

CHUYÊN ĐỀ 1: RÚT GỌN CĂN THỨC

Bài 1. (Mỹ Đức 2020). Cho biểu thức $P = \left(\frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2} \right) : \frac{2\sqrt{x}+3}{10x+5\sqrt{x}}$, với

$x > 0; x \neq 4$.

a) Rút gọn P

b) Tính giá trị của P khi $x = \sqrt{13} + \sqrt{12} - \sqrt{28+16\sqrt{3}} + 6$.

c) Cho biểu thức $B = \frac{\sqrt{x}-2}{x+2\sqrt{x}}$. Tìm x để biểu thức $M = P.B$ có giá trị nguyên.

Bài 2. (Mỹ Đức 2019). Cho $P = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$, với $x \geq 0; x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm x để $P = \frac{2}{7}$

c) So sánh P^2 và 2P.

Bài 3. (Mỹ Đức 2018). Cho $P = \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2x+\sqrt{x}-1}{1-x} + \frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}} \right)$, với

$x > 0; x \neq \frac{1}{4}; x \neq 1$.

a) Rút gọn P

b) Tính giá trị của P khi $x = \frac{8\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$.

c) So sánh P với \sqrt{P} .

Bài 4. (Mỹ Đức 2017). Cho biểu thức $P = \frac{x+\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}+1} : \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{2-x}{x-\sqrt{x}} \right)$,

a) Tìm điều kiện xác định của P và rút gọn P.

b) Tính giá trị của P với $x = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} \cdot \sqrt{\frac{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}}$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P khi $x > 1$.

Bài 5. (Mỹ Đức 2016). Cho $P = \left(1 - \frac{x-3\sqrt{x}}{x-9} \right) : \left(\frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6} - \frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} \right)$.

a) Rút gọn P

b) Tính giá trị của P, biết $\sqrt{x} = (2+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

c) Với $x > 4; x \neq 9$. Tìm giá trị lớn nhất của $P.(x+1)$.

Bài 6. (Mỹ Đức 2015). Cho biểu thức $P = \frac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3} - \frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}$.

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tính giá trị của biểu thức P với $x = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Bài 7. (Mỹ Đức 2014). Cho biểu thức $M = \left(\frac{\sqrt{x}}{x-1} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(\frac{2-x}{x\sqrt{x}+x} - \frac{2}{x} \right)$, với $x > 0; x \neq 1$.

- Rút gọn biểu thức M
- Tìm x để $M > -2$.
- Tìm x để $\sqrt{-M}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Bài 8. (Mỹ Đức 2013). Cho biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$.

- Rút gọn biểu thức A
- Tìm các giá trị của x để $A < 1$.
- Tìm các giá trị nguyên của x để A cũng là số nguyên.

Bài 9. (Mỹ Đức 2012). Cho biểu thức:

$$P = \frac{3x + \sqrt{9x} - 3}{x + \sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1} + \frac{1}{\sqrt{x} + 2} - 1$$

- Rút gọn P
- Tìm giá trị của x để $|P| = 1$
- Tìm các giá trị x thuộc N để P thuộc N.

Bài 10. (Mỹ Đức 2011).

1) Cho $P = \left(\frac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} + \frac{8x}{4-x} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right)$.

- Rút gọn P
- Tìm giá trị của x để $P = -1$

2) Rút gọn biểu thức $A = \frac{2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$.

Bài 11. (Mỹ Đức 2010).

1) Cho biểu thức $P = \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} + \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$.

- Rút gọn P
- Tìm m để có x thỏa mãn $P(\sqrt{x}+3) = m$.

2) Tính $B = \frac{1}{1+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{13}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2005}+\sqrt{2009}}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+4}} = \frac{\sqrt{n+4}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+4}+\sqrt{n})(\sqrt{n+4}-\sqrt{n})} = \frac{\sqrt{n+4}-\sqrt{n}}{(n+4)-n} = \frac{\sqrt{n+4}-\sqrt{n}}{4}$, với

mọi $n \in \mathbb{N}^* (1)$.

Áp dụng (1) với $n = 1; 5; 9; \dots; 2005$ ta được

$$B = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{1}}{4} + \frac{\sqrt{9}-\sqrt{5}}{4} + \dots + \frac{\sqrt{2009}-\sqrt{2005}}{4} = \frac{\sqrt{2009}-1}{4}.$$

Bài 12. (Mỹ Đức 2009).

- 1) Cho $P = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1}$.
- a) Rút gọn P
b) Tìm giá trị nhỏ nhất của P.
- 2) Tính giá trị của biểu thức $M = 3x^{2009} + 2x^{2007} + 2005$, với
- $$x = \sqrt[3]{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48 - 10\sqrt{7} + 4\sqrt{3}}}} - 2.$$

Bài 13. (Mỹ Đức 2008)

- 1) Cho biểu thức $A = \frac{x\sqrt{x} + 26\sqrt{x} - 19}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}$.
- a) Tìm điều kiện xác định của A và rút gọn A
b) Tìm giá trị nhỏ nhất của A.
- 2) Tính giá trị của biểu thức $P = x^{2007} + 2x^{2008} + 3x^{2009}$, với
- $$x = \sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt{9 + \frac{125}{27}}}.$$

Bài 14. (Mỹ Đức 2007).

- 1) Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{x-2\sqrt{x}-3}{x-1} \right) : \left(\frac{x+3}{x-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} \right)$, với $x \geq 0; x \neq 1$.
- a) Rút gọn biểu thức A
b) Tìm các giá trị của x để giá trị của biểu thức A là một số nguyên.
- 2) Tính giá trị của biểu thức $B = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2007}+\sqrt{2008}}$.

Bài 15. (Mỹ Đức 2014). Cho $a > 0, b > 0$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$. Chứng minh rằng $\sqrt{a+b} = \sqrt{a-1} + \sqrt{b-1}$.

Bài 16. (HSG Mỹ Đức -). Cho hai số dương $a, b > 0$ và số $c \neq 0$ thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$.

Chứng minh rằng $\sqrt{a+b} = \sqrt{a+c} + \sqrt{b+c}$.

Bài 17. (Mỹ Đức 2013 Vòng 2). Tính giá trị của biểu thức $A = (x^3 + 12x - 31)^{2010}$ tại

$$x = \sqrt[3]{16 - 8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16 + 8\sqrt{5}}.$$

Bài 18. (Mỹ Đức 2020 Vòng 2). Cho ba số a, b, c thỏa mãn $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 7$; $a + b + c = 23$;

$$\sqrt{abc} = 3. \text{ Tính giá trị của biểu thức } H = \frac{1}{\sqrt{ab} + \sqrt{c} - 6} + \frac{1}{\sqrt{bc} + \sqrt{a} - 6} + \frac{1}{\sqrt{ca} + \sqrt{b} - 6}.$$

Bài 19. (Mỹ Đức 2019 Vòng 2).

- 1) Cho biểu thức $M = \frac{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}}{a-b} - \frac{a}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{b}{\sqrt{b} - \sqrt{a}}$, với $a, b \geq 0$ và $a \neq b$.
- a) Rút gọn biểu thức M
b) Tính giá trị của biểu thức M, biết $(1-a)(1-b) + 2\sqrt{ab} = 1$.
- 2) Tìm các số nguyên a, b thỏa mãn $\frac{5}{a+b\sqrt{2}} - \frac{4}{a-b\sqrt{2}} + 18\sqrt{2} = 3$.

Bài 20. (Mỹ Đức 2009 Vòng 2). Chứng minh rằng biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của x ,

$$\text{với điều kiện } x \geq 0: A = \sqrt{x} + \frac{\sqrt[3]{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt[6]{7+4\sqrt{3}} - x}{\sqrt[4]{9-4\sqrt{5}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{5}} + \sqrt{x}}.$$

Bài 21. (Mỹ Đức 2009 Vòng 2). Cho $N = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{169}}$ không phải là số nguyên.

Bài 22. (Mỹ Đức 2011 Vòng 2). Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c + 2\sqrt{abc} = 1$. Chứng minh rằng biểu thức $B = \sqrt{a(1-b)(1-c)} + \sqrt{b(1-c)(1-a)} + \sqrt{c(1-a)(1-b)} - \sqrt{abc} + 2011$ là một hằng số.

CHUYÊN ĐỀ 2: PHƯƠNG TRÌNH – HỆ PHƯƠNG TRÌNH

I. PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO

Bài 1. (Mỹ Đức 2015). Giải các phương trình $6x^4 - 11x^3 - 3x^2 + 11x - 3 = 0$.

Bài 2. (Hà Nội 2010). Giải phương trình $x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 6x + 4 = 0$.

Bài 3. (HN Chuyên Tin 2015). Giải phương trình $(2x^2 - 6x + 5)(2x - 3)^2 = 1$.

Bài 4. (Mỹ Đức 2016). Giải phương trình $3x^3 = 12x^2 - 6x + 1$.

II. PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

1. PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG HẸNG ĐẲNG THỨC $\sqrt{A^2} = |A|$.

Bài 1. (Mỹ Đức 2019). Giải phương trình $\sqrt{4x^2 + 20x + 25} + \sqrt{x^2 + 6x + 9} = 7$ (1).

Bài 2. (Mỹ Đức 2013). Giải phương trình $\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} = 4$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 5$.

Bài 3. (Mỹ Đức 2015). Giải phương trình $\sqrt{x+3+4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 5$ (1).

2. PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG HAI VẾ

Bài 1. (Mỹ Đức 2020). Giải phương trình $\sqrt{2x-1} = \sqrt{x+8} - \sqrt{x+3}$ (1).

3. PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

Bài 1. (QGHN 2009). Giải phương trình $x^2 - x + 2 = 2\sqrt{x^2 - x + 1}$.

Bài 2. (HN 2016 Chuyên Tin). Giải phương trình $(2x-1)^2 - 9 = 4\sqrt{x^2 - x}$ (1).

Bài 3. (HN 2017 Chuyên Tin). Giải phương trình $\sqrt{5x-x^2} + 2x^2 - 10x + 6 = 0$.

Bài 4. (HN 2017 Chuyên Toán). Giải phương trình $\sqrt{6x-x^2} + 2x^2 - 12x + 15 = 0$ (1).

Bài 5. (QGHN 1998). Giải phương trình $\sqrt{2-x^2} + \sqrt{x^2+8} = 4$.

Bài 6. (QGHN 2002). Giải phương trình $\sqrt{8+\sqrt{x}} + \sqrt{5-\sqrt{x}} = 5$.

Bài 7. (Mỹ Đức 2017). Giải phương trình $5x + 2\sqrt{6x^2 + 11x + 4} = 4(\sqrt{2x+1} + \sqrt{3x+4}) + 16$ (1).

Bài 8. (QGHN 2005 vòng 2). Giải phương trình $\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} + \sqrt{4-x^2} = 2$.

Bài 9. (QGHN 1994 vòng 1). Giải phương trình $x^2 + 2x + 4 = 3\sqrt{x^3 + 4x}$.

Bài 10. (HSG Hà Nội 2010). Giải phương trình $2(x^2 + 2x + 3) = 5\sqrt{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}$.

Bài 11. (HSG HN 2018). Giải pt $6x^2 + 2x + 1 = 3x\sqrt{6x + 3}$.

Bài 12. (Chuyên Tin HN 2018). Giải phương trình $x^2 + 2x + 7 = (x + 3)\sqrt{x^2 + 5}$.

Bài 13. (HN 2016 Chuyên Toán). Giải phương trình $x^4 - 2x^3 + x - \sqrt{2(x^2 - x)} = 0$.

Bài 14. (HSG HN 2019). Giải phương trình $\sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1}$.

4. PHƯƠNG PHÁP ĐƯA VỀ PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

Bài 1. (KHTN 2012 Vòng 1). Giải phương trình $\sqrt{x+9} + 2012\sqrt{x+6} = 2012 + \sqrt{(x+9)(x+6)}$ (1).

Bài 2. (KHTN 2009 Vòng 2). Giải phương trình $14\sqrt{x+35} + 6\sqrt{x+1} = 84 + \sqrt{x^2 + 36x + 35}$ (1).

Bài 3. (QGHN 2002 Vòng 2). Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x+3} = \sqrt{x-2} + \sqrt{x^2 + 2x - 3}$.

Bài 4. (KHTN 2010 Vòng 1). Giải phương trình $\sqrt{2x+1} + 3\sqrt{4x^2 - 2x + 1} = 3 + \sqrt{8x^3 + 1}$.

Bài 5. (QGHN 2000). Giải phương trình $\sqrt{x-1} + \sqrt{x^3 + x^2 + x + 1} = 1 + \sqrt{x^4 - 1}$.

Bài 6. (HN 2010). Giải phương trình $x^2 + 4x + 7 = (x+4)\sqrt{x^2 + 7}$.

Bài 7. (KHTN 2008). Giải phương trình $(2x+7)\sqrt{2x+7} = x^2 + 9x + 7$.

Bài 8. (QGHN 2010). Giải phương trình $\sqrt{2x+1} + 3\sqrt{4x^2 - 2x + 1} = 3 + \sqrt{8x^3 + 1}$.

5. PHƯƠNG PHÁP NHÂN LIÊN HỢP

Bài 1. (KHTN 2016 Vòng 1). Giải phương trình $\sqrt{7x+2} - \sqrt{5-x} = \frac{8x-3}{5}$ (1).

Bài 2. (KHTN 2018). Giải phương trình $x^2 - x + 2\sqrt{x^3 + 1} = 2\sqrt{x+1}$.

Bài 3. (KHTN 2012 Vòng 2). Giải phương trình $(\sqrt{x+4} - 2)(\sqrt{4-x} + 2) = 2x$.

Bài 4. (QGHN 2003). Giải phương trình $(\sqrt{x+5} - \sqrt{x+2})(1 + \sqrt{x^2 + 7x + 10}) = 3$.

Bài 5. (Hà Nội 2012). Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 12} + 5 = 3x + \sqrt{x^2 + 5}$.

Bài 6. (Mỹ Đức 2008). Giải phương trình $(\sqrt{x+5} - \sqrt{x+2})(1 + \sqrt{x^2 + 7x + 10}) = 3$ (1).

6. PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ

Bài 1. (QGHN 2004 Vòng 2). Giải phương trình $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-1} = 2$.

Bài 2. (KHTN 2010 Vòng 2). Giải phương trình $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = 4$.

Bài 3. (QGHN 1996). Giải phương trình $(\sqrt{x-1} + 1)^3 + 2\sqrt{x-1} = 2 - x$.

Bài 4. (QGHN 2005). Giải phương trình $x + 4\sqrt{x+3} + 2\sqrt{3-2x} = 11$.

Bài 5. (Lê Hồng Phong 1999). Giải phương trình $x^2 + 4x + 5 = 2\sqrt{2x+3}$.

Bài 6. (QGHN 2001). Giải phương trình $4\sqrt{x+1} = x^2 - 5x + 14$ (1).

Bài 7. (HN Chuyên Toán 2015). Giải phương trình $x - \sqrt{x-8} - 3\sqrt{x} + 1 = 0$ (1).

Bài 8. (Hà Nội chuyên tin 2014). Giải pt $5x^4 + 2x + 2 - 2\sqrt{2x+1} = 0$ (1).

Bài 9. (Hà Nội chuyên toán 2014). Giải phương trình $x(5x^3 + 2) - 2(\sqrt{2x+1} - 1) = 0$.

Bài 10. (Hà Nội chuyên 1994 – vòng 1). Giải phương trình

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{y+1995} + \sqrt{z-1996} = \frac{1}{2}(x+y+z) \quad (1).$$

Bài 11. (Lê Hồng Phong 1993 – 1994 ban A, B). Tìm x, y, z:

$$x+y+z+4 = 2\sqrt{x-2} + 4\sqrt{y-3} + 6\sqrt{z-5}.$$

Bài 12. (QGHN 1999). Giải phương trình $\sqrt{\frac{x+7}{x+1}} + 8 = 2x^2 + \sqrt{2x-1}$.

Bài 13. (Chuyên Sư Phạm 2014). Tìm tất cả các số thực x, y, z thỏa mãn

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{2-z^2} + z\sqrt{3-x^2} = 3.$$

Bài 14. (Hà Nội – 1995 – vòng 2). Giải phương trình $\sqrt{x-94} + \sqrt{96-x} = x^2 - 190x + 9027$ (1).

Bài 15. (Mỹ Đức 2011). Giải phương trình $\frac{\sqrt{x-2010}-1}{x-2010} + \frac{\sqrt{y-2011}-1}{x-2011} + \frac{\sqrt{z-2012}-1}{x-2012} = \frac{3}{4}$.

Bài 16. (Hà Nội – Chuyên 1997 – vòng 2). Giải phương trình $\sqrt[3]{x^2-4x+31} + x^2 = 4x-1$.

Bài 17. (HSG Hà Nội 2017). Giải phương trình $\sqrt{2x-\frac{3}{x}} + \sqrt{\frac{6}{x}-2x} = 1 + \frac{3}{2x}$.

V. TOÁN TỔNG HỢP

Bài 1. (Hà Nội 1993). Giải phương trình $\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+\sqrt{x}} = \frac{2+\sqrt{x}}{2x}$.

Bài 2. (Hà Nội Chuyên 2000 Vòng 2). Giải phương trình $x^4 + \sqrt{x^2+1999} = 1999$.

Bài 3. (QGHN 2003). Giải phương trình $(\sqrt{x+5} - \sqrt{x+2})(1 + \sqrt{x^2+7x+10}) = 3$.

Bài 1. (KHTN 2011 Vòng 2). Giải phương trình $(\sqrt{x+3} - \sqrt{x})(\sqrt{1-x} + 1) = 1$.

Bài 4. (QGHN 2005). Giải phương trình $x + 4\sqrt{x+3} + 2\sqrt{3-2x} = 11$.

Bài 5. (QGHN 2008). Giải phương trình $(2x+7)\sqrt{2x+7} = x^2 + 9x + 7$.

Bài 6. (Hà Nội 2014). Giải phương trình $x^2 - 2x - 2\sqrt{2x-1} - 2 = 0$.

Bài 7. (Hà Nội 2011). Giải phương trình $2(x^2 + 2x + 3) = 5\sqrt{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}$.

Bài 8. (QGHN 2001). Giải phương trình $\sqrt{x(3x+1)} - \sqrt{x(x-1)} = \sqrt{2x^2}$.

Bài 9. (Hà Nội 2002). Giải phương trình $x+1 = \sqrt{2(x+1)} + 2\sqrt{2(x+1)+2\sqrt{4(x+1)}}$.

Bài 10. (Hà Nội 2006). Giải phương trình $x^2 - 1 = 3\sqrt{3x+1}$.

Bài 11. (Hà Nội 2015). Giải phương trình $x\sqrt{3-2x} = 3x^2 - 6x + 4$.

Bài 12. (Hà Nội 2004). Giải phương trình $x^2 - 2(x+1)\sqrt{x^2-1} - 3x^2 + 6x - 1 = 0$.

Bài 13. (KHTN 2016 Vòng 2). Giải phương trình $\sqrt{5x^2 + 6x + 5} = \frac{64x^3 + 4x}{5x^2 + 6x + 6}$.

Bài 14. (QGHN 2000). Giải phương trình $\frac{4}{x} + \sqrt{x - \frac{1}{x}} = x + \sqrt{2x - \frac{5}{x}}$.

Bài 15. (Hà Nội 2007). Giải phương trình $\sqrt{x^2 - \frac{1}{4x}} \sqrt{x - \frac{1}{4x}} = x$, với $x > \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$.

III. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Bài 1. (Mỹ Đức 2009). Giải phương trình $|x+1| + 3|x-1| = x+2 + |x| + 2|x-2|$.

Bài 2. (Mỹ Đức 2007). Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + y = -1 \\ x + y = -m \end{cases}$. Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất (x;y) thỏa mãn $y^2 = x$.

CHUYÊN ĐỀ 3: LÝ THUYẾT CHIA HẾT - PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

Bài 1. (Mỹ Đức 2012). Cho $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2008} + 2^{2009}$. Chứng minh rằng A chia hết cho 31

Bài 2. (Mỹ Đức 2010). Tìm các cặp số nguyên x, y thỏa mãn $5x + 25 = -3xy + 8y^2$.

Bài 3. (Mỹ Đức 2011). Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình $5x + 25 = -3xy + 8y^2$.

Bài 4. (Mỹ Đức 2020). Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $2xy - x - 6y^2 + 11y = 9$ (1).

Bài 5. (Mỹ Đức 2017). Tìm tất cả các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn $y^2 + 2xy - 3x - 2 = 0$ (1).

Bài 6. (Mỹ Đức 2007). Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^3 - x^2y + 3x - 2y - 5 = 0$ (1).

Bài 7. (Mỹ Đức 2008 + 2018). Tìm tất cả các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn

$$x^2 + 2y^2 + 2xy + y - 2 = 0 \quad (1).$$

Bài 8. (Mỹ Đức 2014). Tìm các nghiệm nguyên của phương trình $x^2 - 4xy + 5y^2 = 169$ (1).

Bài 9. (Mỹ Đức 2009). Tìm các cặp số nguyên (x;y) thỏa mãn $2y^2x + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy$ (1).

Bài 10. (Mỹ Đức 2019). Tìm tất cả các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn

$$(x - 2019)^2 = y^4 - 6y^3 + 11y^2 - 6y \quad (1).$$

Bài 11. (Mỹ Đức 2016). Tìm các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn $x + y + xy = x^2 + y^2$ (1).

Bài 12. (Mỹ Đức 2013). Tìm các số nguyên x để biểu thức sau là số chính phương:

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

Bài 13. (Mỹ Đức 2018). Tìm số tự nhiên x, y biết $(2^x + 1)(2^x + 2)(2^x + 3)(2^x + 4) - 5^y = 11879$.

Bài 14. (Mỹ Đức 2017). Tìm số tự nhiên n để $(n+18)$ và $(n-41)$ là hai số chính phương.

Bài 15. (Mỹ Đức 2019). Tìm tất cả các bộ số nguyên dương $(x; y; z)$ thỏa mãn $\frac{x+y\sqrt{2019}}{y+z\sqrt{2019}}$ là số hữu tỉ, đồng thời $x^2 + y^2 + z^2$ là số nguyên tố.

Bài 16. (Mỹ Đức 2020). Tìm tất cả các số nguyên dương a, b sao cho $a+b^2$ chia hết cho a^2b-1 .

CHUYÊN ĐỀ 4: BẤT ĐẲNG THỨC – GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT

I. BẤT ĐẲNG THỨC

Bài 1. (Mỹ Đức 2013). Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng $\left(a + \frac{b}{ac}\right)\left(b + \frac{c}{ba}\right)\left(c + \frac{a}{bc}\right) \geq 8$.

Bài 2. (Mỹ Đức 2007). Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng $\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Bài 3. (Mỹ Đức 2015). Cho hai số dương x, y thỏa mãn $x + y = 1$. Chứng minh rằng

$$N = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

Bài 4. (Mỹ Đức 2010). Chứng minh rằng $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}$ (1), với $a \geq 1; b \geq 1$.

Bài 5. (Mỹ Đức 2011). Chứng minh rằng với $a, b, c > 0$ thì $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$.

Bài 6. (Mỹ Đức 2014). Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng $\frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+a^2} \geq \frac{a+b+c}{2}$.

II. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT

Bài 1. (Mỹ Đức 2011). Cho $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của $C = ab + 2bc + 3ca$.

Bài 2. (Mỹ Đức 2012).

1) Chứng minh rằng với $x > 0; y > 0$ thì $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$.

2) Cho $x > 0; y > 0; z > 0$ và $x + y + z = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$D = \frac{x-1}{x} + \frac{y-1}{y} + \frac{z-4}{z}.$$

Bài 3. (Mỹ Đức 2008). Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $x + y + z = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$B = \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1}.$$

Bài 4. (Mỹ Đức 2019). Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x + y + z = 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$A = \frac{x^2}{x+2y+3z} + \frac{y^2}{y+2z+3x} + \frac{z^2}{z+2x+3y}.$$

Bài 5. (Mỹ Đức 2020). Cho x, y là các số thực lớn hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$B = \frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1}.$$

Bài 6. (Mỹ Đức 2009). Cho 2 số dương x, y thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$A = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{xy}.$$

Bài 7. (Mỹ Đức 2016). Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $x + y \leq 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{4}{x^2 + y^2} + \frac{13}{xy} + \frac{xy}{2} + 1.$$

Bài 8. (Mỹ Đức 2018). Cho hai số dương x, y thỏa mãn $xy + 4 \leq 2y$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P = \frac{xy}{x^2 + 2y^2}.$$

Bài 9. (Mỹ Đức 2017). Cho hai số dương x, y thỏa mãn điều kiện $x + y \geq 8$. Tìm giá trị nhỏ nhất

$$\text{của } P = 2x + 4y + \frac{9}{2x} + \frac{125}{2y} + 1977.$$

CHUYÊN ĐỀ 5: HÌNH HỌC

1. TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG – HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

Bài 1. (Mỹ Đức 2020). Cho hình vuông ABCD có cạnh a , N là điểm bất kỳ thuộc cạnh AB. Gọi E là giao điểm của CN và DA. Vẽ tia Cx vuông góc với CE và cắt AB tại F. Lấy M là trung điểm của EF.

a) Chứng minh rằng CM vuông góc với EF.

b) Chứng minh $NB \cdot DE = a^2$ và $\frac{1}{CN^2} + \frac{2}{FE^2} = \frac{1}{a^2}$.

c) Chứng minh ba điểm B, D, M thẳng hàng.

d) Tìm vị trí của điểm N trên cạnh AB sao cho diện tích tứ giác AEFC gấp 3 lần diện tích của hình vuông ABCD.

Bài 2. (Mỹ Đức 2019). Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $A = 60^\circ$. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi K là trung điểm của AH.

a) Chứng minh rằng $\frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC}$ và $EF = \frac{1}{2}BC$.

b) Chứng minh rằng $\angle EKF = 120^\circ$ và tính AH, biết $BC = 12\text{cm}$.

c) Chứng minh rằng $AD \cdot DH + BE \cdot EH + CF \cdot FH \leq \frac{AB^2 + AC^2 + BC^2}{4}$.

Bài 3. (Mỹ Đức 2018). Cho hình chữ nhật ABCD, gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ B xuống đường chéo AC của hình chữ nhật; gọi M, K theo thứ tự là trung điểm của AH và CD.

a) Gọi I và O theo thứ tự là trung điểm của AB và IC. Chứng minh rằng $MO = \frac{1}{2}IC$.

b) Tính số đo góc $\angle BMK$.

c) Hình chữ nhật ABCD có thêm điều kiện gì để tam giác MBK là tam giác cân.

d) Gọi P, Q lần lượt là hai điểm thuộc BM và BC. Xác định vị trí của P, Q trên các đoạn thẳng BM và BC để chu vi tam giác PHQ có giá trị nhỏ nhất.

Bài 4. (Mỹ Đức 2016). Cho hình vuông ABCD có AC cắt BD tại O. Gọi M là điểm bất thuộc cạnh BC (M khác B, C). Tia AM cắt đường thẳng CD tại N. Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $BE = CM$.

a) Chứng minh tam giác OEM vuông cân

b) Chứng minh $ME \parallel BN$

c) Từ C, kẻ CH vuông góc với BN tại H. Chứng minh ba điểm O, M, H thẳng hàng.

Bài 5. (Mỹ Đức 2015). Cho hình thoi ABCD có độ dài cạnh đáy bằng a và $\angle BAD = 60^\circ$. Đường thẳng qua C cắt tia đối tia BA, DA lần lượt tại M và N.

- Chứng minh rằng tích $BM \cdot DN$ không đổi.
- Chứng minh tam giác $\triangle BDM$ đồng dạng với tam giác $\triangle DNB$.
- Gọi K là giao điểm của BN và DM. Tính $\angle BKD$.

Bài 6. (Mỹ Đức 2014). Cho hình vuông ABCD và một điểm E bất kỳ trên cạnh BC. Tia Ax vuông góc với AE cắt CD kéo dài tại F. Kẻ trung tuyến AI của tam giác AEF và kéo dài cắt cạnh CD tại K. Đường thẳng qua E và song song với AB cắt AI tại G.

- Chứng minh rằng $AE = AF$.
- Chứng minh tứ giác EGFK là hình thoi
- Chứng minh $AF^2 = KF \cdot CF$.
- Giả sử E di động trên cạnh BC. Chứng minh rằng chu vi tam giác ECK không đổi.

Bài 7. (Mỹ Đức 2013). Cho hình chữ nhật ABCD. Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với đường chéo AC tại H. Gọi E, F, G theo thứ tự là trung điểm AH, BH, CD.

- Chứng minh rằng tứ giác EFCG là hình bình hành
- Chứng minh rằng $\angle BEG = 90^\circ$.
- Chứng minh rằng $\triangle AEB \sim \triangle BFC$.
- Từ F kẻ đường thẳng bất kỳ cắt CE, EG, CD tại M, N, P. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{FM} = \frac{1}{FN} + \frac{1}{FP}.$$

2. ĐƯỜNG TRÒN

Bài 1. (Mỹ Đức 2017). Cho đường tròn $(O; R)$, hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau, E là điểm chuyển động trên cung AD, EC cắt AB tại M.

- Tính $EA^2 + EB^2 + EC^2 + ED^2$ và $CE \cdot ME$ theo R.
- Chứng minh rằng EC là tia phân giác của góc $\angle AEB$.
- Chứng minh $\frac{1}{BE} + \frac{1}{AE} = \frac{\sqrt{2}}{EM}$.
- Trên BE lấy điểm F sao cho $BF = AE$. Khi E chuyển động trên cung AD thì F di chuyển trên đường nào?

Bài 2. (Mỹ Đức 2012). Cho đường tròn tâm $(O; R)$ và một dây $AB = \sqrt{3}R$. M là một điểm nằm trên dây AB; Vẽ đường tròn $(P; R_1)$ tiếp xúc với đường tròn tâm O tại A và đi qua điểm M. Vẽ đường tròn $(Q; R_2)$ đi qua điểm M và tiếp xúc với đường tròn tâm O tại B. Gọi N là giao điểm thứ 2 của 2 đường tròn tâm P và tâm Q.

- Chứng minh tứ giác PMQO là hình bình hành, từ đó suy ra hệ thức liên hệ giữa R, R_1 , R_2 .
- Chứng minh $\angle MNO = 90^\circ$
- Xác định vị trí của M để tứ giác PMQO có diện tích lớn nhất.

Bài 3. (Mỹ Đức 2011). Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Ax với đường tròn. Trên tia Ax lấy điểm K sao cho $AK \geq R$. Qua K kẻ tiếp tuyến KM với (O) . Đường thẳng d vuông góc với AB tại O cắt tia BM tại E.

- Chứng minh rằng bốn điểm K, A, O, M cùng thuộc một đường tròn.
- OK cắt AM tại I. Chứng minh rằng tích $OI \cdot OK$ không đổi khi K di chuyển trên Ax.
- Chứng minh tứ giác KAOE là hình chữ nhật.
- Gọi H là trực tâm tam giác KMA. Chứng minh rằng khi K chuyển động trên Ax thì H luôn thuộc một đường tròn cố định.

- Bài 4.** (Mỹ Đức 2009). Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Vẽ đường tròn tâm O đường kính AH, đường tròn này cắt AB, AC theo thứ tự tại D và E.
- Chứng minh tứ giác ADHE là hình chữ nhật và 3 điểm D, O, E thẳng hàng.
 - Các tiếp tuyến của đường tròn (O) cắt kẻ từ D và E cắt cạnh BC tương ứng tại M, N. Chứng minh rằng M, N lần lượt là trung điểm các đoạn HB, HC.
 - Cho $AB = 8\text{cm}$, $AC = 19\text{cm}$. Tính diện tích tứ giác MDEN.
- Bài 5.** (Mỹ Đức 2008). Cho đường tròn (O;R) và điểm A nằm ngoài (O), kẻ hai tiếp tuyến AM, AN với (O) (M, N là các tiếp điểm), đường thẳng chứa đường kính của đường tròn và song song với MN cắt AM, AN lần lượt tại B, C.
- Chứng minh $MC = NB$
 - Chứng minh $MA.MB = R^2$.
 - Lấy K là điểm bất kỳ trên cung nhỏ MN. Tiếp tuyến tại K của đường tròn (O) cắt AM, AN theo thứ tự tại P và Q. Chứng minh rằng $BC.CQ = \frac{BC^2}{4}$.
- Bài 6.** (Mỹ Đức 2010). Cho đường tròn (O;R), gọi BC là đường kính cố định, A là điểm di động trên đường tròn. Lấy AB làm cạnh để vẽ tam giác đều ABM có đỉnh M nằm ngoài đường tròn. Từ C vẽ CH vuông góc với MB tại H, gọi K là trung điểm của BH.
- Chứng minh $OK = \frac{1}{2}OM$.
 - Gọi D, E, F, D lần lượt là trung điểm của OC, CM, MH, OH. Chứng minh tứ giác DEFG là hình thoi.
 - Đặt $DG = x$, tính diện tích hình thoi DEFG theo x. Xác định vị trí của điểm A trên đường tròn để diện tích hình thoi DEFG lớn nhất.
- Bài 7.** (Mỹ Đức 2007). Cho đường tròn (O;R) và đường thẳng d cố định không có điểm chung với (O), M là một điểm di động trên d, qua M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB đến (O) (A, B là các tiếp điểm), OM cắt AB tại I.
- Chứng minh tích $OI.OM$ không đổi.
 - Tìm vị trí của điểm M trên d để tam giác MAB đều.
 - Chứng minh rằng khi M di động trên d thì đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

3. MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC KHÁC

- Bài 1.** (Mỹ Đức 2014 + Mỹ Đức 2009). Cho tam giác ABC có $A = 90^\circ$, cạnh $AB = c$, $AC = b$, đường phân giác $AD = d$. Chứng minh rằng $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{\sqrt{2}}{d}$.
- Bài 2.** (Mỹ Đức 2007). Cho tứ giác ABCD có độ dài $AB = 1, BC = \sqrt{2}; CD = \sqrt{3}$, đường chéo $AC = BD$ và AC, BD vuông góc với nhau. Tính số đo các góc của tứ giác ABCD.
- Bài 3.** (Mỹ Đức 2011). Tìm tất cả các tam giác vuông có số đo các cạnh là số nguyên và 2 lần số đo diện tích bằng 3 lần số đo chu vi.
- Bài 4.** (Mỹ Đức 2008). Cho tam giác có các số đo ba đường cao là các số nguyên, đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của tam giác có bán kính bằng 1. Chứng minh rằng tam giác đó là tam giác đều.
- Bài 5.** (Mỹ Đức 2015). Cho hình chữ nhật ABCD. Tìm tứ giác có 4 đỉnh thuộc 4 cạnh của hình chữ nhật sao cho chu vi tứ giác giá trị nhỏ nhất.

Bài 6. (Mỹ Đức 2016). Cho tam giác ABC nhọn, O là một điểm nằm trong tam giác. Các tia AO, BO, CO lần lượt cắt BC, AC, AB tại M, N, P. Chứng minh rằng $\frac{AM}{OM} + \frac{BN}{ON} + \frac{CP}{OP} \geq 9$.