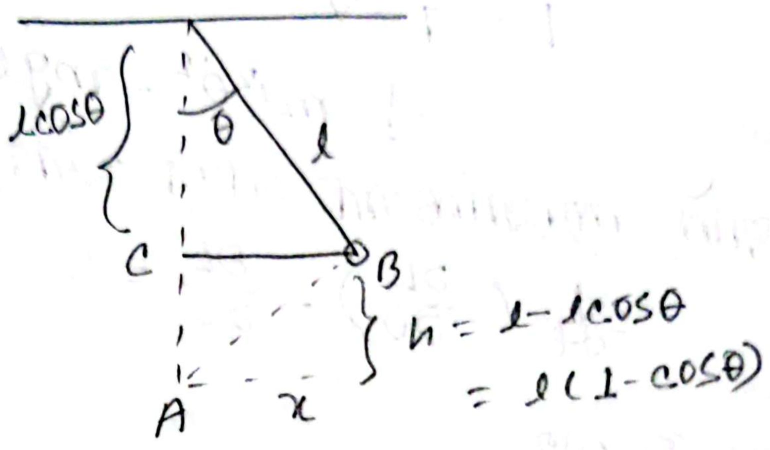
Chapter-2

প্র: সরল দোলকের জন্য ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান স্থাপন কর এবং এর সাহায্যে গতির সমীকরণ এবং পর্যায়কালের রাশিমালা বের কর।

→



চিত্র: সরল দোলক

যদি একটি m ভরের বর্তুলাকার ববকে একটি অসংনম্য ওজনবিহীন l দৈর্ঘ্যের সুতার দ্বারা ঝুলানো হয় এবং ববটিকে একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর সাপেক্ষে স্পন্দিত হয় তবে তাকে সরল দোলক বলা হয়।

B অবস্থানে ববটির গতিশক্তি,

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

এখানে, $x = l\theta \therefore \dot{x} = l\dot{\theta}$

$$= \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$$

আবার, B অবস্থানে বস্তুটির বিভবশক্তি,

$$V = mgh$$
$$= mgl(1-\cos\theta)$$

অতএব, সরলদোলকটির ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান,

$$L = T - V$$
$$= \frac{1}{2} ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1-\cos\theta) \quad \text{---} (1)$$

আমরা জানি, ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান গতির সমীকরণ,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad \text{---} (2)$$

সমীকরণ (1) হতে,

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta$$

এবং, $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mgl^2\dot{\theta}$

$$= ml^2\dot{\theta}$$

এখন সমীকরণ (2) এ ব্যবহার করে,

$$\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\theta}) + mgl\sin\theta = 0$$

অতএব, $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$

ইহাই হলো সরল দোলকের গতির সমীকরণ।

আবার, ধরি, $\omega^2 = \frac{g}{l}$

অতএব, $\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$

অথবা, $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0 \quad \text{---} (3)$

এই সমীকরণটি সমাধান করে পাই,

$$\theta = A\sin(\omega t + \delta)$$

$$\omega = \sqrt{g/l}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \sqrt{g/l}$$

$$\therefore T = 2\pi\sqrt{l/g}$$

নিউটনিয় গঠনের চেয়ে ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান গঠন অধিকতর সুবিধাজনক কেন? ✓

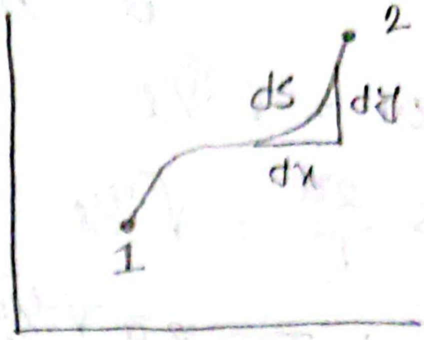
→ নিউটনের গতির সমীকরণ হলো একটি ভেক্টর ব্যবকলন সমীকরণ। অপরপক্ষে ল্যাগ্রাঞ্জের গতির সমীকরণ হলো একটি স্কেলার সমীকরণ। ভেক্টর সমীকরণ এর সমাধান বের করা স্কেলার সমীকরণ এর সমাধান বের করার চেয়ে অধিকতর complicated। অতএব ল্যাগ্রাঞ্জের সমীকরণ হলো নিউটনের গতির সমীকরণ এর চেয়ে সমাধান করা অধিকতর সুবিধাজনক।

প্র দেখাও যে, কোন তলে দুটি বিন্দুর মধ্যবর্তী ন্যূনতম দূরত্ব একটি সরলরেখা।

→ কোন তলে একটি বক্ররেখার ক্ষুদ্রাংশের দৈর্ঘ্য ds হলে,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$= \left(\sqrt{(1+\dot{y}^2)}\right) dx$$



অতএব, দুটি বিন্দু 1 ও 2 এর মধ্যে বক্ররেখার মোট দৈর্ঘ্য

$$I = \int_1^2 ds$$

$$= \int_1^2 \sqrt{1+\dot{y}^2}\, dx$$

$$= \int_1^2 f\, dx \quad \left[\text{এখানে } f = \sqrt{1+\dot{y}^2}\right]$$

এখানে, $f = \sqrt{1+\dot{y}^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

এবং $\dfrac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \dfrac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}$

অতএব, অয়লারের সমীকরণ অনুসারে,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}} = \text{ধ্রুবক} = a$$

অর্থাৎ $\dot{y} = b$

যেখানে b একটি ধ্রুবক এবং $b = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$ ।

তখন, $\dot{y} = b$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = b$$

$$\therefore y = bx + c$$

∴ এটিই নির্ণেয় ক্ষুদ্রতম দূরত্ব যা সরলরেখা নির্দেশ করে।

হ্যামিল্টনের পরিবর্তন নীতি ব্যাখ্যা কর।

→ কোনো গতিশীল সিস্টেমের সম্ভাব্য পথসমূহের মধ্যে যে পথটি বাস্তবিকই অনুসৃত হয় তার জন্য ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান অপেক্ষকের সময়ের উপর সমাকলনের মান সর্বনিম্ন হবে।

গাণিতিকভাবে t_1 সময় হতে t_2 সময় পর্যন্ত কোনো সিস্টেমের সঠিক গতিপথের জন্য,

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt$$

এখানে পথ সমাকলন স্থির মান প্রাপ্ত হবে। $L = T - V$ হলো ল্যাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক।

পথ সমাকলনের স্থির মানের ধারণা অনুসারে পরিবর্তন অপেক্ষকের প্রথম ক্রমের অন্তরকলন শূন্য হয়।

তাই হ্যামিল্টনের নীতিতে t_1 ও t_2 নির্দিষ্ট সময়ের মধ্যে গতির জন্য পথ সমাকলন I এর পরিবর্তন δI শূন্য হবে অর্থাৎ,

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, q_2, q_n, \dot{q}_1 \ldots \dot{q}_n, t)\, dt = 0$$

এক্ষেত্রে সিস্টেমের অবরোধের শর্তসমূহ হলোনোমিক হবে।

হ্যামিল্টনের নীতির অপর নাম হলো পরিবর্তনের নীতি।

□ হ্যামিল্টনের পরিবর্তনশীল নীতি থেকে ল্যাগ্রাঞ্জের সমীকরণ বের কর।

→ একটি সংরক্ষণশীল সিস্টেমের জন্য সময় t_1 থেকে t_2 এ রেখা সমাকলন,

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt$$

এখন $L = T - V$ গতিপথের জন্য ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান,

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = 0 \text{ হবে} \quad \text{—— (1)}$$

সাধারণীকৃত স্থানাঙ্ক ব্যবহার করে (1) হতে পাই,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [T(q_j, \dot{q}_j) - V(q_j)]\, dt = 0 \quad \text{—— (2)}$$

এখানে, $T = T(q_j, \dot{q}_j)$

$$\delta T = \sum_j \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right)$$

$$v = v(q_j)$$

$$\delta v = \sum_j \frac{\partial v}{\partial q_j}\,\delta q_j$$

সমীকরণে ② নং এ ব্যবহার করে,

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left[\frac{\partial T}{\partial q_j}\,\delta q_j + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\,\delta \dot{q}_j - \frac{\partial v}{\partial q_j}\,\delta q_j \right] dt = 0$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{\partial v}{\partial q_j} \right) \delta q_j\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\,\delta \dot{q}_j\, dt = 0$$

২য় সমাকলনে আংশিক ব্যবকলন করে,

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{\partial v}{\partial q_j} \right) \delta q_j\, dt + \sum_j \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(\delta q_j) - \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) \int \frac{d}{dt}(\delta q_j)\, dt \right\} dt \right] = 0$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{\partial v}{\partial q_j} \right) \delta q_j\, dt + \sum_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\,\delta q_j - \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j\, dt = 0$$

কিন্তু, $\delta q_j \Big|_{t_1}^{t_2} = 0$

অতএব,

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_j \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j}\right)\delta q_j\, dt + 0 - \int_{t_1}^{t_2}\sum_j \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)\delta q_j\, dt = 0$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2}\sum_j \left[\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)\right]\delta q_j\, dt = 0$$

যেহেতু δq_j গুলো পরস্পরের উপর অনির্ভরশীল যেহেতু δq_j এর সকল মান গ্রহণ এর জন্য হলেই উপরের সমীকরণটি সঠিক হবে।

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}(T-V) = 0$$

আমরা জানি সংরক্ষণশীল সিস্টেমের জন্য স্থিতিক শক্তি বেগের উপর নির্ভর করে না।

অতএব, $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}(T-V) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(T-V) - \frac{\partial}{\partial q_j}(T-V) = 0$$

অতএব, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$

এটাই ল্যাগ্রাঞ্জের গতির সমীকরণ।

প্র ডি-অ্যালেম্বার্টের নীতি হতে হ্যামিলটনের নীতি প্রতিপাদন কর।

→ ডি-অ্যালেম্বার্টের নীতি থেকে আমরা পাই,

$$\sum_i (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i)\,\delta\vec{r}_i = 0$$

$$\Rightarrow \sum_i \dot{\vec{p}}_i\,\delta\vec{r}_i = \sum_i \vec{F}_i\,\delta\vec{r}_i \quad \text{——} ①$$

এখানে, $\dot{\vec{p}}\,\delta\vec{r}_i = m_i\,\ddot{\vec{r}}_i\,\delta\vec{r}_i$

$$= \frac{d}{dt}\left(m_i \frac{\delta\vec{r}_i}{\partial t}\right)\delta\vec{r}_i$$

$$= \frac{d}{dt}\left(m_i \frac{\delta r_i}{dt} \cdot \delta r_i\right) - m_i \frac{dr_i}{dt}\frac{d}{dt}(\delta r_i)$$

এখানে, $\delta\left(\frac{\delta r_i}{\partial t}\right) = \frac{d}{dt}\cdot\delta r_i$

অতএব,

$$\dot{\vec{p}}_i\,\delta r_i = \frac{d}{dt}\left(m_i \frac{dr_i}{dt}\delta r_i\right) - m_i \frac{dr_i}{dt}\,\delta\left(\frac{dr_i}{\partial t}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(m_i \frac{dr_i}{dt}\delta r_i\right) - \delta\left[\frac{1}{2} m_i \left(\frac{dr_i}{dt}\right)^2\right]$$

$$= \frac{d}{dt}\left(m_i \frac{dr_i}{dt}\delta r_i\right) - \delta\left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right)$$

তাহলে ① এ ব্যবহার করে পাই,

$$\sum_i \left[\frac{d}{dt}\left(m_i \frac{dr_i}{dt}\cdot\delta r_i\right) - \delta\left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right)\right] = \sum_i F_i\cdot\delta r_i$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\sum_i \left(m_i \frac{dr_i}{dt}\right)\delta r_i\right] = \delta\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \sum_i F_i\cdot\delta r_i$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\sum_i \left(m_i \frac{dr_i}{dt}\right) \delta r_i\right] = \delta T + \sum_i F_i \delta r_i \quad \text{——} (2)$$

কিন্তু সংরক্ষণশীল সিস্টেমের জন্য,

$$\sum_i F_i \cdot \delta r_i = -\sum \nabla \cdot V \, \delta r_i$$
$$= -\delta V$$

অতএব $\frac{d}{dt}\left[\sum_i \left(m_i \frac{dr_i}{dt}\right) \cdot \delta r_i\right] = \delta T - \delta V$
$$= \delta (T - V)$$

অন্যদিকে t_1 থেকে t_2 পর্যন্ত সমাকলন নিয়ে,

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left[\sum_i \left(m_i \frac{dr_i}{dt}\right) \delta r_i\right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta (T - V) dt$$

$$\Rightarrow \left[\sum_i \left(m_i \frac{dr_i}{dt}\right) \delta r_i\right]_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \delta (T - V)\, dt$$

প্রান্তবিন্দু t_1 ও t_2 তে $\delta r_i = 0$

সুতরাং $\int_{t_1}^{t_2} \delta (T - V) dt = 0$

$$\therefore \delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = 0 \quad [\because L = T - V]$$

ইহাই হ্যামিল্টনের নীতি।

হ্যামিলটনের নীতি থেকে নিউটনের গতির ২য় সূত্র বের কর।

→ আমরা জানি, হ্যামিলটনের পরিবর্তনশীল নীতি,

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L\,dt = 0$$

$$\Rightarrow \delta\int_{t_1}^{t_2} (T-V)\,dt = 0$$

$$\therefore \int_{t_1}^{t_2} (\delta T-\delta V)\,dt = 0 \quad \text{(1)}$$

যদি একটি বল $\vec{F}$ ক্রিয়া করার ফলে m ভরের একটি কণা $\vec{r}$ অবস্থানে গতিশীল থাকে,

কণাটির গতিশক্তি $T = \frac{1}{2} m\dot{\vec{r}}^2$

$$\delta T = m\dot{\vec{r}}\,\delta\dot{\vec{r}}$$

এবং কৃতকাজ $\delta W = F\cdot\delta r = -\nabla V\cdot\delta r$

$$= -\delta V$$

এদেরকে (1) নং এ ব্যবহার করে,

$$\int_{t_1}^{t_2} [\, m\dot{\vec{r}}\,\delta\dot{\vec{r}} + \vec{F}\,\delta\vec{r}\,]\,dt = 0$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} m\dot{\vec{r}}\,\delta\dot{\vec{r}}\,dt + \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\cdot\delta\vec{r}\cdot dt = 0$$

বামপক্ষের ১ম টার্মটিকে আংশিক সমাকলন করে,

$$\int_{t_1}^{t_2} m\dot{\vec{r}}\,\frac{d}{dt}(\delta\vec{r})\,dt + \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\cdot\delta r\,dt = 0$$

$$\Rightarrow m\dot{\vec{r}}\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(\delta r)\,dt - \int_{t_1}^{t_2}\left\{\frac{d}{dt}(m\dot{\vec{r}})\cdot\int\frac{d}{dt}(\delta r)\,dt\right.$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\cdot\delta r\,dt = 0$$

$$\Rightarrow m\dot{\vec{r}}\,\delta\vec{r}\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{\vec{r}}\,\delta\vec{r}\,dt + \int_{t_1}^{t_2} F\cdot d r\,dt = 0$$

যেহেতু প্রান্তবিন্দু t_1 এবং t_2 তে $\delta\vec{r} = 0$ সেহেতু বামপাশের রাশিটি শূন্য।

$$-\int_{t_1}^{t_2} m\ddot{\vec{r}}\,\delta r\,dt + \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\cdot\delta r\,\delta t = 0$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2}\left[F - m\ddot{\vec{r}}\right]\delta r\,dt = 0$$

অর্থাৎ $F - m\ddot{\vec{r}} = 0$

$$\therefore \vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$$

ইহাই নিউটনের গতির ২য় সূত্র।

হ্যামিলটনের পরিবর্তন নীতির সুবিধাসমূহ আলোচনা কর।

→

↓

হ্যামিলটন এর পরিবর্তন নীতি বর্ণনা করার পর ....

হ্যামিলটন নীতি সমীকরণ অনুসরণ করে আবার এ নীতি হতে ল্যাগ্রাঞ্জের সমীকরণ প্রতিপাদন করা যায়। সংরক্ষণশীল সিস্টেমে গতির সমীকরণসমূহ প্রতিষ্ঠার জন্য এ নীতিই যথেষ্ট। এই নীতির সুবিধা হলো, এতে ব্যবহৃত সমাকলন I সার্বজনীন স্থানাঙ্কের উপর নির্ভরশীল নয় যাদের দ্বারা ল্যাগ্রাঞ্জিয়ানদের প্রকাশ করা হয়। এ নীতি থেকে সিস্টেমের গতির সূত্র পাওয়া যায়। এ নীতির সাধারণ হলো পরিবর্তনের নীতি। এ নীতি প্রয়োগ করে অহলোনোমিয় এবং হ্যামিলটনিয় সিস্টেমের গতির ব্যাখ্যা পাওয়া যায়। কোন সিস্টেমের স্বাধীন অপেক্ষকের জন্য ল্যাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক নির্বাচনে পরিবর্তন নীতি অন্যতম গুরুত্ব বহন করে। এ নীতি ব্যবস্থায় সার্বজনীন স্থানাঙ্ক ব্যবস্থার প্রয়োজন হয় না স্থানাঙ্ক ও সময়ের কোন অপেক্ষকের সাথে সময় ব্যবকলনের প্রেক্ষিতে ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান সর্বদা অপরিবর্তিত হয়। যেটি ব্যবকলনের সময়ের উপর সমাকলিত মান ও প্রান্তিক বিন্দুদ্বয়ের মানের উপর নির্ভর করে।

প্র শক্তির সংরক্ষণ নীতি থেকে দেখাও যে, $H = T+V$ সর্বদা ধ্রুবক।

এবং $\sum_j \dot{q}_j p_j - L = H$ ।

→ এখানে আমরা বিবেচনা করি যে,

(i) একটি সংরক্ষণশীল সিস্টেমের ক্ষেত্রে বিভবশক্তি শুধু বেগের উপর নির্ভর করে না।

(ii) বাধ্যবাধকতা সময়ের সাথে পরিবর্তিত হয় না।

(iii) L কে লেখা যায় $L(q_j, \dot{q}_j)$

অর্থাৎ $L = L(q_j, \dot{q}_j)$

$$\Rightarrow \frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j}\frac{dq_j}{dt} + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{d\dot{q}_j}{dt} \quad \text{—(1)}$$

ল্যাগ্রাঞ্জের গতির সমীকরণ থেকে পাই,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)$$

ইহাকে (1) এ ব্যবহার করে

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial t}\right]$$

$$= \sum_j \frac{d}{dt}\left(\dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{d}{dt}\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad \text{—(2)}$$

আমরা জানি, অ্যাহগানুস ভরবেগ

$$P_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

② হতে,

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_j \dot{q}_j P_j$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\sum_j P_j \dot{q}_j - L\right] = 0$$

$$\therefore \sum_j P_j \dot{q}_j - L = \text{ধ্রুবক} = H \quad \text{—③}$$

অয়লারের উপপাদ্য থেকে জানি যদি f এ n মাত্রার $\dot{q}_j$ চলকের একটি সেটের সমমাত্রিক ফাংশন হয় তবে,

$$\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_j} = nf$$

এখানে n হলো 2 মাত্রার হলো,

$$\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = 2T$$

$$\therefore \sum_j P_j \dot{q}_j = 2T \qquad \left[\because P_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right]$$

ইহাকে ③ এ ব্যবহার করে,

$$2T - L = H$$

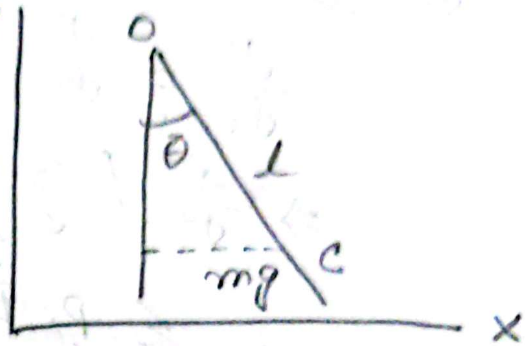
$$\Rightarrow H = 2T - (T - V)$$

$$\therefore H = T + V = \text{ধ্রুবক}$$

[দেখানো হলো]

প্র: যৌগিক দোলক কী ? এর জন্য গতির সমীকরণ বের কর।

→ একটি নির্দিষ্ট অনুভূমিক অক্ষের উপর একটি উল্লম্ব তলে দোলনশীল একটি দৃঢ় বস্তুকে যৌগিক দোলক বলে।



যদি দোলকের কৌণিক সরণ θ হয় তাহলে গতিশক্তি হবে,

$$T = \frac{1}{2} I \omega^2$$
$$= \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$

দোলকের বিভবশক্তি $V = -mgl\cos\theta$

$\therefore$ ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান $L = T - V$

$$= \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$$

এখানে,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = I\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta$$

ল্যাগ্রাঞ্জের সমীকরণ হতে,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(I\dot{\theta}) + mgl\sin\theta = 0$$

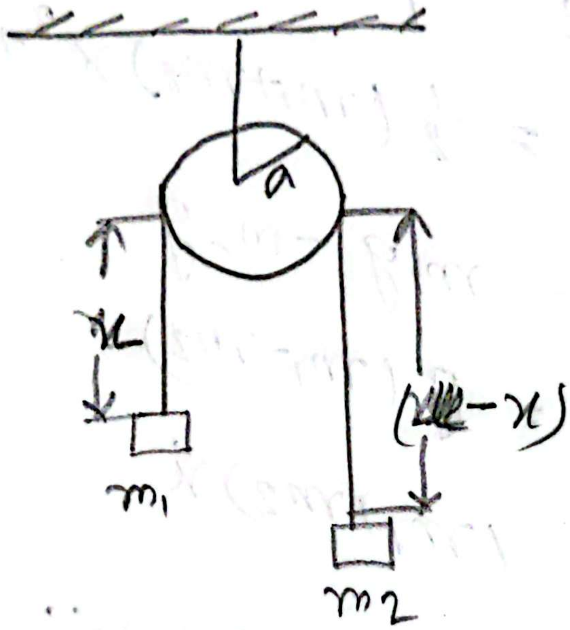
$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgl}{I}\sin\theta = 0$$

ইহাই যৌগিক দোলকের গতির সমীকরণ এবং এটি সরল ছন্দিত গতি নির্দেশ করে। গতির পর্যায়কাল,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}$$

⊡ অ্যাটউড মেশিনের গতির সমীকরণ বের কর।

→



দুটি ভিন্ন ভরের বস্তুকে ভরহীন তারের দুই প্রান্তে যুক্ত করে কোন মসৃণ পুলির উপর দিয়ে ঝুলিয়ে দিলে যদি বস্তুদ্বয় অবাধে গতি সম্পাদন করতে পারে তবে ঐ ব্যবস্থাকে অ্যাটউড মেশিন বলে।

ধরা যাক m_1 ও m_2 ভরের দুটি বস্তু l দৈর্ঘ্যের ভরহীন তার দিয়ে যুক্ত। সিস্টেমের বিভবশক্তি

$$V = -m_1 g x - m_2 g (l-x)$$

গতিশক্তি $T = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2$

ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান $L = T - V$

$$= \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2 + m_1 g x + m_2 g (l-x)$$

এখন, $\frac{\partial L}{\partial x} = m_1 g - m_2 g$

$$= g(m_1 - m_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1+m_2)\dot{x}$$

এখন, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = (m_1+m_2)\ddot{x}$

ল্যাগ্রাঞ্জের সমীকরণ অনুসারে,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

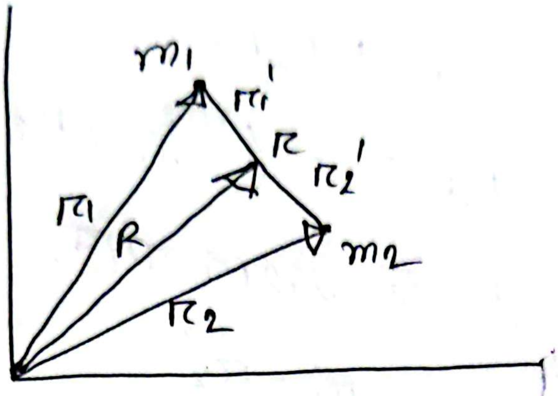
$$\Rightarrow (m_1+m_2)\ddot{x} - (m_1-m_2)g = 0$$

$$\therefore \ddot{x} = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2} g$$

এটিই অ্যাটউড মেশিনের গতির সমীকরণ।

৩। দেখাও যে, কেন্দ্রিক বলের অধীনে দ্বিবস্তু সমস্যাকে হ্রাসকৃত বেলায় বস্তুর ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান $L = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 - V(r)$।

→



ধরা যাক দুটি বিন্দু ভর m_1, m_2 এর অবস্থান ভেক্টর r_1, r_2। তাহলে কণাদ্বয়ের আপেক্ষিক দূরত্ব $r = r_1 - r_2$। ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক R হলে ল্যাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক,

$$L = T(\dot{R}, \dot{r}) - V(r) \quad \text{——} (1)$$

এখন ব্যবস্থার গতিশক্তি হবে ভরকেন্দ্রের গতিশক্তি ও ভরকেন্দ্রের সাপেক্ষে গতিশক্তি T' এর সমষ্টি।

$$T(\dot{R}, \dot{r}) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{R}^2 + T'$$

অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে r_1', r_2' হলে,

$$T' = \frac{1}{2} m_1 \dot{r}_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{r}_2'^2$$

যেখানে, $r = r_1 - r_2 = r_1' - r_2'$ —— (2)

আমরা জানি, কোনো বস্তু সিস্টেমের ভরকেন্দ্র প্রেক্ষণের সাপেক্ষে সাম্য সৃষ্টি করে থাকে,

$$\sum m_i r_i' = 0$$

$$\Rightarrow m_1 r_1' + m_2 r_2' = 0$$

$$\Rightarrow r_1' = -\left(\frac{m_2}{m_1}\right) r_2' \quad \text{——— (3)}$$

সমীকরণ (3) কে (2) এ ব্যবহার করে,

$$r = r_1' - r_2'$$

$$= r_1' + \left(\frac{m_1}{m_2}\right) r_2'$$

$$= \frac{m_2 r_1' + m_1 r_1'}{m_2}$$

$$= \frac{r_1'(m_1 + m_2)}{m_2}$$

$$= \left(\frac{m_1 + m_2}{m_2}\right) r_1'$$

$$\therefore r_1' = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) r$$

অনুরূপভাবে,

$$r_2' = -\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) r$$

$$\therefore T = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{R}^2 + \frac{1}{2}m_1\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2\dot{r}^2$$

$$= \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\right)\dot{r}^2$$

$$= \frac{1}{2}M\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2$$

$$\because M = m_1+m_2$$
$$\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$$

অতএব ব্যবস্থার ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান,

$$L = \frac{1}{2}M\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 - V(r) \quad \text{--- (4)}$$

৪ থেকে দেখা যায় যে R এর উপাংশ তিনটি ল্যাগ্রাঞ্জিয়ানে সন্নিবিষ্ট হয় না কাজেই এর চক্রীয় স্থানাংক।

R ও r চলরাশিদ্বয়ের জন্য ল্যাগ্রাঞ্জ সমীকরণ হবে,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{R}}\right) - \frac{\partial L}{\partial R} = 0 \quad \text{--- (5)}$$

এবং $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad \text{--- (6)}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}(M\dot{R}) = 0$$

$$\Rightarrow M\dot{R} = \text{ধ্রুবক}$$

$$\therefore \dot{R} = \text{ধ্রুবক}$$

সমীকরণ ④ ও ⑥ হতে,

$$\mu \ddot{r} = -\frac{\partial V(r)}{\partial r}$$

$$= f(r)$$

যা কণাদ্বয়ের কণাসমূহের পারস্পরিক দূরত্বের মাধ্যমে গতির সমীকরণ নির্দেশ করে।

দেখা যায় যে, r স্থানাঙ্কের গতির সমীকরণ R বা $\dot{R}$ নিরপেক্ষ হয় যখন ④ নং সমীকরণের ২য় অংশ অগ্রাহ্য করে পাই,

$$L = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 - V(r)$$

সুতরাং উক্ত সমীকরণ থেকে আমরা ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান বলা যেতে থেকে r দূরত্বে অবস্থিত μ ভরের একক কণার গতির বর্ণনা প্রদান করে ও এভাবে দ্বি বস্তু সমস্যাকে সমতুল্য এক বস্তু সমস্যাতে হ্রাস করা যায়।

প্র) কক্ষপথের অবকলনীয় সমীকরণ প্রতিপাদন কর।

→ r ও θ রাশিদ্বয়ের মধ্যকার সম্পর্ক সমীকরণটি হবে কক্ষপথের সমীকরণ। এই সমীকরণ নির্ণয়ের জন্য নতুন একটি চলক u বিবেচনা করা হল। যেখানে,

$$u = \frac{1}{r} \quad \text{--- (1)}$$

$$\Rightarrow r = \frac{1}{u}$$

অতএব,

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt}$$

$$= -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

$$= -\frac{1}{u^2}\dot{\theta}\frac{du}{d\theta}$$

$$= -r^2\dot{\theta}\frac{du}{d\theta}$$

$\dot{\theta} = \frac{l}{mr^2}$ বসিয়ে,

$$= -r^2\frac{l}{mr^2}\frac{du}{d\theta}$$

$$= -\frac{l}{m}\frac{du}{d\theta}$$

[$u = \frac{1}{r}$ বসিয়ে]

$$\therefore \ddot{r} = -\frac{l}{m}\frac{d^2u}{d\theta^2}\dot{\theta}$$

$$= -\frac{l^2u^2}{m^2}\frac{d^2u}{d\theta^2} \quad \text{--- (2)}$$

আমরা জানি বলের ক্ষেত্র সমীকরণ,

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{dV}{dr}$$

$$= \frac{l^2}{mr^3} + f(r)$$

$$\therefore -\frac{l^2u^2}{m}\frac{d^2u}{d\theta^2} = f\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{l^2u^3}{m}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2} = -u - \frac{m}{l^2u^2}f\left(\frac{1}{u}\right) \quad \text{——} (3)$$

এটিই কণার কক্ষপথের ব্যবকলনীয় সমীকরণ।

$l = 0$ হলে (3) নং অসীমিক হয়, আবার $l = mr^2\dot{\theta}$

হলে,

$$mr^2\dot{\theta} = 0$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = 0$$

$$\Rightarrow \theta = \text{ধ্রুবক}$$

এটি মূলবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্দেশ করে।

প্র। কেপলারের সূত্রগুলো বিবৃত কর। দেখাও যে কেপলারের গতির ২য় সূত্র প্রকৃতপক্ষে কৌণিক ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র।

→ ১ম সূত্র: সূর্যকে একটি নাভিতে রেখে গ্রহসমূহ উপবৃত্তাকার পথে গতিশীল থাকে।

২য় সূত্র: সূর্যের সাপেক্ষে গ্রহের অবস্থান ভেক্টর সমান সময়ে সমান ক্ষেত্রফল অতিক্রম করে।

৩য় সূত্র: গ্রহের আবর্তনের পর্যায়কালের বর্গ অর্ধ-উপাক্ষের ঘনের সমানুপাতিক।

আমরা জানি, ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান

$$L = T - V \quad \text{--- (1)}$$
$$= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

θ এর মুখ্য ভরবেগ স্থির থাকবে,

$$P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} = l \quad \text{--- (2)}$$

গতির দুটি সমীকরণ হলো

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

① নং হতে,

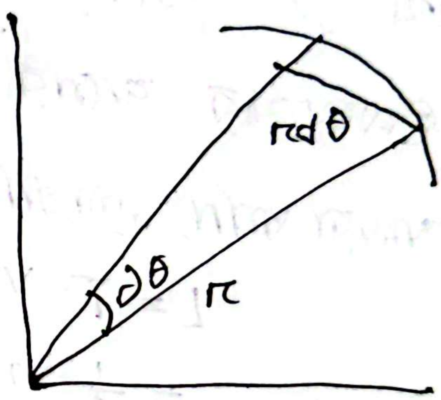
$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - \left(mr\dot{\theta}^2 - \frac{dV}{dr}\right) = 0 \quad \text{——③}$$

এবং $$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0 \quad \text{——④}$$

④ নং হতে, $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}\right) = 0$

ধরা যাক অবস্থান ভেক্টর r কর্তৃক dt সময়ে অতিক্রান্ত ক্ষেত্রফল dA হলে,

$$dA = \frac{1}{2}r(r\,d\theta)$$



ক্ষেত্রফল অতিক্রান্তের হার,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}r^2 d\theta\right)$$

$$= \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$$

যেখানে, $\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$ = ধ্রুবক

$\therefore \frac{dA}{dt}$ = ধ্রুবক

অর্থাৎ অবস্থান ভেক্টর সমান সময়ে সমান ক্ষেত্রফল অতিক্রম করে যা কেপলারের ২য় সূত্র হলো।

সমীকরণ ③ হতে

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + \frac{dV}{dr} = 0 \qquad \left[\because \dot{\theta} = \frac{l}{mr^2}\right]$$

$$\Rightarrow m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} + \frac{dV}{dr} = 0$$

$$\Rightarrow m\ddot{r} = -\frac{d}{dr}\left(V + \frac{l^2}{2mr^2}\right)$$

উভয়পক্ষে $\dot{r}$ গুণন করে,

$$\Rightarrow m\ddot{r}\dot{r} = -\frac{d}{dr}\left(V + \frac{l^2}{2mr^2}\right)\dot{r}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2\right) = -\frac{d}{dr}\left(V + \frac{l^2}{2mr^2}\right)\frac{dr}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2\right) = -\frac{d}{dt}\left(V + \frac{l^2}{2mr^2}\right)$$

অতএব, $\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r)\right] = 0$

$\therefore \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) =$ ধ্রুবক

আবার $l = mr^2\dot{\theta}$ বসিয়ে

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + V(r)$$

$$= T + V$$

$$= E$$

[প্রমাণিত হলো]

প্র কেন্দ্রীয় বলের অধীনে গতির সাধারণ বৈশিষ্ট্য লিখ।

→ কোনো বস্তুকণার উপর ক্রিয়াশীল বল কোনো স্থির বিন্দু সাপেক্ষে দূরত্বের অপেক্ষক হলে ঐ বলকে কেন্দ্রীয় বল বলে। গাণিতিকভাবে, $F(r) = f(r)\hat{r}$

কেন্দ্রীয় বলের অধীনে গতির বৈশিষ্ট্য দুটি।

(i) মোট শক্তি সংরক্ষিত থাকবে।

(ii) কৌণিক ভরবেগ সংরক্ষিত থাকবে।

(i) কেন্দ্রীয় বল হলে,

$$F = f(r)\hat{r}$$

এবং এর মান $f(r) = -\frac{\partial V(r)}{\partial r}$

বা, $F(r) = -\nabla V(r)$

আমরা জানি কোনো স্কেলার অপেক্ষকের কার্ল শূন্য হয়।

$$\nabla \times \nabla V(r) = 0$$

$$\therefore \nabla \times F = 0$$

(খ) কেন্দ্রিক বলের ক্রিয়ায় কোনো কণার কৌণিক ক্রিয়াশীল টর্ক

$$N = \vec{r} \times \vec{F}(r)$$

$$= \vec{r} \times f(r)\hat{r}$$

$$= \vec{r} \times \frac{\vec{r}}{r} f(r)$$

$$= 0$$

কারণেই $N = \frac{dL}{dt} = 0$, $L =$ ধ্রুবক

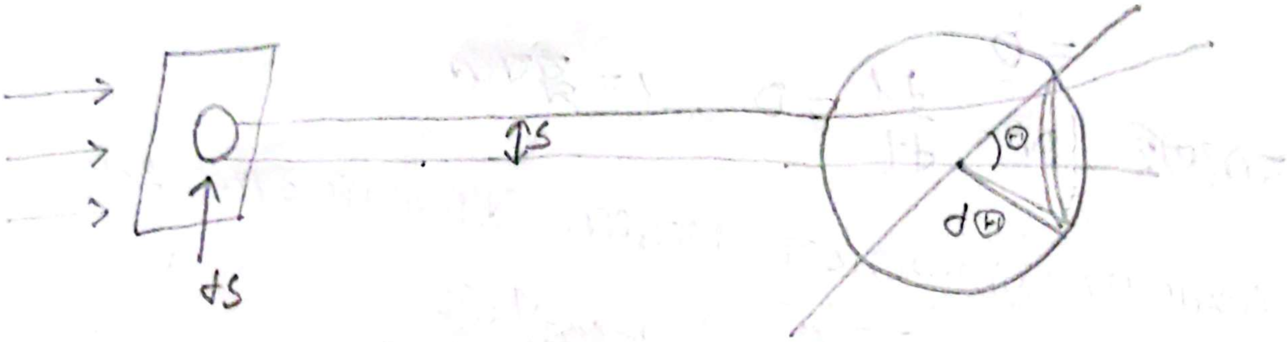
(ঙ) দেখাও যে, রাদারফোর্ডের বিক্ষেপণ প্রস্থচ্ছেদের মান হয়

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{4}\left(\frac{ZZ'e^2}{2E}\right)^2 \operatorname{cosec}^4\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

→ সমান ভর ও শক্তি সম্পন্ন একটি সুষম কণারশ্মি বিবেচনা করা যাক যা বলকেন্দ্রে আপতিত হচ্ছে। তখন আপতিত কণা রশ্মিকে এর তীব্রতা I দিয়ে বৈশিষ্ট্যায়িত করা হয়। রশ্মির সাথে লম্বভাবে কল্পিত তলের একক ক্ষেত্রফলের মধ্যে দিয়ে একক সময়ে অতিক্রান্ত কণার সংখ্যাকে তীব্রতা বলে। একক ঘনকোণের মধ্য দিয়ে একক সময়ে বিক্ষেপিত কণার সংখ্যার পর্যবেক্ষণের জন্য বিবেচনা করা হয় এবং যে রাশিদ্বারা এটা নির্ধারণ করা হয় তাকে ব্যবকলনীয় বিক্ষেপণ প্রস্থচ্ছেদ বলে।

থাকে $\sigma(\Theta, \phi)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

$$\sigma(\Theta, \phi) = \frac{\text{কোনীয় কোণ } \Theta \text{ ও } \phi \text{ দ্বারা নির্দিষ্ট দিকে একক ঘন কোণের মধ্য দিয়ে একক সময়ে বিক্ষেপিত কণার সংখ্যা}}{\text{আপতিত তীব্রতা } (I)}$$



চিত্র: বলকেন্দ্র দ্বারা আপতিত কণার রশ্মির বিক্ষেপণ

রিং এর ক্ষেত্রফল কর্তৃক বিক্ষেপণ কোণের ঘন কোণ হবে

$$\frac{2\pi R^2 \sin\Theta \, d\Theta}{R^2}$$

$$= 2\pi \sin\Theta \, d\Theta$$

$2\pi \sin\Theta \, d\Theta$ ঘনকোণের মধ্য দিয়ে বিক্ষেপিত কণার সংখ্যা

$$= I\sigma(\Theta)\, 2\pi \sin\Theta \, d\Theta \quad \text{——} (1)$$

s কে ব্যাসার্ধ ধরে ds পুরুত্বের কোন রিং বিবেচনা করলে উক্ত রিং এর ক্ষেত্রফল $2\pi s\, ds$ এর আপতিত কণার সংখ্যা হলো $I(2\pi s\, ds)$।

$$l(2\pi s\, ds) = I\sigma(\Theta)\, 2\pi \sin\Theta\, d\Theta$$

$$\therefore \sigma(\Theta) = -\frac{s}{\sin\Theta}\frac{ds}{d\Theta} \quad \text{------ (2)}$$

বাটির রাদারফোর্ড বিক্ষেপণ সূত্রাবলীর সমীকরণ।

যখন স্থির থাকা বল কেন্দ্রে অবস্থিত স্থির চার্জ ze এর বিকর্ষণে $z'e$ পরিমাণ চার্জ বিক্ষেপিত হয়। তখন কুলম্ব বলের পরিমাণ,

$$f = \frac{zz'e^2}{r^2}$$

তাকে $f = -k/r^2$ এর সাথে তুলনা করে,

$$k = -zz'e^2$$

$f = -k/r^2$ বলক্ষেত্রের কক্ষপথের সমীকরণ,

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2}\left\{1 + \left(1 + \frac{2El^2}{mk^2}\right)^{1/2}\cos\theta\right\}$$

k এর মান বসিয়ে,

$$= -\frac{zz'e^2 m}{l^2}\left\{1 + \left(1 + \frac{2El^2}{m(zz'e^2)^2}\right)^{1/2}\cos\theta\right\}$$

দেখা যায়, $e = \left\{1 + \frac{2El^2}{m(zz'e^2)^2}\right\}^{1/2} > 1$

সুতরাং কক্ষপথ পরাবৃত্তাকার হবে যখন $\cos\theta < -\frac{1}{e}$

আবার,

$$\tan^2\frac{\Theta}{2} = \left(\frac{K}{2SE}\right)^2$$

$$\Rightarrow \tan^2\frac{\Theta}{2} = \frac{(zz'e^2)^2}{4S^2E^2}$$

$$\Rightarrow S = \frac{zz'e^2}{2E}\cot\frac{\Theta}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{dS}{d\Theta} = \frac{zz'e^2}{2E} \times \frac{1}{2}\operatorname{cosec}^2\frac{\Theta}{2}$$

সমীকরণ ② হতে,

$$\sigma(\Theta) = -\frac{(zz'e^2/2E)\cot\frac{\Theta}{2}}{\sin\Theta} \times \frac{zz'e^2}{4E}\operatorname{cosec}^2\frac{\Theta}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{zz'e^2}{2E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\Theta}{2}}$$

[দেখানো হলো]

ঘ) দেখাও যে, বলের মাত্রার উপর নির্ভর করে, সম্ভাব্য কক্ষপথগুলো বর্ণনা কর।

→ কেন্দ্রিক বলের অধীনে গতির সমীকরণ থেকে r স্থানাংকের জন্য,

$$m\ddot{r} = -\frac{d}{dr}\left(V + \frac{l^2}{2mr^2}\right)$$

$$= -\frac{dV}{dr} + \frac{l^2}{mr^3}$$

$$= f(r) + \frac{l^2}{mr^3}$$

$$= f'$$

আবার, $$f' = f(r) + \frac{m^2r^4}{mr^3}\dot{\theta}^2$$

$$= f(r) + mr\dot{\theta}^2$$

$$= f(r) + \frac{m(r\dot{\theta})^2}{r}$$

$$= f(r) + \frac{mv^2}{r}$$

= কেন্দ্রাভিগ বল + কেন্দ্রাতিগ বল

সুতরাং গতির সমীকরণ দাঁড়ায়, $m\ddot{r} = f'$

কার্যকর বল f' কে কার্যকর বিভবশক্তি $V'(r)$ এর মাধ্যমে প্রকাশ করে,

$$f' = -\frac{dV'}{dr}$$

$$\Rightarrow V' = -\int f' dr$$

$$= -\int \left[f(r) + \frac{l^2}{mr^3} \right] dr$$

$$= -\int f(r)\, dr + \frac{l^2}{2mr^2}$$

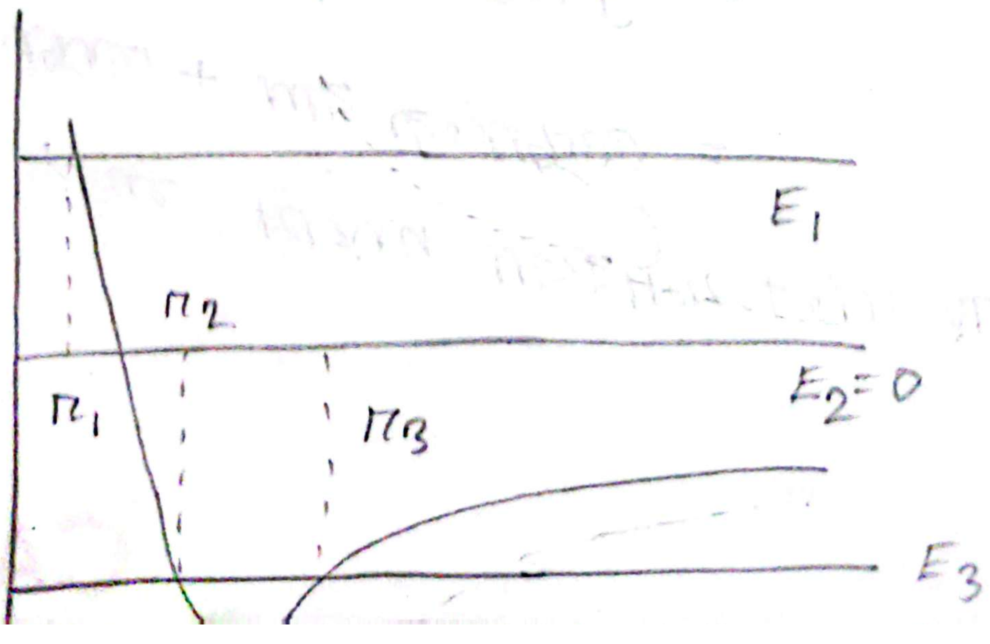
$$= V(r) + \frac{l^2}{2mr^2}$$

সুতরাং সামগ্রিক শক্তি হবে, $E = V' + \frac{1}{2} m\dot{r}^2$

$$\therefore f = -\frac{K}{r^2}$$

অতএব বিভবশক্তি $V = -K/r$ এবং কার্যকর বিভবশক্তি

$$V' = -K/r + \frac{l^2}{2mr^2}$$



বস্তুকণার যান্ত্রিক শক্তি $E_1 > 0$ হলে গতিপথ কোনোক্ষেত্রেই r_1 দূরত্বের চেয়ে কম হতে পারে না ফলে গতিপথ পরাবৃত্ত হবে।

যদি যান্ত্রিক শক্তি $E = E_2 = 0$ হয় তাহলেও r এর কোনো সর্বোচ্চমান থাকে না তখনও গতিপথ অধিবৃত্ত হয়।

আবার যান্ত্রিক শক্তি $E_3 < 0$ হলে r এর উর্ধ্বমান r_3 ও নিম্নমান r_2 উভয়েই থাকে ফলে গতিপথ উপবৃত্তাকার হবে।

যান্ত্রিক শক্তি E_4 যদি কার্যকর বিভবের মান সর্বনিম্ন হয় তাহলে গতিপথ বৃত্তাকার হবে। বৃত্তাকার গতির শর্ত হলো, $f' = -\frac{\partial V'}{\partial r} = 0$

প্র লেজেন্ড্রের রূপান্তর ব্যবহার করে হ্যামিল্টনের গতির সমীকরণ বের কর।

→ ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান রূপায়ন হতে হ্যামিল্টোনিয়ান রূপায়নে উত্তরণের সমস্যাটি হলো গাণিতিক সমস্যা যেখানে চলকসমূহ $(q, \dot{q}, t)$ হতে (q, p, t) তে রূপান্তরিত হয়। যে প্রক্রিয়ায় চলকসমূহের এই রূপ পরিবর্তন করা হয় তাকে লেজেন্ড্রের রূপান্তর বলে।

দুটি চলক নির্ভর অপেক্ষক $f(x,y)$ বিবেচনা করি, অবকলন হলো,

$$df = u\,dx + v\,dy \quad \text{---(1)}$$

যেখানে $u = \frac{\partial f}{\partial x}$, $v = \frac{\partial f}{\partial y}$

এখন u ও y এর একটি অপেক্ষক g কে সংজ্ঞায়িত করা যাক,

$$g = f - ux$$

$$dg = df - u\,dx - x\,du$$

$$= v\,dy - x\,du \quad [(1) \text{ হতে}]$$

$$x = -\frac{\partial g}{\partial u}, \quad v = \frac{\partial g}{\partial y}$$

এই রূপান্তর হলো লেজেন্ড্রের রূপান্তর।

আবার, $H(q, p, t) = \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t)$

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad \text{—— (2)}$$

সার্বজনীন ভরবেগের সংজ্ঞানুসারে,

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

ল্যাগ্রাঞ্জ সমীকরণ অনুসারে,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{d}{dt}(p_i) = \dot{p}_i$$

সমীকরণ (2) হতে

$$dH = \dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$= \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} \partial t$$

$$\therefore \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$-\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i}$$

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

প্র দেখাও যে কোনো স্থানাঙ্ক ল্যাগ্রাঞ্জিয়ানে চক্রীয় হলে তা হ্যামিল্টোনিয়ানেও চক্রীয় হবে।

→ ধরা যাক, q_i হলো চক্রীয় স্থানাঙ্ক। তাহলে এটি ল্যাগ্রাঞ্জ অপেক্ষকে অনুপস্থিত থাকবে।

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

$$\Rightarrow p_i = \text{ধ্রুবক}$$

যদি p_i ধ্রুবক হয় তাহলে হ্যামিল্টনের গতির সমীকরণ অনুসারে

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0$$

এ থেকে বলা যায় যে q_i এর উপর H নির্ভরশীল নয় অর্থাৎ H অপেক্ষকে q_i আবির্ভূত হবে না অতএব হ্যামিল্টোনিয়ানেও q_i চক্রীয় হবে।

যদি কোন স্থানাঙ্ক চক্রীয় হয় তাহলে তা নতুন হ্যামিল্টনে চলক সংখ্যা দুই হ্রাস করবে। যেমন: ধরা যাক q_n চক্রীয় তাহলে p_n একটি ধ্রুবক α ধরি। বলা যায় $H = H(q_1 \cdots q_{n-1}, p_1 \cdots p_{n-1}, \alpha)$। যেহেতু সমাকলনে ধ্রুবক α ব্যতীত q_n স্থানাঙ্কগুলো অগ্রাহ্য করে

অসমাধান করা যায় তাই তাদের স্থানাংককে অবাধ্য স্থানাঙ্ক বলে।

$$\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n} = \frac{\partial H}{\partial \alpha}$$

কোন স্থানাঙ্ক q_i ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান L তে অনুপস্থিত থাকলে সাধারণভাবে q_i সহজেই অনুপস্থিত হয়ে যায়।

হ্যামিল্টনের গতির সমীকরণ ব্যবহার করে কেন্দ্রীয় বলের অধীনে একটি কণার গতির সমীকরণ বের কর।

→ কেন্দ্রীয় বল হলো সেই বল যা সর্বদা একটি নির্দিষ্ট বিন্দু অভিমুখে ক্রিয়াশীল থাকে। কেন্দ্রীয় বলের অধীনে বস্তু কণার গতি সর্বদা একটি তলে সীমাবদ্ধ থাকে তাই (r, θ) স্থানাংককে গতি বর্ণনার জন্য বিবেচনা করা যায়। অতএব গতিশক্তি

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

এবং বিভবশক্তি $V = V(r)$

ল্যাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক $L = T - V$

$$= \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

তাহলে, $p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$

$$\Rightarrow \dot{r} = p_r/m$$

$$P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = mr^2\dot\theta$$

$$\Rightarrow \dot\theta = P_\theta / mr^2$$

হ্যামিলটোনিয়ান $H = T + V$

$$= \frac{1}{2} m(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2) + V(r)$$

$$= \frac{P_r^2}{2m} + \frac{P_\theta}{2mr^2} + V(r)$$

অতএব গতির সমীকরণসমূহ হবে,

$$\left.\begin{aligned} \dot P_r &= -\frac{\partial H}{\partial r} \\ &= \frac{P_\theta^2}{mr^3} - \frac{\partial V}{\partial r} \\ \dot P_\theta &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \end{aligned}\right\} \text{——} (1)$$

এবং

$$\left.\begin{aligned} \dot r &= \frac{\partial H}{\partial P_r} = \frac{P_r}{m} \\ \dot\theta &= \frac{\partial H}{\partial P_\theta} = \frac{P_\theta}{mr^2} \end{aligned}\right\} \text{——} (2)$$

(2) নং ও (1) নং ব্যবহার করে

$$\left.\begin{aligned} \ddot r &= \frac{\dot P_r}{m} \\ &= \frac{P_\theta^2}{m^2 r^3} - \frac{1}{m}\frac{\partial V}{\partial r} \\ m\ddot r &= \frac{P_\theta^2}{mr^3} - \frac{\partial V}{\partial r} \end{aligned}\right\} \text{——} (3)$$

② হতে,

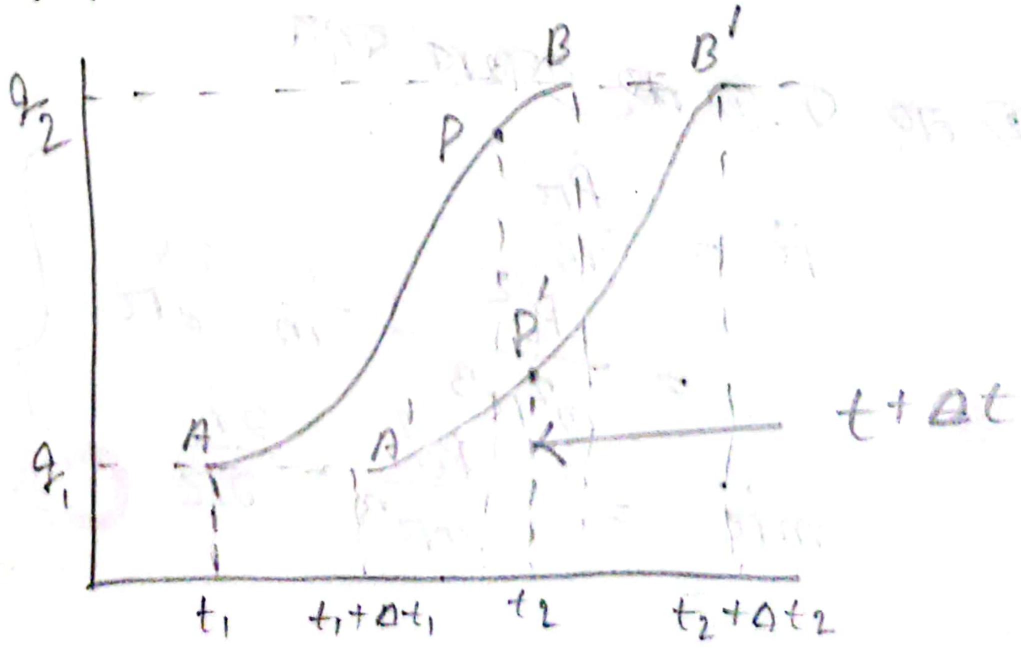
$$\frac{P_\theta^2}{mr^3} = \frac{(mr^2\dot\theta)^2}{mr^3}$$
$$= m r \dot\theta^2$$
$$= \frac{m(r\dot\theta)^2}{r}$$
$$= \frac{m v_\theta^2}{r}$$

অতএব ③ হতে, $\left[\because -\frac{\partial V}{\partial r} = F(r)\right]$

$$m\ddot{r} = \frac{m v_\theta^2}{r} + F(r)$$

■ ন্যূনতম ক্রিয়া নীতি বর্ণনা ও প্রমাণ কর।

→ হ্যামিলটোনিয় বলবিদ্যায় একটি গুরুত্বপূর্ণ পরিবর্তন নীতি হলো ন্যূনতম ক্রিয়া নীতি। এটি সিস্টেমের পথের পরিবর্তন সম্পর্কিত অতি সাধারণ নীতি যা স্থানাঙ্ক ও কালাঙ্ক পরিবর্তনের অনুমোদন দেয়।



পথের প্রান্তিক বিন্দুতে অবস্থানগুলো স্থির হয় কিন্তু সময়ের পরিবর্তন অনুমোদিত থাকে। এই পরিবর্তনকে Δ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \sum p_i \dot{q}_i \, dt$$

এ রাশিকে ক্রিয়া হিসেবে সংজ্ঞায়িত করা হয়। সংরক্ষণশীল সিস্টেমের জন্য ন্যূনতম ক্রিয়া নীতিকে নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত করা যায়

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} \sum_i p_i \dot{q}_i \, dt = 0$$

প্রমাণ: ন্যূনতম ক্রিয়া নীতি প্রমাণের জন্য A বিবেচনা করা যাক,

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i p_i \dot{q}_i \, dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} (L + H) \, dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} L \, dt + H(t_2 - t_1) \quad \text{---} (1)$$

এখানে H সংরক্ষিত।

এখন ক্রিয়া A এর Δ পরিবর্তন হলো

$$\Delta A = \Delta \int_{t_1}^{t_2} L\,dt + H\Delta(t_2 - t_1)$$

$$= \Delta \int_{t_1}^{t_2} L\,dt + H\Delta t \Big|_{t_1}^{t_2} \quad \text{——} (2)$$

ধরা যাক $\int_{t_1}^{t_2} L\,dt = I$

$$\Rightarrow \dot{I} = L$$

আমরা জানি,

$$\Delta I = \delta I + \dot{I}\Delta t$$

$$\Rightarrow \Delta \int_{t_1}^{t_2} L\,dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L\,dt + L\Delta t \Big|_{t_1}^{t_2} \quad \text{——} (3)$$

(3) নং কে (2) এ ব্যবহার করে,

$$\Delta A = \delta \int_{t_1}^{t_2} L\,dt + L\Delta t \Big|_{t_1}^{t_2} + H\Delta t \Big|_{t_1}^{t_2} \quad \text{——} (4)$$

এখন,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt}(\delta q_i) \right] dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sum \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) \right] dt$$

$\delta q_i = \Delta q_i - \dot{q}_i \Delta t$ বসিয়ে,

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sum \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Delta q_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i \Delta t\right)\right] dt$$

$$= \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Delta q_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i \Delta t\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2}$$

প্রান্তিক বিন্দুতে $\Delta q_i = 0$

$$= -\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i \Delta t \Bigg|_{t_1}^{t_2}$$

$$= -\sum_i p_i \dot{q}_i \Delta t \Bigg|_{t_1}^{t_2}$$

এই মান ④ নং এ বসাই,

$$\Delta A = -\sum_i p_i \dot{q}_i \Delta t \Big|_{t_1}^{t_2} + L\Delta t\Big|_{t_1}^{t_2} + H\Delta t\Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$= \left(H + L - \sum p_i \dot{q}_i\right)\Delta t\Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$= 0 \qquad \left[\because H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L\right]$$

$$\therefore \Delta \int_{t_1}^{t_2} \sum p_i \dot{q}_i \, dt = 0$$

∴ এটিই ন্যূনতম ক্রিয়া নীতি।

প্র: মুখ্য আপেক্ষক কী? মুখ্য আপেক্ষক $F_1(q,Q,t)$ এবং $F_2(q,P,t)$ এর জন্য রূপান্তর সমীকরণ বের কর।

→ F আপেক্ষকের চারটি রূপ

$$F_1(q,Q,t),\ F_2(q,P,t),\ F_3(p,Q,t),\ F_4(p,P,t)$$

যেহেতু F পুরাতন ও নতুন স্থানাঙ্ক উভয়ের আপেক্ষক, তাই পুরাতন থেকে নতুন স্থানাঙ্ক গুচ্ছ রূপান্তরকে প্রভাবিত করতে পারে। এ কারণে F কে মুখ্য আপেক্ষক বলে।

১ম রূপ: আমরা জানি,

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H = \sum P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF_1(q,Q,t)}{dt} \quad \text{---(1)}$$

যেটি সময়ের সাথে অন্তরকলন হলো

$$\frac{dF_1}{dt} = \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\dot{Q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

(1) হতে,

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K + \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\dot{Q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \sum_i \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_i} - p_i\right)\dot{q}_i + \sum_i \left(\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} + P_i\right)\dot{Q}_i - K + H + \frac{\partial F_1}{\partial t} = 0 \quad \text{---(2)}$$

অর্থাৎ $$p_i = \frac{\partial F_1(q,Q,t)}{\partial q_i}$$

$$\left.\begin{aligned} P_i &= -\frac{\partial F_1(q,Q,t)}{\partial Q_i} \\ K &= H + \frac{\partial F_1(q,Q,t)}{\partial t} \end{aligned}\right\} \text{— (3)}$$

(3) নং এর প্রথম দুটি সমাধান করে পাওয়া যায়,

$$Q_i = Q_i(q_i, P_i, t) \quad \text{— (4)}$$

$$p_i = p_i(q_i, P_i, t) \quad \text{— (5)}$$

সমীকরণ (4) ও (5) নিয়ে রূপান্তর সমীকরণ এবং সমীকরণ (3) এর তৃতীয় সমীকরণ পুরাতন ও নতুন স্থানাংকের হ্যামিলটোনিয়ানদ্বয়ের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করে।

২য় রূপ: $$F_2(q_i, P_i, t) = F_1(q_i, Q_i, t) + \sum_i P_i Q_i \quad \text{— (6)}$$

(6) থেকে F_1 এর মান (1) নং এ বসাই,

$$\sum p_i \dot{q}_i - H = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K + \sum \frac{\partial F_2}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum \frac{\partial F_2}{\partial P_i}\dot{P}_i + \frac{\partial F_2}{\partial t} - \sum_i \dot{P}_i Q_i - \sum P_i \dot{Q}_i$$

$$p_i)\dot{q}_i + \sum\left(\frac{\partial F_2}{\partial p_i} - Q_i\right)\dot{p}_i + H + \frac{\partial F_2}{\partial t} - K = 0 \quad \text{--- (7)}$$

$$\frac{\partial F_2(q_i, p_i, t)}{\partial q_i} \quad \text{--- (8)}$$

$$\frac{\partial F_2(q_i, p_i, t)}{\partial p_i} \quad \text{--- (9)}$$

$$\frac{\partial F_2(q_i, p_i, t)}{\partial t} \quad \text{--- (10)}$$

$i, p_i, t)$

$i, p_i, t)$

সমীকরণ ।

$$\Rightarrow \sum_i \left(\frac{\partial F_2}{\partial q_i} - p_i\right) \dot{q}_i + \sum_i \left(\frac{\partial F_2}{\partial P_i} - Q_i\right) \dot{P}_i + H + \frac{\partial F_2}{\partial t} - K = 0 \quad \text{--- (7)}$$

অর্থাৎ, $$p_i = \frac{\partial F_2(q_i, P_i, t)}{\partial q_i} \quad \text{--- (8)}$$

$$Q_i = \frac{\partial F_2(q_i, P_i, t)}{\partial P_i} \quad \text{--- (9)}$$

$$K = H + \frac{\partial F_2(q_i, P_i, t)}{\partial t} \quad \text{--- (10)}$$

(8) নং সমাধান করে,

$$P_i = P_i(q_i, p_i, t)$$

(9) নং সমাধান করে,

$$Q_i = Q_i(q_i, p_i, t)$$

অনুরূপভাবে নির্ণেয় রূপান্তর সমীকরণ।

প্র: অভিলম্বন রূপান্তর কী? দেখাও যে পয়সন বন্ধনী অভিলম্বন রূপান্তরের অধীনে অপরিবর্তিত থাকে।

→ অভিলম্বন বা ক্যানোনিক্যাল রূপান্তর হলো সেই রূপান্তর যা থেকে স্থানাঙ্ক ও ভরবেগ সম্পর্কিত তথ্য পাওয়া যায়। ধরা যাক কোনো সিস্টেম বিবেচনাধীন স্থানাঙ্ক q_i ও ভরবেগ p_i থেকে স্থানান্তরিত হয়ে যায়।

$$Q_i = Q_i(q, p, t)$$

$$P_i = P_i(q, p, t)$$

পয়সন বন্ধনী অভিলম্বন রূপান্তরের সাপেক্ষে অপরিবর্তী।

$$[X, Y]_{q,p} = [X, Y]_{Q,P} \quad \text{--- (1)}$$

$$[X, Y]_{Q,P} = \sum_i \left(\frac{\partial X}{\partial Q_i} \frac{\partial Y}{\partial P_i} - \frac{\partial X}{\partial P_i} \frac{\partial Y}{\partial Q_i} \right)$$

$$= \sum_{i,j} \left\{ \frac{\partial X}{\partial Q_i} \left(\frac{\partial Y}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial P_i} + \frac{\partial Y}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial P_i} \right) - \frac{\partial X}{\partial P_i} \left(\frac{\partial Y}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} + \frac{\partial Y}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial Q_i} \right) \right\}$$

$$= \sum_j \left\{ \frac{\partial Y}{\partial q_j} [X, q_j]_{Q,P} + \frac{\partial Y}{\partial p_j} [X, p_j]_{Q,P} \right\} \quad \text{--- (2)}$$

এখানে X এর স্থানে q_j এবং Y এর স্থানে X নিয়ে $[q_j, X]_{QP}$

$$[X, q_j]_{QP} = -[q_j X]_{Q,P}$$

$$= -\sum_m \left\{ \frac{\partial q_j}{\partial Q_m} \frac{\partial X}{\partial P_m} - \frac{\partial q_j}{\partial P_m} \frac{\partial X}{\partial Q_m} \right\}$$

$$= -\sum_{m,K} \left\{ \frac{\partial q_j}{\partial Q_m} \left(\frac{\partial X}{\partial q_K} \frac{\partial q_K}{\partial P_m} + \frac{\partial X}{\partial P_K} \frac{\partial P_K}{\partial P_m} \right) - \frac{\partial q_j}{\partial P_m} \left(\frac{\partial X}{\partial q_K} \frac{\partial q_K}{\partial Q_m} + \frac{\partial X}{\partial P_K} \frac{\partial P_K}{\partial Q_m} \right) \right\}$$

$$= -\sum_K \left\{ \frac{\partial X}{\partial q_K} [q_j, q_K]_{Q,P} + \frac{\partial X}{\partial P_K} [q_j, P_K]_{Q,P} \right\}$$

$$= -\sum_K \frac{\partial X}{\partial P_K} \delta_{jK}$$

$$= -\frac{\partial X}{\partial P_j}$$

অনুরূপভাবে, $[X, P_j]_{Q,P} = \frac{\partial X}{\partial q_j}$

$$\therefore [X, Y]_{Q,P} = \sum_j \left\{ -\frac{\partial Y}{\partial q_j} \frac{\partial X}{\partial P_j} + \frac{\partial Y}{\partial P_j} \frac{\partial X}{\partial q_j} \right\}$$

$$= [X, Y]_{q,P}$$

$\therefore$ অভিলম্বন রূপান্তরের সাপেক্ষে পয়সন বন্ধনী অপরিবর্তী।

প্র: ল্যাগ্রাঞ্জ বন্ধনী ও পয়সন বন্ধনীর সম্পর্ক বের কর।

→ ল্যাগ্রাঞ্জ বন্ধনী $\{u_l, u_i\}$ ও পয়সন বন্ধনী $[u_l, u_j]$ হলে তাদের সম্পর্ক

$$\sum_{l=1}^{2n} \{u_l, u_i\}[u_l, u_j] = \delta_{ij}$$

ল্যাগ্রাঞ্জ ও পয়সন বন্ধনীর সংজ্ঞানুসারে,

$$\sum_{l=1}^{2n} \{u_l, u_i\}[u_l, u_j] = \sum_{l=1}^{2n} \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial q_k}{\partial u_l} \frac{\partial p_k}{\partial u_i} - \frac{\partial q_k}{\partial u_i} \frac{\partial p_k}{\partial u_l} \right) \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{\partial u_l}{\partial q_m} \frac{\partial u_j}{\partial p_m} - \frac{\partial u_l}{\partial p_m} \frac{\partial u_j}{\partial q_m} \right) \right) \quad (1)$$

$$\sum_{k,m=1}^{n} \frac{\partial p_k}{\partial u_i} \frac{\partial u_j}{\partial p_m} \sum_{l=1}^{2n} \frac{\partial q_k}{\partial u_l} \frac{\partial u_l}{\partial q_m}$$

$$= \sum_{k,m} \frac{\partial p_k}{\partial u_i} \frac{\partial u_j}{\partial p_m} \cdot \frac{\partial q_k}{\partial q_m}$$

$$= \sum_{k,m} \frac{\partial p_k}{\partial u_i} \frac{\partial u_j}{\partial p_m} \delta_{km}$$

যেখানে $\delta_{km} = \frac{\partial p_m}{\partial p_k}$

$$\sum_{k,m=1}^{n} \frac{\partial p_k}{\partial u_i} \frac{\partial u_j}{\partial p_m} \sum_{l=1}^{2n} \frac{\partial q_k}{\partial u_l} \frac{\partial u_l}{\partial q_m}$$

$$= \sum_{k,m} \frac{\partial p_k}{\partial u_i} \frac{\partial u_j}{\partial p_m} \cdot \frac{\partial p_m}{\partial p_k}$$

$$= \sum_{k} \frac{\partial p_k}{\partial u_i} \frac{\partial u_j}{\partial p_k} \quad \text{--- (2)}$$

$$\sum_{k,m=1}^{n} \frac{\partial q_k}{\partial u_i} \frac{\partial u_j}{\partial q_m} \cdot \sum_{l=1}^{2n} \frac{\partial p_k}{\partial u_l} \frac{\partial u_l}{\partial p_m}$$

$$= \sum_{k,m} \frac{\partial q_k}{\partial u_i} \frac{\partial u_j}{\partial q_m} \cdot \frac{\partial p_k}{\partial p_m}$$

$$= \sum_{k,m} \frac{\partial q_k}{\partial u_i} \frac{\partial u_j}{\partial q_m} \delta_{km}$$

$$= \sum_{k,m} \frac{\partial q_k}{\partial u_i} \frac{\partial u_j}{\partial q_m} \cdot \frac{\partial q_m}{\partial q_k}$$

$$= \sum_{k} \frac{\partial q_k}{\partial u_i} \frac{\partial u_j}{\partial q_k} \quad \text{--- (3)}$$

② নং এর রাশিমালার বাকি দুটি পদ শূন্য হবে।

$$-\sum_{k,m=1}^{n} \frac{\partial p_k}{\partial u_i}\frac{\partial u_j}{\partial q_m}\sum_{l=1}^{2n}\frac{\partial q_k}{\partial u_l}\frac{\partial u_l}{\partial p_m} = 0$$

আবার ② এর রাশিমালাকে লিখা যায়,

$$\sum_k \frac{\partial p_k}{\partial u_i}\frac{\partial u_j}{\partial p_k} + \sum_k \frac{\partial q_k}{\partial u_i}\frac{\partial u_j}{\partial q_k} = \sum_k\left(\frac{\partial u_j}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial u_i} + \frac{\partial u_j}{\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial u_i}\right)$$

$$= \frac{\partial u_j}{\partial u_i}(q_k, p_k)$$

$$= \frac{\partial u_j}{\partial u_i}$$

$$= \delta_{ij}$$

$$\therefore \sum_{l=1}^{2n}\{u_l, u_i\}[u_l, u_j] = \delta_{ij}$$

প্র: ল্যাগ্রাঞ্জ বন্ধনী অধিলঘুকরণ রূপান্তরের অধীনে অপরিবর্তী থাকে।

→ q_i ও p_i এর নিরিখে u ও v এর সাপেক্ষে ল্যাগ্রাঞ্জ বন্ধনীকে $\{u,v\}_{q,p}$ দিয়ে প্রকাশ করা যায়,

$$\{u,v\}_{q,p} = \sum_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial p_i}{\partial u} \frac{\partial q_i}{\partial v} \right) \quad \text{—— (1)}$$

পয়েনকেয়ারের তত্ত্ব অনুসারে,

$$J_1 = \iint_S \sum_i dq_i \, dp_i \quad \text{—— (2)}$$

যেখানে,

$$\left.\begin{aligned} q_i &= q_i(u,v) \\ p_i &= p_i(u,v) \end{aligned}\right\} \quad \text{—— (3)}$$

আবার,

$$dq_i \, dp_i = \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u,v)} du\, dv \quad \text{—— (4)}$$

যেখানে জেকোবিয়ান,

$$\frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial q_i}{\partial u} & \frac{\partial p_i}{\partial u} \\ \frac{\partial q_i}{\partial v} & \frac{\partial p_i}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$\therefore \sum \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u,v)} = \sum_i \frac{\partial(Q_i, P_i)}{\partial(u,v)}$$

$$\Rightarrow \sum_i \begin{vmatrix} \frac{\partial q_i}{\partial u} & \frac{\partial p_i}{\partial u} \\ \frac{\partial q_i}{\partial v} & \frac{\partial p_i}{\partial v} \end{vmatrix} = \sum_i \begin{vmatrix} \frac{\partial Q_i}{\partial u} & \frac{\partial P_i}{\partial u} \\ \frac{\partial Q_i}{\partial v} & \frac{\partial P_i}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \sum_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial q_i}{\partial v} \frac{\partial p_i}{\partial u} \right) = \sum \left(\frac{\partial Q_i}{\partial u} \frac{\partial P_i}{\partial v} - \frac{\partial Q_i}{\partial v} \frac{\partial P_i}{\partial u} \right)$$

$$\therefore \{u, v\}_{q,p} = \{u, v\}_{Q,P}$$