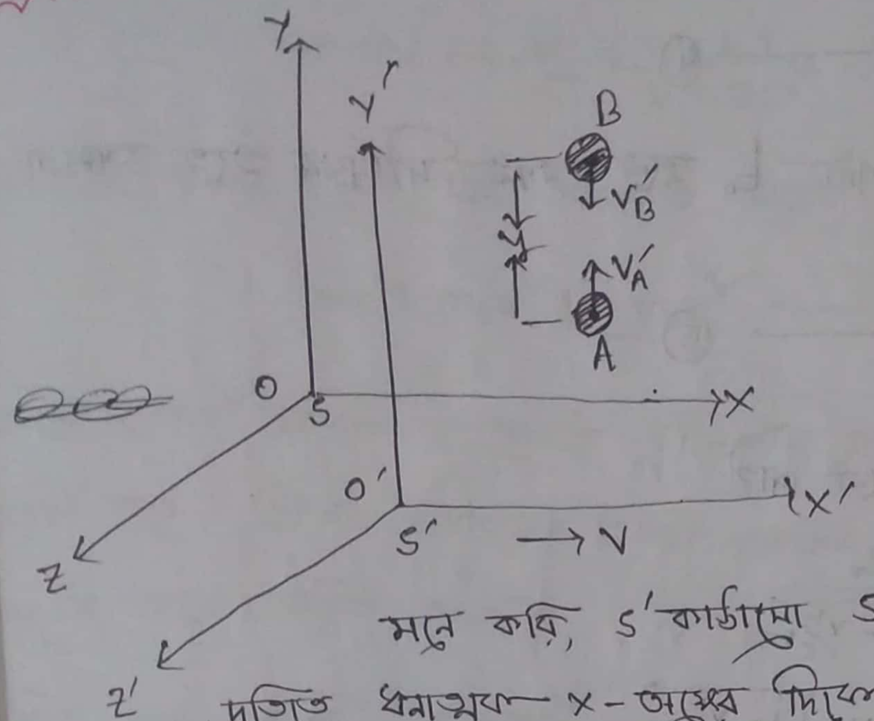
এই সমীকরণকে কাল দীর্ঘায়ন সমীকরণ বলে।

প্রশ্ন: ভরের আপেক্ষিকতা কি? এর সমীকরণ প্রতিপাদন কর?

সমাধান DU - 2020, 22,

ভরের আপেক্ষিকতা:- আপেক্ষিক তত্ত্বানুসারে বস্তুর গতির সাথে ভরের সম্পর্ক রয়েছে। এবং বস্তুর গতিশীল অবস্থার ভর নিশ্চল অবস্থার ভরের চেয়ে বেশি হয় একে ভরের আপেক্ষিকতা বলা হয়।

ভরের আপেক্ষিকতার সমীকরণ প্রতিপাদনঃ-



মনে করি, S' কাঠামো S কাঠামোর আপেক্ষে v সুষম দ্রুতিতে ধনাত্মক x-অক্ষের দিকে গতিশীল। এ কাঠামোদ্বয়ে দুজন পর্যবেক্ষক O' ও O। দুটি বস্তুকণা A ও B এর স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ পর্যবেক্ষণ করছেন। কণা দুটির ভর সমান এবং যে প্রসঙ্গ কাঠামোতে এরা স্থির, সে প্রসঙ্গ কাঠামোতে এদের ধর্ম অভিন্ন। এখানে $V_A = V_B'$

সুতরাং, S কাঠামোতে A কণাটির ভ্রমণকাল

$$t_0 = \frac{y}{V_A}$$

$$\Rightarrow V_A = \frac{y}{t_0} \quad \text{—— (i)}$$

এবং S' কাঠামোতে B কণাটির ভ্রমণকাল একই হবে অর্থাৎ,

$$\therefore t_0 = \frac{y}{V_B'} \quad \text{—— (ii)}$$

যদি S কাঠামোতে ভরবেগ সংরক্ষিত থাকে এবং A ও B বস্তুর ভর যথাক্রমে m_A ; m_B এবং V_A, V_B হয় তাহলে,

$$m_A V_A = m_B V_B \quad \text{—— (iii)}$$

S কাঠামোতে B এর ভ্রমণকাল t হলে

$$t = \frac{y}{V_B} \quad \text{———} \quad (4)$$

এবং
S' কাঠামোতে B এর ভ্রমণকাল t_0 হলে কাল দীর্ঘায়ন হতে আমরা জানি,

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{———} \quad (5)$$

(4) ও (5) নং সমীকরণ হতে পাই

$$\frac{y}{V_B} = \frac{t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\text{বা,} \quad V_B = \frac{y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{t_0} \quad \text{———} \quad (6)$$

(1) এবং (6) হতে V_A এবং V_B এর মান (3) নং এ বসাই,

$$m_A \cdot \frac{y}{t_0} = m_B \cdot \frac{y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{t_0}$$

$$\Rightarrow m_B = \frac{m_A}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{———} \quad (7)$$

যদি $m_A = m_0$ এবং $m_B = m$ হয় তাহলে

$$\boxed{m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}$$

ইহাই নির্ণেয় ভরের আপেক্ষিকতার সমীকরণ।

9নং দেখাও যে, $E = \sqrt{m_0^2c^4 + p^2c^2}$. DU-21,

সমাধান

আমরা জানি, $$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m_0\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \quad \text{———} \quad (i)$$

(i) নং সমীকরণকে বাইনোমিয়াল উপপাদ্যের সাহায্যে বিস্তৃত করে পাই,

$$m = m_0\left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{8c^4} + \cdots\right) \quad \text{(ii)}$$

(ii) নং এ $v<c$ বলে $\frac{v}{c}$ এর উচ্চঘাত অগ্রাহ্য করে পাই,

$$mc^2 = m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2 \quad \text{(iii)}$$

এখানে $\frac{1}{2}m_0v^2$ রাশিটি v দ্রুতিতে গতিশীল m_0 ভরের বস্তুর গতিশক্তিকে সূচিত করে। (ii) নং সমীকরণ একটি শক্তির সমীকরণ। m_0c^2 স্থির ভর m_0 এর সাথে জড়িত শক্তি।

এখন মোট শক্তি $E = mc^2$

$$= \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{(iv)}$$

এবং ভরবেগ $p = mv = \frac{m_0v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ (v)

আবার (iv) নং হতে পাই,

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\text{বা, } \frac{E}{c} = \frac{m_0c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$ [উভয়পক্ষে c দ্বারা ভাগ করে]

$$\text{বা, } \frac{E^2}{c^2} = \frac{m_0^2c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\text{বা, } \frac{E^2 - \frac{E^2v^2}{c^2}}{c^2} = m_0^2c^2$$

$$\text{বা, } \frac{E^2}{c^2} - \frac{E^2v^2}{c^4} = m_0^2c^2$$

বা, $E^2 - \frac{E^2v^2}{c^2} = m_0^2c^4$ [উভয়পক্ষকে c^2 দ্বারা গুণ করে]

বা, $E^2 = m_0^2c^4 + \frac{E^2v^2}{c^2}$ —— (vi)

এখন (5) নং সমীকরণ হতে,

$$P = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

বা, $P^2 = \frac{m_0^2v^2}{1 - v^2/c^2}$ [বর্গ করে]

বা, $P^2c^2 = \frac{m_0^2c^2v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

বা, $P^2c^2 = \frac{m_0^2c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot \frac{v^2}{c^2}$

$$= \frac{E^2v^2}{c^2}$$

এখন (vi) নং সমীকরণ হতে পাই,

$$E^2 = m_0^2c^4 + P^2c^2$$

$\therefore E = \sqrt{m_0^2c^4 + P^2c^2}$ [প্রমাণিত]

এটাই মোট শক্তি, স্থির ভরশক্তি এবং ভরবেগের মধ্যে সম্পর্ক।

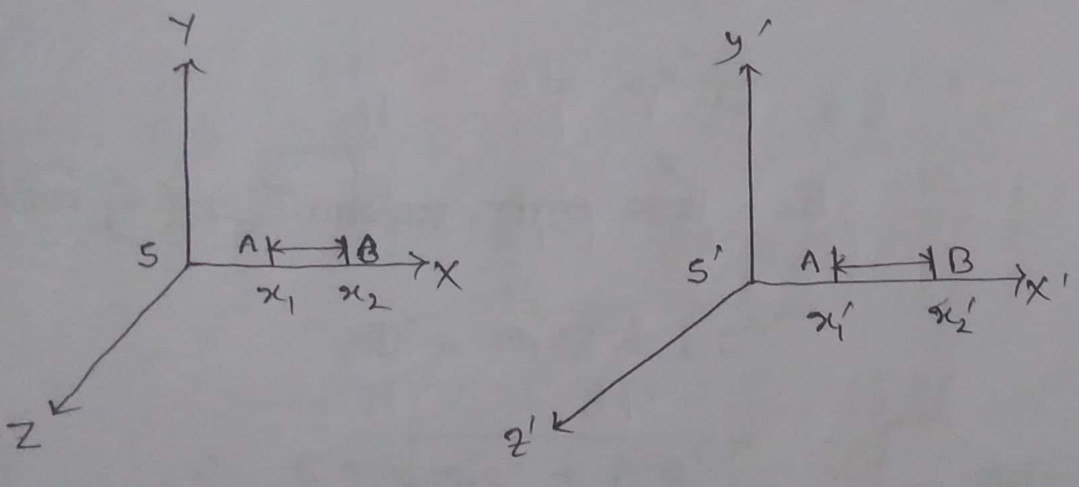
প্রঃ দৈর্ঘ্যের আপেক্ষিকতা বলতে কি বুঝ? দৈর্ঘ্য সংকোচনের সমীকরণ প্রতিপাদন কর।

সমাধান

দৈর্ঘ্যের আপেক্ষিকতা: আপেক্ষিকতার তত্ত্বানুসারে বস্তু বা দণ্ডের দৈর্ঘ্য আপেক্ষিক গতির উপর নির্ভর করে। পর্যবেক্ষকের সাপেক্ষে গতিশীল কোন দণ্ডের দৈর্ঘ্য L এবং নিশ্চল অবস্থায় উক্ত দণ্ডের দৈর্ঘ্য L_0 হলে আপেক্ষিকতার তত্ত্বানুসারে L সর্বদা L_0 অপেক্ষা ছোট হবে। একেই দৈর্ঘ্যের আপেক্ষিকতা বলা হয়।

দৈর্ঘ্য সংকোচনের সমীকরণ প্রতিপাদন: মনে করি, S' কাঠামো S কাঠামোর সাপেক্ষে v ধ্রুব দ্রুতিতে ধনাত্মক x-অক্ষ বরাবর গতিশীল রয়েছে। S কাঠামোতে একজন পর্যবেক্ষক x-অক্ষ বরাবর স্থাপিত AB দণ্ডের দু-প্রান্তের স্থানাংক নির্ণয় করলেন x_1; x_2 তাহলে এই কাঠামোতে দণ্ডের দৈর্ঘ্য

$$L_0 = x_2 - x_1 \quad \text{(i)}$$



এখন ধরা যাক, S' কাঠামোতে অপর একজন পর্যবেক্ষক AB দণ্ডের দু-প্রান্তের স্থানাঙ্ক পরিমাপ করলেন x_1' ও x_2' তাহলে এই কাঠামোতে দণ্ডের দৈর্ঘ্য:

$$L = x_2' - x_1' \quad \text{(ii)}$$

লরেঞ্জ - এর বিপরীত রূপান্তর অনুসারে পাই,

$$x_1 = \frac{x_1' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

এবং $$x_2 = \frac{x_2' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

x_1 ও x_2 এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$L_0 = \frac{x_2' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{x_1' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$= \frac{x_2' + vt' - x_1' - vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$= \frac{x_2' - x_1'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \text{ --------- (iii)}$$

(iii) নং এ (ii) নং এর মান বসিয়ে পাই,

$$L_0 = \frac{L}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\Rightarrow L = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2} \text{ --------- (iv)}$$

(iv) নং সমীকরণটি দৈর্ঘ্য সংকোচন আপেক্ষিক সমীকরণ বলে।

9nঃ প্রমাণ কর যে, গ্যালিলিও রূপান্তরণে নিউটনের গতিসূত্র অপরিবর্তিত থাকে ? DU-21

সমাধান

ধরা যাক, S' প্রসঙ্গ কাঠামো S কাঠামোর সাপেক্ষে v সুষম দ্রুতিতে ধনাত্মক x- অক্ষ বরাবর চলছে। এখন S প্রসঙ্গ কাঠামোতে নিউটনের গতিসূত্র হলো :-

$$F = ma$$
$$= m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{---------- (i)}$$

আপেক্ষিকতার বিশেষ তত্ত্বের প্রথম স্বীকার্য অনুসারে S' কাঠামোতে নিউটনের সূত্রের অবয়ব একই থাকবে। অর্থাৎ এই কাঠামোতে

$$F' = m'a' = m' \frac{d^2x'}{dt^2} \quad \text{---------- (ii)}$$

এখন, গ্যালিলিওর রূপান্তর অনুসারে,

$$x' = x - vt$$

বা, $$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - v$$

বা, $$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx'}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt} - v\right)$$

বা, $$\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{---------- (iii)}$$

সমীকরণ (i), (ii) ও (iii) হতে দেখা যায় যে গ্যালিলিওর রূপান্তরে নিউটনের গতিসূত্র অপরিবর্তিত থাকে।

CamScanner

৭nঃ কোন তেলটি বস্তুকনার মোট শক্তি এর স্থিতি শক্তির দ্বিগুন। বস্তু কনাটির দ্রুতি কত? DU-21

সমাধান

আমরা জানি, $E = mc^2$ এবং $E_0 = m_0c^2$

$$= \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

প্রশ্নমতে,

$$E = 2E_0$$

বা, $2m_0c^2 = \dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

বা, $2\sqrt{1 - v^2/c^2} = 1$

বা, $4\left(1 - v^2/c^2\right) = 1$

বা, $1 - \dfrac{v^2}{c^2} = \dfrac{1}{4}$

বা, $\dfrac{v^2}{c^2} = 1 - \dfrac{1}{4}$

বা, $\dfrac{v^2}{c^2} = \dfrac{3}{4}$

বা, $v^2 = \dfrac{3}{4}c^2$

বা, $v = \dfrac{\sqrt{3}}{2}c$

$$= 0.87 \times 3 \times 10^8 \ ms^{-1}$$

$$= 2.61 \times 10^8 \ ms^{-1}$$

∴ নির্ণেয় দ্রুতি $v = 2.61 \times 10^8 \ ms^{-1}$

Qn: জগত ~~বিন্দু ও জগত~~ রেখা কাকে বলে?

সমাধান

জগত ~~বিন্দু~~ : রেখা: চার মাত্রিক স্থানে কোন বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর x_μ কে অবস্থান 4-ভেক্টর বলা হয়। গতিকালে বিন্দুটি যে পথ অনুসরন করে তাকে বিশ্ব রেখা বলে।

4-অবস্থান ভেক্টর:-

সঠিক সময়:- দুটি ঘটনা যে স্থানে ঘটেছে সেই একই স্থানে অবস্থিত একটি ঘড়ির মাধ্যমে ঘটনা দুটির মধ্যবর্তী সময় পরিমাপ করলে তাকে প্রকৃত সময় বলে।

বিশ্ব বেগ বা 4-বেগ: চার মাত্রিক স্থানে সঠিক সময়ের সাপেক্ষে অবস্থান ভেক্টরের পরিবর্তনের হারকে বিশ্ব বেগ বা 4-বেগ u_μ বলে।