SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

HÀ NỘI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT

NĂM HỌC 2019 – 2020

Môn thi: MÔN TOÁN

Ngày thi 02 tháng 6 năm 2019

Thời gian làm bài: 120 phút.

Bài I. *(2,0 điểm)*

Cho hai biểu thức $A=\dfrac{4\left(\sqrt{x}+1\right)}{25-x}$ và $B=\left(\dfrac{15-\sqrt{x}}{x-25}+\dfrac{2}{\sqrt{x}+5}\right):\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5}$ với $x\ge 0; x\ne 25$.

1) Tìm giá trị của biểu thức A khi $x=9$.

2) Rút gọn biểu thức B.

3) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức $P=A.B$ đạt giá trị nguyên lớn nhât.

Bài II. *(2,5 điểm).*

1) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình :*

Hai đội công nhân cùng làm chung một công việc thì sau 15 ngày làm xong. Nếu đội thứ nhất làm riêng trong 3 ngày rồi dừng lại và đội thứ hai làm tiếp công việc đó trong 5 ngày thì cả hai đội hoàn thành được 25% công việc. Hỏi mỗi đội làm riêng thì bao nhiêu ngày mới hoàn thành xong công việc trên?

2) Một bồn nước inox có dạng một hình trụ với chiều cao $1,75\ m$ và diện tích đáy là $0,32\ m^2$. Hỏi bồn nước này đựng đầy được bao nhiêu mét khối nước ? (Bỏ qua bề dày của bồn nước).

Bài III. *(2,0 điểm)*

1) Giải phương trình: $x^4-7x^2-18=0$.

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(d): y=2mx-m^2+1$ và parabol $(P): y=x^2$

a) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt

b) Tìm tất cả giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2 thỏa mãn $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{-2}{x_1x_2}+1$.

Bài IV. *(3,0 điểm)*

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB<AC$) nội tiếp đường tròn (O). Hai đường cao BE và CF của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H.

1) Chứng minh bốn điểm B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh đường thẳng OA vuông góc với đường thẳng EF.

3) Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng BC. Đường thẳng AO cắt đường thẳng BC tại điểm I, đường thẳng EF cắt đường thẳng AH tại điểm P. Chứng minh tam giác APE đồng dạng với tam giác AIB và đường thẳng KH song song với đường thẳng IP.

Bài V. *(0,5 điểm)*

Cho biểu thức $P=a^4+b^4-ab$ với a,b là các số thực thỏa mãn $a^2+b^2+ab=3$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của P.

---HẾT---

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài I. *(2,0 điểm)*

Cho hai biểu thức $A=\dfrac{4\left(\sqrt{x}+1\right)}{25-x}$ và $B=\left(\dfrac{15-\sqrt{x}}{x-25}+\dfrac{2}{\sqrt{x}+5}\right):\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5}$ với $x\ge 0; x\ne 25$.

1) Tìm giá trị của biểu thức A khi $x=9$.
2) Rút gọn biểu thức B.
3) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức $P=A.B$ đạt giá trị nguyên lớn nhất.

Lời giải

1) Với $x=9$

Thay vào A ta có : $A=\dfrac{4\left(\sqrt{x}+1\right)}{25-x}=\dfrac{4\left(\sqrt{9}+1\right)}{25-9}=\dfrac{4.(3+1)}{16}=1.$

2) Rút gọn biểu thức B.

Với $x\ge 0$, $x\ne 25$, ta có

$$B=\left(\frac{15-\sqrt{x}}{x-25}+\frac{2}{\sqrt{x}+5}\right):\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5}.$$

$$B=\left[\frac{15-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+5\right)\left(\sqrt{x}-5\right)}+\frac{2}{\sqrt{x}+5}\right]:\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5}.$$

$$B=\frac{15-\sqrt{x}+2\left(\sqrt{x}-5\right)}{\left(\sqrt{x}+5\right)\left(\sqrt{x}-5\right)}:\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5}.$$

$$B=\frac{15-\sqrt{x}+2\sqrt{x}-10}{\left(\sqrt{x}+5\right)\left(\sqrt{x}-5\right)}:\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5}.$$

$$B=\frac{\sqrt{x}+5}{\left(\sqrt{x}+5\right)\left(\sqrt{x}-5\right)}\cdot\frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+1}.$$

$$B=\frac{1}{\sqrt{x}+1}.$$

3) Tìm tất cả giá trị nguyên của x để biểu thức $P=A.B$ đạt giá giá trị nguyên lớn nhất.

Ta có $P=A.B=\dfrac{4\left(\sqrt{x}+1\right)}{25-x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{4}{25-x}$.

Để P nhận giá trị nguyên khi $x\in\mathbf{Z}$ thì $4\,\vdots\,(25-x)$ hay $25-x\in U_{(4)}=\{-4;-2;-1;1;2;4\}$.

Khi đó, ta có bảng giá trị sau:

$25-x$	-4	-2	-1	1	2	4
x	29	27	26	24	23	21
$P=A.B$	-1	-2	-4	4	2	1

Đánh giá	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn

Do P đạt giá trị nguyên lớn nhất nên ta có $P=4$. Khi đó giá trị cần tìm của x là $x=24$.

Bài II. *(2,5 điểm).*

1) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình :*
Hai đội công nhân cùng làm chung một công việc thì sau 15 ngày làm xong. Nếu đội thứ nhất làm riêng trong 3 ngày rồi dừng lại và đội thứ hai làm tiếp công việc đó trong 5 ngày thì cả hai đội hoàn thành được 25% công việc. Hỏi mỗi đội làm riêng thì bao nhiêu ngày mới hoàn thành xong công việc trên.
2) Một bồn nước inox có dạng một hình trụ với chiều cao $1,75\ m$ và diện tích đáy là $0,32\ m^2$. Hỏi bồn nước này đựng đầy được bao nhiêu mét khối nước ? (Bỏ qua bề dày của bồn nước).

Lời giải

1) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình :*
- Gọi thời gian để đội thứ nhất và đội thứ hai làm riêng một mình hoàn thành xong công việc lần lượt là x và y $(x>15, y>15)$, đơn vị (ngày).

  Một ngày đội thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (công việc).

  Một ngày đội thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ (công việc).
- Vì hai đội cùng làm trong 15 ngày thì hoàn thành xong công việc. Như vậy trong một ngày cả hai đội làm được $\frac{1}{15}$ (công việc). Suy ra, ta có phương trình : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{15}$ (1).
- Ba ngày đội đội thứ nhất làm được $\frac{3}{x}$ (công việc).
- Năm ngày đội thứ hai làm được $\frac{5}{y}$ (công việc).
- Vì đội thứ nhất làm trong 3 ngày rồi dừng lại đội thứ hai làm tiếp trong 5 ngày thì cả hai đội hoàn thành xong $25\%=\frac{1}{4}$ (công việc). Suy ra, ta có phương trình : $\frac{3}{x}+\frac{5}{y}=\frac{1}{4}$ (2).
- Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình : $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{15}\\ \frac{3}{x}+\frac{5}{y}=\frac{1}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{x}=\frac{1}{24}\\ \frac{1}{y}=\frac{1}{40}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=24\\ y=40\end{cases}$. (TMĐK).
- Vậy thời gian để đội thứ nhất làm riêng một mình hoàn thành xong công việc là 24 (ngày) và thời gian để đội thứ hai làm riêng một mình hoàn thành xong công việc là 40 (ngày).

2) Số mét khối nước đựng được của bồn chính là thể tích của bồn chứa. Như vậy số mét khối đựng được của bồn sẽ là : $V=0,32.1,75=0,56\left(m^3\right)$.

Bài III. *(2,0 điểm)*

1) Giải phương trình: $x^4-7x^2-18=0$.
2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(d): y=2mx-m^2+1$ và parabol $(P): y=x^2$

a) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt

b) Tìm tất cả giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{-2}{x_1x_2}+1$

Lời giải

1) Giải phương trình: $x^4-7x^2-18=0\,(1)$

❖ **Cách 1 :**

Đặt $t=x^2\,(t\ge 0)\,(*)$

*Phương trình (1) trở thành : $t^2-7t-18=0\,(2)$

Ta có : $\Delta=(-7)^2-4.1.(-18)=121=11^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=11$

Suy ra :Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt là:

$t_1=\frac{7+11}{2}=9\,(t/m)$ và $t_2=\frac{7-11}{2}=-2\,(ktm)$

Thay $t=9$ vào $(*)$ ta có : $x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm 3$

Vậy nghiệm của phương trình là : $x=\pm 3$

❖ **Cách 2 :**

Ta có : $x^4-7x^2-18=0$

$\Leftrightarrow x^4+2x^2-9x^2-18=0$

$\Leftrightarrow x^2(x^2+2)-9(x^2+2)=0$

$\Leftrightarrow (x^2+2)(x^2-9)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+2=0\,(vôli) \\ x^2-9=0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x^2=9$

$\Leftrightarrow x=\pm 3$

Vậy nghiệm của phương trình là : $x=\pm 3$

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(d): y=2mx-m^2+1$ và parabol $(P): y=x^2$

a) Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^2-2mx+m^2-1\,(1)$

Để (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt với $\forall m$

Ta có : $\begin{cases} a=1\ne 0 \\ \Delta'=(b')^2-ac>0 \quad \forall m \end{cases}$

Xét $\Delta'=m^2-(m^2-1)=m^2-m^2+1=1>0, \forall m$

Vậy (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt

b) Tìm tất cả giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{-2}{x_1x_2}+1 \quad (2)$$

Ta có $x_1x_2 \neq 0 \Rightarrow m^2-1 \neq 0 \Rightarrow m \neq \pm 1$

Hai nghiệm của phương trình : $x_1 = m-1; x_2 = m+1$

Biến đổi biểu thức (2) ta có : $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{-2}{x_1x_2}+1 \Rightarrow \frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{-2+x_1x_2}{x_1x_2} \Rightarrow x_1+x_2=-2+x_1x_2$

Thay $x_1 = m-1; x_2 = m+1$ vào biểu thức $x_1+x_2=-2+x_1x_2$ ta có :

$m-1+m+1=-2+(m-1)(m+1) \Rightarrow m^2-1-2=2m$

$\Leftrightarrow m^2-2m-3=0 \Leftrightarrow (m-3)(m+1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-3=0 \\ m+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=-1\ (L) \end{array}\right.$

Kết Luận : Với $m=3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài IV. *(3,0 điểm)*

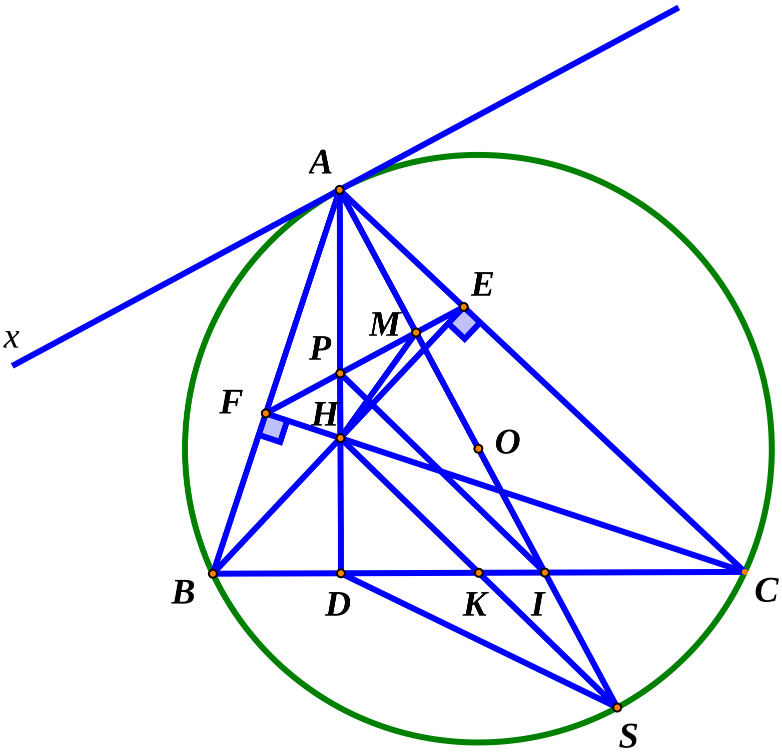
Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O). Hai đường cao BE và CF của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H.

1) Chứng minh bốn điểm B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh đường thẳng OA vuông góc với đường thẳng EF.

3) Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng BC. Đường thẳng AO cắt đường thẳng BC tại điểm I, đường thẳng EF cắt đường thẳng AH tại điểm P. Chứng minh tam giác APE đồng dạng với tam giác AIB và đường thẳng KH song song với đường thẳng IP.

Lời giải



1) Chứng minh bốn điểm B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn.

Xét tứ giác $BCEF$ ta có :

$BEC = 90^\circ$ (BE là đường cao)

$BFC = 90^\circ$ (CF là đường cao)

$\Rightarrow BCEF$ là tứ giác nội tiếp (đỉnh E, F cùng nhìn cạnh BC dưới một góc vuông).

2) Chứng minh đường thẳng OA vuông góc với đường thẳng EF.

Vẽ tiếp tuyến Ax như hình vẽ $\Rightarrow BAF = ACB$ (tính chất giữa đường tiếp tuyến và dây cung).

Do tứ giác $BCEF$ nội tiếp $\Rightarrow AFE = ACB.$

Ta suy ra $BAF = AFE \Rightarrow EF // Ax$ (do hai góc so le trong)

Lại có $Ax \perp OA \Rightarrow OA \perp EF$ (đpcm).

3) Chứng minh $\Delta APE \backsim \Delta ABI$

Ta có : $AEB = ABI$ (Vì $AEB + EFC = ABI + EFC = 180^\circ$)

Mặt khác $APE + PAI = 90^\circ$ (vì $AI \perp PE$)

$AIB + PAI = 90^\circ$ (Vì $AH \perp BC$) $\Rightarrow APE = AIB$

Vậy $\Delta APE \backsim ABI$ (g-g).

* Chứng minh $KH // PI$

Gọi M là giao điểm của AO và EF, dung đường kính AS

Ta có $BE//CS$ cùng vuông góc AC

$BS//CF$ cùng vuông góc AB

$\Rightarrow BHCS$ là hình bình hành nên H, K, S thẳng hàng

Ta có $AE.AC = AH.AD$ và $AE.AC = AM.AS$

$$\Rightarrow AH.AD = AM.AS \Rightarrow \frac{AH}{AS} = \frac{AM}{AD} \Rightarrow \Delta AHM \backsim \Delta ASD \Rightarrow AHM = \Delta ASD$$

$\Rightarrow HMSD$ Nội tiếp đường tròn

Kết hợp $PMID$ nội tiếp đường tròn $\Rightarrow PIM = PDM = HSM \Rightarrow HS//PI$.

Bài V. *(0,5 điểm)*

Cho biểu thức $P = a^4 + b^4 - ab$ với a, b là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + ab = 3$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của P.

Lời giải

Ta có $a^2 + b^2 + ab = 3 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 3 - ab$ thay vào P ta được.

$$P = a^4 + b^4 - ab = \left(a^2 + b^2\right)^2 - 2a^2b^2 - ab = (3 - ab)^2 - 2a^2b^2 - ab = 9 - 6ab + a^2b^2 - 2a^2b^2 - ab$$

$$= 9 - 7ab - a^2b^2 = -\left[(ab)^2 + 2.ab.\frac{7}{2} + \frac{49}{4}\right] + \frac{49}{4} + 9 = -\left(ab + \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{85}{4}.$$

Vì $a^2 + b^2 = 3 - ab$, mà $(a+b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq -2ab \Rightarrow 3 - ab \geq -2ab \Leftrightarrow ab \geq -3$. (1)

Và $(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \Rightarrow 3 - ab \geq 2ab \Leftrightarrow ab \leq 1$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $-3 \leq ab \leq 1 \Leftrightarrow -3 + \frac{7}{2} \leq ab + \frac{7}{2} \leq \frac{7}{2} + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq ab + \frac{7}{2} \leq \frac{9}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq \left(ab + \frac{7}{2}\right)^2 \leq \frac{81}{4} \Leftrightarrow -\frac{81}{4} \leq -\left(ab + \frac{7}{2}\right)^2 \leq -\frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{81}{4} + \frac{85}{4} \leq -\left(ab + \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{85}{4} \leq -\frac{1}{4} + \frac{85}{4}$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq -\left(ab + \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{85}{4} \leq 21$$

Vậy Max $P = 21$. Dấu = xảy ra khi $\begin{cases} ab = -3 \\ a^2 + b^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{3} \\ b = -\sqrt{3} \end{cases} v \begin{cases} b = \sqrt{3} \\ a = -\sqrt{3} \end{cases}$.

Min $P = 1$. Dấu = xảy ra khi $\begin{cases} ab = 1 \\ a^2 + b^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$.