$\hat{A}\psi(x) = A\psi(x)$, সমীকরণটিকে বলে।

function change হবে না সেই সমীকরণকে আইগেন মান সমীকরণ বলে।

এখানে $\psi(x)$ = আইগেন অপেক্ষক আইগেন ফাংশান

A = আইগেন মান

// Quantum mechanics এর তাৎপর্য, অপারেটরের স্বরূপ, বিভিন্ন ধরনের অপারেটরের সংজ্ঞা। (বই)

// অপারেটর: অপারেটর একটি গাণিতিক প্রতীক যার নির্দিষ্ট কোনো রীতি তাৎপর্য নিয়ে তবে অপেক্ষক অন্য ফাংশানে রূপান্তরিত করে।

EX: যেমন $\hat{A}$ একটি ~~অপেক্ষক~~ অপারেটর এবং $\psi(x)$ একটি অপেক্ষক তাহলে $\hat{A}\psi(x) = \phi(x)$ হবে। তাহলে $\phi(x)$ হলো রূপান্তরিত অপেক্ষক।

গাণিতিক ভাষায় preimage অপেক্ষককে image অপেক্ষকে রূপান্তরের জন্য যেই প্রতীক দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয় তাকে অপা. বলা হয়।

Ex: $\frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3$

x^4 = preimage = প্রতিবিম্ব

$4x^3$ = image = বিম্ব

$x\,(x^2+1) = (x^3+x)$

অপারেটর — preimage — image

// কোয়ান্টাম বলবিদ্যায় অপারেটর এর গুরুত্ব :

কোয়ান্টাম বলবিদ্যায় অবস্থান, শক্তি, ভরবেগ ও অন্যান্য রাশির সম্ভাব্য মান নির্ণয়ে সীমাবদ্ধতা রয়েছে। এখানে প্রতি রাশির জন্য উপযুক্ত অপারেটর নির্বাচন করে আনুষঙ্গিক অবস্থানের উপর প্রয়োগের প্রতিক্রিয়া বের করে ঐ সকল রাশির গড়মান নির্ণয় করা হয়। অপারেটরের ক্রিয়াকলাপই হলো কোয়ান্টাম বলবিদ্যার মৌলিক সমস্যার সমাধানের মূলভিত্তি।

কোয়ান্টাম বলবিদ্যায় কিছু সুনির্দিষ্ট অপারেটর

(i) অবস্থান অপারেটর $\hat{x} = x$

(ii) ভরবেগ " $\hat{P} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ (একমাত্রিক)

$= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial r}$ (ত্রিমাত্রিক)

(iii) শক্তি অপারেটর $\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$

(iv) হ্যামিলটোনিয়ান " $\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + \hat{V}$

$= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \hat{V}$ → বিভবশক্তির অপারেটর

এখানে $i = \sqrt{-1}$, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$

হার্মিশিয়ান অপারেটর :

গতীয় চলকের অনুষঙ্গী কোনো অপারেটরের গড়মান বাস্তব হলে ও অপারেটরকে হার্মিশিয়ান অপারেটর বলে।

হার্মিশিয়ান অপারেটর এর চারটি শর্ত :

$$\psi, \hat{A}\psi = \hat{A}\psi, \psi$$

$$\Rightarrow \int \psi^* \hat{A} \psi\, dx = \int (\hat{A}\psi)^* \psi\, dx$$

integral form থেকে বামের প্রথম অংশ (star conjugate) হবে এবং পরের অংশ যেই রকমই হবে। বামের পরের অংশ conjugate হবে না। Quantum mechanics এর সকল Quantity এর অবস্থান পরিবর্তন করা যাবে না তবে কিছু নিয়ম আছে।

১ম শর্ত : দেখাও যে, হারমিশিয়ান অপারেটর এর আইগেন মান বাস্তব অথবা, $\lambda = \lambda^*$

ধরি, ψ = wave function

$\hat{H}$ = হারমিশিয়ান অপারেটর

আমরা জানি

আইগেনমান সমীকরণ $\hat{H}\psi = \lambda\psi$ —(1)

হার্মিশিয়ান অপারেটর এর জন্য হবে,

$$\psi, \hat{H}\psi = \hat{H}\psi, \psi$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{H}\psi \, d^3r = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{H}\psi)^* \psi \, d^3r$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \lambda\psi \, d^3r = \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda\psi)^* \psi \, d^3r$$ [① হতে]

$$\Rightarrow \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi \, d^3r = \lambda^* \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi \, d^3r$$ [λ = আইগেন মান = ধ্রুবক সামনে আনা যায়]

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi \, d^3r \, (\lambda - \lambda^*) = 0$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi \, d^3r \neq 0$$

$$\therefore \lambda - \lambda^* = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = \lambda^*}$$ → বাস্তব সংখ্যা, যেখানে λ এর conjugate পরস্পর সমান কারণ ও বাস্তব সংখ্যা।

∴ হার্মিশিয়ান অপারেটর এর প্রতিটি আইগেন মান বাস্তব।

২য় শর্ত: যেকোনো দুটি হার্মিশিয়ান অপারেটরের যোগফলও হার্মিশিয়ান অপারেটর হয়।

ধরি, ψ এবং ϕ দুটি wave function

দুটি সাধারণ ফাংশনে অপারেটর হার্মিশিয়ান হওয়ার শর্ত,

$$\psi, \hat{A}_1\phi = \hat{A}_1\psi, \phi$$

ধরি $\hat{A}$ ও $\hat{B}$ হলো দুটি হার্মিশিয়ান অপারেটর। তাদের যোগফল $(\hat{A}+\hat{B})$ এবং তাদের যোগফল হার্মিশিয়ান হবে যদি,

$$\psi, (\hat{A}+\hat{B})\phi = (\hat{A}+\hat{B})\psi, \phi$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(\hat{A}+\hat{B})\phi \, d^3r = \int_{-\infty}^{\infty} [(\hat{A}+\hat{B})\psi]^* \cdot \phi \, d^3r \quad \text{--- (1)}$$

$$\Rightarrow L.H.S = R.H.S$$

$$\therefore L.H.S = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(\hat{A}+\hat{B})\phi \, d^3r$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{A} \phi \, d^3r + \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{B} \phi \, d^3r$$

অপারেটর যদি জায়গা shift করে তবে তাটি conjugate হবে।

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{A} \psi^* \phi \, d^3r + \int_{-\infty}^{\infty} \hat{B} \psi^* \phi \, d^3r$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{A}^* + \hat{B}^*) \psi^* \phi \, d^3r$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{A}+\hat{B})^* \psi^* \phi \, d^3r$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[(\hat{A}+\hat{B}) \psi \right]^* \phi \, d^3r$$

$$= (\hat{A}+\hat{B}) \psi, \phi \qquad \left[(A+B)^* = \hat{A}^* + \hat{B}^* \right]$$

$$= R.H.S$$

৩য় অংশ: দুটি হারমিশিয়ান অপারেটর এর গুনফল হারমিশিয়ান হবে যদি তারা বিনিময় করে।

বিনিময় সূত্র: $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 0$

$$\Rightarrow \hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$$

$$\Rightarrow [\hat{A}\, \hat{B}] = 0$$

মনে করি, $\hat{A}, \hat{B}$ দুটি হারমিশিয়ান অপারেটর যদি বিনিময় করে তাহলে $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$ হবে। $\hat{A}$ ও $\hat{B}$ এর গুনফল $\hat{A}\hat{B}$ হারমিশিয়ান হবে যদি,

$$\psi, (\hat{A}\hat{B})\phi = (\hat{A}\hat{B})\psi, \phi$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* (\hat{A}\hat{B}) \phi \, d^3r = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{A}\hat{B})^* \psi^* \phi \, d^3r$$

$$L.H.S = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* (\hat{A}\hat{B}) \phi \, d^3r$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{B}^* \psi^* \hat{A} \phi \, d^3r$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \hat{B}^* \hat{A}^* \psi^* \phi \, d^3r$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{B}\hat{A}\psi)^* \phi \, d^3r$$

$$= (\hat{B}\hat{A})\psi, \phi$$

$$= R.H.S$$

৪র্থ ধর্ম: হারমিশিয়ান অপারেটর এর দুটি আইগেন ফাংশন এর আইগেন মানদ্বয় অসমান হলে ফাংশনদ্বয় পরস্পর অর্থোগোনাল হয়।

শর্ত $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^* \psi_n \, d^3r = \delta_{mn}$

$$= 1 \; ; \; m = n$$

$$= 0 \; ; \; m \neq n$$

$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi \, d^3r = 1$ (নর্মালায়িত)

$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi \, d^3r = 0$ (অর্থোগোনাল)

মনে করি,

$\hat{A}$ একটি হারমিশিয়ান অপারেটর ψ_1 এবং ψ_2 দুটি আইগেন ফাংশন λ_1 ও λ_2 দুটি আইগেন মান

সুতরাং, ① $\hat{A}\psi_1 = \lambda_1 \psi_1$

② $\hat{A}\psi_2 = \lambda_2 \psi_2$

$$\psi_1 \cdot \hat{A}\psi_2 = \hat{A}\psi_1 \cdot \psi_2$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* \hat{A}\psi_2 \, d^3r = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{A}\psi_1)^* \psi_2 \, d^3r$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* \lambda_2 \psi_2 \, d^3r = \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda_1 \psi_1)^* \psi_2 \, d^3r$$ [মান বসিয়ে]

$$\Rightarrow \lambda_2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* \psi_2 \, d^3r = \lambda_1^* \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* \psi_2 \, d^3r$$

$$\Rightarrow (\lambda_2 - \lambda_1^*) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* \psi_2 \, d^3r = 0$$

হার্মিশিয়ান হয় তাই হতে আমরা পাই,

$$\lambda_1 = \lambda_1^*$$

$$\Rightarrow (\lambda_2 - \lambda_1) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* \psi_2 \, d^3r = 0$$

আইগেনমানদ্বয় পরস্পর অসমান হবে তাই, $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$

$\therefore \lambda_2 \neq \lambda_1$

$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* \psi_2 \, d^3r = 0$ হবে।

$\therefore \psi_1$ ও ψ_2 আইগেন ফাংশনদ্বয় পরস্পর অর্থোগোনাল হবে।

// $y = A\sin\omega t$

$\psi = Ae^{i(kx-\omega t)}$

$\hbar = \frac{h}{2\pi}$ λ = দে ব্রগলী তরঙ্গদৈর্ঘ্য

আমরা জানি,

$E = h\nu$

$= \frac{h}{2\pi} \cdot 2\pi\nu$

$= \hbar\omega$

$\lambda = \frac{h}{p}$

$\Rightarrow p = \frac{h}{\lambda}$

$\Rightarrow p = \frac{h}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{\lambda}$

$\therefore p = \hbar K$

এখন, $\psi = Ae^{i(kx-\omega t)}$

$\Rightarrow \psi = Ae^{i(\frac{p}{\hbar}x - \frac{E}{\hbar}\omega)}$

$\Rightarrow \frac{\delta\psi}{\delta x} = i\frac{p}{\hbar}Ae^{i(\frac{p}{\hbar}x - \frac{E}{\hbar}t)}$

$\Rightarrow \frac{\delta\psi}{\delta x} = i\frac{p}{\hbar}\psi$

$\Rightarrow \frac{\delta}{\delta x} = i\frac{p}{\hbar}$

$\Rightarrow \frac{\delta}{\delta x} = \frac{i}{\hbar}P_x$

$\Rightarrow \frac{\delta}{\delta x} = \frac{i.i}{i\hbar}P_x$

$\Rightarrow \frac{\delta}{\delta x} = -\frac{1}{i\hbar}P_x$

$$\left.\begin{aligned} \therefore P_x &= -i\hbar\frac{\delta}{\delta x} \\ P_y &= -i\hbar\frac{\delta}{\delta y} \\ P_z &= -i\hbar\frac{\delta}{\delta z} \end{aligned}\right\} \text{অনুরূপ}$$

$\overline{P} = -i\hbar\vec{\nabla}$

প্র) দেখাও যে রৈখিক ভরবেগ (P_x) একটি হারমিশিয়ান।

→ P_x একটি হারমিশিয়ান অপারেটর হবে যদি

$$\psi, \hat{P}_x \psi = \hat{P}_x \psi, \psi$$

$$L.H.S = \psi, \hat{P}_x \psi$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{P}_x \psi \, dx$$

$$= -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} dx$$

$$= -i\hbar \left[\psi^* \int \frac{\partial \psi}{\partial x} dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} \psi^* \int \frac{\partial \psi}{\partial x} \partial x \right\} dx \right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$= -i\hbar \left[\psi^* \psi \right]_{-\infty}^{\infty} + i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \psi \, dx$$

[যে কোন সীমায় ψ এর মান শূন্য]

$$= 0 + i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \psi \, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(-i\hbar \frac{d}{dx} \right)^* \psi^* \psi \, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} P_x^* \psi^* \psi \, dx$$

$$= P_x \psi, \psi$$

$$= R.H.S$$

প্র: কোয়ান্টাম বলবিদ্যার স্বীকার্য লিখ।

→ প্রথম স্বীকার্য: বাহ্যিক বিভব দ্বারা সৃষ্ট সংরক্ষণশীল বল ক্ষেত্রে চলমান কণার দ্বারা গঠিত সংস্থার অনুযায়ী একটি তরঙ্গ অপেক্ষক আছে। এটি একটি কণিকার অপেক্ষক এবং এর প্রতিটি অংশে অনুরূপ রেখে কোন কণিকার স্থানাঙ্ক দ্বারা তাকে বর্ণনা করা যেতে পারে।

দ্বিতীয় স্বীকার্য: কোয়ান্টাম বলবিদ্যায় কতগুলো ভৌতরাশি (অবস্থান, ভরবেগ, শক্তি) কে যথাযথ অপারেটর দ্বারা প্রকাশ করা যাবে।

তৃতীয় স্বীকার্য: ভৌতভাবে পরিমাপযোগ্য কোন রাশির অনুষঙ্গী অপারেটর হারমিশিয়ান হবে।

চতুর্থ স্বীকার্য: আইগেন মান সমীকরণ $\hat{H}\psi = \lambda\psi$

পঞ্চম স্বীকার্য: কোনো তরঙ্গ অপেক্ষক ψ দ্বারা বর্ণিত সংস্থার কোনো অপারেটর $\hat{Q}$ এর অনুষঙ্গী q এর প্রত্যাশিত মান হবে.

$$\langle q \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{Q}\, dV$$

ষষ্ঠ স্বীকার্য: সময়ের সাথে তরঙ্গ অপেক্ষক এর বিবর্তন শ্রোডিঙ্গারের সমীকরণের সাহায্যে নির্ণয় করা যায়।

$$H\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

সপ্তম স্বীকার্য: অপারেটরগুলোর বিনিময়যোগ্যতা সম্বন্ধ পয়সন বন্ধনীর সমতুল্য $[\hat{Q}, \hat{R}] = (\hat{Q}\hat{R} - \hat{R}\hat{Q})$

প্র. প্রমাণ কর যে, মুক্ত কণার ভরবেগ অপারেটর হ্যামিলটোনিয়ান অপারেটরের সাথে বিনিময় করে।

→ মুক্ত কণার জন্য হ্যামিলটোনিয়ান অপারেটর বিবেচনা করি,

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} \quad \text{—(i)}$$

x অক্ষে ভরবেগ অপারেটর $P_x = -i\hbar\frac{d}{dx}$ —(ii)

$$\hat{H}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{d^2\psi}{dx^2}$$

পুনরায় $\hat{P}_x$ দ্বারা অপারেট করে,

$$\hat{P}_x\hat{H}\psi = \left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)$$

$$= \frac{i\hbar^3}{2m}\cdot\frac{d^3\psi}{dx^3} \quad \text{—(iii)}$$

(ii) হতে, $\hat{P}_x\psi = -i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x}$

পুনরায় $\hat{H}$ দ্বারা অপারেট করে,

$$\hat{H}\hat{P}_x\psi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\right]\left[-i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]$$

$$= \frac{i\hbar^3}{2m}\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3} \quad \text{—(iv)}$$

(iv) − (iii)

$$\hat{H}\hat{P}_x\psi - \hat{P}_x\hat{H}\psi = 0$$

$$\Rightarrow \psi(\hat{H}\hat{P}_x - \hat{P}_x\hat{H}) = 0$$

$$\Rightarrow \hat{H}\hat{P}_x - \hat{P}_x\hat{H} = 0, \quad \text{যেহেতু } \psi \neq 0$$

$$\therefore [\hat{H}, \hat{P}_x] = 0$$

(Proved)

প্রশ্ন: প্যারিটি অপারেটর কি? প্যারিটি অপারেটর একটি রৈখিক অপারেটর। ✓

→ যখন একটি অপারেটর x এর বদলে একটি ফাংশনের উপর অপারেট করে স্থানাঙ্ক প্রতিফলিত করে তখন তাকে প্যারিটি অপারেটর বলে। $\hat{P}$ একটি প্যারিটি অপারেটর।

$$\hat{P}\psi(x) = \psi(-x)$$

ধরি, প্যারিটি অপারেটর $\hat{P}$ দুটি ফাংশন $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ এর উপর অপারেট করে,

$$\hat{P}[\psi_1(x) + \psi_2(x)] = \psi_1(-x) + \psi_2(-x)$$

$$\hat{P}[\psi_1(x) + \psi_2(x)] = \hat{P}\psi_1(x) + \hat{P}\psi_2(x)$$

এবং $\hat{P}c\psi_1(x) = c\psi(-x)$

অর্থাৎ $\hat{P}c\psi_1(x) = c\hat{P}\psi(x)$

প্রশ্ন: প্যারিটি অপারেটরের এর আইগেন মান বের কর। ✓

→ প্যারিটি অপারেটর $\hat{P}$ এর এর একটি আইগেনমান সমীকরণ বিবেচনা করি,

$$\hat{P}\psi = \lambda\psi \quad \text{—(i)}$$

যেখানে λ ও ψ আইগেনমান ও আইগেন ফাংশন।

উভয়দিকে $\hat{P}$ দ্বারা অপারেট করে,

$$\hat{P}^2\psi = \lambda\hat{P}\psi$$

$$\therefore \hat{P}^2\psi = \lambda^2\psi \quad \text{—(ii)}$$

প্যারিটি অপারেটর $\hat{P}$ এর জন্য $\hat{P}\psi(x) = \psi(-x)$

পুনরায় উভয়দিকে $\hat{\pi}$ দ্বারা অপারেট করে.

$$\hat{\pi}^2\psi(x) = \hat{\pi}\psi(-x) = \psi(x) \quad \text{--- (iii)}$$

(ii) ও (iii) তুলনা করে,

$$\lambda^2 = 1$$

$$\therefore \lambda = \pm 1$$

প্যারিটি অপারেটর একটি হারমিশিয়ান অপারেটর।

→ $$(\hat{\pi}\psi, \phi) = (\psi, \hat{\pi}\phi) \quad \text{--- (i)}$$

$$L.H.S = \hat{\pi}\psi, \phi$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(-x)\, \phi(x)\, dx$$

[প্রতিস্থাপনে $x \to -x'$, $dx \to -dx'$]

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x')\, \phi(-x')\, (-dx')$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x')\, \phi(-x')\, dx'$$

আবার, $x' \to x$ ব্যবহার করে,

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\, \phi(-x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\, \hat{\pi}\phi(x)\, dx$$

$$= (\psi, \hat{\pi}\phi)$$

প্র। দেখাও যে, কোনো অপারেটরের প্রত্যাশিত মান চিত্র নিরপেক্ষ।

→ ধরি যথা শ্রোডিঞ্জার, হাইজেনবার্গ এবং ডিরাক চিত্রে অবস্থা ভেক্টর যথাক্রমে, $|\psi_S(t)\rangle$, $|\psi_H\rangle$, $|\psi_D(t)\rangle$। তিন চিত্রে অপারেটর যথাক্রমে $\hat{A}_S$, $\hat{A}_H(t)$, $\hat{A}_D(t)$ হলে,

$$|\psi_H\rangle = \hat{U}^{\dagger}|\psi_S(t)\rangle$$
$$\hat{A}_H(t) = \hat{U}^{\dagger}\hat{A}_S\hat{U}$$
$$|\psi_D(t)\rangle = \hat{U}_0^{\dagger}|\psi_S(t)\rangle$$
$$\hat{A}_D(t) = U_0^{\dagger}\hat{A}_S\hat{U}_0$$

হাইজেনবার্গ চিত্রে $\hat{A}_H(t)$ অপারেটরের প্রত্যাশিত মান -

$$\langle \hat{A}_H(t)\rangle = \langle \psi_H|\hat{A}_H(t)|\psi_H\rangle$$
$$= \langle \psi_S(t)|\hat{U}\hat{U}^{\dagger}\hat{A}_S\hat{U}\hat{U}^{\dagger}|\hat{\psi}_S(t)\rangle$$
$$= \langle \psi_S(t)|\hat{A}_S|\psi_S(t)\rangle$$
$$= \langle \hat{A}_S\rangle$$

$UU^{\dagger} = 1$ । ডিরাক চিত্রে $A_D(t)$ এর প্রত্যাশিত মান

$$\langle \hat{A}_D(t)\rangle = \langle \psi_D(t)|A_D(t)|\psi_D(t)\rangle$$
$$= \langle \psi_S(t)|U_0U_0^{\dagger}A_S U_0U_0^{\dagger}|\psi_S(t)\rangle$$
$$= \langle \psi_S(t)|A_S\,\psi_S(t)\rangle$$
$$= \langle \hat{A}_S\rangle$$

$$\therefore \langle A_H(t)\rangle = \langle A_S\rangle = \langle A_D(t)\rangle$$

(প্রমাণিত)

$$= \left(E + \tfrac{1}{2}\hbar\omega\right)\psi$$

$\therefore E = \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\hbar\omega$ কারণ A এর আইগেনমানগুলো $\tfrac{1}{2}\hbar\omega, \tfrac{3}{2}\hbar\omega, \tfrac{5}{2}\hbar\omega$

এটিই কাঙ্ক্ষিত শক্তির মানসমূহ।

প্রশ্ন: হাইজেনবার্গ চিত্রে গতির সমীকরণ বের কর। দেখাও যে,

$$-\frac{i}{\hbar}[Q, H] \to \{Q, H\}$$

→ হাইজেনবার্গ চিত্রে তরঙ্গ ফাংশন ψ সময় অনির্ভর এবং অপারেটর A হলো সময় নির্ভর।

অতএব $\frac{\partial}{\partial t}\psi = 0$, $\frac{\partial A}{\partial t} \neq 0$

আমরা জানি, হাইজেনবার্গ চিত্রে অপারেটর ~~Q~~ Q_H এবং শ্রোডিঞ্জার চিত্রে অপারেটর Q_S এর মধ্যে সম্পর্ক,

$$Q_H = U Q_S U^{\dagger} \quad \text{—(i)}$$

যেখানে, $U = e^{iHt/\hbar}$, এটি একটি ঐকিক অপারেটর।

① নং ব্যবকলন করে পাই,

$$\frac{dQ_H}{dt} = \frac{d}{dt}(UQ_sU^{\dagger})$$

$$= \frac{\partial U}{\partial t} Q_s U^{\dagger} + UQ_s \frac{\partial U^{\dagger}}{\partial t} + U \frac{\partial Q_s}{\partial t} U^{\dagger}$$

যেহেতু $U = e^{iHt/\hbar}$

$$\therefore \frac{\partial U}{\partial t} = e^{iHt/\hbar} \cdot \frac{iH}{\hbar}$$

$$= \frac{i}{\hbar} UH \quad \text{— (ii)}$$

আবার, $U^{\dagger} = e^{-iHt/\hbar}$

$$\frac{\partial U^{\dagger}}{\partial t} = \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^{\dagger}$$

$$= \left(\frac{i}{\hbar} UH\right)^{\dagger}$$

$$= -\frac{i}{\hbar} HU^{\dagger} \quad \text{— (iii)}$$

(ii) ও (iii) এর মান ① নং এ বসিয়ে,

$$\frac{dQ_H}{dt} = \frac{i}{\hbar} UHQ_sU^{\dagger} - \frac{i}{\hbar} UQ_sHU^{\dagger} + U\frac{dQ_s}{dt} U^{\dagger}$$

$$= \frac{i}{\hbar}(UHQ_sU^{\dagger} - UQ_sHU^{\dagger}) + U\frac{dQ_s}{\partial t} U^{\dagger}$$

$$= \frac{i}{\hbar} U(HQ_s - Q_sH) U^{\dagger} + U\frac{dQ_s}{dt} U^{\dagger}$$

$$= \frac{i}{\hbar} U[H, Q_s) U^{\dagger} + U\frac{\partial Q_s}{\partial t} U^{\dagger}$$

$$= \frac{i}{\hbar}[H, Q_H] + \frac{\partial Q_H}{\partial t} \quad [i \text{ হতে}] \quad \text{— (iv)}$$

এটিই হাইজেনবার্গের চিত্রে গতির সমীকরণ।

এই সমীকরণটি পয়সনের ব্র্যাকেট $\{Q, H\}$ থেকে পাই।

$$\frac{dQ}{dt} = \{Q, H\} + \frac{\partial Q}{\partial t} \quad \text{—(v)}$$

(iv) ও (v) তুলনা করে,

$$\frac{i}{\hbar}[H, Q_H] \rightarrow \{Q, H\}$$

$$-\frac{1}{i\hbar}[Q, H] \rightarrow \{Q, H\}$$

প্রশ্ন: ডিরাক চিত্র কি? ডিরাক চিত্রে গতির সমীকরণ বের কর।

→ ডিরাক চিত্রে তরঙ্গ অপেক্ষক ψ ও অপারেটর $\hat{A}$ সময় নির্ভর। অতএব,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} \neq 0, \quad \frac{\partial A}{\partial t} \neq 0$$

ডিরাক চিত্রে হ্যামিল্টোনিয়ান অপারেটর দুটি অংশে ভাগ করা যায়,

$$H_I = H_0 + H_I' \quad \text{—(i)}$$

এখানে H_0 হলো অবিচলিত হ্যামিল্টোনিয়ান এবং H_I' হলো ভিন্ন সিস্টেম গঠনকারী কণার মধ্যে বিক্রিয়া।

ডিরাক অংশে H_I' সময়ের উপর নির্ভর করে এবং ডিরাক চিত্রে প্রতিটি অপারেটর Q_I এবং অবস্থান ভেক্টর $|\psi_I\rangle$।

হলে শ্রোডিঞ্জারের চিত্র মাধ্যমে সম্পর্ক

$$Q_I = e^{iH_0t/\hbar} Q_S e^{-iH_0t/\hbar} \quad \text{— (II)}$$

$$|\psi_I(t)\rangle = e^{iH_0t/\hbar} |\psi(t)\rangle \quad \text{— (III)}$$

(II) হতে, $Q_I = UQ_SU^{+}$ — (IV)

$$\frac{dQ_I}{dt} = \frac{d}{dt}[UQ_SU^{+}]$$

$$= \frac{dU}{dt} Q_SU^{+} + UQ_S\frac{dU^{+}}{dt} + U\frac{\partial Q}{\partial t}U^{+} \quad \text{— (V)}$$

এখানে, $U = e^{iH_0t/\hbar}$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = e^{iH_0t/\hbar} \cdot \frac{iH_0}{\hbar}$$

$$= \frac{i}{\hbar} UH_0 \quad \text{— (VI)}$$

এবং $U^{+} = e^{-iH_0/\hbar}$

$$\therefore \frac{\partial U^{+}}{\partial t} = \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^{T}$$

$$= \left(e^{iH_0t/\hbar} \cdot \frac{iH_0}{\hbar}\right)^{T}$$

$$= -\frac{i}{\hbar} H_0 e^{-iH_0t/\hbar}$$

$$= -\frac{i}{\hbar} H_0U^{+} \quad \text{— (VII)}$$

(VI) ও (VII) এর মান (V) এ বসাই

$$\frac{dQ_I}{dt} = \frac{i}{\hbar} UH_0Q_SU^{+} + U\cdot Q_S\left(-\frac{i}{\hbar}H_0U^{+}\right) + U\cdot\frac{\partial Q_S}{\partial t}U^{+}$$

$$= \frac{i}{\hbar}(UQ_SU^{+}H_0 - H_0UQ_SU^{+}) + U\frac{\partial Q_S}{\partial t}U^{+}$$

$$= \frac{i}{\hbar}(Q_I H_0 - H_0 Q_I) + \frac{\partial Q_I}{\partial t}$$

$$= \frac{i}{\hbar}[Q_I, H_0] + \frac{\partial Q_I}{\partial t}$$

ইহাই ডিরাক চিত্রে গতির সমীকরণ।

প্রশ্ন: স্রোডিঞ্জার, হাইজেনবার্গ ও ডিরাক চিত্রের পার্থক্য।

→

বিষয়	স্রোডিঞ্জার	হাইজেনবার্গ	ডিরাক
① অবস্থান ভেক্টর	সময় নির্ভর	সময় অনির্ভর	সময় নির্ভর
② অপারেটর	অপারেটর সময় অনির্ভর	" " নির্ভর	" " নির্ভর
③ গতির সমী:	যেকোনো অপারেটর A_S এর মান গতির সমী: হবে, $i\hbar \frac{d}{dt}\langle A_S\rangle = \langle [A_S, H_S]\rangle$	Q_H " " " " $\frac{dQ_H}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H, Q_H] + \frac{\partial Q_H}{\partial t}$	Q_I " " " " $\frac{dQ_I}{dt} = \frac{i}{\hbar}[Q_I, H_0] + \frac{\partial Q_I}{\partial t}$

প্র: শ্রোডিঞ্জারের চিত্রে গতির সমীকরণ বের কর।

→ শ্রোডিঞ্জারের চিত্রে তরঙ্গ অপেক্ষক হলো সময় নির্ভর কিন্তু অপারেটর সময় নির্ভর নয়, অর্থাৎ তরঙ্গ অপেক্ষক $\psi(t)$ এর জন্য,

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(t) \neq 0, \quad \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} = 0$$

অবস্থান ψ তে অপারেটর A_S এর প্রত্যাশিত মানকে লেখা যায়, $\langle A_S\rangle = \langle \psi_S | A_S | \psi_S\rangle$ —(i)

t এর সাপেক্ষে ব্যবকলন করে পাই,

$$\frac{d}{dt}\langle A_S\rangle = \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t} \middle| A_S \middle| \psi_S \right\rangle + \left\langle \psi_S \middle| A_S \middle| \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\rangle \quad \text{—(ii)}$$

সময় নির্ভর শ্রোডিঞ্জারের সমীকরণ হলো:

$$H_S \psi_S = i\hbar \frac{\partial \psi_S}{\partial t} \quad \text{—(iii)}$$

$$\therefore H_S^* \psi_S^* = -i\hbar \frac{\partial \psi_S^*}{\partial t} \quad \text{—(iv)}$$

(iii) হতে, $\frac{\partial \psi_S}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} H_S \psi_S$

(iv) হতে, $\frac{\partial \psi^*}{\partial t} = -\frac{1}{i\hbar} H_S^* \psi_S^*$

(ii) এর মান বসিয়ে,

$$\frac{d}{dt}\langle A_S\rangle = \left\langle -\frac{1}{i\hbar}\psi_S H_S \middle| A_S \middle| \psi_S\right\rangle + \left\langle \psi_S \middle| A_S \middle| \frac{1}{i\hbar} H_S \psi_S\right\rangle$$

$$= \frac{1}{i\hbar}\langle \psi_S | A_S H_S - H_S A_S | \psi_S\rangle$$

CamScanner

$$\Rightarrow i\hbar \frac{d}{dt}\langle A_S\rangle = \langle \psi_S | A_S H_S - H_S A_S | \psi_S\rangle$$

সংক্ষিপ্ত আকারে আমরা লিখতে পারি,

$$i\hbar \frac{d}{dt}\langle A_S\rangle = \langle A_S H_S - H_S A_S\rangle$$

$$\therefore i\hbar \frac{d}{dt}\langle A_S\rangle = \langle [A_S, H_S]\rangle$$

এটিই হাইজেনবার্গের চিত্রের গতির সমীকরণ।

প্র। প্রমাণ কর যে, $[x, P_x] = i\hbar$ এবং $[x^n, P_x] = i\hbar n x^{n-1}$।
১৫

→ আমরা জানি, x অভিমুখে ভরবেগ অপারেটর

$$P_x = -i\hbar \frac{d}{dx}$$

$$[x, P_x]\psi = x\hat{P}_x\psi - \hat{P}_x(x\psi)$$

$$= x\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi\right) - \left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)(x\psi)$$

$$= -i\hbar x\frac{d\psi}{dx} + i\hbar x\frac{d\psi}{dx} + i\hbar\psi \quad \text{UV method}$$

$$= i\hbar\psi$$

$$\therefore [x, P_x] = i\hbar$$

আবার, $[x^2, \hat{P}_x] = x^2\hat{P}_x - \hat{P}_x x^2$

$$= xxP_x - xP_xx + xP_xx - P_xxx \quad \text{[এই 2 term যোগ বিয়োগ]}$$

$$= x(xP_x - P_xx) + (xP_x - P_xx)x$$

$$= x[x, P_x] + [x, P_x]x$$

$$= x\cdot i\hbar + i\hbar x$$

$$= 2i\hbar x$$

$$= i\hbar\, 2\cdot x^{2-1}$$

একইভাবে, $[x^3, \hat{p}] = i\hbar\, 3x^{3-1}$

$\vdots$

$[x^n, \hat{p}_x] = i\hbar\, n x^{n-1}$

(Proved)

প্র) প্রমাণ কর যে, $[x, p_x^n] = i\hbar\, n p_x^{n-1}$, ✓

→ আমরা জানি,

$[x, p_x] = i\hbar$ → [এটি বের করে লিখতে হবে অবশ্য]

আবার, $[x, p_x^2] = x p_x^2 - p_x^2 x$

$= x\hat{p}_x\hat{p}_x - p_x p_x x$

$= x p_x p_x \underbrace{- p_x x p_x + p_x x p_x}_{\text{যোগ}} - p_x p_x x$

$= (x p_x - p_x x) p_x + p_x (x p_x - p_x x)$

$= [x, p_x] p_x + p_x [x, p_x]$

$= i\hbar p_x + p_x \cdot i\hbar$

$= i\hbar\, 2 \cdot p_x^{2-1}$

একইভাবে, $[x, p_x^3] = i\hbar \cdot 3 \cdot p_x^{3-1}$

$\vdots$

$\cancel{[x, p_x^n] = i\hbar \cdot 3 \cdot p_x^{3-}}$

$[x, p_x^n] = i\hbar\, n p_x^{n-1}$

(Proved)

প্রশ্ন: সময় নির্ভর ও অনির্ভর শ্রোডিঞ্জার সমীকরণ বের কর ও সমাধান কর।

→ ধরি,

একটি তার x অক্ষ বরাবর টানা আছে।...

এই তরঙ্গের সমী. লিখতে পারি,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{v^2}\frac{d^2y}{dt^2} \quad \text{——} (1)$$

এই তরঙ্গ সমীকরণটির সমাধান লিখতে পারি,

$$y = A\cos\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)$$

এখানে,

v ও λ হলো যথাক্রমে তরঙ্গের বেগ এবং তরঙ্গ দৈর্ঘ্য।

এ সমী. কে পুনঃ বিন্যাস করে লিখতে পারি;

$$y = A\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi v}{\lambda}t\right]$$

$$= A\cos(kx - \omega t) \quad \text{——} (2)$$

[এখানে, $k = \frac{2\pi}{t}$

$\omega = \frac{2\pi v}{\lambda}$

আমরা জানি,

$$y = Ae^{i(kx - \omega t)}$$

কোয়ান্টাম সমী. থেকে,

ভরবেগ $p = \hbar k$

বা $k = \frac{p}{\hbar}$

এবং শক্তি $E = \hbar\omega$ বা $\omega = \frac{E}{\hbar}$

$$\therefore y = Ae^{i\left(\frac{p}{\hbar}x - \frac{E}{\hbar}t\right)} \quad \text{——} (3)$$

$\therefore \Psi(x,t) = Ae^{i\left(\frac{p}{\hbar}x - \frac{E}{\hbar}t\right)}$ —— ④

এখানে,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar} Ae^{i\left(\frac{p}{\hbar}x - \frac{E}{\hbar}t\right)}$$

বা $\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -i\frac{E}{\hbar}\Psi$

বা $\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar}$

বা $E = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}$

$\therefore E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ [শক্তি অপারেটর বা সংকারক] —— ⑤

④ সমী: হতে;

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = i\frac{p}{\hbar} Ae^{i\left(\frac{p}{\hbar}x - \frac{E}{\hbar}t\right)}$$

বা $\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{ip}{\hbar}\Psi$

বা $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{ip}{\hbar}$

বা $p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$

$\therefore$ x-সাপেক্ষে ভরবেগ অপারেটর $\hat{p}_x \longrightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$

y ... " " $\hat{p}_y \longrightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial y}$

z " " $\hat{p}_z \longrightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial z}$

আমরা জানি;

$$\hat{p} = \hat{i}p_x + \hat{j}p_y + \hat{k}p_z$$

$$= \hat{i}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right) + \hat{j}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right) + \hat{k}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$= -i\hbar\left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

বা $\hat{p} \longrightarrow -i\hbar\vec{\nabla}$ —— ⑥

আমরা জানি,

~~E = T+V~~

$$H = T + V$$
$$= T + \hat{V}(\vec{r})$$
$$= \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\vec{r})$$
$$= \cancel{\tfrac{1}{2}m}$$
$$= \frac{1}{2m}(\hat{p}\cdot\hat{p}) + V(\vec{r})$$
$$= \frac{1}{2m}(-i\hbar\vec{\nabla})\cdot(-i\hbar\vec{\nabla}) + V(\vec{r})$$
$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r}) \quad \text{--- (2)}$$

কোয়ান্টাম স্বীকার্য থেকে আসে,

$$\cancel{H = \Psi} \quad H\Psi(\vec{r},t) = \hat{E}\Psi(\vec{r},t)$$

(5) ও (2) হতে,

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r)\Psi(r,t) = i\hbar\frac{d}{dt}\Psi(r,t)\right] \quad \text{--- (8)}$$

[ইহাই সময় নির্ভর শ্রোডিঞ্জার সমী.]

চলক আলাদা করন প্রক্রিয়া ব্যবহার করে,

$$\Psi(r,t) = \Psi(r)\,\phi(t) \quad \text{--- (9)}$$

ইহাকে (8) এ ব্যবহার করে পাই,

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r})\right]\Psi(r)\,\phi(t) = i\hbar\frac{d}{dt}\Psi(r)\,\phi(t)$$

বা $\phi(t)\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r})\right]\Psi(\vec{r}) = i\hbar\,\Psi(r)\frac{d\phi(t)}{dt}$

বা $\frac{1}{\Psi(r)}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r)\right]\Psi(r) = i\hbar\frac{1}{\phi(t)}\frac{d\phi(t)}{dt}$ [~~$\phi(t)$ দ্বারা~~ $\Psi(r)\,\phi(t)$ দ্বারা ভাগ করে]

যেহেতু বাম পক্ষটি কেবলমাত্র r নির্ভর এবং ডান পক্ষটি t নির্ভর সেহেতু LHS = RHS = ~~RHS = E~~ E [ধরি,]

$$\therefore \frac{1}{\Psi(r)}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r)\right]\Psi(r) = i\hbar\frac{1}{\phi(t)}\frac{d\phi(t)}{dt} = E \quad \text{--- (10)}$$

$$\therefore i\hbar \frac{1}{\phi(t)} \cdot \frac{d\phi(t)}{dt} = E$$

~~or, $\frac{d\phi(t)}{\phi(t)} = \frac{E}{i\hbar} dt$~~

$$\Rightarrow i\hbar \frac{1}{\phi(t)} \cdot \phi(t) = E dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\phi(t)} \cdot \phi(t) = \frac{E}{i\hbar} \int dt$$

$$\Rightarrow \ln \phi(t) = \frac{Et}{i\hbar} + \ln A$$

$$\Rightarrow \frac{\ln \phi(t)}{\ln A} = \frac{E}{i\hbar} t$$

$$\Rightarrow \frac{\phi(t)}{A} = \frac{E}{i\hbar} t$$

$$\therefore \phi(t) = A e^{-iEt/\hbar} \quad \text{—(11)}$$

আবার, $\frac{1}{\psi(r)} \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r})\right] \psi(r) = E$

$$\therefore \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r})\right] \psi(r) = E\psi(r)$$

ইহাই সময় অনির্ভর শ্রোডিঞ্জারের সমীকরণ

সমী: (11) ও (9) হতে

$$\psi(r,t) = \sum_n A_n \psi_n(r) e^{-iEt/\hbar}$$

প্র। একটি মুক্ত কণার জন্য সময় নিরপেক্ষ শ্রোডিঞ্জারের সমীকরণ বের কর

বদ্ধ ও সমতলীয় সমাধান বের কর।

→ শ্রোডিঞ্জার সমীকরণ প্রমাণ ও সমাধান করার করে আসতে হবে

আমরা জানি,

শ্রোডিঞ্জারের সমীকরণ

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r)\right\}\psi(r,t) = E\psi(r,t)$$

মুক্ত কণার জন্য $V(r) = 0$

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\right\}\psi(r,t) = E\psi(r,t)$$

$$\Rightarrow \nabla^2\psi(r,t) + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi(r,t) = 0$$

একমাত্রিক ক্ষেত্রে সমীকরণ হবে,

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x,t) + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x,t) = 0$$

ধরি, $\frac{2mE}{\hbar^2} = k_x^2$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dx^2}\psi(x,t) + k_x^2\psi(x,t) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + k_x^2\psi(x) = 0$$

এই সমীকরণের একটি সমাধান,

$$\psi(x) = Ae^{ix}$$

$$\psi(x) = e^{px}$$

$$\frac{d\psi}{dx} = pe^{px}$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = p^2e^{px}$$

$$\therefore p^2 e^{px} + k_x^2 e^{px} = 0$$

এখানে, $e^{px} \neq 0$

$$\therefore p^2 + k_x^2 = 0$$

$$\Rightarrow p^2 = -k_x^2$$

$$\Rightarrow p = i^2 k_x^2$$

$$\therefore p = i k_x$$

x অক্ষ বরাবর তরঙ্গ অপেক্ষক $\psi(x) = A_1 e^{ik_x \cdot x}$

y " " " " $\psi(y) = A_2 e^{ik_y \cdot y}$

z " " " " $\psi(z) = A_3 e^{ik_z \cdot z}$

অতএব, $\psi(r) = \psi(x)\,\psi(y)\,\psi(z)$

$$= A_1 e^{ik_x \cdot x} \cdot A_2 e^{ik_y \cdot y} \cdot A_3 e^{ik_z \cdot z}$$

$$= A_1 A_2 A_3 e^{i(k_x \cdot x + k_y \cdot y + k_z \cdot z)}$$

$$= A e^{ik \cdot r}$$

$$\psi(r,t) = \psi(r)\,\phi(t)$$

$$= Ae^{ik \cdot r} A_1 e^{-iEt/\hbar}$$

$$= Ce^{i(k \cdot r - iEt/\hbar)}$$

$$= Ce^{i(k \cdot r - \omega t)}$$

(Ans)

প্র: সম্ভাবনা প্রবাহ ঘনত্বের রাশিমালা বের কর। অথবা অবিচ্ছিন্নতার সমীকরণ বের কর।

→

আ. উ.

সময় নির্ভর শ্রোডিঞ্জার সমীকরণটি—

$$-\frac{h^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = ih\frac{\partial\psi}{\partial t} \quad \text{—— (1)}$$

উভয়দিকে জটিল যুগ্ম নিয়ে

$$-\frac{h}{2m}\nabla^2\psi^* + V\psi^* = -ih\frac{\partial\psi}{\partial t}^* \quad \text{—— (2)}$$

(1) এর উভয় দিকে ψ^* বামে ψ^* দ্বারা এবং (2) এর উভয়দিকে বামে ψ গুণ করে,

$$-\frac{h^2}{2m}\psi^*\nabla^2\psi^* + V\psi^*\psi = ih\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} \quad \text{—— (3)}$$

এবং $$-\frac{h^2}{2m}\psi\nabla^2\psi^* + V\psi\psi^* = -ih\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t} \quad \text{—— (4)}$$

(3) − (4) করে পাই;

$$-\frac{h^2}{2m}\left[\psi^*\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\psi^*\right] = ih\left[\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} + \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right]$$

বা $$ih\frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\psi) = -\frac{h^2}{2m}\left[\psi^*\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\psi^*\right]$$

বা $$\frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\psi) = -\frac{h}{2im}\left[\psi^*\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\psi^*\right]$$

ধরি,

$$\psi^*\psi = \rho \qquad -\frac{h}{2m}\left[\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right] = J$$

বা $$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\vec{\nabla}.\vec{J}$$

বা $$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.\vec{J} = 0$$

প্র। এরেনফেস্টের উপপাদ্য কি? প্রমাণ কর।

প্রথম উপপাদ্য: এর অর্থ কোনো তরঙ্গ প্যাকেটের গড় অবস্থানের পরিবর্তন অর্থাৎ $m\frac{d}{dt}\langle x\rangle$ হলো গড় ভরবেগের সমান।

$$\therefore m\frac{d}{dt}\langle x\rangle = \langle P_x\rangle$$

দ্বিতীয় উপপাদ্য: সময়ের সাথে গড় ভরবেগের পরিবর্তন অর্থাৎ $\frac{d}{dt}\langle P_x\rangle$ হলো প্রযুক্ত গড় বল $\langle F(x)\rangle$ এর সমান।

$$\therefore \frac{d}{dt}\langle P_x\rangle = \langle f(x)\rangle$$

১ম উপপাদ্য প্রমাণ: আমরা জানি একটি গতীয় চলক Q এর সাথে সংশ্লিষ্ট অপারেটর $\hat{Q}$ এর সময়ের সম্পর্ক হলো

$$\frac{d}{dt}\langle Q\rangle = \left\langle \frac{i}{\hbar}[\hat{H},\hat{Q}] + \frac{dQ}{dt}\right\rangle \quad \text{——(i)}$$

এখানে $Q = x$ এবং $\hat{Q} = \hat{x}$ ব্যবহার করে পাই,

$$[\hat{H},\hat{x}] = \left[\frac{P^2}{2m} + \hat{V}(x), \hat{x}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{2m}(P_x^2 + P_y^2 + P_z^2) + \hat{V}(x), \hat{x}\right]$$

$$= \left\{\frac{1}{2m}[P_x^2,\hat{x}] + \frac{1}{2m}[P_y^2,\hat{x}] + \frac{1}{2m}[P_z^2,\hat{x}] + [\hat{V}(x),\hat{x}]\right\}$$

$$= \frac{1}{2m}[P_x^2,\hat{x}] + 0 + 0 + 0$$

$$= \frac{1}{2m}\left\{\hat{P}_x[\hat{P}_x,\hat{x}] + [\hat{P}_x,\hat{x}]\hat{P}_x\right\}$$

$$= \frac{1}{2m}\left\{\frac{\hbar}{i}\hat{P}_x + \frac{\hbar}{i}\hat{P}_x\right\}$$

$$= \frac{\hbar}{im}\hat{P}_x$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\langle x\rangle = \left\langle \frac{\hbar}{im}\cdot\frac{i}{\hbar} P_x \right\rangle$$

$$\Rightarrow m\frac{d}{dt}\langle x\rangle = \langle P_x\rangle$$

(প্রমাণিত)

২য় সমীকরণের প্রমাণ: সমীকরণ ① এ $Q = P_x$ এবং $\hat{Q} = \hat{P}_x$ ব্যবহার করে.

$$\frac{d}{dt}\langle P_x\rangle = \left\langle \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{P}_x] + \frac{d\hat{P}_x}{dt} \right\rangle$$

$$= \frac{i}{\hbar}\langle [\hat{H}, \hat{P}_x] \rangle + 0$$

আমরা জানি, $[H, \hat{P}_x] = [\hat{V}(\vec{r}); P_x] = \left[-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial V(x)}{\partial x}\right]$

এবং $\frac{d}{dt}\langle P_x\rangle = -\left\langle \frac{i}{\hbar}\cdot\frac{\hbar}{i}\frac{\partial V(x)}{\partial x}\right\rangle$

$$= -\left\langle \frac{\partial V}{\partial x}\right\rangle$$

= প্রযুক্ত বল

$$= \langle F(x)\rangle$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\langle P_x\rangle = \langle F(x)\rangle$$

(প্রমাণিত)

Sd

প্রশ্ন: তরঙ্গ ফাংশন কি? এর ভৌত তাৎপর্য আলোচনা কর। ✓

→ তরঙ্গ ফাংশন এমন একটি ফাংশন যা একটি কোয়ান্টাম কণার কণাধর্ম ও তরঙ্গধর্ম বহন করে। তরঙ্গ ফাংশনকে $\psi(r,t)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। ম্যাক্স প্লাঙ্কের সংজ্ঞানুসারে $\psi(r,t)$ হলো r অবস্থানে t সময়ে একটি কণাকে পাওয়ার সম্ভাবনার বিস্তার। তরঙ্গ ফাংশন $\psi(r,t)$ হলো সাধারণত জটিল রাশি এবং ইহার $(-\infty$ থেকে $+\infty)$ এ মান শূন্য। এর ভৌত তাৎপর্য বুঝার জন্য সম্ভাবনার ঘনত্বের বিবেচনা করি,

$$\psi^*(r,t)\psi(r,t) = |\psi(r,t)|^2 = \psi^*\psi$$ হল সম্ভাবনার ঘনত্ব

এর দ্বারা একক আয়তনে একটি কণাকে পাওয়ার সম্ভাবনা বুঝায়। যে কণাটির জন্য ঐ তরঙ্গ ফাংশন $\psi(r,t)$ সংজ্ঞায়িত করা হয়েছে। অতএব আয়তনীয় উপাদান $d\tau$ এ কণাটি পাওয়ার সম্ভাবনা হলো $\psi^*\psi\, d\tau$

বিশ্বে কণাটি পাওয়ার সম্ভাবনা হবে 1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*\psi\, d\tau = 1$$

ইহাকে নর্মালাইজেশন শর্ত বলা হয়।

প্র: অনিশ্চয়তার নীতি কি? হাইজেনবার্গের অনিশ্চয়তার নীতি প্রমাণ কর।

→ কোনো সাবঅ্যাটমিক কণার অবস্থান ও ভরবেগ একই সাথে নিখুঁতভাবে পরিমাপ করা যায় না।

$$\therefore \Delta x \cdot \Delta P_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

এর অর্থ হলো কোনো কণার অবস্থান x ও ভরবেগ P_x একই সময়ে নির্ণয় করা হয় তবে অবস্থানের অনিশ্চয়তা Δx ও ভরবেগের অনিশ্চয়তা ΔP_x এর গুণফল হবে $\hbar/2$ এর সমান বা এর চেয়ে বড়।

শক্তি E ও সময় t এর জন্য হাইজেনবার্গের নীতিটি:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2$$

প্রমাণ: অপারেটর x এবং P_x ব্যবহার করে আমরা অবস্থানের প্রত্যাশিত মান বা গড়মান $\langle x \rangle$ এবং ভরবেগের প্রত্যাশিত মান বা গড়মান $\langle P_x \rangle$ গণনা করতে পারি। গড়মান $\langle x \rangle$ থেকে অবস্থানের গড় বর্গ বিচ্যুতি,

$$\langle \Delta x \rangle^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* (x - \langle x \rangle)^2 \psi \, dx \quad \text{--- (1)}$$

গড়মান $\langle P_x \rangle$ থেকে ভরবেগের গড় বর্গ বিচ্যুতি,

$$(\Delta P_x)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* (P_x - \langle P_x \rangle)^2 \psi \, dx$$

$$(\Delta x)^2 (\Delta P_x)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* (x - \langle x \rangle)^2 \psi \, dx \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* (P_x - \langle P_x \rangle)^2 \psi \, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \alpha^2 \psi \, dx \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \beta^2 \psi \, dx$$

ধরি,
$\alpha = x - \langle x \rangle$
$\beta = p_x - \langle p_x \rangle$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \alpha\alpha \psi \, dx \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \beta\beta \psi \, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^* \psi^* \alpha \psi \, dx \int_{-\infty}^{\infty} \beta^* \psi^* \beta \psi \, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha\psi)^* (\alpha\psi) \, dx \int_{-\infty}^{\infty} (\beta\psi)^* (\beta\psi) \, dx \quad \text{--- (2)}$$

আমরা জানি,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^* f \, dx \int_{-\infty}^{\infty} g^* g \, dx \geq \left| \int_{-\infty}^{\infty} f^* g \, dx \right|^2$$

(2) নং ব্যবহার করে,

$$(\Delta x)^2 (\Delta p_x)^2 \geq \left| \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha\psi)^* (\beta\psi) \, dx \right|^2$$

$$\geq \left| \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^* \psi^* \beta \psi \, dx \right|^2$$

$$\geq \left| \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \alpha \beta \psi \, dx \right|^2$$

$$\geq \left| \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \left\{ \frac{1}{2} (\alpha\beta - \beta\alpha) + \frac{1}{2} (\alpha\beta + \beta\alpha) \right\} \psi \, dx \right|^2$$

$$\geq \left| \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \frac{1}{2} (\alpha\beta - \beta\alpha) \psi \, dx \right|^2 + \left| \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \frac{1}{2} (\alpha\beta + \beta\alpha) \psi \, dx \right|^2 \quad \text{--- (3)}$$

এখানে, $\alpha\beta - \beta\alpha = (x - \langle x\rangle)(P_x - \langle P_x\rangle) - (P_x - \langle P_x\rangle)(x - \langle x\rangle)$

$$= xP_x - x\langle P_x\rangle - \langle x\rangle P_x + \langle x\rangle\langle P_x\rangle - P_x x + P_x\langle x\rangle + \langle P_x\rangle x - \langle P_x\rangle\langle x\rangle$$

$$= xP_x - P_x x$$

$$= [x, P_x]$$

আমরা জানি $[x, P_x] = i\hbar$

$$\alpha\beta - \beta\alpha = i\hbar$$

একইভাবে $\alpha\beta + \beta\alpha = 0$

$$(\Delta x)^2 \cdot (\Delta P_x)^2 \geq \left|\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \frac{1}{2} \cdot i\hbar\, \psi\, dx\right|^2 + \left|\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \frac{1}{2} \times 0\, \psi\, dx\right|^2$$

$$\geq \frac{1}{4}\hbar^2 \left|\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi\, dx\right|^2 + 0$$

নর্মালাইজড তরঙ্গ ফাংশনের জন্য $\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi\, dx = 1$

$$\therefore (\Delta x)^2 \cdot (\Delta P_x)^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

$$\therefore \Delta x \cdot \Delta P_x \geq \hbar/2 \quad \text{—— (৪)}$$

আবার, $E = \frac{P_x^2}{2m} = \frac{2P_x}{2m} \cdot \Delta P_x = \frac{P_x}{m} \Delta P_x$

$$\therefore \Delta x \cdot \Delta P_x = \Delta x \times \frac{m}{P_x} \Delta E$$

$$= \Delta x \times \frac{m}{mv} \cdot \Delta E$$

$$= \Delta x \cdot \frac{1}{v} \cdot \Delta E \qquad \left[\because v = \frac{dx}{dt}\right]$$

$$= \Delta x \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \Delta E$$

$$= \Delta E \cdot \Delta t$$

④ নং ব্যবহার করে,

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2$$

(প্রমাণিত)

⊟ অনিশ্চয়তা নীতি থেকে দেখাও যে একটি নিউক্লিয়াসে ইলেকট্রন থাকতে পারে না।

→ আমরা জানি, একটি ভিতরে নিউক্লিয়াসের ব্যাসার্ধ হলো 10^{-12} cm। অতএব একটি ইলেকট্রনকে একটি নিউক্লিয়াসে রাখতে হলে তার অবস্থানের অনিশ্চয়তা কোনো অবস্থাতেই নিউক্লিয়াসের ব্যাস 2×10^{-12} cm এর বেশী হবে না।

অনিশ্চয়তা নীতি থেকে,

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2$$

$$\Rightarrow \Delta p \geq \hbar/2\Delta x$$

$$= \frac{h}{4\pi\Delta x}$$

$$= \frac{6.63 \times 10^{-27}\ \text{erg·sec}}{2 \times 3.1416 \times 2 \times 10^{-12}\ \text{cm}}$$

$$= 0.26393 \times 10^{-15}\ \text{gm-cm/s}$$

যদি ইলেকট্রনের ভরবেগের অনিশ্চয়তা হয় তবে ইলেকট্রনটির ভরবেগ কমপক্ষে এর সমান তুলনীয়। এই ভরবেগ নিয়ে ইলেকট্রনের বেগ প্রায় আলোর বেগের সমান।

ইলেকট্রনের শক্তি,

$$E = mc^2$$
$$= mc \times c$$
$$= \Delta P \times c$$
$$= 0.29393 \times 10^{-15} \times 3 \times 10^{10}$$
$$= 0.791799 \times 10^{-5} \text{ ergs}$$
$$= 0.791799 \times 10^{-7} \times 10^{-5} \text{ joule}$$
$$= 0.791799 \times 10^{-12} \text{ joule}$$
$$= \frac{0.791799 \times 10^{-12}}{1.6 \times 10^{-19}} \text{ eV}$$
$$= 0.4948 \times 10^{7} \text{ eV}$$
$$= 4.948 \text{ MeV}$$

অর্থাৎ একটি নিউক্লিয়াসে ইলেকট্রন থাকার জন্য এর কমপক্ষে 4.948 MeV শক্তি থাকতে হবে। কিন্তু পরীক্ষালব্ধ উপাত্ত থেকে দেখা যায় যে একটি ইলেকট্রনের শক্তি প্রায় ~~[illegible]~~ 4 MeV।

অতএব একটি নিউক্লিয়াসে ইলেকট্রন থাকতে পারে না।

প্রত্যাশিত মান / গড়মান : মনেকরি যে কোনো ফাংশন $f(x)$ এর গড়মান

$$\langle f(x)\rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* f(x)\psi\, dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*\psi\, dx}$$

যদি ফাংশনটি নর্মালাইজড হয় তবে $\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*\psi\, dx = 1$

$\therefore$ গড়মান, $\langle f(x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* f(x)\,\psi\, dx$

আবার কোনো অপারেটরের গড়মান

$$\langle \hat{A}\rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{A}\,\psi\, dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*\psi\, dx}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{A}\,\psi\, dx$$

হিলবার্ট স্পেস: একটি অসীম মাত্রাবিশিষ্ট ভেক্টর স্পেসকে হিলবার্ট স্পেস বলে।

ধরি, $\psi_1\ \psi_2 \ldots \psi_n$ হলো হিলবার্ট স্পেস বেসিস ভেক্টর।

অতএব যেকোনো ভেক্টর $|\psi\rangle$ ও $\langle\psi|$ কে লেখা যায়,

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \vdots\\ \psi_n\end{bmatrix} \text{ ও } \langle\psi| = \begin{bmatrix}\psi_1^*, & \psi_2^* & \cdots & \psi_n^*\end{bmatrix}$$

$$\therefore \langle\psi|\psi\rangle = \begin{bmatrix}\psi_1^* & \psi_2^* & \cdots & \psi_n^*\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \vdots\\ \psi_n\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \langle\psi|\psi\rangle = \psi_1^*\psi_1 + \psi_2^*\psi_2 \cdots + \psi_n^*\psi_n$$

$\Rightarrow (\psi,\psi) = \langle\psi|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{n} \psi_i^* \psi_i$

$\Rightarrow (\psi,\psi) = \langle\psi|\psi\rangle = \int \psi^* \psi \, d\tau$

প্রমাণ কর যে $[x_i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_{ij}$

$\rightarrow$ আমরা জানি, $\hat{p}_x = -i\hbar \partial/\partial x$

$$\therefore [x, \hat{p}_x]\psi = x\hat{p}_x\psi - \hat{p}_x x\psi$$

$$= -x i\hbar \partial/\partial x \psi + i\hbar \partial/\partial x (x\psi)$$

$$= -x i\hbar \partial/\partial x \psi + i\hbar x \partial/\partial x \psi + i\hbar \psi \partial/\partial x x$$

$$\Rightarrow [x, \hat{p}_x]\psi = i\hbar\psi$$

$$\therefore [x, \hat{p}_x] = i\hbar$$

একইভাবে $[y, \hat{p}_y] = [z, \hat{p}_z] = i\hbar$

কিন্তু $[x, \hat{p}_y]\psi = (x\hat{p}_y - \hat{p}_y x)\psi$

$$= x p_y \psi - \hat{p}_y x \psi$$

$$= -i\hbar x \frac{\partial\psi}{\partial y} + i\hbar x \frac{\partial\psi}{\partial y}$$

$$= 0$$

$$\therefore [x, \hat{p}_y] = 0$$

একইভাবে, $[x, \hat{p}_z] = [y, p_x] = [y, p_z] = [z, p_x] = [z, p_y] = 0$

$x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$

$p_x = p_1$, $p_y = p_2$, $p_z = p_3$

$$[x_1, P_1] = [x_2 P_2] = [x_3 P_3] = i\hbar$$

এবং $[x_1, P_2] = [x_1, P_3] = 0$

$$[x_i, P_j] = i\hbar \delta_{ij}$$

(Proved)

ঘ) প্রমাণ কর যে, $\frac{\partial}{\partial x}(x^n) = nx^{n-1} + x^n \frac{d}{dx}$ এবং

$$\left[\frac{d}{dx}, x^n\right] = nx^{n-1}$$

$\rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^n \cdot \psi)$$

$$= x^n \frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi \frac{\partial x^n}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x} x^n\right)\psi = \left(x^n \frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi n x^{n-1}\right)$$

$$\Rightarrow (\partial/\partial x\, x^n)\psi = \left(x^n \frac{\partial}{\partial x} + n x^{n-1}\right)\psi$$

$$\Rightarrow \partial/\partial x\, x^n = x^n \partial/\partial x + n x^{n-1}$$

(Proved)

$$\Rightarrow n x^{n-1} = -x^n \partial/\partial x + \partial/\partial x \cdot x^n$$

$$= \partial/\partial x\, x^n - x^n \partial/\partial x$$

$$= [\partial/\partial x, x^n]$$

(Proved)

প্র প্রমাণ কর যে, $[\hat{p}, \hat{V}(x)] = -i\hbar \frac{\partial \hat{V}(x)}{\partial x}$

→ $[\hat{p}, V(x)]\psi = (\hat{p}\hat{V} - \hat{V}\hat{p})\psi$

$= -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}(\hat{V}\psi) + \hat{V}\, i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\psi$

$= -i\hbar\psi \frac{\partial \hat{V}}{\partial x} - i\hbar \hat{V} \frac{\partial}{\partial x}\psi + i\hbar \hat{V} \frac{\partial}{\partial x}\psi$

$= -i\hbar\psi \frac{\partial \hat{V}(x)}{\partial x}$

$\therefore [\hat{p}, \hat{V}_x] = -i\hbar \frac{\partial \hat{V}(x)}{d x}$ (proved)

প্র সরল দোলিত স্পন্দনের জন্য শ্রোডিঞ্জারের সমীকরণ প্রতিপাদন কর এবং এর সমাধান বের করে আইগেন মান ও আইগেন ফাংশন বের কর।

→ আমরা জানি, সরল দোলিত গতির জন্য ত্বরণ সরণের সমানুপাতিক ও বিপরীত।

$a \propto -x$

$\Rightarrow a = -kx$

আবার, $F = ma$

$\Rightarrow F = -kx$

$\Rightarrow ma = -kx \longleftarrow (1)$

$\Rightarrow a = -k/m\, x$ $[\omega = \sqrt{k/m}]$

$= -\omega^2 x$

আমরা জানি, $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{dx}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$

$\Rightarrow \cancel{m}$

① হতে

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} + \omega^2 x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

$$\Rightarrow v \cdot dv + \omega^2 x \cdot dx = 0 \quad \text{--- ②}$$

$$\Rightarrow \int v\,dv + \omega^2 \int x\,dx = \int 0$$

$$\Rightarrow v^2/2 + \omega^2 \frac{x^2}{2} = c \quad \text{--- ③}$$

[$v = 0$ যখন $x = A$]

$$\Rightarrow \frac{0^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2} = c$$

$$\Rightarrow \frac{\omega^2 A^2}{2} = c$$

$$\therefore c = \frac{\omega^2 A^2}{2}$$

③ হতে,

$$v^2/2 + \frac{\omega^2 x^2}{2} = \frac{\omega^2 A^2}{2}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\omega^2(A^2 - x^2)}$$

$$\Rightarrow v = \omega\sqrt{(A^2 - x^2)}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{A^2 - x^2}}\,dx = \int \omega \cdot dt$$

$$\Rightarrow \sin^{-1}(x/A) = (\omega t + \delta)$$

$$\therefore x = A\sin(\omega t + \delta)$$

∴ সরলছন্দিত গতি সম্পন্ন কোনো কণার x অবস্থানে বিভবশক্তি

$$V(x) = \int_0^x -F\cdot dx = \int_0^x -(-Kx)\,dx = K\int_0^x x\,dx$$

$$= K\left[x^2/2\right]_0^x$$

$$= \frac{1}{2}Kx^2$$

হ্যামিলটোনিয়ান অপারেটর,

$$\hat{H} = P^2/2m + V(x)$$

$$= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}Kx^2$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}Kx^2$$

$$P_x = -i\hbar\frac{d}{dx}$$

$$P_x^2 = -i\hbar\frac{d}{dx}\cdot -i\hbar\frac{d}{dx}$$

$$= -\hbar^2\frac{d^2}{dx^2}$$

আমরা জানি,

$$E\psi = \hat{H}\psi$$

$$\Rightarrow E\psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}Kx^2\right)\psi$$

$$\Rightarrow E\psi + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi - \frac{1}{2}Kx^2\psi = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2m}{\hbar^2}E\psi + \frac{\partial^2\psi}{dx^2} - \frac{2m}{2\hbar^2}Kx^2\psi = 0$$

[$\frac{2m}{\hbar^2}$ দ্বারা গুণ করে]

$$\Rightarrow \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{1}{2}Kx^2\right)\psi = 0 \quad \text{------ } (4)$$

ধরি, $x = z/\alpha$.

$$\Rightarrow z = x\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \alpha$$

$$\therefore \frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = \frac{d\psi}{dz}\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{d\psi}{dx} = \alpha\frac{d\psi}{dz}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\psi}{dx^2} = \alpha^2 \frac{d^2\psi}{dz^2}$$

সমীকরণ ④ হতে,

$$\alpha^2 \frac{d^2\psi}{dz^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left\{E - \frac{1}{2}K(z/\alpha)^2\right\}\psi = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^2 \frac{\partial^2\psi}{dz^2} + \left(\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{mK}{\hbar^2}\frac{z^2}{\alpha^2}\right)\psi = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\psi}{dz^2} + \left(\frac{2mE}{\alpha^2\hbar^2} - \frac{mK}{\alpha^4\hbar^2}z^2\right)\psi = 0 \quad \left[\frac{1}{\alpha^2} \text{ দ্বারা গুণ}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\psi}{dz^2} + \left(\frac{2mE}{\alpha^2\hbar^2} - \frac{mK}{\alpha^4\hbar^2}z^2\right)\psi = 0 \quad \text{--- ⑤}$$

ধরি, $\frac{mK}{\hbar^2\alpha^4} = 1$

$$\Rightarrow \alpha^4 = \frac{mK}{\hbar^2}$$

$$\Rightarrow \alpha = \left(\frac{mK}{\hbar^2}\right)^{1/4} \quad \text{--- ⑥}$$

আবার, $\frac{2mE}{\alpha^2\hbar^2} = \lambda$ --- ⑦

$$\Rightarrow \frac{2mE}{\left(\frac{mK}{\hbar^2}\right)^{1/2}\hbar^2} = \lambda$$

$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{m}\,E}{\sqrt{K}\,\hbar} = \lambda$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2E}{\hbar}\left(\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{K}}\right)$$

$$= \frac{2E}{\hbar}\left(\frac{m}{K}\right)^{1/2} \quad \text{--- ⑧}$$

(চ) হতে,

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + (\lambda - z^2)\,\psi = 0 \quad \text{——} (10)$$

এর সমীকরণের অসীম শ্রেণীর সমাধান হবে,

$$\psi(z) = H(z)\cdot e^{-z^2/2} \quad \text{——} (11)$$

$$\therefore \frac{d\psi}{dz} = \left[\frac{d}{dz}\left(e^{-z^2/2}\right)\right]\cdot H(z) + e^{-z^2/2}\cdot H'(z)$$

$$\Rightarrow \frac{d\psi}{dz} = -z e^{-z^2/2}\cdot H(z) + e^{-z^2/2}\cdot H'(z)$$

আবার,

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} = -\left\{\frac{d}{dz}\left(z e^{-z^2/2}\right) H(z)\right\} + \frac{d}{dz}\left\{e^{-z^2/2}\cdot H'(z)\right\}$$

$$= -\left\{z e^{-z^2/2} H'(z) + H(z)\frac{d}{dz}\left(z\cdot e^{-z^2/2}\right)\right\}$$

$$+ e^{-z^2/2} H''(z) + H'(z)\left(-z\cdot e^{-z^2/2}\right)$$

$$= -\left\{z e^{-z^2/2} H'(z) + H(z)\left[e^{-z^2/2} + (-z^2 e^{-z^2/2})\right]\right\}$$

$$+ e^{-z^2/2} H''(z) + H'(z)\left[-z\cdot e^{-z^2/2}\right]$$

$$= -z e^{-z^2/2} H'(z) - e^{-z^2/2} H(z) + z^2 e^{-z^2/2} H(z)$$

$$+ e^{-z^2/2} H''(z) - z e^{-z^2/2} H'(z)$$

$$= \left(z^2 e^{-z^2/2} - e^{-z^2/2}\right) H(z) - 2z e^{-z^2/2} H'(z)$$

$$+ e^{-z^2/2} H''(z)$$

$$= e^{-z^2/2}\left[H''(z) - 2z H'(z) + (z^2-1) H(z)\right] \quad \text{---(12)}$$

(10) নং সমীকরণে (11, 12) এর মান বসিয়ে,

$$e^{-z^2/2}\left[H''(z) - 2zH'(z) + (z^2-1) H(z)\right] + (\lambda - z^2) H(z) e^{-z^2/2} = 0$$

$$\Rightarrow H''(z) - 2z H'(z) + (\lambda-1) H(z) = 0$$

$$\Rightarrow H''(z) - 2z H'(z) + (\lambda-1) H(z) = 0 \quad \text{---(13)}$$

এই সমীকরণটির সিরিজ সমাধান বিবেচনা করি:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{p+n}$$

$$\therefore H'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (p+n) z^{p+n-1}$$

$$\therefore H''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (p+n)(p+n-1) z^{p+n-2} \quad \text{---(14)}$$

(13) হতে,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (p+n)(p+n-1) z^{p+n-2} - 2z \sum a_n (p+n) z^{p+n-1} + (\lambda-1) \sum a_n z^{p+n} = 0$$

$$\Rightarrow \sum a_n (p+n)(p+n-1) z^{p+n-2} - 2 \sum a_n (p+n) z^{p+n} + (\lambda-1) \sum a_n z^{p+n} = 0$$

$$\Rightarrow \sum a_n (p+n)(p+n-1) z^{p+n-2} - \left[2 \sum a_n (p+n) + (\lambda-1) \sum a_n\right] z^{p+n} = 0 \quad \text{---(15)}$$

$n = 0$ বসিয়ে z^{p-2} এর উভয়দিকের সহগ সমীকৃত করে,

$$\Rightarrow a_0 (p+0)(p+0-1) = 0$$

$$\Rightarrow a_0 \, p(p-1) = 0$$

$$a \neq 0, \quad p(p-1) = 0$$

$$\therefore p = 0, 1 \quad \text{——} (16)$$

আবার, $n = n+2$ বসিয়ে z^{p+n} এর সহগ সমীকৃত করে,

$$\Rightarrow a_{n+2}(p+n+2)(p+n+2-1) - 2a_n(p+n) + (\lambda-1)a_n = 0$$

$$\Rightarrow a_{n+2}(p+n+1)(p+n+2) = 2a_n(p+n) - (\lambda-1)a_n$$

$$\Rightarrow a_{n+2}(p+n+1)(p+n+2) = [2(p+n) - \lambda + 1]a_n$$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{2p+2n+1-\lambda}{(p+n+1)(p+n+2)} \quad \text{——} (17)$$

a_n এর সকল মান শূন্য হবে,

$$a_{n+2} = 0$$

$$\Rightarrow 2p + 2n + 1 - \lambda = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 2p + 2n + 1 \quad \text{——} (18)$$

$p = 0, 1$ এবং $n = 0, 1, 2 \ldots \infty$ হলে,

$p = 0, \; n = 0$ হলে $\lambda = 1$

$p = 0 \quad n = 1 \quad$ " $\quad \lambda = 3$

$p = 1, \; n = 0 \quad$ " $\quad \lambda = 3$

$p = 1 \quad n = 1 \quad$ " $\quad \lambda = 5$

$p = 0, \quad n = 2 \quad$ " $\quad \lambda = 5$

অর্থাৎ $\lambda = 2n+1$, $n = 0, 1, 2 \ldots \infty$

λ এর মান (8) নং এ বসাই

$$\frac{2E_n}{\hbar}\sqrt{m/K} = 2n+1$$

$$\Rightarrow E_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\sqrt{K/m}$$

$$\omega = \sqrt{K/m}$$

$$\therefore E_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

ইহাই সরলছন্দিত দোলকের শক্তির আইগেন মান বা শক্তিস্তর। $n = 0, 1, 2 \ldots$ এর জন্য আইগেনমান $E_0 = 1/2\,\hbar\omega$, $3/2\,\hbar\omega$, $5/2\,\hbar\omega$ .... ।

প্র: শূন্য বিন্দু শক্তি কি ? ব্যাখ্যা কর।

→ আমরা জানি, রৈখিক স্পন্দকের শক্তিস্তর দেওয়া হলো,

$$E_n = (n+\tfrac{1}{2})\hbar\omega$$

$n = 0$ বসালে,

$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ এই শক্তির মানকে শূন্য শক্তি বলে।

$n = 1, 2, 3 \ldots$ হলে,

$$E_1 = 3/2\,\hbar\omega,\ E_2 = 5/2\,\hbar\omega,\ E_3 = 7/2\,\hbar\omega$$

এখানে প্রত্যেকটি শক্তিস্তরের মধ্যকার পার্থক্য $1/2\,\hbar\omega$

E_3 —— $7/2\,\hbar\omega$

E_2 —— $5/2\,\hbar\omega$

E_1 —— $3/2\,\hbar\omega$

E_0 —— $1/2\,\hbar\omega$

—— 0

∴ পার্থক্য $\hbar\omega$। সুতরাং দেখা যাচ্ছে সর্বনিম্ন শক্তি সর্বনিম্ন অবস্থানের শক্তি হলো শূন্য বিন্দুর শক্তি ($1/2\,\hbar\omega$)।

প্র: একটি রৈখিক স্পন্দকের ~~কম্পাঙ্ক 1 Hz~~ : দোলনকাল 1 sec স্পন্দকটির শূন্য বিন্দু বের কর

→ $E_0 = 1/2\,\hbar\omega$ $\qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{h}{2\pi}\cdot\frac{2\pi}{T}$

$= h/2T$

$= \frac{6.63\times10^{-34}}{2\times1}$

$\quad J$

$= \quad eV$

প্র: শ্রোডিঞ্জার চিত্র কী? এই চিত্রে গতির সমীকরণ বের কর।

→ যে চিত্রে কোনো তরঙ্গের অবস্থা অপেক্ষক বা অবস্থা ভেক্টর সময় নির্ভর কিন্তু অপারেটর সময় নির্ভর নয় তাকে শ্রোডিঞ্জার চিত্র বলে।

কোয়ান্টাম বলবিদ্যার স্বীকার্য হতে,

$$E\psi = H\psi$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{d}{dt}\psi = \hat{H}\psi$$

$$\Rightarrow \frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{i\hbar} H\psi \quad \text{--- (1)}$$

$$\Rightarrow \frac{d\psi^*}{dt} = -\frac{1}{i\hbar} H^*\psi^* \quad \text{--- (2)}$$

যদি শ্রোডিঞ্জার চিত্রে অপারেটর $\hat{A}_s$ এর প্রত্যাশিত মান,

$$\langle \hat{A}_s \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{A}_s \psi \, d\tau$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\langle \hat{A}_s \rangle = \frac{d}{dt}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{A}_s \psi \, dx\right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d\psi^*}{dt}\right) \hat{A}_s \psi \, dx + \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \left\{\frac{dA_s}{dt}\right\} \psi \, dx + \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* A_s \left\{\frac{d\psi}{dt}\right\} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{-\frac{1}{i\hbar} H^*\psi^*\right\} A_s \psi \, dx + 0 + \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{A}_s \left\{\frac{1}{i\hbar} H\psi\right\} dx$$

$$= -\frac{1}{i\hbar}\int H\psi^* A_s\psi\, dx + \frac{1}{i\hbar}\int \psi^* A_s H\psi\, dx$$

$$= \frac{1}{i\hbar}\int \psi^* (A_s H - H A_s)\psi\, dx$$

$$= \frac{1}{i\hbar}\int \psi^* [A_s, H_s]\psi\, dx$$

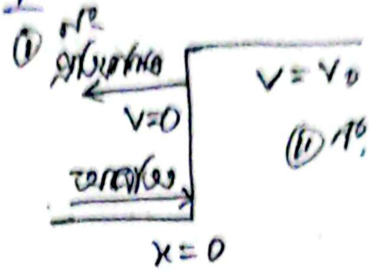
$$= \frac{1}{i\hbar}\langle [A_s, H_s]\rangle$$

প্র একটি ধাপবিভব বিভবের জন্য আপতিত কণার জন্য প্রতিফলন সহগ (R) ও প্রবেশ্যতা সহগ (T) বের কর।

$V = 0$ যখন $x < 0$

$V = V_0$ " $x > 0$

দেখাও, $R+T = 1$



→ আমরা জানি,

x অক্ষে শ্রোডিঞ্জার সমীকরণ,

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[E-V]\psi = 0$$

① নং অঞ্চলে $V = 0$ এর জন্য,

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E-0)\psi_1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi_1 = 0 \qquad \left[\alpha^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\psi}{dx^2} + \alpha^2\psi_1 = 0 \quad \text{--- (1)}$$

① নং এর একটি সমাধান হলো,

$$\psi_1 = Ae^{i\alpha x} + Be^{-i\alpha x} \quad \text{--- (2)}$$

এখানে,

আপতিত তরঙ্গ $\psi_{1i} = Ae^{i\alpha x}$ --- (3)

প্রতিফলিত " $\psi_{1r} = Be^{-i\alpha x}$ --- (4)

আবার ② নং অঞ্চলে $V = V_0$ এর জন্য,

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0)\psi_2 = 0 \qquad \left[\beta^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\psi_2}{dx^2} + \beta^2\psi_2 = 0 \quad \text{--- (5)}$$

⑤ নং সমীকরণের তরঙ্গ সমাধান হলো,

$$\psi_2 = Ce^{i\beta x} \quad \text{——⑥}$$

যেহেতু $x>0$ অঞ্চলে কোনো বাধা নেই সেহেতু কোনো প্রতিফলন হবে না।

প্রতিসরণ তরঙ্গ $\psi_{2t} = Ce^{i\beta x}$ ——⑦

$x=0$ এ সীমান্তিক শর্ত প্রয়োগ করে,

$$\psi_1|_{x=0} = 0 \qquad \psi_2|_{x=0} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\psi_1}{dx}\Big|_{x=0} = 0 \qquad \Rightarrow \frac{d\psi_2}{dx}\Big|_{x=0} = 0$$

② নং ও ⑥ এ $x=0$ সীমান্তিক শর্ত প্রয়োগ করে,

$$A+B=0 \quad \text{——⑧}, \qquad C=0 \quad \text{——⑨}$$

⑧ ও ⑨ হতে

$$A+B=C \quad \text{——⑩}$$

আবার ② ও ⑥ কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে $x=0$ সীমান্ত শর্ত হতে,

$$\frac{d\psi_1}{dx}\Big|_{x=0} = Ai\alpha e^{i\alpha x} - Bi\alpha e^{-i\alpha x}$$

$$\Rightarrow 0 = i\alpha(A-B)$$

$$\Rightarrow \alpha A - \alpha B = 0 \quad \text{——⑪}$$

CamScanner

$$\frac{d\psi_2}{dx}\Big|_{x=0} = c\,i\beta e^{i\beta x}$$

$$\Rightarrow 0 = i\beta C$$

$$\Rightarrow \beta C = 0 \quad \text{—— (12)}$$

(11) ও (12) হতে,

$$\alpha A - \alpha B = \beta C \quad \text{—— (13)}$$

সমীকরণ (13) ও (10) হতে,

$$\alpha A - (C-A)\alpha = \beta C \qquad [B = C-A]$$

$$\Rightarrow \alpha A - \alpha C + \alpha A = \beta C$$

$$\Rightarrow 2\alpha A = (\alpha+\beta)C$$

$$\Rightarrow C = \left(\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\right)A \quad \text{—— (14)}$$

আবার,

$$\alpha A - \alpha B = \beta(A+B) \qquad [A+B = C]$$

$$\Rightarrow (\alpha-\beta)A = (\alpha+\beta)B$$

$$\Rightarrow B = \left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)A \quad \text{—— (15)}$$

আবার,

$$(C-B)\alpha - \alpha B = \beta C$$

$$\Rightarrow -2B\alpha = (\beta-\alpha)C \qquad [A = C-B]$$

$$\Rightarrow C = \left(\frac{-2\alpha}{\beta-\alpha}\right)B$$

$$= \left(\frac{2\alpha}{\alpha-\beta}\right)B \quad \text{—— (16)}$$

আমরা জানি,

$$\text{তড়িৎ প্রবাহ} = \psi^* \psi v \quad \text{— (17)}$$

যদি v ও v_1 আপতিত ও সঞ্চালিত কণার বেগ

আপতিত তরঙ্গের ψ_1 এর জন্য

$$\alpha^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$\Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{2m \frac{1}{2} m v^2}{\hbar^2}}$$

$$\Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{m^2 v^2}{\hbar^2}}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{mv}{\hbar}$$

$$\therefore v = \frac{\alpha \hbar}{m} \quad \text{— (18)}$$

সঞ্চালিত তরঙ্গের ψ_2 এর জন্য

$$\beta^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)$$

$$\Rightarrow E - V_0 = \frac{1}{2} m v_1^2$$

$$\Rightarrow E_1 = \frac{1}{2} m v_1^2$$

$$\Rightarrow \beta = \sqrt{\frac{2mE_1}{\hbar^2}}$$

$$\Rightarrow \beta = \sqrt{\frac{2m \frac{1}{2} m v_1^2}{\hbar^2}}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{m v_1}{\hbar}$$

$$\therefore v_1 = \frac{\beta \hbar}{m} \quad \text{— (19)}$$

আপতিত তরঙ্গ ঘনত্ব,

$$J_i = \psi_{1i}^{*} \psi_{1i} v$$

$$\Rightarrow J_i = Ae^{-i\alpha x} \cdot Ae^{i\alpha x} \cdot \frac{\alpha\hbar}{m}$$

$$= \frac{\alpha\hbar}{m} |A|^2 \quad \text{--- (20)}$$

প্রতিফলিত তরঙ্গ ঘনত্ব,

$$J_r = \psi_{1r}^{*} \psi_{1r} V$$

$$= Be^{-i\alpha x} \cdot Be^{i\alpha x} \frac{\alpha\hbar}{m}$$

$$= \frac{\alpha\hbar}{m} |B|^2$$

$$= \frac{\alpha\hbar}{m} \left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^2 |A|^2$$

$$= \left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^2 J_i \quad \text{--- (21)}$$

প্রেরিত তরঙ্গ ঘনত্ব,

$$J_t = \psi_{2t}^{*} \psi_{2t} V_1$$

$$= ce^{-i\beta x} \cdot ce^{i\beta x} \cdot \frac{\beta\hbar}{m}$$

$$= \frac{\beta\hbar}{m} |c|^2$$

$$= \frac{\beta\hbar}{m} \left(\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2 |A|^2$$

$$= \frac{4\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2} \frac{\beta\hbar}{m} |A|^2$$

$$= \frac{4\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2} \frac{\alpha\hbar}{m} |A|^2$$

$$= \frac{4\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2} J_i \quad \text{--- (22)}$$

আমরা জানি, প্রতিফলন সহগ

$$R = \frac{J_R}{J_i} = \frac{\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^2 J_i}{J_i} = \left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^2$$

সঞ্চালন সহগ

$$T = \frac{J_t}{J_i} = \frac{\frac{4\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2} J_i}{J_i} = \frac{4\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}$$

এখন,

$$T+R = \frac{(\alpha-\beta)^2}{(\alpha+\beta)^2} + \frac{4\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}$$

$$= \frac{(\alpha-\beta)^2 + 4\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}$$

$$= \frac{(\alpha+\beta)^2}{(\alpha+\beta)^2}$$

$$= 1$$

(proved)

অর্থোগোনাল, নর্মালাইজড, অর্থোনর্মাল অবস্থা :

<u>অর্থোগোনাল:</u> কোনো ফাংশন $\psi_1(x)$ এবং অপরটি $\psi_2(x)$ ফাংশনের অনুবন্ধী জটিল $\psi_2^*(x)$ এর গুণফল $a<x<b$ ব্যবধিতে সমাকলন করলে যদি শূন্য পাওয়া যায় তবে $\psi_1(x)$ ও $\psi_2(x)$ ফাংশনদ্বয়কে পরস্পর (a,b) ব্যবধিতে অর্থোগোনাল বলে।

$$\int_a^b \psi_2^*(x)\,\psi_1(x)\,dx = 0$$

<u>নর্মালাইজড:</u> $d\tau$ আয়তন উপাদানের মধ্যে একটি কণা প্রাপ্তির সম্ভাবনা হলো $\psi^*\psi d\tau$ এবং কণাটি পাওয়ার সম্ভাবনা 1 হবে।

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*\psi\, d\tau = 1$$

<u>অর্থোনর্মাল:</u> যে সব ফাংশন একই সাথে অর্থোগোনাল ও নর্মালাইজড হয় তাদেরকে অর্থোনর্মাল ফাংশন বলে, তখন উভয়কে অর্থোনর্মাল বলে।

$$\int \psi_m^*(x)\,\psi_n(x)\,dx = \delta_{mn}$$

(i) $m=n$ হলে $\delta_{mn}=1$ এবং ψ_m/ψ_n নর্মালাইজড,

(ii) $m\neq n$ " $\delta_{mn}=0$ " ψ_m ও ψ_n অর্থোগোনাল।

ফুরিয়ের তরঙ্গ অপেক্ষক

অসীম সংখ্যক সমতল তরঙ্গ $A(k)e^{i(kr-\omega t)}$ এর উপরিপাতনের ফলশ্রুতিতে তরঙ্গ অপেক্ষককে নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায়.

$$\psi(r,t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int A(k)\, e^{i(kr-\omega t)}\, dk$$

এখানে $A(k)$ ফুরিয়ের তরঙ্গ অপেক্ষক। e^{ikr} এর উপর ভরবেগ অপারেটর $-i\hbar\nabla$ বিবেচনা করে,

$$-i\hbar\nabla(e^{ikr}) = -i\hbar(ik)e^{ikr}$$
$$= \hbar k e^{ik\cdot r}$$

এখানে ফুরিয়ের তরঙ্গ অপেক্ষক $A(k)$ সম্ভাব্য ভরবেগ আইগেন অপেক্ষকসমূহের বিস্তার যেগুলো তরঙ্গ অপেক্ষক $\psi(r,t)$ সৃষ্টি করে।

প্র $\psi(x,t) = A\sin\left(\frac{\pi x}{2a}\right)e^{-iEt/\hbar}$ হলে $(-a \le x \le a)$ এর প্রত্যাশিত মান বের কর।

$\rightarrow$
$$\langle \hat{x} \rangle = \int_{-a}^{+a} (\psi^* x \psi)\, dx$$

$$= \int_{-a}^{+a} \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \cdot e^{-i\omega t} \cdot x \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{\pi x}{2a}\right) e^{i\omega t} \cdot dx$$

$$= \int_{-a}^{+a} \frac{1}{a} e^{-i\omega t + i\omega t} \cdot \sin^2\left(\frac{\pi x}{2a}\right) x \cdot dx$$

$$= \frac{1}{a}\int_{-a}^{+a} \sin^2 \frac{\pi x}{2a} \cdot x\, dx$$

$$= \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} x \cdot 2\sin^2 \frac{\pi x}{2a}\, dx$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\int_{-a}^{+a} x\,dx - \int_{-a}^{a} x \cos\frac{2\pi x}{2a}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{x^2}{2} - x\cdot\left[\frac{\sin\frac{\pi x}{a}}{\pi/a}\right] + \frac{a}{\pi}\left[\frac{-\cos\frac{\pi x}{a}}{\pi/a}\right]\right]_{-a}^{a}$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{x^2}{2} + \left(\frac{a}{\pi}\right)^2\left(-\cos\frac{\pi x}{a}\right)\right]_{-a}^{+a}$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{a^2}{2} - \left(\frac{a}{\pi}\right)^2\cos\frac{\pi a}{a} + \left(\frac{a}{\pi}\right)^2\cos\frac{\pi a}{a}\right]$$

$$= \frac{a^2}{4a}$$

$$= \frac{a}{4}$$

(d)

Ⓔ $[V(x), P(x)] = [V(x), -i\hbar\,\partial/\partial x]\psi(x)$

$$= V(x)\left(-i\hbar\frac{\partial\psi(x)}{\partial x}\right) + i\hbar\,\partial/\partial x\,[V(x)\psi(x)]$$

$$= -i\hbar V(x)\frac{\partial\psi(x)}{\partial x} + i\hbar V(x)\frac{\partial\psi(x)}{\partial x} + i\hbar\frac{\partial V(x)}{\partial x}\psi(x)$$

$$= i\hbar\frac{\partial V(x)}{\partial x}\psi(x)$$

$$= i\hbar\frac{\partial V(x)}{\partial x}$$

~~গ) ২ নম্বর দেখ~~

ঘ) কৌণিক ভরবেগ অপারেটর এর উপাংশগুলোকে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে প্রকাশ কর।

→ আমরা জানি, কৌণিক ভরবেগ

$$L = r \times P \qquad \vec{L} = iL_x + jL_y + kL_z$$

$$\vec{r} = ix + jy + kz$$

$$P = iP_x + jP_y + kP_z$$

$$\Rightarrow iL_x + jL_y + kL_z = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix}$$

$$= i(yP_z - zP_y) - \hat{j}(xP_z - zP_x) + k(xP_y - yP_x)$$

L এর উপাংশগুলো হলো,

$$L_x = yP_z - zP_y$$

$$L_y = zP_x - xP_z$$

$$L_z = xP_y - yP_x$$

আমরা জানি,

$$P_x = -i\hbar\, \partial/\partial x, \quad P_y = -i\hbar\, \partial/\partial y, \quad P_z = -i\hbar\, \partial/\partial z$$

$$L_x = y(-i\hbar\, \partial/\partial z) - z(-i\hbar\, \partial/\partial y)$$

$$= -i\hbar(y\, \partial/\partial z - z\, \partial/\partial y)$$

$$= -i\hbar(y\, \partial/\partial z - z\, \partial/\partial y)$$

একইভাবে,

$$L_y = -i\hbar(z\, \partial/\partial x - x\, \partial/\partial z)$$

$$L_z = -i\hbar(x\, \partial/\partial y - y\, \partial/\partial x)$$

প্র prove that $[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar \hat{L}_z$

→ আমরা জানি,

$$L_x = yP_z - zP_y$$

$$= -y i\hbar \,\partial/\partial z + z i\hbar \,\partial/\partial y$$

$$L_y = xP_z - zP_x$$

$$= -i\hbar z\,\partial/\partial z + i\hbar z\,\partial/\partial x$$

$$L_y = xP_y - yP_x$$

$$= -i\hbar x\,\partial/\partial y + i\hbar y\,\partial/\partial x$$

$$[L_x, L_y] = L_x L_y - L_y L_x$$

$$= (-i\hbar y\,\partial/\partial z + i\hbar z\,\partial/\partial y)\cdot(-i\hbar z\,\partial/\partial z + i\hbar z\,\partial/\partial x) - (-i\hbar x\,\partial/\partial z + i\hbar z\,\partial/\partial x)(-i\hbar y\,\partial/\partial z + i\hbar z\,\partial/\partial y)$$

$$= i^2\hbar^2 (y\,\partial/\partial z\, z\,\partial/\partial x - y\,\partial/\partial z\, x\,\partial/\partial z - z\,\delta/\partial y\, z\,\delta/\partial x - z\,\delta/\partial y\, x\,\delta/\partial z) - i^2\hbar^2 (x\,\delta/\delta z\, y\,\delta/\delta z - x\,\delta/\delta z\, z\,\delta/\delta y - z\,\partial/\partial x\, y\,\partial/\partial z + z\,\delta/\partial x\, z\,\partial/\partial y)$$

$$= -\hbar^2 (y\,\delta/\delta x - x\,\delta/\delta y)$$

$$= i\hbar\{i\hbar(-x\,\delta/\delta y + y\,\delta/\delta x)\}$$

$$= i\hbar L_z$$

অনুরূপভাবে,

$$[L_x, L_z] = -i\hbar L_y$$

$$[L_z, L_y] = -i\hbar L_x$$

tricks
↓
$x \to y \to z \to x$

প্র Prove that ① $[L_x, y] = i\hbar z$ ② $[L_y, x] = -i\hbar z$

→ আমরা জানি,

$$L_x = -i\hbar(y\, \partial/\partial z - z\, \partial/\partial y)$$

$$\therefore [L_x, y] = (L_x y - y L_x)$$

$$= -i\hbar(y\, \partial/\partial z - z\, \partial/\partial y)\cdot y + y \cdot i\hbar\,(y\, \partial/\partial z - z\, \partial/\partial y)$$

$$= i\hbar z \frac{\partial y}{\partial y} + i\hbar\, y^2\, \partial/\partial z - yz\, \partial/\partial y$$

$$= i\hbar z \cdot 1 + i\hbar y^2(0) - i\hbar y(z)\cdot 0$$

$$= i\hbar z$$

অনুরূপভাবে,

$$[L_x, x] = 0, \quad [L_y, y] = 0, \quad [L_z, z] = 0.$$

$$[L_y, z] = i\hbar x, \quad [L_y, x] = -i\hbar z$$

প্র প্রমাণ কর যে, L^2, L এর z উপাংশের সাথে বা কোনো উপাংশের সাথে বিনিময় করে ।

→ $$\therefore [L^2, L_z] = L^2 L_z - L_z L^2$$

$$= (L_x^2 + L_y^2 + L_z^2)\cdot L_z - L_z(L_x^2 + L_y^2 + L_z^2)$$

$$= L_x^2 L_z + L_y^2 L_z + \cancel{L_z^2 L_z} - L_z L_x^2 - L_z L_y^2 - \cancel{L_z L_z^2}$$

$$= L_x L_x L_z - L_x L_z L_x + L_y L_y L_z - L_y L_z L_y$$

$$- L_z L_x L_x + L_x L_z L_x - L_z L_y L_y + L_y L_z L_y$$

$= L_x[L_x, L_z] + [L_x, L_z]L_x + L_y[L_y, L_z] + [L_y, L_z]L_y$

$= L_x(-i\hbar L_y) + (-i\hbar L_y)L_x + L_y(i\hbar L_x) + (i\hbar L_x)L_y$

$= 0$

একইভাবে

$[L^2, L_y] = 0, \quad [L^2, L_z] = 0$

$\therefore [L^2, L] = i[L^2, L_x] + j[L^2, L_y] + k[L^2, L_z]$

$= 0$

(Proved)

প্র Prove that $[J_x, J_y] = i\hbar J_z$।

→ এখানে, $J_x = L_x$, $J_y = L_y$, $J_z = L_z$

[বইয়ে দেখো]

প্র Prove that $J \times J = i\hbar J$

$$J \times J = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ J_x & J_y & J_z \\ J_x & J_y & J_z \end{vmatrix}$$

$J_+ = J_x + iJ_y$

$J_- = J_x - iJ_y$

$L_+ = L_x + iL_y$

$L_- = L_x - iL_y$

$= \hat{i}(J_y J_z - J_z J_y) - \hat{j}(J_x J_z - J_z J_x) + \hat{k}(J_x J_y - J_y J_x)$

$= \hat{i}[J_y, J_z] - \hat{j}[J_x, J_z] + \hat{k}[J_x, J_y]$

$= i(i\hbar J_x) - j(-i\hbar J_y) + k(i\hbar J_z)$

$= i\hbar\{iJ_x + jJ_y + kJ_z\}$

$= i\hbar J$

যদি $\hbar = 1$ হয়

$J \times J = iJ$

(Proved)