SỞ GIÁO DỤC ĐÀO TẠO THANH HÓA	KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 9 Năm học : 2015 – 2016
ĐỀ THI CHÍNH THỨC	**Môn thi : Toán** **Thời gian : 150 phút** *(không kể thời gian phát đề)*

Câu 1 (*4,0 điểm*):

Cho biểu thức $A = \left(\dfrac{a-3\sqrt{a}}{\sqrt{a}+3} - \dfrac{a+3\sqrt{a}}{\sqrt{a}-3}\right).\left(\sqrt{a} - \dfrac{9}{\sqrt{a}}\right)$ với $a > 0,\ a \neq 9$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức M = A + a.

Câu 2 (*4,0 điểm*):

a) Giải phương trình $\dfrac{9}{x^2} + \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+9}} = 1.$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - y^3 = 4(4x - y) \\ y^2 - 5x^2 = 4 \end{cases}.$

Câu 3 (*4,0 điểm*):

a) Tìm các nghiệm nguyên (x, y) của phương trình: $54x^3 + 1 = y^3$.

b) Tìm các giá trị nguyên dương của m để phương trình $x^2 - mxy + y^2 + 1 = 0$ có nghiệm nguyên dương (x, y là ẩn).

Câu 4 (*6,0 điểm*): Cho đường tròn tâm O bán kính R. Tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O; R) có B, C cố định. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC đồng quy tại H. Đường thẳng chứa tia phân giác ngoài của góc BHC cắt AB, AC lần lượt tại các điểm M và N.

a) Chứng minh tam giác AMN cân.

b) Xác định vị trí của điểm A để chu vi tam giác DEF lớn nhất.

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt đường phân giác trong của góc BAC tại K (K $\neq$ A). Chứng minh đường thẳng HK luôn đi qua một điểm cố định khi A thay đổi.

Câu 5 (*2,0 điểm*): Cho các số dương a,b,c thoả mãn $ab^2 + bc^2 + ca^2 = 3$.

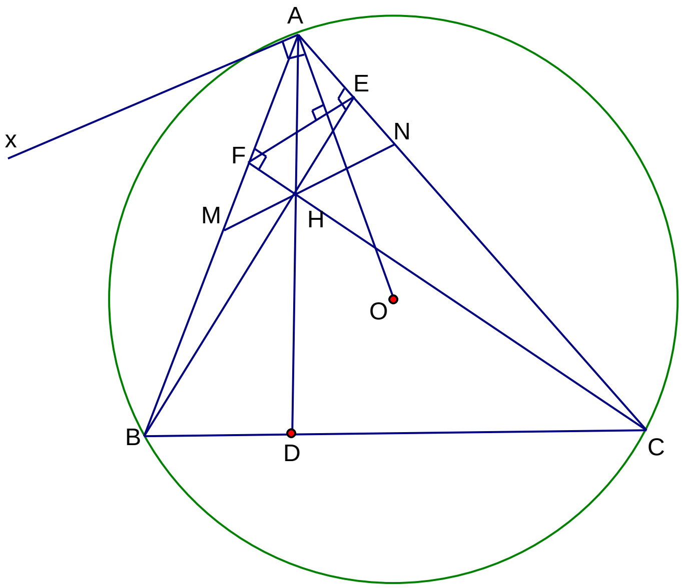
Chứng minh rằng: $\dfrac{2a^5+3b^5}{ab} + \dfrac{2b^5+3c^5}{bc} + \dfrac{2c^5+3a^5}{ca} \geq 15\left(a^3+b^3+c^3-2\right).$

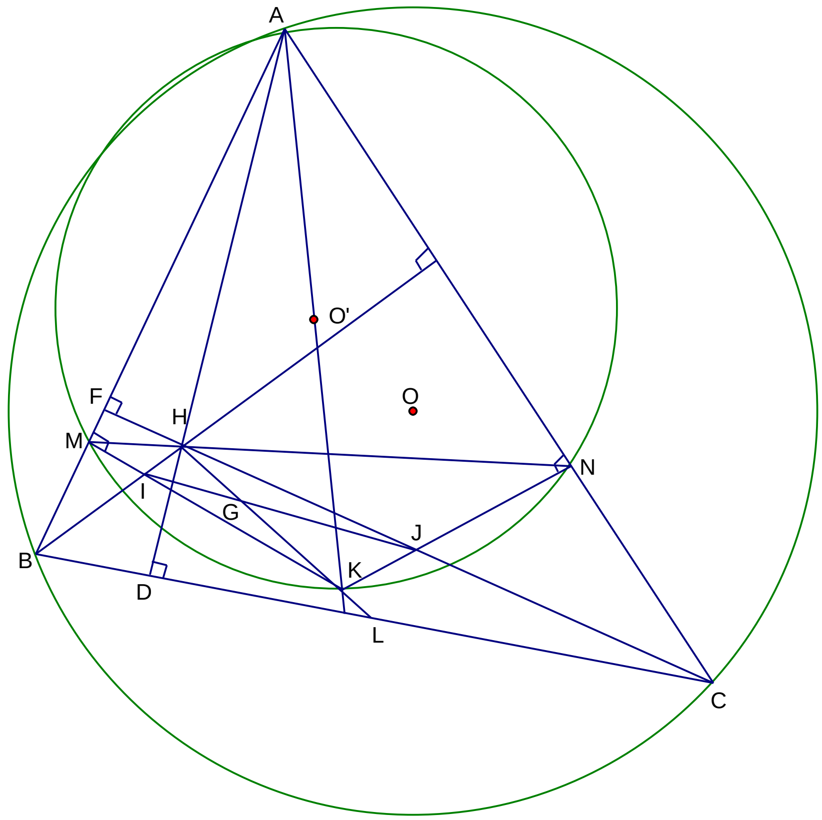
------------------ **Hết** ------------------

SỞ GIÁO DỤC ĐÀO TẠO THANH HÓA	ĐÁP ÁN GIỎI CẤP TỈNH LỚP 9 Năm học : 2015 – 2016 Môn thi : Toán

<table>
<tr><th>Câu</th><th>Nội dung</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1a
(2,0đ)</td><td colspan="2">Rút gọn biểu thức $A=\left(\dfrac{a-3\sqrt{a}}{\sqrt{a}+3}-\dfrac{a+3\sqrt{a}}{\sqrt{a}-3}\right)\left(\sqrt{a}-\dfrac{9}{\sqrt{a}}\right)\quad (a>0 \text{ và } a\neq 9).$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Có $A=\sqrt{a}.\dfrac{(\sqrt{a}-3)^2-(\sqrt{a}+3)^2}{(\sqrt{a}+3)(\sqrt{a}-3)}.\dfrac{a-9}{\sqrt{a}}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">1b
(2,0đ)</td><td colspan="2">$=\sqrt{a}.\dfrac{(a-6\sqrt{a}+9)-(a+6\sqrt{a}+9)}{a-9}.\dfrac{a-9}{\sqrt{a}}=-12\sqrt{a}.$
Vậy $A=-12\sqrt{a}$ $(a>0$ và $a\neq 9).$
Tìm giá trị nhỏ nhất của M = A + a.</td></tr>
<tr><td>$M=A+a=a-12\sqrt{a}=\left(\sqrt{a}-6\right)^2-36\geq -36$, dấu đẳng thức xảy ra khi a = 36 (tmđk).</td><td></td></tr>
<tr><td>Vậy giá trị nhỏ nhất của M là - 36 khi và chỉ khi a = 36.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">2a
(2,0đ)</td><td colspan="2">Giải phương trình $\dfrac{9}{x^2}+\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+9}}=1\ (1)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Điều kiện $x\neq 0.$
$(1)\Leftrightarrow \dfrac{2x^2+9}{x^2}+\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+9}}-3=0\quad (2)$
Đặt $t=\dfrac{x}{\sqrt{2x^2+9}}\ (t\neq 0)\Rightarrow t^2=\dfrac{x^2}{2x^2+9}\Rightarrow \dfrac{1}{t^2}=\dfrac{2x^2+9}{x^2}$
Khi đó (2) trở thành
$\dfrac{1}{t^2}+2t-3=0\Leftrightarrow 2t^3-3t^2+1=0\Leftrightarrow (t-1)^2(2t+1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1\\ t=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$
Với t = 1 ta có $x=\sqrt{2x^2+9}\Leftrightarrow \begin{cases} x>0\\ x^2+9=0\end{cases}$ vô nghiệm.</td></tr>
<tr><td>• Với $t=-\dfrac{1}{2}$ ta có $-2x=\sqrt{2x^2+9}\Leftrightarrow \begin{cases} x<0\\ 4x^2=2x^2+9\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x<0\\ x^2=\dfrac{9}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$</td><td></td></tr>
<tr><td>Kết hợp với điều kiện suy ra nghiệm của phương trình là $x=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-y^3=4(4x-y) & (1)\\ y^2-5x^2=4 & (2)\end{cases}$</td></tr>
</table>

2b (2,0đ)	Thay (2) vào (1) ta có $x^3 - y^3 = (y^2 - 5x^2)(4x - y) \Leftrightarrow 21x^3 - 5x^2y - 4xy^2 = 0$ $\Leftrightarrow x(7x - 4y)(3x + y) = 0$ • Với x = 0 thay vào (2) được $y = \pm 2$ • Với 7x – 4y = 0 thay vào (2) được $-\frac{31}{49}y^2 = 4$ vô nghiệm. • Với 3x + y = 0 thay vào (2) được $y^2 = 9 \Leftrightarrow y = \pm 3$ y = 3 thì x = - 1; y = - 3 thì x = 1. Vậy nghiệm của hệ phương trình là (x;y) = (0;2); (0;-2); (-1;3); (1;-3);	
3a (2,0đ)	Tìm các nghiệm nguyên (x, y) của phương trình: $54x^3 + 1 = y^3$. (1)	
	Nếu x = 0 suy ra y = 1, nếu y = 0 thì không có x nguyên thỏa mãn.	
	Nếu $x \neq 0; y \neq 0$. (1) $\Leftrightarrow 4\cdot 54x^3(54x^3+1) = 4\cdot 54x^3y^3$ $\Leftrightarrow (4\cdot 27x^3+1)^2 = (6xy)^3 + 1$ Đặt $4\cdot 27x^3 = a$; $6xy = b$ ta được $(a+1)^2 = (b+1)(b^2-b+1)$ (2)	
	Từ (2) ta thấy b + 1 > 0. Gọi ƯCLN $(b+1; b^2-b+1) = d \Rightarrow \begin{cases} b+1 \vdots d \\ b^2-b+1 \vdots d \end{cases}$ $\Rightarrow b^2 - b + 1 = b(b+1) - 2(b+1) + 3 \vdots d \Rightarrow 3 \vdots d$ Mặt khác $(a+1)^2 = (4.27x^3+1)^2 \not\vdots\, 3$ nên $d \not\vdots\, 3 \Rightarrow d = 1 \Rightarrow (b+1; b^2-b+1) = 1$ Từ (2) ta thấy tích của hai số nguyên tố cùng nhau là số chính phương nên phải có b + 1 = m^2 và b^2 - b + 1 = n^2 (Với m , n$\in N^*$; m$\geq$ 2 ; $m^2 \geq 4$) Ta có: $n^2 = (m^2 - 1)^2 - (m^2 - 1) + 1$ $\Leftrightarrow n^2 = (m^2 - 1)^2 - (m^2 - 2)$ (3) $\Leftrightarrow n^2 = (m^2 - 2)^2 + (m^2 - 1)$ (4) Từ (3) và (4) $\Rightarrow (m^2 - 2)^2 < n^2 < (m^2 - 1)^2$ vô lý $\Rightarrow$ (2) vô nghiệm. Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (0;1)$	
3b (2,0đ)	*Tìm các giá trị nguyên dương m để phương trình* $x^2 - mxy + y^2 + 1 = 0$ *có nghiệm nguyên dương.*	
	Giả sử phương trình đã cho có nghiệm nguyên dương, xét $(x_0; y_0)$ là nghiệm mà $x_0 + y_0$ là nhỏ nhất. Do x, y trong phương trình là bình đẳng nên không mất tính tổng quát ta giả sử $x_0 \leq y_0$.	
	Ta có: $x_0^2 - mx_0y + y_0^2 + 1 = 0 \Rightarrow$ y_0 là một nghiệm của phương trình $y^2 - mx_0y + x_0^2 + 1 = 0$ (1) suy ra phương trình còn một nghiệm y_1 thỏa mãn $\begin{cases} y_0 + y_1 = mx_0 \ \ (2) \\ y_0y_1 = x_0^2 + 1 \ \ (3) \end{cases} \Rightarrow y_1$ nguyên dương $\Rightarrow$ $x_0 + y_0 \leq x_0 + y_1 \Rightarrow y_0 \leq y_1$	
	+) Nếu $x_0 = y_0$ thay vào phương trình đề cho được $m = \frac{2y_0^2+1}{y_0^2} = 2 + \frac{1}{y_0^2} \Rightarrow y_0 = 1$ (do m và y_0 nguyên dương) suy ra $m = 3$, khi đó phương trình đã cho nhận $(x; y) = (1;1)$ làm nghiệm, $\Rightarrow$ m = 3 là một giá trị cần tìm.	
	+) Nếu $x_0 < y_0 = y_1$ thì từ (3) suy ra $y_0^2 = x_0^2 + 1 \Leftrightarrow (y_0 - x_0)(y_0 + x_0) = 1$ vô lý.	
	+) Nếu $x_0 < y_0 < y_1$ thì $\begin{cases} y_0 \geq x_0 + 1 \\ y_1 \geq x_0 + 2 \end{cases}$ nên từ (3) $\Rightarrow (x_0+1)(x_0+2) \leq x_0^2 + 1 \Leftrightarrow 3x_0 + 1 \leq 0$ vô lý.	
	Vậy m = 3 là giá trị cần tìm.	

4a (2,0đ)	 Ta có: $AMN = MBH + MHB,\ ANM = NCH + NHC$ (định lý góc ngoài tam giác) Mà $MBH = NCH,\ MHB = NHC$ Suy ra $AMN = ANM \Rightarrow \Delta$AMN cân tại A. Kẻ tiếp tuyến Ax của (O) suy ra $xAB = ACB$. Mà $ACB = AFE$ (vì tứ giác BFEC nội tiếp), suy ra $xAB = AFE$, $\Rightarrow$ Ax //EF$\Rightarrow$ OA $\perp$ EF.
4b (2,0đ)	Tương tự: OB $\perp$FD ; OC $\perp$ DE. $\Rightarrow S_{ABC} = S_{AEOF} + S_{BDOF} + S_{CDOE}$ $= \frac{1}{2}OA\cdot EF + \frac{1}{2}OB\cdot DF + \frac{1}{2}OC\cdot DE = \frac{1}{2}R(EF + DF + DE) = \frac{1}{2}AD.BC$ Suy ra chu vi tam giác DEF là $\frac{AD.BC}{R}$. Mà R, BC cố định$\Rightarrow$ Chu vi tam giác DEF lớn nhất khi AD lớn nhất $\Rightarrow$ A là điểm chính giữa của cung BC lớn.
4c (2,0đ)	Tam giác AMN cân ở A $\Rightarrow$ phân giác AK là trung trực của MN. $\Rightarrow$ Tâm O' của (AMN) là trung điểm của AK $\Rightarrow AMK = ANK = 90^0$. Gọi I là giao điểm của MK và BH, J là giao điểm của NK và CH. Chứng minh được HIKJ là hình bình hành$\Rightarrow$ HK đi qua trung điểm G của IJ. Dễ thấy $IMH = MHF = MHI \Rightarrow \Delta$IMH cân tại I $\Rightarrow$ MI = IH. Tương tự: JN = JH Chứng minh được ΔBIM đồng dạng với ΔCJN (g-g) $\Rightarrow \frac{MI}{BI} = \frac{NJ}{JC} \Rightarrow \frac{IH}{BI} = \frac{JH}{JC} \Rightarrow IJ // BC$. Mà HK đi qua trung điểm G của IJ nên cũng đi qua trung điểm L của BC (là điểm cố định)



5 (2,0đ)

Cho các số dương a,b,c thoả mãn $ab^2+bc^2+ca^2=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2a^5+3b^5}{ab}+\frac{2b^5+3c^5}{bc}+\frac{2c^5+3a^5}{ca}\ge 15\left(a^3+b^3+c^3-2\right)$$

Ta chứng minh bất đẳng thức $\dfrac{2a^5+3b^5}{ab}\ge 5a^3-10ab^2+10b^3$ với $a,b>0$ (1)

Thật vậy: $\dfrac{2a^5+3b^5}{ab}\ge 5a^3-10ab^2+10b^3 \Leftrightarrow 2a^5+3b^5-ab\left(5a^3-10ab^2+10b^3\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow 2a^5-5a^4b+10a^2b^3-10ab^4+3b^5\ge 0 \Leftrightarrow \left(a-b\right)^4\left(2a+3b\right)\ge 0$ (luôn đúng $\forall a,b>0$).

Tương tự ta cũng có $\dfrac{2b^5+3c^5}{bc}\ge 5b^3-10bc^2+10c^3$ (2) (luôn đúng $\forall b,c>0$).

$\dfrac{2c^5+3a^5}{ca}\ge 5c^3-10ca^2+10a^3$ (3) (luôn đúng $\forall c,a>0$).

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức (1), (2) và (3) ta được

$$\frac{2a^5+3b^5}{ab}+\frac{2b^5+3c^5}{bc}+\frac{2c^5+3a^5}{ca}\ge 15(a^3+b^3+c^3)-10(ab^2+bc^2+ca^2)$$

Mà $ab^2+bc^2+ca^2=3$ nên

$$\frac{2a^5+3b^5}{ab}+\frac{2b^5+3c^5}{bc}+\frac{2c^5+3a^5}{ca}\ge 15(a^3+b^3+c^3)-30=15(a^3+b^3+c^3-2)$$

Vậy ta có điều phải chứng minh, dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.