

CHUYÊN ĐỀ I: HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

Họ tên học sinh: Lớp: 9B1/ Ngày: / ... / 20....

I. Bài tập vận dụng

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, BC = 20cm. Biết tỉ số hai hình chiếu của hai cạnh góc vuông trên cạnh huyền là 9 : 16. Tính diện tích tam giác ABC.

Đáp án:

Vẽ đường cao AH.

$$\text{Ta có } \frac{HB}{HC} = \frac{9}{16} \Rightarrow \frac{HB}{9} = \frac{HC}{16} = \frac{HB+HC}{9+16} = \frac{20}{25}$$

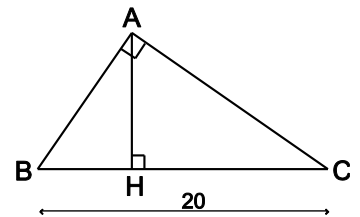
$$\text{Suy ra } HB = \frac{9 \cdot 20}{25} = 7,2 \text{ (cm); } HC = \frac{16 \cdot 20}{25} = 12,8 \text{ (cm)}$$

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A, đường cao AH ta có:

$$AB^2 = BC \cdot BH = 20 \cdot 7,2 = 144 \Rightarrow AB = 12 \text{ (cm);}$$

$$AC^2 = BC \cdot CH = 20 \cdot 12,8 = 256 \Rightarrow AC = 16 \text{ (cm).}$$

$$\text{Vậy diện tích } \triangle ABC \text{ là } S = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 = 96 \text{ (cm}^2\text{)}.$$



Bài 2. Cho tam giác vuông với các cạnh góc vuông có độ dài là 3 cm và 4 cm, kẻ đường cao ứng với cạnh huyền. Hãy tính đường cao này và các đoạn thẳng mà nó chia ra trên cạnh huyền.

Đáp án:

Giả sử tam giác ABC có các cạnh góc vuông AB = 3cm, AC = 4cm, AH là đường cao.

Áp dụng định lý Pitago cho tam giác vuông ABC:

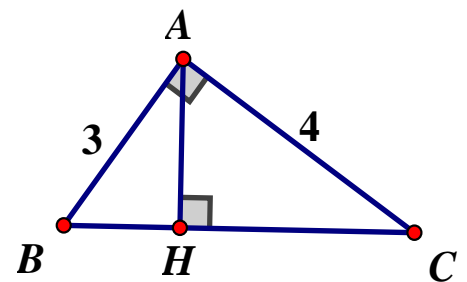
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow BC = 5 \text{ cm}$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

$$BA^2 = BH \cdot BC \Rightarrow BH = \frac{BA^2}{BC} \Rightarrow BH = \frac{3^2}{5} \Rightarrow BH = \frac{9}{5} \text{ (cm)}$$

$$CA^2 = CH \cdot CB \Rightarrow CH = \frac{CA^2}{CB} \Rightarrow CH = \frac{4^2}{5} \Rightarrow CH = \frac{16}{5} \text{ (cm)}$$

$$AH^2 = HB \cdot HC \Rightarrow AH^2 = \frac{9}{5} \cdot \frac{16}{5} \Rightarrow AH = \frac{12}{5} \text{ (cm)}$$



(Có thể tính đường cao AH bởi công thức $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$)

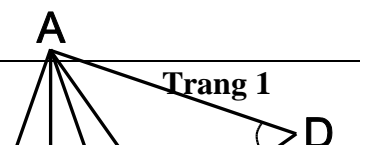
Bài 3: Cho tam giác ABC cân tại A. Các tia phân giác của góc A và góc B cắt nhau tại O. Biết

OA = $2\sqrt{3}$ cm, OB = 2cm, tính độ dài AB.

Đáp án:

Qua A vẽ một đường thẳng vuông góc với AB cắt tia BO tại D.

Liên hệ: Thầy Minh – SĐT: 036 350 3879 – Facebook: Lê Minh



Ta có $D + B_1 = 90^\circ$ $AOD + B_2 = 90^\circ$

mà $B_1 = B_2$ nên $AOD = D$

Do đó $\triangle AOD$ cân tại A. Suy ra $AD = AO = 2\sqrt{3}$ (cm).

Vẽ $AH \perp OD$ thì $HO = HD$.

Ta đặt $HO = HD = x$ thì $BD = 2x + 2$.

Xét $\triangle ABD$ vuông tại A, đường cao AH, ta có $AD^2 = BD \cdot HD$.

Suy ra $(2\sqrt{3})^2 = x(2x + 2)$ Từ đó ta được phương trình:

$$2x^2 + 2x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = -3.$$

Giá trị $x = 2$ được chọn, giá trị $x = -3$ bị loại.

Do đó $BD = 2 + 2 + 2 = 6$ (cm). Suy ra:

$$AB = \sqrt{6^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \text{ (cm)}.$$

Bài 4: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết diện tích các tam giác ABH và ACH lần lượt là 54cm^2 và 96cm^2 . Tính độ dài BC.

Đáp án:

$$\text{Ta có } S_{ABH} = \frac{1}{2} AH \cdot BH = 54$$

$$\text{Suy ra } AH \cdot BH = 108. \quad (1)$$

$$S_{ACH} = \frac{1}{2} AH \cdot CH = 96 \text{ Suy ra } AH \cdot CH = 192. \quad (2)$$

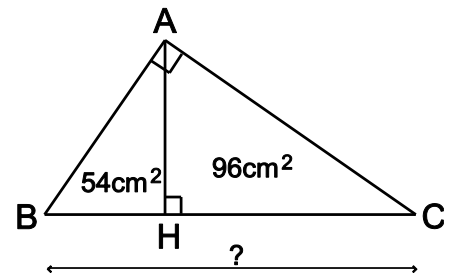
Từ (1) và (2) ta được: $AH^2 \cdot BH \cdot CH = 108 \cdot 192$.

Mặt khác $AH^2 = BH \cdot CH$ (hệ thức 2). Suy ra $AH^4 = 12^4 \Rightarrow AH = 12$ (cm).

Ta có $S_{ABC} = 54 + 96 = 150$ (cm²) mà $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH$ nên

$$\frac{1}{2} BC \cdot AH = 150$$

$$\text{Suy ra } BC = \frac{150 \cdot 2}{12} = 25 \text{ (cm)}.$$



Bài 5: Cho hình thang ABCD, $A = D = 90^\circ$ Hai đường chéo vuông góc với nhau tại O. Biết $OB = 5,4\text{cm}$; $OD = 15\text{cm}$.

a) Tính diện tích hình thang;

b) Qua O vẽ một đường thẳng song song với hai đáy, cắt AD và BC lần lượt tại M và N. Tính độ dài MN.

Đáp án:

a) • Xét $\triangle ABD$ vuông tại A có $AO \perp BD$ nên $OA^2 = OB \cdot OD$ (hệ thức 2).

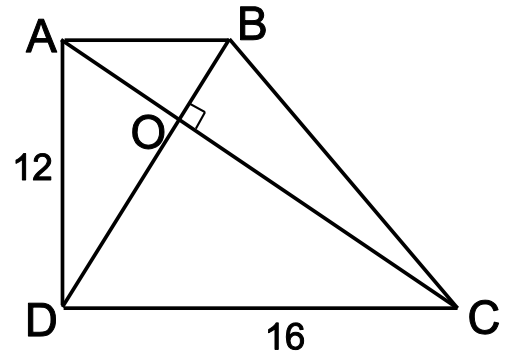
Do đó $OA^2 = 5,4 \cdot 15 = 81 \Rightarrow OA = 9$ (cm).

• Xét $\triangle ACD$ vuông tại D có $OD \perp AC$ nên $OD^2 = OA \cdot OC$ (hệ thức 2).

$$\Rightarrow OC = \frac{OD^2}{OA} = \frac{15^2}{9} = 25 \text{ (cm)}.$$

Do đó $AC = 25 + 9 = 34$ (cm); $BD = 5,4 + 15 = 20,4$ (cm).

Diện tích hình thang ABCD là: $S = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{34 \cdot 20,4}{2} = 346,8$ (cm²).



b) Xét $\triangle ADC$ có $OM \parallel CD$ nên $\frac{OM}{CD} = \frac{AO}{AC}$ (hệ quả của định lý Ta-lét). (1)

Xét $\triangle BDC$ có $ON \parallel CD$ nên $\frac{ON}{CD} = \frac{BN}{BC}$ (hệ quả của định lý Ta-lét). (2)

Xét $\triangle ABC$ có $ON \parallel AB$ nên $\frac{AO}{AC} = \frac{BN}{BC}$ (định lý Ta-lét). (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\frac{OM}{CD} = \frac{ON}{CD}$

Do đó $OM = ON$.

Xét $\triangle AOD$ vuông tại O, $OM \perp AD$ nên $\frac{1}{OM^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OD^2}$ (hệ thức 4).

Do đó $\frac{1}{OM^2} = \frac{1}{9^2} + \frac{1}{15^2} \Rightarrow OM \approx 7,7$ (cm).

Suy ra $MN \approx 7,7 \cdot 2 = 15,4$ (cm).

Bài 6: Cho tam giác ABC cân tại A có các đường cao AH và BK. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{4AH^2}$$

Đáp án:

Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt tia đối của tia AC tại D.

Vì $\triangle ABC$ cân tại A nên đường cao AH đồng thời là đường trung tuyến $\Rightarrow BH = HC$.

Xét $\triangle BCD$ có $BH = HC$ (c/m trên) ; $AH \parallel BD$ ($\perp BC$)

$\Rightarrow CA = AD$ (t/c đường trung bình của tam giác).

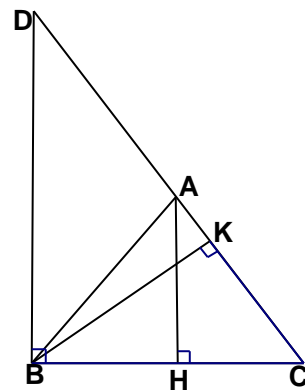
Nên AH là đường trung bình của $\triangle BCD$

$$\Rightarrow AH = \frac{1}{2}BD \Rightarrow BD = 2AH. (1)$$

Xét $\triangle BCD$ có $\angle DBC = 90^\circ$; $BK \perp CD$ ($K \in CD$)

$$\Rightarrow \frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{BD^2} (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{4AH^2}$ (đpcm)



Bài 7: Cho hình thang ABCD, $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$ = hai đường chéo vuông góc với nhau tại O. Cho biết AD = 12cm; CD = 16cm. Tính các độ dài OA, OB, OC, OD.

Đáp án:

$\triangle ADC$ vuông tại D, theo định lý Py-ta-go ta có:

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 = 12^2 + 16^2 = 400.$$

Suy ra $AC = 20$ (cm).

$\triangle ADC$ vuông tại D, DO là đường cao nên

$$AD \cdot DC = AC \cdot DO \text{ (hệ thức 3).}$$

$$\text{Suy ra } OD = \frac{AD \cdot DC}{AC} = \frac{12 \cdot 16}{20} = 9,6 \text{ (cm).}$$

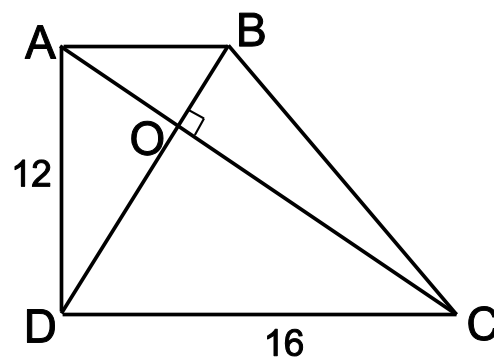
Ta lại có $AD^2 = AC \cdot AO$ (hệ thức 1) nên

$$OA = \frac{AD^2}{AC} = \frac{12^2}{20} = 7,2 \text{ (cm).}$$

Do đó $OC = 20 - 7,2 = 12,8$ (cm).

Xét $\triangle ABD$ vuông tại A, AO là đường cao nên $AO^2 = OB \cdot OD$ (hệ thức 2).

$$\Rightarrow OB = \frac{AO^2}{OD} = \frac{7,2^2}{9,6} = 5,4 \text{ (cm).}$$



Bài 8: Cho α là một góc nhọn. Chứng minh rằng:

a) $\sin \alpha < \tan \alpha$;

b) $\cos \alpha < \cot \alpha$.

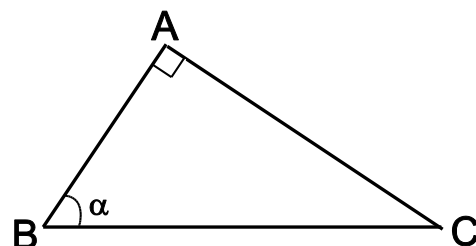
Đáp án:

a) Ta có $\sin \alpha = \frac{AC}{BC}$ $\tan \alpha = \frac{AC}{AB}$ mà $BC > AB$ nên $\frac{AC}{BC} < \frac{AC}{AB}$

Do đó $\sin \alpha < \tan \alpha$;

b) Ta có $\cos \alpha = \frac{AB}{BC}$ $\cot \alpha = \frac{AB}{AC}$ mà $BC > AC$ nên $\frac{AB}{BC} < \frac{AB}{AC}$

Do đó $\cos \alpha < \cot \alpha$



Bài 9: Chứng minh định lí sin: Trong một tam giác nhọn, độ dài các cạnh tỉ lệ với sin của các góc đối diện:

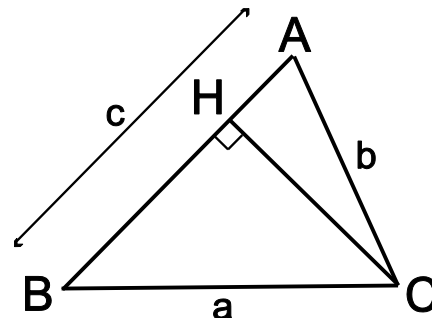
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Đáp án:

Vẽ đường cao CH.

Xét $\triangle ACH$ vuông tại H ta có: $\sin A = \frac{CH}{AC}$ (1)

Xét $\triangle BCH$ vuông tại H ta có: $\sin B = \frac{CH}{BC}$ (2)



Từ (1) và (2) suy ra $\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{CH}{AC} : \frac{CH}{BC} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}$. Do đó $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

Chứng minh tương tự ta được $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

Vậy $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

Lưu ý: Nếu $\triangle ABC$ có thì ta vẫn có: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

Bài 10: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Tính $\sin B$, $\sin C$ biết rằng:

a) $AB = 13$ và $BH = 5$;

b) $BH = 3$ và $CH = 4$.

Đáp án:

a) Tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH ta có

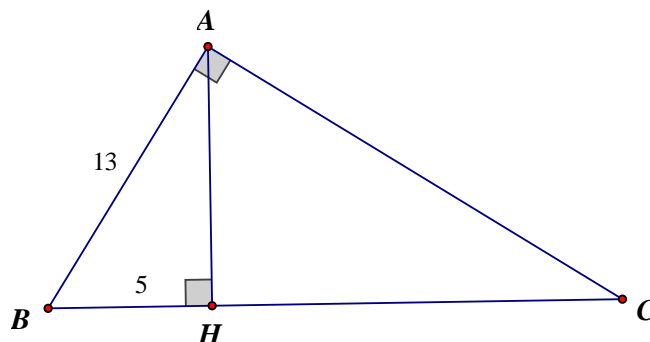
$$AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow BC = \frac{AB^2}{BH} = \frac{13^2}{5} = 33,8$$

Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông ABC ta có:

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 31,2$$

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{31,2}{33,8} = \frac{12}{13}$$

$$\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{13}{33,8} = \frac{5}{13}$$



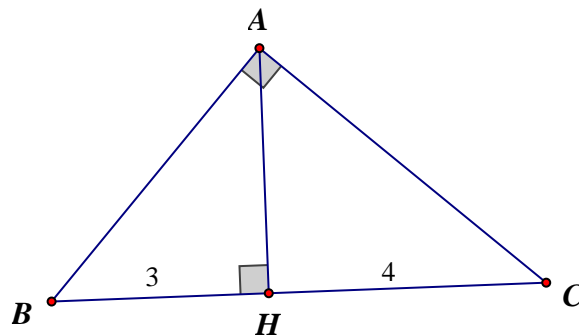
b) Tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH ta có

$$AH^2 = BH \cdot CH = 3 \cdot 4 \Rightarrow AH = 2\sqrt{3}$$

Tam giác ABH vuông. Theo định lý Pytago ta có

$$AB = \sqrt{HB^2 + AH^2} = \sqrt{3^2 + 12} = \sqrt{21}$$

$$\sin B = \frac{AH}{AB} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{21}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$$



Tam giác ABC vuông, $BC = BH + HC = 3 + 4 = 7$

Theo định lý Pytago ta có $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{49 - 21} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

$$\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

Cách 2: Tam giác AHC vuông tại H; Theo định lý Pytago có $AC = \sqrt{AH^2 + HC^2} = \sqrt{12 + 16} = \sqrt{28}$

$$\sin C = \frac{AH}{AC} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{28}} = \sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

Bài 11: Cho tam giác ABC vuông tại A. Chứng minh rằng $\tan \frac{ABC}{2} = \frac{AC}{AB + BC}$

Đáp án:

Vẽ đường phân giác BD của ΔABC ($D \in AC$).

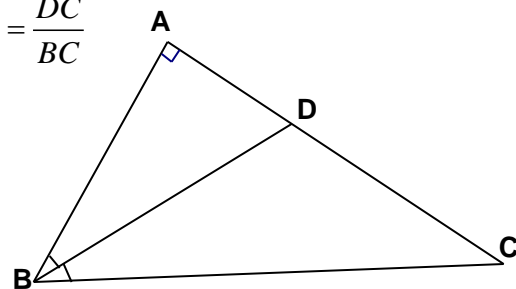
Theo tính chất đường phân giác của tam giác ta có : $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} \Leftrightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AD + DC}{AB + BC} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AB + BC}.$$

Xét ΔABD có $\angle BAD = 90^\circ \Rightarrow \tan \angle ABD = \frac{AD}{AB}$

$$\Leftrightarrow \tan \frac{ABC}{2} = \frac{AC}{AB + BC}$$

$$\text{Vậy } \tan \frac{ABC}{2} = \frac{AC}{AB + BC}$$



Bài 12: Giải tam giác ABC biết $B = 35^\circ$; $C = 50^\circ$ và đường cao $AH = 5,0\text{cm}$.

Đáp án:

Ta phải tìm AB, AC và BC .

$$A = 180^\circ - (B + C) = 95^\circ$$

- Xét $\triangle ABH$ vuông tại H ta có:

$$AH = AB \cdot \sin B \Rightarrow AB = \frac{AH}{\sin B} = \frac{5,0}{\sin 35^\circ} \approx 8,7(\text{cm})$$

$$BH = AH \cdot \cot B \approx 5,0 \cdot \cot 35^\circ \approx 7,1 (\text{cm}).$$

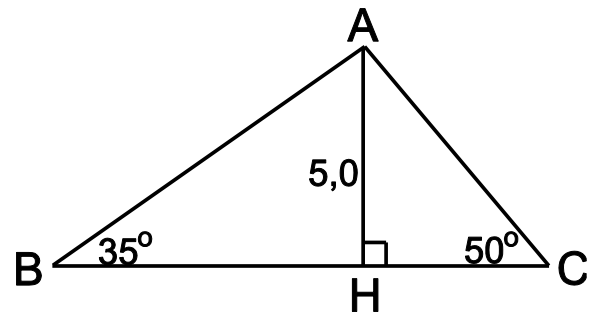
- Xét $\triangle ACH$ vuông tại H ta có

$$AH = AC \cdot \sin C \Rightarrow AC = \frac{AH}{\sin C} = \frac{5,0}{\sin 50^\circ} \approx 6,5(\text{cm})$$

$$CH = AH \cdot \cot C \approx 5,0 \cdot \cot 50^\circ \approx 4,2 (\text{cm}).$$

$$\text{Do đó } BC = BH + CH = 7,1 + 4,2 = 11,3 (\text{cm}).$$

Vậy $\hat{A} = 95^\circ$; $AB = 8,7\text{cm}$; $AC = 6,5\text{cm}$ và $BC = 11,3\text{cm}$.



Bài 13: Cho tam giác ABC, $AB = 14\text{cm}$, $AC = 11\text{cm}$ và $B = 40^\circ$.

Tính độ dài BC

Đáp án:

Vẽ đường cao AH. Xét $\triangle ABH$ vuông tại H có:

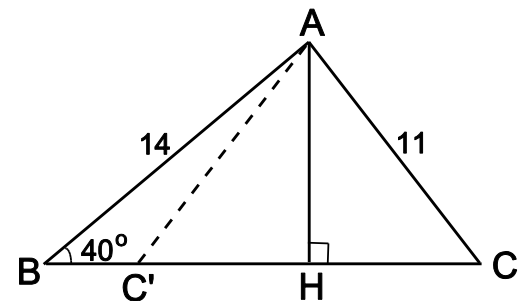
$$AH = AB \cdot \sin B = 14 \cdot \sin 40^\circ \approx 9,0 (\text{cm}).$$

$$BH = AB \cdot \cos B = 14 \cdot \cos 40^\circ \approx 10,7 (\text{cm}).$$

Xét $\triangle AHC$ vuông tại H có:

$$HC = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{11^2 - 9^2} \approx 6,3(\text{cm}).$$

- Nếu H nằm giữa B và C thì $BC = BH + HC \approx 10,7 + 6,3 = 17 (\text{cm})$.
- Nếu C' nằm giữa B và H thì $BC' = BH - HC' \approx 10,7 - 6,3 = 4,4 (\text{cm})$.



II. Bài tập tự luyện

Bài 1: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A. Biết $\frac{AB}{AC} = \frac{5}{7}$. Đường cao AH = 15cm. Tính HB, HC.

Bài 2: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, $AB = 12\text{cm}$, $AC = 16\text{cm}$, phân giác AD, đường cao AH. Tính HD, HB, HC.

Bài 3: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A. Kẻ đường cao AH, tính chu vi $\triangle ABC$ biết $AH = 14\text{cm}$, $\frac{HB}{HC} = \frac{1}{4}$.

Bài 4: Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Biết $AB = 20\text{cm}$, $HC = 9\text{cm}$. Tính độ dài AH.

Bài 5: Cho tam giác ABC vuông tại A có BD là phân giác góc B. Biết rằng $AD = 1\text{cm}$; $BD = \sqrt{10}\text{cm}$. Tính độ dài cạnh BC.

Bài 6: Cho tam giác ABC, $B = 60^\circ$, $BC = 8\text{cm}$; $AB + AC = 12\text{cm}$. Tính độ dài cạnh AB.

Bài 7: Cho hình thang cân ABCD, đáy lớn $CD = 10\text{cm}$, đáy nhỏ bằng đường cao, đường chéo vuông góc với cạnh bên. Tính độ dài đường cao của hình thang cân đó.

Bài 8:

- Cho tam giác ABC có $B = 60^\circ$, $C = 50^\circ$, $AC = 35\text{cm}$. Tính diện tích tam giác ABC.

b. Cho tứ giác ABCD có $A = D = 90^\circ$, $C = 40^\circ$, $AB = 4\text{cm}$, $AD = 3\text{cm}$. Tính diện tích tứ giác.

c. Cho tứ giác ABCD có các đường chéo cắt nhau tại O. Cho biết $AC=4$, $BD=5$, $AOB = 50^\circ$. Tính diện tích tứ giác ABCD.

Bài 9: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, kẻ đường cao AH, chu vi $\triangle AHB$ bằng 30cm, chu vi $\triangle ACH$ bằng 4dm. Tính BH, CH và chu vi $\triangle ABC$.

Bài 10: Cho biết chu vi của một tam giác bằng 120cm. Độ dài các cạnh tỉ lệ với 8, 15, 17.

a) Chứng minh rằng tam giác đó là một tam giác vuông.

b) Tính khoảng cách từ giao điểm ba đường phân giác đến mỗi cạnh.

Bài 11: Cho tứ giác lồi ABCD có $AB = AC = AD = 10\text{ cm}$, $B = 60^\circ$ và $A = 90^\circ$

a) Tính đường chéo BD.

b) Tính các khoảng cách BH và DK từ B và D đến AC.

c) Tính HK.

d) Vẽ $BE \perp DC$ kéo dài. Tính BE, CE và DC.

---- Hết ----