

## CHUYÊN ĐỀ I: HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

Họ tên học sinh: ..... Lớp: 9B1/ ..... Ngày: .... / ... / 20....

### I. Bài tập vận dụng

#### Góc ở tâm

**Bài 1:** Hai tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) cắt nhau tại P. Biết  $\angle APB = 55^\circ$ . Tính số đo cung lớn AB.

#### Hướng dẫn giải

**Tìm cách giải.** Tính góc ở tâm trước, rồi tính số đo cung nhỏ AB. Cuối cùng tính số đo cung lớn.

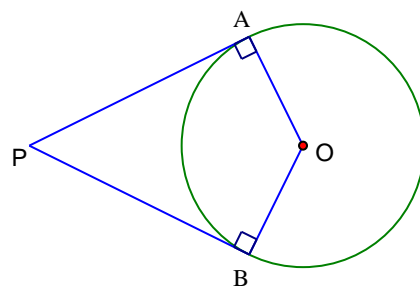
#### Trình bày lời giải

Tứ giác APBO có  $\angle OAP = 90^\circ$ ;  $\angle OBP = 90^\circ$  ( vì PA, PB là tiếp tuyến),

$\angle APB = 55^\circ$  nên:

$\angle AOB = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 55^\circ = 125^\circ$  (tổng các góc trong tứ giác AOBP) suy ra số đo cung nhỏ AB là  $125^\circ$ .

Vậy số đo cung lớn AB là:  $360^\circ - 125^\circ = 235^\circ$ .



**Bài 2:** Cho hai tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) cắt nhau tại M, biết  $\angle AMB = 40^\circ$ .

a) Tính  $\angle AMO$  và  $\angle AOM$ .

b) Tính số đo cung AB nhỏ và số đo cung AB lớn.

#### Hướng dẫn giải

**Tìm cách giải.** Sử dụng tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau từ đó tính ra góc ở tâm. Cuối cùng tính số đo cung lớn.

#### Trình bày lời giải

a) Do MA và MB là hai tiếp tuyến cắt nhau tại M nên MO là

phân giác của  $\angle AMB$  hay  $\angle AMO = \frac{1}{2} \angle AMB = 20^\circ$ . Tam giác

AMO vuông tại A, tính được  $\angle AOM = 70^\circ$ .

OM là tia phân giác của  $\angle AOB$  nên  $\angle AOB = 2 \cdot \angle AOM = 140^\circ$

b) số đo  $\angle AMB =$  số đo  $\angle AOB = 140^\circ$

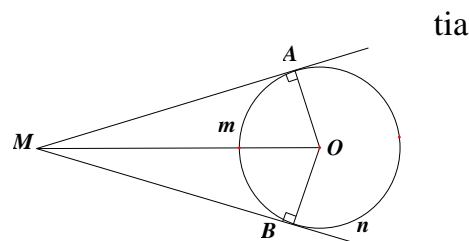
số đo  $\angle AnB = 360^\circ - 140^\circ = 220^\circ$ .

**Bài 3:** Trên một đường tròn (O) có cung AB bằng  $140^\circ$ . Gọi A', B' lần lượt là điểm đối xứng của A, B qua O; lấy cung AD nhận B' làm điểm chính giữa; lấy cung CB nhận A' làm điểm chính giữa. Tính số đo cung nhỏ CD.

#### Hướng dẫn giải

**Tìm cách giải.** OA và OA' là hai tia đối nhau nên số đo  $\angle AOA' = 180^\circ$ . Do AD nhận B' là điểm chính giữa cung nên số đo  $\angle AB' =$  số đo  $\angle B'D$ . Tương tự số đo  $\angle BA' = 180^\circ$ , số đo  $\angle A'B =$  số đo  $\angle A'C$  từ đó tính được số đo cung DC

#### Trình bày lời giải



Ta có  $\widehat{AOB'} = \widehat{BOA'}$  (hai góc đối đỉnh)  $\Rightarrow$  số đo  $\widehat{AB'} =$  số đo  $\widehat{A'B}$

$B'$  và  $C'$  lần lượt là điểm chính giữa cung  $AD$  và cung  $BC$  nên ta có số đo  $\widehat{AB'} =$  số đo  $\widehat{B'D}$ ; số đo  $\widehat{A'B} =$  số đo  $\widehat{A'C}$

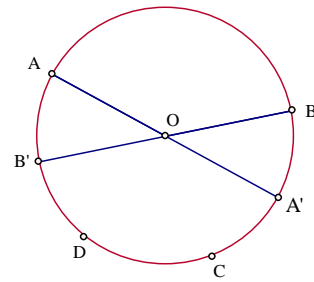
số đo  $\widehat{AB} = 140^\circ$  mà  $A'$  là điểm đối xứng với  $A$  qua  $O$  nên

$$\text{sđ } \widehat{AOA'} = 180^\circ$$

$$\text{lại có số đo } \widehat{AB} + \text{sđ } \widehat{BA'} = 180^\circ \Rightarrow \text{sđ } \widehat{BA'} = 40^\circ = \text{sđ } \widehat{AB'} = 40^\circ$$

$$\Rightarrow \text{sđ } \widehat{AC} = 40^\circ \Rightarrow \text{sđ } \widehat{CB} = 80^\circ$$

$$\text{sđ } \widehat{AB'} = 40^\circ \Rightarrow \text{sđ } \widehat{B'D} = 40^\circ \Rightarrow \text{sđ } \widehat{CD} = 180^\circ - \text{sđ } \widehat{BC} - \text{sđ } \widehat{B'D} = 180^\circ - 40^\circ - 80^\circ = 60^\circ.$$



**Bài 4:** Cho đường tròn  $(O; R)$ , lấy điểm  $M$  nằm ngoài  $(O)$  sao cho  $OM = 2R$ . Từ  $M$  kẻ tiếp tuyến  $MA$  và  $MB$  với  $(O)$  ( $A, B$  là các tiếp điểm).

a) Tính  $\widehat{AOM}$ ;

b) Tính  $\widehat{AOB}$  và số đo cung  $AB$  nhỏ;

c) Biết  $OM$  cắt  $(O)$  tại  $C$ . Chứng minh  $C$  là điểm chính giữa của cung nhỏ  $AB$ .

### Hướng dẫn giải

**Tìm cách giải.** Vận dụng tỉ số lượng giác trong tam giác vuông khi biết độ dài hai cạnh (theo bán kính) từ đó tính ra được góc ở tâm.

### Trình bày lời giải

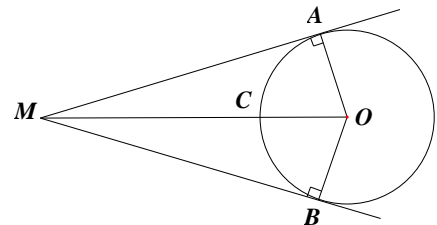
a) Do  $MA$  và  $MB$  là các tiếp tuyến của  $(O)$  nên  $MA \perp AO$  và  $MB \perp BO$

Xét tam giác vuông  $MAO$  có

$$\sin \widehat{AMO} = \frac{AO}{MO} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{AMO} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{AOM} = 60^\circ;$$

b) Tương tự **bài 1** tính được  $\widehat{AOB} = 120^\circ$ , số đo  $\widehat{AB} = 120^\circ$ ;

c)  $\widehat{AOC} = \widehat{BOC} \Rightarrow AC = BC$ .



### Góc nội tiếp, góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung

**Bài 1:** Cho đường tròn  $(O)$  có các dây cung  $AB, BC, CA$ . Gọi  $M$  là điểm chính giữa của cung nhỏ  $AB$ . Vẽ dây  $MN$  song song với  $BC$  và gọi  $S$  là giao điểm của  $MN$  và  $AC$ . Chứng minh  $SM = SC$  và  $SN = SA$ .

### Hướng dẫn giải

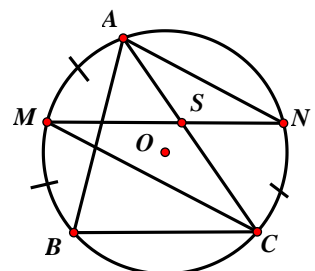
**Tìm cách giải.** Vận dụng tính chất trong một đường tròn, góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau thì bằng nhau từ đó chỉ ra các tam giác  $ASN$  và  $MSC$  cân tại  $S$

### Trình bày lời giải

Do  $M$  là điểm chính giữa cung nhỏ  $AB$  nên số đo  $\widehat{MB} =$  số đo  $\widehat{MA}$

Do  $MN \parallel BC$  nên  $\widehat{NMC} = \widehat{MCB} \Rightarrow$  số đo  $\widehat{MB} =$  số đo  $\widehat{NC}$

Vậy số đo  $\widehat{MB} =$  số đo  $\widehat{MA} =$  số đo  $\widehat{NC}$



$NAS = ANS$  (hai góc nội tiếp cùng chắn hai cung bằng nhau)

$SMC = SCM$  (hai góc nội tiếp cùng chắn hai cung bằng nhau)

Vậy các tam giác  $ASN$  và  $MSC$  cân tại  $C \Rightarrow SN = SA, SM = SC$

**Nhận xét:** Ở bài toán này học sinh có thể nhớ tới bài toán: Trong một đường tròn, hai cung bị chắn giữa hai dây song song thì bằng nhau từ đó nhìn ra  $MB = CN$

**Bài 2:** Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Tia phân giác góc  $A$  cắt  $BC$  tại  $D$  và cắt đường tròn tại điểm thứ hai là  $M$ . Kẻ tiếp tuyến  $AK$  với đường tròn  $(M, MB)$ ,  $K$  là tiếp điểm. Chứng minh rằng  $DK$  vuông góc với  $AM$ .

### Hướng dẫn giải

**Tìm cách giải.** Ta có:  $AKM = 90^\circ$  nên  $DK \perp AM \Leftrightarrow \triangle DMK \sim \triangle KMA$ . Mặt khác hai tam giác có  $AMK$  chung. Do yêu cầu chứng minh về góc nên để chứng minh hai tam giác đồng dạng ta nên dùng c.g.c. Do vậy cần chứng minh  $\frac{MD}{MK} = \frac{MK}{MA}$ .

### Trình bày lời giải:

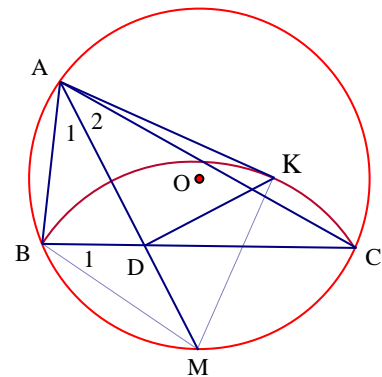
$A_1 = A_2$  mà  $B_1 = A_2$  (góc nội tiếp) nên  $B_1 = A_1$ .

$$\triangle MBD \sim \triangle MAB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{MD}{MB} = \frac{MB}{MA} \Rightarrow \frac{MD}{MK} = \frac{MK}{MA}$$

Kết hợp với  $DMK = AMK$  (góc chung)

ta có:  $\triangle DMK \sim \triangle KMA$  (c.g.c)  $\Rightarrow MDK = MKA = 90^\circ$

Vậy  $DK \perp AM$ .



**Bài 3:** Cho tam giác  $ABC$  có ba góc nhọn, đường cao  $AH$  và nội tiếp đường tròn tâm  $O$ , đường kính  $AM$ .

a) Tính  $\angle ACM$ ;

b) Chứng minh  $\angle BAH = \angle OCA$ ;

c) Gọi  $N$  là giao điểm  $AH$  với đường tròn  $(O)$ . Tứ giác  $BCMN$  là hình gì? Vì sao?

### Hướng dẫn giải

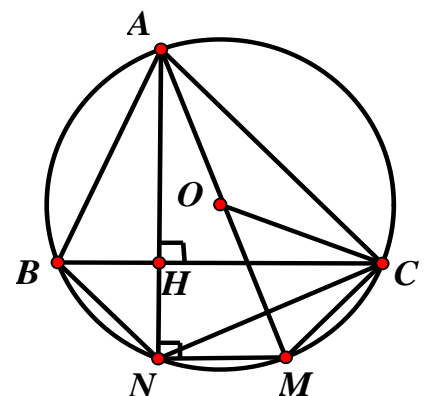
**Tìm cách giải.** Ta có:  $\angle ACM = 90^\circ$ , góc nội tiếp chắn nửa đường tròn. Nhận định tam giác  $AOC$  là tam giác cân nên nếu  $\angle BAH = \angle OCA$  ta sẽ có  $\angle BAH = \angle CAO$  từ đó tìm ra tam giác đồng dạng để giải toán.

### Trình bày lời giải

a) Ta có  $\angle ACM = 90^\circ$  (góc nội tiếp).

b) Vì  $\angle ABC = \angle AMC$  (cùng chắn cung  $AC$ ) và  $\angle AHB = \angle ACM = 90^\circ$

Nên  $\triangle ABH$  và  $\triangle AMC$  đồng dạng (g-g)



$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} BAH = OAC \\ OCA = OAC \end{array} \right\} \Rightarrow BAH = OCA$$

c)  $\angle ANM = 90^\circ$ ,  $AN \perp NM$  và  $AN \perp BC$  nên  $MN \parallel BC \Rightarrow MNBC$  là hình thang

$BC \parallel MN \Rightarrow \text{sđ } BN = \text{sđ } CM$  (xem chứng minh **Bài 1**)

$\Rightarrow \text{sđ } BM = \text{sđ } CN \Rightarrow BM = CN \Rightarrow MNBC$  là hình thang cân.

**Bài 4:** Cho đường tròn tâm O và một dây AB của đường tròn đó. Các tiếp tuyến vẽ từ A và B của đường tròn cắt nhau tại C. Gọi D là một điểm trên đường tròn có đường kính OC (D khác A và B). CD cắt cung AB của đường tròn (O) tại E. (E nằm giữa C và D). Chứng minh rằng:

a)  $\angle BED = \angle DAE$ .

b)  $DE^2 = DA \cdot DB$ .

### Hướng dẫn giải

#### Tìm cách giải

- Trong quá trình chứng minh về góc, nên sử dụng tính chất về góc nội tiếp, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng hệ quả của chúng.
- Để chứng minh  $DE^2 = DA \cdot DB$ , nên ghép chúng vào hai tam giác có cạnh là DA, DB và DE là cạnh chung của hai tam giác, rồi chứng minh chúng đồng dạng. Do đó ta chọn  $\triangle BED$  và  $\triangle EAD$ .

#### Trình bày lời giải

a) Ta có:  $\angle EBC = \angle EAB$ ;  $\angle DCB = \angle DAB$  nên

$$\angle EBC + \angle DCB = \angle EAB + \angle DAB.$$

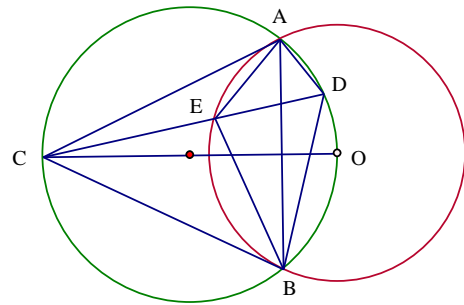
Mặt khác:  $\angle EBC + \angle DCB = \angle BED$ ,  $\angle EAB + \angle DAB = \angle DAE$ .

Vậy  $\angle BED = \angle DAE$ .

b) Ta có:  $\angle ADE = \angle ABC = \angle CAB = \angle EDB$  mà theo câu a):

$\angle BED = \angle DAE$ , suy ra:

$$\triangle BED \sim \triangle EAD \text{ (g-g)} \Rightarrow \frac{DE}{DA} = \frac{DB}{DE} \Rightarrow DE^2 = DA \cdot DB$$



**Bài 5:** Tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Các điểm M, N, P là điểm chính giữa của các cung AB, BC, CA. Gọi D là giao điểm của MN và AB, E là giao điểm của PN và AC. Chứng minh rằng DE song song với BC.

### Hướng dẫn giải

**Tìm cách giải.** Khai thác điểm chính giữa của một cung, ta nhận được các tia phân giác của góc. Do vậy nếu khai thác tính chất đường phân giác của tam giác, ta được các tỉ số. Với suy luận đó, để chứng minh  $DE \parallel BC$  ta cần vận dụng định lý Ta-lét đảo.

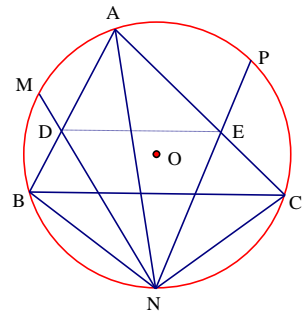
#### Trình bày lời giải:

$$AP = PC \Rightarrow NE \text{ là đường phân giác của } \triangle ANC \Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{AN}{NC} \quad (1)$$

$$AM = MB \Rightarrow ND \text{ là đường phân giác của } \triangle ANB \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AN}{NB} \quad (2)$$

$$BN = NC \Rightarrow NB = NC \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra  $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$ , do đó  $DE \parallel BC$ .



**Bài 6:** Từ điểm M ở ngoài đường tròn (O), vẽ hai tiếp tuyến MA, MB và một cát tuyến MCD. Gọi I là giao điểm của AB và CD. Chứng minh rằng:  $\frac{IC}{ID} = \frac{MC}{MD}$ .

### Hướng dẫn giải

**Tìm cách giải.** Khai thác góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung để dàng chỉ ra  $\triangle MAC \sim \triangle MDA$  và  $\triangle MBC \sim \triangle MDB$ . Từ đó biến đổi các hệ thức để giải bài toán.

### Trình bày lời giải

Ta có  $\angle MAC = \angle ADC$  (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung);  $\angle AMD$  chung. Suy ra  $\triangle MAC \sim \triangle MDA$  (g-g) suy ra:  $MA^2 = MC \cdot MD$  và  $\frac{MA}{MD} = \frac{AC}{AD}$

Tương tự:  $\triangle MBC \sim \triangle MDB$  suy ra:  $\frac{MB}{MD} = \frac{BC}{BD}$

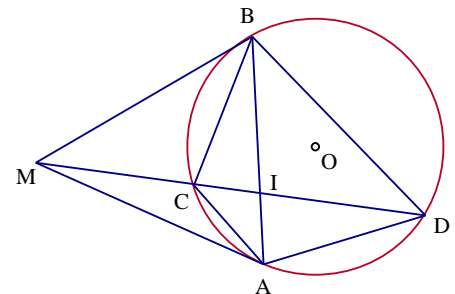
$$\text{Xét } \frac{MC}{MD} = \frac{MC \cdot MD}{MD^2} = \frac{MA^2}{MD^2} = \frac{MA}{MD} \cdot \frac{MA}{MD} = \frac{AC}{AD} \cdot \frac{BC}{BD} \quad (1)$$

Mặt khác:  $\triangle IAC \sim \triangle IDB$  suy ra:  $\frac{IC}{IB} = \frac{AC}{BD}$

$$\triangle IBC \sim \triangle IDA \text{ suy ra: } \frac{IB}{ID} = \frac{BC}{AD};$$

$$\text{Do đó: } \frac{AC}{AD} \cdot \frac{BC}{BD} = \frac{AC}{BD} \cdot \frac{BC}{AD} = \frac{IC}{IB} \cdot \frac{IB}{ID} = \frac{IC}{ID} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } \frac{IC}{ID} = \frac{MC}{MD}.$$



**Bài 7:** Gọi CA, CB lần lượt là các tiếp tuyến của đường tròn (O; R) với A, B là các tiếp điểm. Vẽ đường tròn tâm I qua C và tiếp xúc với AB tại B. Đường tròn (I) cắt đường tròn (O) tại M. Chứng minh rằng đường thẳng AM đi qua trung điểm của BC.

### Hướng dẫn giải

**Tìm cách giải.** Chỉ ra  $KB^2 = KM \cdot KA$  và  $KC^2 = KM \cdot KA$  từ đó suy ra  $KA = KB$  (K là giao điểm của AM và BC)

### Trình bày lời giải

Gọi K là giao điểm của AM và BC.

Xét  $\Delta KBM$  và  $\Delta KAB$  có:  $K$  chung;  $KBM = KAB$  ( góc tạo bởi tia tiếp tuyến, dây cung và góc nội tiếp chắn cùng chắn cung  $BM$  của  $(O)$  )

$$\text{Do đó: } \Delta KBM \sim \Delta KAB \Rightarrow \frac{KB}{KA} = \frac{KM}{KB} \Rightarrow KB^2 = KM.KA \quad (1)$$

$MCK = MBA$  (góc tạo bởi tia tiếp tuyến dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung  $BM$  của  $(I)$ ).

$KAC = MBA$  (góc tạo bởi tia tiếp tuyến dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung  $AM$  của  $(O)$ ).

Do đó:  $MCK = KAC$ . Xét  $\Delta KCM$  và  $\Delta KAC$  có:  $K$  chung ,  
 $MCK = KAC$ . Do đó

$$\Delta KCM \sim \Delta KAC \Rightarrow \frac{KC}{KA} = \frac{KM}{KC} \Rightarrow KC^2 = KM.KA \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta có:  $KC^2 = KB^2 \Rightarrow KC = KB$ . Vậy  $AM$  đi qua trung điểm  $K$  của  $BC$ .

**Bài 8:** Cho hình bình hành  $ABCD$ , góc  $A < 90^\circ$ . Đường tròn ngoại tiếp tam giác  $BCD$  cắt  $AC$  ở  $E$ . Chứng minh rằng  $BD$  là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $AEB$ .

### Hướng dẫn giải

Gọi  $I$  là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành.

$$IA = IC \Rightarrow IE.IA = IE.IC$$

$$\Delta IBE \sim \Delta ICD \text{ (g.g)} \Rightarrow IE.IC = IB.ID$$

$$\text{Từ đó suy ra: } IE.IA = IE.IC = IB.ID = IB^2 \Rightarrow \frac{IB}{IE} = \frac{IA}{IB}.$$

Ta có  $\Delta IBE$  và  $\Delta IAB$  có  $\frac{IB}{IE} = \frac{IA}{IB}$  và  $\angle BIA$  chung , suy ra

$$\Delta IBE \sim \Delta IAB \text{ (c.g.c)} \text{ nên } \angle IBE = \angle IAB.$$

Suy ra  $BD$  là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $AEB$  ( định lí bổ sung)

### Góc có đỉnh bên trong và bên ngoài đường tròn

**Bài 1:** Cho tứ giác  $ABCD$  có bốn đỉnh thuộc đường tròn . Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là điểm chính giữa các cung  $AB, BC, CD, DA$ . Chứng minh rằng :  $MP \perp NQ$ .

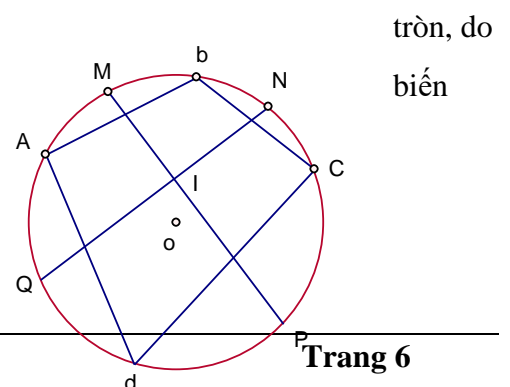
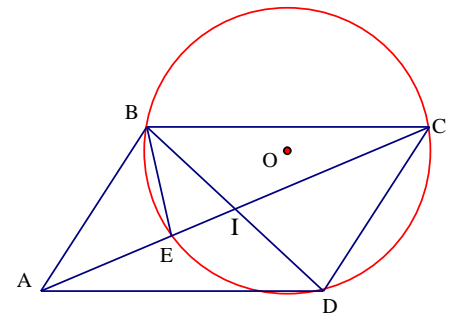
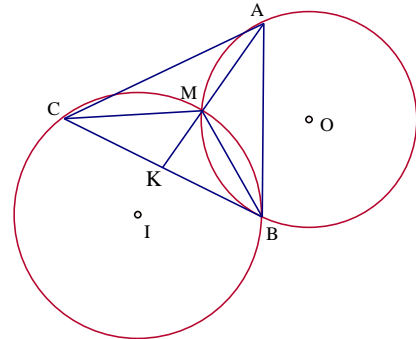
### Hướng dẫn giải

**Tìm cách giải.** Để chứng minh  $MP \perp NQ$  ta gọi  $I$  là giao điểm của  $MP$  và  $NQ$  và cần chứng minh

$\angle MIQ = 90^\circ$ . Nhận thấy  $\angle MIQ$  là góc có đỉnh ở bên trong đường tròn, do vậy ta cần biểu diễn góc  $\angle MIQ$  theo các cung của đường tròn và đổi các cung ấy.

### Trình bày lời giải

Gọi  $I$  là giao điểm của  $MP$  và  $NQ$ . Ta có.



$$\begin{aligned}
 MIQ &= \frac{1}{2}(\text{sđ } MQ + \text{sđ } NP) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (\text{sđ } AB + \text{sđ } AD + \text{sđ } BC + \text{sđ } CD). \\
 &= \frac{1}{4} \cdot 360^\circ = 90^\circ. \text{ Vậy } MP \perp NQ.
 \end{aligned}$$

**Bài 2:** Cho đường tròn (O), hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau, điểm M thuộc cung nhỏ BC. Gọi E là giao điểm của MA và CD, F là giao điểm của MD và AB. Chứng minh rằng:

- a)  $\angle DAE = \angle AFD$  ;  
 b) Khi M di động trên cung nhỏ BC thì diện tích tứ giác AEFD không đổi.

### Hướng dẫn giải

a)  $\angle DAE = \frac{\text{sđ } DBM}{2}$  (góc nội tiếp) .

$$\angle AFD = \frac{\text{sđ } DB + \text{sđ } MB}{2} = \frac{\text{sđ } DBM}{2} \text{ (góc có đỉnh ở bên trong đường tròn)}$$

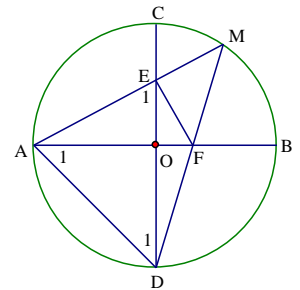
Suy ra  $\angle DAE = \angle AFD$

b) Ta có:  $\angle D_1 = \angle A_1 (= 45^\circ)$  và  $\angle E_1 = \angle ADF$  (cách chứng minh tương tự câu a)

$$\text{nên } \triangle DAE \sim \triangle ADF \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{DE}{AD} = \frac{AD}{AF} \Rightarrow AF \cdot DE = AD^2.$$

Mặt khác AEFD là tứ giác có hai đường chéo AF, DE vuông góc với nhau.

$$\text{Do đó } S_{AEFD} = \frac{1}{2} AF \cdot DE = \frac{1}{2} AD^2, \text{ không đổi.}$$



---- Hết ----