CHUYÊN ĐỀ II: GÓC VỚI ĐƯỜNG TRÒN

Họ tên học sinh: ………………………….…………………… Lớp: 9B1/ …... Ngày: …. / … / 20….

I. Bài tập vận dụng

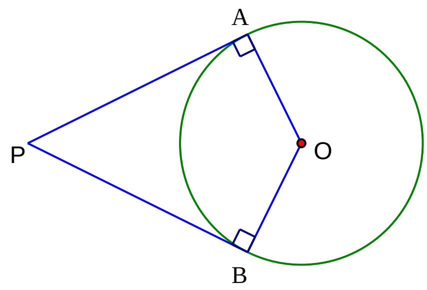
Góc ở tâm

Bài 1: Hai tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) cắt nhau tại P. Biết $APB = 55^0$. Tính số đo cung lớn AB.

Hướng dẫn giải

Tìm cách giải. Tính góc ở tâm trước, rồi tính số đo cung nhỏ AB. Cuối cùng tính số đo cung lớn.

Trình bày lời giải



Tứ giác APBO có $OAP = 90^\circ; OBP = 90^\circ$ (vì PA, PB là tiếp tuyến), $\overline{APB} = 55^0$ nên:

$AOB = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 55^0 = 125^\circ$ (tổng các góc trong tứ giác AOBP) suy ra số đo cung nhỏ AB là 125^0.

Vậy số đo cung lớn AB là: $360^0 - 125^0 = 235^0$.

Bài 2: Cho hai tiếp tuyến tại *A* và *B* của đường tròn (*O*) cắt nhau tại *M*, biết $AMB = 40^0$.

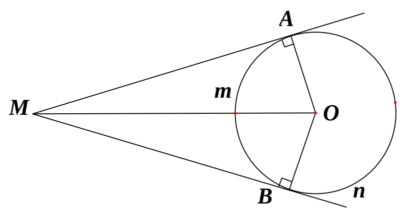
a) Tính AMO và AOM.

b) Tính số đo cung *AB* nhỏ và số đo cung *AB* lớn.

Hướng dẫn giải

Tìm cách giải. Sử dụng tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau từ đó tính ra góc ở tâm. Cuối cùng tính số đo cung lớn.

Trình bày lời giải



a) Do MA và MB là hai tiếp tuyến cắt nhau tại M nên MO là tia phân giác của AMB hay $AMO = \frac{1}{2} AMB = 20^0$. Tam giác AMO vuông tại A, tính được $AOM = 70^0$.

OM là tia phân giác của AOB nên $AOB = 2.AOM = 140^0$

b) sđ AmB = sđ $AOB = 140^0$

sđ $AnB = 360^0 - 140^0 = 220^0$.

Bài 3: Trên một đường tròn (O) có cung AB bằng 140º . Gọi A’. B’ lần lượt là điểm đối xứng của A, B qua O; lấy cung AD nhận B’ làm điểm chính giữa; lấy cung CB nhận A’ làm điểm chính giữa. Tính số đo cung nhỏ CD .

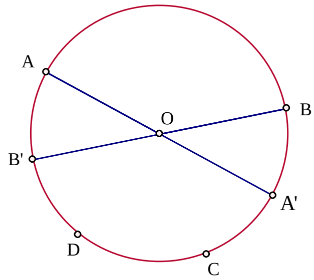
Hướng dẫn giải

Tìm cách giải. OA và OA’ là hai tia đối nhau nên sđ $AA' = 180^0$. Do AD nhận B’ là điểm chính giữa cung nên sđ $sd\ AB' = sd\ B'D$. Tương tự sđ $BA' = 180^0$’ $sd\ A'B = sd\ A'C$ từ đó tính được số đo cung DC

Trình bày lời giải

Ta có $AOB' = BOA'$ (hai góc đối đỉnh) $\Rightarrow sd\ AB' = sd\ A'B$

B’ và C’ lần lượt là điểm chính giữa cung AD và cung BC nên ta có $sd\ AB' = sd\ B'D; sd\ A'B = sd\ A'C$



sđ $AB = 140^\circ$ mà A’ là điểm đối xứng với A qua O nên

sđ $AOA' = 180^0$

lại có s®AB+s®BA'=180^0 $\Rightarrow$ sđ $BA' = 40^\circ$ = sđ $AB' = 40^\circ$

$\Rightarrow$ sđ $AC = 40^\circ \Rightarrow$ sđ $CB = 80^\circ$

sđ $AB' = 40^\circ \Rightarrow$ sđ $B'D = 40^\circ \Rightarrow$ sđ $CD = 180^0$ - sđ BC - sđ $B'D = 180^\circ - 40^\circ - 80^\circ = 60^\circ$.

Bài 4: Cho đường tròn ($O; R$), lấy điểm M nằm ngoài (O) sao cho $OM = 2R$. Từ M kẻ tiếp tuyến MA và MB với (O) (A, B là các tiếp điểm).

a) Tính AOM ;

b) Tính AOB và số đo cung AB nhỏ;

c) Biết OM cắt (O) tại C. Chứng minh C là điểm chính giữa của cung nhỏ AB.

Hướng dẫn giải

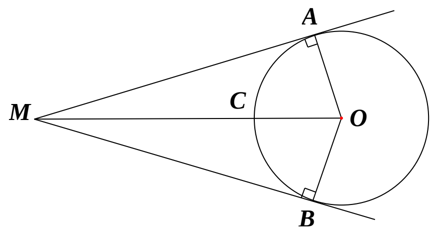
Tìm cách giải. Vận dụng tỉ số lượng giác trong tam giác vuông khi biết độ dài hai cạnh (theo bán kính) từ đó tính ra được góc ở tâm.

Trình bày lời giải

a) Do MA và MB là các tiếp tuyến của (O) nên $MA \perp AO$ và $MB \perp BO$

Xét tam giác vuông MAO có

$\sin AMO = \dfrac{AO}{MO} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow AMO = 30^0 \Rightarrow AOM = 60^0$;



b) Tương tự **bài 1** tính được $AOB = 120^0$, sđ $AB = 120^0$;

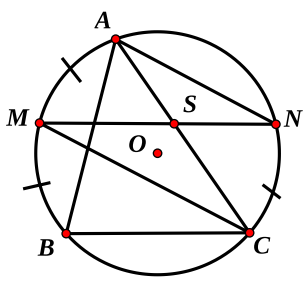
c) $AOC = BOC \Rightarrow AC = BC$.

Góc nội tiếp, góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung

Bài 1: Cho đường tròn (O) có các dây cung AB, BC, CA. Gọi M là điểm chính giữa của cung nhỏ AB. Vẽ dây MN song song với BC và gọi S là giao điểm của MN và AC. Chứng minh $SM = SC$ và $SN = SA$.

Hướng dẫn giải

Tìm cách giải. Vận dụng tính chất trong một đường tròn, góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau thì bằng nhau từ đó chỉ ra các tam giác ASN và MSC cân tại S



Trình bày lời giải

Do M là điểm chính giữa cung nhỏ AB nên sđ MB = sđ MA

Do MN // BC nên $NMC = MCB \Rightarrow$ sđ MB = sđ NC

Vậy sđ MB = sđ MA = sđ NC

$NAS = ANS$ (hai góc nội tiếp cùng chắn hai cung bằng nhau)

$SMC = SCM$ (hai góc nội tiếp cùng chắn hai cung bằng nhau)

Vậy các tam giác ASN và MSC cân tại C $\Rightarrow SN = SA; SM = SC$

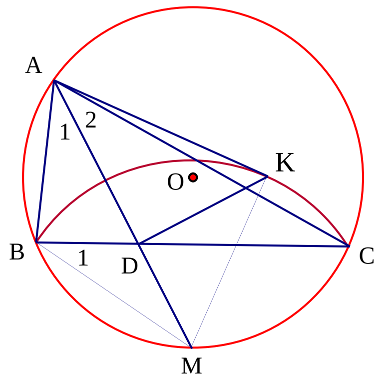
Nhận xét: Ở bài toán này học sinh có thể nhớ tới bài toán: Trong một đường tròn, hai cung bị chắn giữa hai dây song song thì bằng nhau từ đó nhìn ra $MB = CN$

Bài 2: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tia phân giác góc A cắt BC tại D và cắt đường tròn tại điểm thứ hai là M. Kẻ tiếp tuyến AK với đường tròn (M, MB), K là tiếp điểm. Chứng minh rằng DK vuông góc với AM.

Hướng dẫn giải

Tìm cách giải. Ta có: $AKM = 90^\circ$ nên DK $\perp$ AM $\Leftrightarrow \Delta DMK$” ΔKMA . Mặt khác hai tam giác có AMK chung. Do yêu cầu chứng minh về góc nên để chứng minh hai tam giác đồng dạng ta nên dùng c.g.c. Do vậy cần chứng minh $\frac{MD}{MK} = \frac{MK}{MA}$.

Trình bày lời giải:



$A_1 = A_2$ mà $B_1 = A_2$ (góc nội tiếp) nên $B_1 = A_1$.

$\Delta MBD \backsim \Delta MAB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{MD}{MB} = \frac{MB}{MA} \Rightarrow \frac{MD}{MK} = \frac{MK}{MA}$

Kết hợp với $DMK = AMK$ (góc chung)

ta có: ΔDMK” ΔKMA (c.g.c) $\Rightarrow MDK = MKA = 90^\circ$

Vậy DK $\perp$AM.

Bài 3: Cho tam giác *ABC* có ba góc nhọn, đường cao *AH* và nội tiếp đường tròn tâm *O*, đường kính *AM*.

a) Tính ACM ;

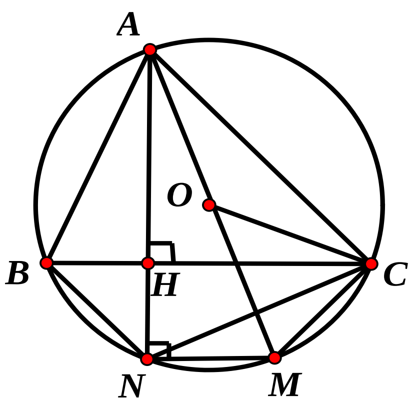
b) Chứng minh $BAH = OCA$;

c) Gọi *N* là giao điểm *AH* với đường tròn (*O*). Tứ giác *BCMN* là hình gì? Vì sao?

Hướng dẫn giải

Tìm cách giải. Ta có: $ACM = 90^0$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn. Nhận định tam giác AOC là tam giác cân nên nếu $BAH = OCA$ ta sẽ có $BAH = CAO$ từ đó tìm ra tam giác đồng dạng để giải toán.

Trình bày lời giải



a) Ta có $ACM = 90^0$ (góc nội tiếp).

b) Vì $ABC = AMC$ (cùng chắn cung AC) và $AHB = ACM = 90^0$

Nên ΔABH và ΔAMC đồng dạng (g-g)

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} BAH = OAC \\ OCA = OAC \end{matrix}\right\} \Rightarrow BAH = OCA$$

c) $ANM = 90^0$, $AN \perp NM$ và $AN \perp BC$ nên MN // BC $\Rightarrow MNBC$ là hình thang

$BC // MN \Rightarrow$ sđ $BN =$ sđ CM (xem chứng minh **Bài 1**)

$\Rightarrow$ sđ $BM =$ sđ $CN \Rightarrow BM = CN \Rightarrow MNBC$ là hình thang cân.

Bài 4: Cho đường tròn tâm O và một dây AB của đường tròn đó. Các tiếp tuyến vẽ từ A và B của đường tròn cắt nhau tại C. Gọi D là một điểm trên đường tròn có đường kính OC (D khác A và B). CD cắt cung AB của đường tròn (O) tại E. (E nằm giữa C và D). Chứng minh rằng:

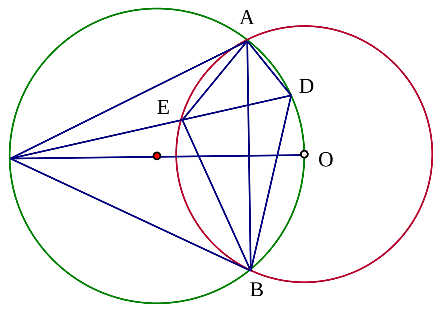
a) $BED = DAE$.

b) $DE^2 = DA.DB$.

Hướng dẫn giải

Tìm cách giải

- Trong quá trình chứng minh về góc, nên sử dụng tính chất về góc nội tiếp, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng hệ quả của chúng.
- Để chứng minh $DE^2 = DA.DB.$, nên ghép chúng vào hai tam giác có cạnh là DA, DB và DE là cạnh chung của hai tam giác, rồi chứng minh chung đồng dạng. Do đó ta chọn ΔBED và ΔEAD.



Trình bày lời giải

a) Ta có : $EBC = EAB$; $\overline{DCB} = DAB$ nên

$EBC + DCB = EAB + DAB$.

Mặt khác : $EBC + DCB = BED$, $EAB + DAB = DAE$.

Vậy $BED = DAE$.

b) Ta có : $ADE = ABC = CAB = EDB$ mà theo câu a):

$BED = DAE$, suy ra:

$$\Delta BED \backsim \Delta EAD \text{ (g-g)} \Rightarrow \frac{DE}{DA} = \frac{DB}{DE} \Rightarrow DE^2 = DA.DB$$

Bài 5: Tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Các điểm M, N, P là điểm chính giữa của các cung AB, BC, CA. Gọi D là giao điểm của MN và AB, E là giao điểm của PN và AC. Chứng minh rằng DE song song với BC.

Hướng dẫn giải

Tìm cách giải. Khai thác điểm chính giữa của một cung , ta nhận được các tia phân giác của góc. Do vậy nếu khai thác tính chất đường phân giác của tam giác, ta được các tỉ số. Với suy luận đó, để chứng minh DE // BC ta cần vận dụng định lý Ta-lét đảo.

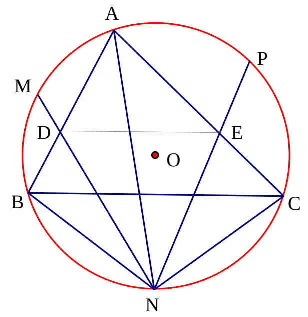
Trình bày lời giải:

$AP = PC \Rightarrow$ NE là đường phân giác của $\Delta ANC \Rightarrow \dfrac{AE}{EC} = \dfrac{AN}{NC}$ (1)

$AM = MB \Rightarrow$ ND là đường phân giác của $\Delta ANB \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AN}{NB}$ (2)

$BN = NC \Rightarrow NB = NC$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$, do đó DE // BC.



Bài 6: Từ điểm M ở ngoài đường tròn (O), vẽ hai tiếp tuyến MA, MB và một cát tuyến MCD. Gọi I là giao điểm của AB và CD. Chứng minh rằng: $\frac{IC}{ID} = \frac{MC}{MD}$.

Hướng dẫn giải

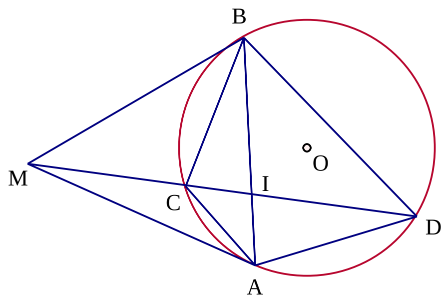
Tìm cách giải. Khai thác góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung dễ dàng chỉ ra $\Delta MAC \backsim \Delta MDA$ và $\Delta MBC \backsim \Delta MDB$. Từ đó biến đổi các hệ thức để giải bài toán.

Trình bày lời giải

Ta có $MAC = ADC$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung); AMD chung. Suy ra $\Delta MAC \backsim \Delta MDA$ (g-g) suy ra: $MA^2 = MC.MD$ và $\frac{MA}{MD} = \frac{AC}{AD}$

Tương tự: $\Delta MBC \backsim \Delta MDB$ suy ra: $\frac{MB}{MD} = \frac{BC}{BD}$

Xét $\frac{MC}{MD} = \frac{MC.MD}{MD^2} = \frac{MA^2}{MD^2} = \frac{MA}{MD} \cdot \frac{MB}{MD} = \frac{AC}{AD} \cdot \frac{BC}{BD}$ (1)



Mặt khác : $\Delta IAC \backsim \Delta IDB$ suy ra: $\frac{IC}{IB} = \frac{AC}{BD}$

$\Delta IBC \backsim \Delta IDA$ suy ra: $\frac{IB}{ID} = \frac{BC}{AD}$;

Do đó: $\frac{AC}{AD} \cdot \frac{BC}{BD} = \frac{AC}{BD} \cdot \frac{BC}{AD} = \frac{IC}{IB} \cdot \frac{IB}{ID} = \frac{IC}{ID}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{IC}{ID} = \frac{MC}{MD}$.

Bài 7: Gọi CA, CB lần lượt là các tiếp tuyến của đường tròn (O; R) với A, B là các tiếp điểm. Vẽ đường tròn tâm I qua C và tiếp xúc với AB tại B. Đường tròn (I) cắt đường tròn (O) tại M. Chứng minh rằng đường thẳng AM đi qua trung điểm của BC.

Hướng dẫn giải

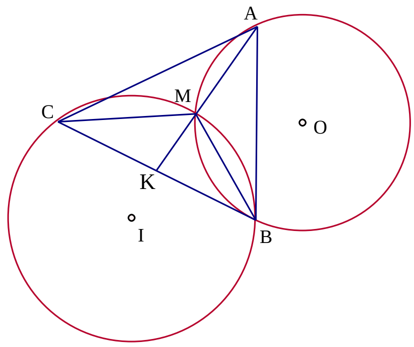
Tìm cách giải. Chỉ ra $KB^2 = KM.KA$ và $KC^2 = KM.KA$ từ đó suy ra KA = KB (K là giao điểm của AM và BC)

Trình bày lời giải

Gọi K là giao điểm của AM và BC.

Xét ΔKBM và ΔKAB có: K chung; $KBM = KAB$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến, dây cung và góc nội tiếp chắn cùng chắn cung BM của (O))

Do đó: $\Delta KBM”\ \Delta KAB \Rightarrow \dfrac{KB}{KA} = \dfrac{KM}{KB} \Rightarrow KB^2 = KM.KA$ (1)



$MCK = MBA$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung BM của (I)).

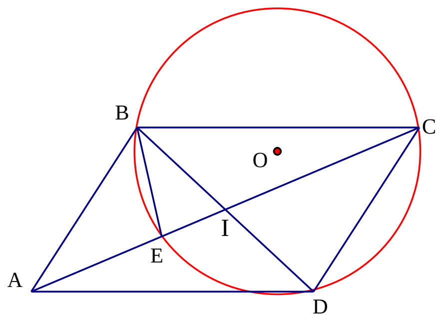
$KAC = MBA$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung AM cuả (O)).

Do đó: $MCK = KAC$. Xét ΔKCM và ΔKAC có: K chung , $MCK = KAC$. Do đó $\Delta KCM”\ \Delta KAC \Rightarrow \dfrac{KC}{KA} = \dfrac{KM}{KC} \Rightarrow KC^2 = KM.KA$ (2).

Từ (1) và (2) ta có: $KC^2 = KB^2 \Rightarrow KC = KB$. Vậy AM đi qua trung điểm K của BC.

Bài 8: Cho hình bình hành ABCD, góc A < 90^0. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD cắt AC ở E. Chứng mình rằng BD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEB.

Hướng dẫn giải



Gọi I là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành.

IA = IC ⇒ $IE.IA = IE.IC$

$\Delta IBE”\ \Delta ICD$ (g.g) ⇒ $IE.IC = IB.ID$

Từ đó suy ra: IE.IA = IE.IC = IB.ID = IB^2 ⇒ $\dfrac{IB}{IE} = \dfrac{IA}{IB}$.

Ta có ΔIBE và ΔIAB có $\dfrac{IB}{IE} = \dfrac{IA}{IB}$ và BIA chung , suy ra

$\Delta IBE”\ \Delta IAB$ (c.g.c) nên $IBE = IAB$.

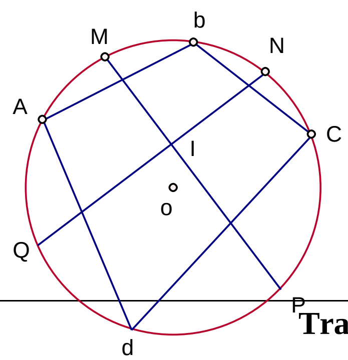
Suy ra BD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEB(định lí bổ sung)

Góc có định bên trong và bên ngoài đường tròn

Bài 1: Cho tứ giác ABCD có bốn đỉnh thuộc đường tròn . Gọi M, N, P, Q lần lượt là điểm chính giữa các cung AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng : $MP \perp NQ$.

Hướng dẫn giải

Tìm cách giải. Để chứng minh $MP \perp NQ$ ta gọi I là giao điểm của MP và NQ và cần chứng minh $MIQ = 90^\circ$. Nhận thấy MIQ là góc có đỉnh ở bên trong đường tròn, do vậy ta cần biểu diễn góc MIQ theo các cung của đường tròn và biến đổi các cung ấy.



Trình bày lời giải

Gọi I là giao điểm của MP và NQ. Ta có.

$MIQ = \frac{1}{2}(\text{sđ } MQ + \text{sđ } NP)$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (\text{sđ } AB + \text{sđ } AD + \text{sđ } BC + \text{sđ } CD)$.

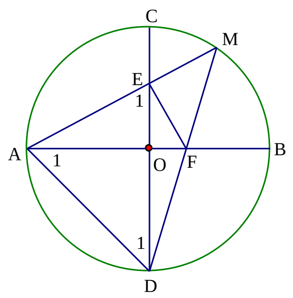
$= \frac{1}{4} . 360^o = 90^o$. Vậy MP $\perp$ NQ.

Bài 2: Cho đường tròn (O), hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau, điểm M thuộc cung nhỏ BC. Gọi E là giao điểm của MA và CD, F là giao điểm của MD và AB. Chứng minh rằng:

a) $\text{DAE} = AFD$;

b) Khi M di động trên cung nhỏ BC thì diện tích tứ giác AEFD không đổi.

Hướng dẫn giải



a) $\text{DAE} = \frac{\text{sdDBM}}{2}$ (góc nội tiếp) .

$\text{AFD} = \frac{\text{sdDB} + sd\,MB}{2} = \frac{\text{sdDBM}}{2}$ (góc có đỉnh ở bên trong đường tròn)

Suy ra $\text{DAE} = AFD$

b) Ta có: $\text{D}_1 = \text{A}_1 \left(= 45^\circ\right)$ và $\text{E}_1 = \text{ADF}$ (cách chứn minh tương tự câu a)

nên $\Delta DAE \backsim \Delta ADF \ (g.g) \Rightarrow \frac{DE}{AD} = \frac{AD}{AF} \Rightarrow AF.DE = AD^2$.

Mặt khác AEFD là tứ giác có hai đường chéo AF, DE vuông góc với nhau.

Do đó $S_{AEFD} = \frac{1}{2}\text{AF} \cdot \text{DE} = \frac{1}{2}\text{AD}^2$, không đổi.

---- *Hết* -----