CHUYÊN ĐỀ III: TỨ GIÁC NỘI TIẾP

Họ tên học sinh: …………………………….……………………… Lớp: 9B1/ …… Ngày: …. / … / 20….

I. Tứ giác nội tiếp

Bài 1: Cho đường tròn tâm O và điểm A nằm ngoài đường tròn. Kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C) là tiếp điểm. Trên cung nhỏ BC lấy một điểm M rồi kẻ các đường vuông góc MI, MH, MK xuống các cạnh BC, CA, AB. Gọi giao điểm của BM và IK là P; giao điểm của CM, IH là Q.

a) Chứng minh rằng các tứ giác BIMK, CIMH nội tiếp được;

b) Chứng minh $MI^2 = MH.MK$;

c) Chứng minh tứ giác IPMQ nội tiếp rồi suy ra $PQ \perp MI$;

Hướng dẫn giải

a) * $BIM = BKM = 90^0$ suy ra tứ giác $BIMK$ nội tiếp. (phương pháp 1)

* $CIM = CHM = 90^0$ suy ra tứ giác $CIMH$ nội tiếp. (phương pháp 1)

b) Tứ giác BIMK nội tiếp nên $IKM = IBM$; (nội tiếp cùng chắn cung MI); $KIM = KBM$.(nội tiếp cùng chắn cung KM) (1)

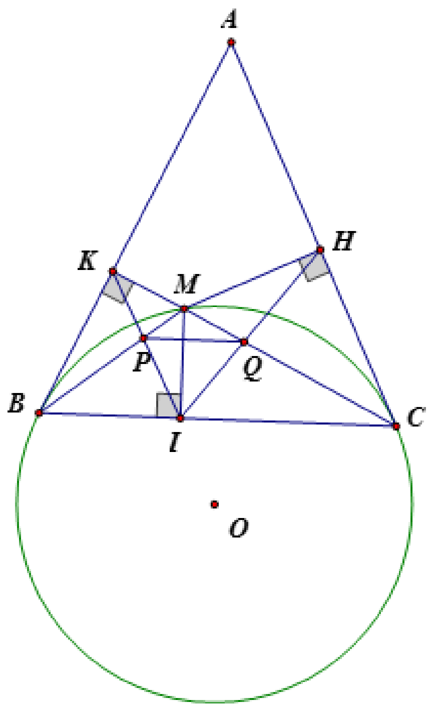
Tứ giác CIMK nội tiếp nên $ICM = IHM$;(cùng chắn cung MI); $MIH = \mathrm{MCH}$.(cùng chắn cung MH) (2)

Xét đường tròn tâm (O) có : $KBM = BCM$; (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung(; $MBI = \mathrm{MCH}$. (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung) (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $KIM = IHM; MKI = \mathrm{MIH}$.

Do đó $\Delta IMK \sim \Delta MHI (g.g)$

$$\Rightarrow \frac{MK}{MI} = \frac{MI}{MH} \Rightarrow MI^2 = MK.MH \ .$$



c) * Ta có $PMQ + PIQ = BMC + PIM + QIM$

$= BMC + MCI + MBC = 180^0$

Hay $PMQ + PIQ = 180^0$

Suy ra tứ giác MPIQ nội tiếp. (phương pháp 1)

* Từ đó ta có $MPQ = MIQ \Rightarrow MPQ = MBC$

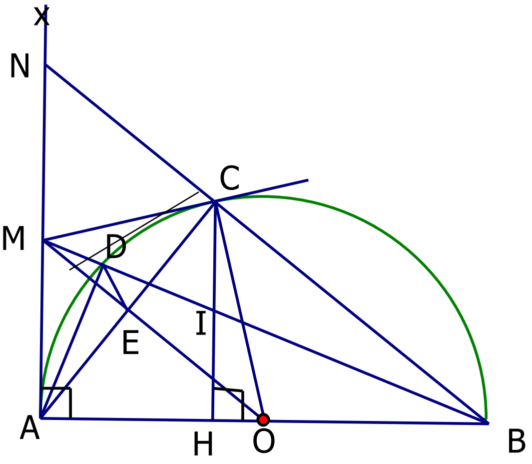
$\Rightarrow PQ // BC$ mà $MI \perp BC$ nên $MI \perp PQ$

Bài 2: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$ và tia tiếp tuyến Ax cùng phía với nửa đường tròn đối với AB. Từ điểm M trên Ax kẻ tiếp tuyến thứ hai MC với nửa đường tròn (C là tiếp điểm). AC cắt OM tại E; MB cắt nửa đường tròn (O) tại D (D khác B).

a) Chứng minh: $AMCO$ và $AMDE$ là các tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh MBCD là tứ giác nội tiếp (xem cách giải **Bài 3**)

Hướng dẫn giải



Vì MA, MC là tiếp tuyến nên: $\mathrm{MAO} = \mathrm{MCO} = 90^0$. Tứ giác $AMCO$ có $\mathrm{MAO} + \mathrm{MCO} = 180^0 \Rightarrow AMCO$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính MO.

$\mathrm{ADB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)$\Rightarrow \mathrm{ADM} = 90^0$ (1)

Lại có: $OA = OC = R$; $MA = MC$ (tính chất tiếp tuyến).

Suy ra OM là đường trung trực của AC

$\Rightarrow \mathrm{AEM} = 90^0$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $ADM = AEM = 90^0$. Tứ giác $AMDE$ có hai đỉnh A, E kề nhau cùng nhìn cạnh MA dưới một góc không đổi. Vậy là tứ giác $AMDE$ nội tiếp đường tròn đường kính MA.

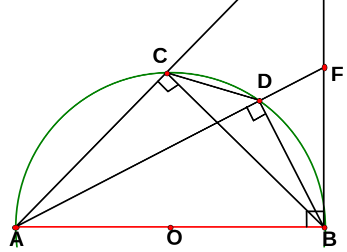
Bài 3: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB, kẻ tiếp tuyến Bx và lấy hai điểm C và D thuộc nửa đường tròn. Các tia AC và AD cắt Bx lần lượt ở E, F (F ở giữa B và E)

1. Chứng minh: $ABD = DFB$.

2. Chứng minh rằng $CEFD$ là tứ giác nội tiếp.

Hướng dẫn giải

1) ΔADB có $ADB = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow ABD + BAD = 90^\circ$ (vì tổng ba góc của một tam giác bằng 180°)(1)



ΔABF có $ABF = 90^\circ$ (BF là tiếp tuyến).$\Rightarrow AFB + BAF = 90^\circ$ (vì tổng ba góc của một tam giác bằng 180°) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow ABD = DFB$

2) Tứ giác $ACDB$ nội tiếp $(O) \Rightarrow ABD + ACD = 180^\circ$.

mà $ECD + ACD = 180^\circ$ (Vì là hai góc kề bù) $\Rightarrow ECD = DBA$

Theo trên $ABD = DFB, ECD = DBA \Rightarrow ECD = DFB$. Mà

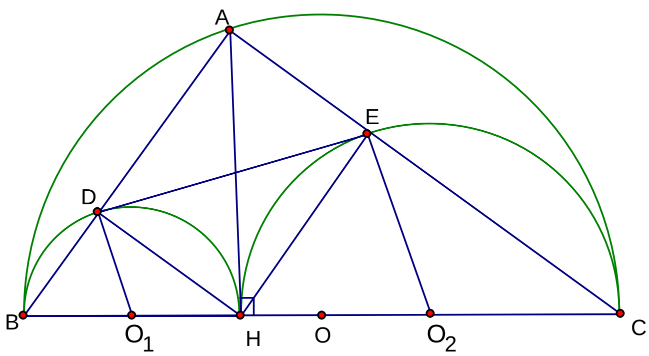
$EFD + DFB = 180^o$ (Vì là hai góc kề bù) nên $\Rightarrow ECD + AEFD = 180^o$, do đó tứ giác $CEFD$ là tứ giác nội tiếp.

Bài 4: Cho nửa đường tròn đường kính $BC = 2R$. Từ điểm A trên nửa đường tròn vẽ $AH \perp BC$. Nửa đường tròn đường kính BH , CH lần lượt có tâm O_1; O_2 cắt AB và CA thứ tự tại D và E.

a) Chứng minh tứ giác $ADHE$ là hình chữ nhật, từ đó tính DE biết $R = 25$ và $BH = 10$

b) Chứng minh tứ giác $BDEC$ nội tiếp đường tròn.

Hướng dẫn giải



Ta có $BAC = 90^o$ (vì góc nội tiếpchắn nửa đường tròn)

Tương tự có $BDH = CEH = 90^o$

Xét tứ giác $ADHE$ có $A = ADH = AEH = 90^o$ hay $ADHE$ là hình chữ nhật.

Từ đó $DE = AH$ mà $AH^2 = BH.CH$ (Hệ thức lượng trong tam giác vuông)

hay $AH^2 = 10.40 = 20^2 \left(BH = 10; CH = 2.25 - 10 = 40\right) \Rightarrow DE = 20$

b) Ta có: $BAH = C$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc) mà $DAH = ADE$ (1)

(Vì $ADHE$ là hình chữ nhật) => $C = ADE$ do $C + BDE = 180^o$ nên tứ giác $BDEC$ nội tiếp đường tròn.

Lưu ý: Có thể hướng dẫn học sinh một cách sử dụng hệ thức lượng và tam giác đồng dạng như sau:

Tam giác AHB vuông tại H, đường cao AH. Ta có $AH^2 = AD.AB$

Tam giác AHC vuông tại H, đường cao AE. Ta có $AH^2 = AE.AC$

Ta có $AD.AB = AE.AC \Rightarrow \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AE}{AB}$

Xét tam giác ADE và tam giác ACB có $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AE}{AB}$, $BAC = DAE = 90^0$ (góc chung)

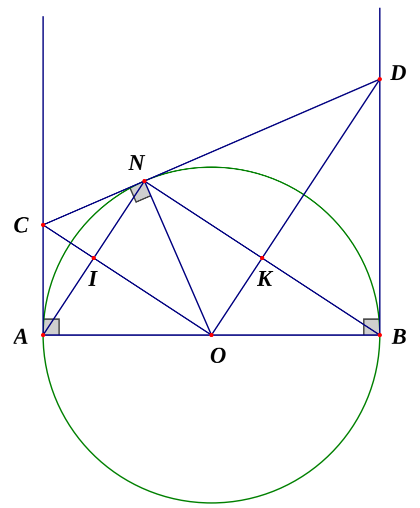
$\Rightarrow \Delta ADE \backsim \Delta ACB \Rightarrow ADE = ACB$ mà $ADE + EDB = 180^0$ nên $ADE + ECB = 180^0$

Tứ giác BDEC có $ADE + ECB = 180^0$ nên tứ giác BDEC nội tiếp đường tròn.

Bài 5:

Từ bài toán quen thuộc cho (O,R). Trên nửa mặt phẳng bờ AB kẻ tiếp tuyến Ax và By với (O), lấy N thuộc (O), kẻ tiếp tuyến với (O) tại N cắt Ax tại C, cắt By tại D. Gọi I và K lần lượt là giao điểm của AN và CO, MN và OD. Chứng minh NIOK là hình chữ nhật.

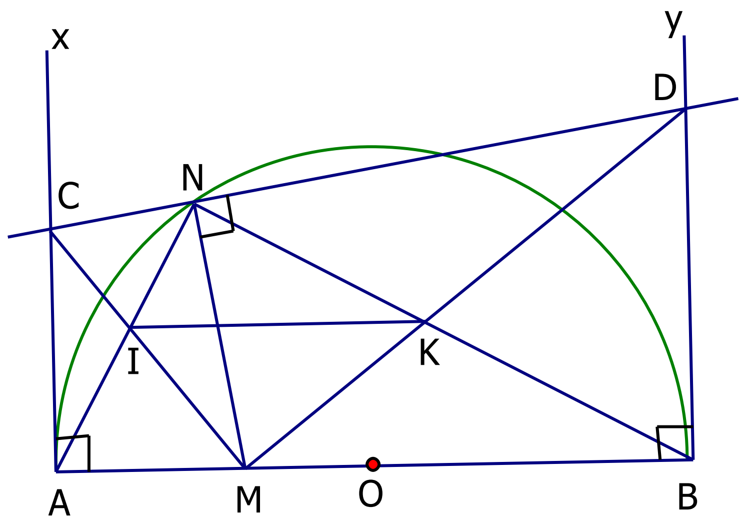
Ta có bài toán sau:



Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Lấy điểm M thuộc đoạn thẳng OA, điểm N thuộc nửa đường tròn (O). Từ A và B vẽ các tiếp tuyến Ax và By. Đường thẳng qua N và vuông góc với NM cắt Ax, By thứ tự tại C và D.

a) Chứng minh $ACNM$ và $BDNM$ là các tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh ΔANB đồng dạng với ΔCMD từ đó suy ra $IMKN$ là tứ giác nội tiếp.



a) Ta có tứ giác $ACNM$ có: $\text{MNC} = 90^0$ (gt) $\text{MAC} = 90^0$ (tínhchất tiếp tuyến).

$\Rightarrow MNC + MAC = 180^0$ $ACNM$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính MC. Tương tự tứ giác $BDNM$ nội tiếp đường tròn đường kính. MD

b) ΔANB và ΔCMD có:

$\text{ABN} = \text{CDM}$ (do tứ giác $BDNM$ nội tiếp)

$\text{BAN} = \text{DCM}$ (do tứ giác $ACNM$ nội tiếp) nên $\Delta ANB \sim \Delta CMD$ (g.g)

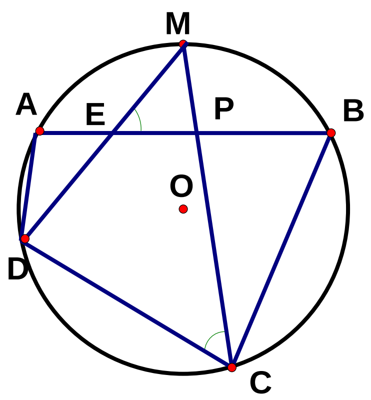
c) $\Delta ANB \sim \Delta CMD \Rightarrow \mathrm{CMD} = \mathrm{ANB} = 90^o$ (do ANB là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

Suy ra $\mathrm{IMK} = \mathrm{INK} = 90^0 \Rightarrow INK + IMK = 180^0$. Vậy $IMKN$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính IK

Bài 6: Cho tứ giác ABCD nội tiếp (O), M là điểm chính giữa của cung AB. Nối M với D, M với C cắt AB lần lượt ở E và P. Chứng minh tứ giác PEDC nội tiếp được đường tròn.

Hướng dẫn giải

Ta có : $MEP = \dfrac{sd\left(AD + MB\right)}{2}$ (góc có đỉnh nằm bên trong (O))



Mà $DCP = \dfrac{sd\,DM}{2}$ (góc nội tiếp)

Hay $\Rightarrow DCP = \dfrac{sd\left(AD + MA\right)}{2}$

Lại có : $AM = MB$

Nên : $\mathrm{MEP} = DCP$

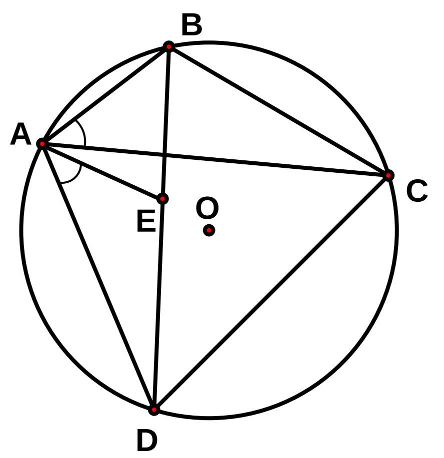
Nghĩa là: Tứ giác PEDC có góc ngoài tại đỉnh E bằng góc trong tại đỉnh C. Vậy tứ giác PEDC nội tiếp được đường tròn.

Bài 7: ***Định lý Ptoleme.***

Ta có : Tứ giác ABCD nội tiếp (O) Ta phải chứng minh: AC. BD = AB. DC + AD. BC

Hướng dẫn giải

Lấy E $\in$ BD sao cho $\mathrm{BAC} = \mathrm{EAD}$



$\Rightarrow \Delta DAE \sim \Delta CAB$ (g. g)

$\Rightarrow \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{DE}{BC}$

$\Rightarrow$ AD. BC = AC. DE (1)

Tương tự: $\Delta BAE \sim \Delta CAD$ (g. g)

$\Rightarrow \dfrac{\mathrm{BE}}{\mathrm{CD}} = \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}$

$\Rightarrow$ BE. AC = CD. AB (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ AD. BC + AB. CD = AC. DE + EB. AC

$\Rightarrow$ AD. BC + AB. CD = AC. DB (đpcm)

II. Chứng minh các điểm cùng thuộc đường tròn

Bài 1: Cho hình thoi ABCD có góc A bằng 60^0 , AB = a. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng 6 điểm E, F, G, H, B, D cùng nằm trên một đường tròn. Xác định tâm và tính bán kính của đường tròn đó theo a.

Hướng dẫn giải

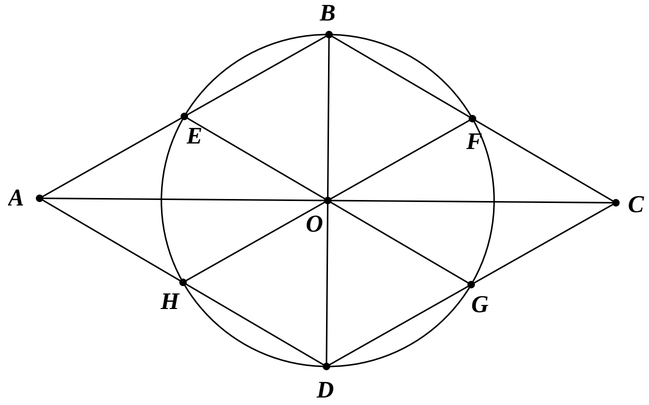
Gọi O là giao điểm của AC và BD ta có OB = OD

Do ABCD là hình thoi nên ta có $AC \perp BD$.

Ta có $BAD = 60^0$ nên $BAO = 30^0$ (tính chất đường chéo hình thoi)

Tam giác ABO vuông tại O có

$OB = ABsinBAO \Rightarrow OB = a.\sin 30^0 = \frac{a}{2}$



Xét tam giác vuông ABO có $ABO + BAO = 90^0$ (hai góc phụ nhau) mà $BAO = 30^0$ suy ra $ABO = 60^0$ hay $EBO = 60^0$

$OE = \frac{1}{2}AB = EB = EA$ (tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông và E là trung điểm của AB.

Tam giác EOB là tam giác cân tại E có $EBO = 60^0$ nên tam giác EBO là tam giác đều

$\Rightarrow OE = OB$

Chứng minh tương tự với các tam giác vuông BOC, COD và DOA ta có :

$OE = OB = OF = OC = OG = OD = OH$

Vậy 6 điểm E, F, G, H, B, D cùng nằm trên một đường tròn tâm O. Bán kính $OB = \frac{a}{2}$

Bài 2: Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên AC lấy điểm D. Hình chiếu của D lên BC là E, điểm đối xứng của E qua BD là F. Chứng minh 5 điểm A, B, E, D, F cùng nằm trên một đường tròn. Xác định tâm O của đường tròn đó.

Hướng dẫn giải

Do $DE \perp BC \Rightarrow DBE = 90^0$

Vì E và F đối xứng với nhau qua BD nên BD là đường trung trực của đoạn thẳng EF

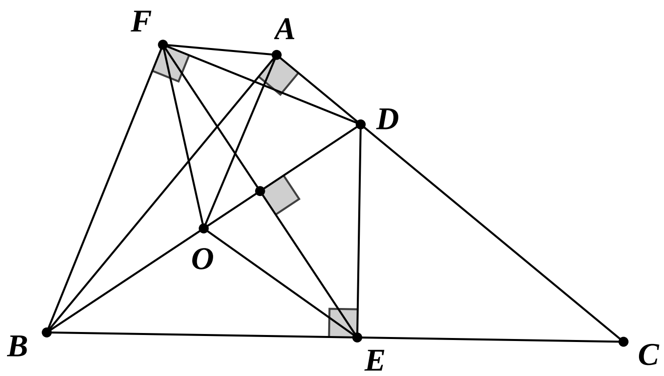
$\Rightarrow BF = BE; DF = DE$

$\Delta BFD = \Delta BED$ (c-c-c) $\Rightarrow BFD = BED = 90^0$

Cách 1.

Gọi O là trung điểm của BD.

Xét tam giác vuông ABD vuông tại A có AO là trung tuyến nên $AO = \frac{1}{2}BD = OB = OD$ (1)



Tam giác vuông BDE vuông tại E có OE là trung tuyến nên $EO = \frac{1}{2}BD = OB = OD$ (2)

Tam giác vuông BFDvuông tại F có OF là trung tuyến nên $FO = \frac{1}{2}BD = OB = OD$ (3)

Từ (1),(2),(3) $\Rightarrow OA = OB = OD = OE = \mathrm{OF}$. Vậy 5 điểm A, B, E, D, F cùng nằm trên một đường tròn tâm O với O là trung điểm của BC.

Cách 2:

① Tứ giác BADE có $BAD + DEB = 180^0$ nên tứ giác BADE là tứ giác nội tiếp.

Tâm của đường tròn này là trung điểm của BD

② Tứ giác BFDE có $BFD + DEB = 180^0$ nên tứ giác BFDE là tứ giác nội tiếp.

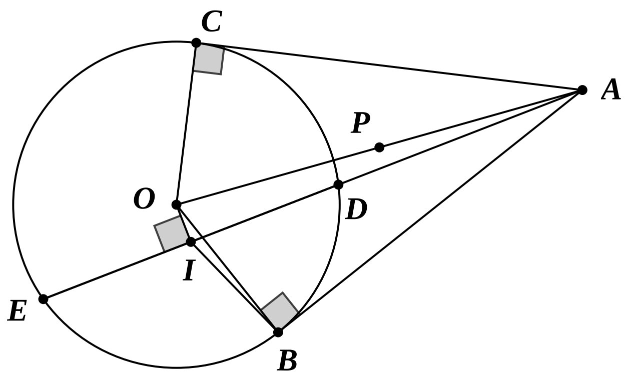
Tâm của đường tròn này là trung điểm của BD

Từ ① và ② suy ra 5 điểm A, B, E, D, F cùng nằm trên một đường tròn tâm O với O là trung điểm của BC.

Bài 3: Từ một điểm A ở ngoài đường tròn (O) vẽ các tiếp tuyến AB, AC. Cát tuyến ADE không đi qua tâm O (D nằm giữa A và E). Gọi I là trung điểm của DE.

Chứng minh 5 điểm O,B,A,C,I cùng thuộc một đường tròn.

Hướng dẫn giải



Do AC và AB là các tiếp tuyến nên

$OCA = OBA = 90^0$

Do I là trung điểm của ED nên $OI \perp ED$

(đường kính đi qua trung điểm của dây thì vuông góc với dây cung)

hay $OID = OIA = 90^0$

Gọi P là trung điểm của OA

Xét tam giác vuông OCA có CP là đường trung tuyến nên $CP = \frac{1}{2}AO = OP = PA$

Xét tam giác vuông OBA có BP là đường trung tuyến nên $BP = \frac{1}{2}AO = OP = PA$

Xét tam giác vuông OIA có IP là đường trung tuyến nên $IP = \frac{1}{2}AO = OP = PA$

Vậy $OP = PA = PC = PI = PB$ nên 5 điểm O,B,A,C,I cùng thuộc một đường tròn.

---- Hết -----