Solid state physics-I - PH-303

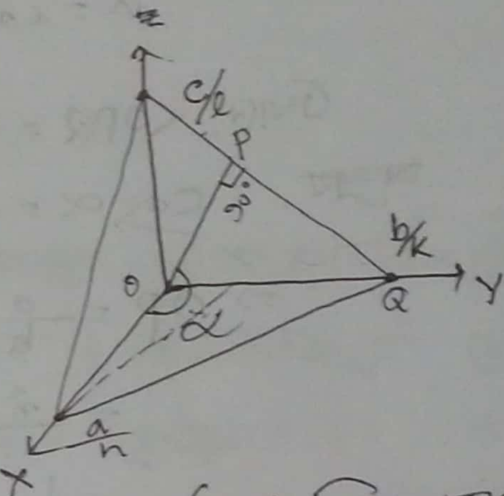
Parvez

Qn-1 একটি a ল্যাটিস প্যারামিটার বিশিষ্ট কিউবিক ক্রিস্টালের দেখাও যে (hkl) মিলার সূচক বিশিষ্ট পাশাপাশি দুটি তলের মধ্যবর্তী ব্যবধান হলো:-

$$d_{hkl}=\frac{a}{\sqrt{h^2+k^2+l^2}}$$

সমাধান

চিত্রে (hkl) মিলার সূচক বিশিষ্ট একটি ক্রিস্টাল তল প্রদর্শন করা হলো। এই তলটি দ্বারা x, y, z অক্ষত্রয় থেকে কর্তিত ছেদাংশ হলো $\frac{a}{h}$, $\frac{b}{k}$ ও $\frac{c}{l}$।



চিত্র: (hkl) মিলার সূচকবিশিষ্ট একটি তল।

অতএব তলটির সমীকরণ হলো:-

$$\frac{x}{\frac{a}{h}}+\frac{y}{\frac{b}{k}}+\frac{z}{c/l}=1$$

অতএব, তলটির সমীকরণ লিখতে পারি,

$$\phi(x,y,z)=x\cdot\frac{h}{a}+y\frac{k}{b}+z\cdot\frac{l}{c}=1$$

এই তলটির উপর যে কোন লম্ব ভেক্টর হলো:-

$$\vec{\nabla}\phi=\left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(x\cdot\frac{h}{a}+y\frac{k}{b}+z\cdot\frac{l}{c}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\phi=\hat{i}\frac{h}{a}+\hat{j}\frac{k}{b}+\hat{k}\frac{l}{c}$$

এই লম্ব ভেক্টরটির দিকে একক ভেক্টর হলো:-

$$\hat{n}=\frac{\hat{i}\frac{h}{a}+\hat{j}\frac{k}{b}+\hat{k}\frac{l}{c}}{\sqrt{\frac{h^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}+\frac{l^2}{c^2}}} \quad \text{——— (i)}$$

এখন, ক্রিস্টালের একটি একক সেলের কোণ বিবেচনা করি। মূলবিন্দু O

যেহেতু ল্যাটিস তলটির উপর অংকিত লম্ব OP অক্ষের দিকে, এই লম্ব বরাবর একক ভেক্টরটি হলো সমীকরণ (i) এ প্রদর্শিত একক ভেক্টরটি।

ধরি, OP যেখানে x অক্ষের সাথে α কোণ উৎপন্ন করে। কিউবিক ল্যাটিসের ক্ষেত্রে $\vec{a}$ ভেক্টরটি হলো x অক্ষ বরাবর। অতএব আমরা লিখতে পারি,

$$\vec{a} = \hat{i}a \quad \text{——— (ii)}$$

এখানে, $\angle OPQ = 90^\circ$

অতএব, $\cos\alpha = \dfrac{OP}{a/h}$

$$\Rightarrow OP = \frac{a}{h}\cdot\cos\alpha$$

$$= \frac{\hat{n}\cdot\hat{i}a}{h}$$

$$= \frac{1}{h}\cdot\frac{\left[\hat{i}\cdot\frac{h}{a}+\hat{j}\frac{k}{b}+\hat{k}\frac{l}{c}\right]\cdot\hat{i}a}{\sqrt{\frac{h^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}+\frac{l^2}{c^2}}}$$

অতএব,

$$d = OP = \frac{1\cdot h}{h\sqrt{\frac{h^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}+\frac{l^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{h^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}+\frac{l^2}{c^2}}}$$

কিউবিক ল্যাটিসের ক্ষেত্রে $a=b=c$। অতএব (hkl) মিলার সূচক বিশিষ্ট পাশাপাশি দুটি তলের মধ্যবর্তী দূরত্ব:

$$d_{hkl} = \frac{1}{\sqrt{\frac{h^2}{a^2}+\frac{k^2}{a^2}+\frac{l^2}{a^2}}}$$

$$\therefore d_{hkl} = \frac{a}{\sqrt{h^2+k^2+l^2}}$$

$\boxed{\text{Proved}}$

প্রশ্ন-২ঃ-

(i) ল্যাটিস কী?

= কতগুলো বিন্দু বা পরমানুকে সাজানোর প্রক্রিয়াকে ল্যাটিস বলা হয়।

(ii) বেসিস কী?

= কতগুলো এটম বা বিন্দুকে পর্যাবৃত্তভাবে সাজানোর প্রক্রিয়াকে বেসিস বলা হয়।

(iii) ক্রিস্টাল কী?

= একটি ক্ষুদ্র এককের পর্যাবৃত্তভাবে সাজানোর ফলে যে সিস্টেম উৎপন্ন হয় তাহাকে ক্রিস্টাল বলা হয়। গানিতিকভাবে ক্রিস্টাল এর সংজ্ঞা হলোঃ ল্যাটিস + বেসিস = ক্রিস্টাল।

(iv) একক সেল কী?

= যে ক্ষুদ্রতম এককের পর্যাবৃত্ত পুনরাবৃত্তির মাধ্যমে একটি ক্রিস্টাল গঠিত হয় তাহাকে একক সেল বলা হয়।

(v) আদি সেলঃ?

= ক্ষুদ্র আয়তনবিশিষ্ট একক সেলকে আদি সেল বলা হয়।

(vi) প্যাকিং ভগ্নাংশ কী?

= একটি ক্রিস্টালের মোট আয়তন ও ক্রিস্টালটির আয়তনের অনুপাতকে প্যাকিং ভগ্নাংশ বলা হয়। অন্যভাবে একটি ক্রিস্টালে একটি একক সেল এ এটম দ্বারা অধিকৃত ও একক সেলের আয়তনের অনুপাতকে

প্যাকিং ভগ্নাংশ বলা হয়। অর্থাৎ প্যাকিং ভগ্নাংশ

$$P.F = \frac{\text{একক সেল এ এটম দ্বারা অধিকৃত আয়তন}}{\text{একক সেল এর আয়তন}}$$

(Qn-vii) প্রতিসাম্য ক্রিয়া কী?

= প্রতিসাম্য ক্রিয়া বলতে একটি প্রক্রিয়াকে বুঝায় যে প্রক্রিয়ায় ক্রিস্টাল রূপান্তরিত হয়ে আদি ক্রিস্টালই গঠন করে।

Qn-viii) মিলার সূচক কাকে বলে?

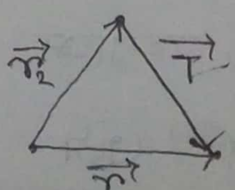
= কোন ক্রিস্টালের তলসমূহের অবস্থান ও দিগবস্থা নির্ণয়ের জন্য তিন সংখ্যার একটি সেট বা গুচ্ছ ব্যবহার করা হয়। এ সংখ্যা সেটকে মিলার সূচক বলা হয়।

Qn-ix: বিপরীত ল্যাটিস কাকে বলে?

= মূলবিন্দু হতে $\frac{1}{d_{hkl}}$ দূরত্বে প্রতিটি লম্বের উপর একটি বিন্দু নেওয়া হয়। প্রকৃত পক্ষে এভাবে নির্বাচিত বিন্দুগুলো একটি পর্যায় ক্রমিক সজ্জা গঠন করে। এ সজ্জাকেই বিপরীত ল্যাটিস বা টেলো ল্যাটিস বলা হয়।

Qn-x: ট্রান্সলেশন বা স্থানান্তর ভেক্টর কী?

= চিত্রে, O বিন্দুর সাপেক্ষে অপর দুটি বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\vec{r_1}$ ও $\vec{r_2}$ দেখানো হয়েছে। $\vec{r_1}$ ও $\vec{r_2}$ ভেক্টরের পার্থক্যকে স্থানান্তর ভেক্টর $\vec{T}$ বলা হয়।



xi :- অ-আদি সেল কাকে বলে?

= যেসব একক কোষে শুধুর অধিক ল্যাটিস বিন্দু থাকে তাকে অআদি কোষ বলা হয়।

প্রশ্ন-৩: ক্রিস্টাল কাঠামো বলতে কি বুঝ?

সমাধান

ক্রিস্টাল কাঠামো বলতে পদার্থের অভ্যন্তরীন পরমানু, আয়ন বা অনুগুলির একটি সুশৃঙ্খল, নিয়মিত এবং পুনরাবৃত্তিক মূলক বিন্যাসকে বোঝায়। এটি সাধারনত কঠিন পদার্থে দেখা যায়। ক্রিস্টাল কাঠামো এমন ভাবে গঠিত হয় যে একটি ছোট একক কোষ বারবার পুনরাবৃত্তি হয়ে সমগ্র কাঠামো তৈরি করে।

ক্রিস্টাল কাঠামোর বৈশিষ্ট্য:

(i) সিমেট্রি: ক্রিস্টাল কাঠামোতে বিভিন্ন সিমেট্রি এলিমেন্ট থাকে, যেমন ঘূর্নন, প্রতিফলন।

(ii) পুনরাবৃত্তি: এটি একটি নিয়মিত জ্যামিতিক প্যাটার্নে সাজানো থাকে।

(iii) একক কোষ: ক্রিস্টালের ক্ষুদ্রতম অংশ, যা সমগ্র কাঠামো গঠনের জন্য পুনরাবৃত্তি হয়।

(iv) ত্রিমাত্রিক গঠন: ক্রিস্টাল কাঠামো সাধারনত ত্রিমাত্রিক হয়।

উদাহরন:

ডায়মন্ড ক্রিস্টাল কাঠামো: কার্বন পরমানুগুলি একটি ত্রিমাত্রিক

সেন্ট্রাহেড্রাল জালকে সাজানো থাকে।

সোডিয়াম ক্লোরাইড: এটি একটি কিউবিক ক্রিস্টাল কাঠামোতে সাজানো।

সাধারণত ক্রিস্টাল কাঠামো গবেষণা করা হয় পদার্থের বৈশিষ্ট্য বোঝার জন্য, যেমন, কঠোরতা, তাপ ও বিদ্যুৎ পরিবাহিতা ইত্যাদি।

প্রশ্ন-৫: আদি কোষ ও অ-আদি কোষের মধ্যে পার্থক্য লিখ?

সমাধান

আদি ও অ-আদি কোষের মধ্যে পার্থক্য:-

নং	আদি কোষ	অ-আদি কোষ
১.	আদি অক্ষ a, b, ও c দিয়ে সংজ্ঞায়িত সমান্তরালের কোষকে আদি কোষ বলে।	অ-আদি অক্ষ a, b ও c দ্বারা সংজ্ঞায়িত সমান্তরালের কোষকে অ-আদি কোষ বলে।
২.	আদি কোষের আয়তন হয় সর্বনিম্ন।	অ-আদি কোষের আয়তন সর্বনিম্ন হয় না।
৩.	প্রতিটি আদি কোষে একটিমাত্র ল্যাটিস বিন্দু থাকে।	অ-আদি কোষের ল্যাটিস বিন্দুর সংখ্যা একাধিক হয়।
৪.	আদি কোষের জ্যামিতিক কাঠামোর শুধুমাত্র কোনাতে ল্যাটিস বিন্দু অবস্থান করে।	অ-আদি কোষে কোনাতে ছাড়াও অন্যত্র ল্যাটিস বিন্দু অবস্থান করে।

প্র-5: ল্যাটিস ধ্রুবক বলতে কী বুঝায়? ব্রাভেইস ল্যাটিসগুলোর শ্রেণিবিভাগ বর্ননা কর?

সমাধান

ল্যাটিস ধ্রুবক: ল্যাটিস ধ্রুবক বলতে ক্রিস্টাল পদার্থবিজ্ঞানে একটি স্ফটিক জালের মৌলিক কোষের প্রান্তের দৈর্ঘ্য বোঝানো হয়। এটি একটি স্ফটিকের কাঠামোতে পরমানু বা আয়নের মধ্যে বর্তি দূরত্ব নির্দেশ করে।

ল্যাটিস ধ্রুবক সাধারনত একটি ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্কের জন্য a, b, এবং c দিয়ে প্রকাশ করা হয়। যেখানে এগুলো তিনটি প্রান্তের দৈর্ঘ্য। এগুলোর মধ্যেকার কোনগুলোকে α, β, γ দিয়ে প্রকাশ করা হয়। এটি সাধারনত (A°) অ্যাংস্ট্রম বা (nm) ন্যানোমিটার এককে প্রকাশ করা হয়। ল্যাটিস ধ্রুবক ক্রিস্টালের ধাতব, আয়নিক অথবা কোভালেন্ট বন্ধনের প্রকৃতি ও পারমানবিক গঠনের উপর নির্ভর করে। ল্যাটিস ধ্রুবক স্ফটিক পদার্থের বৈশিষ্ট যেমন ঘনত্ব, স্থিতিস্থাপকতা এবং তাপ পরিবাহিতার ক্ষেত্রে গুরুত্বপূর্ন ভূমিকা পালন করে।

ব্রাভেইস ল্যাটিসগুলোর শ্রেনিবিভাগ:- সাধারনত 2 প্রকার: যথা

১. দ্বিমাত্রিক ব্রাভেইস ল্যাটিস।

২. ত্রিমাত্রিক ব্রাভেইস ল্যাটিস।

১. দ্বিমাত্রিক ব্রাভেইস ল্যাটিস:- ব্রাভেইস ল্যাটিস সাধারনত 5 প্রকার:-

১. তীর্যক ল্যাটিস:-

$a \neq b$ এবং $\gamma = 90^\circ$

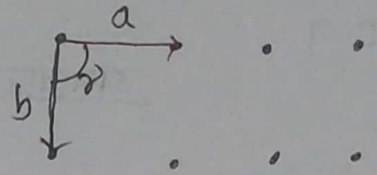
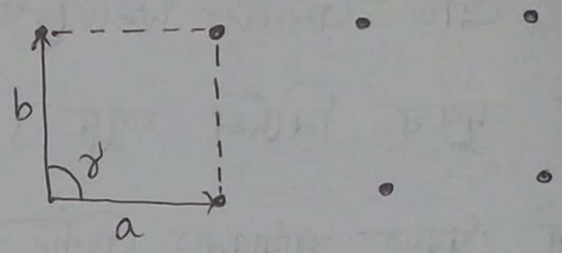


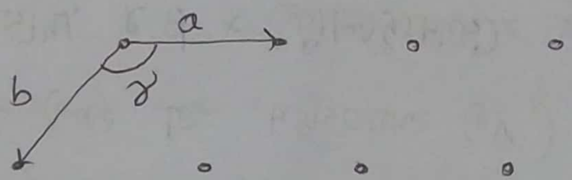
Fig: তীর্যক ল্যাটিস।

২. বর্গাকার ল্যাটিস:

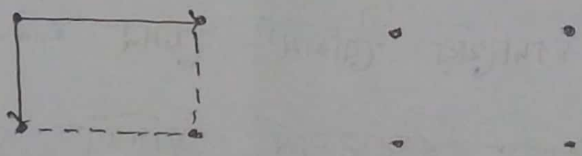
$a = b$ এবং $\gamma = 90^\circ$



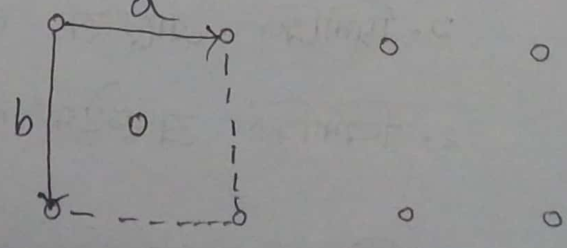
৩. হেক্সাগোনাল ল্যাটিস:- $a = b$, $\gamma = 120^\circ$



৪. আদি আয়তাকার:- $a \neq b$, $\gamma = 90^\circ$



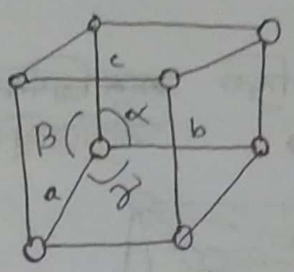
৫. কেন্দ্রিক আয়তাকার: $a \neq b$ $\gamma = 90^\circ$



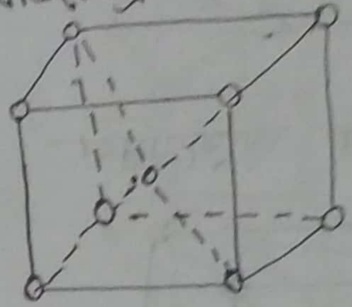
২. ত্রিমাত্রিক ল্যাটিস: ত্রিমাত্রিক উপাদানের জন্য ল্যাটিসের বৈশিষ্ট্য আকৃতি। এ আকৃতি বৈশিষ্ট্যের ভিত্তিতে ত্রিমাত্রিক কাঠামোকে সাতভাগে ভাগ করা যায়। যথা:-

(i) কিউবিক ক্লাস: $a=b=c$ এবং $\alpha=\beta=\gamma=90^\circ$

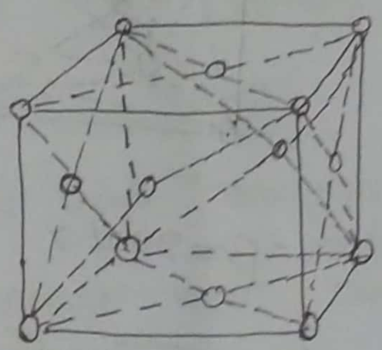
a. সাধারণ কিউবিক।



b. বডিসেন্ট্রিক কিউবিক।

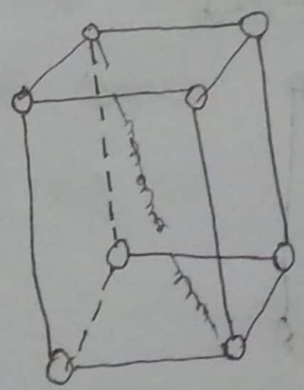


c. ফেস সেন্ট্রিক কিউবিক।

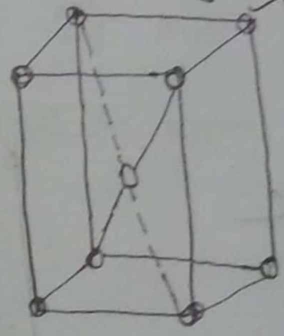


(ii) টেট্রাগোনাল: $a=b\neq c$ এবং $\alpha=\beta=\gamma=90^\circ$

a. সাধারণ টেট্রাগোনাল:

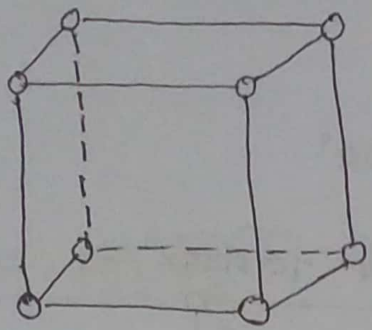


b. বডি সেন্ট্রিক টেট্রাগোনাল

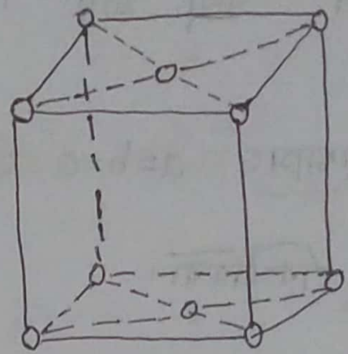


3. **অর্থোরম্বিক:** $a \neq b \neq c$ এবং $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$

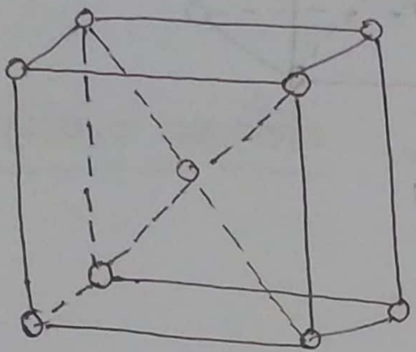
a. সাধারন অর্থোরম্বিক।



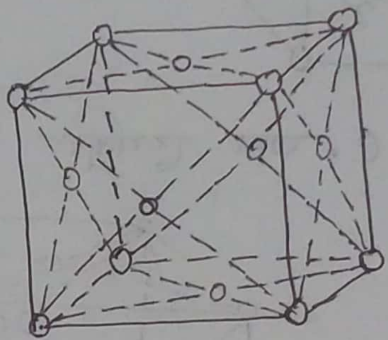
b. ভূমি কেন্দ্রিক অর্থোরম্বিক।



c. বডি কেন্দ্রিক অর্থোরম্বিক

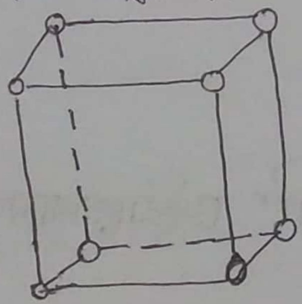


d. ~~ভূমি~~ ফেস কেন্দ্রিক ~~মনোক্লিনিক~~। অর্থোরম্বিক

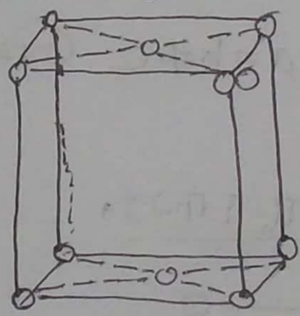


4. **মনোক্লিনিক:** $a \neq b \neq c$ এবং $\alpha = \beta = 90^\circ \neq \gamma$

a. সাধারন মনোক্লিনিক।

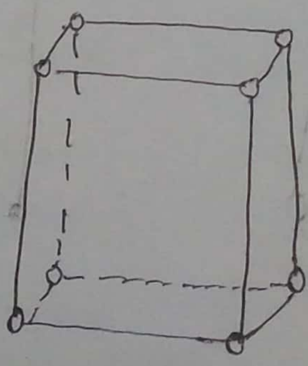


b. ভূমি কেন্দ্রিক মনোক্লিনিক।



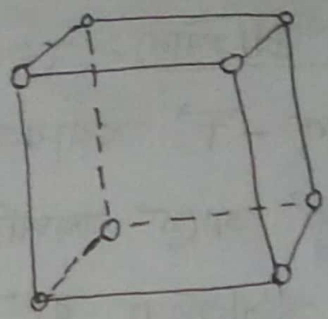
5. **ট্রাইক্লিনিক:** $a \neq b \neq c$

$\alpha \neq \beta \neq \gamma$



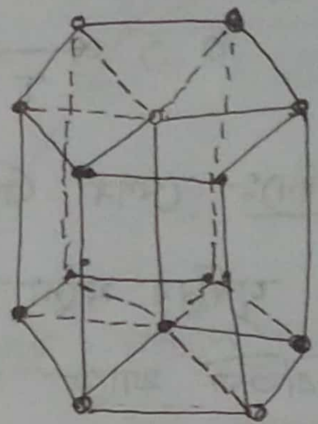
6. ট্রাইগোনাল: $a=b=c$

$\alpha=\beta=\gamma\neq 90^\circ$



7. হেক্সাগোনাল:- $a=b\neq c$

$\alpha=\beta=90^\circ,\ \gamma=120^\circ$

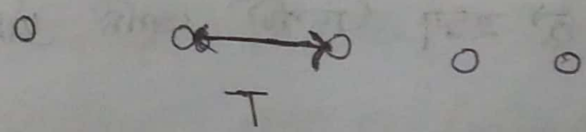


প্র-6:- কেলাসের সাথে সম্পৃক্ত প্রতিসাম্য অপারেশনগুলো বর্ণনা কর?

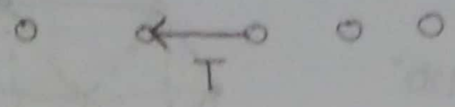
সমাধান

একটি সিস্টেমের উপর একটি অপারেশন সংঘটন করা হলে যদি সিস্টেমটি তার পারস্পরিক অবস্থার সাথে অপরিবর্তিত থাকে তবে তাকে প্রতিসাম্য বলা হয়। প্রতিসাম্য ৪ প্রকার:-

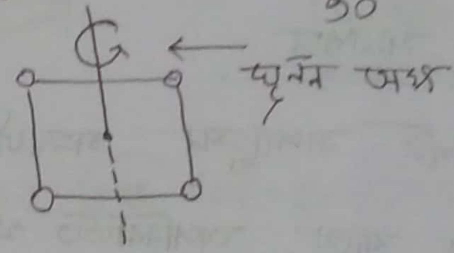
① স্থানান্তর প্রতিসাম্য:- কোন একটি কেলাস সিস্টেমের কোন একটি নির্দিষ্ট দিকে $\vec{T}$ বরাবর স্থানান্তর এর ফলে যদি সিস্টেমটি তার পারস্পরিক অবস্থার সাথে অপরিবর্তিত থাকে তখন তাহলে স্থানান্তর প্রতিসাম্য বলা হয়।



২. বিপরীত বা টেলো প্রতিসাম্য: প্লেন ওর্ল্ড ক্লাস সিস্টেমের নির্দিষ্ট দিকের টেলো দিকে $-\vec{T}$ বরাবর স্থানান্তর এর ফলে যদি সিস্টেমটি পারস্পারিক অবস্থার সাথে অপরিবর্তিত থাকে তখন তাহাকে বিপরীত বা টেলো প্রতিসাম্য বলে।



৩. ঘূর্ণন প্রতিসাম্য: প্লেন ওর্ল্ড অক্ষের সাপেক্ষে ওর্ল্ড সিস্টেমের নির্দিষ্ট প্লেনে ঘূর্ণনের ফলে যদি সিস্টেমটি পারস্পারিক অবস্থার সাথে অপরিবর্তিত থাকে তবে তাহাকে ঘূর্ণন প্রতিসাম্য বলা হয়। 90° ঘূর্ণনের ফলে যদি ওর্ল্ড সিস্টেম পারিপার্শ্বিক অবস্থার সাথে অপরিবর্তিত থাকে তবে তাহাকে $\frac{360}{90} = 4$- fold প্রতিসাম্য বলা হয়।



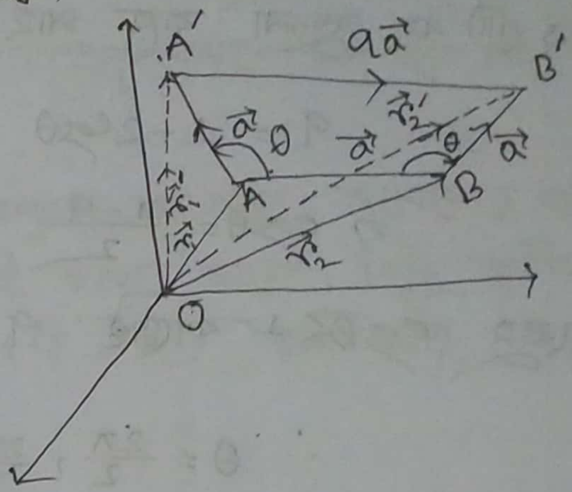
৪. প্রতিফলন প্রতিসাম্য:- যদি প্লেন সিস্টেমের আয়নায় প্রতিবিম্ব নেওয়ার ফলে প্রতিবিম্বটা পারস্পারিক অবস্থার সাথে অপরিবর্তিত থাকে তবে তাহাকে প্রতিফলন প্রতিসাম্য বলা হয়।

Qn-7: দেখাও যে, ক্রিস্টাল ল্যাটিসে 5- ফোল্ড প্রতিসাম্য থাকতে পারে না?

সমাধান

কোন ক্রিস্টাল ল্যাটিসে 5 ফোল্ড প্রতিসাম্য থাকতে পারে না। এটি প্রমানের জন্য ধরা যাক, $\vec{AB} = \vec{a}$ হলো ওর্ল্ড আদি ট্রান্সলেশন ভেক্টর একে

$\vec{OA} = \vec{r_1}$ ও $\vec{OB} = \vec{r_2}$ হলো দুইটি ল্যাটিস ভেক্টর। যেখানে A ও B বিন্দুদ্বয় ক্রিস্টালের মধ্যকার নিকটতম দুটি ল্যাটিস বিন্দু। তাহলে,



$$|\vec{a}| = |\vec{r_1} - \vec{r_2}| \quad \text{—— (i)}$$

ধরা যাক, কাগজের একটি তলের সাথে লম্ব এরূপ একটি রেখা ল্যাটিস পয়েন্ট A দিয়ে গমন করে। $\vec{a}$ ভেক্টর এ রেখার সাপেক্ষে বামাবর্তে $\frac{2\pi}{n} = \theta$ কোণে ঘুরে নতুন ল্যাটিস ভেক্টর $\vec{OA'} = \vec{r_1'}$ উৎপন্ন করে। অনুরূপ ল্যাটিস পয়েন্ট B দিয়ে কাগজের তলের সাথে লম্বভাবে গমন করে সরলরেখার সাপেক্ষে ডানাবর্তে $\frac{2\pi}{n} = \theta$ কোণে ঘুরে নতুন ল্যাটিস ভেক্টর $\vec{r_2'}$ উৎপন্ন করে।

তাহলে,
$$AA' = BB' = |\vec{a}|$$
$$\text{এবং } \angle BAA' = \angle ABB' = \theta$$

এখন, $ABB'A'$ ট্রাপিজিয়ামের AB ও $A'B'$ বাহুদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল। কাজেই $A'B'$ আদি ট্রান্সলেশন ভেক্টর $\vec{a}$ এর গুণিতক হবে। সুতরাং,

$$A'B' = q|\vec{a}| \quad \text{—— (ii)}$$

যেখানে, q একটি সংখ্যা। এখন,

$$A'B' = |\vec{r_1'} - \vec{r_2'}|$$
$$= |\vec{a}| + |\vec{a}| \sin(\theta - \pi/2) + |\vec{a}| \sin(\theta - \pi/2)$$
$$= |\vec{a}| + 2|\vec{a}| \sin(\theta - \pi/2)$$

$$= |\vec{a}|(1-2\cos\theta) \text{ ——— (iii)}$$

(ii) ও (iii) নং তুলনা করে পাই,

$$q = 1-2\cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1-q}{2}$$

যেহেতু $\cos\theta \le 1$ কাজেই $q = 3, 2, 1, 0, -1$ এবং

$$\therefore \theta = \frac{2\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{6}, \frac{2\pi}{1}$$

বা, $n = 1, 2, 3, 4, 6$

সুতরাং, ক্রিস্টাল ল্যাটিসে 5-ফোল্ড প্রতিসাম্য থাকতে পারে না।

প্রশ্ন-৪: তিন মাত্রার বিভিন্ন ক্লাস পদ্ধতিগুলো কি কি? এদের একক কোষের বৈশিষ্ট্যগুলো উল্লেখ কর?

সমাধান

তিনমাত্রার বিভিন্ন ক্লাস:

১. ট্রাইক্লিনিক বা ত্রিনত: এ শ্রেনির ক্রিস্টালে অক্ষগুলো পরস্পর সমকোণে থাকে না এবং এদের মধ্যেকার কোণগুলোও অসমান এবং বিভিন্ন তলের মধ্যেকার দূরত্ব বিভিন্ন।

2. মনোক্লিনিক বা একনত: এরূপ ক্রিস্টালে দুটি অক্ষ পরস্পরের সাথে সমকোণে থাকে না। তবে তৃতীয় অক্ষ এদের উভয়ের সাথে লম্ব ভাবে থাকে। তিনটি অক্ষ বরাবর পুনরাবৃত্তি দূরত্বগুলো বিভিন্ন হয়। মনোক্লিনিক বা একনত ল্যাটিসগুলো আধারণ বা ভূমিকেন্দ্রিক হতে পারে।

৩. অর্থোরম্বিক: এ ধরনের ক্রিস্টালের অক্ষগুলো পরস্পরের সমকোণে অবস্থান করে। কিন্তু অক্ষ তিনটি বরাবর পুনরাবৃত্তি দূরত্ব বিভিন্ন হয়। অর্থোরম্বিক ল্যাটিসগুলো সাধারন, দ্বিমিকেন্দ্রিক, দেহকেন্দ্রিক কিংবা তলকেন্দ্রিক হতে পারে।

৪. টেট্রাগোনাল:- এ ধরনের ল্যাটিসগুলোর অক্ষগুলো পরস্পরের সমকোণে থাকে। দুটি অক্ষ বরাবর পুনরাবৃত্তি ব্যবধানগুলো একই রকম থাকে; কিন্তু তৃতীয় অক্ষ বরাবর ব্যবধানগুলো ~~একই~~ বিভিন্ন রকম থাকে। এ ধরনের ল্যাটিসগুলো সাধারন কিংবা দেহকেন্দ্রিক হতে পারে।

৫. ঘনক:- কিউবিক ক্রিস্টালের অক্ষগুলো পরস্পরের সমকোণে থাকে এবং এ ধরনের অক্ষগুলো বরাবর পুনরাবৃত্তির ব্যবধানগুলো একই রকম থাকে। এ ধরনের ল্যাটিসগুলো দেহকেন্দ্রিক, তলকেন্দ্রিক কিংবা সাধারন হতে পারে।

৬. ট্রাইগোনাল: এরূপ ক্রিস্টালের অক্ষগুলো পরস্পর সমকোণে নয় তবে প্রত্যেক জোড়া অক্ষের মধ্যবর্তী কোণের পরিমাণ সমান। এক্ষেত্রে পুনরাবৃত্তি ব্যবধানগুলো সকল অক্ষ বরাবর সমান থাকে। ল্যাটিসগুলো আদি ধরনের হয়।

৭. হেক্সাগোনাল বা ষড়ভুজীয়:- হেক্সাগোনাল ধরনের ক্রিস্টালে দুটি অক্ষ পরস্পরের সাথে 60° কোণে অবস্থান করে এবং তৃতীয় অক্ষটি উভয়ের সাথে সমকোণে থাকে। পুনরাবৃত্তি কোণগুলো 60° ব্যবধানের অক্ষগুলো বরাবর একই থাকে। কিন্তু তৃতীয় অক্ষ বরাবর পুনরাবৃত্তি ব্যবধানগুলো বিভিন্ন হয়। ল্যাটিসগুলো আদি ধরনের হয়ে থাকে।

নিচে এদের কোষের বৈশিষ্ট্যগুলো দেওয়া হলো:-

ক্রমিক নং	পদ্ধতির নাম	পদ্ধতির মধ্যে ল্যাটিসের সংখ্যা	ল্যাটিসের সংকেত	প্রিমিটিভ গুলোর মধ্যে সম্পর্ক	আন্তঃঅক্ষীয় কোণ	উদাহরণ
১	কিউবিক	3	P বা SC I বা bcc F বা fcc	$a=b=c$	$\alpha=\beta=\gamma=90^\circ$	NaCl
2	মনোক্লিনিক	2	P, C	$a\neq b\neq c$	$\alpha=\beta=90^\circ$ $\gamma\neq 90^\circ$	Na_2SO_4
৩	ট্রাইক্লিনিক	1	P	$a\neq b\neq c$	$\alpha\neq\beta\neq\gamma=90^\circ$	$CaSO_4$
৪	টেট্রাগোনাল	2	P, I	$a=b\neq c$	$\alpha=\beta=\gamma=90^\circ$	$NiSO_4$
৫	অর্থোরম্বিক	4	P, C, I, F	$a\neq b\neq c$	$\alpha=\beta=\gamma=90^\circ$	$MgSO_4$
৬	ট্রাইগোনাল	1	R	$a=b=c$	$\alpha=\beta=\gamma=120^\circ$	$CuSO_4$
৭	হেক্সাগোনাল	1	P	$a=b\neq c$	$\alpha=\beta=60^\circ$ $\gamma=120^\circ$	AgI

প্রশ্ন-৯:- মিলার সূচক কাকে বলে? মিলার সূচক কিভাবে নির্ণয় করা যায়?

সমাধান

মিলার সূচক:- কোনটি ক্রিস্টাল তলের দিকাবস্থান ও দিক নির্ণয় করার জন্য যে সূচক ব্যবহার করা হয় তাহাকে মিলার সূচক বলা হয়। একটি ক্রিস্টাল তলের মিলার সূচক নিম্নরূপে নির্ণয় করা হয়।

1. প্রথমত অক্ষত্রয় থেকে ক্রিস্টাল তলটি দ্বারা কর্তিত ছেদাংশ নিরূপন করা হয়।

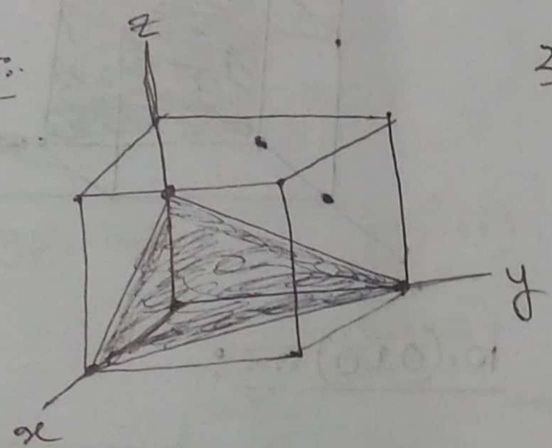
2. অতঃপর এই কর্তিত ছেদাংশ সমূহের উল্টোমান নেওয়া হয়।

3. উল্টোমান নেয়ার পর যদি ভগ্নাংশ থাকে তবে ওদের হরের ল.সা.গু দিয়ে প্রত্যেকটি উল্টো মানকে গুন করা হয়। অতঃপর যে মান h.k.l পাওয়া যায় তাদের মিলার সূচক বলা হয়। একটি ক্রিস্টাল তলের মিলার সূচককে (hkl) দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং তলের দিককে $\boxed{hkl}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এই তলের দিকটি হলো মূলবিন্দু থেকে তলটির উপর বহির্গামী লম্ব। ক্রিস্টালের সমান্তরাল তল সমূহকে {hkl} দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

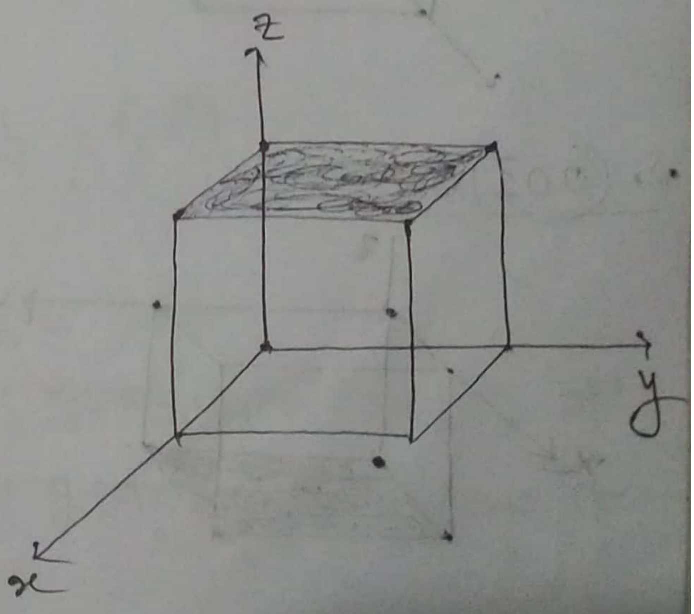
প্রশ্ন-10: (100), (200), (111) ও (110) তলগুলো অঙ্কন কর?
($\bar{1}$00), (001), (101), (00$\bar{1}$) সমাধান
(233), (0$\bar{1}$0)।

সমাধান

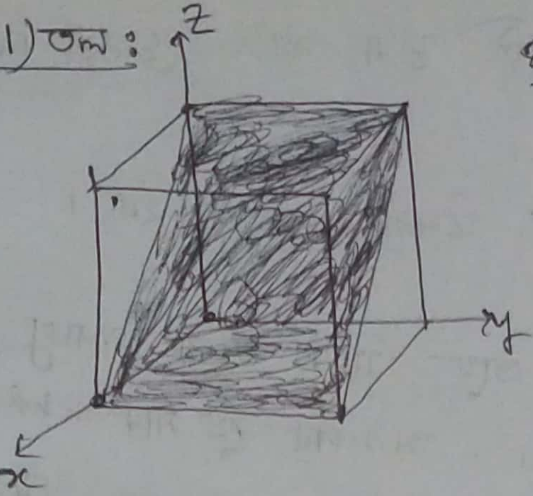
1. (111) তল:



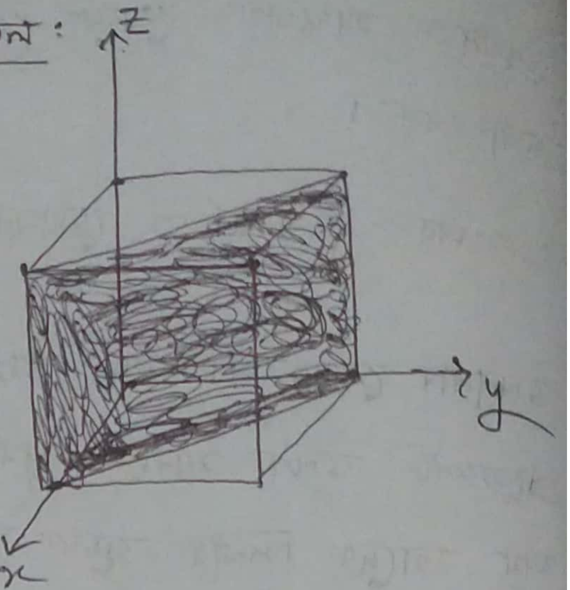
2. (001) তল:



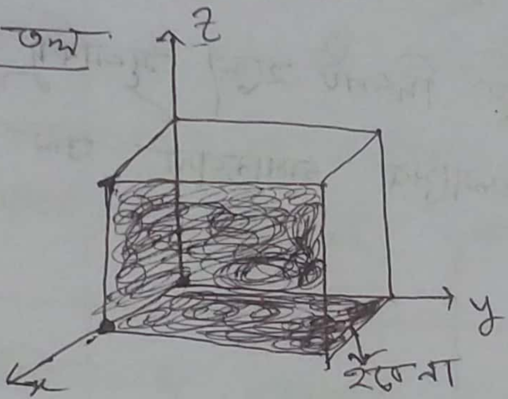
৩. (101) তল:



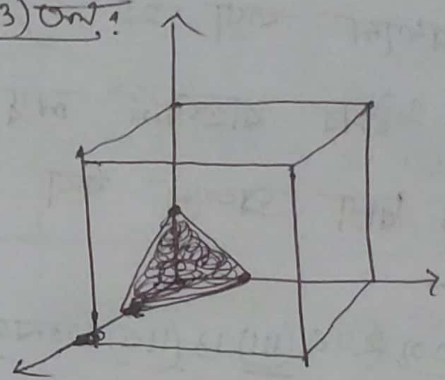
৪. (110) তল:



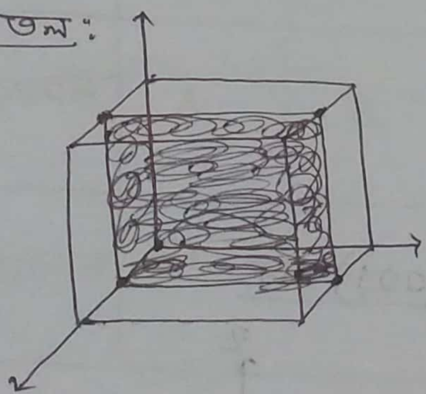
৫. (100) তল



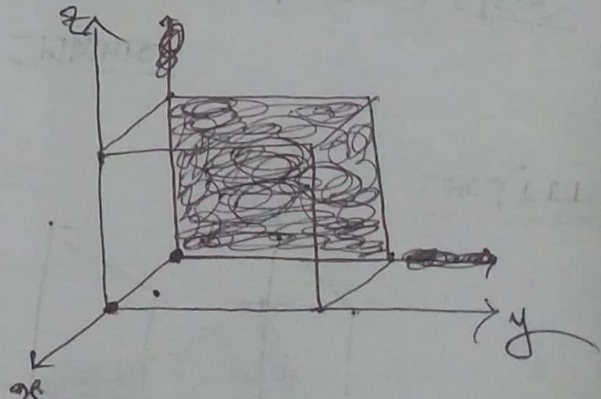
৬. (233) তল:



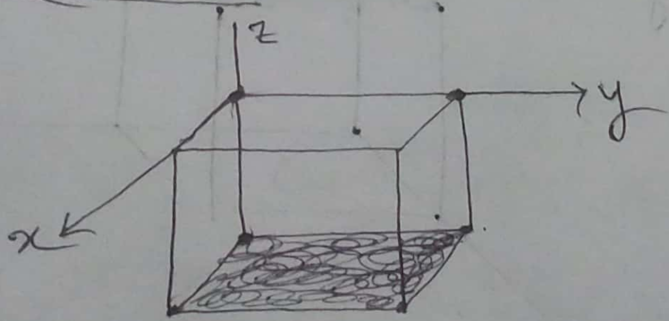
৭. 200 তল:



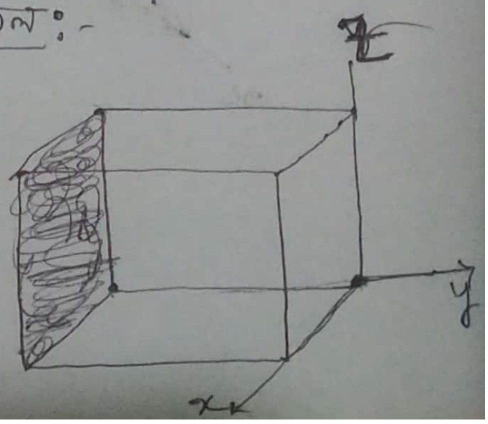
৮. ($\bar{1}$00) তল:



৯. (00$\bar{1}$) তল:



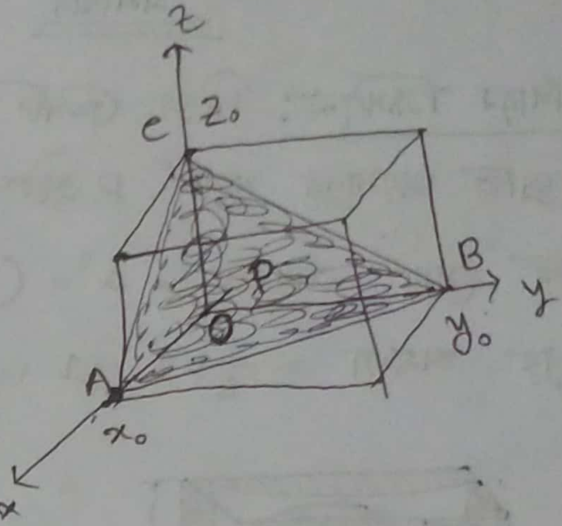
১০. (0$\bar{1}$0) তল:-



প্রশ্ন-১১ঃ দেখাও যে, একটি কিউবিক ল্যাটিসের দিক [hkl] তল (hkl)-এর উপর লম্বভাবে অবস্থান করে ?

সমাধান

ধরা যাক, $\vec{OP}$ হলো [hkl]-এর দিক এবং ABC হলো (hkl) তল। যদি x-, y-, z- অক্ষের সাথে তলটির ছেদক অংশ যথাক্রমে x_0, y_0, z_0 হয় তাহলে মিলার সূচক হবে,



$$\frac{1}{x_0}, \frac{1}{y_0}, \frac{1}{z_0}$$

কিউবিক ল্যাটিসের ক্ষেত্রে, $h=k=l$

অর্থাৎ $x_0=y_0=z_0=\alpha$ (ধরি)

তাহলে,
$$\vec{OP} = \frac{\hat{i}}{\alpha}+\frac{\hat{j}}{\alpha}+\frac{\hat{k}}{\alpha}$$
$$= \frac{1}{\alpha}(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$$

পুনরায়, $\vec{OA}+\vec{AB}=\vec{OB}$

বা, $\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}$
$$= \frac{\hat{j}}{\alpha}-\frac{\hat{i}}{\alpha}$$
$$= \frac{1}{\alpha}(\hat{j}-\hat{i})$$

এখন, $\vec{OP}\cdot\vec{AB} = \frac{1}{\alpha}(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})\cdot\frac{1}{\alpha}\cdot(\hat{j}-\hat{i})$
$$= \frac{1}{\alpha^2}(1-1)$$
$$= 0$$

একইভাবে, $\vec{OP}\cdot\vec{BC}=0$ এবং $\vec{OP}\cdot\vec{CA}=0$। সুতরাং প্রমাণিত হয় যে, $\vec{OP}$ ভেক্টর $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ এবং $\vec{CA}$ এর উপর লম্ব। সুতরাং দিক [hkl] তল এর উপর লম্ব।

~~প্রশ্ন-১১ঃ নিম্নের ক্ষেত্রসমূহের ক্ষেত্রে প্যাকিং ভগ্নাংশ নির্ণয় কর ?~~

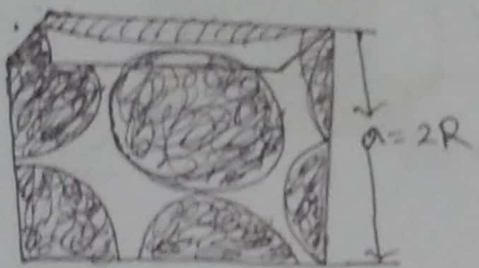
~~(i) সাধারণ ক্রিস্টাল (ii) bcc ক্রিস্টাল~~

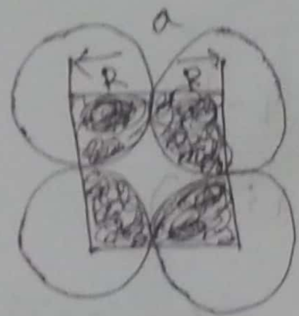
প্রশ্ন-১২: নিম্নের ক্ষেত্রসমূহের ক্ষেত্রে প্যাকিং ভগ্নাংশ নির্ণয় কর ?

(i) সাধারণ ক্রিস্টাল, (ii) bcc ক্রিস্টাল (iii) fcc ক্রিস্টাল।

সমাধান

(i) সাধারণ ক্রিস্টাল: চিত্রে একটি সরল ক্রিস্টালের একক কোষ দেখানো হলো। এর প্রতি পরমাণুর ব্যাসার্ধ R হলে ল্যাটিস ধ্রুবক $a = 2R$ হবে। অতএব একক কোষটির মোট আয়তন $= a^3 = (2R)^3 = 8R^3$। কোষটির অভ্যন্তরে মোট পরমাণুর সংখ্যা $= \frac{1}{8} \times 8 = 1$। অতএব একটি পরমাণুর আয়তন $= \frac{4}{3}\pi R^3$



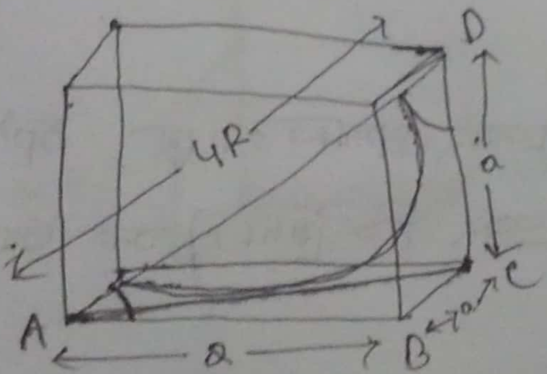


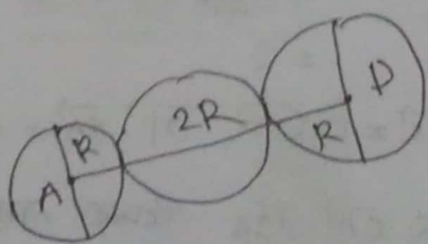
$\therefore$ প্যাকিং ভগ্নাংশ $P.F = \dfrac{\frac{4}{3}\pi R^3}{8R^3}$

$= \dfrac{\pi}{6}$

$= 0.52$ Ans

(ii) bcc ক্রিস্টাল: চিত্রে bcc ক্রিস্টালের একক কোষ দেখানো হলো।





চিত্রানুসারে, $AC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

$\Rightarrow AC = \sqrt{2}\, a$

এবং $AD = R + 2R + R = 4R$ ——— (i)

আবার,

$$AD^2 = AC^2 + CD^2$$
$$= (\sqrt{2}a)^2 + a^2$$
$$= 2a^2 + a^2$$
$$= 3a^2 \quad \text{——— (ii)}$$

(i) ও (ii) হতে পাই,

$$(4R)^2 = 3a^2$$
$$\Rightarrow 16R^2 = 3a^2$$
$$\therefore a = \frac{4}{\sqrt{3}} R$$

এখন সেলের আয়তন $= a^3 = \left(\frac{4}{\sqrt{3}} R\right)^3$

$$= \frac{64}{3\sqrt{3}} R^3$$

এখন, bcc সেলে মোট পরমাণুর সংখ্যা $= N_i + \frac{N_f}{2} + \frac{N_c}{8}$

$$= 1 + 0 + \frac{8}{8}$$
$$= 2$$

এখন

পরমাণুসমূহ কর্তৃক অধিকৃত মোট আয়তন $= 2 \times \frac{4}{3}\pi R^3$

$$= \frac{8}{3}\pi R^3$$

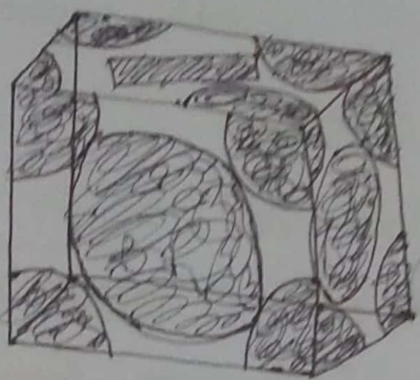
$\therefore$ নির্ণেয় প্যাকিং ফ্যাক্টর $P.F = \dfrac{\frac{8}{3}\pi R^3}{\frac{64}{3\sqrt{3}} \times R^3}$

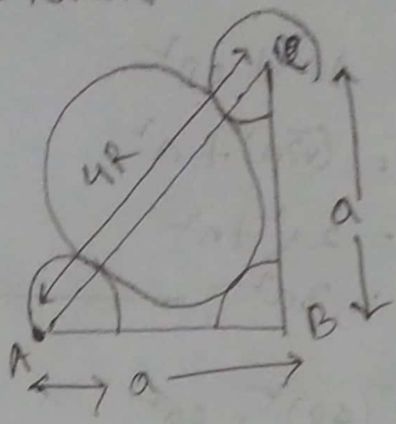
$$= \frac{\pi\sqrt{3}}{8}$$

$$= 0.68 \quad \text{Ans}$$

(iii) fcc ল্যাটিসের ক্ষেত্রে $a = 2\sqrt{2}R$

অতএব ইউনিট সেলের আয়তন $= a^3$
$= (2\sqrt{2}R)^3$
$= 16\sqrt{2}R^3$





ইউনিট সেলের অভ্যন্তরে পরমাণুর সংখ্যা

$$= N_i + \frac{N_f}{2} + \frac{N_c}{8}$$
$$= 0 + \frac{6}{2} + \frac{8}{8}$$
$$= 4$$

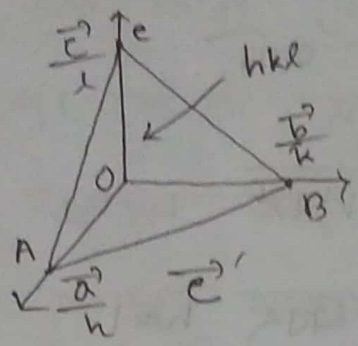
পরমাণুসমূহ কর্তৃক অধিকৃত আয়তন $= 4 \times \frac{4}{3}\pi R^3$
$= \frac{16}{3}\pi R^3$

$\therefore$ নির্ণেয় প্যাকিং ফ্যাক্টর $P.f = \dfrac{\frac{16}{3}\pi R^3}{16\sqrt{2}R^3}$
$= \dfrac{\pi}{3\sqrt{2}}$
$= 0.74$ Ans

প্রশ্ন: 13-: দেখাও যে, প্রত্যেকটি নিয়মিত ল্যাটিস ভেক্টর একটি অন্যান্য ল্যাটিস তলের উপর লম্ব ?

সমাধান

(hkl) মিলার সূচক বিশিষ্ট প্লেনসমূহ তলটি আদি ভেক্টর $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ অক্ষের থেকে যথাক্রমে $\frac{\vec{a}}{h}, \frac{\vec{b}}{k}$ ও $\frac{\vec{c}}{l}$ ভেক্টর অংশ ছেদ করে।



এখানে, $$\frac{\vec{b}}{k} + \vec{t} = \frac{\vec{a}}{h}$$
$$\Rightarrow \vec{t} = \frac{\vec{a}}{h} - \frac{\vec{b}}{k}$$

এই $\vec{t}$ ভেক্টর (hkl) মিলার সূচকবিশিষ্ট তলের উপর অবস্থিত।

আমরা জানি, ব্যতিচার ল্যাটিস ভেক্টর বা বিপরীত
$$\vec{G} = h\vec{A} + k\vec{B} + l\vec{C}$$
এখানে, $\vec{A}, \vec{B}$ ও $\vec{C}$ হলো ব্যতিচার বা বীপরিত ল্যাটিস আদি ভেক্টর।

এখানে, $$\vec{t}' \cdot \vec{G} = \left(\frac{\vec{a}}{h} - \frac{\vec{b}}{k}\right) \cdot \left(h\vec{A} + k\vec{B} + l\vec{C}\right)$$
$$= 2\pi - 2\pi$$
$$= 0$$

অতএব, $\vec{G}$ হলো $\vec{t}'$ এর উপর লম্ব। যেহেতু $\vec{t}'$ ভেক্টর হলো (hkl) মিলার সূচক বিশিষ্ট প্লেনসমূহ তলের উপর লম্ব সেহেতু ব্যতিচার বা বীপরিত ল্যাটিস ভেক্টর হলো (hkl) তলের উপর লম্ব।

৭ম-১৫: একটি কিউবিক ক্রিস্টালের ল্যাটিস ধ্রুবক 4.12A° হলে d ব্যবধান d_{110} নির্ণয় কর?

সমাধান

কিউবিক ক্রিস্টালের জন্য, আমরা জানি,

$$d_{hkl} = \frac{a}{\sqrt{h^2+k^2+l^2}}$$

এখানে, $a = 4.12\ A^\circ$ এবং $h=1$
$= 4.12\times10^{-10}m$ $k=1$
$l=0$

অতএব,

$$d_{110} = \frac{4.12\times10^{-10}}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}}$$

$$= \frac{4.12\times10^{-10}}{\sqrt{2}}$$

$$= 2.91\times10^{-10}\ m$$

$$= 2.91\ A^\circ$$ Ans

৭ম-15: একটি ঘন ক্রিস্টালের [110] এবং [111] দিকের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর?

সমাধান

আমরা জানি,

$$\cos\theta = \frac{u_1u_2+v_1v_2+w_1w_2}{\sqrt{u_1^2+v_1^2+w_1^2}\sqrt{u_2^2+v_2^2+w_2^2}}$$

$$= \frac{1.1+1.1+0.1}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\sqrt{1^2+1^2+1^2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\therefore \theta = 35.26^\circ$$ Ans

প্র-১৬ঃ NaCl এর গঠন ব্যাখ্যা কর?

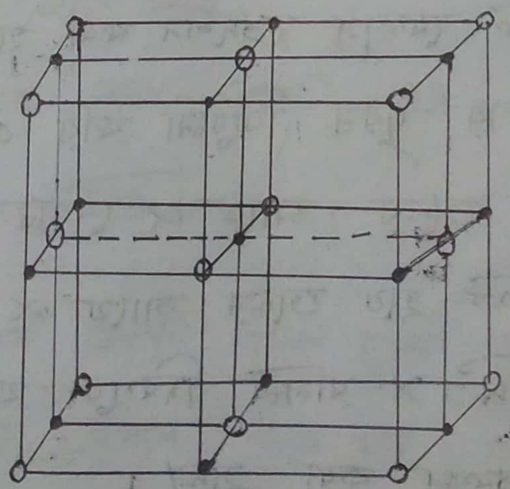
সমাধান

রক লবন, NaCl হলো আয়নিক ধরনের যৌগিক কাঠামো। ও যৌগের গঠন নিচের চিত্রে দেখানো হলো।- সোডিয়াম ক্লোরাইড এ সোডিয়াম পরমানু এর বহিস্থ খোলকের একটি ইলেকট্রন হারিয়ে ধনাত্মক চার্জিত হয়। আবার ক্লোরিন পরমানু সোডিয়াম পরমানুর হারানো ইলেকট্রন গ্রহন করে এর M ইলেকট্রন স্তর পূর্ন করে এবং ঋনাত্মকভাবে চার্জিত হয়। ফলে ধনাত্মক সোডিয়াম ও ঋনাত্মক ক্লোরিন পরমানুর মধ্যে আকর্ষন ঘটে এরা পরস্পরের নিকটবর্তি হতে থাকে। কিন্তু এরা একটি নির্দিষ্ট দূরত্বের কম নিকটবর্তি হতে পারে না। কারন পরমানুদ্বয়ের বহিস্থ খোলকের ইলেকট্রনের তীব্র বিকর্ষন বল কার্যকর হয়। তবে উভয় আয়নের কেন্দ্র যখন একে অপরের আপেক্ষে নির্দিষ্ট দূরত্বে থাকে তখন আকর্ষন ও বিকর্ষন বলের ভারসাম্য সৃষ্টি হয় এবং এদের আরো কাছাকাছি হওয়ার প্রবনতা বৃদ্ধি পায় এবং এ ধারনা থেকে ভাবা যায় যে আয়নদ্বয় সুনির্দিষ্ট ব্যাসার্ধের অধিকারি হয়।

চিত্রঃ সোডিয়াম ক্লোরাইড কাঠামো।

o → Na আয়ন

• → Cl আয়ন



ব্রাভাইস ল্যাটিস মুখকেন্দ্রিক ঘনক (fcc) হয়, ভিত্তি একটি সোডিয়াম আয়ন ও একটি ক্লোরিন আয়ন ধারন করে এবং এদের মধ্যবর্তি দূরত্ব একক ঘনকের দেহ কেন্দ্রের অর্ধেক হয়। তাই একে দুটি fcc উপল্যাটিস হিসেবে গন্য করা যায় একটি সোডিয়াম আয়ন, এর কেন্দ্র (0,0,0) বিন্দুতে এবং অপরটি ক্লোরিন আয়ন যার কেন্দ্র ঘনকের বাহুর মধ্যবিন্দুতে, ধরা যাক, $(\frac{a}{2},0,0)$ বিন্দুতে।

এক্ষেত্রে প্রতি একক ঘনকে চার একক NaCl-এর নিম্নরূপ অবস্থান থাকে:-

Na	0 0 0	$\frac{1}{2}\frac{1}{2}0$	$\frac{1}{2}0\frac{1}{2}$	$0\frac{1}{2}\frac{1}{2}$
Cl	$\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}$	$0\,0\,\frac{1}{2}$	$0\frac{1}{2}0$	$\frac{1}{2}0\,0$

প্রতি পরমানুর নিকটতম প্রতিবেশি সংখ্যা হলো 6। প্রতিবেশি পরমানু গুলো -ধনাত্মক প্রকৃতির হয়। সোডিয়াম ও ক্লোরিন আয়নের অবস্থানগত পার্থক্য অগ্রাহ্য করলে ল্যাটিসের প্রকৃতি সরল ঘনক হয়।

17 No :- লাউ এর সমীকরণ প্রতিষ্ঠা কর এবং ইহা হতে x-রশ্মি অপবর্তনের জন্য ব্রাগের সূত্রটি বের কর?

সমাধান

চিত্রানুযায়ী একটি জ্যামিতিক প্লেন প্রদর্শন করা হলো। এক্ষেত্রে পাশাপাশি দুটি অণুর মধ্যকার দূরত্ব বিবেচনা করি a। ধরি এই জ্যামিতিক প্লেন থেকে তলের সাথে α কোণে λ তরঙ্গদৈর্ঘ্যের দুটি X-Ray রশ্মি আপতিত হয়ে তলের সাথে α কোনে বিক্ষেপিত হয়। আপতিত ও বিক্ষেপিত x-রশ্মির দিকগুলি যথাক্রমে একক ভেক্টর $\hat{S}_0$ ও $\hat{S}$ দ্বারা প্রকাশ করা হলো।

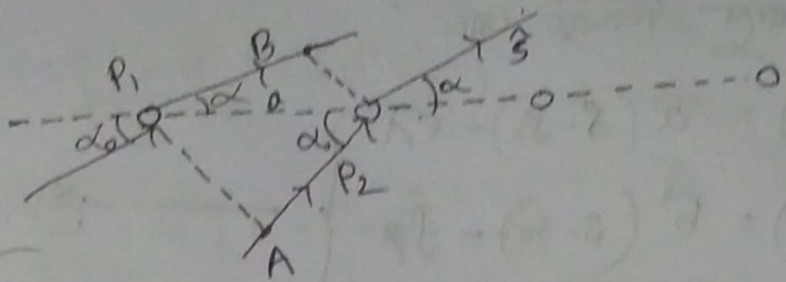


Fig: দুটি বিন্দু P_1 ও P_2 এর উপর X রে আপতিত হওয়ার পর বিক্ষেপন।

এখানে দুটি X-Ray রশ্মির মধ্যকার পথপার্থক্য হলো :

$$P_1B - P_2A$$

গঠনমূলক ব্যতিচার বা অপবর্তন প্যাটার্ন তৈরির শর্ত হলো এদের মধ্যেকার পথ পার্থক্য λ এর গুণিতক। অর্থাৎ গঠনমূলক অপবর্তন প্যাটার্নের জন্য

$$P_1B - P_2A = e\lambda \qquad (i)$$

এখানে, $e = 1, 2, 3 \cdots$ etc

আবার, ΔP_1BP_2 হতে,

$$\cos\alpha = \frac{P_1B}{P_1P_2}$$

$$\Rightarrow P_1B = a\cos\alpha$$

এবং ΔP_1P_2A হতে, $\cos\alpha_0 = \frac{P_2A}{P_1P_2}$

$$\Rightarrow P_2A = a\cos\alpha_0$$

অতএব, সমীকরণ (i) হতে পাই,

$$a(\cos\alpha - \cos\alpha_0) = e\lambda \qquad (ii)$$

ইহাই হলো লাউয়ে এর সমীকরণ।

ত্রিমাত্রিক কেলাসের জন্য একটি একক সেল এর অক্ষ স্থানান্তর ভেক্টর গুলোকে a, b, c দ্বারা প্রকাশ করা যায়। অতএব ত্রিমাত্রিক কেলাসের

এখন ② কে ব্যবহার করে লিখতে পারি,

$$\left.\begin{aligned} a(\cos\alpha - \cos\alpha_0) &= \vec{a}(s-s_0) = e\lambda \\ b(\cos\beta - \cos\beta_0) &= \vec{b}(s-s_0) = f\lambda \\ c(\cos\gamma - \cos\gamma_0) &= \vec{c}(s-s_0) = g\lambda \end{aligned}\right\} \longrightarrow ③$$

এখানে, $e, f, g = 1, 2, 3 ---$ etc

α_0, β_0 ও γ_0 হলো যথাক্রমে $\vec{a}, \vec{b}$ ও $\vec{c}$ এর সাথে আপতিত x-রশ্মি দ্বারা উৎপন্ন কোণ। এই সমীকরণগুলোকে বলা হয় লাউএ এর ত্রিমাত্রিক সমীকরণ।

ব্রাগের সূত্রের প্রতিপাদন:-

সরল ঘনক ল্যাটিস ঘনক বিবেচনা করা হলে $a=b=c$ ব্যবহার করে সমীকরণ ③ কে বর্গ করে পরে যোগ করে পাই,

$$a^2[\cos^2\alpha + \cos^2\alpha_0 - 2\cos\alpha\cos\alpha_0] + a^2[\cos^2\beta + \cos^2\beta_0 - 2\cos\beta\cos\beta_0] + a^2[\cos^2\gamma + \cos^2\gamma_0 - 2\cos\gamma\cos\gamma_0] = \lambda^2(e^2+f^2+g^2)$$

$$\Rightarrow a^2[(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) + (\cos^2\alpha_0 + \cos^2\beta_0 + \cos^2\gamma_0) - 2(\cos\alpha\cos\alpha_0 + \cos\beta\cos\beta_0 + \cos\gamma\cos\gamma_0)] = \lambda^2(e^2+f^2+g^2)$$

$$\Rightarrow a^2[1 + 1 - 2(\cos\alpha\cos\alpha_0 + \cos\beta\cos\beta_0 + \cos\gamma\cos\gamma_0)] = \lambda^2(e^2+f^2+g^2)$$

যদি ϕ আপতিত ও বিক্ষেপিত x-Ray রশ্মির মধ্যেকার বিক্ষেপিত কোণ নির্দেশ করে।

$$2a^2[1-\cos\phi] = \lambda^2(e^2+f^2+g^2)$$

$$\Rightarrow 4a^2\sin^2\frac{\phi}{2} = \lambda^2(e^2+f^2+g^2) \quad \text{--- (iv)}$$

এখানে, $\phi/2 = \theta$

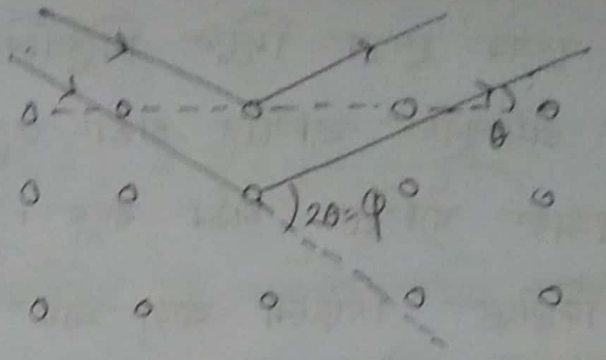


Fig: X-Ray রশ্মির অপবর্তন।

ধরি, $e = nh$, $f = nk$, $g = nl$

সমীকরণ (iv) নং হতে পাই,

$$4a^2\sin^2\theta = n^2\lambda^2(h^2+k^2+l^2) \quad \text{--- (5)}$$

আমরা জানি, একটি সিম্পল কেলাসের পাশাপাশি দুটি তলের মধ্যবর্তী দূরত্ব,

$$d = \frac{a}{\sqrt{h^2+k^2+l^2}}$$

$$\therefore h^2+k^2+l^2 = \frac{a^2}{d^2}$$

এখন (5) এ ব্যবহার করে পাই,

$$4a^2\sin^2\theta = n^2\lambda^2 \cdot \frac{a^2}{d^2}$$

$$\Rightarrow 4d^2\sin^2\theta = n^2\lambda^2$$

$$\boxed{\therefore 2d\sin\theta = n\lambda}$$

ইহা হলো X-Ray রশ্মির ক্ষেত্রে অপবর্তনের ব্রাগের সূত্র।

Qn-18: X-ray অপবর্তনের জন্য ব্রাগের সূত্রটি বের কর?

সমাধান:

চিত্রে একটি সিম্পল কেলাসের দ্বিমাত্রিক ল্যাটিস বিন্যাস দেখানো হলো। ধরি একটি X-রে বীম কেলাসটির উপর আপতিত হওয়ার পর কেলাসটির মধ্যে বিভিন্ন দিকে বিচ্ছুরিত হয়। কিন্তু এই ক্ষেত্রে উর্মির পর্যায়বৃত্ত বিন্যাসের

জন্য কোন কোন দিকে বিক্ষেপিত x-রে তরঙ্গ গুলো অন্যদের সাথে গঠনমূলক ব্যতিচার গঠন করে। আবার কোন কোন দিকে ধ্বংসাত্মক ব্যতিচার গঠন করে। ক্রিস্টালের উপাদানগুলো সমান্তরাল তলের তল হিসেবে বিবেচনা করা যায়। এই সকল তলকে ব্রাগ তল বলা হয়।

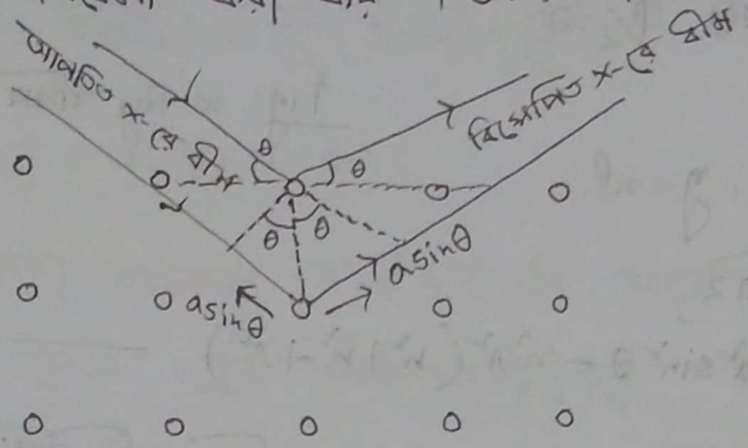


Fig: একটি বিচ্ছিন্ন ক্রিস্টাল থেকে X-Ray বিক্ষেপণ।

পাশাপাশি দুটি ব্রাগ তলের মধ্যবর্তী দূরত্ব বিবেচনা করি 'a' ধরি এই ব্রাগ তলের সাথে θ কোণে উৎস A ও B এর উপর λ তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের দুটি X-Ray আপতিত হওয়ার পর একই কোণে ক্রিয়ানুযায়ী বিক্ষেপিত হয়। এই বিক্ষেপিত x-রে রশ্মি দুটির মধ্যে গঠনমূলক ব্যতিচার হওয়ার শর্ত হলো - এদের মধ্যবর্তী পথ পার্থক্য হবে $n\lambda$ এখানে $n = 1, 2, 3$ --- etc.

এখানে দুটি x-রে রশ্মির মধ্যবর্তী পথ পার্থক্য হলো:

$$a\sin\theta + a\sin\theta = 2a\sin\theta$$

অতএব, গঠনমূলক ব্যতিচারের শর্তানুসারে

$$2a\sin\theta = n\lambda$$ এখানে, $n = 1, 2, 3$ ---- etc

ইহাই হলো x-রে অপবর্তনের জন্য ব্রাগের সূত্র।

প্র-১৭: একটি bcc ল্যাটিসের আদি স্থানান্তর ভেক্টরগুলো :-

$$\vec{a}' = \frac{1}{2}a(\hat{x}+\hat{y}-\hat{z}),\ \vec{b}' = \frac{1}{2}a(-\hat{x}+\hat{y}+\hat{z})\ ও\ \vec{c}' = \frac{1}{2}a(\hat{x}-\hat{y}+\hat{z})$$

আদি সেলটির আয়তন বের কর, বিপরীত ল্যাটিস বা ব্যতিহার ল্যাটিস আদি ল্যাটিস ভেক্টরগুলো বের কর এবং ব্যতিহার ল্যাটিস আদি সেলের আয়তন বের কর। দেখাও bcc ল্যাটিসের বিপরীত বা ব্যতিহার ল্যাটিসটি হলো একটি fcc ল্যাটিস।

সমাধান

দেওয়া আছে, bcc ল্যাটিসের আদি স্থানান্তর ভেক্টর সমূহ

$$\vec{a}' = \frac{1}{2}a(\hat{x}+\hat{y}-\hat{z}),\ \vec{b}' = \frac{1}{2}a(-\hat{x}+\hat{y}+\hat{z})$$

এবং $$\vec{c}' = \frac{1}{2}a(\hat{x}-\hat{y}+\hat{z})$$

এবার আদি সেলের আয়তন $V = |\vec{a}'\cdot(\vec{b}'\times\vec{c}')|$

এখানে,
$$\vec{b}'\times\vec{c}' = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -\frac{1}{2}a & \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}a \\ \frac{1}{2}a & -\frac{1}{2}a & \frac{1}{2}a \end{vmatrix}$$

$$= \hat{x}\left(\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}\right) + \hat{y}\left(\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}\right) + \hat{z}\left(\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}\right)$$

$$= \frac{a^2}{2}(\hat{x}+\hat{y})$$

আবার, $$\vec{a}'\cdot(\vec{b}'\times\vec{c}') = \frac{1}{2}a(\hat{x}+\hat{y}-\hat{z})\cdot\frac{a^2}{2}(\hat{x}+\hat{y})$$

$$= \frac{a^3}{4}+\frac{a^3}{4}$$

$$= \frac{a^3}{2}$$

$\therefore$ আদি সেলটির আয়তন $V = \frac{a^3}{2}$

আমরা জানি, ব্যতিচার ল্যাটিসে বা বিপরীত ল্যাটিসে আদি ল্যাটিসের ভেক্টরগুলো হলো:-

$$\vec{A} = 2\pi \frac{\vec{b'}\times\vec{c'}}{\vec{a'}\cdot(\vec{b'}\times\vec{c'})} ; \quad \vec{B} = 2\pi \frac{\vec{c'}\times\vec{a'}}{\vec{a'}\cdot(\vec{b'}\times\vec{c'})}$$

$$\vec{C} = 2\pi \frac{\vec{a'}\times\vec{b'}}{\vec{a'}\cdot(\vec{b'}\times\vec{c'})}$$

এখানে, $\vec{b'}\times\vec{c'} = \frac{a^2}{2}(\hat{x}+\hat{y})$

আবার, $\vec{c'}\times\vec{c'} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{1}{2}a & -\frac{1}{2}a & \frac{1}{2}a \\ \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}a & -\frac{1}{2}a \end{vmatrix}$

$$= \hat{x}\left(\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}\right) + \hat{y}\left(\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}\right) + \hat{z}\left(\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}\right)$$

$$= \frac{a^2}{2}(\hat{y}+\hat{z})$$

এবং, $\vec{a'}\times\vec{b'} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}a & -\frac{1}{2}a \\ -\frac{1}{2}a & \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}a \end{vmatrix}$

$$= \hat{x}\left(\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}\right) + \hat{y}\left(\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}\right) + \hat{z}\left(\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}\right)$$

$$\therefore \vec{a'}\times\vec{b'} = \frac{a^2}{2}\cdot(\hat{x}+\hat{z})$$

অতএব, ব্যতিচার ল্যাটিস বা বিপরীত ল্যাটিস আদি স্থানান্তর ভেক্টর হলো:-

$$\vec{A} = 2\pi \frac{\frac{a^2}{2}(\hat{x}+\hat{y})}{a^3/2} = \frac{4\pi}{a^3}\times\frac{a^2}{2}\cdot(\hat{x}+\hat{y}) = \frac{2\pi}{a}(\hat{x}+\hat{y})$$

$$\vec{B} = 2\pi \frac{\frac{a^2}{2}(\hat{y}+\hat{z})}{\frac{a^3}{2}} = \frac{4\pi}{a^3}\times\frac{a^2}{2}(\hat{y}+\hat{z}) = \frac{2\pi}{a}(\hat{y}+\hat{z})$$

$$\vec{C} = 2\pi \frac{\frac{a^2}{2}(\hat{x}+\hat{z})}{a^3/2} = 2\pi \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{2}{a^3} \cdot (\hat{x}+\hat{z}) = \frac{2\pi}{a}(\hat{z}+\hat{x})$$

অতএব আমরা পাই,

$$\vec{A} = \frac{2\pi}{a}(\hat{x}+\hat{y})$$

$$\vec{B} = \frac{2\pi}{a}(\hat{y}+\hat{z})$$

$$C = \frac{2\pi}{a}(\hat{z}+\hat{x})$$

যাহা fcc ল্যাটিসের আদি ভেক্টরের অনুরূপ। অতএব একটি bcc কেলাসের ব্যতিহার বা বীপরিত ল্যাটিসটি হলো একটি fcc ল্যাটিস।

ব্যতিহার বা বীপরিত ল্যাটিসে আদি সেলটির আয়তন

$$V = |\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})|$$

$$= \frac{16\pi^3}{a^3} \text{ Ans হবে।}$$

Chapter-2

প্রশ্ন-১: একটি পদার্থের ভৌতবল বা সংসক্তি শক্তি বলতে কী বুঝায়? আন্তঃপারমানবিক শক্তির ক্ষেত্রে রাসায়নিক বন্ধনগুলোকে কিভাবে শ্রেণিবদ্ধ করা যায়?

সমাধান

সংসক্তি শক্তিঃ একটি পদার্থ কিভাবে যে শক্তির বিনিময়ে এর উপাদান সমূহকে (অনু, পরমানু বা আয়নসমূহকে) আবদ্ধ করে তাকে বন্ধন শক্তি বা সংসক্তি শক্তি বলে। এই শক্তি মূলত কোন বস্তু বা পদার্থের অনু বা পরমানুর মধ্যে বিদ্যমান আবদ্ধ শক্তিকে বোঝানো হয়। এটি সেই শক্তি যা পদার্থের অভ্যন্তরে তার গঠনমূলক কণাগুলির মধ্যে কার্যরত শক্তি হিসেবে সংরক্ষিত থাকে। সংসক্তি শক্তি তখনই প্রকাশিত হয়, যখন এই শক্তি মুক্তি পায় যেমন রাসায়নিক বা পারমানবিক পরিবর্তনের মাধ্যমে। এটি বিভিন্ন কাজে ব্যবহৃত হয় যেমন বিদ্যুৎ উৎপাদন বা ইঞ্জিন চালানো।

আন্তঃপারমানবিক শক্তির ক্ষেত্রে কঠিন গুলোকে প্রধানত চারটি উপায়ে শ্রেণিবদ্ধ করা যায়। এই শ্রেণিবদ্ধতা কঠিনের গঠন, আন্তঃপারমানবিক আকর্ষন এবং ফিজিক্যাল-বৈশিষ্ট্যের উপর নির্ভর করে।

১. আয়নিক কঠিনঃ যোজনী ইলেকট্রনসমূহের অংশীদারিত্বের মাধ্যমে গঠিত হয়। উচ্চ গলনাঙ্ক ও স্ফুটনাঙ্ক বিশিষ্ট হয়। কঠিন অবস্থায় বিদ্যুৎ পরিবাহি নয়, কিন্তু গলিত বা দ্রবীভূত অবস্থায় পরিবাহী। সাধারন অবস্থায় কঠিন ও ভঙ্গুর হয়। উদাহরনঃ $NaCl$, KBr

২. কোভ্যালেন্ট বা সমযোজি ~~বন্ধন~~ কেলাস: যোজন ইলেকট্রনসমূহের শেয়ারের দ্বারা এরূপ বন্ধনের সৃষ্টি হয়। অণুসমূহ কোভ্যালেন্ট বন্ধনে আবদ্ধ থাকে। সাধারণ অবস্থায় খুবই কঠিন, উচ্চ গলনাঙ্ক বিশিষ্ট, এবং বিদ্যুৎ পরিবাহী নয়।

উদাহরণ: ডায়মন্ড, গ্রাফাইট, SiO_2, Ge, Si, ইত্যাদি।

৩. ধাতব ~~বন্ধন~~ কেলাস: যোজন ইলেকট্রনসমূহের মুক্ত বৈশিষ্ট্য থেকে সৃষ্টি হয়। ধাতব পরমাণু দ্বারা গঠিত, যেখানে ইলেকট্রনগুলো মুক্তভাবে চলাচল করতে পারে। এটি ভালো তাপ ও বিদ্যুৎ পরিবাহী, নমনীয় ও প্রসারণযোগ্য ও ধাতব চকচকে। উদাহরণ: Na, Fe, Al, Cu ইত্যাদি।

৪. আণবিক কেলাস: এক ধরনের দুর্বল মিথস্ক্রিয়াজনিত বল থেকে এ বন্ধনের সৃষ্টি হয়। এরূপ দুর্বল মিথস্ক্রিয়াজনিত বন্ধনকে ভ্যানডার ওয়ালস বল জনিত বন্ধন বলা হয়। এটি সাধারণত অপেক্ষাকৃত নরম, কম গলনাঙ্ক ও বিদ্যুৎ পরিবাহী নয়। উদাহরণ: বরফ (H_2O), ড্রাই আইস (CO_2) চিনি ইত্যাদি।

প্র-২৫: সাম্যাবস্থায় একটি আয়নিক ক্রিস্টালের ল্যাটিস শক্তির জন্য একটি অভিব্যক্তি বের কর? অথবা, বর্ন এবং আয়নিক ক্রিস্টালের তত্ত্ব অনুসারে ক্রিস্টাল শক্তির জন্য একটি রাশিমালা নির্ণয় কর?

সমাধান

NaCl এর একটি কেলাস ল্যাটিস বিবেচনা করি।

যেখানে, r_0 দূরত্বে 6 টি Cl^- আয়ন

$r_0\sqrt{2}$ দূরত্বে 12 টি Na^+ আয়ন

এবং $r_0\sqrt{3}$ দূরত্বে 8 টি Cl^- আয়ন পরিবেষ্টিত।

সুতরাং, $E_c = -\frac{e^2}{r_0}\left(\frac{6}{\sqrt{1}} - \frac{12}{\sqrt{2}} + \frac{8}{\sqrt{3}} - - - -\right)$

NaCl এর ক্ষেত্রে,

$$E_c = -\frac{e^2 A}{r_0} \text{ ——— (i)}$$

যেখানে, A হলো মেডেলাং ধ্রুবক।

অন্যান্য আয়নের উপস্থিতিতে বিকর্ষণ শক্তিকে লেখা যায়,

$$E_{rep} = \frac{B}{r_0^n} \text{ ——— (ii)}$$

সুতরাং, মোট শক্তি

$$E(r_0) = -\frac{Ae^2}{r_0} + \frac{B}{r_0^n} \text{ ——— (iii)}$$

N সংখ্যক ধনাত্মক আয়ন ও N সংখ্যক ঋণাত্মক আয়নের জন্য মোট বন্ধন শক্তি,

$$E(r_0) = N\left(-\frac{Ae^2}{r_0} + \frac{B}{r_0^n}\right) \text{ ——— (v)}$$

আমরা জানি, সাম্যাবস্থায়,

$$\left(\frac{dE_{r_0}}{dr_0}\right) = 0$$

$$\text{বা, } \frac{d}{dr_0}\left[N\left(-\frac{Ae^2}{r_0} + \frac{B}{r_0^n}\right)\right] = 0$$

$$\Rightarrow N \frac{d}{dr_0}\left(-\frac{Ae^2}{r_0} + \frac{B}{r_0^n}\right) = 0$$

$$\Rightarrow N\left(\frac{Ae^2}{r_0^2} - \frac{nB}{r_0^{n+1}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{Ae^2}{r_0^2} - \frac{nB}{r_0^{n+1}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{Ae^2}{r_0^2} - \frac{nB}{r_0^n \cdot r_0} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r_0}\left(\frac{Ae^2}{r_0} - \frac{nB}{r_0^n}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{Ae^2}{r_0} = \frac{nB}{r_0^n}$$

$$\therefore B = \frac{Ae^2}{r_0} \cdot \frac{r_0^n}{n} \quad \text{——— (vi)}$$

এখন (vi) নং এর মান (v) নং এ বসিয়ে পাই,

$$E_{r_0} = E_L = N\left(-\frac{Ae^2}{r_0} + \frac{B}{r_0^n}\right)$$

$$\Rightarrow E_L = N\left(-\frac{Ae^2}{r_0} + \frac{1}{\cancel{r_0^n}} \cdot \frac{Ae^2}{r_0} \cdot \frac{\cancel{r_0^n}}{n}\right)$$

$$\Rightarrow E_L = N\left(-\frac{Ae^2}{r_0} + \frac{Ae^2}{n r_0}\right)$$

$$\Rightarrow E_L = -N\frac{Ae^2}{r_0}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

সাম্যাবস্থায় $r_0 = a_0$ হলে

$$\boxed{E_L = -N\frac{Ae^2}{a_0}\left(1 - \frac{1}{n}\right)}$$

ইহাই নির্ণেয় সাম্যাবস্থায় ল্যাটিস শক্তির অভিব্যক্তি।

প্র-3: ইনার্ট গ্যাস ক্রিস্টাল বলতে কী ধারণা কর? দুটি নিরপেক্ষ পরমাণুর মধ্যে কোন ইন্টার‍্যাকশন বিদ্যমান? লেনার্ড-জোন্স পটেনশিয়াল ব্যবহার করে, বাল্ক মডুলাসের অভিব্যক্তি বের কর।

সমাধান

ইনার্ট বা নিষ্ক্রিয় গ্যাস ক্রিস্টাল আলোক স্বচ্ছ ও অনুর্বর হয়ে থাকে, এবং এ ক্রিস্টাল একসাথে দুর্বল ভ্যানডার ওয়ালস বল ধারন করে।

দুটি নিরপেক্ষ পরমানুর মধ্যে প্রধানত ভ্যানডার ওয়ালস ইন্টার অ্যাকশন বিদ্যমান থাকে। এই ইন্টার অ্যাকশানটি দুর্বল আন্ত: আনবিক বন্ধের একটি গঠন যা বিভিন্ন প্রক্রিয়ার মাধ্যমে কাজ করে। নিম্নে তা উল্লেখ করা হলো:-

১. লন্ডন ডিসপারশন বল: এটি সর্বজনীন এবং সব ধরনের পরমানুর মধ্যে পাওয়া যায়। এটি অস্থায়ী ডিপোলের কারনে সৃষ্টি হয়। যখন একটি নিরপেক্ষ ইলেকট্রন মেঘ সময়ে সময়ে অসমভাবে বন্টন হয় তখন একটি অস্থায়ী ডিপোল সৃষ্টি হয় যা নিকটবর্তি ইলেকট্রন মেঘে প্রভাব ফেলে। ফলে তাদের মধ্যে আকর্ষন তৈরি হয়।

২. ডিপোল - ডিপোল ইন্টারঅ্যাকশন: যদি কোন নিরপেক্ষ পরমানুতে স্থায়ী বা অস্থায়ী ডিপোল মোমেন্ট থাকে তাহলে এই ডিপোল পরমানুর মধ্যে আকর্ষন বা বিকর্ষন সৃষ্টি করতে পারে। তবে এটি প্রধানত পোলার যৌগগুলির জন্য গুরুত্বপূর্ন।

৩. ডিপোল-ইনডিউসড ডিপোল ইন্টার অ্যাকশন: একটি স্থায়ী ডিপোলযুক্ত পরমানু নিকটবর্তি নিরপেক্ষ পরমানুর ইলেকট্রন মেঘকে বিকৃত করতে পারে যার ফলে একটি ইনডিউসড ডিপোল তৈরি হয় এবং আকর্ষন ঘটে।

৪. প্রতিসরন: যদি পরমানুগুলি খুব কাছাকাছি আসে, তাদের ইলেকট্রন মেঘ গুলির মধ্যে বিকর্ষন বল সৃষ্টি করা শুরু (Pauli Exclusion principle) এর কারনে।

দুটি নিরপেক্ষ পরমানুর মধ্যে প্রধান ইন্টারঅ্যাকশন হল লন্ডন ডিসপারসন বল, যা তাদের মধ্যে ক্ষনস্থায়ী ডিপোল মোমেন্টের কারনে ঘটে। এটি দুর্বল হলেও এটি পরমানুগুলিকে একত্রে রাখতে গুরুত্বপূর্ন ভূমিকা পালন করে।

বাল্ক মডুলাসের অভিব্যক্তি নির্নয়:

আয়তন গুনাঙ্কের সংজ্ঞানুসারে, $B = -V\dfrac{dP}{dV}$ ——— (i)

তাপীয় প্রভাব অগ্রাহ্য করে তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্রানুসারে পাই,

$$dU = -PdV$$

$$\Rightarrow P = -\frac{dU}{dV}$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{dV} = -\frac{d^2U}{dV^2}$$

(i) নং হতে পাই, $B = V \cdot \dfrac{d^2U}{dV^2}$ ——— (ii)

যদি ক্রিস্টালটি N সংখ্যক পরমানুর fcc ল্যাটিস গঠন করে এবং ল্যাটিস ধ্রুবক a হয়, তাহলে প্রতিটি পরমানুর আয়তন হবে $\frac{1}{4}a^3$ এবং ক্রিস্টালের আয়তন $V = \frac{1}{4}Na^3$। যদি ল্যাটিস ধ্রুবক প্রতিবেশি R দ্বারা প্রকাশ করা হয়

তাহলে, $a = 2R$ হতে এবং $v = 2NR^3$। এখন

$$\frac{dU}{dv} = \frac{du}{dR} \cdot \frac{dR}{dv}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2u}{dv^2} = \frac{d}{dv}\left(\frac{du}{dR} \cdot \frac{dR}{dv}\right)$$

$$= \frac{du}{dR} \cdot \frac{d}{dv}\left(\frac{dR}{dv}\right) + \frac{dR}{dv} \cdot \frac{d}{dv}\left(\frac{du}{dR}\right)$$

$$= \frac{du}{dR} \cdot \frac{d^2R}{dv^2} + \frac{dR}{dv} \cdot \frac{d}{dR}\left(\frac{du}{dR}\right) \cdot \frac{dR}{dv}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2u}{dv^2} = \frac{dU}{dR} \cdot \frac{d^2R}{dv^2} + \left(\frac{dR}{dv}\right)^2 \cdot \left(\frac{d^2U}{dR}\right)$$

কিন্তু সাম্যাবস্থায় $R = R_0 =$ ধ্রুবক কাজেই,

$$\frac{dU}{dR} = 0$$

অতএব, $$\frac{d^2U}{dv^2} = \left(\frac{dR}{dv}\right)^2 \cdot \frac{d^2u}{dR^2} \quad \text{——— (iii)}$$

এখন, $v = 2NR^3$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dR} = 6NR^2$$

$$\Rightarrow \frac{dR}{dv} = \frac{1}{6NR_0^2} \quad [\text{সাম্যাবস্থায় } R = R_0]$$

(iii) নং হতে পাই, $$\frac{d^2U}{dv^2} = \left(\frac{1}{6NR_0^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{d^2U}{dR^2}\right)$$

এই মান (ii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$B = v\left(\frac{1}{6NR_0^2}\right)^2 \left(\frac{d^2U}{dR^2}\right)$$

$$B = 2NR_0^3 \cdot \frac{1}{36N^2R_0^4} \cdot \frac{d^2U}{dR^2}$$

$$\therefore B = \frac{1}{18NR_0} \cdot \frac{d^2U}{dR^2} \quad \text{—— (iv)}$$

আবার, আমরা জানি,

মোট ল্যাটিস শক্তি $U = N\left(z\lambda e^{-R/\rho} - \frac{\alpha q^2}{R}\right)$ —— (v)

সমীকরণ (v) কে R এর সাপেক্ষে দুইবার ব্যবকলন করি,

$$\frac{d^2U}{dR^2} = \frac{Nz\lambda e^{-R_0/\rho}}{\rho^2} - \frac{2N\alpha q^2}{R_0^3} \quad [R = R_0]$$

$$\Rightarrow \frac{d^2U}{dR^2} = \frac{N\alpha q^2}{R_0^3}\left[\frac{R_0}{\rho} - 2\right]$$ যেখানে, $\lambda z e^{-R_0/\rho} = \frac{\alpha q^2 \rho}{R_0^2}$

এই মানকে (iv) নং এ ব্যবহার করে পাই,

$$B = \frac{1}{18NR_0} \times \frac{N\alpha q^2}{R_0^3}\left[\frac{R_0}{\rho} - 2\right]$$

$$\therefore B = \frac{\alpha q^2}{18R_0^4}\left[\frac{R_0}{\rho} - 2\right] \quad \text{Ans}$$

প্রশ্ন: ৫: মেডেলাং ধ্রুবক কী? এ ধ্রুবকের মান নির্ণয় কর?

সমাধান

মেডেলাং ধ্রুবক: $\alpha = \sum_j \frac{\pm 1}{P_{ij}}$ কে মেডেলাং ধ্রুবক বলা হয়।

মেডেলাং ধ্রুবক নির্ণয়: আমরা জানি,

কুলম্ব শক্তি, $$E_c = -\frac{6e^2}{R} + \frac{12e^2}{\sqrt{2}R} - \frac{8e^2}{\sqrt{3}R} - \cdots$$

$$= -\frac{e^2}{R}\left(\frac{6}{\sqrt{1}} - \frac{12}{\sqrt{2}} + \frac{8}{\sqrt{3}} - \cdots\right)$$

$$= -\frac{e^2}{R}\alpha$$

যেখানে, $$\alpha = \left(\frac{6}{\sqrt{1}} - \frac{12}{\sqrt{2}} + \frac{8}{\sqrt{3}} - \cdots\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \cdots\right)$$

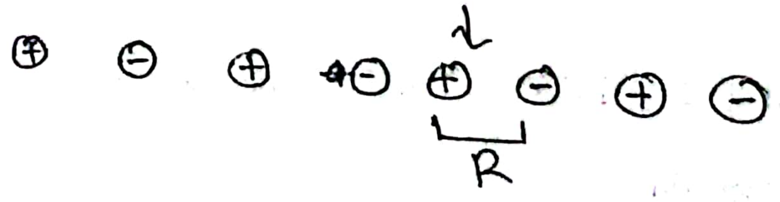
$$= \sum_j \frac{\pm 1}{P_{ij}}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{R} = \sum_j \frac{\pm 1}{RP_{ij}}$$ [R দ্বারা ভাগ করে]

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{R} = \sum_j \frac{\pm 1}{r_{ij}} \quad \text{—— (i)}$$

যেখানে, $R \rightarrow$ নিকটতম প্রতিবেশির দূরত্ব

$r_{ij} \rightarrow$ প্রসঙ্গ আয়ন হতে j তম আয়নের দূরত্ব



এখন, $$\frac{\alpha}{R} = 2\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{2R} + \frac{1}{3R} - \cdots\right]$$

$$\Rightarrow \alpha = 2\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots\right] \quad \text{—— (ii)}$$

আমরা জানি, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$

$x=1$ বসিয়ে পাই, $\Rightarrow \ln(1+1) = 1 - \frac{1^2}{2} + \frac{1^3}{3} - \cdots$

$$\Rightarrow \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$$

(ii) নং সমীকরণ হতে পাই,

$$\boxed{\Rightarrow \alpha = 2\ln 2}$$

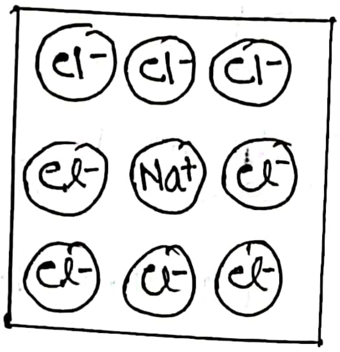
ইহাই হলো মেডেলাং ধ্রুবক।

প্রশ্ন-৫: আয়নিক বন্ধন, সমযোজী বন্ধন এবং ধাতব বন্ধন বিস্তারিত ব্যাখ্যা কর?

সমাধান

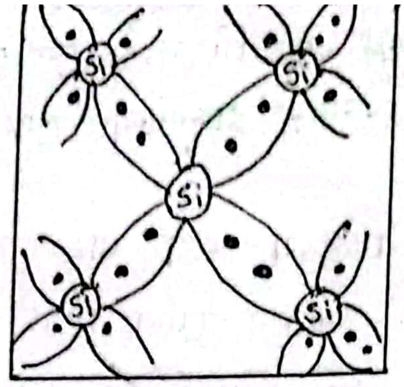
আয়নিক বন্ধন:- বিপরীতধর্মী আয়নের পারস্পরিক মিথস্ক্রিয়ার ফলে যে বন্ধনের সৃষ্টি হয় তাকে আয়নিক বন্ধন বলে। এরূপ বন্ধন সৃষ্টির লক্ষ্যে যোজন ইলেকট্রনের স্থানান্তর ঘটে। ধাতুর হ্যালাইডসমূহের মধ্যে এ বন্ধন সৃষ্টি হয় এবং গঠিত ক্রিস্টালকে আয়নিক ক্রিস্টাল বলে। যেমন- $NaCl$, $CaCl$। ধাতব মৌলের পরমাণু থেকে একটি ইলেকট্রন হ্যালোজেন মৌলের পরমাণুতে গমন করে। ফলে ধাতব পরমাণুটি ধনাত্মকভাবে চার্জিত আয়নে পরিণত হয়। কুলম্বের সূত্রানুসারে এ দুই বিপরীত আয়নের মধ্যে আকর্ষণ ধর্মী মিথস্ক্রিয়া ঘটে এবং একটি বন্ধনের সৃষ্টি হয়। এ বন্ধনই হলো আয়নিক বন্ধন। আয়নিক ক্রিস্টালে স্বতন্ত্র অণুর কোন অস্তিত্ব নেই। প্রতিটি ধনাত্মক আয়ন বা ক্যাটায়ন নির্দিষ্ট সংখ্যক ঋণাত্মক আয়ন বা অ্যানায়ন দ্বারা বেষ্টিত থাকে। অনুরূপ প্রতিটি অ্যানায়ন বহু সংখ্যক ক্যাটায়ন দ্বারা

বেষ্টিত থাকে। অনুরূপ প্রতিটি অ্যানায়ন বহুসংখ্যক ক্যাটায়ন দ্বারা বেষ্টিত থাকে। ক্ষারীয় ধাতুসমূহের যেমন সোডিয়ামের যোজন ইলেকট্রন একটি ঐ পরমাণুর বহিস্থ কক্ষে অবস্থান করে। আবার হ্যালোজেন পরিবারের মৌল যেমন ক্লোরিন পরমাণুর বহিস্থ কক্ষ পূরণে একটি ইলেকট্রনের ঘাটতি থাকে কাজেই ক্ষারীয় ধাতু X হ্যালোজেন মৌল Y-তে ইলেকট্রন প্রদান করে X^+ ও Y^- আয়নে পরিণত হয় যার সমন্বয়তিতে XY লবণ উৎপন্ন হয়।



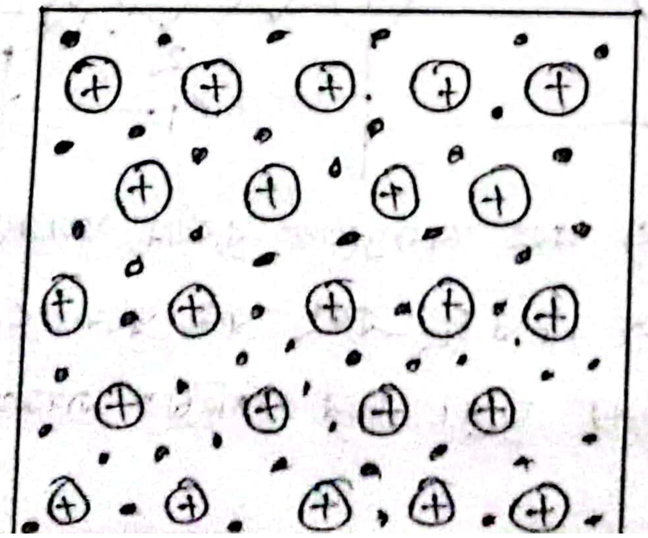
চিত্র:- আয়নিক বন্ধন ক্রিস্টাল।

2. সমযোজী বন্ধন:- পাশাপাশি দুটি পরমাণুর প্রত্যেকে একটি করে ইলেকট্রন প্রদান করে যে ইলেকট্রন জোড় সৃষ্টি করে তার সাথে ঐ পরমাণুদ্বয়ের সমান অংশীদারিত্বের ফলে যে বন্ধন সৃষ্টি হয় তাকে সমযোজী বন্ধন বলে। এ ধরনের বন্ধন শক্তিশালী হয় তবে আয়নিক বন্ধনের তুলনায় দুর্বল। যেমন, হাইড্রোজেন-হাইড্রোজেন, সিলিকন, জার্মেনিয়াম ইত্যাদির বন্ধন। সমযোজী বন্ধনের ইলেকট্রন ভাগাভাগির কারণে দুটি পরমাণুর মধ্যবর্তী এলাকায় ইলেকট্রন অধিক ঘনত্ব হয়। তাই সমযোজী বন্ধন দিকবর্তী হয়। কোয়ান্টাম বলবিদ্যার দৃষ্টিতে সমযোজী বন্ধন হলো পাশাপাশি অবস্থিত দুটি নিউক্লিয়াসের বিসদৃশ সমান্তরাল স্পিন সম্পন্ন দুটি ইলেকট্রনের শেয়ার বা অংশীদারিত্বের দরুন শক্তি ন্যূন অবস্থানের ফল:



চিত্র: সহযোজী বন্ধন ও সিলিকনের কেলাস।

ধাতব বন্ধন:- ধাতব ক্রিস্টালে প্রচুর মুক্ত ইলেকট্রন থাকে এবং এদের তড়িৎ পরিবাহিতা উচ্চমানের হয়। ইলেকট্রনের গতি বিশ্লেষণের উপযোগী তরঙ্গ অপেক্ষক আয়ন কোরের নিকট বিন্যস্ত না হয়ে বাইরের অঞ্চলে বেশ প্রশস্ত হয়ে পাশাপাশি অবস্থিত যেকোন ইলেকট্রনসমূহের চাপে ঠেলে যাওয়ার উপক্রম হয়। প্রশস্ত খোলকের ইলেকট্রন অধিক পরিমাণে বিস্তৃত থাকে (৭০% এর অধিক)। গড়ে ইলেকট্রন বিন্যাস নিউক্লিয়াসের নিকটবর্তী বলে ইলেকট্রনসমূহের বিভবশক্তি ন্যূনতম পর্যায়ের হয়। আবার প্রশস্ত খোলকের দূরত্ব সাপেক্ষে তরঙ্গ স্পন্দনের পরিবর্তন কম হয় বলে ইলেকট্রনের গতিশক্তিও কমে যায়। এভাবে ইলেকট্রনের অর্থাৎ ইলেকট্রনের মোট শক্তি আধিক্যভাবে হ্রাস পায়। মোট শক্তির যথেষ্ট হ্রাস পায় বলে পরমাণুসমূহের মধ্যে একটি বন্ধন সৃষ্টির শর্ত পূরণ হয় এবং ধাতব কেলাসটি গঠিত হয়।



চিত্র: ধাতব বন্ধন

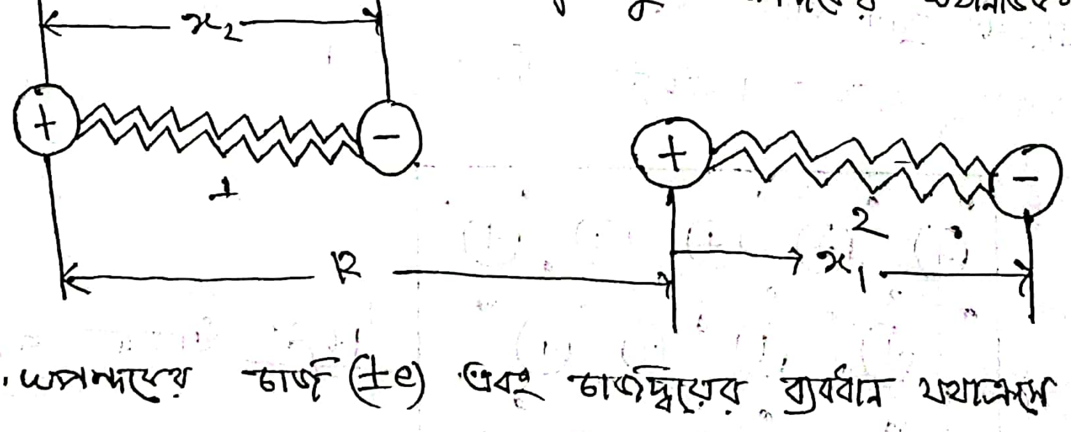
প্রশ্ন-৬ঃ- দেখাও যে, ভ্যান্ডার-ওয়ালস লন্ডন তত্ত্ব মিথস্ক্রিয়া শক্তি $U = -\frac{A}{R^6}$ আকারে প্রকাশ করা যায়? লিনার্ড জোনস বিভবের ব্যাখ্যাগুলো দেয় কর?

সমাধান

দুটি অভিন্ন নিষ্ক্রিয় গ্যাস পরমাণু বিবেচনা করা যাক যাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব R পারমাণবিক ব্যাসার্ধের তুলনায় অনেক বেশি। যদি পরমাণুদ্বয়ের চার্জ বন্টন দৃঢ় হয়, তবে তাদের মধ্যে মিথস্ক্রিয়া শূন্য হয় কারণ ইলেকট্রনিক চার্জের গোলীয় বিন্যাসের দরুন স্থির তড়িৎ বিভব এবং নিউক্লিয়াসের চার্জের দরুন স্থির তড়িৎ বিভব পরস্পর বাতিল হয়ে যায়। এ অবস্থায় নিষ্ক্রিয় গ্যাসের পরমাণুগুলো পরস্পর মিলিত হওয়ার প্রয়োজন অনুভব করে না এবং ঘনীভূত হয় না। কিন্তু ইলেকট্রনগুলো নিউক্লিয়াসের চারপাশে ঘূর্ণায়মান থাকে এবং যে কোন মুহূর্তে এ ঘূর্ণন গতি থেকে তড়িৎ দ্বিমেরু ভ্রামকের সৃষ্টি হয়। এ দ্বিমেরু ভ্রামক থেকেই পরমাণুসমূহের মধ্যে আকর্ষণী মিথস্ক্রিয়া ঘটে।

উদাহরণ হিসেবে দুটি অভিন্ন সরল দোলক স্পন্দক বিবেচনা করা যাক যারা 1 এবং 2 দ্বারা চিহ্নিত এবং R ব্যবধানে অবস্থিত। নিচে চিত্রে দেখানো হলো:

fig: দুটি স্পন্দকের অবস্থান



প্রতিটি স্পন্দকের চার্জ (±e) এবং চার্জদ্বয়ের ব্যবধান যথাক্রমে x_1 ও x_2। ধরা যাক, স্পন্দকদ্বয়ের ভরবেগ P_1 ও P_2 এবং বল ধ্রুবক C_1। কণাগুলো x অক্ষ বরাবর স্পন্দন সম্পন্ন করে। এখন অবিচ্ছিন্ন ব্যবস্থার হ্যামিলটোনিয়ান

$$H_0 = \frac{1}{2m} \cdot P_1^2 + \frac{1}{2} c x_1^2 + \frac{1}{2m} \cdot P_2 + \frac{1}{2} c x_2^2 \quad \text{——— (1)}$$

প্রত্যেকটি অযুগল স্পন্দকের কম্পাঙ্ক $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$ যা সরল ছন্দিত স্পন্দকের কম্পাঙ্ক। ধরি, দুটি স্পন্দকের মধ্যকার কুলম্ব মিথস্ক্রিয়া হলো:-

$$H_1 = \frac{e^2}{R} + \frac{e^2}{R+x_1-x_2} - \frac{e^2}{R+x_1} - \frac{e^2}{R-x_2} \quad \text{——— (ii)}$$

এবার, $|x_1|, |x_2| << R$ এর জন্য বিস্তৃত করে পাই, (ii) নং থেকে

$$H_1 = -\frac{2e^2 x_1 x_2}{R^3} \quad \text{——— (3)}$$

সমীকরণ (3) এর আসন্নমান হ্যামিল্টনিয়ান ব্যবহার করে মোট হ্যামিল্টনিয়ান কে নিম্নের স্বাভাবিক মোড রূপান্তর দ্বারা কর্ণায়িত করে পাই,

$$x_s = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2) \; ; \; x_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2) \quad \text{——— (4)}$$

এখানে পাদ প্রতীক s এবং a যথাক্রমে প্রতিসাম্যিক এবং অপ্রতিসাম্যিক মোড নির্দেশ করে। এবং দুটি মোডের সাথে সংশ্লিষ্ট ভরবেগ P_s এবং P_a নিম্নরূপে পাই,

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(P_s + P_a) \; ; \; P_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(P_s - P_a) \quad \text{——— (5)}$$

অতএব, মোট হ্যামিল্টনিয়ান হবে,

$$H = H_0 + H_1$$

$$= \frac{1}{2m} \times \frac{1}{2}(P_s + P_a)^2 + \frac{1}{2} c \cdot \frac{1}{2}(x_s + x_a)^2 - \frac{1}{2m} \cdot \frac{1}{2}(P_s - P_a)^2 + \frac{1}{2} c \cdot \frac{1}{2}(x_s - x_a)^2 - \frac{2e^2 \cancel{x_1 x_2} (x_s + x_a)(x_s - x_a)}{R^3}$$

$$= \left[\frac{1}{2m} P_s^2 + \frac{1}{2}\left(c - \frac{2e^2}{R^3}\right) x_s^2\right] + \left[\frac{1}{2m} P_a^2 + \frac{1}{2}\left(c + \frac{2e^2}{R^3}\right) x_a^2\right] \quad \text{——— (6)}$$

আবার, (4) নং থেকে সমাধান করে পাই,

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_s + x_a) \text{ এবং } x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_s - x_a) \quad \text{—— (7)}$$

এই সমীকরণ (6) নং থেকে বিবেচনা করে সিস্টেমটির বল ধ্রুবক পাই,

$$k = \left(c \pm \frac{2e^2}{R^3}\right)$$

অতএব, সিস্টেমটির কৌণিক কম্পাঙ্ক পাই,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$= \left[\left(c \pm \frac{2e^2}{R^3}\right)/m\right]^{1/2}$$

$$= \left[\frac{c}{m}\left(1 \pm \frac{2e^2}{R^3 c}\right)\right]^{1/2}$$

$$= \sqrt{\frac{c}{m}}\left(1 \pm \frac{2e^2}{R^3 c}\right)^{1/2}$$

$$= \omega_0 \left[1 \pm \frac{1}{2}\left(\frac{2e^2}{R^3 c}\right) - \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{2e^2}{R^3 c}\right)^2 + \cdots\right] \quad \text{—— (8)}$$

এখানে, $\omega_0 = \sqrt{c/m}$ ।

সিস্টেমটির শূন্য বিন্দু শক্তি হলো $\frac{1}{2}\hbar(\omega_s + \omega_a)$ ।

সমীকরণ (8) হতে প্রতিসাম্যিক ও অপ্রতিসাম্যিক এর জন্য বিবেচনা করতে পারি,

$$\Delta\omega_s = \omega_0 \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2e^2}{R^3 c}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{2e^2}{R^3 c}\right)^2\right]$$

$$\text{এবং } \Delta\omega_a = \omega_0 \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2e^2}{R^3 c}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{2e^2}{R^3 c}\right)^2\right]$$

অতএব, মিথস্ক্রিয়া শক্তি হবে,

$$U = \frac{1}{2}\hbar(\Delta\omega_s + \Delta\omega_a)$$

$$= \frac{1}{2}\hbar\omega_0\left[2 - 2\cdot\frac{1}{8}\left(\frac{2e^2}{R^3 c}\right)^2\right]$$

$$= \hbar\omega_0 - \hbar\omega_0 \frac{1}{8}\left(\frac{2e^2}{R^3 c}\right)^2$$

$$\Rightarrow W - \hbar\omega_0 = -\hbar\omega_0 \cdot \frac{1}{8}\left(\frac{2e^2}{c R^3}\right)^2$$

$$\boxed{\Rightarrow \Delta U = -\frac{A}{R^6}} \text{ ——— } (9)$$

ইহাই হলো আকর্ষণ মিথস্ক্রিয়া এবং এই মিথস্ক্রিয়া দুটি স্পন্দকের মধ্যকার ব্যবধান। অর্থাৎ, দুটি অণুর মধ্যকার দূরত্ব R-এর ষষ্ঠ ঘাতের ব্যস্তানুপাতিক। ইহাকে ভ্যান্ডার-ওয়ালস মিথস্ক্রিয়া বলা হয়। ইহাকে আবিষ্ট দ্বি-মেরু মিথস্ক্রিয়া বা লন্ডন মিথস্ক্রিয়া ও বলা হয়।

লিনার্ড জোনস বিভব এর রাশিমালা নির্ণয়:

আমরা জানি, $\Delta U = -\frac{A}{R^6}$ ——— (i)

এই মিথস্ক্রিয়া শক্তি দূরপাল্লার মিথস্ক্রিয়া প্রদান করে। কিন্তু পরীক্ষা লব্ধ ফলাফল ব্যাখ্যার জন্য এই ফলাফলটি যথেষ্ট নয়। পরীক্ষালব্ধ ফলাফল ব্যাখ্যার জন্য এই ফলাফলটি যথেষ্ট নয়। পরীক্ষালব্ধ ফলাফল ব্যাখ্যার জন্য আয়নটি বিকর্ষি মিথস্ক্রিয়া শক্তির প্রয়োজনীয় রাশিমালাটি হলো

$$U = \frac{B}{R^{12}} \text{ ——— } (ii)$$

সমীকরণ (ii) ও (i) হতে একত্রিত করে R-ব্যবধানে অবস্থিত দুটি অণুর মোট মিথস্ক্রিয়া বিভব শক্তি হবে,

$$U = \frac{B}{R^{12}} - \frac{A}{R^6} \text{ ——— } (iii)$$

এই মিথস্ক্রিয়া মডেলে দুটি নতুন প্যারামিটার ϵ এবং σ প্রকাশ করা হয়। এখানে, $A = 4\epsilon\sigma^6$ এবং $B = 4\epsilon\sigma^{12}$ অতএব সমীকরণ (iii) নং হতে পাই,

$$V = \frac{B}{R^{12}}$$

$$V = 4\epsilon\left[\left(\frac{\sigma}{R}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{R}\right)^{6}\right]$$

ইহাই হলো নিচের লিনার্ড-জোন্স বিভবের রাশিমালা।

chapter-3

Qn-1: কঠিন পদার্থের ল্যাটিস আপেক্ষিক তাপের ক্ষেত্রে আইনস্টাইনের মডেল ব্যাখ্যা কর?

সমাধান

স্থিরায়তনে ডুলং ও পেটিটের সূত্র ব্যাখ্যায় ধরে নেওয়া হয়েছে যে, কঠিন পদার্থের অনুসমূহ সরল ছন্দিত গতিতে স্পন্দন সম্পন্ন করে। প্রতিটি স্পন্দনরত পরমাণুর কার্তেসীয় তিন অক্ষ বরাবর তিনটি স্বতন্ত্র স্পন্দন মোডে থাকবে। এরূপ বিবেচনা থেকে আপেক্ষিক তাপের যে মান পাওয়া যায় তা কক্ষতাপমাত্রা এবং তদপেক্ষা উচ্চতাপমাত্রার জন্য ফলপ্রসূ হলেও নিম্ন তাপমাত্রায় পরীক্ষালব্ধ ফল প্রদানে ব্যর্থ হয়।

এই ব্যর্থতা দূরীকরণের লক্ষ্যে বিজ্ঞানী আইনস্টাইন ১৯১১ সালে কঠিন পদার্থের আপেক্ষিক তাপের জন্য একটি মডেল উপস্থাপনা করেন।

(i) N সংখ্যক পরমাণু ক্রিস্টাল বিবেচনা করেন।

(ii) পরমাণুসমূহের কম্পাঙ্ক একই অর্থাৎ f কম্পাঙ্কে সরলভাবে স্পন্দনরত।

(iii) এরা তিনটি স্বাধীনতার মাত্রা ভোগ করতে পারে। তাই একমাত্রিক বিবেচনায় এদের সমতুল্য স্পন্দকের সংখ্যা = 3N

(iv) ডুলং ও প্যাটিটের সূত্রে পরমাণুসমূহ অবিচ্ছিন্ন হলেও আইনস্টাইনের মডেলে ছন্দিত স্পন্দকের শক্তি ছিন্নায়িত অর্থাৎ, কোয়ান্টায়িত

প্রতিপাদন: যেহেতু পরমাণুসমূহের ছন্দিত স্পন্দকের শক্তি ছিন্নায়িত অর্থাৎ কোয়ান্টায়িত। তাই, প্লাঙ্কের কোয়ান্টাম তত্ত্বানুসারে স্পন্দকের শক্তি হবে,

$$E = nhf \quad \text{——— (i)}$$

যখন $n = 0, 1, 2, 3 \ldots\ldots$ তাকে কোয়ান্টাম সংখ্যা বলে।

h = আবর্তনীন প্লাঙ্কের ধ্রুবক

f = কম্পাঙ্ক

(i) নং সমীকরণকে নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায়;

$$E = n \cdot \frac{h}{2\pi} \cdot 2\pi f$$

$$= n\hbar\omega \quad \text{——— (ii)}$$

মূলত আইনস্টাইন প্লাঙ্কের G ফলাফল ব্যবহার করেন। কিন্তু পরবর্তিতে যান্ত্রিক তরঙ্গের ফলাফল

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad \text{——— (iii)}$$

ম্যাক্সওয়েল বোল্টজম্যান বন্টন সূত্র ব্যবহার করে, কোন দলন্দকের

গড় শক্তি $E = \dfrac{\sum_{n=0}^{\infty} E_n \exp\left(-\frac{E_n}{k_BT}\right)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{E_n}{k_BT}\right)}$

এখানে, (iii) নং সমীকরণ ব্যবহার করে পাই,

$$\bar{E} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega \exp\left[-\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\hbar\omega}{k_BT}\right]}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\hbar\omega}{k_BT}\right]}$$

$$\Rightarrow \bar{E} = \frac{\hbar\omega \sum_{n=0}^{\infty} \left(n+\frac{1}{2}\right) \exp\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]} \quad \text{——— (4)}$$

যখন, $x = -\dfrac{\hbar\omega}{k_BT}$ ——— (5)

(4) নং সমীকরণ হতে পাই,

$$\bar{E} = \frac{\hbar\omega\left(\frac{1}{2}e^{x/2} + \frac{3}{2}e^{3x/2} + \frac{5}{2}e^{5x/2} + \ldots\right)}{\left(e^{x/2} + \frac{3}{2}e^{3x/2} + e^{5x/2} + \ldots\right)}$$

$$\bar{E} = \hbar\omega \frac{d}{dx} \log\left[e^{x/2} + e^{3x/2} + e^{5x/2} + \cdots\right]$$

$$= \hbar\omega \frac{d}{dx}\left[\log e^{x/2}\left(1 + e^{x} + e^{2x} + \cdots\right)\right]$$

$$= \hbar\omega \frac{d}{dx}\left[\frac{x}{2} + \log\left(1 + e^{x} + e^{2x} + \cdots\right)\right] \quad \text{--- (6)}$$

এখন, $\log\left(1 + e^{x} + e^{2x} + \cdots\right) = -\log\left(1 - e^{x}\right)$ --- (7)

(7) নং এর মান (6) নং এ বসাই,

$$\bar{E} = \hbar\omega \frac{d}{dx}\left[\frac{x}{2} - \log\left(1 - e^{x}\right)\right]$$

$$= \hbar\omega\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{1 - e^{x}}\left(0 - e^{x}\right)\right]$$

$$= \hbar\omega\left[\frac{1}{2} + \frac{e^{x}}{1 - e^{x}}\right]$$

$$= \hbar\omega\left[\frac{1}{2} + \frac{e^{x}/e^{x}}{\frac{1}{e^{x}} - \frac{e^{x}}{e^{x}}}\right]$$

$$= \hbar\omega\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{-x} - 1}\right]$$

$$\Rightarrow \bar{E} = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{x} - 1}$$ [5 নং সমীকরণ থেকে $x = -\frac{\hbar\omega}{k_B T}$]

$$= \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{-\left(-\hbar\omega/k_B T\right)} - 1}$$

$$\therefore \bar{E} = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \quad \text{--- (8)}$$

এই সমীকরণের ডানপাশের প্রথম পদ তাপমাত্রা নিরপেক্ষ শূন্য বিন্দু শক্তি নির্দেশ করে।

এখন,
প্রতিস্পন্দকের গড় শক্তিকে স্পন্দন সংখ্যা 3N দিয়ে গুণ করলে ক্রিস্টালের অভ্যন্তরীণ শক্তি পাওয়া যায়।

ক্রিস্টালের মোট অভ্যন্তরীণ শক্তি:-

$$U = 3N\bar{E}$$

$$= 3N\left(\frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_BT}-1}\right)$$

$$\Rightarrow U = 3N\frac{\hbar\omega}{2} + \frac{3N\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_BT}-1} \quad \text{—— (9)}$$

আমরা জানি,

স্থির আয়তনে আপেক্ষিক তাপ

$$C_V = \left(\frac{dU}{dT}\right)_V$$

$$= \frac{d}{dT}\left[3N\cdot\frac{\hbar\omega}{2} + \frac{3N\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_BT}-1}\right]$$

$$= \frac{d}{dT}\left[\frac{3N\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_BT}-1}\right]$$

$$= 3N\hbar\omega\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{e^{\hbar\omega/k_BT}-1}\right)$$

$$= 3N\hbar\omega\left[\frac{\left(e^{\hbar\omega/k_BT}-1\right)\cdot 0 - 1\left(e^{\hbar\omega/k_BT}-0\right)\cdot\left(-\frac{\hbar\omega}{k_BT^2}\right)}{\left(e^{\hbar\omega/k_BT}-1\right)^2}\right]$$

$$= \frac{3N\hbar\omega\left[0 + \frac{\hbar\omega}{k_BT^2}\cdot e^{\hbar\omega/k_BT}\right]}{\left(e^{\hbar\omega/k_BT}-1\right)^2}$$

$$\therefore C_V = 3Nk_B\left(\frac{\hbar\omega}{k_BT}\right)^2\cdot\frac{e^{\hbar\omega/k_BT}}{\left(e^{\hbar\omega/k_BT}-1\right)^2}$$

ধরি, $\theta_E = \frac{\hbar\omega}{k_B}$ [θ_E = আইনস্টাইন তাপমাত্রা]

$$C_V = \frac{3Nk\left(\frac{\theta_E}{T}\right)^2\exp\left(\frac{\theta_E}{T}\right)}{\left[\exp\left(\frac{\theta_E}{T}\right)-1\right]^2} \quad \text{—— (10)}$$

এটিই আইনস্টাইন মডেল অনুসারে তাপধারণ ক্ষমতার রাশিমালা।

Note: কোয়ান্টাম তত্ত্ব অনুসারে,

প্রতিটি freedom সংখ্যার জন্য গড় শক্তি, $\bar{E} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1}$

** গ্যাস ধ্রুবক, $R = Nk$

** আপেক্ষিক তাপ, $c_v = \left(\frac{\delta E}{\delta T}\right)_v$

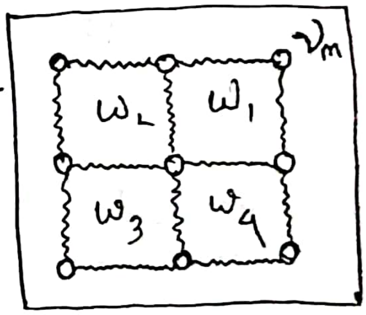
* $\int_0^{\theta/T} \frac{x^3}{e^x-1}\,dx = \frac{e^x x^4}{(e^x-1)^2}\,dx$

Qn-2: কঠিন পদার্থের তাপধারণ ক্ষমতা সম্পর্কিত ডিবাই তত্ত্ব বর্ণনা কর। দেখাও যে নিম্ন তাপমাত্রায় এটি T^3 আইন অনুসরণ করে?

সমাধান

অবিচ্ছিন্ন কঠিন পদার্থের স্থিতিস্থাপক দোলনের জন্য অনুদৈর্ঘ্য / দীঘল ও অনুপ্রস্থ বা / আড়ে 2 ধরনের কম্পন উৎপন্ন হয়।

কঠিন পদার্থের মধ্যে অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গের বেগ v_l ও অনুপ্রস্থ তরঙ্গের বেগ v_t হলে ν ও $\nu + d\nu$ কম্পাঙ্কের মধ্যে কম্পন প্রণালী হবে নিম্নরূপ:-



স্থিতিস্থাপক দোলনের জন্য ভিন্ন ভিন্ন কম্পন

[ν_m = সর্বোচ্চ কম্পন]

অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গের জন্য কম্পন প্রণালী

$$= \left(\frac{4\pi V}{v_l^3}\right)\nu^2\, d\nu$$

[অনুপ্রস্থের মুক্ত ডিগ্রি]

অনুপ্রস্থ তরঙ্গের জন্য কম্পন প্রণালী

$$= 2\left(\frac{4\pi V}{v_t^3}\right)\nu^2\, d\nu$$

[V = কঠিন পদার্থের আয়তন]

$\therefore\ \nu$ ও $\nu + d\nu$ কম্পাঙ্কের রেঞ্জের মধ্যে কম্পন প্রণালির সংখ্যা,

$$Z(\nu)d\nu = 4\pi V\left(\frac{1}{V_l^3}+\frac{2}{V_t^3}\right)\nu^2 d\nu$$

আবার, N সংখ্যক পরমাণুবিশিষ্ট কঠিন পদার্থের freedom সংখ্যা যদি 3 হয় তবে মোট কম্পন প্রণালী হবে 3N।

$$\therefore\ 3N = \int_0^{\nu_m} Z(\nu)\, d\nu$$

$$= \int_0^{\nu_m} 4\pi V\left(\frac{1}{V_l^3}+\frac{2}{V_t^3}\right)\nu^2 d\nu$$

$$= 4\pi V\left(\frac{1}{V_l^3}+\frac{2}{V_t^3}\right)\int_0^{\nu_m}\nu^2 d\nu$$

$$= 4\pi V\left(\frac{1}{V_l^3}+\frac{2}{V_t^3}\right)\cdot\frac{\nu_m^3}{3}$$

বা, $$\frac{9N}{\nu_m^3} = 4\pi V\left(\frac{1}{V_l^3}+\frac{2}{V_t^3}\right) \qquad (1)$$

কোয়ান্টাম তত্ত্ব অনুসারে, প্রতিটি freedom সংখ্যার জন্য,

গড় গতিশক্তি, $$\bar{E} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1}$$

$\therefore$ কঠিন ক্রিস্টালের মোট শক্তি, $E = 3N\bar{E}$

$$= \int_0^{\nu_m} Z(\nu)\, d\nu \cdot \bar{E}$$

$$= \int_0^{\nu_m} 4\pi V\left(\frac{1}{V_l^3}+\frac{2}{V_t^3}\right)\nu^2 d\nu \cdot \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1}$$

$$= 4\pi V h\left(\frac{1}{V_l^3}+\frac{2}{V_t^3}\right)\int_0^{\nu_m}\frac{\nu^3 d\nu}{e^{h\nu/kT}-1}$$

$$\Rightarrow E = \frac{9Nh}{\nu_m^3}\int_0^{\nu_m}\frac{\nu^3\, d\nu}{e^{h\nu/kT}-1} \qquad (2)$$ [1 নং হতে মান বসিয়ে]

ধরি, $x = \frac{h\nu}{kT}$ একটি মাত্রাহীন চলক।

$$\Rightarrow \nu = \frac{xkT}{h}$$

$$\Rightarrow d\nu = \frac{kT}{h} dx \quad [k, T, ও\ h\ ধ্রুবক]$$

এখন, (ii) নং হতে পাই, $$E = \frac{9Nh}{\nu_m^3} \int_0^{x_m} \frac{\left(\frac{xkT}{h}\right)^3 \cdot \left(\frac{kT}{h}\right) dx}{e^x - 1}$$ [$d\nu$, dx সম্পর্কিত থেকে হওয়ায় ν_m হয়ে x_m]

$$= \frac{9Nh}{\nu_m^3} \left(\frac{kT}{h}\right)^4 \int_0^{x_m} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$$

$$\Rightarrow E = 9NkT \left(\frac{kT}{h\nu_m}\right)^3 \int_0^{x_m} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \quad \text{——— (3)}$$

ধরা যাক, ডিবাই তাপমাত্রা, $\theta_D = \frac{h\nu_m}{T}$ এবং $x_m = \frac{h\nu_m}{kT} = \frac{h\nu_m}{k} \cdot \frac{1}{T} = \frac{\theta_D}{T}$

(3) নং হতে পাই, $\rightarrow$ $$E = 9NkT \left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3 \int_0^{\theta_D/T} \frac{x^3}{e^x - 1} dx \quad \text{——— (4)}$$

আমরা জানি, আপেক্ষিক তাপ, $C_v = \left(\frac{\delta E}{\delta T}\right)_v$

$$বা,\ C_v = 9N\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3 \int_0^{\theta_D/T} \frac{e^x x^4}{(e^x - 1)^2} dx$$

$$বা,\ C_v = 3R \cdot \left(\frac{\theta_D}{T}\right) \times 3 \left(\frac{T}{\theta_D}\right)^4 \int_0^{\theta_D/T} \frac{e^x x^4}{(e^x - 1)^2} dx \quad \left[k = \frac{R}{N}\right]$$

$$\boxed{\therefore C_v = 3R\left(\frac{\theta_D}{T}\right) \times F_d}$$

যেখানে,
[F_D ডিবাই ফাংশন $= 3\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^4 \int_0^{\theta_D/T} \frac{e^x x^4}{(e^x - 1)^2} dx$]

T^3 এর বর্ণনা: খুব নিম্ন তাপমাত্রায়:

$$T << \theta_D \quad \Rightarrow \frac{\theta_D}{T} \rightarrow \infty$$

সমীকরণ (4) হতে পাই,

$$E = 9kNT\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}\,dx$$

$$= 9Nk\cdot\frac{T^4}{\theta_D^3}\times\frac{\pi^4}{15}$$

এখন,

$$C_V = \frac{dE}{dT} = \frac{d}{dT}\left(9Nk\cdot\frac{T^4}{\theta_D^3}\cdot\frac{\pi^4}{15}\right)$$

$$= \frac{9Nk}{\theta_D^3}\cdot\frac{\pi}{15}\,\frac{d}{dT}\left(T^4\right)$$

$$= \frac{9Nk}{\theta_D^3}\cdot\frac{\pi^4}{15}\cdot 4T^3$$

$$= \left(\frac{12Nk\pi^4}{5\theta_D^3}\right)\cdot T^3$$

$$\therefore C_V \propto T^3$$

এ থেকে দেখা যায় যে, খুব নিম্ন তাপমাত্রায় আপেক্ষিক তাপ সরাসরি T^3 এর সমানুপাতিক।

ডিবাই মডেলের সীমাবদ্ধতা:

অনেক ক্ষেত্রে ডিবাই তত্ত্ব ফলপ্রসূ হলেও অতি নিম্ন তাপমাত্রায় পরীক্ষালব্ধ ফলাফলের সাথে এ তত্ত্বের গরমিল দেখা যায়। ডিবাই তত্ত্ব অনুসারে T^3 সূত্রটি $T << 0.1\theta_D$ তাপমাত্রা এর ক্ষেত্রে সঠিক মান প্রদান করার কথা কিন্তু রেকম্যান দেখাতে সক্ষম হন যে সূত্রটি তাপমাত্রায় এ সীমায় সঠিক ফল প্রদানে ব্যর্থ হয়।

(Show that, every reciprocal lattice vector is normal to a lattice plane of the direct crystal lattice.)

কঠিন পদার্থের তাপধারকত্বের আইনস্টাইন তত্ত্ব ও ডিবাই তত্ত্বের মধ্যে পার্থক্য কর।

(Point out the difference between Einstein's theory and Debye theory of heat capacity of solid.)

উত্তর : নিম্নে আপেক্ষিক তাপ ধারকত্ব সম্পর্কিত আইনস্টাইন মডেল ও ডিবাই মডেলের পার্থক্য দেয়া হলো :

আইনস্টাইন মডেল	ডিবাই মডেল
১. সরল মাধ্যমে তরঙ্গ সঞ্চালিত হবে।	১. কঠিন মাধ্যমে তরঙ্গ সঞ্চালিত হবে।
২. কম্পাঙ্কের তরঙ্গদৈর্ঘ্য একটি বিস্তৃত পালার মধ্যে অবস্থান করে।	২. তরঙ্গসমূহের দের্ঘ্য পালা নিম্ন কম্পাঙ্কের শব্দ তরঙ্গ থেকে শুরু করে উচ্চ কম্পাঙ্কের অবলোহিত পর্যন্ত বিস্তৃত।
৩. একক পরমাণুর কম্পন বিবেচনা করেন।	৩. সার্বিকভাবে ক্রিস্টালের স্পন্দন মোড বিবেচনা করেন।
৪. আইনস্টাইন মডেলে স্পন্দন মোডের প্রয়োজন নেই।	৪. ডিবাই মডেল আলোচনার পূর্বে অবিচ্ছিন্ন মাধ্যমের স্পন্দন মোড সম্পর্কে আলোচনা প্রয়োজন।

প্র-৫: দেখাও যে, উচ্চ তাপমাত্রায় ডিবাই এর সূত্রের সাহায্যে ডুলং পেটিটের সূত্র পাওয়া যায়?

সমাধান

উচ্চ তাপমাত্রায় $T >> \theta_D$ সমাকলনের পূর্ণ সীমার জন্য x, 1 এর তুলনায় ক্ষুদ্র বিধায় $e^x - 1 \cong x$।

অতএব, আমরা জানি, (ii) নং হতে,

$$E = 9NKT\left(\frac{1}{x_m}\right)^3 \cdot \int_0^{x_m} x^2 dx$$

$$= 9NKT\left(\frac{1}{x_m}\right)^3 \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{x_m}$$

$$= 9NKT \cdot \frac{1}{x_m^3} \cdot \frac{x_m^3}{3}$$

$$\therefore E = 3NKT$$

অতএব. $$C_v = \frac{\partial E}{\partial T}$$

$$= \frac{\partial}{\partial T}(3NKT)$$

$$= 3Nk$$

যা চিরায়ত তত্ত্বানুসারে প্রাপ্ত আপেক্ষিক তাপ অর্থাৎ ডুলং ও পেটিটের সূত্র তথা আইনস্টাইনের তত্ত্ব মেনে চলে। এটি পরীক্ষালব্ধ ফলাফলের সাথেও মিলে যায়।

৩.১০ কিছু গুরুত্বপূর্ণ অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর

Some important brief questions and answers

১. ল্যাটিস স্পন্দন বলতে কী বুঝ? [জা.বি. (স)-২০১০, ২০১২, ২০১৩, ২০১৭]

উত্তর : কঠিন পদার্থ অণু বা পরমাণু দ্বারা গঠিত। এগুলো কাছাকাছি অবস্থান করে পরস্পরকে আকর্ষণ করে। আবার এদের মধ্যকার দূরত্ব খুব কমে গেলে বিকর্ষণ বল ক্রিয়া করতে শুরু করে। এ পরমাণু বা আয়নসমূহের আকর্ষণ ও বিকর্ষণজনিত মিথস্ক্রিয়ার কারণে এগুলো তাদের গড় অবস্থানের সাপেক্ষে স্পন্দিত হয়। এরূপ স্পন্দনকে বলা হয় ল্যাটিস স্পন্দন।

২. ফোনন বলতে কী বুঝ? [জা.বি. (স)-০৯, ১২, ১৪, ১৬, ১৮; ঢা.বি. (৭ কলেজ)-১৬, ১৭]

উত্তর : ল্যাটিস স্পন্দনে সৃষ্ট তরঙ্গের শক্তি কোয়ান্টায়িত হয়। তাড়িতচৌম্বক তরঙ্গের শক্তির কোয়ান্টামকে যেমন ফোটন বলা হয় তেমনি ল্যাটিস স্পন্দনের দরুন সৃষ্ট স্থিতিস্থাপক তরঙ্গের শক্তির কোয়ান্টামকে ফোনন বলে।

৩. স্বাভাবিক মোড কাকে বলে? [জা.বি. (স)-২০১৩]

উত্তর : ল্যাটিস স্পন্দনের ক্ষেত্রে তরঙ্গ সংখ্যা k -এর প্রতিটি মান যে কম্পন প্রকৃতি নির্দেশ করে তাকে স্বাভাবিক মোড বলে।

৪. স্বাভাবিক মোড সংখ্যা কাকে বলে?

উত্তর : প্রদত্ত সীমান্তিক শর্তাধীনে তরঙ্গ সমীকরণের স্বতন্ত্র সমাধান সংখ্যাকেও স্বাভাবিক মোড সংখ্যা বলে।

৫. ডিবাই তাপমাত্রার সংজ্ঞা লিখ। [জা.বি. (স)-২০১৬; ঢা.বি. (৭ কলেজ)-২০১৬]

উত্তর : ডিবাই তাপমাত্রার সংজ্ঞা নিম্নরূপ :

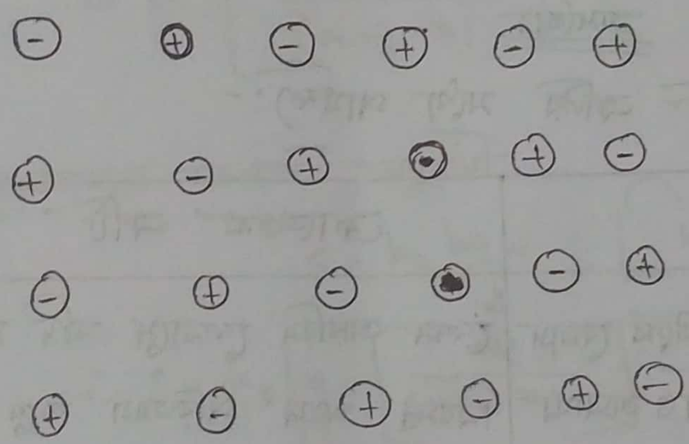
$$\Theta_D = \frac{h\nu_D}{k_B}$$

Chapter-5

Qn-1:- স্কটকি ত্রুটি বলতে কি বুঝ?

সমাধান

যেসব কেলাসের আয়নীয় যৌগের কেলাস জালক থেকে সমসংখ্যক ক্যাটায়ন ও অ্যানায়ন বিচ্ছিন্ন হওয়ার ফলে উক্ত কেলাসে যে ত্রুটির সৃষ্টি হয় তাকে স্কটকি ত্রুটি বলে। যেসব কেলাসের আয়নীয় যৌগের কেলাস সর্বাধিক আয়নের কো-অর্ডিনেশন সংখ্যা বেশি এবং যাদের ক্যাটায়ন ও অ্যানায়নের আকার প্রায় সমান। তাদের এ ধরনের ত্রুটি লক্ষ্য করা যায়। উদাহরণ:- NaCl, KCl, KBr, CsCl ইত্যাদী।



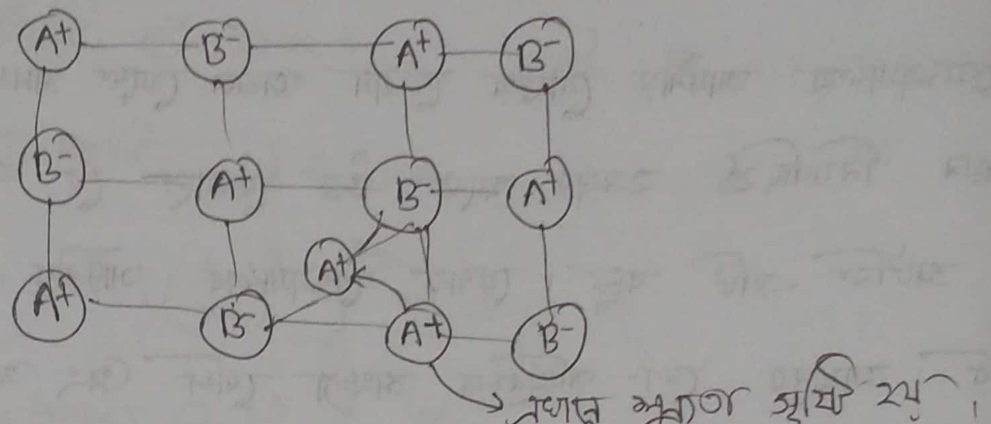
চিত্র:- স্কটকি ত্রুটি।

Qn-2:- ফ্রাঙ্কেল ত্রুটি বলতে কি বুঝ?

সমাধান

কোন আয়নীয় কেলাসে যদি কোন আয়ন তার নিজস্ব স্থান পরিত্যাগ করে একটি ইন্টারস্টিশিয়াল স্থানে অবস্থান করে তবে যে ত্রুটির সৃষ্টি হয় তাকে ফ্রাঙ্কেল ত্রুটি বলে। যে সব আয়নীয় যৌগের

কেলাস গঠনকারি যৌগের আয়নের সে- অর্ডিনেশন সংখ্যা কম এবং ক্যাটায়ন অ্যানায়ন অপেক্ষা অনেক ছোট তাদের ক্ষেত্রে এ ধরনের ত্রুটি দেখা যায়। উদাহরন: ZnS, AgBr ইত্যাদী।



চিত্র: ফ্রাঙ্কেল ত্রুটি।

প্র: 3- সটকি ও ফ্রাঙ্কেল ত্রুটির মধ্যে পার্থক্য লিখ?

সমাধান

ফ্রাঙ্কেল ত্রুটি ও সটকি ত্রুটির মধ্যে পার্থক্য:-

সটকি ত্রুটি	ফ্রাঙ্কেল ত্রুটি
১. কোন কেলাসাকার আয়নিয় যৌগের কেলাস জালক থেকে সমসংখ্যক ক্যাটায়ন ও অ্যানায়ন নিরুদ্দিষ্ট হওয়ার ফলে ঐ কেলাসে যে ত্রুটির সৃষ্টি হয় তাকে সটকি ত্রুটি বলে।	১. কোন আয়নিয় কেলাসে যদি কোন আয়ন তার নিজস্ব স্থান পরিত্যাগ করে একটি ইন্টারস্টিশিয়াল স্থানে অবস্থান করে তবে যে ত্রুটির সৃষ্টি হয় তাকে ফ্রাঙ্কেল ত্রুটি বলে।
২. আয়নের সে- অর্ডিনেশন সংখ্যা বেশি থাকে।	২. আয়নের সে- অর্ডিনেশন সংখ্যা কম থাকে
৩. অ্যানায়ন ও ক্যাটায়নের আকার প্রায় সমান হয়।	৩. ক্যাটায়ন অ্যানায়ন অপেক্ষা অনেক ছোট হয়ে থাকে।
৪. এই ত্রুটির ফলে কেলাসের ঘনত্ব হ্রাস পায়।	৪. এই ত্রুটির ফলে কেলাসের ঘনত্ব বৃদ্ধি পায়।

প্রশ্ন-৫: অর্ডারি ক্ষটির রাশিমালা প্রতিপাদন কর?

সমাধান

একটি ক্রিস্টাল বিবেচনা করি যার মধ্যে সমান সংখ্যক পজিটিভ ও নেগেটিভ চার্জ আয়ন বিদ্যমান এবং এদের মোট সংখ্যা হলো N। ধরি, ক্রিস্টালটিতে অর্ডারি ক্ষটির সংখ্যা n। মুক্ত শক্তি নির্ণয় করার জন্য প্রথমে এনট্রপি ও অভ্যন্তরীন শক্তি নির্ণয় করতে হবে।

বিন্যাসের সংখ্যা হলো: $\frac{N!}{(N-n)!\,n!}$ —— (i)

যত বিভিন্ন উপায়ে n Vacancy pair তৈরি হতে পারে তা নির্ণীত হবে সমীকরণ (i) এর বর্গের দ্বারা। তাহলে,

$$w = \left[\frac{N!}{(N-n)!\,n!}\right]^2 \text{ —— (ii)}$$

আমরা জানি, বোলজম্যান সম্পর্ক অনুযায়ী

$$S = k_B \log w \quad [k_B = \text{বোলজম্যান ধ্রুবক}]$$

$$\therefore S = k_B \log\left[\frac{N!}{(N-n)!\,n!}\right]^2 \text{ —— (iii)}$$

অভ্যন্তরীন শক্তি, $U = nE_p$ —— (iv)

ক্রিস্টালের হেলমহোল্জ মুক্ত শক্তি হলে,

$$F = U - TS$$

$$= nE_p - Tk_B \log\left[\frac{N!}{(N-n)!\,n!}\right]^2$$

$$= nE_p - 2Tk_B \log\left[\frac{N!}{(N-n)!\,n!}\right] \text{ —— (v)}$$

CamScanner

সমীকরণ (v) এর লগারিদমিক অংশে স্টার্লিং ফর্মুলা ব্যবহার করে আমরা পাই,

$$\log x! = x\log x - x$$ তাহলে,

$$\Rightarrow \log\left[\frac{N!}{(N-n)!\,n!}\right] = \log N! - \log(N-n)! - \log n!$$

$$= N\log N - N - (N-n)\log(N-n) + (N-n) - n\log n + n$$

$$= N\log N - (N-n)\log(N-n) - n\log n$$

তাহলে, (v) নং হতে পাই,

$$F = nE_p - 2k_BT\left[N\log N - (N-n)\log(N-n) - n\log n\right]$$

যদি T তাপমাত্রায় সাম্যাবস্থার সৃষ্টি হয় তবে বলা যায়, মুক্তশক্তি সর্বনিম্ন হবে। সুতরাং,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial n}\right)_T = 0$$

$$\Rightarrow E_p - 2k_BT\left[0 - (N-n)\frac{1}{N-n}(0-1) - \log(N-n)\cdot(0-1) - n\cdot\frac{1}{n} - \log n\right] = 0$$

$$\Rightarrow E_p - 2k_BT\left[\log(N-n) - \log n\right] = 0$$

$$\Rightarrow E_p - 2k_BT\cdot\log\frac{N-n}{n}$$ যদি $N \gg n$

$$\Rightarrow E_p = 2k_BT\log\frac{N-n}{n}$$

$$\Rightarrow \log\frac{N-n}{n} = \frac{E_p}{2k_BT}$$

বা, $\log \frac{N}{n} = \frac{E_p}{2k_BT}$

বা, $\log \frac{n}{N} = -\frac{E_p}{2k_BT}$

বা, $\frac{n}{N} = e^{-E_p/2k_BT}$

$\therefore n = N e^{-\frac{E_p}{2k_BT}}$

ইহাই নির্ণেয় সাম্যের রাশিমালা।

এ থেকে দেখা যায় সাম্যতায় সাদৃশ্য তাপমাত্রা হ্রাসের সাথে হ্রাস পায়।

প্রশ্ন-5: দেখাও যে, আয়নিক ক্রিস্টালে ফ্রেনকেল ত্রুটি $n = (NN_i)^{1/2} e^{-E_i/2k_BT}$, যেখানে প্রতীকগুলো প্রচলিত অর্থ বহন করে?

সমাধান

ধরা যাক, কোন বিশুদ্ধ ক্রিস্টালে একটি পরমাণুকে তার প্রকৃত অবস্থান হতে আন্তঃস্থানীয় অবস্থানে সরাতে প্রয়োজনীয় শক্তির পরিমাণ E_i। আরো ধরা যাক, ক্রিস্টালে মোট পরমাণুর সংখ্যা N এবং আন্তঃস্থানীয় পরমাণুর সংখ্যা N_i।

এখন, n সংখ্যক ফ্রেঙ্কেল ত্রুটি উৎপত্তির সম্ভাব্য সংখ্যা হবে,

$$W = \frac{N!}{(N-n)!\,n!}\cdot\frac{N_i!}{(N_i-n)!\,n!} \quad \text{(i)}$$

তাহলে, n ফ্রেঙ্কেল ত্রুটি উৎপত্তির দরুন হেলমহোল্জের মুক্ত শক্তির পরিবর্তন হয়;

$$F = U - TS \quad \text{(ii)}$$

$$= \cancel{nE_i - k_BT\ln\left[\frac{N_i}{(N-n)!\,n!}\cdot\frac{N_i}{(N_i-n)!\,n!}\right]}$$

যেখানে, U = পরমানুর অভ্যন্তরীণ শক্তি

T = তাপমাত্রা

S = এনট্রপি

আমরা জানি $U = nE_p$ ——— (3)

এবং বোলজম্যান সম্পর্ক অনুসারে,

$$S = k_B \log w \quad \text{———} (4)$$

এখন (4) নং সমীকরণে (i) এর মান ব্যবহার করে পাই,

$$S = k_B \log \left[\frac{N!}{n!(N-n)!} \cdot \frac{N_i}{(N_i-n)!\,n!} \right] \quad \text{—} (5)$$

U, S এর মান (ii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$F = nE_p - k_BT \left[\log \left\{ \frac{N!}{n!(N-n)!} \cdot \frac{N_i!}{n!(N_i-n)!} \right\} \right]$$

$$= nE_p - k_BT \left[\log \left\{ \frac{N!}{n!(N-n)!} \right\} + \log \left\{ \frac{N_i!}{n!(N_i-n)!} \right\} \right] \quad \text{———} (6)$$

আবার, স্টার্লিং ফর্মুলা হলো:- $\log x! = x\log x - x$

তাহলে, (6) নং হতে পাই,

$$F = nE_p - k_BT \left[\log N! - \log n! - \log (N-n)! \right] + \left[\log N_i! - \log n! - \log (N_i-n)! \right]$$

$$\Rightarrow F = nE_p - k_BT \left[N\log N - N - n\log n + n - (N-n)\log (N-n) + (N-n) + N_i \log N_i - N_i - n\log n + n - (N_i-n)\log(N_i-n) + (N_i-n) \right]$$

$$F = nE_p - k_BT\left[N\log N - (N-n)\log(N-n) - 2n\log n + N_i\log N_i - (N_i-n)\log(N_i-n)\right]$$

আমরা জানি, সাম্যাবস্থায় মুক্ত শক্তি ধ্রুবক থাকে, তাই, আবার, যদি

$$\frac{\partial F}{\partial n} = 0$$

$N >> n$ এবং $N_i >> n$ হয় তবে,

$$\Rightarrow E_i - k_BT\left[0 + \frac{(N-n)}{(N-n)}\times 1 + \log(N-n) + 0 + \frac{(N_i-n)}{(N_i-n)}\times 1 + \log(N_i-n) - \frac{2n}{n} - \log n \times 2\right] = 0$$

$$\Rightarrow E_i - k_BT\log\frac{(N-n)(N_i-n)}{n^2} = 0$$

$$\Rightarrow E_i = k_BT\log\left(\frac{NN_i}{n^2}\right)$$

যখন, $N >> n$, $\therefore N-n \cong N$

$N_i >> n$, $N_i - n = N_i$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{NN_i}{n^2}\right) = \frac{E_i}{k_BT}$$

$$\Rightarrow \frac{NN_i}{n^2} = e^{E_i/k_BT}$$

$$\Rightarrow NN_i = n^2 e^{E_i/k_BT}$$

$$\Rightarrow n^2 = NN_i\, e^{-E_i/k_BT}$$

$$\Rightarrow n = (NN_i)^{1/2} \cdot e^{-E_i/2k_BT}$$

[Proved]

qn-6:- স্ফটিকের বৈশিষ্টগুলোতে ল্যাটিস শূন্যপদের প্রভাব কী?

সমাধান

স্ফটিকের বৈশিষ্ট্যে ল্যাটিস শূন্যপদের গুরুত্বপূর্ন প্রভাব রয়েছে ল্যাটিস শূন্যপদ হলো স্ফটিক জালের এমন একটি স্থান যেখানে একটি পরমাণু বা আয়ন থাকবে

কথা ছিল কিন্তু তা অনুপস্থিত। এটি একটি ত্রুটি হিসেবে বিবেচিত হয়, যা স্ফটিকের বৈশিষ্ট্যে নানাভাবে প্রভাব ফেলে।

ল্যাটিস শূন্যপদের প্রভাবঃ-

1. যান্ত্রিক বৈশিষ্ট্যঃ ল্যাটিস শূন্যপদ স্ফটিকের শক্তি ও স্থিতিস্থাপকতা কমাতে পারে। এটি স্ফটিকের মধ্যে স্ট্রেস ও স্ট্রেন তৈরি করতে পারে, যা ভাঙন ঘটাতে সহায়ক।

2. তাপীয় বৈশিষ্ট্যঃ ল্যাটিস শূন্যপদ স্ফটিকের শক্তি ও স্থিতিস্থাপকতা কমাতে পারে এবং শূন্য পদগুলোর কারণে তাপ পরিবহনের পথে বাধা সৃষ্টি হয় যা তাপীয় প্রতিরোধ বাড়ায়।

3. বৈদ্যুতিক বৈশিষ্ট্যঃ ল্যাটিস শূন্যপদ স্ফটিকের বৈদ্যুতিক পরিবাহিতা প্রভাবিত করতে পারে। ধাতব স্ফটিকে এটি ইলেকট্রনের চলাচল বাধাগ্রস্ত করে যার ফলে পরিবাহিতা কমে যায়। অর্ধপরিবাহকের ক্ষেত্রে এটি ইলেকট্রন বা হোলের ঘনত্ব প্রভাবিত করতে পারে, যা ডোপিং প্রক্রিয়ায় গুরুত্বপূর্ণ।

4. আলোকীয় বৈশিষ্ট্যঃ ল্যাটিস শূন্য পদ আলোর শোষণ এবং প্রতিফলন প্রভাবিত করতে পারে। এটি স্ফটিকের বর্ণহীনতা বা রঙের পরিবর্তন ঘটাতে পারে।

5. বিকৃতি গতিঃ ল্যাটিস শূন্যপদ স্ফটিকের মধ্যে পরমাণু বা আয়নের

গতিশীলতা বাড়িয়ে দেয়। এটি বিকৃতির হার বাড়ায় যা ক্রিস্টালের বৃদ্ধিতে এবং সংশ্লেষণের সময় গুরুত্বপূর্ণ।

ল্যাটিস শূন্য পদ ক্রিস্টালের ত্রুটি হিসেবে উপস্থিত হলেও এর প্রভাব ক্রিস্টালের বৈশিষ্ট্য অনুযায়ী ভিন্ন হতে পারে। এটি কখনো ক্রিস্টালের কার্যকারিতা উন্নত করে আবার কখনো তা হ্রাস করতে পারে। সঠিক ভাবে নিয়ন্ত্রণ করলে ল্যাটিস শূন্যপদ আধুনিক প্রযুক্তি, যেমন সেমিকন্ডাক্টর কৌশলগত উন্নয়ন ও তাপ প্রতিরোধক সামগ্রী তৈরিতে গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা রাখতে পারে।

Qn-8: ধরো ধাতব্যিক বস্তুতে শূন্যস্থান তৈরি করতে প্রয়োজনীয় সক্রিয়ন শক্তি 1.5 eV ইলেকট্রোভোল্ট হলে ভারসাম্য শর্তের অধীনে 300 k থেকে 1000k এ ভ্যাকান্সির অনুপাত কত হবে?

<u>সমাধান</u>

আমরা জানি,

ভ্যাকান্সির অনুপাত,

$$\frac{n_2}{n_1} = e^{-\frac{\Delta E}{k_B}\left(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1}\right)}$$

$$= e^{-\frac{1.5}{8.617\times10^{-5}}\left(\frac{1}{1000}-\frac{1}{300}\right)}$$

$$= e^{-1.741\times10^{4}\times(-2.3\times10^{-3})}$$

$$= e^{40.623}$$

$$= 4.39\times10^{17} \text{ Ans}$$

এখানে,

$\Delta E = 1.5$ eV

$T_1 = 300$k

$T_2 = 1000$k

বোলজম্যান ধ্রুবক

$k_B = 8.617\times10^{-5}$ eV/k

chapter-6

Qn-1:- মুক্ত ইলেকট্রন গ্যাস ব্যাখ্যা কর ?

সমাধান

১৯০০ সালে বিজ্ঞানী ড্রুড মত প্রকাশ করেন যে:-

১. ধাতব পদার্থ আয়ন কোর সমন্বয়ে গঠিত এবং যোজন ইলেকট্রন মুক্তভাবে এ আয়নকোরের সমূহের মধ্যে গতি সম্পাদন করে। ধনাত্মক আয়ন কোর এবং মুক্ত ইলেকট্রন এর মধ্যে স্থির তড়িৎ আকর্ষণ বল ক্রিয়া করায় ইলেকট্রনসমূহ ধাতুর অভ্যন্তরে গতি সম্পাদন করে।

২. আয়নকোরের বিভবক্ষেত্র ধাতুর সর্বত্র ধ্রুব থাকে বলে গণ্য করা হয়। মুক্ত ইলেকট্রনের মোট শক্তি গতিশক্তি হয়।

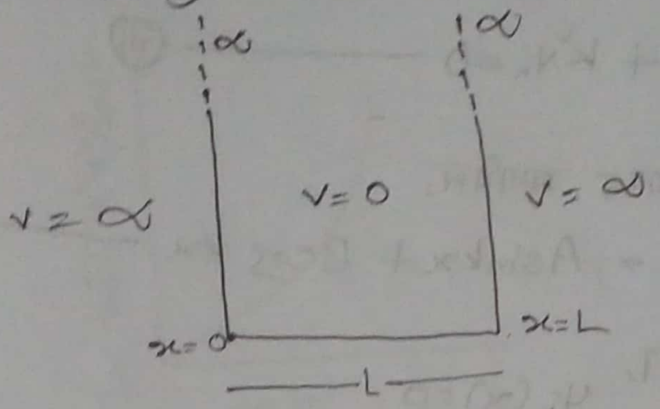
৩. ইলেকট্রনের সমূহের পারস্পরিক বিকর্ষণের বিষয়টি অগ্রাহ্য করা হয়।

৪. ধাতুর অভ্যন্তরে মুক্ত ইলেকট্রনের আচরণকে নিখুঁত গ্যাসে পরমাণু বা অণুর আচরণের সদৃশ বিবেচনা করা হয়। তাই এই মুক্ত ইলেকট্রন গুলোকে মুক্ত ইলেকট্রন গ্যাস এবং এই তত্ত্বকে মুক্ত ইলেকট্রন গ্যাস মডেল বলে আখ্যায়িত করা হয়।

Qn-2:- মুক্ত ইলেকট্রন গ্যাসের জন্য ত্রিমাত্রিক অবস্থার সোমারফিল্ড তত্ত্ব বিশ্লেষণ কর ?

সমাধান

একমাত্র বাক্সে মুক্ত ইলেকট্রন গ্যাসঃ-



m ভরের একটি ইলেকট্রন L দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একমাত্রিক ক্রিস্টালের অভ্যন্তরে গতিশীল।

ক্রিস্টাল পৃষ্ঠে একটি উচ্চ বিভব বাঁধ কার্যকর থাকে যেন ইলেকট্রন ক্রিস্টাল পৃষ্ঠে ~~একটি উচ্চ বিভব~~ ত্যাগ করতে না পারে। ক্রিস্টালের অভ্যন্তরে বা বাক্সের ভিতরে বিভবশক্তি শূন্য বিবেচনা করে পাই,

$$\left.\begin{aligned} V(x) &= 0 \quad \text{যখন} \quad 0<x<L \\ &= \infty \quad \text{যখন} \quad 0 \geq x \ \text{এবং} \ x \geq L \end{aligned}\right\}$$

প্রমাণ: n-তম অবস্থান দখলকারি ইলেকট্রন এর তরঙ্গ অপেক্ষক ψ_n হলে, শ্রোডিঞ্জার সময় অনির্ভরশীল সমীকরণ অনুসারে পাই,

$$\frac{d^2\psi_n}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E_n - V)\psi_n = 0 \quad \text{——— (i)}$$

বাক্সের অভ্যন্তরে $V=0$ বিধায়,

(i) নং সমীকরণ হতে পাই,

$$\frac{d^2\psi_n}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar} \cdot E_n\psi_n = 0 \quad \text{——— (ii)}$$

এখানে,

$$k^2 = \frac{2mE_n}{\hbar} \quad \text{বা,} \quad k = \sqrt{\frac{2mE_n}{\hbar}}$$

(ii) নং সমীকরন হবে,

$$\frac{d^2\psi_n}{dx^2} + k^2\psi_n = 0 \text{ —— (iii)}$$

(iii) নং সমীকরনের সাধারন সমাধান,

$$\psi_n(x) = A\sin kx + B\cos kx \text{ —— (iv)}$$

এখন, সীমান্ত শর্ত হলো, $\psi_n(x) = 0$

এবং $\psi_n(L) = 0$

$x = 0$ হলে, $B = 0$ হয়

$$\psi_n(x) = A\sin kx \text{ —— (v)}$$

আবার, $x = L$ হলে, $\psi_n(L) = 0$

$$\Rightarrow A\sin kL = 0$$

$$\Rightarrow \sin kL = 0$$

$$\Rightarrow \sin kL = \sin n\pi$$

$$\Rightarrow kL = n\pi$$

$$\Rightarrow k = \frac{n\pi}{L}$$

যেখানে, $n = 1, 2, 3, \text{---------}$

k এর মান (v) নং সমীকরনে বসাই,

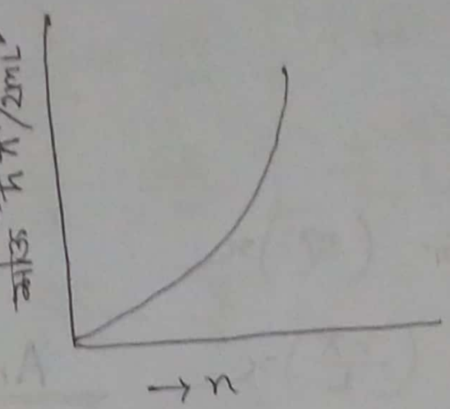
$$\psi_n(x) = A\sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)x \text{ —— (vi)}$$

আবার, $k^2 = \frac{2mE_n}{\hbar^2}$

$$\Rightarrow E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$\Rightarrow E_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2mL^2} \qquad \therefore E_n \propto n^2$$

সুতরাং $\psi_n(x)$ এবং E_n শুধুমাত্র n এর পূর্ন সুনির্দিষ্ট মানের জন্য বিবেচিত হয়।



নর্মায়নের শর্তমতে ক্রিস্টালের দৈর্ঘ্য বরাবর ইলেকট্রন পাওয়ার সম্ভাবনা = 1।

অর্থাৎ, $\int_0^L \psi_n^*(x)\,\psi_n(x)\,dx = 1$

$$\Rightarrow \int_0^L |\psi_n(x)|^2\,dx = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^L A^2 \sin^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\,dx = 1$$

$$\Rightarrow \frac{A^2}{2}\int_0^L 2\sin^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = 1$$

$$\Rightarrow \frac{A^2}{2}\int_0^L \left(1-\cos 2\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx\right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{A^2}{2}\int_0^L dx - \left[\sin 2\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]_0^L = 1$$

$$\Rightarrow \frac{A^2}{2}\int_0^L dx = 1$$

$$\Rightarrow \frac{A^2}{2}\left[x\right]_0^L = 1$$

$$\Rightarrow \frac{A^2}{2}\cdot L = 1$$

$$\Rightarrow \frac{A^2}{2} = \frac{1}{L}$$

$$\Rightarrow A^2 = \frac{2}{L}$$

$$\therefore A = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

তাহলে (vi) নং হতে পাই,

$$\psi_n(x) = A \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)x$$

$$= \sqrt{\frac{2}{L}}\left(\frac{n\pi}{L}\right)x \quad \text{Ans}$$

প্রশ্ন-৩:- ধাতুর মুক্ত ইলেকট্রন থেকে ওহমের সূত্র প্রতিপাদন কর?

সমাধান

একটি ইলেকট্রনের চার্জ e^- এর উপর প্রযুক্ত ক্ষেত্র E হলে ইলেকট্রনের গতির সমীকরণ হবে,

$$m\cdot\frac{d^2x}{dt^2} = -eE$$

$F = ma = qE$ $\quad q = -e$

(i) নং সমীকরণ হতে পাই

$$m\cdot\frac{d\dot{x}}{dt} = -eE$$

$$\Rightarrow \frac{d\dot{x}}{dt} = -\frac{eE}{m}$$

$$\therefore d\dot{x} = -\frac{eE}{m}dt \quad \text{------ (ii)}$$

(ii) নং সমীকরণকে সমাকলন করে পাই,

$$\dot{x} = -\frac{eE}{m}\cdot t + c \quad \text{------ (iii)}$$

যখন, $t=0, v=0,$ তখন $c=0$

$$\dot{x} = -\frac{eE}{m}t$$

দুটি সংঘর্ষের মধ্যকার গড় বেগ হল, $\bar{\dot{x}} = \dfrac{\int_0^{\tau} \dot{x}\,dt}{\int_0^{\tau} d\tau}$

$$= \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} -\frac{eE}{m}\, t\,dt$$

$$= -\frac{1}{\tau}\cdot\frac{eE}{m}\int_0^{\tau} t\,dt$$

$$= -\frac{1}{\tau}\cdot\frac{Ee}{m}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\tau}$$

$$= -\frac{eE}{\tau m}\cdot\frac{\tau^2}{2}$$

$$= -\frac{eE\tau}{2m}$$

যদি কারেন্ট ঘনত্ব J এবং প্রতি একক ইলেকট্রনের সংখ্যা n হয় তাহলে,

$$J = -ne\dot{x}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{ne^2E\tau}{m}$$

$$= \frac{ne^2E\tau}{2m}$$

যেখানে, ধ্রুবক বৈদ্যুতিক পরিবাহিতা $\sigma = \frac{ne^2\tau}{2m}$

$\therefore J \propto E$

এটি হচ্ছে ওহমের সূত্র

প্রশ্ন-৫: ওয়াইডম্যান - ফ্রাঞ্জ সূত্রটি লিখ ও প্রতিপাদন কর ?

সমাধান

তাপমাত্রা স্থির থাকলে, তাপীয় পরিবাহিতা ও তড়িৎ পরিবাহিতার অনুপাত সকল ধাতুর জন্য সমই হয়। এটিই ওয়াইডম্যান ও ফ্রাঞ্জ সূত্র নামে পরিচিত। তাপীয় পরিবাহিতা k এবং তড়িৎ পরিবাহিতা σ হলে

$$\frac{k}{\sigma} = \text{ধ্রুবক}$$

যদি তাপমাত্রা স্থির থাকে, অথবা $\frac{k}{\sigma} \propto T$ যদি ~~তাপ~~ তাপমাত্রা পরিবর্তিত হয়। এটিই ওয়াইডম্যান ফ্রাঞ্জ সূত্র।

অবস্থা ঘনত্ব কাকে বলে?

সমাধান

স্থির শক্তি পাল্লায় অবস্থিত ইলেকট্রনিক অবস্থার সংখ্যাকে অবস্থা ঘনত্ব বলে। এটি $D(\varepsilon)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

অর্থাৎ, $D(\varepsilon) = \frac{dn}{d\varepsilon}$

প্রতিপাদন:- ওয়াইডেম্যান-ফ্রাঞ্জ সূত্রটি তাপ পরিবাহিতা এবং তড়িৎ পরিবাহিতার সম্পর্ক বর্ণনা করে। এটিতে বলা হয় যে ধাতুতে তাপ পরিবাহিতা (k) এবং তড়িৎ পরিবাহিতা (σ) একটি নির্দিষ্ট অনুপাত বজায় রাখে যা নির্ধারিত হয় তাপমাত্রার মাধ্যমে।

আমরা জানি, তড়িৎ পরিবাহিতা

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m} \quad \text{——— (i)}$$

আবার, পদার্থের তাপীয় পরিবাহিতা,

$$k = \frac{1}{2}nv^2k\tau \quad \text{——— (ii)}$$

(i) নং কে (ii) নং দ্বারা ভাগ করে পাই

$$\frac{\frac{1}{2}nv^2k\tau}{\frac{ne^2\tau}{m}} = \frac{k}{\sigma}$$

$$\Rightarrow \frac{k}{\sigma} = \left(\frac{1}{2}mv^2\right)\frac{k}{e^2} \quad \text{——— (iii)}$$

পদার্থের মুক্ত ইলেকট্রনের গড় গতিশক্তি হবে

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT \quad \text{——— (iv)}$$

(4) নং এর মান (iii) এ ব্যবহার করে পাই,

$$\frac{k}{\sigma} = \left(\frac{3}{2} kT\right) \cdot \frac{k}{e^2}$$

$$= \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{k^2}{e^2}\right) T$$

$$= LT$$ যেখানে, $L = \frac{3}{2} \frac{k^2}{e^2}$

$$\boxed{\therefore \frac{k}{\sigma} \propto T}$$. Proved

Qn-5:- পরম শূন্য তাপমাত্রায় ইলেকট্রনের গড় গতিশক্তি নির্ণয় কর?

সমাধান

আমরা জানি, পরম শূন্য তাপমাত্রায় ইলেকট্রনের গড় গতিশক্তি হলো

$$\bar{U}_0 = \frac{1}{N} \int_0^\infty E \cdot n(E)\, dE$$

$$= \frac{1}{N} \int_0^\infty E \cdot f(E) \cdot g(E)\, dE$$

$$= \frac{1}{N} \int_0^{E_{F_0}} E \cdot f(E) \cdot g(E)\, dE + \frac{1}{N} \int_{E_{F_0}}^\infty E\, f(E)\, g(E)\, dE$$

আমরা জানি, $T = 0^\circ k$; $E \le E_{F_0}$ $f(E) = 1$

$E > E_{F_0}$ $f(E) = 0$

$$\therefore \bar{U}_0 = \frac{1}{N} \int_0^{E_{F_0}} E \cdot 1 \cdot g(E)\, dE$$

আমরা জানি, মিটিলি স্টেট মাঝামে E এবং E+dE

$$g(E)\, dE = 4\pi V \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} \cdot E^{1/2} dE$$

$$\therefore \bar{U}_0 = \frac{1}{N}\int_0^{E_{F_0}} E\cdot 4\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\cdot E^{1/2}\,dE$$

$$= \frac{4\pi V}{N}\cdot\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\int_0^{E_{F_0}} E^{3/2}\,dE$$

$$= \frac{4\pi V}{N}\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\cdot\frac{2}{5}E_{F_0}^{5/2}$$

$$= \left[\frac{8\pi V}{5N}\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}E_{F_0}^{3/2}\right]E_{F_0} \quad \text{——} \ (i)$$

আমরা জানি, ফার্মি শক্তি

$$E_{F_0} = \frac{h^2}{2m}\cdot\left(\frac{3N}{8\pi V}\right)^{2/3}$$

$$\Rightarrow E_{F_0}^{3/2} = \left(\frac{h^2}{2m}\right)^{3/2}\cdot\frac{3N}{8\pi V} \quad \text{——} \ (2)$$

(2) নং সমীকরণকে (i) নং এ ব্যবহার করে পাই,

$$\bar{U}_0 = \left[\frac{8\pi V}{5N}\cdot\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\cdot\left(\frac{h^2}{2m}\right)^{3/2}\cdot\frac{3N}{8\pi V}\right]E_{F_0}$$

$$= \frac{3}{5}\cdot E_{F_0} \qquad \boxed{\text{Proved}}$$

Qn-6: ইলেকট্রনের ঘনত্ব n হলে দেখাও যে, পরমশূন্য তাপমাত্রায় ফার্মি শক্তি

$$E_{F_0} = \frac{h^2}{8m}\cdot\left(\frac{3n}{\pi}\right)^{2/3}$$

সমাধান

মুক্ত ইলেকট্রনিক অবস্থা ঘনত্ব N(E) এর জন্য পাই,

$$N(E)\,dE = D(E)\cdot f(E)\,dE$$

তাহলে মোট ইলেকট্রন সংখ্যা $N\,\cancel{(E)dE}$ $N = \int_0^{\infty} N(E)\,dE$

$$\therefore N = \int_0^\infty D(E) f(E)\, dE \quad \text{——— (i)}$$

আমরা জানি,

$$D(E) = \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot E^{1/2}$$

(i) নং সমীকরণে D(E) এর মান বসিয়ে পাই,

$$N = \int_0^\infty \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot E^{1/2} \cdot f(E)\, dE$$

$$= \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot \int_0^\infty E^{1/2} f(E)\, dE$$

$$= \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \left[\int_0^{E_{F_0}} E^{1/2} f(E)\, dE + \int_{E_{F_0}}^\infty E^{1/2} \cdot f(E)\, dE\right]$$

কিন্তু পরমশূন্য তাপমাত্রায়

$$f(E) = 1 \quad \text{যখন } E \leq E_{F_0}$$

$$= 0 \quad \text{যখন } E > E_{F_0}$$

অতএব,

$$N = \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot \int_0^{E_{F_0}} E^{1/2} \cdot dE$$

$$\Rightarrow N = \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot \frac{2}{3} E_{F_0}^{3/2}$$

$$\Rightarrow E_{F_0}^{3/2} = \frac{3\pi^2 N}{V}$$

$$\Rightarrow E_{F_0} = \left(\frac{2\pi^2 N}{V}\right)^{2/3} \quad \text{——— (ii)} \rightarrow$$

[অনেক সময় এই পর্যন্ত প্রমান করতে দেয়]

এখন, e ইলেকট্রনের ঘনত্ব $n = \frac{N}{V}$ হলে, (ii) নং হতে,

$$E_{F_0} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(2\pi^2 n\right)^{2/3}$$

$$\Rightarrow \hbar^2 = \frac{h}{2\pi} \text{ বসালে,} \quad E_{F_0} = \frac{h^2}{8m} \cdot \left(\frac{3n}{\pi}\right)^{2/3}$$

[দেখানো হলো]

প্রশ্ন-7:- অবস্থা ঘনত্বের সংজ্ঞা দাও অথবা প্রমাণ কর যে

$$D(E) = \frac{2L}{\hbar\pi}\left(\frac{m}{2E}\right)^{1/2}$$

সমাধান

একক শক্তি ব্যবধানে অবস্থিত ইলেকট্রনিক অবস্থার সংখ্যাকে অবস্থা ঘনত্ব বলে। অর্থাৎ,

$$D(E) = \frac{dn}{dE} \quad \text{——— (i)}$$

এখানে, $D(E)$ = অবস্থা ঘনত্ব

dn = E ও $(E+dE)$ শক্তি ব্যবধানের মধ্যে অবস্থিত ইলেকট্রনিক কোয়ান্টাম অবস্থার সংখ্যা।

মুক্ত ইলেকট্রন গ্যাসের জন্য, প্রতি শক্তিস্তরে দুটি কোয়ান্টাম অবস্থা থাকে। তাই (i) নং সমীকরণ হতে,

$$D(E) = 2\frac{dn}{dE}$$

মুক্ত ইলেকট্রনের শক্তি মানের জন্য আমরা জানি,

$$E = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2mL^2} \quad \text{——— (ii)}$$

$$\Rightarrow n^2 = \frac{2mL^2E}{\hbar^2\pi^2}$$

$$\Rightarrow n = \sqrt{2mE}\cdot\frac{L}{\hbar\pi} \quad \text{——— (iii)}$$

(ii) নং সমীকরণকে n এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{dE}{dn} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\cdot 2n$$

$$= \frac{\hbar^2\pi^2 n}{mL^2}$$

$$= \frac{\hbar^2\pi^2}{mL^2}\cdot\sqrt{2mE}\cdot\frac{L}{\hbar\pi}$$

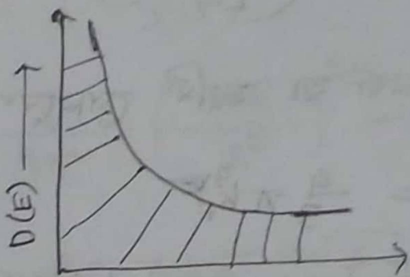
$$\Rightarrow \frac{dE}{dn} = \frac{\hbar\pi\sqrt{2mE}}{2mL}$$

$$\Rightarrow \frac{dn}{dE} = \frac{2mL}{\hbar\pi\sqrt{2mE}}$$

$$\Rightarrow D(E) = \frac{2L}{\hbar\pi}\cdot\sqrt{\frac{m}{2E}} \qquad \left[D(E) \propto \frac{1}{\sqrt{E}}\right]$$

$$\therefore D(E) = \frac{2L}{\hbar\pi}\cdot\left(\frac{m}{2E}\right)^{1/2}$$

এটিই অবস্থা ঘনত্বের সাধারণ রাশিমালা।



Qn-8: দেখাও যে ফার্মি তলের অবস্থা ঘনত্ব

$$D(E) = \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\cdot E^{1/2}$$

সমাধান

E শক্তিমাত্রায় প্রতি একক শক্তি মাত্রায় প্রাপ্ত ইলেকট্রনিক স্টেটের মোট সংখ্যাকে অবস্থার ঘনত্ব D(E) বলে।

কোয়ান্টাম বলবিদ্যা অনুসারে,

কণারবেগ $v = \frac{\hbar k}{m}$ —— (1)

N সংখ্যক মুক্ত ইলেকট্রন বিশিষ্ট সিস্টেমের ফার্মি অবস্থায় কণাসমূহকে k-স্পেসে একটি গোলকের অভ্যন্তরে বিন্দু দ্বারা প্রদর্শন করা যায়।

গোলকের পৃষ্ঠে অবস্থিত শক্তি ফার্মি শক্তি নির্দেশ করে। k- স্পেসে তরঙ্গ ভেক্টরের মান k_F হলে ফার্মি শক্তি,

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} \cdot k_F^2 \quad \text{———} \quad (ii)$$

$$\boxed{\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2}m\left(\frac{\hbar k}{m}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}m \cdot \frac{\hbar^2 k^2}{m^2} \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \cdot k^2 \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \cdot k_F^2 \end{aligned}}$$

আবার, আমরা জানি,

$$k_x = k_y = k_z = \pm \frac{2n\pi}{L}$$

$n = 1$ হলে, $k_x = k_y = k_z = \dfrac{2\pi}{L}$

k- স্পেসে কোষের আয়তন $\left(\dfrac{2\pi}{L}\right)^3$

k-স্পেসে k_F ব্যাসার্ধের গোলক বা ফার্মি গোলকের আয়তন

$$= \frac{4}{3}\pi . k_F^3$$

ইলেকট্রনিক স্টেট-বা অরবিটালের মোট সংখ্যা,

$$N = 2 \cdot \frac{\text{গোলকের আয়তন}}{\text{k-স্পেসে কোষের আয়তন}}$$

$$= 2 \cdot \frac{\frac{4}{3}\pi k_F^3}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3}$$

$$= \frac{8\pi k_F^3}{3} \cdot \frac{L^3}{8\pi^3}$$

$$= \frac{L^3 k_F^3}{3\pi^2} \qquad \boxed{L^3 = V}$$

$$\therefore N = \frac{V}{3\pi^2} \cdot k_F^3 \quad \text{———} \quad (iii)$$

র (iii) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$$k_F = \left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{1/3} \quad \text{———} \quad (iv)$$

CamScanner

ⓥ থেকে দেখা যায় যে, k_F এর মান ইলেকট্রনের ঘনত্ব $\frac{N}{V}$ এর উপর নির্ভর করে।

(ii) নং সমীকরণে k_F এর মান বসাই,

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{2/3} \quad \text{—— (v)}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2\pi^2 N}{V}\right)^{2/3} = \frac{2mE_F}{\hbar^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2\pi^2 N}{V}\right) = \left(\frac{2mE_F}{\hbar^2}\right)^{3/2}$$

$$\Rightarrow N = \frac{V}{3\pi^2} \cdot \left(\frac{2mE_F}{\hbar^2}\right)^{3/2} \quad \text{—— (vi)}$$

সিস্টেমের ভূমি অবস্থায় E_F এর নিচের সকল স্টেট পূর্ণ থাকে। এবং মোট স্টেট-এর সংখ্যা মোট ইলেকট্রন সংখ্যার সমান। তাই,

$$\int D(E) \cdot dE = N$$

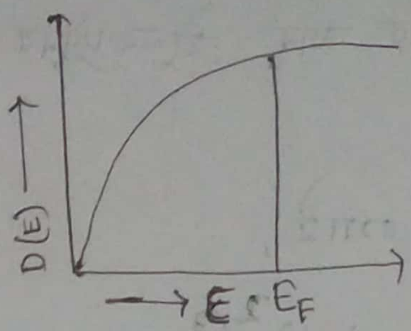
$$= \frac{V}{3\pi^2}\left(\frac{2mE_F}{\hbar^2}\right)^{3/2}$$

$$\Rightarrow D(E) = \int \frac{V}{3\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot (E_F)^{3/2} dE$$

$$= \frac{V}{3\pi^2} \cdot \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot \frac{3}{2} \cdot (E_F)^{1/2}$$

$$\therefore D(E) = \frac{V}{3\pi^2} \cdot \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot E_F^{1/2}$$

E-এর সাথে D(E) এর পরিবর্তনের প্রকৃতি প্যারাবোলিক হয়। ক্রিস্টালের আয়তন বৃদ্ধিতে D(E) এর মান বৃদ্ধি পায়।



চিত্র: ত্রিমাত্রিক ক্ষেত্রে মুক্ত ইলেকট্রন গ্যাসের জন্য শক্তি সাপেক্ষে ইলেকট্রনিক অবস্থা ঘনত্ব পরিবর্তন।

প্রশ্ন-১: চিরায়ত মুক্ত ইলেকট্রন তত্ত্বের অসুবিধাগুলো আলোচনা কর?

সমাধান

চিরায়ত মুক্ত ইলেকট্রন তত্ত্বের অসুবিধাগুলো:-

১. ইলেকট্রনের তরঙ্গ প্রকৃতির উপেক্ষা:-
ড্রুডের তত্ত্ব ক্লাসিক্যাল পদার্থবিজ্ঞানের উপর ভিত্তি করে তৈরি, যেখানে ইলেকট্রনকে একটি ক্ষুদ্র কণা হিসেবে গণ্য করা হয়। তবে ইলেকট্রন একটি তরঙ্গ প্রকৃতির ও অধিকারী, যা কোয়ান্টাম পদার্থবিজ্ঞানের মাধ্যমে ব্যাখ্যা করা হয়। এই তত্ত্ব ইলেকট্রনের তরঙ্গ প্রকৃতির সম্পূর্ণভাবে উপেক্ষা করে।

২. পরিবাহিতার নির্ভুল পূর্বানুমানে ব্যর্থতা:-
ড্রুড তত্ত্ব অনুযায়ী, ধাতুর বিদ্যুৎ পরিবাহিতা ইলেকট্রনের ঘনত্বের সঙ্গে উপর নির্ভর করে। কিন্তু বাস্তবে দেখা যায়, অনেক সময় বিদ্যুৎ পরিবাহিতা ইলেকট্রন ঘনত্বের সাথে প্রত্যাশিত অনুপাতে পরিবর্তিত হয় না। এটি তত্ত্বের সীমাবদ্ধতা নির্দেশ করে।

৩. তাপ ক্ষমতা ব্যাখ্যায় ব্যর্থতা: ড্রুড তত্ত্ব অনুযায়ী ইলেকট্রন ধাতুর তাপ

ক্ষমতায় গুরুত্বপূর্ণ অবদান রাখে। তবে বাস্তবে ইলেকট্রনের অবদান খুবই কম (১% এর চেয়েও কম) এটি ধাতুর তাপ ক্ষমতা ব্যাখ্যা করতে সম্পূর্ণ ব্যর্থ।

৪. উচ্চ তাপমাত্রায় পরিবাহিতার অসংগতি:- ড্রুড তত্ত্ব বলে যে পরিবাহিতা তাপমাত্রার উপর সরাসরি নির্ভর করে কিন্তু বাস্তবে ধাতুতে তাপমাত্রা বৃদ্ধির সাথে পরিবাহিতা কমে যায়। এটি ইলেকট্রন - আয়ন সংঘর্ষ এবং কোয়ান্টাম বৈশিষ্ট্যের জন্য ঘটে যা চিরায়ত তত্ত্বে অন্তর্ভুক্ত নয়।

৫. হল প্রভাব ব্যাখ্যায় সীমাবদ্ধতা: ড্রুড তত্ত্ব হল প্রভাবের জন্য প্রয়োজনীয় সঠিক মান প্রদান করতে পারে না। কোয়ান্টাম তত্ত্ব বিশেষ করে ব্লচ থিওরি, হল প্রভাব সঠিকভাবে ব্যাখ্যা করতে পারে।

৬. ইলেকট্রন- ইলেকট্রন ও ইলেকট্রন আয়ন প্রভাব উপেক্ষা:- তত্ত্বটি ইলেকট্রন-ইলেকট্রন এবং ইলেকট্রন আয়নের মধ্যে আন্তঃক্রিয়াকে উপেক্ষা করে। বাস্তবে এই আন্তক্রিয়াগুলি ধাতুর বৈশিষ্ট্য গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে।

৭. ধাতু এবং অর্ধপরিবাহির মধ্যে পার্থক্য ব্যাখ্যায় ব্যর্থ:- ড্রুড তত্ত্ব ধাতু এবং অর্ধপরিবাহি পদার্থের বৈশিষ্ট্যের মধ্যে পার্থক্য ব্যাখ্যা করতে পারে না। এটি শুধু ধাতুর জন্য প্রযোজ্য।

চিরায়ত মুক্ত ইলেকট্রন তত্ত্ব ধাতুর কিছু প্রাথমিক বৈশিষ্ট্য ব্যাখ্যা করতে সক্ষম হলেও, কোয়ান্টাম মেকানিক্সের উদ্ভবের পর এর সীমাবদ্ধতা স্পষ্ট হয়ে ওঠে। কোয়ান্টাম তত্ত্ব এই ~~সমী~~ সীমাবদ্ধতা দূর করে সঠিকভাবে ব্যাখ্যা প্রদান করে।

প্র-১০:- সোডিয়ামের ইলেকট্রন ঘনত্ব $2.5\times10^{28}\ m^{-3}$ । সোডিয়ামের ফার্মি শক্তি, ফার্মি তাপমাত্রা ও ফার্মি বেগ নির্ণয় কর।

সমাধান

এখানে, $\frac{N}{V} = 2.5\times10^{28}\ m^{-3}$ অতএব,

ফার্মি শক্তি, $E_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{2/3}$

$$= \frac{(1.05\times10^{-34})^2}{2\times9.1\times10^{-31}}\cdot\left(3\pi^2\times2.5\times10^{28}\right) \text{ Joule}$$

$$= \qquad \text{Joule} \quad \underline{\text{Ans}}$$

আবার, ফার্মি বেগ $v_F = \frac{\hbar}{m}\left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{1/3}$

$$= \frac{1.05\times10^{-34}}{9.1\times10^{-31}}\times\left(3\pi^2\cdot2.5\times10^{28}\right) \ ms^{-1}$$

এখন,

$$= \qquad k \quad \underline{\text{Ans}}$$

ফার্মি তাপমাত্রা

$$T_F = \frac{E_F}{k_B} = \frac{E_F}{1.38\times10^{-23}}\ K$$

$$= \qquad k \quad \underline{\text{Ans}}$$

প্র-১১ ফার্মি শক্তি ব্যাখ্যা কর?

সমাধান

0k তাপমাত্রায় সর্বোচ্চ শক্তিস্তর যেটি ইলেকট্রন দ্বারা পূর্ণ থাকে তাকে ফার্মিস্তর বলে। ফার্মি শক্তিকে E_F বা ε_F দ্বারা প্রকাশ করা হয়। ফার্মিস্তরের

আনুষঙ্গিক শক্তিকে ফার্মি শক্তি বলে।

যদি বস্তুর দৈর্ঘ্য বরাবর মোট N সংখ্যক ইলেকট্রন অবস্থান করে, তবে n জোড় হলে আমরা পাই,

$$2n_F = N$$

$$\Rightarrow n_F = \frac{N}{2} \qquad \text{--- (1)}$$

n_F হলো ফার্মি স্তরের প্রধান কোয়ান্টাম সংখ্যা।

আমরা জানি, $E = \dfrac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2mL^2}$

$n = n_F$ এবং $E = E_F$ বসিয়ে পাই,

$$E_F = \frac{\hbar^2 n_F^2 \pi^2}{2mL^2}$$

$$\therefore E_F = \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \left(\frac{N\pi}{2L}\right)^2$$

এটিই ফার্মি শক্তির রাশিমালা।