LIÊN HỆ GIỮA THỨ TỰ VÀ PHÉP CÔNG, PHÉP NHÂN

Họ tên học sinh: ……………………………..………………………… Lớp: 8B1/8B2 Ngày: …. / … / 20….

I. Kiến thức cơ bản

Liên hệ giữa thứ tự và phép cộng

- Không cộng **cùng một số** vào cả hai vế của một bất đẳng thức ta được bất đẳng thức mới **cùng chiều** với bất đẳng thức đã cho.

Tổng quát: $\begin{cases} a > b \\ c \in R \end{cases} \Rightarrow a + c > b + c$

Liên hệ giữa thứ tự và phép nhân

- Khi nhân cả hai vế của bất đẳng thức với **cùng một số dương** ta được bất đẳng thức mới **cùng chiều** với bất đẳng thức đã cho.

- Khi nhân cả hai vế của bất đẳng thức với **cùng một số âm** ta được bất đẳng thức mới **ngược chiều** với bất đẳng thức đã cho.

Tổng quát: $a > b \Rightarrow \begin{cases} a.c > b.c \text{ nếu } c > 0 \\ a.c < b.c \text{ nếu } c < 0 \end{cases}$

II. Bài tập vận dụng

Bài 1: Hãy chứng minh các khẳng định sau:

a) Nếu $a > b$ thì $a - b > 0$

b) Nếu $a - b > 0$ thì $a > b$

Đáp án:

a) Nếu $a > b$ (1) thì $a - b > 0$

Ta cộng cả hai vế của (1) với $-b$ $(\forall b \in R)$ ta được : $a - b > b - b \Leftrightarrow a - b > 0 (dpcm)$

b) Nếu $a - b > 0$ (2) thì $a > b$

Ta cộng cả hai vế của (2) với b $(\forall b \in R)$ ta được : $a - b + b > b \Leftrightarrow a > b$ $(dpcm)$

Bài 2: Cho biết $a - 1 = b + 2 = c - 3$. Hãy sắp xếp các số a, b, c theo thứ tự tăng dần.

Đáp án:

Ta có:

$$a - 1 = b + 2 = c - 3$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a = b + 3 \\ a = c - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > b \\ a < c \end{cases}$$
$$\Rightarrow c > a > b$$

Vậy $b < a < c$

Bài 3: Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $a^4 - 2a^3 + a^2 \geq 0$

b) $x^2 + 2x + y^2 - 2y + 2 \geq 0$

c) $(x+y)^2 \geq 4xy$

d) $a^2 + 5 > 4a$

e) $a^2 + 1 > a$

f*) $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a+b+c)^2$

Đáp án:

a) $a^4 - 2a^3 + a^2 \geq 0$

Ta có:

$$a^4 - 2a^3 + a^2 = (a^2)^2 - 2.a^2.a + a^2 = (a^2 - a)^2 \geq 0 \ \forall a \in R$$

$\Rightarrow a^4 - 2a^3 + a^2 \geq 0$ *(dpcm)*

b) $x^2 + 2x + y^2 - 2y + 2 \geq 0$

Ta có:

$$\begin{aligned} & x^2 + 2x + y^2 - 2y + 2 \\ &= x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 \\ &= (x+1)^2 + (y-1)^2 \end{aligned}$$

Mà: $\begin{cases} (x+1)^2 \geq 0 \ \forall x \in R \\ (y-1)^2 \geq 0 \ \forall y \in R \end{cases} \Rightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 \geq 0 \ \forall x, y \in R$

$\Rightarrow x^2 + 2x + y^2 - 2y + 2 \geq 0$ *(dpcm)*

c) $(x+y)^2 \geq 4xy$

Ta có:

$$\begin{aligned} & (x+y)^2 - 4xy \\ &= x^2 + 2xy + y^2 - 4xy \\ &= x^2 - 2xy + y^2 \\ &= (x-y)^2 \geq 0 \ \forall x, y \in R \end{aligned}$$

$\Rightarrow (x+y)^2 - 4xy \geq 0$

$\Rightarrow (x+y)^2 \geq 4xy$ *(dpcm)*

d) $a^2 + 5 > 4a$

Ta có:

$$a^2+5-4a$$
$$=a^2-4a+4+1$$
$$=(a-2)^2+1>0$$

Mà: $(a-1)^2 \ge 0\ \forall a \in R \Rightarrow (a-1)^2+1>0\ \forall a \in R$

$\Rightarrow a^2+5-4a>0$

$\Rightarrow a^2+5>4a$ *(dpcm)*

e) $a^2+1>a$

Ta có:

$$a^2-a+1=a^2-a+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0\ \forall a \in R$$

$\Rightarrow a^2+1>a$ *(dpcm)*

Bài 4: Cho $m>n$, chứng minh rằng:

a) $3m+2>3n+2$

b) $5(m-1)>5(n-1)$

c) $4-7m<4-7n$

Đáp án:

a) $3m+2>3n+2$

Ta có : $m>n$

Nhân cả 2 vế của bất đẳng thức với 3 ta được: $3m>3n$

Cộng cả 2 vế bất đẳng thức với 2 ta được: $3m+2>3n+2$ *(dpcm)*

b) $5(m-1)>5(n-1)$

Ta có: $m>n$

Cộng cả 2 vế của bất đẳng thức với -1 ta đươc: $m-1>n-1$

Nhân cả 2 vế của bất đẳng thức với 5 ta được: $5(m-1)>5(n-1)$ *(dpcm)*

c) $4-7m<4-7n$

Ta có: $m>n$

Nhân cả 2 vế của bất đẳng thức với -7 ta được: $-7m<-7n$

Cộng cả 2 vế của bất đẳng thức với 4 ta được: $4-7m<4-7n$ *(dpcm)*

Bài 5: So sánh m^2 và m nếu:

a) $m>1$ b) $0<m<1$

Đáp án:

a)

Ta có: $m>1$

Nhân cả 2 vế của bất đẳng thức với m ($m>1$) ta được: $m^2>m$

Vậy với $m>1$ thì $m^2>m$

b)

Ta có: $0<m<1$

Nhân cả 2 vế của bất đẳng thức với m ($0<m<1$) ta được: $0<m^2<m$

Vậy với $0<m<1$ thì $m^2<m$

Bài 6: Cho $a>b>0$. Chứng minh rằng:

a) $a^2>ab$ b) $ab>b^2$ c) $a^2>b^2$

Đáp án:

a) $a^2>ab$

Ta có: $a>b$

Nhân cả 2 vế của bất đẳng thức với a $(a>0)$ ta được: $a^2>ab$ *(dpcm)*

b) $ab>b^2$

Ta có $a>b$

Nhân cả 2 vế của bất đẳng thức với $b\,(b>0)$ ta được: $ab>b^2$ *(dpcm)*

c) $a^2>b^2$

Vì $\begin{cases} a>b>0 \\ a^2>ab\ (cmt) \\ ab>b^2\ (cmt) \end{cases}$ nên $a^2>b^2$ *(dpcm)*

Bài 7: Chứng minh các bất đẳng thức sau với $a,b>0$:

a) $a^3+b^3-ab^2-a^2b\ge 0$ b) $a^5+b^5-a^4b-ab^4\ge 0$

Đáp án:

a) $a^3+b^3-ab^2-a^2b\ge 0$

Ta có:

$$\begin{aligned} & a^3+b^3-ab^2-a^2b \\ &=\left(a^3-ab^2\right)-\left(a^2b-b^3\right) \\ &=a\left(a^2-b^2\right)-b\left(a^2-b^2\right) \\ &=\left(a-b\right)\left(a^2-b^2\right) \\ &=\left(a-b\right)^2\left(a+b\right) \end{aligned}$$

Mà $a,b>0$ nên $\begin{cases} a+b>0 \\ \left(a-b\right)^2\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \left(a-b\right)^2\left(a+b\right)\ge 0$

$\Rightarrow a^3+b^3-ab^2-a^2b\ge 0$ *(dpcm)*

b) $a^5+b^5-a^4b-ab^4\ge 0$

Ta có:

$$\begin{aligned}
&a^5+b^5-a^4b-ab^4\\
&=\left(a^5-ab^4\right)-\left(a^4b-b^5\right)\\
&=a\left(a^4-b^4\right)-b\left(a^4-b^4\right)\\
&=\left(a-b\right)\left(a^4-b^4\right)\\
&=\left(a-b\right)\left(a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2\right)\\
&=\left(a-b\right)^2\left(a+b\right)\left(a^2+b^2\right)
\end{aligned}$$

Mà $a,b>0$ nên $\begin{cases} a+b>0 \\ \left(a-b\right)^2\ge 0 \\ a^2+b^2>0 \end{cases} \Rightarrow \left(a-b\right)^2\left(a+b\right)\left(a^2+b^2\right)\ge 0$

$\Rightarrow a^5+b^5-a^4b-ab^4\ge 0$ *(dpcm)*

Bài 8: Cho tích $A=\left(x^2-4\right)\left(x^2-14\right)\left(x^2-24\right)$. Biết rằng x là số nguyên dương và $A<0$

a) Hãy sắp xếp ba thừa số của tích A theo thứ tự nhỏ đến lớn.

b) Tìm số nguyên dương x.

Đáp án:

a) 3 thừa số của tích A lần lượt là $\left(x^2-4\right);\left(x^2-14\right);\left(x^2-24\right)$

Ta có: $-4>-14>-24$

Cộng 3 vế của bất đẳng thức với x^2 ta được: $x^2-4>x^2-14>x^2-24$

Vậy thứ tự từ nhỏ đến lớn của ba thừa số là: $x^2-24<x^2-14<x^2-4$

b) Tìm số nguyên dương x.

Ta có: $A<0\Rightarrow\exists$ ít nhất 1 thừa số trong A bé hơn 0

Mà $x^2-24<x^2-14<x^2-4\Rightarrow x^2-24<0\Leftrightarrow -2\sqrt{6}<x<2\sqrt{6}$

Kết hợp với x nguyên dương nên $x=\{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$

Với $x=1\Rightarrow A=-897$	thỏa mãn
Với $x=2\Rightarrow A=0$	loại
Với $x=3\Rightarrow A=375$	loại
Với $x=4\Rightarrow A=-192$	thỏa mãn

Vậy tập giá trị của x thỏa mãn đề bài là: $T=\{1;\ 4\}$

III. Bài tập bổ sung

Bài 1: Chứng minh rằng: $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge 2$ với $x,y>0$.

Đáp án:

Xét:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2=\frac{x^2+y^2-2xy}{xy}=\frac{(x-y)^2}{xy}$$

Ta có: $\left[\begin{array}{l} x,y>0 \\ (x-y)^2\geq 0\end{array}\right. \Rightarrow \frac{(x-y)^2}{xy}\geq 0$ Luôn đúng

$\Rightarrow \frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 0$ dpcm

Bài 2: Cho $x+y>1$ chứng minh rằng: $x^2+y^2>\frac{1}{2}$

Đáp án:

Ta có:

$\begin{cases}(x+y)^2>1 \\ (x-y)^2\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2+2xy>1 \\ x^2+y^2-2xy\geq 0\end{cases} \Rightarrow 2\left(x^2+y^2\right)>1 \Leftrightarrow x^2+y^2\geq\frac{1}{2}$ dpcm

Bài 3: Tìm giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a) $A=\frac{2x^2-4x+7}{x^2-2x+2}$

b) $B=\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)-\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+1$ với $x,y\neq 0; xy>0$

Đáp án:

a) $A=\frac{2x^2-4x+7}{x^2-2x+2}$ $(x\in R)$

Ta có:

$$A=\frac{2x^2-4x+7}{x^2-2x+2}=2+\frac{3}{x^2-2x+2}=2+\frac{3}{(x-1)^2+1}\leq 2+3=5$$

Vậy $\text{Max}_A=5$ khi $x=1$

b) $B=\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)-\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+1$ với $x,y\neq 0; xy>0$

Ta có:

$$\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2-2$$

$$\Rightarrow B=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2-\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)-1$$

Đặt: $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=t$ (DK: $t\geq 2$)

$$\Rightarrow B = t^2 - t - 1 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

Vì $t \ge 2 \Rightarrow t - \frac{1}{2} \ge \frac{3}{2} \Rightarrow B \ge \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 3$

Vậy $Min_B = 3$ khi $x = y$

IV. <u>Bài tập tự luyện</u>

Bài 1: Chưng minh rằng nếu $2x - a > 0$ thì $x > \frac{a}{2}$ với $a \in R$

<u>Đáp án:</u>

Ta có:

$$2x - a > 0 \Leftrightarrow 2x - a + a > a \Leftrightarrow 2x > a \Leftrightarrow \frac{2x}{2} > \frac{a}{2} \Leftrightarrow x > \frac{a}{2} \qquad \text{dpcm}$$

Bài 2: Chứng minh bất đẳng thức: $4\left(a^3 + b^3\right) \ge \left(a + b\right)^3$ với a và b là các số dương.

<u>Đáp án:</u>

Xét:

$$\begin{aligned}
&4\left(a^3 + b^3\right) - \left(a + b\right)^3 \\
&= 4a^3 + 4b^3 - \left(a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2\right) \\
&= 4a^3 + 4b^3 - a^3 - b^3 - 3a^2b - 3ab^2 \\
&= 3a^3 + 3b^3 - 3a^2b - 3ab^2 \\
&= \left(3a^3 - 3a^2b\right) - \left(3ab^2 - 3b^3\right) \\
&= 3a^2\left(a - b\right) - 3b^2\left(a - b\right) \\
&= 3\left(a - b\right)\left(a^2 - b^2\right) \\
&= 3\left(a - b\right)^2\left(a + b\right)
\end{aligned}$$

Vì a, b là các số dương nên: $\begin{cases} a + b > 0 \\ \left(a - b\right)^2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow 3\left(a - b\right)^2\left(a + b\right) \ge 0$

$$\Rightarrow 4\left(a^3 + b^3\right) - \left(a + b\right)^3 \ge 0$$

$$\Rightarrow 4\left(a^3 + b^3\right) \ge \left(a + b\right)^3 \qquad \text{dpcm}$$

Bài 3: Chứng minh bất đẳng thức sau với a, b là các số dương: $\frac{a + b}{ab} \ge \frac{4}{a + b}$

<u>Đáp án:</u>

Xét:

$$\frac{a+b}{ab}-\frac{4}{a+b}=\frac{(a+b)^2-4ab}{ab(a+b)}=\frac{a^2+2ab+b^2-4ab}{ab(a+b)}=\frac{a^2+b^2-2ab}{ab(a+b)}=\frac{(a-b)^2}{ab(a+b)}$$

Vì a, b là các số dương nên: $\begin{cases} ab(a+b)>0 \\ (a-b)^2\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{(a-b)^2}{ab(a+b)}\geq 0$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{ab}-\frac{4}{a+b}\geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{ab}\geq\frac{4}{a+b} \qquad \text{dpcm}$$

Bài 4: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a) $A=2x^2-8x+7$ b) $B=3x^2-3x+1$

c) $C=3-4x^2-4x$ d) $D=\frac{1}{x^2-6x+11}$

Đáp án:

a) $A=2x^2-8x+7$ $(x\in R)$

Ta có:

$$A=2x^2-8x+7=2(x^2-4x+4)-1=2(x-2)^2-1\geq -1$$

Vậy $Min_A=-1$ khi $x=1$

b) $B=3x^2-3x+1$ $(x\in R)$

Ta có:

$$B=3x^2-3x+1=3\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}=3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\geq\frac{1}{4}$$

Vậy $Min_B=\frac{1}{4}$ khi $x=\frac{1}{2}$

c) $C=3-4x^2-4x$ $(x\in R)$

Ta có:

$$C=3-4x^2-4x=-4\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)+4=-4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+4\leq 4$$

Vậy $Max_C=4$ khi $x=-\frac{1}{2}$

d) $D=\frac{1}{x^2-6x+11}$

Ta có:

$$D=\frac{1}{x^2-6x+11}=\frac{1}{\left(x-3\right)^2+2}\le\frac{1}{2}$$

Vậy $Max_D=\frac{1}{2}$ khi $x=3$

Bài 5*: Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $A=\left(1-\frac{1}{2^2}\right).\left(1-\frac{1}{3^2}\right).\left(1-\frac{1}{4^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)>\frac{1}{2}$ với số tự nhiên $n\ge 2$

b) $B=\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+...+\frac{1}{100^2}<0,3$

c) $C=\frac{1}{1^2+2^2}+\frac{1}{2^2+3^2}+...+\frac{1}{n^2+(n+1)^2}<0,45$ với số nguyên dương n

Đáp án:

a) $A=\left(1-\frac{1}{2^2}\right).\left(1-\frac{1}{3^2}\right).\left(1-\frac{1}{4^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)>\frac{1}{2}$ với số tự nhiên $n\ge 2$

Ta có:

$$1-\frac{1}{n^2}=\frac{n^2-1}{n^2}=\frac{\left(n-1\right)\left(n+1\right)}{n^2}$$

$$\Rightarrow A=\left(1-\frac{1}{2^2}\right).\left(1-\frac{1}{3^2}\right).\left(1-\frac{1}{4^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=\left(\frac{1.3}{2^2}\right).\left(\frac{2.4}{3^2}\right).\left(\frac{3.5}{4^2}\right)...\left(\frac{\left(n-1\right)\left(n+1\right)}{n^2}\right)$$

$$=\frac{1.2.3^2.4^2.5^2....\left(n-1\right)^2.n\left(n+1\right)}{2^2.3^2.4^2...n^2}$$

$$=\frac{\left(n+1\right)}{2n}>\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$$ dpcm

b) $B=\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+...+\frac{1}{100^2}<0,3$

Ta có:

$$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{\left(n-1\right)n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow B=\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+...+\frac{1}{100^2}$$

$$<\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5.6}+\frac{1}{6.7}+...+\frac{1}{99.100}$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + ... + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{5} - \frac{1}{100}$$

$= 0,2925 < 0,3$ dpcm

c) $C = \frac{1}{1^2+2^2} + \frac{1}{2^2+3^2} + ... + \frac{1}{n^2+(n+1)^2} < 0,45$ với số nguyên dương n

Ta có:

$$\frac{1}{n^2+\left(n+1\right)^2} = \frac{1}{2n^2+2n+1} < \frac{1}{2n^2+2n} = \frac{1}{2n\left(n+1\right)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{1^2+2^2} + \frac{1}{2^2+3^2} + ... + \frac{1}{n^2+(n+1)^2}$$

$$< \frac{1}{1^2+2^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$< \frac{1}{5} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = 0,45$ dpcm

---- *Hết* -----