ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГАОУ ВО НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Факультет компьютерных наук
Образовательная программа «Прикладная математика и информатика»

УДК:

Отчет об исследовательском проекте

на тему: Прогнозирование цен акций с помощью моделей стохастической волатильности

Выполнил:
Студент группы БПМИ229 Доан Тай Ле Минь
ФИО

17.09.2024
Дата

Принял:
Руководитель проекта Касьянова Ксения Алексеевна
ФИО

Аспирант
Должность, ученое звание

Международная лаборатория стохастического анализа и его приложений, НИУ ВШЭ
Место работы (Компания или подразделение НИУ ВШЭ)

Москва 2024

Содержание

1 Введение

Модели стохастические волатильности играют важную роль в современной финансовой теории и практике. Эти модели помогают более точно оценивать рыночные риски, оценивать стоимость опционов и оптимизировать инвестиционные портфели. Существует множество различных подходов для оценки стоимости опционов, среди них биномиальные деревья, метод Монте-Карло, метод конечных разностей, а так же аналитические, такие как модель модель Блэка-Шоулза. Основной акцент курсовой работы делается на последнию модель, и модели стохастической волатильности рассматриваются как лучшая альтернатива, решающая часть фундаментальных проблем.

2 Опционы

Опционы представляют собой финансовые инструменты, которые предоставляют инвесторам право (не обязательство в отличии от фьючерсов), купить или продать базовый актив по заранее установленной цене в определенный момент или период времени в будущем. Эти ценные бумаги играют важную роль в мире финансов, предоставляя широкие возможности для хеджирования рисков, спекуляций и улучшения инвестиционного портфеля.

Основные виды опционов:

- - Кол-опцион (Call-Option): Инструмент, предоставляющий купить базовый актив по заранее заданной стоимости (страйк-цена).
- - Пут-опцион (Put-Option): Инструмент, предоставляющий право продать базовый актив по заранее заданной стоимости.

Момент времени:

- - Европейский опцион: дата реализации права фиксированна.
- - Американский опцион: воспользоваться правом можно в любой момент времени до экспирации опциона.

Стандартные параметры опционов:

- - Цена опциона: Стоимость, которую покупатель платит продавцу за право владения опционом.
- - Страйк-цена: Цена, по которой базовый актив может быть куплен или продан до экспирации.
- - Срок действия: Конечная дата, до которой опцион может быть исполнен.

Опционы могут использоваться, например, для уменьшения рисков, связанных с изменением стоимости базового актива. Например, предприятие, занимающееся экспортом, может использовать пут-опционы для защиты от падения курса валюты.

Одной из важных задач является оценка справедливой стоимости опциона. Модель Блэка-Шоулза, является одним из самых известных и широко используемых методов для оценки цены опционов. Эта модель была разработана и представлена Фишером Блэком и Мироном Шоулзом в 1973.

Модель Блэка-Шоулза предоставляет метод для вычисления теоретической стоимости европейских разновидностей опционов (то есть опционов, которые можно исполнить только в момент истечения) без арбитража. Основные предположения модели:

- Цены активов следуют логнормальному распределению: Предполагается, что цены базового актива (например, акций) следуют геометрическому броуновскому движению, что означает, что их логарифм распределен нормально.
- Константный безрисковый процент: Ставка безрискового процента постоянна и известна.
- Константные волатильность и отсутствие дивидендов: Волатильность (показатель изменчивости или разброса доходностей финансового актива в течение определенного периода времени) постоянна и известна. Также предполагается, что базовый актив не выплачивает дивиденды.
- Нет арбитража: То есть нет возможности без вложений создать безрисковую прибыль.

3 Модель Блэка-Шоулза

Формула Блэка-Шоулза для цены европейского колл-опциона выглядит следующим образом:

$$C = Se^{-rT}N(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2)$$

Для пут-опциона формула следующая:

$$P = Xe^{-rT}N(-d_2) - Se^{-rT}N(-d_1)$$

- C — Цена колл-опциона,
- P — Цена пут-опциона,
- S — Цена базового актива,
- X — Страйк-цена опциона,
- r — Безрисковая процентная ставка,
- T — Время до истечения опциона,
- $N(d)$ — Функция распределения для стандартного нормального распределения,
- $$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{X}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$$
- $$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

где: σ — Волатильность базового актива.

Модель Блэка-Шоулза используется для оценки теоретической стоимости опционов и других финансовых деривативов, однако часть предположений модели далеки от реального мира, в частности распределение, отсутствие дивидендов и постоянная волатильность. Решение третьей проблемы дают модели стохастической волатильности.

4 Волатильность

С помощью модели Блэка-Шоулза при всех известных параметрах легко бинарным поиском посчитать волатильность, это значение называют "подразумеваемая волатильность". Рассчитаем для колл-опционов на примере Apple.

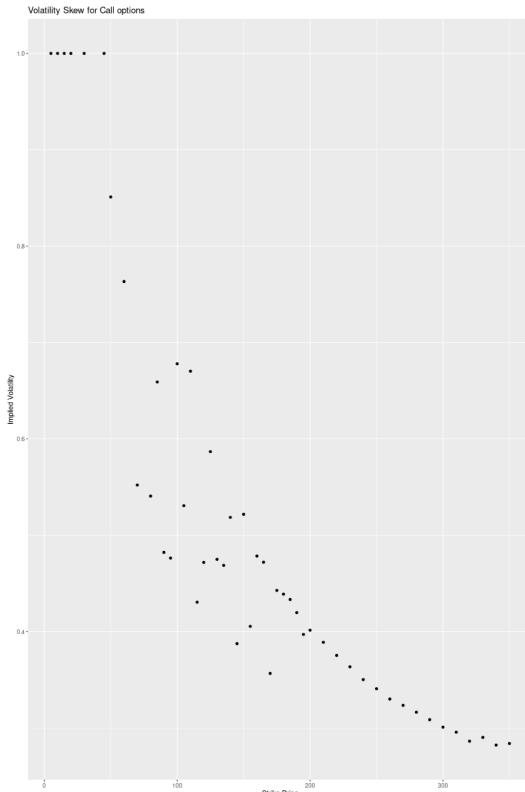


Рис. 1: Зависимость волатильности от цены страйк

Код построения на R:

```
callbs <- function(S, K, R, time, sig, q = 0) {
  d1 <- (log(S / K) + (R + q + sig^2 / 2) * time) / (sig * sqrt(time))
  d2 <- d1 - sig * sqrt(time)
  c <- S * exp(-q * time) * pnorm(d1) - K * exp(-R * time) * pnorm(d2)
  return(max(0, c))
}
suppressPackageStartupMessages(library(quantmod))
suppressMessages(suppressWarnings(getSymbols("AAPL", from = Sys.Date() - 3, auto.assign = TRUE)))
S <- as.numeric(AAPL$AAPL.Close)[1]

suppressPackageStartupMessages(library(quantmod))
AAPL.OPTS <- getOptionChain("AAPL", NULL)
AAPL.OPTS <- AAPL.OPTS[[length(AAPL.OPTS)]]

call <- AAPL.OPTS$calls
C <- call$Last
K <- call$Strike
R <- 0.0013
# US treasury bill 2 year rate= 0.13%

year <- substring(exp_date, 1, 4)
month <- substring(exp_date, 6, 7)
day <- substring(exp_date, 9, 10)
date <- paste0(year, "-", month, "-", day)
time <- as.numeric(difftime(date, Sys.Date(), units = "days") / 365)

```

```r
sig_impl <- function(S, K, R, T, C) {
  High <- 1
  Low <- 0
  while ((High - Low) > 0.000001) {
    if (callbs(S, K, R, T, (High + Low) / 2) > C) {
      High <- (High + Low) / 2
    } else {
      Low <- (High + Low) / 2
    }
  }
  return((High + Low) / 2)
}

Impl_Vol <- c()
for (i in 1:nrow(call)) {
  Impl_Vol[i] <- sig_impl(S, K = call$Strike[i], R, T, C = call$Last[i])
}

df_c <- as.data.frame(cbind(call$Strike, Impl_Vol))
names(df_c)[1] <- "Strike"
suppressPackageStartupMessages(library(ggplot2))
g1 <- ggplot(data = df_c) +
  geom_point(aes(x = Strike, y = Impl_Vol)) +
  xlab("Strike Price") +
  ylab("Implied Volatility") +
  ggtitle("Volatility Skew for Call options")

library(gridExtra)
grid.arrange(g1, ncol = 1)
```

Отчётливо видна сильная зависимость – волатильность понижается, если повышается цена страйк.

5 Модели стохастической волатильности

В реальном мире волатильность играет важную роль в оценке стоимостей, при этом её изменение достаточно значительно для необходимости учёта в модели. Отойдём от идеи постоянной волатильности в стандартной модели и предположим, что это случайный процесс. Общий вид модели описывает система дифференциальных уравнений:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^S$$
$$dv_t = \alpha(S_t, v_t, t)dt + \sigma\beta(S_t, v_t, t)\sqrt{v_t} dW_t^v$$

- μ — средняя норма доходности актива,
- v_t — мгновенная волатильность (меняется со временем),
- α, β — некие функции,
- σ — волатильность волатильности,
- W_t^S и W_t^v — два взаимосвязанных броуновских процесса с корреляцией ρ.

5.1 Модель Хестона

Одна из наиболее известных и популярных моделей стохастической волатильности, предложенная Хестоном Стивеном в 1993 году и позволяющая более точно описывать динамику цен финансовых активов и оценивать стоимость опционов с учетом изменяющейся во времени волатильности. В отличие от базовой модели Блэка-Шоулза, где волатильность считается константой, модель Хестона рассматривает волатильность как случайный процесс и описывается следующими стохастическими дифференциальными уравнениями:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^S$$

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t} dW_t^v$$

- μ — средняя норма доходности актива,

- v_t — мгновенная волатильность (меняется со временем),
- κ — скорость возврата к среднему,
- θ — долгосрочное среднее значение волатильности,
- σ — волатильность волатильности,
- W_t^S и W_t^v — два взаимосвязанных броуновских процесса с корреляцией ρ.

Эта модель получается при взятии $= \kappa(\theta - v_t)$ и $\beta = 1$.

Данная модель имеет ряд преимуществ по сравнению с базовой, в частности она позволяет учитывать изменяющуюся волатильность, что делает её более реалистичной по сравнению с моделью Блэка-Шоулза, а так же учитывает асимметрию и толстые хвосты в распределении доходностей, что характерно для реальных финансовых рынков.

Рассмотрим ситуацию, когда цена страйк ниже текущей стоимости базового актива.

```
target <- 192.40 #
v0 <- 0.2
vT <- 0.2
rho <- 0.5
k <- 0.2
sig <- 0.05

library(NMOF)
x <- c(v0, vT, rho, k, sig)
optim_func <- function(x) {
    v0 <- x[1]
    vT <- x[2]
    rho <- x[3]
    k <- x[4]
    sig <- x[5]
    mse <- (callHestoncf(315.01, 120, 2.095776, 0.0013, 0.0106, v0, vT, rho, k, sig) - target)^2
    return(mse)
}

x <- optim(x, optim_func)
v0 <- x[1]
vT <- x[2]
rho <- x[3]
k <- x[4]
sig <- x[5]

mat <- matrix(nrow = 5, ncol = 3)
mat[1, ] <- c("v0", "current variance", 0.20940146)
mat[2, ] <- c("vT", "long-run variance", 0.21366057)
mat[3, ] <- c("rho", "correlation between spot and variance", 0.50481539)
mat[4, ] <- c("k", "speed of mean-reversion", 0.21543664)
mat[5, ] <- c("sigma", "volatility of variance", 0.04229108)
df <- as.data.frame(mat)
colnames(df) <- c("Parameters", "Meaning", "Value")
print(df)
```

Подбираем оптимальные параметры

```
> optim(x, optim_func)
$par
[1] 0.20672451 0.22078271 0.50266063 0.22241348 0.03788036
```

Рис. 2:

```
  Parameters                                  Meaning      Value
1         v0                         current variance 0.20672451
2         vT                        long-run variance 0.22078271
3        rho correlation between spot and variance 0.50266063
4          k                   speed of mean-reversion 0.22241348
5      sigma                   volatility of variance 0.03788036
```

Рис. 3: Оптимальные параметры

И считаем оценку стоимости моделью Хестона

```
callHestoncf(311.41 ,120,2.095776, 0.0013,0.0106,0.20940146, 0.21366057, 0.50481539, 0.21543664,
    0.04229108)
```

```
> callHestoncf(311.41 ,120,2.095776, 0.0013,0.0106,0.20672451, 0.22078271, 0.50266063, 0.22241348, 0.03788036)
[1] 189.0193
```

Рис. 4: Оценка модели Хестона

И аналогично посчитаем ситуацию, когда цена страйк превышает текущую стоимость базового актива.

```
> callHestoncf(311.41 ,485,2.095776, 0.0013,0.0106,0.03401212, 0.19923177, 0.54979724, 0.30583280, 0.08600963)
[1] 11.24569
```

Рис. 5: Оценка модели Хестона

Теперь возьмём выборку большего размера и построим графики для сравнения настоящей цены и оценки моделью

```
AAPL.OPTS <- getOptionChain("AAPL", NULL)
AAPL.OPTS <- AAPL.OPTS[[length(AAPL.OPTS)]]

call <- AAPL.OPTS$calls
S <- as.numeric(AAPL$AAPL.Close)[1]
C <- call$Last
K <- call$Strike
R <- 0.0013
exp_date <- call$Expiration[1]
# US treasury bill 2 year rate= 0.13%

# Start approximation
v0 <- 0.2
vT <- 0.2
rho <- 0.5
k <- 0.2
sig <- 0.05

year <- substring(exp_date, 1, 4)
month <- substring(exp_date, 6, 7)
```

```r
day <- substring(exp_date, 9, 10)
date <- paste0(year, "-", month, "-", day)
time <- as.numeric(difftime(date, Sys.Date(), units = "days") / 365)


library(NMOF)
x <- c(v0, vT, rho, k, sig)
optim_func <- function(x) {
    v0 <- x[1]
    vT <- x[2]
    rho <- x[3]
    k <- x[4]
    sig <- x[5]
    mse <- (callHestoncf(
        S, K[1], time, R, 0.0106,
        v0, vT, rho, k, sig
    ) - C[1])^2
    return(mse)
}

x <- optim(x, optim_func)$par # Optimizing parametrs by first option
v0 <- x[1]
vT <- x[2]
rho <- x[3]
k <- x[4]
sig <- x[5]

pred <- c()
for (i in 1:nrow(call)) {
    pred[i] <- callHestoncf(
        S, K[i], time, R, 0.0106,
        v0, vT, rho, k, sig
    )
}
```

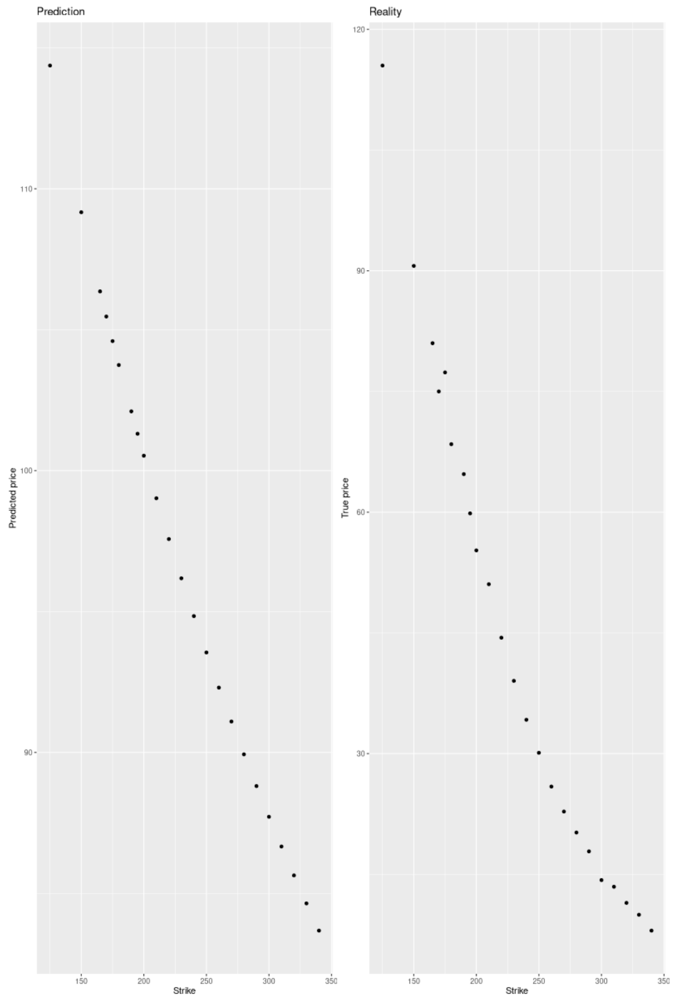


Рис. 6: Слева предсказанная цена, справа настоящая

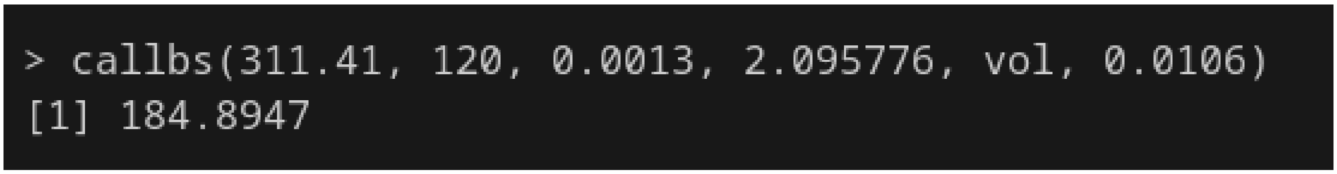
Модель показывает неплохие результаты даже при небольшом обучении гиперпараметров, однако для большей точности требуется больше подбора

5.2 Модель Блэка-Шоулза

Возьмём исторические данные волатильности и расчитаем цену опциона моделью Блэка-Шоулза.

Рассмотрим ситуацию, когда цена страйк ниже текущей стоимости базового актива.

```
AAPL2 <- getSymbols("AAPL", auto.assign = FALSE, from = Sys.Date() - 180)
ret <- diff(log(AAPL2$AAPL.Close))
ret[1] <- 0
vol <- sd(ret)
callbs(311.41, 120, 0.0013, 2.095776, vol, 0.0106)
```



```
> callbs(311.41, 120, 0.0013, 2.095776, vol, 0.0106)
[1] 184.8947
```

Рис. 7: Оценка модели Блэка-Шоулза

И аналогично посчитаем ситуацию, когда цена страйк превышает текущую стоимость базового актива.

```
> callbs(311.41, 485, 0.0013, 2.095776, vol, 0.0106)
[1] 0
```

Рис. 8: Оценка модели Блэка-Шоулза

Теперь возьмём выборку большего размера и построим графики для сравнения настоящей цены и оценки моделью

```
AAPL2 <- getSymbols("AAPL", auto.assign = FALSE, from = Sys.Date() - 180)
ret <- diff(log(AAPL2$AAPL.Close))
ret[1] <- 0
vol <- sd(ret)

AAPL.OPTS <- getOptionChain("AAPL", NULL)
AAPL.OPTS <- AAPL.OPTS[[length(AAPL.OPTS)]]

call <- AAPL.OPTS$calls
S <- as.numeric(AAPL$AAPL.Close)[1]
C <- call$Last
K <- call$Strike
R <- 0.0013
exp_date <- call$Expiration[1]
# US treasury bill 2 year rate= 0.13%

year <- substring(exp_date, 1, 4)
month <- substring(exp_date, 6, 7)
day <- substring(exp_date, 9, 10)
date <- paste0(year, "-", month, "-", day)
time <- as.numeric(difftime(date, Sys.Date(), units = "days") / 365)



pred <- c()
for (i in 1:nrow(call)) {
  pred[i] <- callbs(S, K[i], R, time, vol)
}
```

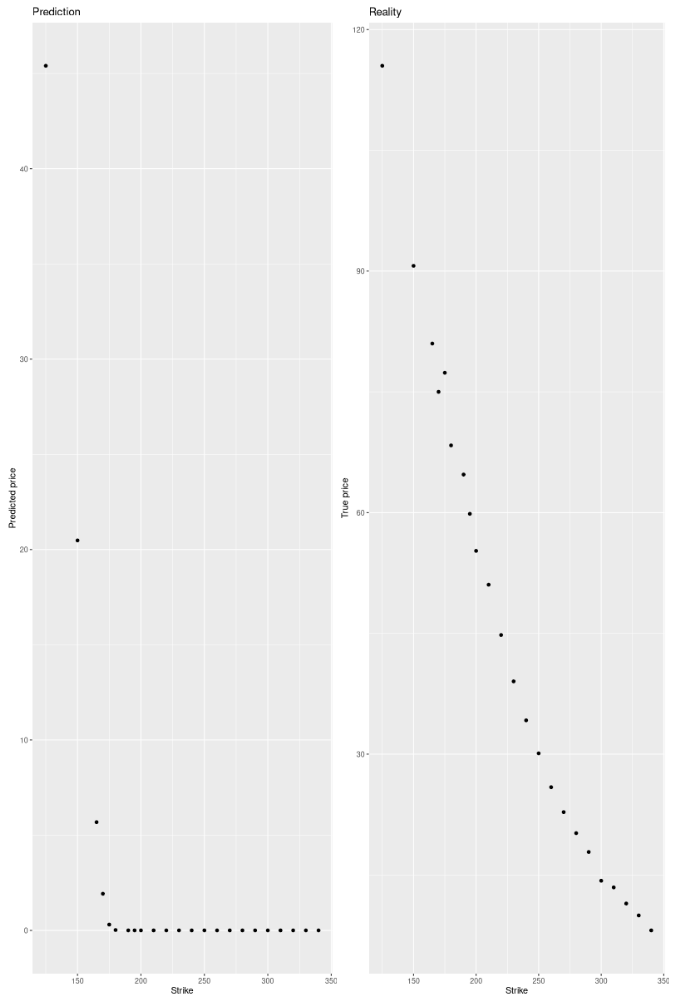


Рис. 9: Слева предсказанная цена, справа настоящая

Как видно, модель как минимум плохо обрабатывает случай out-of-money

5.3 Сравнение

Модель Хестона показывает значительно лучшие результаты, особенно в ситуации out-of-money, когда цена страйк выше текущей стоимости. Для конкретного опциона при оптимальных параметрах:

```
> print(df)
               Black-Scholes   Heston Market Quote
1 In-the-Money      184.8947 189.0193        192.4
2 Out-of-Money             0 11.24569         10.5
```

Рис. 10: Таблица результатов

6 Заключение

В данной курсовой работе проведен анализ проблем базовой модели Блэка-Шоулза, а так же решение одной из основных проблем моделями стохастической волатильности. В первую очередб была рассмотрена модель Хестона, показывающая значительно лучшие результаты, чем базовая модель при большей вычислительной сложности. Для дальнейшего изучения взяты более ранние модели Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity (GARCH), предложенные Боллерслевом в 1986 году. [2] [1]

Список литературы

[1] Volatility smile and stochastic volatility model. 2020. URL: `https://rpubs.com/CaesarLWY/StochVol`.

[2] Jadwiga Kostrzewska Maciej Kostrzewski. *Probabilistic electricity price forecasting with Bayesian stochastic volatility models.* 2019.