

CÁC TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG CỦA TAM GIÁC VUÔNG ỨNG DỤNG THỰC TẾ CỦA TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

Họ tên học sinh: Lớp: 8B1/8B2 Ngày: / ... / 20....

I. Kiến thức cơ bản

Các trường hợp đồng dạng của tam giác vuông

Định lý 1: Một cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này tỉ lệ với cạnh huyền và cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng.

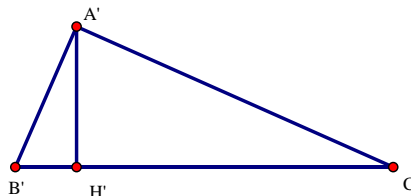
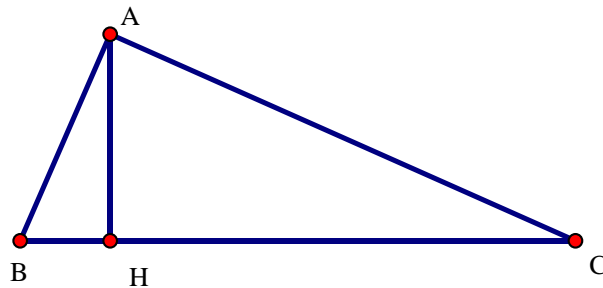
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Định lý 2: Tỉ số đường cao tương ứng của hai tam giác vuông đồng dạng bằng tỉ số đồng dạng.

$$\frac{AH}{A'H'} = \frac{BC}{B'C'} = k$$

Định lý 3: Tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng bằng bình phương tỉ số đồng dạng.

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = \left(\frac{BC}{B'C'} \right)^2 = k^2$$



II. Bài tập vận dụng

Bài 1: Cho tam giác A'B'C' đồng dạng với tam giác ABC với tỉ số đồng dạng là $k = \frac{3}{5}$

Phát biểu nào sau đây là đúng:

- a) Đường cao $AH = 6cm$ thì đường cao $A'H' = 10cm$.
- b) Đường cao $AH = 8cm$ thì đường cao $A'H' = 4,8cm$.
- c) $S_{\triangle A'B'C'} = 18cm^2$ thì $S_{\triangle ABC} = 30cm^2$.
- d) $S_{\triangle A'B'C'} = 18cm^2$ thì $S_{\triangle ABC} = 50cm^2$.

Đáp án:

Ta có:

Tỉ số đồng dạng là $k = \frac{3}{5}$

Với $AH = 6 \Rightarrow A'H' = k.AH = \frac{3}{5}.6 = 3,6(cm) \Rightarrow$ a) sai

Với $AH = 8 \Rightarrow A'H' = k.AH = \frac{3}{5}8 = 4,8 (cm) \Rightarrow b) \text{ đúng}$

Với $S_{\Delta A'B'C'} = 18cm^2 \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{k^2} . S_{\Delta A'B'C'} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 18 = 50cm^2 \Rightarrow c) \text{ sai, d) đúng}$

Bài 2: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 4,5cm$; $AC = 6cm$. Trên cạnh BC lấy D sao cho $CD = 2cm$. Đường thẳng đi qua D và vuông góc với BC cắt AC tại E , cắt tia đối của tia AB tại F .

a) Tính CE .

b) Tính $S_{\Delta EDC}$.

c) Chứng minh: $BD.BC = BA.BF$.

Đáp án:

a) Tính CE .

Áp dụng định lý Pythagore cho tam giác ΔCAB vuông tại A , ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 4,5^2 + 6^2 = 56,25 \Rightarrow BC = 7,5 (cm)$$

Xét ΔCDE và ΔCAB ta có:

Góc C chung

$$\widehat{CDE} = \widehat{CAB} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \Delta CDE \sim \Delta CAB \Rightarrow \frac{CE}{CB} = \frac{CD}{CA} \Rightarrow CE = \frac{CD}{CA} . CB = \frac{2}{6} . 7,5 = 2,5 (cm)$$

b) Tính $S_{\Delta EDC}$.

$$\text{Ta có: } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB.AC = \frac{1}{2} . 4,5 . 6 = 13,5 (cm^2)$$

$$\text{Lại có: } \Delta CDE \sim \Delta CAB \Rightarrow S_{\Delta CDE} = \left(\frac{CD}{CA}\right)^2 . S_{\Delta CAB} = \left(\frac{2}{6}\right)^2 . 13,5 = 1,5 (cm^2)$$

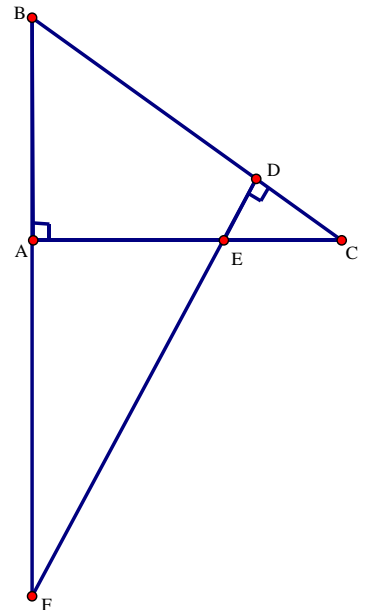
c) Chứng minh: $BD.BC = BA.BF$.

Xét ΔCAB và ΔFDB ta có:

Góc B chung

$$\widehat{CAB} = \widehat{FDB} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \Delta CAB \sim \Delta FDB \Rightarrow \frac{AB}{DB} = \frac{CB}{FB} \Rightarrow CB.DB = AB.BF \quad \text{đpcm}$$



Bài 3: Cho tam giác ABC , phân giác AD . Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của B và C lên AD .

a) Chứng minh: $\triangle ABE \sim \triangle ACF$; $\triangle BDE \sim \triangle CDF$.

b) Chứng minh: $AE \cdot DF = AF \cdot DE$.

Đáp án:

a) Chứng minh: $\triangle ABE \sim \triangle ACF$; $\triangle BDE \sim \triangle CDF$.

Xét $\triangle ABE$ và $\triangle ACF$ ta có:

$$\widehat{BAE} = \widehat{CAF} \text{ (vì AD là phần giác)}$$

$$\widehat{AEB} = \widehat{AFC} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle ACF \quad \text{dpcm}$$

Xét $\triangle BDE$ và $\triangle CDF$ ta có:

$$\widehat{BDE} = \widehat{CDF} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\widehat{BED} = \widehat{CFD} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle BDE \sim \triangle CDF \quad \text{dpcm}$$

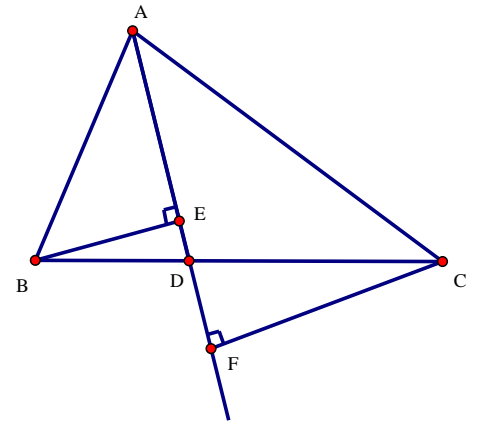
b) Chứng minh: $AE \cdot DF = AF \cdot DE$.

Ta có:

$$\triangle ABE \sim \triangle ACF \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{BE}{CF}$$

$$\triangle BDE \sim \triangle CDF \Rightarrow \frac{BE}{CF} = \frac{DE}{DF}$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{DE}{DF} \Rightarrow AE \cdot DF = AF \cdot DE \quad \text{dpcm}$$



Bài 4: Cho điểm O thuộc đoạn thẳng AB sao cho $AO = \frac{1}{3} AB$. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB , vẽ các

tia Ax , By , Oz vuông góc với AB . Lấy $M \in Ax$ và $N \in By$ sao cho $OM = \frac{1}{2} ON$.

a) Tính tỉ số diện tích $\triangle AOM$ và $\triangle BON$.

b) Chứng minh: Tia Oz là phân giác của góc MON .

Đáp án:

a) Tính tỉ số diện tích $\triangle AOM$ và $\triangle BON$.

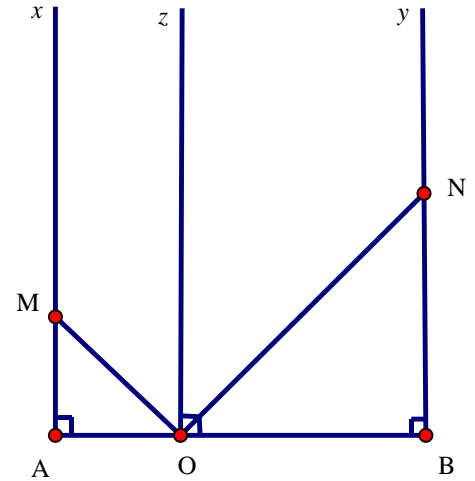
Ta có: $AO = \frac{1}{3}AB \Rightarrow AO = \frac{1}{2}OB$

Xét $\triangle AOM$ và $\triangle BON$ ta có:

$$\widehat{MAO} = \widehat{NBO} = 90^\circ$$

$$\frac{AO}{OB} = \frac{OM}{ON} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \triangle AOM \sim \triangle BON \Rightarrow \text{tỉ số diện tích là: } \left(\frac{AO}{OB}\right)^2 = \frac{1}{4}$$



b) Chứng minh: Tia Oz là phân giác của góc MON .

Ta có: $\triangle AOM \sim \triangle BON \Rightarrow \widehat{AOM} = \widehat{BON}$

Lại có: $\widehat{AOz} = \widehat{BOz} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MOz} = \widehat{NOz}$

$\Rightarrow Oz$ là tia phân giác của góc MON

Bài 5: Một người ngồi cách cửa sổ 0,6m nhìn ra con đường quốc lộ song song với mép cửa, thấy một ô tô chạy qua trong 20s. Biết chiều rộng của cửa sổ là 1m, con đường cách người đó 120m. Tính vận tốc của ô tô.

Đáp án:

A là mắt người (điểm nhìn)

BC là mép khung cửa sổ

MN là đoạn đường ô tô đi qua mắt người quan sát

AH, AK lần lượt là khoảng cách từ mắt quan sát đến mép cửa sổ và đoạn đường.

Ta có:

$$\begin{cases} BC = 1m \\ AH = 0,6m \\ AK = 120m \end{cases}$$

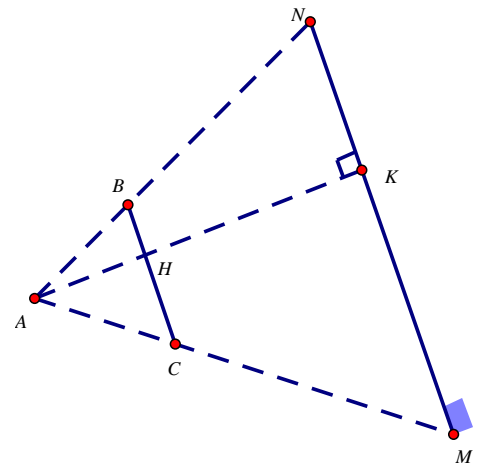
Xét $\triangle ABC$ và $\triangle ANM$ có:

$$\frac{AB}{AN} = \frac{AC}{AM} \quad (\text{do } BC \text{ song song với } MN)$$

Góc A chung

$$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ANM$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{MN} = \frac{AH}{AK} \Rightarrow MN = \frac{AK}{AH} \cdot BC = \frac{120}{0,6} \cdot 1 = 200 \text{ (m)}$$



Vận tốc của ô tô là: $v = \frac{200}{20} = 10$ (m/s)

Bài 6: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A và đường cao AH. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của BH và AH. Chứng minh: $\triangle ABP \sim \triangle CAQ$.

Đáp án:

Ta có:

$$\widehat{ABH} + \widehat{ACH} = 90^\circ \quad (\text{do tam giác ABC vuông tại A})$$

$$\widehat{CAH} + \widehat{ACH} = 90^\circ \quad (\text{do tam giác AHC vuông tại H})$$

$$\Rightarrow \widehat{CAH} = \widehat{ABH} \quad (\text{cùng phụ với } \widehat{ACH}) \quad (1)$$

$$\triangle ABC \text{ vuông tại A, đường cao AH} \Rightarrow AH^2 = BH \cdot CH$$

$$\Rightarrow \frac{AH}{BH} = \frac{CH}{AH} \quad (2)$$

Xét $\triangle AHP$ và $\triangle CHQ$, ta có:

$$\widehat{AHP} = \widehat{CHQ} = 90^\circ$$

$$\frac{AH}{BH} = \frac{CH}{AH} \quad (\text{theo (2)})$$

$$\Rightarrow \triangle AHP \sim \triangle CHQ \Rightarrow \widehat{APH} = \widehat{CQH} \Rightarrow \widehat{APB} = \widehat{CQA} \quad (3)$$

Xét $\triangle ABP$ và $\triangle CAQ$, ta có:

$$\widehat{CAH} = \widehat{ABH} \quad (\text{theo (1)})$$

$$\widehat{APB} = \widehat{CQA} \quad (\text{theo (3)})$$

$$\Rightarrow \triangle ABP \sim \triangle CAQ \quad \text{dpcm}$$

Bài 7: Cho tam giác ABC cân tại A, hai đường cao BH và CK. Tính độ dài HK theo BC = a và AC = b.

Đáp án:

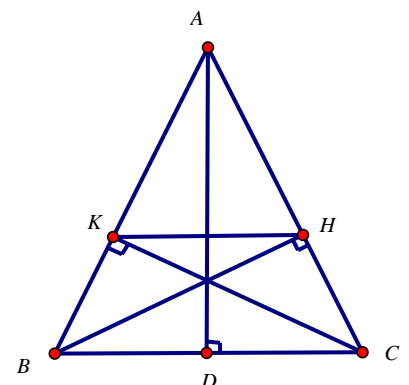
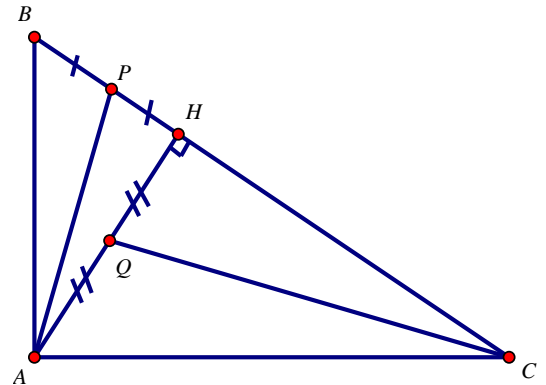
Kẻ AD vuông góc với BC $\Rightarrow D$ là trung điểm của

$$BC \Rightarrow DC = \frac{1}{2} BC = \frac{a}{2}$$

Xét $\triangle BHC$ và $\triangle ADC$, ta có

Góc C chung

$$\widehat{BHC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$$



$$\Rightarrow \triangle BHC \sim \triangle ADC$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{HC}{DC} \Rightarrow HC = \frac{BC}{AC} \cdot DC = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{2b} \Rightarrow AH = AC - HC = \frac{2b^2 - a^2}{2b}$$

Xét $\triangle ABH$ và $\triangle ACK$, ta có

Góc A chung

$$\widehat{AHB} = \widehat{AKC} = 90^\circ$$

$$AB = AC \quad (\text{tam giác } ABC \text{ cân tại } A)$$

$$\Rightarrow \triangle ABH = \triangle ACK \Rightarrow AH = AK$$

Xét $\triangle AKH$ và $\triangle ABC$, ta có

Góc A chung

$$\frac{AK}{AB} = \frac{AH}{AC} \quad (\text{vì } AH = AK \text{ và } AB = AC)$$

$$\Rightarrow \triangle AKH \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{KH}{BC} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow KH = \frac{AH}{AC} \cdot BC = \frac{a(2b^2 - a^2)}{2b^2}$$

$$\text{Vậy } KH = \frac{a(2b^2 - a^2)}{2b^2} \quad (\text{đvdd})$$

III. Bài tập bổ sung

Bài 1: Cho tam giác ABC nhọn và các đường cao AD , BE , CF cắt nhau tại H .

Chứng minh:

a) $\triangle AEF \sim \triangle ABC$.

b) H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF .

Bài 2: Cho tam giác ABC vuông tại A . Lấy điểm $D \in AC$. Kẻ tia Cx vuông góc với BD tại E .

Chứng minh:

a) $\triangle ADE \sim \triangle BDC$.

b) $AB \cdot CE + AE \cdot BC = AC \cdot BE$.

IV. Bài tập tự luyện

Bài 1: Cho tam giác ABC đồng dạng với tam giác $A'B'C'$ và $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{4} S_{\triangle A'B'C'}$. Hai đường cao tương

ứng AH và $A'H'$. Hãy chọn đáp án đúng:

a) $AH = 12 \text{ cm}; A'H' = 6 \text{ cm}$.

b) $AH = 9 \text{ cm}; A'H' = 15 \text{ cm}$.

a) $AH = 6 \text{ cm}; A'H' = 12 \text{ cm}$.

a) $AH = 12 \text{ cm}; A'H' = 18 \text{ cm}$.

Bài 2: Cho tam giác ABC cân tại A , $AC = 20\text{ cm}$, $BC = 24\text{ cm}$, các đường cao AD và CE cắt nhau tại H . Tính các độ dài:

- a) AD .
- b) HD , HC , HA .

Bài 3: Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Chứng minh các hệ thức:

- a) $AH^2 = BH.CH$
- b) $BC^2 = AC.BH$

Bài 4: Cho tam giác ABC nhọn, đường cao BD và CE .

- a) Chứng minh rằng: $AB.AE = AC.AD$

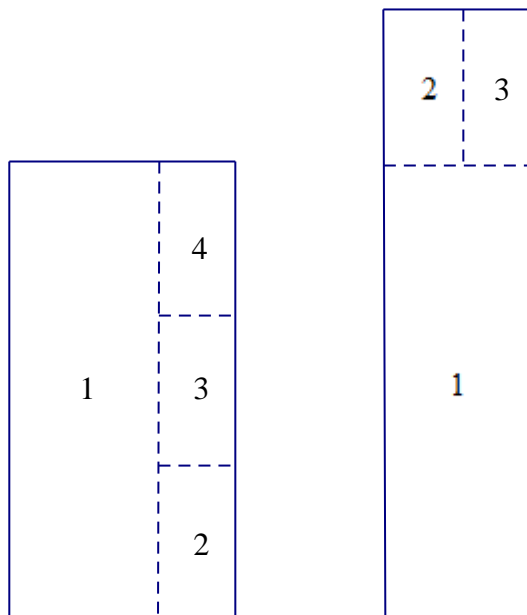
- b) Tính số đo góc ABD , biết $\widehat{ABO} = 40^\circ$

Bài 5: Cho tam giác ABC cân tại A , đường cao CE .

- a) Tính AB , biết $BC = 24\text{ cm}$ và $BE = 9\text{ cm}$.
- b) Gọi AD là đường cao và H là trực tâm của tam giác ABC . Chứng minh rằng:
 $CD^2 = DH.DA$

Bài 6: Cho tam giác ABC vuông tại A , đường trung tuyến AM . Đường thẳng đi qua B và vuông góc với AM cắt AC ở D . Chứng minh rằng: $AB^2 = AC.AD$

Bài 7: Bác Tuấn cần có một tấm ván hình chữ nhật dài 1m rộng 20cm làm giá sách, nhưng bác chỉ có một tấm ván to dài 75cm rộng 30cm. Nếu bác chia tấm ván theo chấm như hình thì tấm ván làm giá sách sẽ có 2 vết ghép.



Hãy giúp bác Tuấn cách làm để tấm ván làm giá sách chỉ có một vết ghép.

---- Hết ----