

# TỔ HỢP LẬP: Bài toán tính số nghiệm tự nhiên của phương trình n biến

**Bài toán 1: Tính số nghiệm tự nhiên của phương trình  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$  (1)**

*Phân tích:*

- Cho tập  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$
- Cần chọn k phần tử từ tập hợp A
- Gọi  $x_i$  là số phần tử  $a_i$  được chọn

$$\rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$$

-  $x_i \in \mathbb{N}$  có thể lớn hơn 1  $\rightarrow$  phần tử  $a_i$  có thể được lặp lại. **Mỗi nghiệm của (1)  $\equiv$  một cách chọn k phần tử trong tập n phần tử  $\equiv$  một tổ hợp lặp chập k của n phần tử**



Số nghiệm tự nhiên của (1) =  $\diamond\diamond\diamond\diamond\diamond = \diamond\diamond\diamond\diamond + \diamond\diamond - \diamond\diamond$

**TỔ HỢP LẶP:** Bài toán tính số nghiệm tự nhiên của phương trình n biến

**Bài toán 1:** Tính số nghiệm tự nhiên của phương trình  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$  (1)

*Ví dụ 1.1:* Tính số nghiệm tự nhiên của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20 \quad (1.1)$$

*Giải:*  $n = 5; k = 20$ .

Mỗi nghiệm của (1.1) là một tổ hợp lặp chập 20 của 5 phần tử. Số

$$\text{nghiệm tự nhiên của (1.1)} = \diamond\diamond\diamond\diamond\diamond = \diamond\diamond\diamond\diamond + \diamond\diamond - \diamond\diamond$$

$$\begin{array}{cccc} \diamond & \diamond & \diamond & \diamond \\ & & & = \diamond & \diamond & \diamond & \diamond & \diamond & \diamond \\ & & & & & & & \diamond & \diamond & \diamond & \diamond \\ & & & & & & & & & \diamond & \diamond & \diamond & \diamond \end{array} = 10626$$

## TỔ HỢP LẶP: Bài toán tính số nghiệm tự nhiên của phương trình n biến

**Bài toán 1: Tính số nghiệm tự nhiên của phương trình**  
**trình  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$  (1)**

***Ví dụ 1.2:*** Tính số nghiệm tự nhiên của phương trình  
 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 5$  (1.2)

***Giải:***  $n = 8; k = 5$ .

Mỗi nghiệm của (1.2) là một tổ hợp lặp chập 5 của 8 phần tử  $\diamond \diamond =$



Số nghiệm tự nhiên của  $x_1 + x_2 = 792$

$$(1.2) = \binom{792+2-1}{2-1} =$$

$$\binom{792+2-1}{2-1} + \binom{792+2-1}{2-1} - \binom{792+2-1}{2-1}$$

## TỔ HỢP LẶP: Bài toán tính số nghiệm tự nhiên của phương trình n biến

**Bài toán 1: Tính số nghiệm tự nhiên của phương trình**  
 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k \quad (1)$

**Ví dụ 1.3:** Tính số nghiệm tự nhiên của phương trình

20

?

$$x_1 + x_2 = 1$$

*Giải:*  $n = 20; k = 50.$

$$\binom{50+20-1}{20-1} = 50 \quad (1.3)$$

Mỗi nghiệm của (1.3) là một tổ hợp lặp chập 50 của 20 phần tử

A diagram illustrating the decomposition of a 4-qubit gate into two 2-qubit gates and two 1-qubit gates. On the left, four blue diamonds, each containing a question mark, are arranged in a horizontal row. This is followed by an equals sign. To the right of the equals sign, the first two diamonds are larger than the others. The remaining two diamonds are smaller and positioned below the larger ones, forming a staggered arrangement.

[illegible]

Số nghiệm tự nhiên của (1.3) =  $\diamond \diamond \diamond \diamond \diamond \diamond$

**Bài toán 2: Tính số nghiệm tự nhiên của phương trình  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$ , với  $x_i \geq d > 0$  (2)**

**Phân tích:**

- Giả sử  $x_1 \geq d$
- Đặt  $X_1 = x_1 - d \geq 0$
- (2)  $\Leftrightarrow X_1 + d + x_2 + \dots + x_n = k \Leftrightarrow X_1 + x_2 + \dots + x_n = k - d$  (1) (1) là bài

toán chuẩn có số nghiệm =  $\diamond\diamond\diamond\diamond\diamond\diamond\diamond\diamond$

Số nghiệm tự nhiên của (2) = Số nghiệm tự nhiên của (1)

$$\begin{array}{c} \diamond\diamond - \diamond\diamond \\ \diamond\diamond - \diamond\diamond \\ \diamond\diamond\diamond\diamond - \diamond\diamond\diamond\diamond \end{array} = \diamond\diamond\diamond\diamond + \diamond\diamond - \diamond\diamond - \diamond\diamond$$

**TỔ HỢP LẬP:** Bài toán tính số nghiệm tự nhiên của phương trình n biến

**Bài toán 2:** Tính số nghiệm tự nhiên của phương trình  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$ , với  $x_i \geq d > 0$  (2)

*Ví dụ 2.1:* Tính số nghiệm tự nhiên của phương trình



**Ví dụ 2.2:** Tính số nghiệm tự nhiên của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 5, x_2 \geq 1, x_4 \geq 1 \quad (2.2)$$

**Giải:** - Đặt  $X_2 = x_2 - 1 \geq 0, X_4 = x_4 - 1 \geq 0$

- (2.2)  $\Leftrightarrow x_1 + \mathbf{X_2+1} + x_3 + \mathbf{X_4+1} + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 5 \Leftrightarrow x_1 + \mathbf{X_2} + x_3 + \mathbf{X_4} + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 3 \quad (1)$

Số nghiệm tự nhiên của (2.2) = Số nghiệm tự nhiên của (1)

$$= \binom{5}{1} \binom{4}{1} = \binom{5}{1} \binom{4}{1} + \binom{5}{2} \binom{3}{1} - \binom{5}{3} \binom{2}{1}$$

$$\binom{5}{2} \binom{3}{1} = 120$$

**TỔ HỢP LẬP:** Bài toán tính số nghiệm tự nhiên của phương trình n biến

**Bài toán 2:** Tính số nghiệm tự nhiên của phương trình  $x_1 +$

$x_2 + \dots + x_n = k$ , với  $x_i \geq d > 0 \quad (2)$



## Ví dụ 2.3: Tính số nghiệm tự nhiên của phương trình

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + \dots + x_{20} = 100 \quad (2.3) \\ & x_i \geq 2, \quad i=1, 2, \dots, 20 \end{aligned}$$

Giải: - Đặt  $X_i = x_i - 2 \geq 0, i=1..n$

$$2.3 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_{20} = 100 \Leftrightarrow (x_1 + 2) + (x_2 + 2) + \dots + (x_{20} + 2) = 140 \Leftrightarrow X_1 + X_2 + \dots + X_{20} = 100 \quad (1)$$

Số nghiệm tự nhiên của (2.3) = Số nghiệm tự nhiên của (1)

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + \dots + x_{20} = 100 \\ & x_i \geq 2, \quad i=1, 2, \dots, 20 \end{aligned}$$

**TỔ HỢP LẬP:** Bài toán tính số nghiệm tự nhiên của phương trình n biến

## Bài toán 2: Tính số nghiệm tự nhiên của phương trình

$x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$ , với  $x_i \geq d > 0$  (2) Ví dụ 2.4: Tính số nghiệm tự nhiên của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20, x_1 \geq 3 \text{ hoặc } x_2 \geq 5 \quad (2.4) \text{ Giải}$$

- Gọi A là tập nghiệm của (2.4)
  - Gọi B là tập nghiệm của (2') :  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20, x_1 \geq 3$  (2')
  - Gọi C là tập nghiệm của (2'') :  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20, x_2 \geq 5$  (2'')
  - Gọi D là tập nghiệm của (2''') :  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20, x_1 \geq 3, x_2 \geq 5$  (2''')  $\rightarrow A = B \cup C$
- $$\rightarrow |A| = |B| + |C| - |B \cap C|$$

Số nghiệm của (2.4) = Số nghiệm của (2') + Số nghiệm của (2'')

$$\begin{aligned} - \text{Số nghiệm của (2''')} &= \begin{array}{c} \text{? ? ? ?} \\ \text{? ? ? ?} \end{array} + \begin{array}{c} \text{? ? ? ?} \\ \text{? ? ? ?} \end{array} - \\ &\quad \begin{array}{c} \text{? ? ? ?} \\ \text{? ? ? ?} \end{array} = 8041 \end{aligned}$$

# TỔ HỢP LẬP: Bài toán tính số nghiệm tự nhiên của phương trình n biến

**Bài toán 3: Tính số nghiệm tự nhiên của phương trình  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$  (1),  $x_i \leq d$ ,  $d \in \mathbb{N}$  (3)**

*Phân tích:*

- Giả sử  $x_1 \leq d$ ,  $d \in \mathbb{N}$
- Gọi A là tập nghiệm của (1):  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$  (1) - Gọi B là tập nghiệm của (2) :  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$ ,  $x_1 \geq d+1$  (2) - Gọi C là tập nghiệm của (3)

$$A = B \cup C, B \cap C = \emptyset \Rightarrow |A| = |B| + |C| \Rightarrow |C| = |A| - |B|$$

**Số nghiệm tự nhiên của (3) = Số nghiệm tự nhiên của (1)  
– Số nghiệm tự nhiên của (2)**

$$= \begin{array}{c} \diamond \diamond \\ \diamond \diamond \end{array} - \begin{array}{c} \diamond \diamond \\ \diamond \diamond \end{array} - \begin{array}{c} \diamond \diamond \\ \diamond \diamond \end{array} - \begin{array}{c} \diamond \diamond \\ \diamond \diamond \end{array}$$

## TỔ HỢP LẬP: Bài toán tính số nghiệm tự nhiên của phương trình n biến

**Bài toán 3: Tính số nghiệm tự nhiên của phương trình  $x_1 + x_2$**

$$+ \dots + x_n = k, x_i \leq d, d \in \mathbb{N} \quad (3)$$

**Ví dụ 3.1:** Tính số nghiệm tự nhiên của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20, x_1 \leq 4 \quad (3.1) \text{ Giải}$$

- Gọi A là tập nghiệm của (1):  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20 \quad (1) \quad |A| =$

$$\begin{array}{c} \diamond \diamond \\ \diamond \diamond \end{array} = \begin{array}{c} \diamond \diamond \\ \diamond \diamond \end{array} + \begin{array}{c} \diamond \diamond \\ \diamond \diamond \end{array} - \begin{array}{c} \diamond \diamond \\ \diamond \diamond \end{array}$$

- Gọi B là tập nghiệm của (2) :  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20, x_1 \geq 5 \quad (2) \quad |B|$

$$= \begin{array}{c} \diamond \diamond \\ \diamond \diamond \end{array} = \begin{array}{c} \diamond \diamond \\ \diamond \diamond \end{array} + \begin{array}{c} \diamond \diamond \\ \diamond \diamond \end{array} - \begin{array}{c} \diamond \diamond \\ \diamond \diamond \end{array}$$

- Gọi C là tập nghiệm của (3.1):  $|C| = |A| - |B|$

[illegible]

## Bài toán 3: Tính số nghiệm tự nhiên của phương trình

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = k, x_{i_0} \leq d, d \in \mathbb{N} \quad (3)$$

### Ví dụ 3.2: Tính số nghiệm tự nhiên của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20, x_1 \leq 2, x_2 \leq 4 \quad (3.2) \text{Giải}$$

- Gọi A là tập nghiệm của (1):  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$  (1)  $|A| =$

$$\begin{array}{c} \diamond \diamond \diamond \diamond \\ \diamond \diamond \diamond \diamond \end{array} = \begin{array}{c} \diamond \diamond \diamond \diamond \diamond \diamond \\ \diamond \diamond \diamond \diamond \diamond \diamond \end{array} + \begin{array}{c} \diamond \diamond \diamond \diamond \diamond \diamond \\ \diamond \diamond \diamond \diamond \diamond \diamond \end{array} - \begin{array}{c} \diamond \diamond \diamond \diamond \diamond \diamond \\ \diamond \diamond \diamond \diamond \diamond \diamond \end{array}$$

- Gọi B là tập nghiệm của (2) :  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$  ,  $x_1 \geq 3$  hoặc  $x_2 \geq 5$  (2.4)

$$|B| = \binom{17}{4} + \binom{15}{4} - \binom{12}{4}$$

- Gọi C'' là tập nghiệm của (3.2):  $|C| = |A| - |B|$

$$\text{Số nghiệm tự nhiên của (3.2)} = \binom{17}{4} - \binom{15}{4} - \binom{12}{4} + \binom{9}{4} = 2585$$

**TỔ HỢP LẬP:** Bài toán tính số nghiệm tự nhiên của phương trình n biến

**Bài toán 4: Tính số nghiệm tự nhiên của bất phương trình**

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq k \quad (4)$$

*Phân tích:*

- Đặt  $x_{n+1} = k - (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \geq 0$

$$\rightarrow (4) \Leftrightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1} = k \quad (1)$$

**Số nghiệm của (4) = Số nghiệm của (1)**

$$\begin{array}{c} \diamond \diamond \\ \diamond \diamond = \diamond \diamond \diamond \diamond + \diamond \diamond \end{array}$$

$$\text{Số nghiệm tự nhiên của (4)} = \diamond \diamond \diamond \diamond + \diamond \diamond$$

**TỔ HỢP LẬP:** Bài toán tính số nghiệm tự nhiên của phương trình n biến

**Bài toán 4: Tính số nghiệm tự nhiên của bất phương trình**

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq k \quad (4)$$

**Ví dụ 4.1:** Tính số nghiệm tự nhiên của bất phương trình  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 20 \quad (4.1)$

*Giải:*

- Đặt  $x_6 = 20 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) \geq 0$

$\rightarrow (4.1) \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 20 \quad (1)$

Số nghiệm tự nhiên của (4.1) = Số nghiệm tự nhiên của (1)

$\diamond\diamond\diamond\diamond = 53130$

$= \diamond\diamond\diamond\diamond\diamond\diamond = \diamond\diamond\diamond\diamond\diamond\diamond$

**TỔ HỢP LẬP:** Bài toán tính số nghiệm tự nhiên của phương trình n biến

**Bài toán 4:** Tính số nghiệm tự nhiên của bất phương trình

$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq k \quad (4)$

**Ví dụ 4.2:** Tính số nghiệm tự nhiên của bất phương trình  $x_1 + x_2$





sau:

1.  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$  với  $6 \leq x_1 \leq 15, x_2 \leq 6$
2.  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$  với  $x_1 \leq 10, 3 \leq x_2 \leq 12$
3.  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 22$  với  $x_1 \geq 5, 5 \leq x_4 \leq 14$
4.  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$  với  $x_3 \geq 4, x_4 \leq 13, x_5 \leq 12$
5.  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 21$  với  $x_1 \leq 3$  và  $1 \leq x_2 \leq 4$  và  $x_3 \geq 15$
6.  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 20$  với  $x_1 \geq 4$
7.  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 20$  với  $x_1 \geq 3, x_2 \leq 6$
8.  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 20$  với  $x_1 \geq 2, 1 \leq x_2 \leq 7$

Lập chương trình để tính số nghiệm tự nhiên của phương trình n biến  
**TỔ HỢP LẬP:** Bài toán tính số nghiệm tự nhiên của phương trình n

**biến** Lập chương trình để tính số nghiệm tự nhiên của phương trình n biến