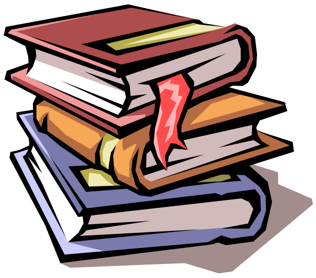
Tailieumontoan.com

Tài liệu sưu tầm



TUYỂN TẬP CÁC CHUYÊN ĐỀ NÂNG CAO HÌNH HỌC LỚP 7

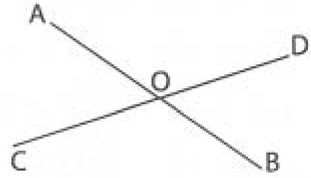
Tài liệu sưu tầm, ngày 24 tháng 8 năm 2020

Chương I. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Chuyên đề 1. HAI GÓC ĐỐI ĐỈNH

A. Kiến thức cần nhớ

1. Hai góc đối đỉnh là hai góc mà mỗi cạnh của góc này là tia đối của một cạnh của góc kia (h.1.1).



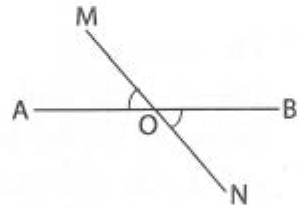
Hình 1.1

2. Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau: $\widehat{AOC} = \widehat{BOD}; \widehat{AOD} = \widehat{BOC}$.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho góc bẹt *AOB*. Trên hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ *AB* vẽ hai tia *OM* và *ON* sao cho $\widehat{AOM} = \widehat{BON}$. Chứng minh rằng hai góc *AON* và *BOM* là hai góc đối đỉnh.

Giải (h.1.2)



Hình 1.2

** Tìm cách giải*

Để chứng tỏ hai góc *AON* và *BOM* là hai góc đối đỉnh, ta cần chứng tỏ mỗi cạnh của góc này là tia đối một cạnh của góc kia. Vì đã có hai tia *OA*, *OB* đối nhau nên chỉ còn phải chứng tỏ hai tia *OM*, *ON* đối nhau bằng cách chứng tỏ *MON* là góc bẹt.

** Trình bày lời giải*

Góc *AOB* là góc bẹt nên hai tia *OA*, *OB* đối nhau. Hai góc *AOM* và *BOM* kề bù nên $\widehat{AOM} + \widehat{BOM} = 180°$.

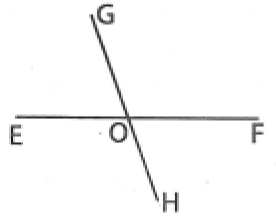
Mặt khác $\widehat{AOM} = \widehat{BON}$ (đề bài cho) nên $\widehat{BON} + \widehat{BOM} = 180°$.

Suy ra $\widehat{MON} = 180°$. Vậy hai tia *OM*, *ON* đối nhau.

Hai góc *AON* và *BOM* có mỗi cạnh của góc này là tia đối một cạnh của góc kia nên chúng là hai góc đối đỉnh.

Ví dụ 2: Cho hai đường thẳng *EF* và *GH* cắt nhau tại *O* tạo thành bốn góc không kể góc bẹt. Biết tổng $\widehat{EOG} + \widehat{GOF} + \widehat{FOH} = 250°$. Tính số đo của bốn góc tạo thành.

Giải (h.1.3)



Hình 1.3

** Tìm cách giải*

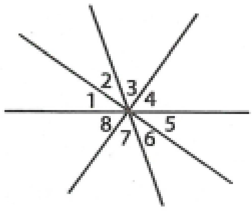
Để tính được số đo của bốn góc tạo thành, trước tiên cần tính được số đo của một trong bốn góc đó.

** Trình bày lời giải*

Ta có $\widehat{EOG}+\widehat{GOF}+\widehat{FOH}=250^\circ$ (đề bài cho), mà $\widehat{EOG}+\widehat{GOF}=180^\circ$ (hai góc kề bù) nên $\widehat{FOH}=250^\circ-180^\circ=70^\circ$.

Ta có $\widehat{GOF}+\widehat{FOH}=180^\circ$ (hai góc kề bù) $\Rightarrow \widehat{GOF}=180^\circ-70^\circ=110^\circ$.

Vậy $\widehat{EOG}=\widehat{FOH}=70^\circ$ (hai góc đối đỉnh); $\widehat{HOE}=\widehat{GOF}=110^\circ$ (hai góc đối đỉnh).



Hình 1.4

* *Nhận xét:* Sau khi tính được số đo của một góc, ta tính được số đo của ba góc còn lại nhờ vận dụng tính chất của hai góc kề bù, hai góc đối đỉnh.

Ví dụ 3: Cho bốn đường thẳng cắt nhau tại một điểm. Xét các góc không có điểm trong chung, chứng tỏ rằng tồn tại hai góc nhỏ hơn hoặc bằng 45°.

Giải (h.1.4)

* *Tìm cách giải*

Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau. Do đó để chứng tỏ tồn tại hai góc nhỏ hơn hoặc bằng 45°, ta chỉ cần chứng tỏ tồn tại một góc nhỏ hơn hoặc bằng 45°.

* *Trình bày lời giải*

Bốn đường thẳng cắt nhau tại một điểm tạo ra 8 góc không có điểm trong chung.

Nếu tất cả các góc này đều lớn hơn 45° thì tổng của chúng lớn hơn $45^\circ.8=360^\circ$. Điều này vô lí, vì tổng của 8 góc này đúng bằng 360°.

Vậy phải tồn tại một góc nhỏ hơn hoặc bằng 45°. Góc này và góc đối đỉnh với nó bằng nhau. Do đó tồn tại hai góc nhỏ hơn hoặc bằng 45°.

Ví dụ 4: Trong hình 1.5, hai góc *AOC* và *BOD* là hai góc đối đỉnh. Hai tia *OE, OF* là hai tia đối nhau. Cho biết tia *OE* là tia phân giác của góc *AOC*, chứng tỏ rằng tia *OF* là tia phân giác của góc *BOD*.

Giải (h.1.5)

* *Tìm cách giải*

Ta cần chứng tỏ $\widehat{O_3}=\widehat{O_4}$. Muốn vậy phải sử dụng tính chất của hai góc đối đỉnh.

* *Trình bày lời giải*

Hai góc *AOC* và *BOD* là hai góc đối đỉnh nên các tia *OA, OB* đối nhau, các tia *OC, OD* đối nhau. Ngoài ra, hai tia *OE, OF* cũng đối nhau nên ta có $\widehat{O_1}=\widehat{O_3};\widehat{O_2}=\widehat{O_4}$ (hai góc đối đỉnh).
Vì $\widehat{O_1}=\widehat{O_2}$ (đề bài cho) nên $\widehat{O_3}=\widehat{O_4}$. (1)

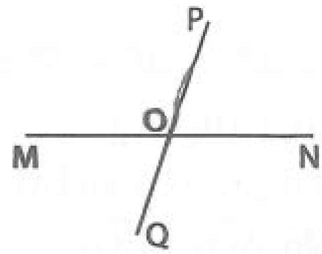
Mặt khác, tia *OF* nằm giữa hai tia *OB, OD*. (2)

nên từ (1) và (2) suy ra tia *OF* là tia phân giác của góc *BOD*.

C. Bài tập vận dụng

• *Tính số đo góc*

1.1. Hai đường thẳng *AB, CD* cắt nhau tại *O* tạo thành bốn góc không kể góc bẹt. Biết $\widehat{AOC}+\widehat{BOD}=100°$. Tính số đo của mỗi góc tạo thành.



Hình 1.7

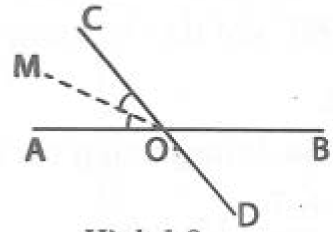
Hướng dẫn giải (h.1.6)

Ta có: $\widehat{AOC}=\widehat{BOD}$ (hai góc đối đỉnh) mà $\widehat{AOC}+\widehat{BOD}=100°$ nên $\widehat{AOC}=\widehat{BOD}=100°:2=50°$.

Hai góc *AOC* và *BOC* kề bù nên $\widehat{BOC}=180°-50°=130°$.

Do đó $\widehat{AOD}=\widehat{BOC}=130°$ (hai góc đối đỉnh).

1.2. Cho hai đường thẳng *MN, PQ* cắt nhau tại *O* tạo thành bốn góc khác góc bẹt. Biết $\widehat{NOP}=\frac{2}{3}\widehat{MOP}$. Tính số đo của mỗi góc tạo thành.



Hình 1.8

Hướng dẫn giải (h.1.7)

Hai góc *NOP* và *MOP* kề bù nên $\widehat{NOP}+\widehat{MOP}=180°$ mà $\widehat{NOP}=\frac{2}{3}\widehat{MOP}$ nên $\widehat{NOP}=\frac{180°.2}{2+3}=72°$; $\widehat{MOP}=180°-72°=108°$.

Suy ra $\widehat{MOQ}=\widehat{NOP}=72°$ (hai góc đối đỉnh); $\widehat{NOQ}=\widehat{MOP}=108°$ (hai góc đối đỉnh).

1.3. Cho hai đường thẳng *AB, CD* cắt nhau tại *O*. Vẽ tia *OM* là tia phân giác của góc *AOC*. Biết $\widehat{BOD}=a°(0<a<180)$. Tìm giá trị của *a* để $\widehat{BOM}=155°$.

Hướng dẫn giải (h.1.8)

Ta có $\widehat{AOC}=\widehat{BOD}=a°$ (hai góc đối đỉnh).

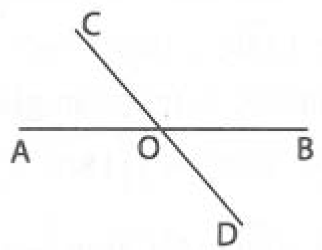
Tia *OM* là tia phân giác của góc *AOC* nên $\widehat{AOM}=\widehat{MOC}=\frac{a°}{2}$.

Hai góc $\widehat{AOM}$ và $\widehat{BOM}$ kề bù nên $\widehat{AOM}+\widehat{BOM}=180°$ suy ra $\widehat{BOM}=180°-\frac{a°}{2}$.

Ta có

$\widehat{BOM}=155°\Leftrightarrow 180°-\frac{a°}{2}=155°\Leftrightarrow\frac{a°}{2}=180°-155°\Leftrightarrow\frac{a°}{2}=25°\Leftrightarrow a°=50°$

.

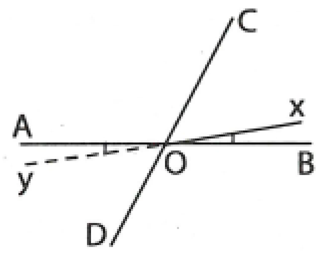


Vậy $a = 50$.

Lưu ý: Kí hiệu $\Leftrightarrow$ đọc là "khi và chỉ khi".

Khi viết $A \Leftrightarrow B$ ta hiểu từ *A* suy được ra *B* và ngược lại, từ *B* suy được ra *A*.

1.4. Cho hai đường thẳng *EF, GH* cắt nhau tại *O*. Vẽ tia phân giác *OK* của góc *EOG*. Biết $\widehat{FOK} = m°(0 < m < 180)$. Tìm giá trị của *m* để $\widehat{FOH} = 110°$.



Hình 1.10

Hướng dẫn giải (h.1.9)

Hai góc *EOK* và *FOK* kề bù nên $\widehat{EOK} + \widehat{FOK} = 180°$

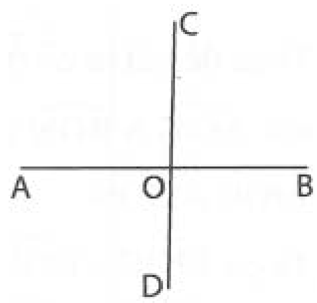
$\Rightarrow \widehat{EOK} = 180° - m°$.

Tia *OK* là tia phân giác của góc *EOG* nên $\widehat{EOG} = 2(180° - m°)$.

Vì $\widehat{FOH}$ đối đỉnh với $\widehat{EOG}$ nên $\widehat{FOH} = \widehat{EOG} = 2(180° - m°)$.

Ta có $\widehat{FOH} = 110° \Leftrightarrow 2(180° - m°) = 110° \Leftrightarrow 180° - m° = 55°$

$\Leftrightarrow m° = 180° - 55° \Leftrightarrow m° = 125°$. Vậy $m = 125$.



Hình 1.11

1.5. Cho hai đường thẳng *AB, CD* cắt nhau tại *O*, $\widehat{BOC} = 60°$. Một tia *Ox* có thể trùng với tia *OB* hoặc *OC* hoặc nằm giữa hai tia này. Vẽ tia *Oy* là tia đối của tia *Ox*. Tìm số đo lớn nhất của góc *AOy*.

Hướng dẫn giải (h.1.10)

Hai góc *AOy* và *BOx* là hai góc đối đỉnh nên $\widehat{AOy} = \widehat{BOx}$.

Ta có $\widehat{BOx} \le \widehat{BOC}$ nên $\widehat{AOy} \le 60°$; dấu "=" xảy ra khi tia *Ox* trùng với tia *OC*.

Vậy số đo lớn nhất của góc *AOy* là bằng $60°$ khi tia *Ox* trùng với tia *OC*.

1.6. Cho ba đường thẳng *AB, CD* và *MN* cắt nhau tại *O*.

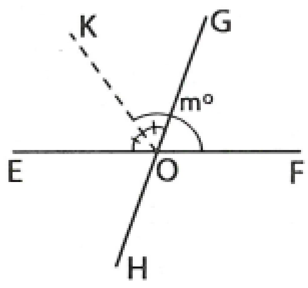
a) Trong hình vẽ có tất cả bao nhiêu góc?

b) Chứng tỏ rằng trong các góc nói trên tồn tại hai góc tù.

Hướng dẫn giải

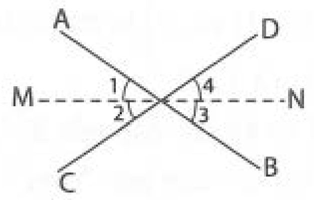
a) Ba đường thẳng cắt nhau tại *O* tạo thành 6 tia. Số góc do 6 tia tạo ra là: $\dfrac{6.5}{2} = 15$ (góc).

b) Xét hai đường thẳng *AB* và *CD* trong ba đường thẳng đã cho (h.1.11). Hai đường thẳng này tạo thành bốn góc không có điểm



Hình 1.9

trong chung. Tổng của bốn góc này bằng $360°$ nên trong bốn góc đó phải tồn tại một góc lớn hơn hoặc bằng $90°$.



Hình 1.13

Thật vậy, nếu mỗi góc đó đều nhỏ hơn $90°$ thì tổng của chúng nhỏ hơn $90°.4 = 360°$: vô lí.

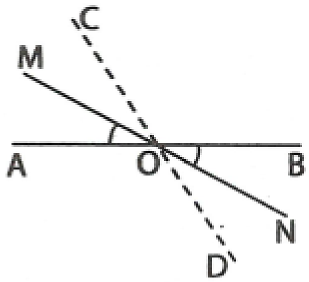
Giả sử góc tồn tại nói trên là góc *BOD*.

- Nếu $\widehat{BOD} > 90°$ thì $\widehat{AOC} = \widehat{BOD} > 90°$, bài toán đã giải xong.

- Nếu $\widehat{BOD} = 90°$ thì ta xét tiếp đường thẳng thứ ba *MN* đi qua *O* (h.1.12).

Giả sử tia *ON* nằm trong góc *BOD*. Khi đó góc *BON* là góc nhọn do đó $\widehat{AON}$ là góc tù (vì $\widehat{BON}$ và $\widehat{AON}$ là hai góc kề bù). Góc *AON* là góc tù thì góc *BOM* là góc tù (vì $\widehat{BOM} = \widehat{AON}$).

Vậy luôn tồn tại hai góc tù trong số 15 góc được tạo thành.



Hình 1.14

• *Chứng tỏ hai tia đối nhau*

1.7. Chứng tỏ rằng hai tia phân giác của hai góc đối đỉnh là hai tia đối nhau.

Hướng dẫn giải (h.1.13)

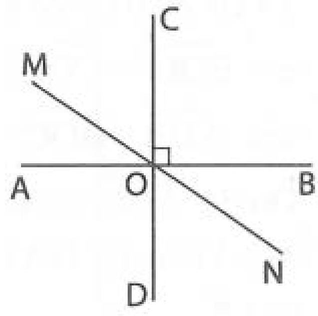
Xét hai góc đối đỉnh *AOC* và *BOD*. Gọi tia *OM* là tia phân giác của góc *AOC*; tia *ON* là tia phân giác của góc *BOD*. Ta phải chứng tỏ hai tia *OM*, *ON* đối nhau.

Ta có $\widehat{AOC} = \widehat{BOD}$ (hai góc đối đỉnh) mà $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}; \widehat{O_3} = \widehat{O_4}$ nên $\widehat{O_1} = \widehat{O_3}$ (một nửa của hai góc bằng nhau).

Vì $\widehat{AOB} = 180°$ nên $\widehat{AOD} + \widehat{DOB} = 180°$

$\Rightarrow \widehat{AOD} + \widehat{O_4} + \widehat{O_3} = 180°$

$\Rightarrow \widehat{AOD} + \widehat{O_4} + \widehat{O_1} = 180°$ (vì $\widehat{O_1} = \widehat{O_3}$).



Hình 1.12

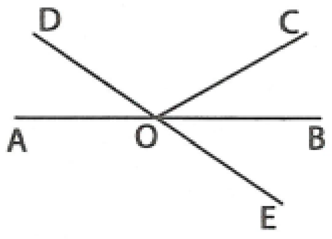
Do đó $\widehat{MON} = 180°$.

Suy ra hai tia *OM*, *ON* đối nhau.

1.8. Cho hai đường thẳng *AB* và *MN* cắt nhau tại *O* sao cho $\widehat{AOM} < 90°$. Trên nửa mặt phẳng bờ *AB* có chứa tia *OM*, vẽ tia *OC* sao cho tia *OM* là tia phân giác của góc *AOC*. Trên nửa mặt phẳng bờ *AB* có chứa tia *ON* vẽ tia *OD* sao cho tia *ON* là tia phân giác của góc *BOD*. Chứng tỏ rằng hai tia *OC*, *OD* là hai tia đối nhau.

Hướng dẫn giải (h.1.14)

Theo đề bài ta có $\widehat{AOM}=\widehat{MOC}, \widehat{BON}=\widehat{DON}$ mà $\widehat{AOM}=\widehat{BON}$ (hai góc đối đỉnh) nên $\widehat{MOC}=\widehat{DON}$.



Hình 1.16

Ta có $\widehat{MOD}+\widehat{DON}=180^\circ$ (hai góc kề bù), suy ra $\widehat{MOD}+\widehat{MOC}=180^\circ$.

Hai góc *MOD* và *MOC* là hai góc kề, có tổng bằng 180° nên hai tia *OC*, *OD* đối nhau.

• *Chứng tỏ một tia là tia phân giác*

1.9. Cho hai góc *AOB* và *AOC* là hai góc kề bằng nhau, mỗi góc đều là góc tù. Vẽ tia OB' là tia đối của tia *OB*, tia OC' là tia đối của tia *OC*. Chứng tỏ rằng tia *OA* là tia phân giác của góc $B'OC'$.

Hướng dẫn giải (h.1.15)

Ta có $\widehat{AOB}=\widehat{AOC}$ (đề bài cho) mà $\widehat{BOC'}=\widehat{COB'}$ (hai góc đối đỉnh) nên $\widehat{AOB}-\widehat{BOC'}=\widehat{AOC}-\widehat{COB'}$.

Do đó $\widehat{AOC'}=\widehat{AOB'}$. (1)

Mặt khác, tia *OA* nằm giữa hai tia OB' và OC'. (2)

Nếu từ (1) và (2) ta được tia *OA* là tia phân giác của góc $B'OC'$.

1.10. Cho góc bẹt *AOB*. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ *AB* vẽ các tia *OC* và *OD* sao cho $\widehat{AOC}=\widehat{BOD}=150^\circ$. Vẽ tia *OE* là tia đối của tia *OD*. Chứng tỏ rằng tia *OB* là tia phân giác của góc *COE*.

Hướng dẫn giải (h.1.16)

Hai góc *AOC* và *BOC* kề bù nên $\widehat{AOC}+\widehat{BOC}=180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{BOC}=180^\circ-150^\circ=30^\circ$.

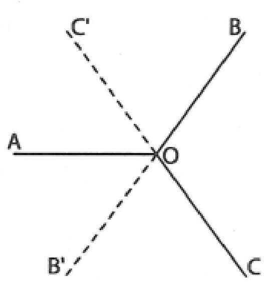
Tương tự, ta tính được $\widehat{AOD}=30^\circ$.

Ta có $\widehat{BOE}=\widehat{AOD}=30^\circ$ (hai góc đối đỉnh).

Suy ra $\widehat{BOC}=\widehat{BOE}=30^\circ$. (1)

Tia *OB* nằm giữa hai tia *OC* và *OE*. (2)

Từ (1) và (2) ta được tia *OB* là tia phân giác của góc *COE*.



Hình 1.15

• *Đếm góc, đếm tia*

1.11. Cho bốn đường thẳng cắt nhau tại một điểm. Tìm số cặp góc đối đỉnh được tạo thành (không kể góc bẹt).

a) Bằng cách liệt kê;

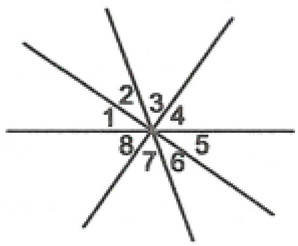
b) Bằng cách tính toán.

Hướng dẫn giải (h.1.17)

a) Liệt kê các cặp góc đối đỉnh

• Xét các cặp góc "đơn":

Góc 1 đối đỉnh với góc 5; Góc 2 đối đỉnh với góc 6; Góc 3 đối đỉnh với góc 7; Góc 4 đối đỉnh với góc 8. Có tất cả 4 góc "đơn" đối đỉnh.



Hình 1.17

• Xét các cặp góc "ghép đôi" (ghép hai góc đơn kề nhau thành một góc "ghép đôi"):

Góc 12 đối đỉnh với góc 56; Góc 23 đối đỉnh với góc 67; Góc 34 đối đỉnh với góc 78; Góc 45 đối đỉnh với góc 81. Có tất cả 4 cặp góc "ghép đôi" đối đỉnh.

• Xét các cặp góc "ghép ba" (ghép ba góc đơn kề nhau thành một góc "ghép ba"):

Góc 123 đối đỉnh với góc 567; Góc 234 đối đỉnh với góc 678; Góc 345 đối đỉnh với góc 781; Góc 456 đối đỉnh với góc 812. Có tất cả 4 cặp góc "ghép ba" đối đỉnh.

Vậy tổng cộng có $4.3 = 12$ cặp góc đối đỉnh.

b) Xây dựng công thức tính số cặp góc đối đỉnh.

Có 4 đường thẳng cắt nhau tại một điểm nên có: $4.2 = 8$ (tia).

Số góc do 8 tia tạo ra là $\dfrac{8.7}{2} = 28$ (góc).

Không kể góc bẹt thì số góc còn lại là: $28 - 4 = 24$ (góc).

Mỗi góc trong 24 góc này đều có một góc đối đỉnh với nó nên số cặp góc đối đỉnh được tạo thành là $24 : 2 = 12$ (cặp).

* *Nhận xét:* Nếu có n đường thẳng cắt nhau tại một điểm thì số cặp góc đối đỉnh (không kể góc bẹt) được tạo thành là $n(n-1)$.

Thật vậy, số tia do n đường thẳng cắt nhau tại một điểm tạo ra là $2n$ (tia).

Số góc do $2n$ tia tạo ra là: $\dfrac{2n(2n-1)}{2} = n(2n-1)$.

Không kể n góc bẹt thì số góc còn lại là: $n(2n-1) - n = 2n^2 - n - n = 2n^2 - 2n = 2n(n-1)$.

Số cặp góc đối đỉnh là: $\dfrac{2n(n-1)}{2} = n(n-1)$.

1.12. Cho n đường thẳng cắt nhau tại một điểm, chúng tạo thành:

a) 20 cặp góc đối đỉnh (không kể góc bẹt);

b) 90 cặp góc đối đỉnh (không kể góc bẹt).

Tính giá trị của n trong mỗi trường hợp.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $n(n-1) = 20$

$n(n-1) = 5.4 \Rightarrow n = 5$.

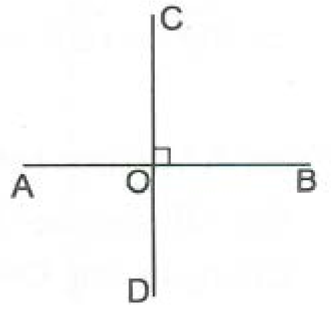
Vậy $n = 5$.

b) Ta có:

$n(n-1) = 90$

$n(n-1) = 10.9 \Rightarrow n = 10$

Vậy $n = 10$.



Hình2.1

Chương I. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG.

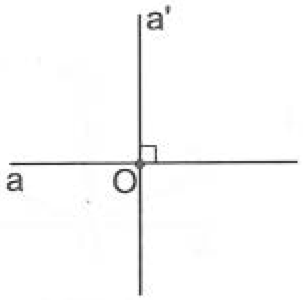
Chuyên đề 2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A. Kiến thức cần nhớ

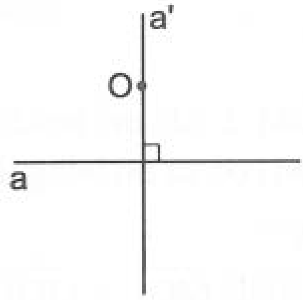
1. Hai đường thẳng *AB, CD* cắt nhau và trong các góc tạo thành có một góc vuông được gọi là hai đường thẳng vuông góc.

Trong hình 2.1 ta có $AB \perp CD$.

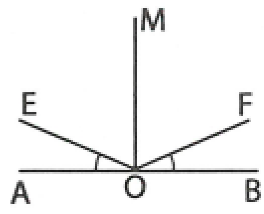
2. Có một và chỉ một đường thẳng a' đi qua *O* và vuông góc với đường thẳng a cho trước (h.2.2).



Hình 2.2a



Hình 2.2b



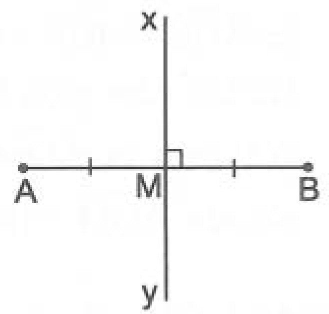
Hình2.5

3. Đường thẳng vuông góc với một đoạn thẳng tại trung điểm của nó được gọi là đường trung trực của đoạn thẳng ấy.

Trong hình 2.3, đường thẳng xy là đường trung trực của *AB*.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho góc bẹt *AOB* và tia *OM* sao cho $\widehat{AOM}=60°$. Vẽ tia *ON* nằm trong góc *BOM* sao cho $ON\perp OM$. Chứng tỏ rằng $\widehat{BON}=\frac{1}{2}\widehat{AOM}$.



Hình2.3

Giải (h.2.4)

** Tìm cách giải*

Muốn so sánh hai góc *BON* và *AOM* ta cần tính số đo của chúng.

Đã biết số đo của góc *AOM* nên chỉ cần tính số đo của góc *BON*.

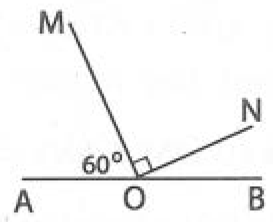
** Trình bày lời giải*

Hai góc *AOM* và *BOM* kề bù nên $\widehat{AOM}+\widehat{BOM}=180°$

$\Rightarrow \widehat{BOM}=180°-60°=120°$. Vì $OM\perp ON$ nên $\widehat{MON}=90°$.

Tia *ON* nằm trong góc *BOM* nên $\widehat{BON}+\widehat{MON}=\widehat{BOM}$

$\Rightarrow \widehat{BON}=120°-90°=30°$. Vì $30°=\frac{1}{2}.60°$ nên $\widehat{BON}=\frac{1}{2}\widehat{AOM}$.



Hình2.4

Ví dụ 2: Cho góc bẹt *AOB*. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ *AB* vẽ các tia *OE*, *OF* sao cho $\widehat{AOE}=\widehat{BOF}<90°$. Vẽ tia phân giác *OM* của góc *EOF*. Chứng tỏ rằng $OM\perp AB$.

Giải (h.2.5)

** Tìm cách giải*

Để chứng tỏ $OM\perp AB$ ta cần chứng tỏ góc *AOM* (hoặc góc *BOM*) có số đo bằng $90°$.

** Trình bày lời giải*

Ta có $\widehat{AOE} = \widehat{BOF}; \widehat{MOE} = \widehat{MOF}$ (đề bài cho)

$\Rightarrow \widehat{AOE} + \widehat{MOE} = \widehat{BOF} + \widehat{MOF}$. (1)

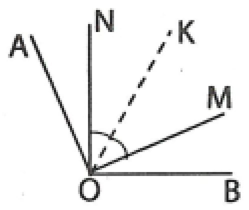
Tia *OE* nằm giữa hai tia *OA, OM*; tia *OF* nằm giữa hai tia *OB, OM* nên từ (1) suy ra $\widehat{AOM} = \widehat{BOM}$. Mặt khác, $\widehat{AOM} + \widehat{BOM} = 180°$ (hai góc kề bù) nên $\widehat{AOM} = 180° : 2 = 90°$, suy ra $OM \perp OA$. Do đó $OM \perp AB$.

Ví dụ 3: Cho góc tù *AOB*. Vẽ vào trong góc này các tia *OM, ON* sao cho $OM \perp OA, ON \perp OB$. Vẽ tia *OK* là tia phân giác của góc *MON*. Chứng tỏ rằng tia *OK* cũng là tia phân giác của góc *AOB*.

Giải (h.2.6)

** Tìm cách giải*

Muốn chứng tỏ tia *OK* là tia phân giác của góc *AOB* ta cần chứng tỏ $\widehat{AOK} = \widehat{BOK}$. Muốn vậy cần chứng tỏ $\widehat{AON} + \widehat{NOK} = \widehat{BOM} + \widehat{MOK}$.



Hình2.6

** Trình bày lời giải*

Ta có $OM \perp OA \Rightarrow \widehat{AOM} = 90°; ON \perp OB \Rightarrow \widehat{BON} = 90°$.

Tia *ON* nằm giữa hai tia *OA, OM* nên $\widehat{AON} + \widehat{NOM} = \widehat{AOM} = 90°$;

Tia *OM* nằm giữa hai tia *OB, ON* nên $\widehat{BOM} + \widehat{MON} = \widehat{BON} = 90°$.

Suy ra $\widehat{AON} = \widehat{BOM}$ (cùng phụ với $\widehat{MON}$).

Tia *OK* là tia phân giác của góc *MON* nên $\widehat{NOK} = \widehat{MOK}$.

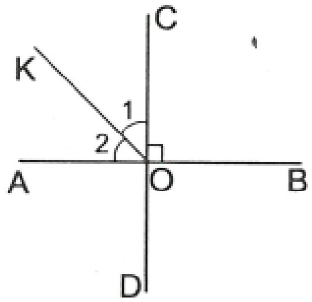
Do đó $\widehat{AON} + \widehat{NOK} = \widehat{BOM} + \widehat{MOK}$. (1)

Vì tia *ON* nằm giữa hai tia *OA, OK* và tia *OM* nằm giữa hai tia *OB, OK* nên từ (1) suy ra $\widehat{AOK} = \widehat{BOK}$. Mặt khác, tia *OK* nằm giữa hai tia *OA, OB* nên tia *OK* cũng là tia phân giác của góc *AOB*.

C. Bài tập vận dụng

• Tính số đo góc

2.1. Cho hai đường thẳng *AB* và *CD* vuông góc với nhau tại *O*. Vẽ tia *OK* là tia phân giác của góc *AOC*. Tính số đo góc *KOD* và *KOB*.



Hình 2.9

Hướng dẫn giải (h.2.9)

Vì $AB \perp CD$ nên $\widehat{AOC} = 90°$.

Vì tia OK là tia phân giác của góc AOC nên $\widehat{O_1} = \widehat{O_2} = 45°$.

Ta có $\widehat{KOD} + \widehat{O_1} = 180°$ (hai góc kề bù)

$\Rightarrow \widehat{KOD} = 180° - 45° = 135°$.

$\widehat{KOB} + \widehat{O_2} = 180°$ (hai góc kề bù)

$\Rightarrow \widehat{KOB} = 180° - 45° = 135°$.

2.2. Cho góc AOB và tia OC nằm trong góc đó sao cho $\widehat{AOC} = 4\widehat{BOC}$. Vẽ tia phân giác OM của góc AOC. Tính số đo của góc AOB nếu $OM \perp OB$.

Hướng dẫn giải (h.2.10)

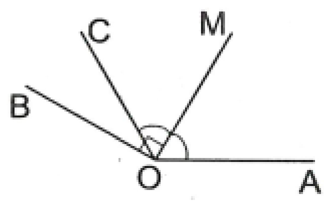
Tia OM là tia phân giác của góc AOC nên $\widehat{MOC} = \frac{1}{2}\widehat{AOC}$ mà

$\widehat{AOC} = 4\widehat{BOC}$ nên $\widehat{MOC} = 2\widehat{BOC}$.

Nếu $OM \perp OB$ thì $\widehat{MOB} = 90°$.

Ta có $\widehat{MOC} + \widehat{BOC} = 90°$ do đó $2\widehat{BOC} + \widehat{BOC} = 90° \Rightarrow \widehat{BOC} = 30°$.

Vậy $\widehat{AOC} = 4.30° = 120°$.



Hình 2.10

2.3. Cho góc tù AOB, $\widehat{AOB} = m°$. Vẽ vào trong góc này các tia OC, OD sao cho $OC \perp OA; OD \perp OB$.

a) Chứng tỏ rằng $\widehat{AOD} = \widehat{BOC}$.

b) Tìm giá trị của m để $\widehat{AOD} = \widehat{DOC} = \widehat{COB}$.

Hướng dẫn giải (h.2.11)

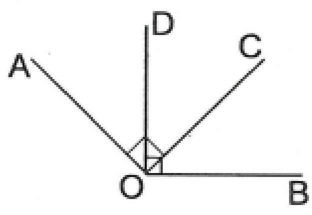
a) Ta có $OC \perp OA$ nên $\widehat{AOC} = 90°$; $OD \perp OB$ nên $\widehat{BOD} = 90°$.

Tia OD nằm trong góc AOB nên $\widehat{AOD} + \widehat{BOD} = \widehat{AOB}$.

$\Rightarrow \widehat{AOD} = \widehat{AOB} - \widehat{BOD} = m° - 90°$ (1)

Tia OC nằm trong góc AOB nên $\widehat{AOC} + \widehat{BOC} = \widehat{AOB}$

$\Rightarrow \widehat{BOC} = \widehat{AOB} - \widehat{AOC} = m° - 90°$ (2)



Hình 2.11

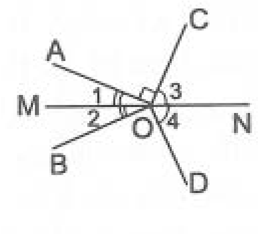
Từ (1) và (2), suy ra: $\widehat{AOD} = \widehat{BOC}\left(= m° - 90°\right)$.

b) Tia OC nằm giữa hai tia OB và OD. Suy ra $\widehat{BOC} + \widehat{DOC} = \widehat{BOD} = 90°$.

Nếu $\widehat{BOC} = \widehat{DOC}$ thì $\widehat{DOC} = 90° : 2 = 45°$.

Do đó $\widehat{AOD}=\widehat{DOC}=\widehat{COD}\Leftrightarrow\widehat{AOB}=3.\widehat{DOC}=3.45^\circ=135^\circ\Leftrightarrow m=135$.

• *Chứng tỏ hai đường thẳng vuông góc*



Hình2.7

2.4. Trong hình 2.7 có góc *MON* là góc bẹt, góc *AOC* là góc vuông. Các tia *OM, ON* lần lượt là các tia phân giác của các góc *AOB* và *COD*. Chứng tỏ rằng $OB\perp OD$.

Hướng dẫn giải (h.2.7)

Vì $\widehat{MON}$ là góc bẹt nên $\widehat{O_1}+\widehat{O_3}+\widehat{AOC}=180^\circ$ (1)

$\widehat{O_2}+\widehat{O_4}+\widehat{BOD}=180^\circ$ (2)

Mặt khác, $\widehat{O_1}=\widehat{O_2};\widehat{O_3}=\widehat{O_4}$ (đề bài cho) nên từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AOC}=\widehat{BOD}$.

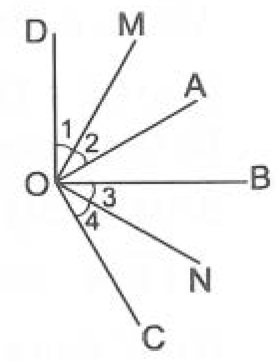
Vì $\widehat{AOC}=90^\circ$ nên $\widehat{BOD}=90^\circ\Rightarrow OB\perp OD$.

2.5. Cho góc nhọn *AOB*. Trên nửa mặt phẳng bờ *OA* có chứa tia *OB*, vẽ tia $OC\perp OA$. Trên nửa mặt phẳng bờ *OB* có chứa tia *OA* vẽ tia $OD\perp OB$. Gọi *OM* và *ON* lần lượt là các tia phân giác của các góc *AOD* và *BOC*. Chứng tỏ rằng $OM\perp ON$.

Hướng dẫn giải (h.2.12)

Ta có $OC\perp OA\Rightarrow\widehat{AOC}=90^\circ$. $OD\perp OB\Rightarrow\widehat{BOD}=90^\circ$.

Tia *OB* nằm giữa hai tia *OA, OC*.



Hình 2.12

Do đó $\widehat{AOB}+\widehat{BOC}=90^\circ$. (1)

Tương tự, ta có $\widehat{AOB}+\widehat{AOD}=90^\circ$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow\widehat{BOC}=\widehat{AOD}$ (cùng phụ với $\widehat{AOB}$).

Tia *OM* là tia phân giác của góc *AOD* $\Rightarrow\widehat{O_1}=\widehat{O_2}=\dfrac{\widehat{AOD}}{2}$.

Tia *ON* là tia phân giác của góc *BOC* $\Rightarrow\widehat{O_3}=\widehat{O_4}=\dfrac{\widehat{BOC}}{2}$.

Vì $\widehat{AOD}=\widehat{BOC}$ nên $\widehat{O_1}=\widehat{O_2}=\widehat{O_3}=\widehat{O_4}$.

Ta có $\widehat{AOB}+\widehat{BOC}=90^\circ\Rightarrow\widehat{AOB}+\widehat{O_3}+\widehat{O_4}=90^\circ\Rightarrow\widehat{AOB}+\widehat{O_3}+\widehat{O_2}=90^\circ$.

Do đó $\widehat{MON}=90^\circ\Rightarrow OM\perp ON$.

1. **2.6.** Cho góc bẹt *AOB*. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ *AB* vẽ các tia *OM* và *ON* sao cho $\widehat{AOM} = \widehat{BON} = m°(90 < m < 180)$. Vẽ tia phân giác *OC* của góc *MON*.

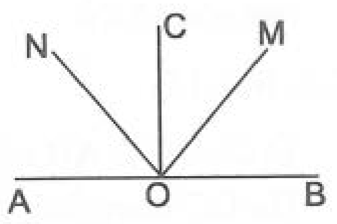
a) Chứng tỏ rằng $OC \perp AB$.

b) Xác định giá trị của *m* để $OM \perp ON$.

Hướng dẫn giải (h.2.13)

a) Ta có $\widehat{AON} + \widehat{BON} = 180°; \widehat{BOM} + \widehat{AOM} = 180°$ (hai góc kề bù) mà $\widehat{AOM} = \widehat{BON}$ (đề bài cho) nên $\widehat{AON} = \widehat{BOM}$.

Mặt khác, tia *OC* là tia phân giác của góc *MON* nên $\widehat{CON} = \widehat{COM}$.



Hình 2.13

Do đó $\widehat{AON} + \widehat{CON} = \widehat{BOM} + \widehat{COM}$ (1)

Ta có tia *ON* nằm giữa hai tia *OA, OC*; tia *OM* nằm giữa hai tia *OB, OC* nên từ (1) suy ra $\widehat{AOC} = \widehat{BOC} = 180° : 2 = 90°$. Vậy $OC \perp AB$.

b) Tia *OM* nằm giữa hai tia *OB* và *ON* nên $\widehat{BOM} + \widehat{MON} = \widehat{BON} = m°$ (1).

Mặt khác $\widehat{BOM} = 180° - \widehat{AOM} = 180° - m°$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $(180° - m°) + 90° = m° \Rightarrow 2m° = 270° \Rightarrow m° = 135°$.

Vậy $m = 135$.

• *Chứng minh một tia là tia phân giác, là tia đối*

2.7. Cho góc *AOB* có số đo bằng $120°$. Vẽ tia phân giác *OM* của góc đó. Trên nửa mặt phẳng bờ *OM* có chứa tia *OA*, vẽ tia $ON \perp OM$. Trong góc *AOB* vẽ tia $OC \perp OB$. Chứng tỏ rằng:

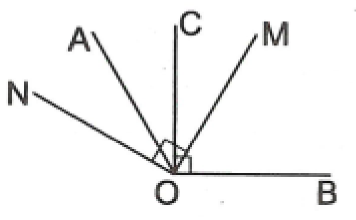
a) Tia *OC* là tia phân giác của góc *AOM*;

b) Tia *OA* là tia phân giác của góc *CON*.

Hướng dẫn giải (h.2.14)

a) Tia *OM* là tia phân giác của góc *AOB* nên $\widehat{AOM} = \widehat{BOM} = 120° : 2 = 60°$.

Ta có $OC \perp OB \Rightarrow \widehat{BOC} = 90°$.



Hình 2.14

Tia *OM* nằm giữa hai tia *OB, OC* nên $\widehat{BOM} + \widehat{COM} = \widehat{BOC}$

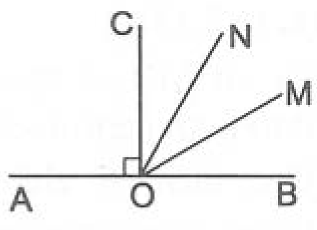
$\Rightarrow \widehat{COM} = 90° - 60° = 30°$.

Tia *OC* nằm giữa hai tia *OA, OB* nên $\widehat{AOC} + \widehat{BOC} = \widehat{AOB}$

$\Rightarrow \widehat{AOC} = 120° - 90° = 30°$.

Vậy $\widehat{AOC} = \widehat{COM} \left(=30^\circ\right)$. (1)

Tia OC nằm giữa hai tia OA, OM nên từ (1) suy ra tia OC là tia phân giác của góc AOM.



Hình 2.15

b) Ta có $OM \perp ON \Rightarrow \widehat{MON} = 90^\circ$.

Tia OA nằm giữa hai tia ON, OM nên $\widehat{AON} + \widehat{AOM} = \widehat{MON}$.

Suy ra $\widehat{AON} = \widehat{MON} - \widehat{AOM} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Vậy $\widehat{AON} = \widehat{AOC} \left(=30^\circ\right)$ (2)

Tia OA nằm giữa hai tia ON, OC nên từ (2) suy ra tia OA là tia phân giác của góc CON.

2.8. Cho góc bẹt AOB, tia $OC \perp AB$. Vẽ tia OM và ON ở trong góc BOC sao cho $\widehat{BOM} = \widehat{CON} = \frac{1}{3}\widehat{BOC}$. Tìm trong hình vẽ các tia là tia phân giác của một góc.

Hướng dẫn giải (h.2.15)

Ta có $OC \perp AB$ nên $\widehat{AOC} = \widehat{BOC} = 90^\circ$ (1)

Tia OC nằm giữa hai tia OA, OB. (2)

Từ (1) và (2) suy ra tia OC là tia phân giác của góc AOB.

Ta có $\widehat{BOM} = \widehat{CON} = \frac{1}{3}\widehat{BOC} = 30^\circ$.

Tia ON nằm trong góc BOC nên $\widehat{BON} + \widehat{CON} = \widehat{BOC}$.

Suy ra $\widehat{BON} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

Tia OM nằm giữa hai tia OB, ON. (3)

Do đó $\widehat{BOM} + \widehat{MON} = \widehat{BON} \Rightarrow \widehat{MON} = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$.

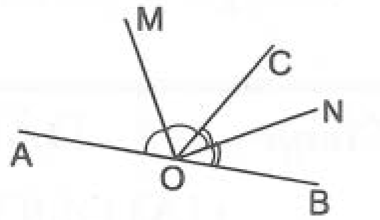
Vậy $\widehat{BOM} = \widehat{MON} = \widehat{CON} = 30^\circ$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra tia OM là tia phân giác của góc BON.

Tia ON nằm giữa hai tia OM và OC (5)

Từ (4) và (5) suy ra tia ON là tia phân giác của góc COM.

Tóm lại, các tia OC, OM, ON lần lượt là các tia phân giác của các góc AOB, BON và COM.



Hình 2.16

2.9. Cho hai tia OM và ON vuông góc với nhau, tia OC nằm giữa hai tia đó. Vẽ các tia OA và OB sao cho tia OM là tia phân giác của góc AOC, tia ON là tia phân giác của góc BOC. Chứng tỏ rằng hai tia OA, OB đối nhau.

Hướng dẫn giải (h.2.16)

Ta có $OM \perp ON \Rightarrow \widehat{MON} = 90^\circ$.

Tia OM là tia phân giác của góc AOC nên $\widehat{AOM} = \widehat{MOC}$.

Tia ON là tia phân giác của góc BOC nên $\widehat{BON} = \widehat{NOC}$.

Xét tổng

$$\widehat{AOC} + \widehat{BOC} = 2\widehat{MOC} + 2\widehat{NOC} = 2\left(\widehat{MOC} + \widehat{NOC}\right) = 2\widehat{MON} = 2.90^\circ = 180^\circ.$$

Hai góc kề AOC và BOC có tổng bằng 180° nên hai tia OA, OB đối nhau.

• *Đường trung trực – Hai góc có cạnh tương ứng vuông góc*

2.10. Cho đoạn thẳng $AB = 2a$. Lấy các điểm E và F nằm giữa A và B sao cho $AE = BF$. Chứng tỏ rằng hai đoạn thẳng AB và EF cùng có chung một đường trung trực.

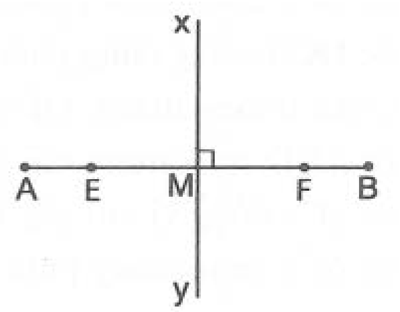
Hướng dẫn giải (h.2.17)

• Trường hợp $AE = BF < a$:

Gọi M là trung điểm của AB. Khi đó $MA = MB = a$.

Điểm E nằm giữa hai điểm A và M, điểm F nằm giữa hai điểm B và M.

Do đó $ME = MA - AE = a - AE$; $MF = MB - BF = a - BF$.



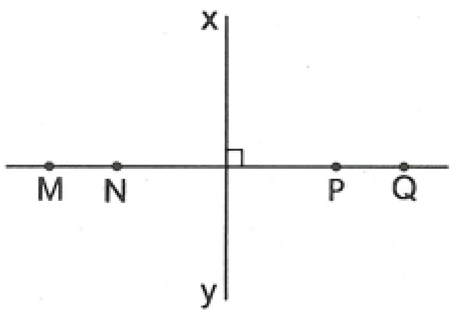
Hình 2.17

Vì $AE = BF$ nên $ME = MF$. Vậy M là trung điểm chung của hai đoạn thẳng AB và EF. Qua M vẽ $xy \perp AB$ thì xy là đường trung trực chung của AB và EF.

• Trường hợp $AE = BF > a$: Chứng minh tương tự.

2.11. Cho bốn điểm M, N, P, Q nằm ngoài đường thẳng xy. Biết $MN \perp xy$; $PQ \perp xy$ và xy là đường trung trực của đoạn thẳng NP. Chứng tỏ rằng bốn điểm M, N, P, Q thẳng hàng.

Hướng dẫn giải (h.2.18)



Hình 2.18

Ta có $MN \perp xy; NP \perp xy$ (vì xy là đường trung trực của NP). Qua điểm N chỉ vẽ được một đường thẳng vuông góc với xy, suy ra ba điểm M, N, P thẳng hàng. (1)

Ta có $NP \perp xy; PQ \perp xy$. Qua điểm P chỉ vẽ được một đường thẳng vuông góc với xy, suy ra ba điểm N, P, Q thẳng hàng. (2)

Từ (1) và (2) suy ra các điểm M, N, P, Q thẳng hàng vì chúng cùng thuộc đường thẳng NP.

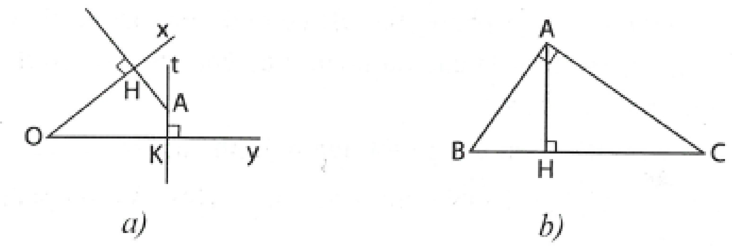
2.12. Hai góc gọi là có cạnh tương ứng vuông góc nếu đường thẳng chứa mỗi cạnh của góc này tương ứng vuông góc với đường thẳng chứa một cạnh của góc kia.

Xem hình 2.8 (a, b) rồi kể tên các góc nhọn (hoặc tù) có cạnh tương ứng vuông góc.

Hướng dẫn giải

Trên hình 2.8a) có $AH \perp Ox, AK \perp Oy$ nên các góc có cạnh tương ứng vuông góc là: góc HAK và góc xOy; góc HAt và góc xOy.

Trên hình 2.8b) có $AB \perp AC$ và $AH \perp BC$ nên các góc có cạnh tương ứng vuông góc là: góc BAH và góc C; góc CAH và góc B.



Hình 2.8

Chương 1. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Chuyên đề 3. DẤU HIỆU NHẬN BIẾT HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

A. Kiến thức cần nhớ

1. Định nghĩa

• Hai đường thẳng song song là hai đường thẳng không có điểm chung.

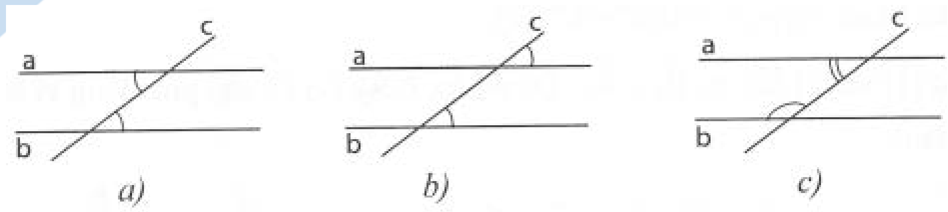
• Hai đường thẳng phân biệt thì hoặc cắt nhau hoặc song song.

2. Dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song

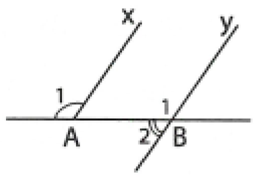
• Nếu đường thẳng c cắt hai đường thẳng a, b và trong các góc tạo thành có một cặp góc so le trong bằng nhau thì $a // b$ (h.3.1.a).

• Nếu đường thẳng c cắt hai đường thẳng a, b và trong các góc tạo thành có một cặp góc đồng vị bằng nhau thì $a // b$ (h.3.1.b).

• Nếu đường thẳng c cắt hai đường thẳng a, b và trong các góc tạo thành có một cặp góc trong cùng phía bù nhau thì $a // b$ (h.3.1.c).



Hình 3.1



Hình3.3

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Hình 3.2 có $\widehat{M_1}=3\widehat{M_2};\widehat{N_1}=3\widehat{N_2}$. Chứng tỏ rằng $a//b$.

Giải

** Tìm cách giải*

Hai đường thẳng a và b tạo với cát tuyến c một cặp góc so le trong là $\widehat{M_1}$ và $\widehat{N_1}$ hoặc $\widehat{M_2}$ và $\widehat{N_2}$. Do đó chỉ cần chứng tỏ $\widehat{M_1}=\widehat{N_1}$ hoặc $\widehat{M_2}=\widehat{N_2}$.

** Trình bày lời giải*

Ta có $\widehat{M_1}+\widehat{M_2}=180^\circ$ (hai góc kề bù).

Mặt khác, $\widehat{M_1}=3\widehat{M_2}$ nên $\widehat{M_2}=180^\circ:4=45^\circ$.

Tương tự $\widehat{N_1}+\widehat{N_2}=180^\circ$ và $\widehat{N_1}=3\widehat{N_2}\Rightarrow\widehat{N_2}=45^\circ$.

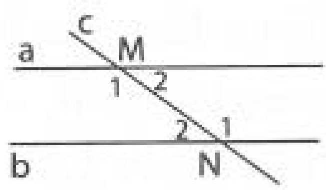
Vậy $\widehat{M_2}=\widehat{N_2}(=45^\circ)$. Suy ra $a//b$ (vì có cặp góc so le trong bằng nhau).

Ví dụ 2: Hình 3.3 có: $\widehat{A_1}=a^\circ;\widehat{B_2}=b^\circ$. Biết $a^\circ+b^\circ=180^\circ$, chứng tỏ rằng $Ax//By$.

Giải

** Tìm cách giải*

Hai tia Ax và By tạo với cát tuyến là đường thẳng AB cặp góc $\widehat{A_1}$ và $\widehat{B_1}$ ở vị trí đồng vị. Muốn chứng tỏ $Ax//By$, chỉ cần chứng tỏ $\widehat{A_1}=\widehat{B_1}$.



Hình3.2

** Trình bày lời giải*

Ta có $\widehat{B_1}+\widehat{B_2}=180^\circ$ (hai góc kề bù). Suy ra $\widehat{B_1}=180^\circ-\widehat{B_2}=180^\circ-b^\circ$. (1)

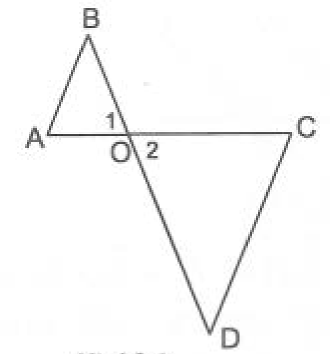
Mặt khác, $\widehat{A_1}=a^\circ=180^\circ-b^\circ$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{B_1}=\widehat{A_1}$. Do đó $Ax//By$ (vì có cặp góc đồng vị bằng nhau).

Ví dụ 3: Hình 3.4 có $\widehat{A_1}+\widehat{B_1}=\widehat{A_2}+\widehat{B_2}$. Chứng tỏ rằng $a//b$.

Giải

** Tìm cách giải*



Hình3.6

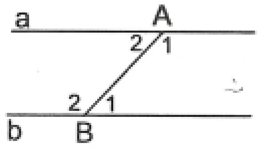
Các góc $\widehat{A_1}$ và $\widehat{B_1}$ hoặc $\widehat{A_2}$ và $\widehat{B_2}$ là cặp góc trong cùng phía của hai đường thẳng a và b (đối với cát tuyến *AB*). Muốn chứng tỏ $a//b$ chỉ cần chứng tỏ $\widehat{A_1}+\widehat{B_1}=180^\circ$ (hoặc $\widehat{A_2}+\widehat{B_2}=180^\circ$).

** Trình bày lời giải*

Ta có $\left(\widehat{A_1}+\widehat{B_1}\right)+\left(\widehat{A_2}+\widehat{B_2}\right)=\left(\widehat{A_1}+\widehat{A_2}\right)+\left(\widehat{B_1}+\widehat{B_2}\right)=360^\circ$.

Mà $\widehat{A_1}+\widehat{B_1}=\widehat{A_2}+\widehat{B_2}$ (đề bài cho) nên $\widehat{A_1}+\widehat{B_1}=360^\circ:2=180^\circ$.

Suy ra $a//b$ (vì có cặp góc trong cùng phía bù nhau).



Hình3.4

C. Bài tập vận dụng

• Xác định các cặp góc so le trong, đồng vị, trong cùng phía

3.1. Xem hình 3.5 rồi cho biết góc nào so le trong, đồng vị, trong cùng phía:

a) Với góc *ADC*;

b) Với góc *BAC*.

Hướng dẫn giải (h.3.5)

a) Xét hai đường thẳng *AD* và *Bm*, đối với cát tuyến *Dx* thì:

- Góc *DCm* so le trong với góc *ADC*;

- Góc *BCx* đồng vị với góc *ADC*;

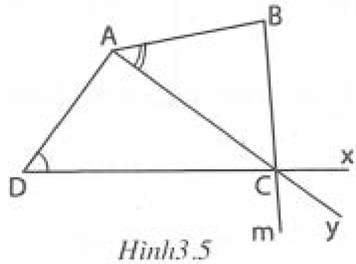
- Góc *DCB* trong cùng phía với góc *ADC*.

b) Xét hai đường thẳng *AB* và *Dx*, đối với cát tuyến *Ay* thì:

- Góc *ACD* so le trong với góc *BAC*;

- Góc *xCy* đồng vị với góc *BAC*;

- Góc *Acx* trong cùng phía với góc *BAC*.



Hình3.5

• Vận dụng cặp góc so le trong

3.2. Hình 3.6 có $\widehat{A}=\widehat{O_1};\widehat{C}=\widehat{O_2}$. Chứng tỏ rằng $AB//CD$.

Hướng dẫn giải (h.3.6)

- *Tìm cách giải*

Để chứng tỏ $AB//CD$ ta chứng tỏ một cặp góc so le trong bằng nhau. Ta nghĩ đến việc chứng tỏ $\widehat{A}=\widehat{C}$ vì có thể dùng các góc $\widehat{O_1},\widehat{O_2}$ làm trung gian.

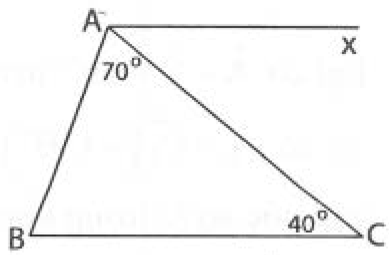
- *Trình bày lời giải*

Ta có $\widehat{A}=\widehat{O_1};\widehat{C}=\widehat{O_2}$ (đề bài cho) mà $\widehat{O_1}=\widehat{O_2}$ (đối đỉnh) nên $\widehat{A}=\widehat{C}$.

Suy ra $AB//CD$ vì có cặp góc so le trong bằng nhau.

3.3. Cho tam giác *ABC*, $\widehat{A}=70°,\widehat{C}=40°$. Trên nửa mặt phẳng bờ *AB* có chứa *C* vẽ tia *Ax* sao cho $\widehat{BAx}=110°$. Chứng tỏ rằng tia $Ax//BC$.

Hướng dẫn giải (h.3.16)



Hình 3.16

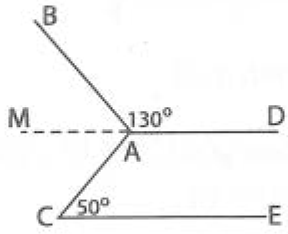
Tia *AC* nằm giữa hai tia *AB* và *Ax* nên $\widehat{BAC}+\widehat{CAx}=\widehat{BAx}$

$\Rightarrow \widehat{CAx}=110°-70°=40°$.

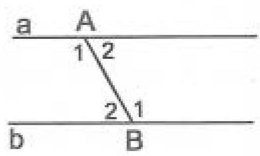
Do đó $\widehat{CAx}=\widehat{C}\left(=40°\right)$.

Suy ra $Ax//BC$ vì có cặp góc so le trong bằng nhau.

3.4. Hình 3.7 có $\widehat{BAD}=130°,\widehat{C}=50°$. Vẽ tia *AM* là tia đối của tia *AD*. Biết tia *AM* là tia phân giác của góc *BAC*. Chứng tỏ rằng $AD//CE$.



Hình 3.7



Hình 3.8

Hướng dẫn giải (h.3.7)

- *Tìm cách giải*

Đề bài có cho hai tia đối nhau nên ta vận dụng tính chất của hai góc kề bù. Ngoài ra đề bài còn có tia phân giác nên trong hình vẽ có hai góc bằng nhau.

- *Trình bày lời giải*

Hai góc *MAB* và *BAD* kề bù nên $\widehat{MAB}=180°-130°=50°$.

Tia *AM* là tia phân giác của góc *BAC* nên $\widehat{MAC}=\widehat{MAB}=50°$.

Do đó $\widehat{MAC}=\widehat{C}\left(=50°\right)\Rightarrow AD//CE$ vì có cặp góc so le trong bằng nhau.

3.5. Hình 3.8 có $\widehat{A_1} - 2\widehat{A_2} = \widehat{B_1} - 2\widehat{B_2}$. Chứng tỏ rằng $a//b$.

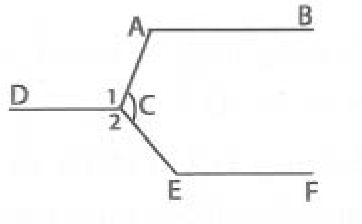
Hướng dẫn giải (h.3.8)

Ta có $\widehat{A_1} + \widehat{A_2} = \widehat{B_1} + \widehat{B_2} (= 180°) \Rightarrow 2\widehat{A_1} + 2\widehat{A_2} = 2\widehat{B_1} + 2\widehat{B_2}$ (1)

Mặt khác: $\widehat{A_1} - 2\widehat{A_2} = \widehat{B_1} - 2\widehat{B_2}$ (2)

Cộng từng vế các đẳng thức (1) và (2) được $3\widehat{A_1} = 3\widehat{B_1} \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{B_1}$

$\Rightarrow a//b$ vì có cặp góc so le trong bằng nhau.



Hình3.9

3.6. Trong hình 3.9, góc ACE bằng trung bình cộng của hai góc C_1 và C_2, đồng thời cũng bằng trung bình cộng của hai góc A và E.

Biết $\widehat{C_1} - \widehat{C_2} = \widehat{A} - \widehat{E} = 20°$. Chứng tỏ rằng $AB//CD$ và $CD//EF$.

Hướng dẫn giải (h.3.9)

• *Tìm cách giải*

Trong hình vẽ đã có các cặp góc so le trong là $\widehat{A}$ và $\widehat{C_1}; \widehat{E}$ và $\widehat{C_2}$. Muốn chứng tỏ $AB//CD$ và $CD//EF$ chỉ cần chứng tỏ $\widehat{A} = \widehat{C_1}$ và $\widehat{E} = \widehat{C_2}$.

• *Trình bày lời giải*

Ta có $\widehat{ACE} = \dfrac{\widehat{C_1} + \widehat{C_2}}{2} \Rightarrow \widehat{C_1} + \widehat{C_2} = 2\widehat{ACE}$.

Mặt khác $\widehat{C_1} + \widehat{C_2} + \widehat{ACE} = 360°$ nên $2\widehat{ACE} + \widehat{ACE} = 360° \Rightarrow \widehat{ACE} = 120°$.

Do đó $\widehat{C_1} + \widehat{C_2} = 360° - 120° = 240°$ mà $\widehat{C_1} - \widehat{C_2} = 20°$ nên $\widehat{C_1} = 130°; \widehat{C_2} = 110°$.

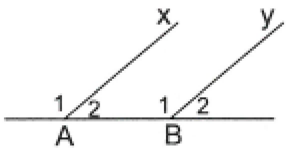
Ta có $\widehat{ACE} = \dfrac{\widehat{A} + \widehat{E}}{2} \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{E} = 2\widehat{ACE} = 240°$.

Lại có $\widehat{A} - \widehat{E} = 20°$ nên $\widehat{A} = 130°; \widehat{E} = 110°$.

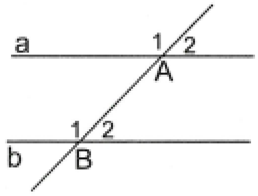
Ta có $\widehat{A} = \widehat{C_1} (= 130°) \Rightarrow AB//CD; \widehat{E} = \widehat{C_2} (= 110°) \Rightarrow CD//EF$ vì có cặp góc so le trong bằng nhau.

• *Vận dụng cặp góc đồng vị*

3.7. Trong hình 3.10 có $\widehat{A_2} = \dfrac{2}{7}\widehat{A_1}; \widehat{B_1} - \widehat{B_2} = 100°$. Hỏi Ax và By có song song với nhau không?



Hình 3.10



Hình 3.11

Hướng dẫn giải (h.3.10)

Ta có $\widehat{A_1}+\widehat{A_2}=180°$ mà $\widehat{A_2}=\frac{2}{7}\widehat{A_1}$ nên $\widehat{A_2}=\frac{180°.2}{9}=40°$.

$\widehat{B_1}+\widehat{B_2}=180°$ mà $\widehat{B_1}-\widehat{B_2}=100°$ nên $\widehat{B_2}=40°$.

Vậy $\widehat{A_2}=\widehat{B_2}=40°\Rightarrow Ax//By$ vì có cặp góc đồng vị bằng nhau.

3.8. Trong hình 3.11 có $\widehat{A_1}+\widehat{A_2}+\widehat{B_2}=a°;\widehat{B_1}+\widehat{B_2}+\widehat{A_1}=b°$, trong đó $180°<a°<360°$; $180°<b°<360°$ và $a°+b°=540°$. Chứng tỏ rằng $a//b$.

Hướng dẫn giải (h.3.11)

Ta có $\widehat{A_1}+\widehat{A_2}+\widehat{B_2}=a°\Rightarrow\widehat{B_2}=a°-180°$ (1)

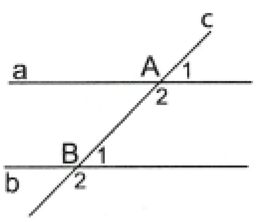
$\widehat{B_1}+\widehat{B_2}+\widehat{A_1}=b°\Rightarrow\widehat{A_1}=b°-180°$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $\widehat{B_2}+\widehat{A_1}=(a°+b°)-360°=540°-360°=180°$.

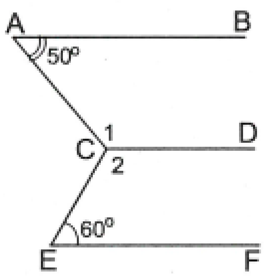
Mặt khác $\widehat{A_2}+\widehat{A_1}=180°$ (kề bù) nên $\widehat{B_2}+\widehat{A_1}=\widehat{A_2}+\widehat{A_1}\,(=180°)$.

Suy ra $\widehat{B_2}=\widehat{A_2}$. Do đó $a//b$ vì có cặp góc đồng vị bằng nhau.

3.9. Hình 3.12 có $\widehat{A_2}-\widehat{A_1}=\widehat{B_2}-\widehat{B_1}$. Chứng tỏ rằng $a//b$.



Hình 3.12



Hình 3.13

Hướng dẫn giải (h.3.12)

• *Tìm cách giải*

Trong hình vẽ đã có những cặp góc đồng vị, cặp góc trong cùng phía. Từ điều kiện trong đề bài, ta có thể suy ra được tổng của hai góc trong cùng phía bù nhau, từ đó suy ra được hai đường thẳng song song.

• *Trình bày lời giải*

Ta có $\widehat{A_2} - \widehat{A_1} = \widehat{B_2} - \widehat{B_1}$, suy ra $\widehat{A_2} + \widehat{B_1} = \widehat{B_2} + \widehat{A_1}$.

Mặt khác $\widehat{A_2} + \widehat{B_1} + \widehat{B_2} + \widehat{A_1} = 360°$ nên $\widehat{A_2} + \widehat{B_1} = 180°$.

Suy ra $a // b$ vì có cặp góc trong cùng phía bù nhau.

3.10. Hình 3.13 có $\widehat{A} = 50°, \widehat{E} = 60°$, góc C_1 hơn góc C_2 là $10°$, góc C_2 hơn góc ACE là $10°$. Chứng tỏ rằng $AB // CD; CD // EF$.

Hướng dẫn giải (h.3.13)

Đặt $\widehat{ACE} = m°$ thì $\widehat{C_2} = m° + 10°$ và $\widehat{C_1} = m° + 20°$.

Ta có $\widehat{ACE} + \widehat{C_1} + \widehat{C_2} = 360°$ do đó

$m° + (m° + 10°) + (m° + 20°) = 360° \Rightarrow 3m° + 30° = 360° \Rightarrow m° = 110°$.

Vậy $\widehat{C_2} = 120°; \widehat{C_1} = 130°$.

Ta có $\widehat{A} + \widehat{C_1} = 50° + 130° = 180° \Rightarrow AB // CD; \widehat{E} + \widehat{C_2} = 60° + 120° = 180° \Rightarrow CD // EF$; vì có cặp góc trong cùng phía bù nhau.

• *Vận dụng nhiều dấu hiệu song song*

3.11. Trong hình 3.14 có $\widehat{A_1} = \widehat{D_1} = 105°; \widehat{C_1} = 75°$. Chứng tỏ rằng $AB // CD$ và $BC // AD$.

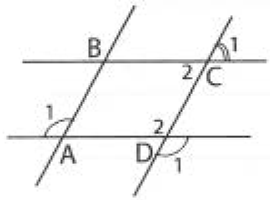
Hướng dẫn giải (h.3.14)

Ta có $\widehat{D_2} = \widehat{D_1} = 105°$ (đối đỉnh); $\widehat{C_2} = \widehat{C_1} = 75°$ (đối đỉnh).

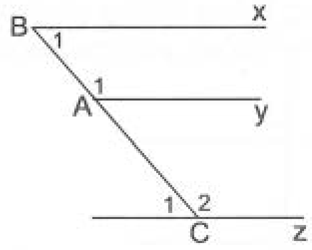
Vậy $\widehat{A_1} = \widehat{D_2} (= 105°) \Rightarrow AB // CD$ vì có cặp góc đồng vị bằng nhau.

$\widehat{C_2} + \widehat{D_2} = 75° + 105° = 180° \Rightarrow BC // AD$ vì có cặp góc trong cùng phía bù nhau.

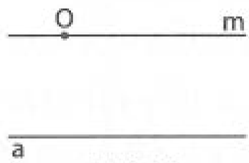
3.12. Trong hình 3.15 có $\widehat{A_1} = 3\widehat{B_1}; \widehat{A_1} = 3\widehat{C_1}$ và $\widehat{C_1} = 45°$. Hãy kể tên các cặp đường thẳng song song.



Hình 3.14



Hình 3.15



Hình4.1

Hướng dẫn giải (h.3.15)

• Ta có $\widehat{B_1} = \widehat{C_1} = \frac{1}{3}\widehat{A_1}$. Suy ra $Bx//Cz$ vì có cặp góc so le trong bằng nhau.

• Ta có $\widehat{B_1} = \widehat{C_1} = 45° \Rightarrow \widehat{A_1} = 135°$. Vậy $\widehat{B_1} + \widehat{A_1} = 45° + 135° = 180°$.

Suy ra $Bx//Ay$ vì có cặp góc trong cùng phía bù nhau.

• Ta có $\widehat{C_1}$ và $\widehat{C_2}$ kề bù $\Rightarrow \widehat{C_2} = 180° - \widehat{C_1} = 135°$. Vậy $\widehat{C_2} = \widehat{A_1} = 135°$.

$\Rightarrow Ay//Cz$ vì có cặp góc đồng vị bằng nhau.

3.13. Cho tam giác *ABC*, $\widehat{A} = 70°; \widehat{B} = 55°$. Trên tia đối của tia *AB* lấy điểm *M*. Vẽ tia *Mx* trên nửa mặt phẳng bờ *MB* không chứa *C* sao cho $\widehat{BMx} = 55°$. Vẽ tia *Ay* là tia phân giác của góc *CAM*. Chứng tỏ rằng $Mx//\text{BC}$ và $Ay//BC$.

Hướng dẫn giải (h.3.17)

• Ta có $\widehat{BMx} = \widehat{B} = 55°$. Suy ra $Mx//BC$ vì có cặp góc so le trong bằng nhau.

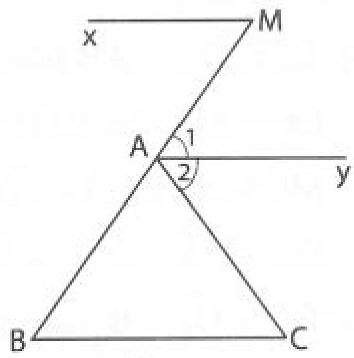
• Ta có $\widehat{CAM} + \widehat{CAB} = 180°$ (hai góc kề bù)

$\widehat{CAM} = 180° - 70° = 110°$.

Tia *Ay* là tia phân giác của góc *CAM*

$\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A_2} = 55°$, do đó $\widehat{A_1} = \widehat{B} = 55°$.

Suy ra $Ay//BC$ vì có cặp góc đồng vị bằng nhau.



Hình 3.17

Chương I. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG.

Chuyên đề 4. TIÊN ĐỀ Ơ-CLÍT. TÍNH CHẤT CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG.

A. Kiến thức cần nhớ

1. Tiên đề Ơ-clít: Qua một điểm ở ngoài một đường thẳng chỉ có một đường thẳng song song với đường thẳng đó.

Trong hình 4.1, đường thẳng m đi qua O và song song với a là duy nhất.

2. Tính chất của hai đường thẳng song song

Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song thì:

a) Hai góc so le trong bằng nhau;

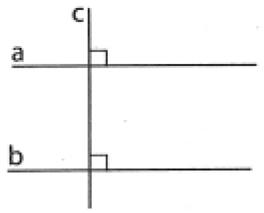
b) Hai góc đồng vị bằng nhau;

c) Hai góc trong cùng phía bù nhau.

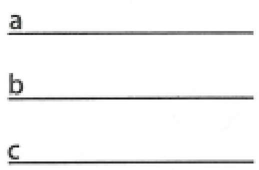
3. Quan hệ giữa tính vuông góc với tính song song

a) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau (h.4.2);

b) Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì nó cũng vuông góc với đường thẳng kia (h.4.2);



Hình 4.2



Hình 4.3

c) Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau (h.4.3).

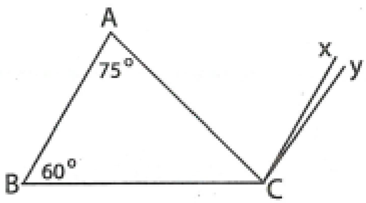
B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC, $\widehat{A} = 75°; \widehat{B} = 60°$. Trên nửa mặt phẳng bờ BC có chứa A vẽ các tia Cx và Cy sao cho $\widehat{ACx} = 75°; \widehat{BCy} = 120°$. Chứng tỏ rằng các tia Cx và Cy trùng nhau.

Giải (h.4.4)

** Tìm cách giải*

Để chứng tỏ hai tia Cx và Cy trùng nhau ta chứng tỏ hai đường thẳng chứa hai tia đó trùng nhau, đồng thời hai tia này cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ BC.



Hình4.4

** Trình bày lời giải*

Ta có $\widehat{ACx} = \widehat{A} = 75° \Rightarrow Cx // AB$ (vì có cặp góc so le trong bằng nhau). (1)

Ta có $\widehat{BCy}+\widehat{B}=120°+60°=180°$

$\Rightarrow Cy//AB$ (vì có cặp góc trong cùng phía bù nhau). (2)

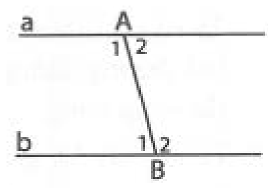
Từ (1) và (2), theo tiên đề Ơ-clít, ta có hai đường thẳng *Cx* và *Cy* trùng nhau. Mặt khác, hai tia *Cx* và *Cy* cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ *BC* có chứa *A* nên hai tia này trùng nhau.

Ví dụ 2: Hình 4.5 có $a//b$ và $\widehat{A_1}-\widehat{B_1}=30°$. Tính số đo các góc $\widehat{A_2}$ và $\widehat{B_2}$.

Giải

** Tìm cách giải*

Vì $a//b$ và $\widehat{A_2},\widehat{B_2}$ so le trong với các góc $\widehat{A_1},\widehat{B_1}$ nên chỉ cần tính $\widehat{A_1},\widehat{B_1}$ là có thể suy ra $\widehat{A_2}$ và $\widehat{B_2}$.



Hình4.5

** Trình bày lời giải*

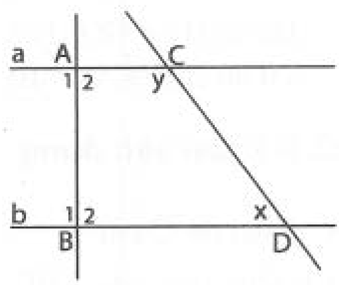
Ta có $a//b$ nên $\widehat{A_1}+\widehat{B_1}=180°$ (cặp góc trong cùng phía).

Mặt khác, $\widehat{A_1}-\widehat{B_1}=30°$ (đề bài) nên $\widehat{A_1}=(180°+30°):2=105°$ và

$\widehat{B_1}=180°-105°=75°$.

Suy ra $\widehat{A_2}=\widehat{B_1}=75°$ (cặp góc so le trong); $\widehat{B_2}=\widehat{A_1}=105°$ (cặp góc so le trong).

Ví dụ 3: Tính các số đo *x*, *y* trong hình 4.6, biết $\widehat{A_1}=\widehat{A_2};\widehat{B_1}=\widehat{B_2}$ và $x=\frac{3}{7}y$.



Hình 4.6

Giải

** Tìm cách giải*

Nếu chứng minh được $a//b$ thì sẽ tìm được *x* và *y* (đây là bài toán tìm hai số khi biết tổng và tỉ số).

** Trình bày lời giải*

Ta có $\widehat{A_1}+\widehat{A_2}=180°$ (kề bù) mà $\widehat{A_1}=\widehat{A_2}$ (đề bài) nên

$\widehat{A_1}=180°:2=90°$.

Suy ra $AB\perp a$.

Tương tự $AB\perp b$.

Do đó $a//b$ (cùng vuông góc với *AB*).

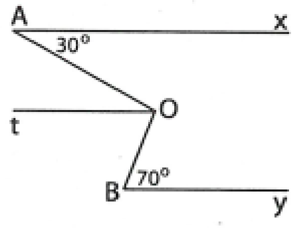
Ta có $x + y = 180^\circ$ (cặp góc trong cùng phía) mà $x = \frac{3}{7}y$ nên $x = \frac{180 \times 3}{10} = 54^\circ; y = 126^\circ$.

Ví dụ 4: Hình 4.7 có $\widehat{A} = 30^\circ; \widehat{B} = 70^\circ; \widehat{AOB} = 100^\circ$. Chứng tỏ rằng $Ax // By$.

Giải

** Tìm cách giải*

Ta phải chứng minh hai đường thẳng *Ax* và *By* song song. Giữa hai đường thẳng này chưa có một đường thẳng thứ ba cắt chúng nên chưa thể vận dụng dấu hiệu nhận biết nào để chứng minh chúng song song.



Hình 4.8

Ta sẽ vẽ thêm một đường thẳng thứ ba làm trung gian rồi dùng dấu hiệu: hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song.

** Trình bày lời giải* (h.4.8)

Ở trong góc *AOB*, vẽ tia $Ot // Ax$. Khi đó $\widehat{AOt} = \widehat{A} = 30^\circ$ (cặp góc so le trong).

Suy ra $\widehat{BOt} = 100^\circ - 30^\circ = 70^\circ$.

Vậy $\widehat{B} = \widehat{BOt} (= 70^\circ)$.

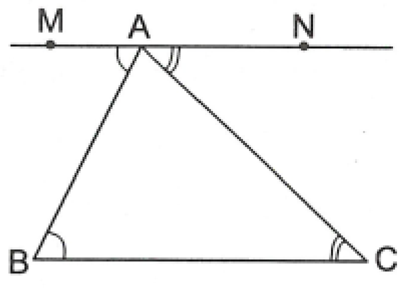
Do đó $By // Ot$ (vì có cặp so le trong bằng nhau).

Từ đó suy ra $Ax // By$ (vì cùng song song với *Ot*).

C. Bài tập vận dụng

• Tiên đề Ơ-clít

4.1. Cho tam giác *ABC*. Vẽ điểm *M* sao cho góc *BAM* bằng và so le trong với góc *B*. Vẽ điểm *N* sao góc *CAN* bằng và so le trong với góc *C*. Chứng tỏ rằng ba điểm *M, A, N* thẳng hàng.



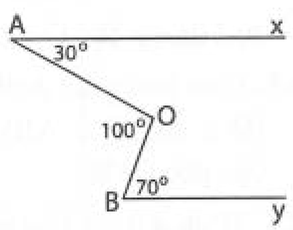
Hình 4.19

Hướng dẫn giải (h.4.19)

Ta có $\widehat{BAM} = \widehat{B}$ suy ra $AM // BC$ (vì có cặp góc so le trong bằng nhau).

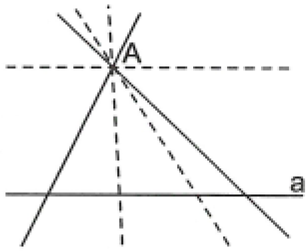
$\widehat{CAN} = \widehat{C}$ suy ra $AN // BC$ (vì có cặp góc so le trong bằng nhau).

Theo tiên đề Ơ-clít qua điểm *A* chỉ có một đường thẳng song song với *BC*, do đó ba điểm *M, A, N* thẳng hàng.



4.2. Qua điểm A ở ngoài đường thẳng a vẽ 101 đường thẳng. Chứng tỏ rằng ít nhất cũng có 100 đường thẳng cắt a.

Hướng dẫn giải (h.4.20)



Hình 4.20

Giả sử trong số 101 đường thẳng vẽ qua A có chưa đến 100 đường thẳng cắt a. Suy ra ít nhất cũng còn hai đường thẳng không cắt a. Hai đường thẳng này cùng đi qua A và cùng song song với a. Điều này vô lí vì nó trái với tiên đề Ơ-clít. Vậy điều giả sử là sai, do đó qua A có ít nhất 100 đường thẳng cắt a.

4.3. Cho điểm O ở ngoài đường thẳng xy. Qua O vẽ n đường thẳng. Xác định giá trị nhỏ nhất của n để trong số các đường thẳng đã vẽ, ít nhất cũng có 10 đường thẳng cắt xy.

Hướng dẫn giải

Trong số n đường thẳng đã vẽ, nhiều nhất là có một và chỉ một đường thẳng song song với xy. Do đó muốn có ít nhất 10 đường thẳng cắt xy thì số đường thẳng phải vẽ ít nhất là 11. Vậy $n = 11$.

• *Tính chất hai đường thẳng song song*

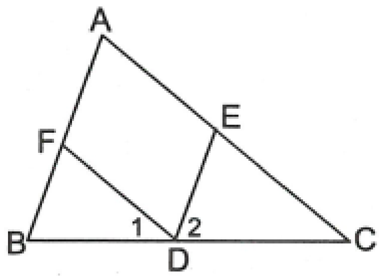
4.4. Cho tam giác ABC. Từ điểm D trên cạnh BC vẽ $DE // AB, DF // AC \left(E \in AC, F \in AB\right)$.

a) Kể tên những góc ở trong hình vẽ bằng góc A;

b) Giả sử $\widehat{B} + \widehat{C} = 110°$, tính số đo góc A.

Hướng dẫn giải (h.4.21)

a) Ta có $DE // AB$ nên $\widehat{DEC} = \widehat{A}$ (cặp góc đồng vị); $DF // AC$ nên $\widehat{BFD} = \widehat{A}$ (cặp góc đồng vị).



Hình 4.21

Mặt khác $\widehat{BFD} = \widehat{FDE}$ (so le trong của $DE // AB$)

Suy ra $\widehat{A} = \widehat{DEC} = \widehat{BFD} = \widehat{FDE}$.

b) Ta có $\widehat{D_2} = \widehat{B}$ (cặp góc đồng vị của $DE // AB$); $\widehat{D_1} = \widehat{C}$ (cặp góc so le trong của $DF // AC$);

Do đó $\widehat{D_1} + \widehat{D_2} = \widehat{B} + \widehat{C} = 110°$. Suy ra $\widehat{FDE} = 180° - 110° = 70°$.

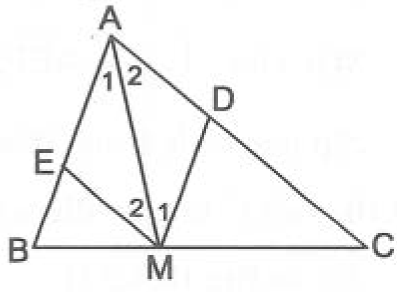
Vậy $\widehat{A} = 70°$ (vì $\widehat{A} = \widehat{FDE}$).

4.5. Cho tam giác ABC. Từ điểm M trên cạnh BC vẽ $MD // AB, ME // AC \left(D \in AC, E \in AB\right)$. Xác định vị trí của điểm M để tia MA là tia phân giác của góc DME.

Hướng dẫn giải (h.4.22)

Ta có $MD // AB$ suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{M_1}$ (cặp góc so le trong);

$ME // AC$ suy ra $\widehat{A_2} = \widehat{M_2}$ (cặp góc so le trong).



Hình 4.22

Tia MA nằm giữa hai tia MD và ME. Do đó tia MA là tia phân giác của góc DME.

$\Leftrightarrow \widehat{M_1} = \widehat{M_2} \Leftrightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \Leftrightarrow M$ là giao điểm của BC với tia phân giác của góc A.

4.6. Hình 4.9 có $\widehat{C} = m°(m < 90)$; $\widehat{ABC} = 180° - 2m°$ và $Bx // AC$. Chứng minh rằng tia Bx là tia phân giác của góc Aby.

Hướng dẫn giải (h.4.9)

Ta có $\widehat{ABC} = 180° - 2m°$ nên $\widehat{ABy} = 180° - (180° - 2m°) = 2m°$.

Mặt khác $Bx // AC$ nên $\widehat{xBy} = \widehat{C} = m°$ (cặp góc đồng vị); suy ra

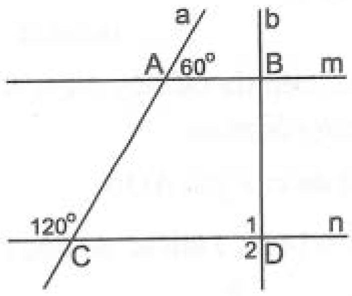
$\widehat{ABx} = 2m° - m° = m°$. Vậy $\widehat{ABx} = \widehat{xBy} = m°$. (1)

Tia Bx nằm giữa hai tia BA và By. (2)

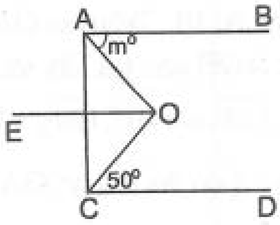
Từ (1) và (2) suy ra tia Bx là tia phân giác của góc ABy.

• *Vận dụng dấu hiệu nhận biết và tính chất của hai đường thẳng song song*

4.7. Hình 4.10, ngoài những số đo đã ghi còn biết $\widehat{D_1} = \widehat{D_2}$. Chứng tỏ rằng $b \perp m$.



Hình 4.10



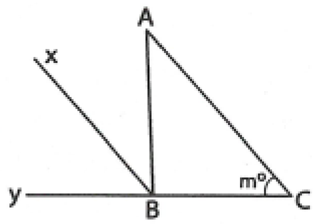
Hình 4.11

Hướng dẫn giải (h.4.10)

Ta có $\widehat{ACD} = 180° - 120° = 60°$. Vậy $\widehat{ACD} = \widehat{BAa} = 60°$.

Suy ra $m // n$ (vì có cặp góc đồng vị bằng nhau).

Ta có $\widehat{D_1} + \widehat{D_2} = 180°$ mà $\widehat{D_1} = \widehat{D_2}$ nên $\widehat{D_1} = 90°$.



Hình 4.9

Suy ra $b \perp n$ do đó $b \perp m$ (vì $m // n$).

4.8. Hình 4.11 có $AB \perp AC, CD \perp AC$ và $OE \perp AC$. Biết $\widehat{OAB} = m°; \widehat{OCD} = 50°$. Tìm giá trị m để tia OE là tia phân giác của góc AOC.

Hướng dẫn giải (h.4.11)

Ta có $AB \perp AC; CD \perp AC; OE \perp AC$ (đề bài).

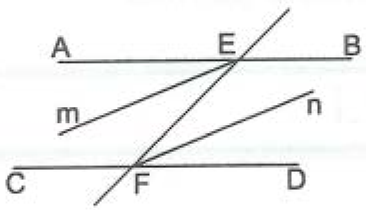
Suy ra $AB // CD // OE$ (cùng vuông góc với AC).

Do đó $\widehat{AOE} = \widehat{OAB} = m°$ (cặp góc so le trong); $\widehat{EOC} = \widehat{OCD} = 50°$ (cặp góc so le trong).

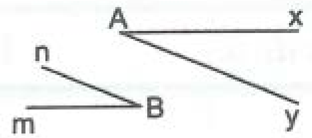
Tia OE nằm giữa hai tia OA và OC nên tia OE là tia phân giác của góc AOC

$\Leftrightarrow \widehat{AOE} = \widehat{EOC} \Leftrightarrow m = 50$.

4.9. Hình 4.12 có $\widehat{AEF} = 45°, \widehat{EFC} = 3.\widehat{AEF}$. Các tia Em và Fn lần lượt là các tia phân giác của các góc AEF và EFD. Chứng tỏ rằng $Em // Fn$.



Hình 4.12



Hình 4.13

Hướng dẫn giải (h.4.12)

Ta có $\widehat{AEF} + \widehat{EFC} = 45° + 45°.3 = 180°$.

Suy ra $AB // CD$ (vì có cặp góc trong cùng phía bù nhau).

Do đó $\widehat{AEF} = \widehat{EFD}$ (cặp góc so le trong).

Mặt khác $\widehat{E_1} = \frac{1}{2}\widehat{AEF}; \widehat{F_1} = \frac{1}{2}\widehat{EFD}$ nên $\widehat{E_1} = \widehat{F_1}$, dẫn tới $Em // Fn$ (vì có cặp góc so le trong bằng nhau).

4.10. Hình 4.13 có $\widehat{A} = \widehat{B}$ và $Ax // Bm$. Chứng tỏ rằng $Ay // Bn$.

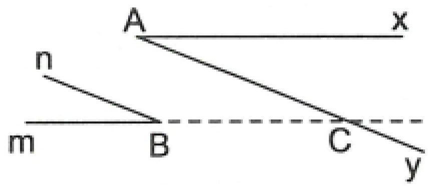
Hướng dẫn giải (h.4.23)

Gọi C là giao điểm của hai đường thẳng Ay và Bm.

Ta có $Ax // Bm$ nên $\widehat{A} = \widehat{ACm}$ (cặp góc so le trong).

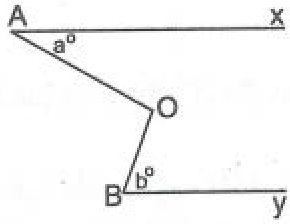
Mặt khác, $\widehat{A} = \widehat{mBn}$ nên $\widehat{ACm} = \widehat{mBn} \left(= \widehat{A}\right)$.

Do đó $Ay // Bn$ (vì có cặp góc đồng vị bằng nhau).

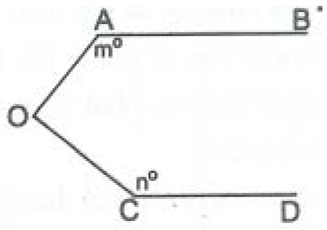


Hình 4.23

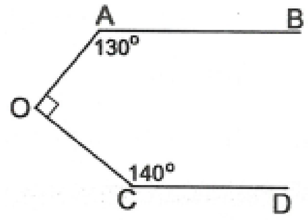
4.11. Hình 4.14 có $\widehat{A}=a°;\widehat{B}=b°\left(a,b<90\right)$ và $\widehat{AOB}=a°+b°$. Chứng tỏ rằng $Ax//By$.



Hình 4.14



Hình 4.15



Hình4.16

Hướng dẫn giải (h.4.24)

Ở trong góc AOB vẽ tia $Ot//Ax$. Khi đó $\widehat{AOt}=\widehat{A}=a°$ (cặp góc so le trong).

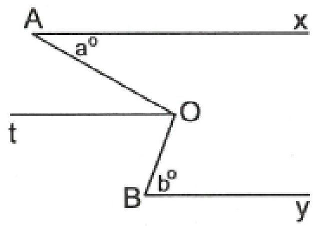
Suy ra $\widehat{BOt}=b°$. Vậy $\widehat{BOt}=\widehat{B}\left(=b°\right)$.

Do đó $By//Ot$ (vì có cặp góc so le trong bằng nhau).

Vậy $Ax//By$ (vì cùng song song với Ot).

4.12. Hình 4.15 có $\widehat{A}=m°;\widehat{C}=n°\left(90<m,n<180\right)$; $\widehat{AOC}=360°-\left(m°+n°\right)$. Chứng tỏ rằng $AB//CD$.

Hướng dẫn giải (h.4.25)



Hình 4.24

Trong góc AOC vẽ tia Ot sao cho $Ot//AB$.

Khi đó $\widehat{A}+\widehat{AOt}=180°$ (cặp góc trong cùng phía).

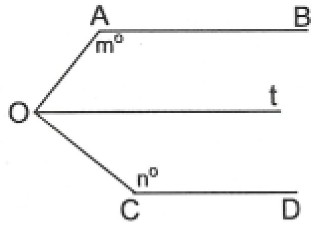
Suy ra $\widehat{AOt}=180°-m°$.

Do đó $\widehat{COt}=\widehat{AOC}-\widehat{AOt}=360°-\left(m°+n°\right)-\left(180°-m°\right)=180°-n°$

Vậy $\widehat{C}+\widehat{COt}=n°+\left(180°-n°\right)=180°$.

Suy ra $CD//Ot$ (vì có cặp góc trong cùng phía bù nhau).

Do đó $AB//CD$ (vì cùng song song với Ot).

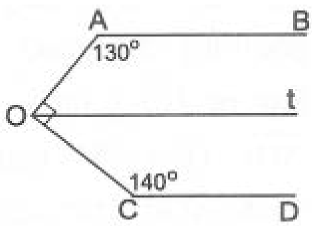


Hình 4.25

4.13. Hình 4.16 có $\widehat{A}=130°,\widehat{C}=140°$ và $OA\perp OB$. Chứng tỏ rằng $AB//CD$.

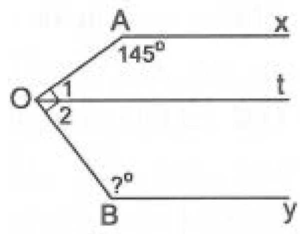
Hướng dẫn giải (h.4.26)

Vì $OA\perp OC$ nên $\widehat{AOC}=90°$. Trong góc AOC vẽ tia Ot sao cho $Ot//AB$.



Khi đó $\widehat{A}+\widehat{AOt}=180°$ (cặp góc trong cùng phía).

Suy ra $\widehat{AOt} = 180° - 130° = 50°$.



Hình 4.28

Vì $\widehat{AOC} = 90°$ nên $\widehat{COt} = 40°$.

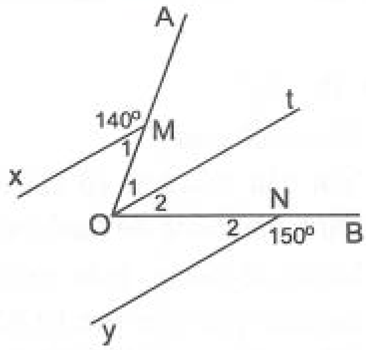
Ta có $\widehat{C} + \widehat{COt} = 140° + 40° = 180°$.

Do đó $CD // Ot$ (vì có cặp góc trong cùng phía bù nhau).

Suy ra $AB // CD$ (vì cùng song song với *Ot*).

4.14. Cho góc *AOB*. Trên tia *OA* lấy điểm *M*, trên tia *OB* lấy điểm *N*. Vẽ ra ngoài góc *AOB* các tia *Mx* và *Ny* song song với nhau. Cho biết $\widehat{AMx} = 140°, \widehat{BNy} = 150°$, tính số đo của góc *AOB*.

Hướng dẫn giải (h.4.27)



Hình 4.27

Vì $\widehat{AMx} = 140°$ nên $\widehat{M_1} = 40°$.

Vì $\widehat{BNy} = 150°$ nên $\widehat{N_2} = 30°$.

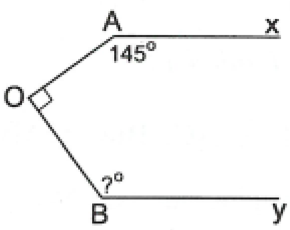
Ở trong góc *AOB* vẽ tia $Ot // Mx$, khi đó $Ot // Ny$ (vì $Mx // Ny$).

Ta có $\widehat{O_1} = \widehat{M_1} = 40°$ (cặp góc so le trong).

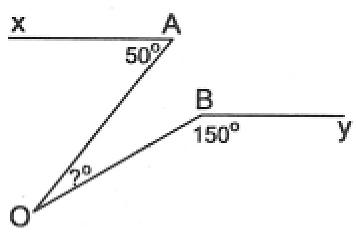
$\widehat{O_2} = \widehat{N_2} = 30°$ (cặp góc so le trong).

Suy ra $\widehat{AOB} = \widehat{O_1} + \widehat{O_2} = 40° + 30° = 70°$.

4.15. Hình 4.17 có $Ax // By; OA \perp OB$ và $\widehat{A} = 145°$. Tính số đo góc *B*.



Hình 4.17



Hình 4.18

Hướng dẫn giải (h.4.28)

Ở trong góc *AOB* vẽ tia $Ot // Ax$.

Khi đó $Ot // By$ (vì $Ax // By$).

Ta có $OA \perp OB$ nên $\widehat{AOB} = 90°$.

Mặt khác $\widehat{A} + \widehat{O_1} = 180°$ (cặp góc trong cùng phía) nên $\widehat{O_1} = 180° - 145° = 35°$.

Suy ra $\widehat{O_2} = 90° - 35° = 55°$.

Ta có $\widehat{O_2} + \widehat{B} = 180°$ (cặp góc trong cùng phía của $Ot // By$).

Do đó $\widehat{B} = 180° - 55° = 125°$.

4.16. Trong hình 4.18 có $Ax // By$. Tính số đo của góc AOB.

Hướng dẫn giải (h.4.29)

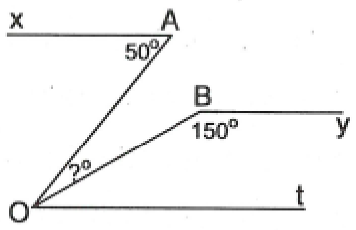
Trên nửa mặt phẳng bờ OB có chứa tia By vẽ tia $Ot // By$. Khi đó $Ot // Ax$ (vì $Ax // By$).

Ta có $\widehat{OBy} + \widehat{BOt} = 180°$ (cặp góc trong cùng phía).

Suy ra $\widehat{BOt} = 180° - 150° = 30°$.

Ta có $\widehat{AOt} = \widehat{OAx} = 50°$ (cặp góc so le trong).

Từ đó $\widehat{AOB} = 50° - 30° = 20°$.



Hình 4.29

Chương I. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG.

Chuyên đề 5. ĐỊNH LÍ

A. Kiến thức cần nhớ

1. Định lí

• Định lí là một khẳng định suy ra từ những khẳng định được coi là đúng.

• Mỗi định lí đều có hai phần:

- Phần đã cho gọi là giả thiết của định lí.

- Phần phải suy ra gọi là kết luận của định lí.

Khi định lí được phát biểu dưới dạng "Nếu A thì B" thì A là giả thiết; B là kết luận.

2. Chứng minh định lí là dùng lập luận để từ giả thiết suy ra kết luận.

3. Hệ quả là một định lí được suy ra trực tiếp từ một định lí hoặc từ một tính chất được thừa nhận.

4. Định lí thuận, định lí đảo

Xét định lí "Nếu A thì B" có *mệnh đề đảo* là "Nếu B thì A". Nếu mệnh đề đảo này đúng thì mệnh đề đảo được gọi là *định lí đảo* của định lí đã cho và định lí đã cho gọi là *định lí thuận*.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Định lí "Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau" có định lí đảo không?

Giải

Định lí "Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau" có mệnh đề đảo là "Hai góc bằng nhau thì đối đỉnh". Mệnh đề đảo này sai.

Ví dụ, xét góc *AOB*, tia phân giác *OM* (h.5.1).

Rõ ràng hai góc *AOM* và *BOM* bằng nhau nhưng không đối đỉnh vì mỗi cạnh của góc này không là tia đối một cạnh của góc kia.

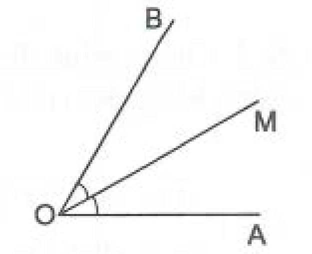
Vậy định lí "Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau" không có định lí đảo.

Nhận xét: Một ví dụ chứng tỏ một mệnh đề nào đó là sai gọi là một *phản ví dụ*. Như vậy ta đã dùng phương pháp đưa ra một phản ví dụ để chứng tỏ mệnh đề "Hai góc bằng nhau thì đối đỉnh" là sai.

Ví dụ 2: Chứng minh định lí: "Nếu hai góc có cạnh tương ứng song song thì bằng nhau nếu hai góc cùng nhọn hoặc cùng tù".

Giải (h.5.2)

GT	$\widehat{xOy}$ và $\widehat{x'O'y'}$ cùng nhọn (tù) $Ox//O'x'; Oy//O'y'$
KL	$\widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$



Hình 5.1

* *Tìm cách giải*

Để chứng minh $\widehat{O} = \widehat{O'}$ ta chứng minh chúng cùng bằng một góc thứ ba. Dựa vào giả thiết có các cặp đường thẳng song song, ta nghĩ đến việc vận dụng tính chất của hai đường thẳng song song để tìm ra các cặp góc bằng nhau.

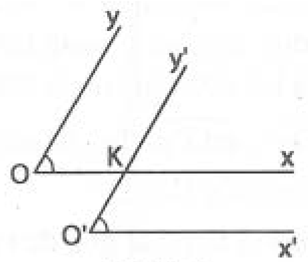
* *Trình bày lời giải*

Gọi *K* là giao điểm của các đường thẳng *Ox* và $O'y'$.

Vì $O'y'//Oy$ nên $\widehat{O} = \widehat{xKy'}$ (cặp góc đồng vị);

Vì $O'x'//Ox$ nên $\widehat{O'} = \widehat{xKy'}$ (cặp góc đồng vị).

Do đó $\widehat{O} = \widehat{O'}$ (cùng bằng $\widehat{xKy'}$).



Hình5.2

Nhận xét: Người ta cũng chứng minh được rằng:

Nếu hai góc có cạnh tương ứng song song thì:

- Chúng bù nhau nếu góc này nhọn, góc kia tù;

- Góc này vuông thì góc kia vuông.

Ví dụ 3: Chứng minh định lí: "Nếu hai góc có cạnh tương ứng vuông góc thì chúng bằng nhau nếu hai góc cùng nhọn hoặc cùng tù".

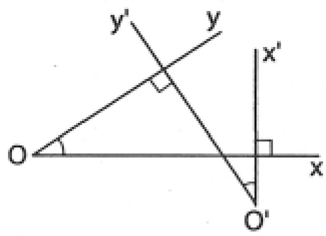
Giải (h.5.3)

GT	$\widehat{xOy}$ và $\widehat{x'O'y'}$ cùng nhọn (tù) $Ox \perp O'x'; Oy \perp O'y'$
KL	$\widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$

* *Tìm cách giải*

Để chứng minh $\widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$ ta chứng minh chúng cùng bằng một góc thứ ba. Để tạo ra góc thứ ba này ta vẽ $O'm//Ox$ và $O'n//Oy$, hai tia này cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ $O'x'$ (h.5.4).

Khi đó theo định lí "Nếu hai góc có cạnh tương ứng song song thì chúng bằng nhau nếu hai góc cùng nhọn hoặc cùng tù" ta được $\widehat{xOy} = \widehat{mO'n}$. Ta chỉ còn phải chứng minh $\widehat{x'O'y'} = \widehat{mO'n}$.



Hình5.3

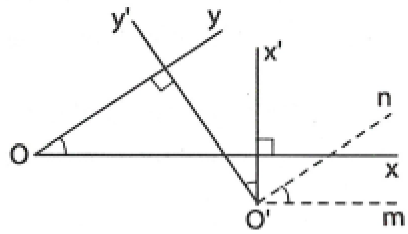
* *Trình bày lời giải*

• Trường hợp hai góc đều nhọn

Vẽ $O'm//Ox$ và $O'n//Oy$. Vì $O'x' \perp Ox$ nên $O'x' \perp O'm$ do đó $\widehat{mO'x'} = 90°$. (1)

Vì $O'y' \perp Oy$ nên $O'y' \perp O'n$ do đó $\widehat{nO'y'} = 90°$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $\widehat{x'O'y'} = \widehat{mO'n}$ (cùng phụ với $\widehat{x'O'n}$). (3)



Hình5.4

Mặt khác, $\widehat{xOy} = \widehat{mO'n}$ (hai góc có cạnh tương ứng song song cùng nhọn). (4)

Từ (3) và (4), suy ra: $\widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'} \left(= \widehat{mO'n}\right)$.

• Trường hợp hai góc đều tù: Chứng minh tương tự.

Nhận xét: Người ta cũng chứng minh được rằng:

Nếu hai góc có cạnh tương ứng vuông góc thì:

- Chúng bù nhau nếu góc này nhọn, góc kia tù;

- Góc này vuông thì góc kia vuông.

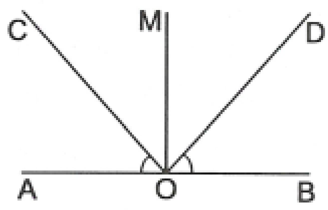
C. Bài tập vận dụng

5.1. Cho góc bẹt *AOB*. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ *AB*, vẽ các tia *OC* và *OD* sao cho $\widehat{AOC} = \widehat{BOD} < 90°$. Vẽ tia *OM* ở trong góc *COD*. Chứng minh rằng $OM \perp AB$ *khi và chỉ khi* *OM* là tia phân giác của góc *COD*.

Hướng dẫn giải (h.5.6)

• *Tìm cách giải*

Với cấu trúc *khi và chỉ khi* ta phải chứng minh hai mệnh đề thuận và đảo sau:



Hình 5.6

- Mệnh đề thuận: Nếu $OM \perp AB$ thì *OM* là tia phân giác của góc *COD*.

- Mệnh đề đảo: Nếu *OM* là tia phân giác của góc *COD* thì $OM \perp AB$.

• *Trình bày lời giải*

- Chứng minh mệnh đề thuận: $OM \perp AB$ (gt) suy ra $\widehat{AOM} = \widehat{BOM} = 90°$.

Do đó $\widehat{AOC} + \widehat{COM} = \widehat{BOD} + \widehat{DOM}$ (vì tia *OC* nằm giữa hai tia *OA, OM*; tia *OD* nằm giữa hai tia *OB* và *OM*).

Mặt khác $\widehat{AOC} = \widehat{BOD}$ (gt) nên $\widehat{COM} = \widehat{DOM}$. (1)

Tia *OM* nằm giữa hai tia *OC* và *OD*. (2)

Từ (1) và (2) suy ra tia *OM* là tia phân giác của góc *COD*.

- Chứng minh mệnh đề đảo:

OM là tia phân giác của góc *COD* (gt). Suy ra $\widehat{COM} = \widehat{DOM}$.

Mặt khác $\widehat{AOC} = \widehat{BOD}$ (gt) nên $\widehat{AOC} + \widehat{COM} = \widehat{BOD} + \widehat{DOM}$.

Do đó $\widehat{AOM} = \widehat{BOM}$ (vì tia *OC* nằm giữa hai tia *OA, OM*; tia *OD* nằm giữa hai tia *OB, OM*).

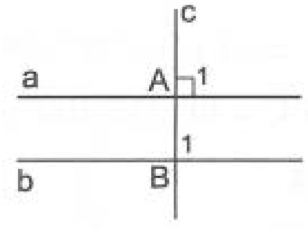
Lại có $\widehat{AOM} + \widehat{BOM} = 180°$ (hai góc kề bù) nên $\widehat{AOM} = 180° : 2 = 90°$.

Suy ra $OM \perp AB$.

5.2. Cho định lí: "Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau". Hãy phát biểu định lí đảo và chứng minh.

Hướng dẫn giải (h.5.7)

Phát biểu định lí đảo: Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường song song thì nó cũng vuông góc với đường thẳng kia.



Hình 5.7

GT	$a//b$ $c \perp a$
KL	$c \perp b$

Chứng minh

Ta có $a//b$ (gt) suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$ (cặp góc đồng vị).

Mặt khác, $c \perp a$ (gt) nên $\widehat{A_1} = 90°$. Do đó $\widehat{B_1} = 90°$. Suy ra $c \perp b$.

* *Nhận xét:* Ta có thể viết gộp cả định lí thuận và định lí đảo của định lí trên như sau:

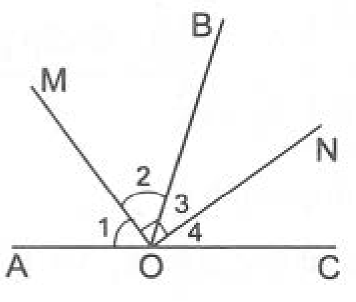
$$\boxed{\begin{array}{l} a \perp c \\ b \perp c \Leftrightarrow a//b \end{array}}$$

Kí hiệu $\Leftrightarrow$ đọc là "khi và chỉ khi". Kí hiệu này có nghĩa là mệnh đề ở bên trái suy ra được mệnh đề ở bên phải và ngược lại.

5.3. Cho định lí: "Hai tia phân giác của hai góc kề thì vuông góc với nhau". Hãy viết giả thiết, kết luận của định lí đảo của định lí này rồi chứng minh.

Hướng dẫn giải (h.5.8)

GT	$\widehat{AOB}$ và $\widehat{BOC}$ kề bù OM là tia phân giác của $\widehat{AOB}$ ON nằm trong góc BOC $OM \perp ON$.
KL	ON là tia phân giác của $\widehat{BOC}$.



Hình 5.8

Chứng minh

Ta có $OM \perp ON$ (gt) nên $\widehat{MON} = 90°$.

Tia OB nằm giữa hai tia OM và ON nên $\widehat{O_2} + \widehat{O_3} = \widehat{MON} = 90°$.

Vì $\widehat{AOB}$ và $\widehat{BOC}$ kề bù nên $\widehat{AOB} + \widehat{BOC} = 180°$.

Do đó $\widehat{O_1}+\widehat{O_2}+\widehat{O_3}+\widehat{O_4}=180^\circ$.

Mặt khác, $\widehat{O_2}+\widehat{O_3}=90^\circ$ (chứng minh trên) nên $\widehat{O_1}+\widehat{O_4}=90^\circ$.

Suy ra $\widehat{O_2}+\widehat{O_3}=\widehat{O_1}+\widehat{O_4}$ mà $\widehat{O_1}=\widehat{O_2}$ (gt) nên $\widehat{O_3}=\widehat{O_4}$. (1)

Tia *ON* nằm giữa hai tia *OB* và *OC*. (2)

Từ (1) và (2) suy ra tia *ON* là tia phân giác của góc *BOC*.

5.4. Bác bỏ các mệnh đề sau bằng cách đưa ra phản ví dụ:

a) Tổng số đo của hai góc nhọn bằng số đo của một góc tù;

b) Tổng số đo của một góc nhọn và một góc tù bằng số đo của góc bẹt.

Hướng dẫn giải

a) $\widehat{A}=30^\circ; \widehat{B}=40^\circ$

$\Rightarrow \widehat{A}+\widehat{B}=70^\circ<90^\circ$ (không phải là số đo của một góc tù).

b) $\widehat{C}=30^\circ; \widehat{D}=100^\circ \Rightarrow \widehat{C}+\widehat{D}=130^\circ \neq 180^\circ$.

5.5. Điền vào các chỗ trống:

a) Cho $\widehat{A}+\widehat{O}=90^\circ$ và $\widehat{B}+\widehat{O}=90^\circ$. Suy ra…………… (vì…………………………).

b) Cho $\widehat{A}=\widehat{A'}$ và $\widehat{B}=\widehat{B'}$. Suy ra $\widehat{A}=\widehat{B} \Leftrightarrow$ …………… (vì…………………………).

Hướng dẫn giải

a) Suy ra $\widehat{A}=\widehat{B}$ (vì cùng *phụ* với góc *O*).

b) $\widehat{A'}=\widehat{B'}$ (vì cùng *bằng* hai góc bằng nhau).

5.6. Điền vào các chỗ trống:

a) Cho $AB=CD$. Suy ra $3AB$ ………$3CD$ (vì………………………..).

b) Cho $AB=CD$ và $MN=PQ$. Suy ra $AB+MN$ ……….. $CD+PQ$ (vì…………………………).

Hướng dẫn giải

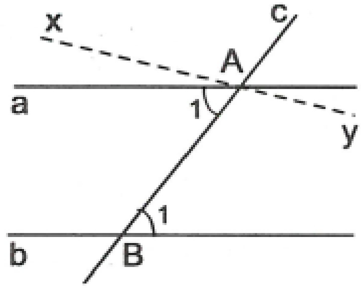
a) "=" (vì gấp ba lần hai đoạn thẳng bằng nhau thì được hai đoạn thẳng bằng nhau).

b) "=" (vì thêm những đoạn thẳng bằng nhau vào những đoạn thẳng bằng nhau thì tổng bằng nhau).

5.7. Chứng minh định lí: "Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song thì hai góc so le trong bằng nhau".

Hướng dẫn giải (h.5.9)

GT	$a//b$ $\widehat{A_1}$ và $\widehat{B_1}$ là cặp góc so le trong.
KL	$\widehat{A_1}=\widehat{B_1}$.



Hình 5.9

Chứng minh

Giả sử các góc $\widehat{A_1}$ và $\widehat{B_1}$ không bằng nhau.

Qua A vẽ đường thẳng xy tạo với đường thẳng c góc $\widehat{xAB}=\widehat{B_1}$.

Khi đó theo dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song ta được $xy//b$.

Mặt khác, $a//b$ (gt) nên qua A có hai đường thẳng song song với b trái với tiên đề Ơ-clít. Do đó xy phải trùng với đường thẳng a.

Suy ra $\widehat{xAB}=\widehat{B_1}$ hay $\widehat{A_1}=\widehat{B_1}$.

5.8. Cho $\widehat{A}$ và $\widehat{B}$ là hai góc có cạnh tương ứng song song. Tính số đo các góc A và B, biết:

a) $\widehat{A}+\widehat{B}=130°$; b) $\widehat{A}-\widehat{B}=100°$.

Hướng dẫn giải

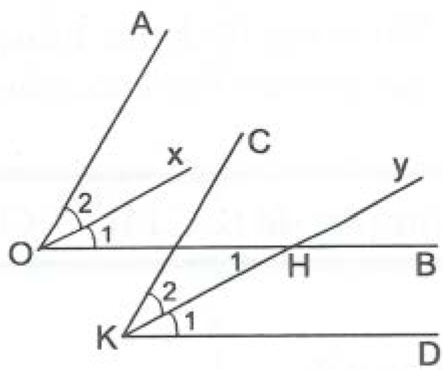
a) Nếu $\widehat{A}+\widehat{B}=130°\neq 180°$ thì hai góc A và B phải bằng nhau.

Vậy $\widehat{A}=\widehat{B}=130°:2=65°$.

b) Nếu $\widehat{A}-\widehat{B}=100°$ thì $\widehat{A}\neq\widehat{B}$, do đó $\widehat{A}+\widehat{B}=180°$.

Suy ra $\widehat{A}=(180°+100°):2=140°; \widehat{B}=180°-140°=40°$.

5.9. Cho hai góc có cạnh tương ứng song song cùng nhọn hoặc cùng tù. Biết hai tia phân giác của chúng không cùng nằm trên một đường thẳng. Chứng minh rằng hai tia phân giác này song song với nhau.



Hình 5.10

Hướng dẫn giải (h.5.10)

GT	$\widehat{AOB}$ và $\widehat{CKD}$ cùng nhọn (tù) $OA//KC; OB//KD$ $\widehat{O_1}=\widehat{O_2}; \widehat{K_1}=\widehat{K_2}$

KL	$Ox//Ky$.

Chứng minh

Hai góc AOB và CKD là hai góc có cạnh tương ứng song song cùng nhọn hoặc cùng tù nên $\widehat{AOB}=\widehat{CKD}$.

Tia Ox là tia phân giác của góc AOB; tia Ky là tia phân giác của góc CKD nên $\widehat{O_1}=\frac{1}{2}\widehat{AOB};\widehat{K_1}=\frac{1}{2}\widehat{COD}$.

Suy ra $\widehat{O_1}=\widehat{K_1}$ (một nửa của hai góc bằng nhau).

Mặt khác, $\widehat{H_1}=\widehat{K_1}$ (cặp góc so le trong của $OB//KD$) nên $\widehat{O_1}=\widehat{H_1}\left(=\widehat{K_1}\right)$.

Do đó $Ox//Ky$ (vì có cặp góc so le trong bằng nhau).

5.10. Cho điểm M và hai đường thẳng AB, CD cắt nhau tại một điểm O ở ngoài phạm vi tờ giấy (h.5.5). Hãy nêu cách vẽ một đường thẳng qua M và vuông góc với tia phân giác của góc AOC.

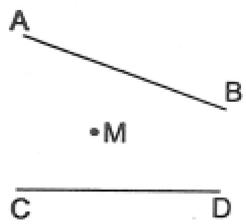
Hướng dẫn giải (h.5.11)

Từ M vẽ các tia $Mx//AB, My//CD$ và tia Mt là tia phân giác của góc xMy.

Qua M vẽ đường thẳng $d\perp Mt$, khi đó $d\perp$ tia phân giác của góc AOC.

Thật vậy, các góc xMy và AOC là các góc có cạnh tương ứng song song, cùng nhọn nên các tia phân giác của chúng song song với nhau (xem bài 5.9).

Mặt khác, $d\perp Mt$ trên $d\perp$ tia phân giác của góc AOC.



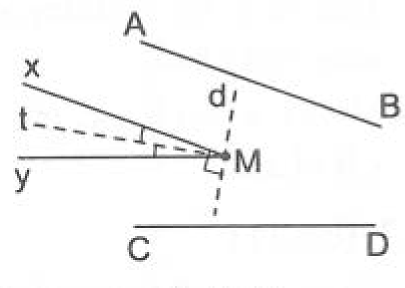
Hình5.5

5.11. Cho 10 đường thẳng trong đó không có hai đường thẳng nào song song. Chứng minh rằng tồn tại hai đường thẳng tạo với nhau một góc nhỏ hơn hoặc bằng 18°.

Hướng dẫn giải (h.5.12)

Gọi 10 đường thẳng đã cho là $a_1,a_2,...,a_{10}$.

Từ một điểm O bất kì vẽ 10 đường thẳng $d_1,d_2,...,d_{10}$ tương ứng song song với 10 đường thẳng đã cho. Vì trong 10 đường thẳng đã cho không có hai đường thẳng nào song song nên 10 đường thẳng $d_1,d_2,...,d_{10}$ cũng không có hai đường thẳng nào trùng nhau. 10 đường thẳng này cắt nhau tại O tạo thành 20 góc không có điểm trong chung nên tồn tại một góc nhỏ hơn hoặc bằng $360^\circ:20=18^\circ$. Góc này bằng góc có cạnh tương ứng song song



Hình 5.11

với nó.

Vậy trong 10 đường thẳng đã cho, tồn tại hai đường thẳng tạo với nhau một góc nhỏ hơn hoặc bằng $18°$.

Chương I. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG.

Chuyên đề 6. CHỨNG MINH BẰNG PHẢN CHỨNG

A. Kiến thức cần nhớ

Khi giải bài 5.7 trong chuyên đề 5 ta đã dùng phương pháp chứng minh bằng phản chứng. Phương pháp này thuộc loại chứng minh gián tiếp. Để chứng minh mệnh đề A là đúng ta chứng minh phủ định của A là sai.

Nội dung chứng minh bằng phản chứng gồm ba bước:

- *Bước 1* (phủ định kết luận): Giả sử điều trái với kết luận của bài toán.

- *Bước 2* (đi đến mâu thuẫn): Từ điều giả sử ở trên và từ các điều đã biết (giả thiết, tiên đề, định lí,…) ta suy ra một điều vô lí (trái với giả thiết, trái với các kiến thức đã biết hoặc hai điều mâu thuẫn nhau).

- *Bước 3* (khẳng định kết luận): Vậy điều giả sử là sai, điều phải chứng minh là đúng.

Chú ý:

• Trong bước 1 ta phải phủ định điều phải chứng minh.

Phủ định của "có A" là "không có A".

Phủ định của "không có B" là "có B".

Ví dụ: Phủ định của "ba điểm A, B, C thẳng hàng" là "ba điểm A, B, C không thẳng hàng".

Phủ định của $m > n$ là $m \le n$ (tức là $m < n$ hoặc $m = n$).

• Trong bước 2, nhất thiết phải suy ra được một điều mâu thuẫn với điều đã cho, đã biết. Nếu không thì chưa thể khẳng định được điều giả sử ở bước 1 là sai.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho 12 đường thẳng cắt nhau tại *O* tạo thành một số góc không có điểm trong chung. Chứng minh rằng trong các góc đó có ít nhất hai góc có số đo không vượt quá $15°$.

Giải (h.6.1)

** Tìm cách giải*

Dễ thấy tổng số đo các góc không có điểm trong chung đúng bằng $360°$. Vì vậy ta chỉ cần biết có bao nhiêu góc không có điểm trong chung được tạo thành.

** Trình bày lời giải*

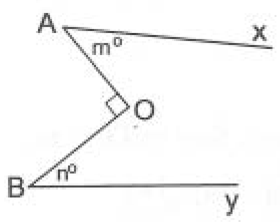
12 đường thẳng cắt nhau tại O tạo thành 24 góc đỉnh O không có điểm trong chung. Tổng số đo các góc bằng $360°$ nên phải tồn tại một góc nhỏ hơn hoặc bằng $360° : 24 = 15°$.

Ta chứng minh điều này bằng phản chứng.

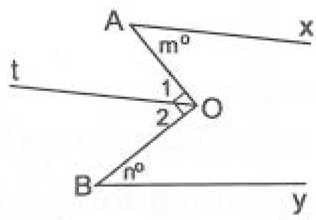
Giả sử mỗi góc đó đều lớn hơn $15°$ thì tổng của chúng lớn hơn: $15°.24 = 360°$ (vô lí).

Vậy trong số các góc đó tồn tại một góc không vượt quá $15°$. Góc này bằng góc đối đỉnh với nó nên tồn tại hai góc không vượt quá $15°$.

Ví dụ 2: Hình 6.2 có $OA \perp OB, \widehat{A} = m°, \widehat{B} = n°$, với $m + n < 90$. Chứng minh rằng Ax và By không song song.



Hình 6.2

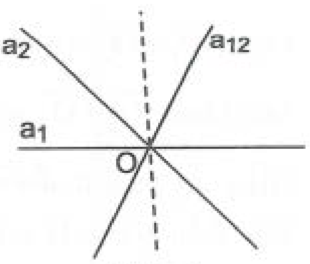


Hình 6.3

Giải (h.6.3)

** Tìm cách giải*

Bài toán yêu cầu chứng minh Ax và By không song song. Nếu ta dùng phương pháp phản chứng, giả sử $Ax // By$ thì có thể vận dụng định lí về tính chất của hai đường thẳng song song để giải. Tuy nhiên, giữa Ax và By chưa có một cát tuyến nào nên ta vẽ tia Ot ở trong góc AOB sao cho $Ot // Ax$ thì $Ot // By$. Khi đó các góc A, góc B lần lượt bằng $\widehat{O_1}$ và $\widehat{O_2}$ rất thuận lợi trong việc liên hệ với góc AOB cho trước.



Hình6.1

** Trình bày lời giải*

Giả sử $Ax // By$. Trong góc AOB vẽ tia $Ot // Ax$ thì $Ot // By$ (vì $Ax // By$).

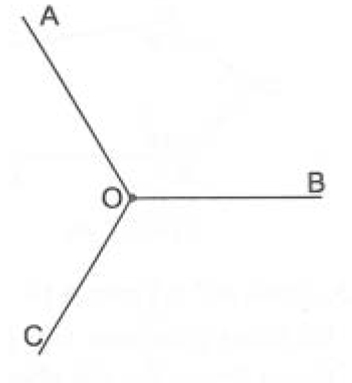
Ta có $\widehat{O_1} = \widehat{A} = m°$ (hai góc so le trong); $\widehat{O_2} = \widehat{B} = n°$ (hai góc so le trong).

Do đó $\widehat{O_1} + \widehat{O_2} = m° + n°$.

Mặt khác, $\widehat{O_1} + \widehat{O_2} = \widehat{AOB}; m + n < 90$ nên $\widehat{AOB} < 90°$.

Điều này mâu thuẫn với $\widehat{AOB} = 90°$ (vì $OA \perp OB$).

Vậy điều giả sử là sai, suy ra Ax và By không song song.



Hình 6.5

Ví dụ 3: Cho góc tù xOy, tia Ot ở trong góc đó sao cho $\widehat{xOt} < \widehat{yOt}$. Trên tia Ox lấy điểm A. Qua A vẽ đường thẳng $m \perp Ox$. Chứng minh rằng các đường thẳng Ot và m cắt nhau.

Giải (h.6.4)

** Tìm cách giải*

Điều phải chứng minh là các đường thẳng Ot và m cắt nhau.

Muốn chứng minh bằng phản cứng ta giả sử $Ot // m$, từ đó suy ra $Ot \perp Ox$ do đó $\widehat{xOt} = 90°$.

Để đưa đến mâu thuẫn ta chỉ cần chứng minh $\widehat{xOt} < 90°$.

** Trình bày lời giải*

Giả sử các đường thẳng Ot và m không cắt nhau. Suy ra $Ot // m$.

Mặt khác, $Ox \perp m$ (gt) nên $Ox \perp Ot$ do đó $\widehat{xOt} = 90°$. (*)

Ta có $\widehat{xOt} + \widehat{yOt} = \widehat{xOy} < 180°$ mà $\widehat{xOt} < \widehat{yOt}$ nên $\widehat{xOt} < 90°$, mâu thuẫn với (*).

Vậy điều giả sử là sai, do đó các đường thẳng Ot và m phải cắt nhau.

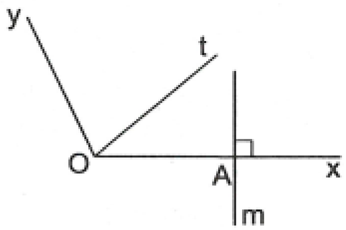
Ví dụ 4: Cho ba tia phân biệt OA, OB, OC sao cho $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COA}$. Chứng minh rằng trong ba tia đã cho không có tia nào nằm giữa hai tia còn lại.

Giải (h.6.5)

** Tìm cách giải*

Để giải ví dụ này bằng phương pháp phản chứng, ta giả sử trong ba tia đã cho có một tia nằm giữa hai tia còn lại rồi dùng tính chất cộng số đo các góc dẫn đến kết quả có hai tia trùng nhau, trái giả thiết.

** Trình bày lời giải*



Hình 6.4

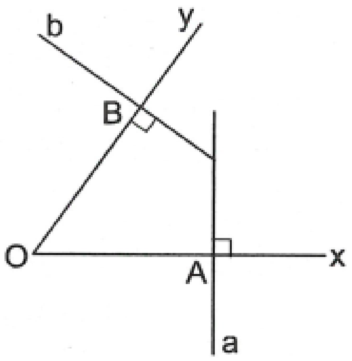
Giả sử trong ba tia OA, OB, OC có một tia nằm giữa hai tia còn lại.

Không làm giảm tính tổng quát, ta sử giả tia OB nằm giữa hai tia OA, OC.

Khi đó ta có $\widehat{AOB} + \widehat{BOC} = \widehat{AOC}$.

Nhưng do $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{AOC}$ nên $\widehat{AOB} + \widehat{AOB} = \widehat{AOB}$ do đó $\widehat{AOB} = 0°$, suy ra hai tia OA, OB trùng nhau, trái giả thiết.

Vậy điều giả sử là sai, suy ra trong ba tia đã cho không có tia nào nằm giữa hai tia còn lại.



Hình 6.11

C. Bài tập vận dụng

• *Chứng minh hai đường thẳng cắt nhau*

6.1. Chứng minh định lí: Nếu một đường thẳng cắt một trong hai đường thẳng song song thì nó cũng cắt đường thẳng kia.

Hướng dẫn giải (h.6.9)

Hình 6.9

Cho $a//b$, c cắt a tại O. Ta phải chứng minh c cắt b.

Giả sử c không cắt b thì $c//b$. Như vậy qua điểm O có hai đường thẳng là a và c cùng song song với b, trái với tiên đề Ơ-clít. Vậy điều giả sử là sai, suy ra c cắt b.

6.2. Cho hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau tại O. Chứng minh rằng nếu đường thẳng c không vuông góc với b thì hai đường thẳng a và c cắt nhau.

Hướng dẫn giải (h.6.10)

• Trường hợp đường thẳng c đi qua O thì c và a cắt nhau tại O.

• Trường hợp đường thẳng c cắt b tại $K \neq O$:

Giả sử c và a không cắt nhau thì chúng song song với nhau.

Vì $b \perp a$ nên $b \perp c$, trái giả thiết. Vậy c và a phải cắt nhau.

6.3. Cho góc xOy khác góc bẹt. Trên tia Ox lấy điểm A, trên tia Oy lấy điểm B. Từ A vẽ đường thẳng $a \perp Ox$, từ B vẽ đường thẳng $b \perp Oy$. Chứng minh rằng hai đường thẳng a và b cắt nhau.

Hướng dẫn giải (h.6.11)

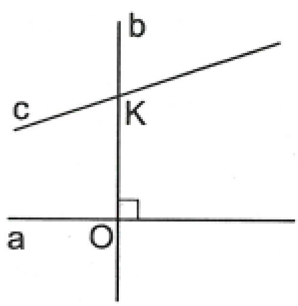
• Giả sử a và b trùng nhau. Như vậy, qua O có hai đường thẳng là Ox và Oy cùng vuông góc với đường thẳng a (hoặc b), vô lí. Vậy a và b không trùng nhau. (1)

• Giả sử $a//b$

Ta có $Ox \perp a$ nên $Ox \perp b$. Mặt khác $Oy \perp b$ (gt), như vậy qua điểm O có hai đường thẳng là Ox và Oy cùng vuông góc với đường thẳng b, vô lí.

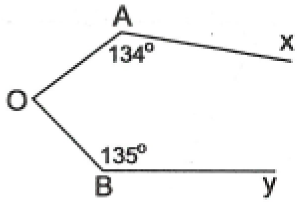
Vậy điều giả sử là sai, suy ra a và b không song song. (2)

Từ (1) và (2) suy ra a cắt b.

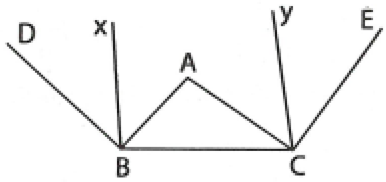


Hình 6.10

6.4. Hình 6.6 có góc AOB nhọn, $\widehat{A} = 134°; \widehat{B} = 135°$. Chứng minh rằng Ax và By không song song.



Hình 6.6



Hình 6.7

Hướng dẫn giải (h.6.12)

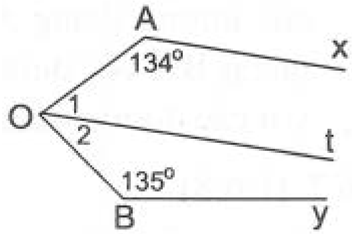
Giả sử $Ax//By$. Trong góc AOB vẽ tia $Ot//Ax$ thì $Ot//By$ (vì $Ax//By$).

Ta có $\widehat{O_1}+\widehat{A}=180^\circ \Rightarrow \widehat{O_1}=180^\circ-134^\circ=46^\circ$.

$\widehat{O_2}+\widehat{B}=180^\circ \Rightarrow \widehat{O_2}=180^\circ-135^\circ=45^\circ$.

Do đó $\widehat{O_1}+\widehat{O_2}=46^\circ+45^\circ$ hay $\widehat{AOB}=91^\circ>90^\circ$.

Điều này mâu thuẫn với giả thiết là góc AOB nhọn.



Hình 6.12

Vậy điều giả sử là sai, suy ra Ax và By không song song.

6.5. Hình 6.7 có góc A tù, $AB\perp BD, AC\perp CE$. Vẽ tia Bx và Cy lần lượt là tia phân giác của các góc ABD và ACE. Chứng minh rằng các đường thẳng Bx và Cy cắt nhau.

Hướng dẫn giải (h.6.13)

Ta có $AB\perp BD, AC\perp CE \Rightarrow \widehat{ABD}=\widehat{ACE}=90^\circ$.

Do đó $\widehat{ABx}=\widehat{ACy}=45^\circ$.

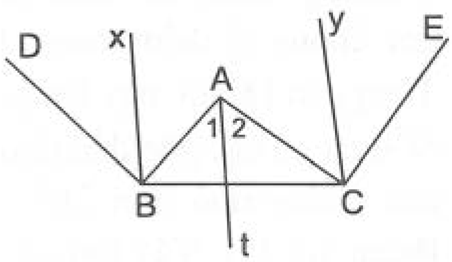
Ta chứng minh Bx và Cy cắt nhau bằng phương pháp phản chứng.

Giả sử $Bx//Cy$. Ở trong góc A ta vẽ $At//Bx$ thì $At//Cy$ (vì $Bx//Cy$).

Ta có $\widehat{A_1}=\widehat{ABx}=45^\circ$ (cặp góc so le trong); $\widehat{A_2}=\widehat{ACy}=45^\circ$ (cặp góc so le trong).

Do đó $\widehat{A_1}+\widehat{A_2}=90^\circ$ hay $\widehat{BAC}=90^\circ$ trái giả thiết là góc A tù.

Vậy điều giả sử là sai, suy ra hai đường thẳng Bx và Cy cắt nhau.



Hình 6.13

6.6. Cho hai điểm A và B nằm ngoài đường thẳng m. Qua A vẽ 50 đường thẳng trong đó có đường thẳng qua B. Qua B vẽ 50 đường thẳng trong đó có đường thẳng qua A. Hỏi ít nhất cũng có bao nhiêu giao điểm của đường thẳng m với các đường thẳng đã vẽ?

Hướng dẫn giải (h.6.14)

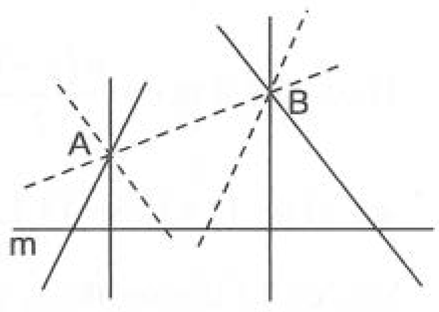
Trong số 50 đường thẳng vẽ qua A ít nhất cũng có 49 đường thẳng cắt m.

Ta chứng minh điều này bằng phản chứng.

Giả sử có chưa đến 49 đường thẳng cắt m, suy ra ít nhất cũng còn 2 đường thẳng không cắt m. Hai đường thẳng này cùng đi qua A và cùng song song với m. Điều này vô lí vì nó trái với tiên đề Ơ-clít. Vậy điều giả sử là sai, do đó ít nhất cũng có 49 đường thẳng cắt m.

• Nếu đường thẳng $AB//m$ thì số giao điểm của đường thẳng m với các đường thẳng đã vẽ ít nhất cũng là $49+49=98$ (điểm).

• Nếu đường thẳng AB và đường thẳng m không song song thì giao điểm của đường thẳng AB với đường thẳng m cũng là giao điểm của đường thẳng BA với đường thẳng m. Do đó số giao điểm của đường thẳng m với các đường thẳng đã vẽ ít nhất cũng là $49+49-1=97$ (điểm).



Hình 6.14

• Chứng minh hai góc không bằng nhau. Tính số đo góc

6.7. Trong hình 6.8, cho biết $\widehat{A_1} \ne \widehat{B_1}$. Chứng minh rằng $\widehat{C_1} \ne \widehat{D_1}$.

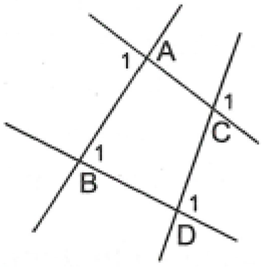
Hướng dẫn giải (h.6.8)

Giả sử $\widehat{C_1} = \widehat{D_1}$, suy ra $AC//BD$ (vì có cặp góc đồng vị bằng nhau).

Do đó $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$ (cặp góc so le trong).

Điều này trái giả thiết.

Vậy điều giả sử là sai, do đó $\widehat{C_1} \ne \widehat{D_1}$.



Hình 6.8

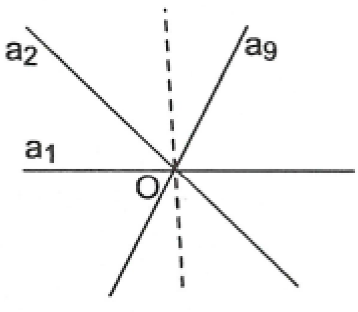
6.8. Cho 9 đường thẳng cắt nhau tại O tạo thành một số góc không có điểm trong chung. Chứng minh rằng trong các góc đó tồn tại một góc lớn hơn hoặc bằng $20°$ và tồn tại một góc nhỏ hơn hoặc bằng $20°$.

Hướng dẫn giải (h.6.15)

9 đường thẳng cắt nhau tại O tạo thành 18 góc không có điểm trong chung.

Tổng của 18 góc này bằng $360°$ (*)

• Nếu tatá cả các góc đều nhỏ hơn $20°$ thì tổng của chúng nhỏ hơn $20°.18=360°$, mâu thuẫn với (*). Vậy tồn tại một góc lớn



Hình 6.15

hơn hoặc bằng $20°$.

• Nếu tất cả các góc đều lớn hơn $20°$ thì tổng của chúng lớn hơn $20°.18 = 360°$, mâu thuẫn với (*). Vậy tồn tại một góc nhỏ hơn hoặc bằng $20°$.

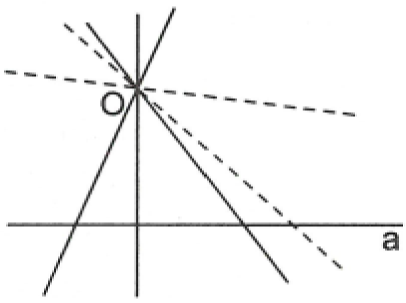
6.9. Qua điểm *O* ở ngoài đường thẳng *a* vẽ một số đường thẳng không phải tất cả đều cắt *a*. Những đường thẳng cắt *a* thì tạo với đường thẳng *a* được 78 tam giác chung đỉnh *O*. Chứng minh rằng trong số những đường thẳng đã vẽ qua *O* ít nhất cũng có hai đường thẳng cắt nhau theo một góc nhỏ hơn $13°$.

Hướng dẫn giải (h.6.16)

Gọi số đường thẳng vẽ qua *O* và cắt đường thẳng *a* là *n*. Số tam giác đỉnh *O* có cạnh đối diện nằm trên đường thẳng *a* được tính theo công thức $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Theo đề bài ta có $\dfrac{n(n-1)}{2} = 78$

$\Leftrightarrow n(n-1) = 156 = 13.12 \Rightarrow n = 13$.



Hình 6.16

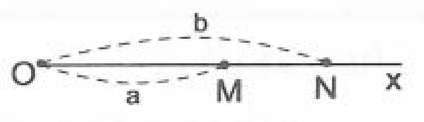
Vậy có 13 đường thẳng đi qua *O* và cắt đường thẳng *a*. Theo đề bài, qua *O* còn có đường thẳng không cắt *a*. Theo tiên đề Ơ-clít chỉ có một đường thẳng như thế. Vậy số đường thẳng đã vẽ qua *O* là 14.

14 đường thẳng này tạo nên 28 góc đỉnh *O* không có điểm trong chung và có tổng số đo bằng $360°$. (*)

Vậy ít nhất phải có một góc nhỏ hơn hoặc bằng $360° : 28 \approx 12°51' < 13°$ vì nếu không có góc nào nhỏ hơn $13°$ thì tổng của 28 góc này sẽ lớn hơn hoặc bằng $13°.28 = 364°$, mâu thuẫn với (*).

• Các dạng khác

6.10. Chứng minh định lí: Trên tia *Ox* có $OM = a, ON = b$. Nếu $a < b$ thì điểm *M* nằm giữa hai điểm *O* và *N*.



Hình 6.17

Hướng dẫn giải (h.6.17)

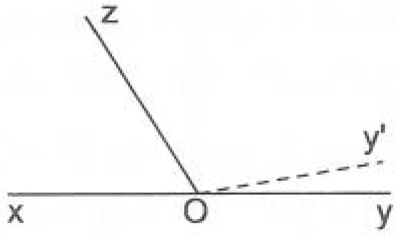
• Điểm *O* không nằm giữa hai điểm *M* và *N* (1) vì *M* và *N* nằm trên tia *Ox*.

• Giả sử điểm *N* nằm giữa hai điểm *O* và *M* thì $ON + NM = OM$ do đó $b + NM = a$.

Suy ra $NM = a - b < 0$ (vì $a < b$). Điều này vô lí vì $NM > 0$.

Vậy điều giả sử là sai, do đó điểm *N* không nằm giữa hai điểm *O* và *M*. (2)

Trong ba điểm *O, M, N* thẳng hàng phải có một điểm nằm giữa hai điểm còn lại nên từ (1) và (2) suy ra điểm *M* nằm giữa *O* và *N*.



Hình 6.18

6.11. Chứng minh rằng nếu hai tia *Ox* và *Oy* thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ chứa tia *Oz* sao cho $\widehat{zOx}+\widehat{zOy}=180^\circ$ thì hai tia *Ox, Oy* đối nhau.

Hướng dẫn giải (h.6.18)

Giả sử hai tia *Ox, Oy* không đối nhau.

Ta vẽ tia Oy' là tia đối của tia *Ox*.

Khi đó $\widehat{zOx}+\widehat{zOy'}=180^\circ$ (hai góc kề bù).

Mặt khác, $\widehat{zOx}+\widehat{zOy}=180^\circ$ (gt).

Suy ra $\widehat{zOy'}=\widehat{zOy}$ (cùng bù với $\widehat{zOx}$). Điều này vô lí vì trên cùng một nửa mặt phẳng bờ chứa tia *Oz* bao giờ cũng có một và chỉ một tia *Oy* sao cho $\widehat{zOy}=m^\circ$.

Vậy điều giả sử là sai, do đó hai tia *Ox, Oy* đối nhau.

6.12. Vẽ 9 đoạn thẳng trên mặt phẳng. Hỏi có thể xảy ra trường hợp mỗi đoạn thẳng cắt đúng 5 đoạn thẳng khác không?

Hướng dẫn giải

Không thể xảy ra trường hợp mỗi đoạn thẳng cắt đúng 5 đoạn thẳng khác. Ta chứng minh bằng phản chứng.

Giả sử mỗi đoạn thẳng cắt đúng 5 đoạn thẳng khác.

Như vậy với cả 9 đoạn thẳng ta được $9.5=45$ trường hợp hai đoạn thẳng cắt nhau. Nhưng như thế thì mỗi trường hợp đã được tính hai lần (vì đoạn thẳng *AB* cắt đoạn thẳng *CD* thì ngược lại, đoạn thẳng *CD* cắt đoạn thẳng *AB*) do đó thực sự chỉ có $\frac{45}{2}$ trường hợp hai đoạn thẳng cắt nhau. Vì $\frac{45}{2}\notin\mathbb{N}$ nên điều giả sử là sai.

Do đó không thể xảy ra trường hợp mỗi đoạn thẳng cắt đúng 5 đoạn thẳng khác.

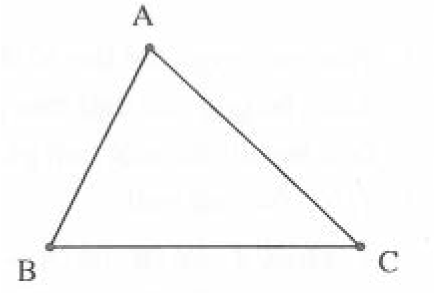
Chương II

TAM GIÁC

Chuyên đề 7. TỔNG BA GÓC CỦA MỘT TAM GIÁC

A. Kiến thức cần nhớ

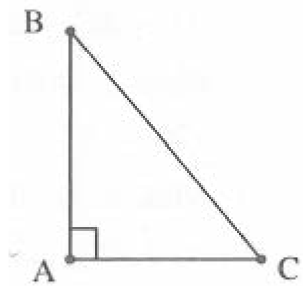
1. Tổng ba góc của một tam giác.



Tổng ba góc của một tam giác bằng $180°$.

$\Delta ABC \Rightarrow \widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180°$.

2. Áp dụng vào tam giác vuông

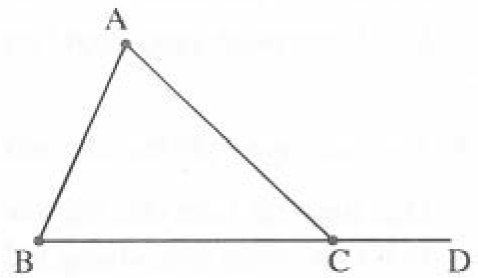


a) Định nghĩa: Tam giác vuông là tam giác có một góc vuông.

b) Tính chất: Trong tam giác vuông, hai góc nhọn phụ nhau.

$\begin{cases}\Delta ABC \\ \widehat{A}=90°\end{cases} \Rightarrow \widehat{B}+\widehat{C}=90°$.

3. Góc ngoài của tam giác



a) Định nghĩa: Góc ngoài của tam giác là góc kề bù với một góc của tam giác.

b) Tính chất:

* Mỗi góc ngoài của một tam giác bằng tổng của hai góc trong không kề với nó.

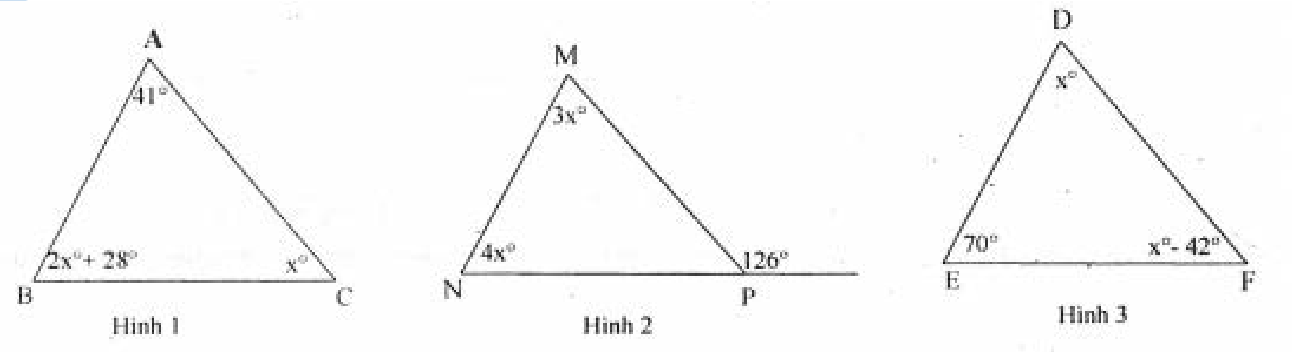
$\widehat{ACD}=\widehat{A}+\widehat{B}$

* Góc ngoài của tam giác lớn hơn mỗi góc trong không kề với nó.

$\widehat{ACD}>\widehat{A},\ \widehat{ACD}>\widehat{B}$

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Tìm x, trong hình vẽ bên:



Giải

* *Tìm cách giải.* Để tìm số đo x, chúng ta vận dụng:

- Tổng ba góc của một tam giác bằng $180°$.

- Góc ngoài của một tam giác bằng tổng hai góc trong không kề với nó.

* *Trình bày lời giải.*

+ ***Hình 1.*** ΔABC có $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180°$ (tính chất)

$$41°+2x°+28°=180° \Leftrightarrow x°=37°.$$

+ ***Hình 2.*** ΔMNP có $\widehat{MPx}=\widehat{M}+\widehat{N}$ (góc ngoài tam giác)

$$126°=3x°+4x° \Leftrightarrow x°=18°.$$

+ ***Hình 3.*** ΔDEF có $\widehat{D}+\widehat{E}+\widehat{F}=180°$ (tính chất)

$$x°+70°+x°-42°=180° \Leftrightarrow x°=76°.$$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC có $\widehat{A}=80°$, $\widehat{B}=60°$. Hai tia phân giác của góc B và C cắt nhau tại I. Vẽ tia phân giác ngoài tại đỉnh B cắt tia CI tại D. Chứng minh rằng $\widehat{BCD}=\widehat{C}$.

Giải

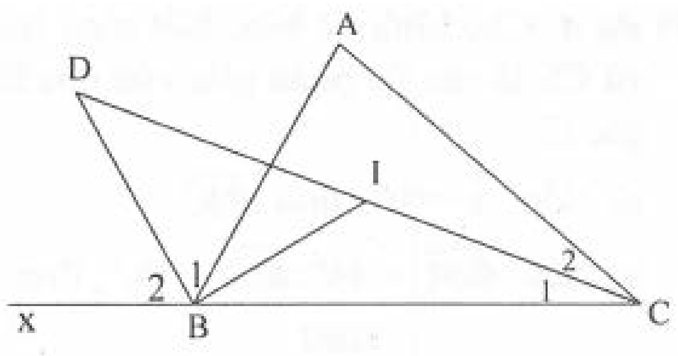
* *Tìm cách giải.* Đề bài cho số đo $\widehat{A}$; $\widehat{B}$ nên hiển nhiên tính được số đo $\widehat{C}$. Dựa theo kết luận của bài toán thì chúng ta chỉ cần tính số đo $\widehat{BDC}$. Khi tính toán số đo góc, chúng ta lưu ý giả thiết có yếu tố tia phân giác.

* *Trình bày lời giải.*

ΔABC có $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180°$ (tính chất)

$80°+60°+\widehat{C}=180°$; $\widehat{C}=40°$.

ΔABC có $\widehat{ABx}=\widehat{A}+\widehat{C}=120°$



$\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{B_2} = \frac{1}{2}\widehat{ABx} = 60°$

Ta có: $\widehat{C_1} = \widehat{C_2} = \frac{1}{2}\widehat{C} = 20°$.

ΔBCD có:

$\widehat{BDC} + \widehat{C_1} + \widehat{CBD} = 180°$

$\widehat{BDC} + 20° + 60° + 60° = 180° \Rightarrow \widehat{BDC} = 40°$

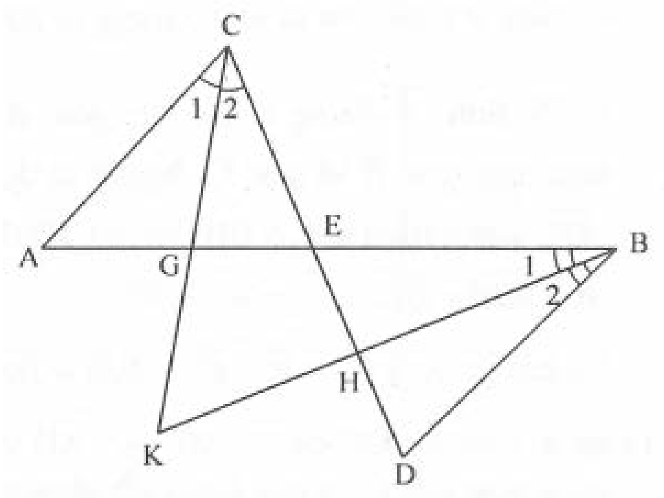
Do đó $\widehat{BDC} = \widehat{C}$.

Ví dụ 3: Cho hai đoạn thẳng AB và CD cắt nhau tại E. Các tia phân giác $\widehat{ACE}$; $\widehat{DBE}$ cắt nhau ở K. Chứng minh: $\widehat{BKC} = \frac{\widehat{BAC} + \widehat{BDC}}{2}$.

Giải

* *Tìm cách giải.* Chúng ta nhận thấy $\widehat{BKC}$ là góc của tam giác BKG; CKH nên cần phải ghép vào hai tam giác ấy. Khai thác yêu cầu của bài toán (liên quan tới góc $\widehat{A}$; $\widehat{C}$) đồng thời để vận dụng yếu tố tia phân giác của giả thiết, chúng ta cần xét các cặp tam giác ΔKGB, ΔAGC và cặp tam giác ΔKHC, ΔDHB.

* *Trình bày lời giải.*



Gọi G là giao điểm CK và AE và H là giao điểm BK và DE.

Xét ΔKGB và ΔAGC có:

$\widehat{KGB} = \widehat{AGC}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \widehat{K} + \widehat{B_1} = \widehat{A} + \widehat{C_1}$ (1)

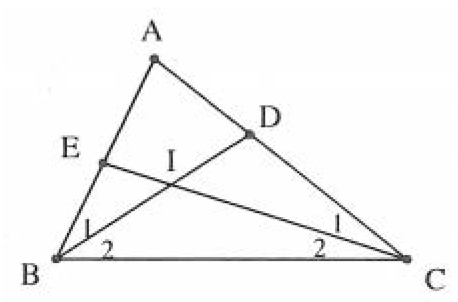
Xét ΔKHC và ΔDHB có:

$\widehat{KHC} = \widehat{BHD}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \widehat{K} + \widehat{C_2} = \widehat{D} + \widehat{B_2}$ (2)

Từ (1) và (2), kết hợp với $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$; $\widehat{C_1} = \widehat{C_2} \Rightarrow 2\widehat{K} = \widehat{A} + \widehat{D}$

$\Rightarrow \widehat{K} = \frac{\widehat{A} + \widehat{D}}{2}$.



Ví dụ 4: Cho hình vẽ bên, biết rằng BD và CE là các tia phân giác của góc *B*, góc *C*.

a) Nếu $\widehat{A}=80^\circ$, tính $\widehat{BIC}$.

b) Nếu $\widehat{BDC}=84^\circ$; $\widehat{BEC}=96^\circ$, tính $\widehat{A}$.

Giải

a) ΔABC có $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^\circ$ nên $\widehat{B}+\widehat{C}=100^\circ$.

$\widehat{B_2}+\widehat{C_2}=\frac{1}{2}.\widehat{B}+\frac{1}{2}.\widehat{C}$

$\widehat{B_2}+\widehat{C_2}=50^\circ$. ΔBIC có $\widehat{B_2}+\widehat{C_2}+\widehat{BIC}=180^\circ$ nên $\widehat{BIC}=130^\circ$.

b) ΔBDC có $\widehat{BDC}+\widehat{B_2}+\widehat{C}=180^\circ$ mà $\widehat{BDC}=84^\circ$ nên $\widehat{B_2}+\widehat{C}=96^\circ$.

ΔBEC có $\widehat{BEC}+\widehat{B}+\widehat{C_2}=180^\circ$ mà $\widehat{BEC}=96^\circ$ nên $\widehat{B}+\widehat{C_2}=84^\circ$.

Suy ra $\widehat{B_2}+\widehat{B}+\widehat{C_2}+\widehat{C}=96^\circ+84^\circ$

Do đó $\frac{3}{2}.\left(\widehat{B}+\widehat{C}\right)=180^\circ$

$\widehat{B}+\widehat{C}=120^\circ$ nên $\widehat{A}=60^\circ$.

Nhận xét:

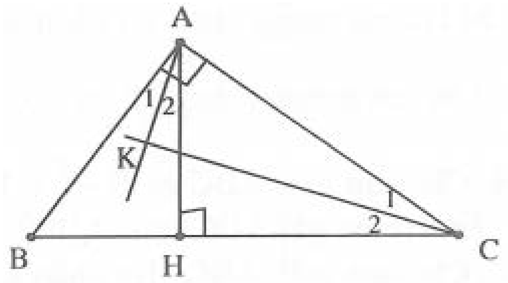
- Nếu $\widehat{A}\neq 80^\circ$ thì ta luôn chứng tỏ được $\widehat{BIC}=90^\circ+\frac{\widehat{A}}{2}$ $(*)$.

- Để tính $\widehat{A}$ chúng ta cần tìm góc $\widehat{B}+\widehat{C}$ hoặc $\widehat{B_2}+\widehat{C_2}$ mà không cần tính từng góc *B* và góc *C*. Ngoài ra dựa vào công thức (*) ta có thể tính $\widehat{BIC}$ bằng cách xét ΔBIE và ΔCID để tìm được:

$\widehat{B_1}+\widehat{EIB}+\widehat{DIC}+\widehat{C_1}=84^\circ+96^\circ$

Và lưu ý: $\widehat{B_1}+\widehat{C_1}=\widehat{B_2}+\widehat{C_2}=\widehat{EIB}=\widehat{DIC}$ ta tính $\widehat{EIB}$.

Ví dụ 4: Cho ΔABC có $\widehat{A}=90^\circ$. Kẻ *AH* vuông góc với $BC\left(H\in BC\right)$. Các tia phân giác góc *C* và góc *BAH* cắt nhau tại *K*. Chứng minh rằng $AK\perp CK$.



Giải

ΔABH; ΔABC vuông nên $\widehat{BAH}=\widehat{HCA}$ (cùng phụ với $\widehat{ABC}$).

Mặt khác $\widehat{A_1} = \frac{1}{2}.\widehat{BAH}$; $\widehat{C_1} = \frac{1}{2}\widehat{HAC}$ do đó $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$.

Ta có: $\widehat{A_1} + \widehat{KAC} = 90°$

$\Rightarrow \widehat{C_1} + \widehat{KAC} = 90°$

Suy ra ΔKAC vuông tại *K*.

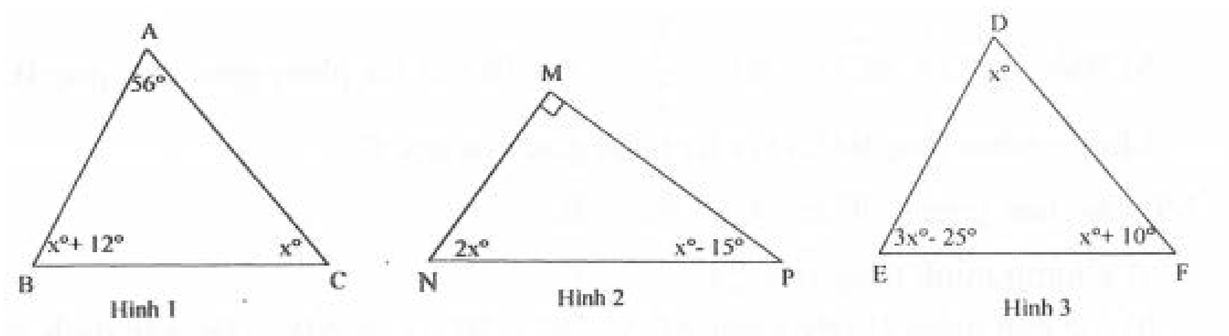
Vậy $AK \perp KC$.

**** Nhận xét:***

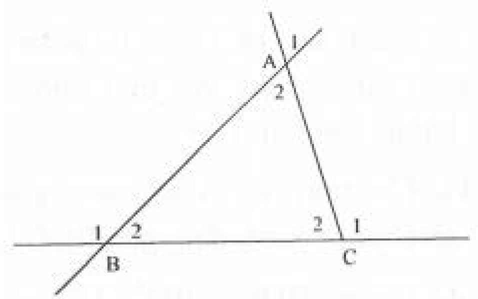
Qua bài ta nhận thấy có thêm một dấu hiệu nhận biết tam giác vuông là chứng minh tam giác có tổng hai góc bằng $90°$.

C. Bài tập vận dụng

7.1. Tìm *x*, trong các hình vẽ sau:



7.2. Cho hình vẽ bên. Biết rằng $\widehat{A_1} = 45°$; $\widehat{B_1} = 130°$. Tính $\widehat{C_1}$.



7.3. Các góc ngoài đỉnh *A*, *B*, *C* tỉ lệ với 2; 3; 4. Tính tỉ lệ ba góc trong của tam giác đó.

7.4. Cho tam giác *ABC* có $\hat{A} = 2.\hat{B}$ và $\hat{B} = 3.\hat{C}$.

a) Tính các góc *A*; *B*; *C*?

b) Gọi *E* là giao điểm của đường thẳng *AB* với tia phân giác của góc ngoài tại đỉnh *C*. Tính góc *AEC*?

7.5. Tam giác *ABC* có $\hat{B} > \hat{C}$. Tia phân giác $\widehat{BAC}$ cắt *BC* tại *D*.

a) Chứng minh $\widehat{ADC}-\widehat{ADB}=\widehat{B}-\widehat{C}$.

b) Đường thẳng chứa tia phân giác góc ngoài ở đỉnh *A* của tam giác *ABC* cắt đường thẳng *BC* tại *E*. Chứng minh rằng $\widehat{AEB}=\dfrac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2}$.

7.6. Cho tam giác *ABC* có $\widehat{B}-\widehat{C}=18^\circ$. Tia phân giác góc *A* cắt *BC* tại *D*. Tính số đó góc *ADC*? Góc *ADB*?

7.7. Cho tam giác *ABC*. Tia phân giác của góc *A* cắt cạnh *BC* tại *D*. Biết $\widehat{ADB}=85^\circ$.

a) Tính $\widehat{B}-\widehat{C}$.

b) Tính các góc của tam giác *ABC* nếu $4.\widehat{B}=5.\widehat{C}$.

7.8. Cho tam giác *ABC*, *O* là điểm nằm trong tam giác.

a) Chứng minh rằng $\widehat{BOC}=\widehat{A}+\widehat{ABO}+\widehat{ACO}$.

b) Biết $\widehat{ABO}+\widehat{ACO}=90^\circ-\dfrac{\widehat{A}}{2}$ và tia *BO* là tia phân giác của góc *B*. Chứng minh rằng tia *CO* là tia phân giác của góc *C*.

7.9. Cho tam giác *ABC* có $\widehat{A}=180^\circ-3\widehat{C}$.

a) Chứng minh rằng $\widehat{B}=2.\widehat{C}$.

b) Từ một điểm *D* trên cạnh *AC* vẽ $DE//BC\left(E\in AB\right)$. Hãy xác định vị trí của *D* cho tia *DE* là tia phân giác của góc $\widehat{ADB}$.

7.10. Chứng minh với mỗi tam giác bao giờ cũng tồn tại một góc ngoài không lớn hơn 120°.

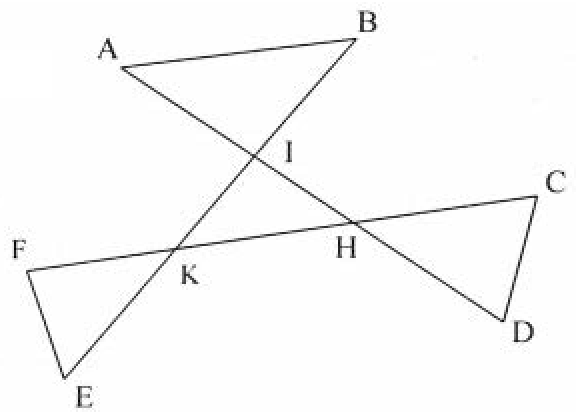
7.11. Cho tam giác *ABC* vuông góc tại *A*. Tia phân giác của $\widehat{C}$ cắt *AB* tại *D*.

a) Chứng minh rằng góc *BDC* là góc tù.

b) Giả sự $\widehat{BDC}=105^\circ$. Tính số đo góc *B*.

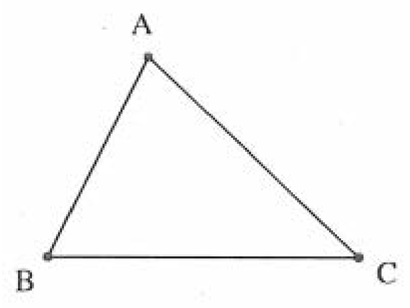
7.12. Cho hình vẽ bên.

Tính tổng $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}+\widehat{E}+\widehat{F}$



Hướng dẫn giải

7.1.



- ***Hình 1.*** ΔABC có $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^\circ$

$56^\circ + x^\circ + 12^\circ + x^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow x^\circ = 56^\circ$.

- ***Hình 2.*** ΔMNP vuông tại $M \Rightarrow \widehat{N}+\widehat{P}=90^\circ$

$2x^\circ + x^\circ - 15^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow x^\circ = 35^\circ$.

- ***Hình 3.*** ΔDEF có $\widehat{D}+\widehat{E}+\widehat{F}=180^\circ$

$x^\circ + 3x^\circ - 25^\circ + x^\circ + 10^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow x^\circ = 39^\circ$.

7.2. Ta có: $\widehat{A_2}=\widehat{A_1}=45^\circ$ (đối đỉnh).

Ta có $\widehat{B_2}+\widehat{B_1}=180^\circ \Rightarrow \widehat{B_2}=50^\circ$.

ΔABC có $\widehat{C_1}=\widehat{A_2}+\widehat{B_2}$ (góc ngoài của tam giác) suy ra: $\widehat{C_2}=95^\circ$.

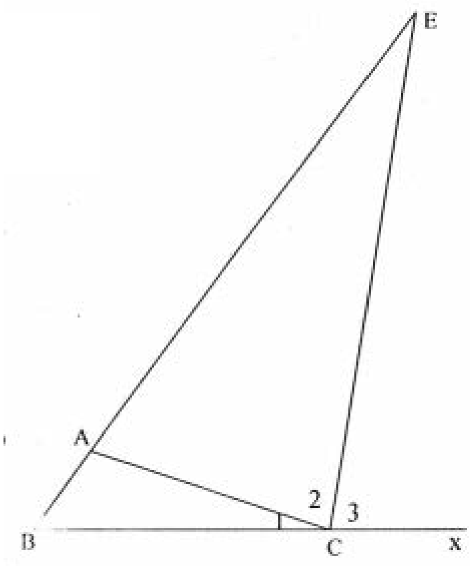
7.3. Đặt số đo góc ngoài đỉnh A; B; C lần lượt là x; y; z. Theo đầu bài, ta có: $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$ và $x+y+z=360^\circ$.

Giải ra, ta được: $x=80^\circ$; $y=120^\circ$; $z=160^\circ$.

Từ đó suy ra các góc trong đỉnh A; B; C tương ứng là $100^\circ, 60^\circ, 20^\circ$.

Do đó tỉ lệ ba góc trong là: $5:3:1$.

7.4.



a) Ta có $\widehat{A}=2.\widehat{B}$; $\widehat{B}=3.\widehat{C} \Rightarrow \widehat{A}=6\widehat{C}$.

ΔABC có $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^\circ \Rightarrow 6.\widehat{C}+3\widehat{C}+\widehat{C}=180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{C}=18^\circ$; $\widehat{B}=54^\circ$; $\widehat{A}=108^\circ$.

b) Ta có $\widehat{ACx}+\widehat{C_1}=180^\circ$ (hai góc kề bù)

$\widehat{ACx}+18^\circ=180^\circ \Rightarrow \widehat{ACx}=162^\circ$

Ta có: $\widehat{C_2}=\widehat{C_3}=\frac{1}{2}\widehat{ACx}=81^\circ$.

ΔBCE có $\widehat{E}+\widehat{B}+\widehat{BCE}=180^\circ$; $\widehat{E}+54^\circ+18^\circ+81^\circ=180^\circ \Rightarrow \widehat{E}=27^\circ$ hay $\widehat{AEC}=27^\circ$.

7.5.

a) ΔABD có $\widehat{A_1}+\widehat{B}+\widehat{ADB}=180°$;

ΔACD có $\widehat{A_2}+\widehat{C}+\widehat{ADC}=180°$;

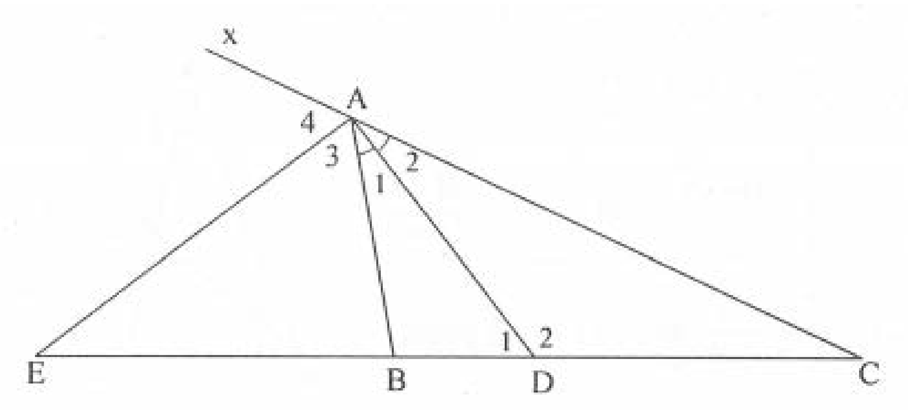
Mà $\widehat{A_1}=\widehat{A_2}$ nên $\widehat{C}+\widehat{ADC}=\widehat{B}+\widehat{ADB}\Rightarrow \widehat{ADC}-\widehat{ADB}=\widehat{B}-\widehat{C}$.

b) ΔABC có $\widehat{BAx}=\widehat{B}+\widehat{C}$ (góc ngoài tam giác)

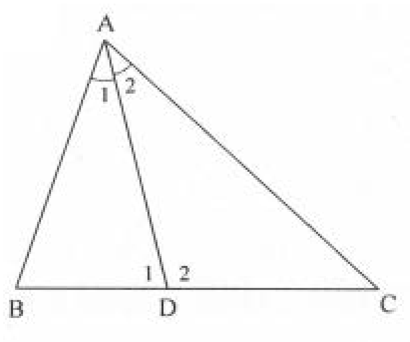
$\Rightarrow \widehat{A_3}=\widehat{A_4}=\dfrac{1}{2}\widehat{BAX}=\dfrac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2}$

ΔACE có: $\widehat{A_4}=\widehat{E}+\widehat{C}$ (góc ngoài)

$\Rightarrow \widehat{E}=\widehat{A_4}-\widehat{C}\Rightarrow \widehat{AEB}=\dfrac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2}-\widehat{C}$ hay $\widehat{AEB}=\dfrac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2}$.



7.6. ΔACD có $\widehat{D_2}=\widehat{B}+\widehat{A_1}$ (góc ngoài tam giác)



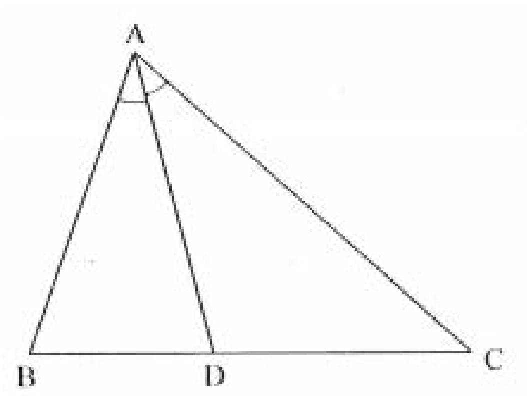
ΔABD có $\widehat{D_1}=\widehat{C}+\widehat{A_2}$ (góc ngoài tam giác) mà $\widehat{A_1}=\widehat{A_2}$

nên $\widehat{D_2}-\widehat{D_1}=\widehat{B}-\widehat{C}$

$\Rightarrow \widehat{D_2}-\widehat{D_1}=18°$ mà $\widehat{D_2}+\widehat{D_1}=180°$

nên $\widehat{D_2}=\dfrac{180°+18°}{2}=99°$; $\widehat{D_1}=\dfrac{180°-18°}{2}=81°$.

7.7.



a) Ta có $\widehat{ADB}=85°\Rightarrow \widehat{ADC}=95°$.

ΔABD có $\widehat{A_1}+\widehat{B}+\widehat{ADB}=180°$;

ΔACD có $\widehat{A_2}+\widehat{C}+\widehat{ADC}=180°$;

Mà $\widehat{A_1}=\widehat{A_2}$ nên $\widehat{C}+\widehat{ADC}=\widehat{B}+\widehat{ADB}$

$\Rightarrow \widehat{ADC} - \widehat{ADB} = \widehat{B} - \widehat{C}$.

Vậy $\widehat{B} - \widehat{C} = 95° - 85° = 10°$.

b) $4.\widehat{B} = 5.\widehat{C} \Rightarrow \dfrac{\widehat{B}}{5} = \dfrac{\widehat{C}}{4}$.

Áp dụng tính chất dãy tỷ số bằng nhau, ta có: $\dfrac{\widehat{B}}{5} = \dfrac{\widehat{C}}{4} = \dfrac{\widehat{B} - \widehat{C}}{5-4} = \dfrac{10°}{1} = 10°$.

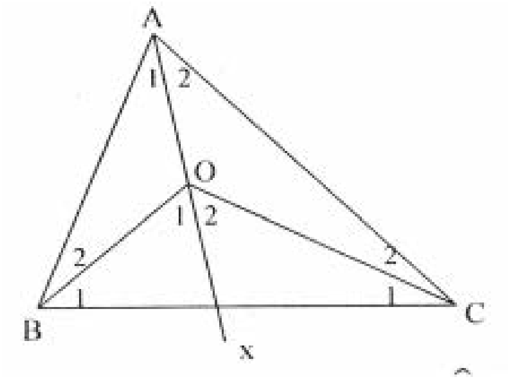
Suy ra: $\widehat{B} = 50°$; $\widehat{C} = 40°$.

7.8.

a) ΔABO có $\widehat{O_1} = \widehat{A_1} + \widehat{ABO}$ (góc ngoài tam giác).

ΔACO có $\widehat{O_2} = \widehat{A_2} + \widehat{ACO}$ (góc ngoài tam giác).

$\Rightarrow \widehat{O_1} + \widehat{O_2} = \widehat{A_1} + \widehat{A_2} + \widehat{ABO} + \widehat{ACO}$ Hay
$\widehat{BOC} = \widehat{A} + \widehat{ABO} + \widehat{ACO}$.



b) Từ $\widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 90° - \dfrac{\widehat{A}}{2}$

$\Rightarrow \widehat{B_2} + \widehat{C_2} = \dfrac{180° - \widehat{A}}{2} \Rightarrow \widehat{B_2} + \widehat{C_2} = \dfrac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2}$

$\Rightarrow \widehat{B_2} + \widehat{C_2} = \dfrac{\widehat{B}}{2} + \dfrac{\widehat{C}}{2}$ mà BO là tia phân giác của $\widehat{B}$ nên

$\widehat{B_1} = \dfrac{\widehat{B}}{2}$ suy ra $\widehat{C_2} = \dfrac{\widehat{C}}{2}$; hay CO là tia phân giác của góc $\widehat{C}$.

7.9.

a) Từ: $\widehat{A} = 180° - 3.\widehat{C} \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - 3.\widehat{C}$ suy ra $\widehat{B} = 2.\widehat{C}$

b) $DE \,//\, BC \Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{C}$ (góc đồng vị) và $\widehat{EDB} = \widehat{DBC}$ (góc so le trong).

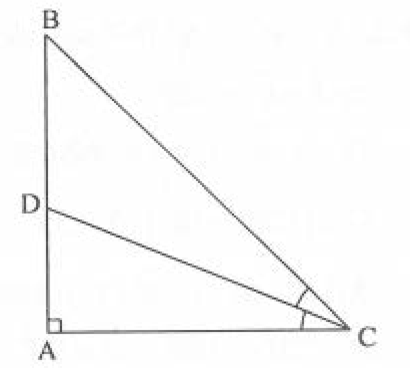
Tia DE là tia phân giác của $\widehat{ADB} \Leftrightarrow \widehat{ADE} = \widehat{EDB} \Leftrightarrow \widehat{C} = \widehat{DBC}$ mà $\widehat{C} = \dfrac{1}{2}\widehat{B}$ nên $\widehat{DBC} = \dfrac{1}{2}\widehat{B} \Leftrightarrow$

BD là tia phân giác của $\widehat{ABC}$.

Vậy khi D là giao điểm của tia phân giác $\widehat{B}$ và AC thì DE là tia phân giác của $\widehat{ADB}$.

7.10. Giả sử cả ba góc ngoài ở ba đỉnh đều lớn hơn $120°$ suy ra mỗi góc trong đều nhỏ hơn $60°$

Vậy tổng ba góc trong của tam giác nhỏ hơn $180°$, vô lí. Do đó tồn tại một góc ngoài có số đo không lớn hơn $120°$.



7.11.

a) Góc BDC là góc ngoài tại đỉnh D của tam giác ACD nên $\widehat{BDC} > \widehat{A} = 90°$; $90° < \widehat{BDC} < 180° \Rightarrow \widehat{BDC}$ là góc tù.

b) $\widehat{BDC} = \widehat{A} + \widehat{ACD}$ (góc ngoài tam giác)

$\Rightarrow \widehat{ACD} = 15° \Rightarrow \widehat{ACB} = 30° \Rightarrow \widehat{B} = 60°$.

7.12. Xét ΔABI có $\widehat{A} + \widehat{B} = 180° - \widehat{AIB}$.

Xét ΔCDH có $\widehat{C} + \widehat{D} = 180° - \widehat{CHD}$.

Xét ΔEFK có $\widehat{E} + \widehat{F} = 180° - \widehat{EKF}$.

Suy ra: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} + \widehat{E} + \widehat{F} = 540° - \left(\widehat{AIB} + \widehat{CHD} + \widehat{EKF}\right)$

$= 540° - \left(\widehat{KIH} + \widehat{IHK} + \widehat{IKH}\right) = 540° - 180° = 360°$.

Chương II

TAM GIÁC

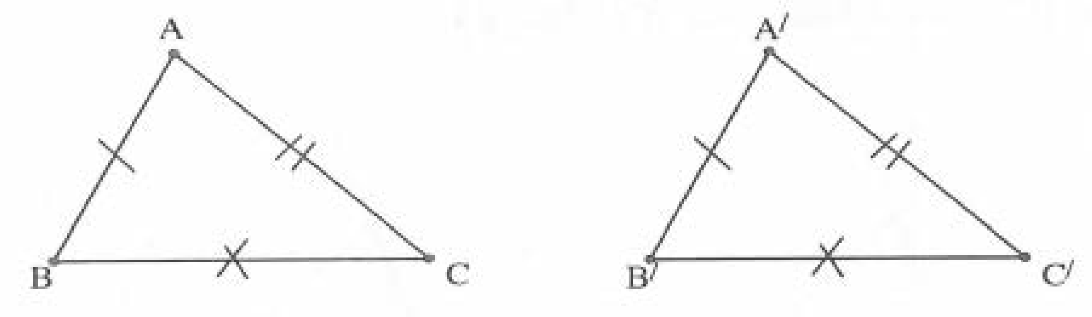
Chuyên đề 8. HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU.

CÁC TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CỦA HAI TAM GIÁC

A. Kiến thức cần nhớ

1. Định nghĩa. Hai tam giác bằng nhau là hai tam giác có các cạnh tương ứng bằng nhau, các góc tương ứng bằng nhau.

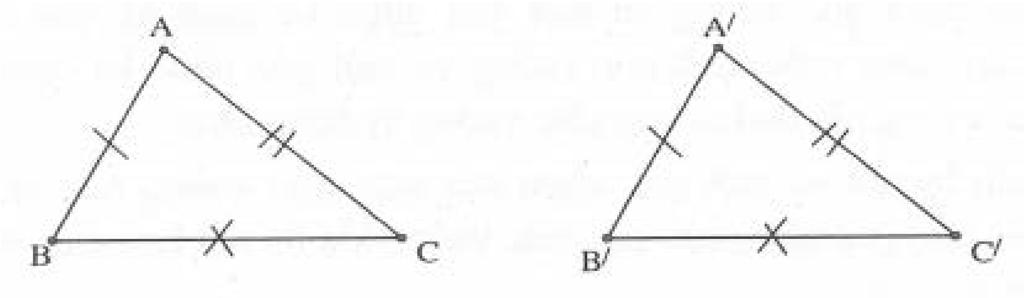
$$\Delta ABC = \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{A} = \widehat{A'} \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \\ \widehat{C} = \widehat{C'} \\ AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{cases}$$



2. Các trường hợp bằng nhau của hai tam giác

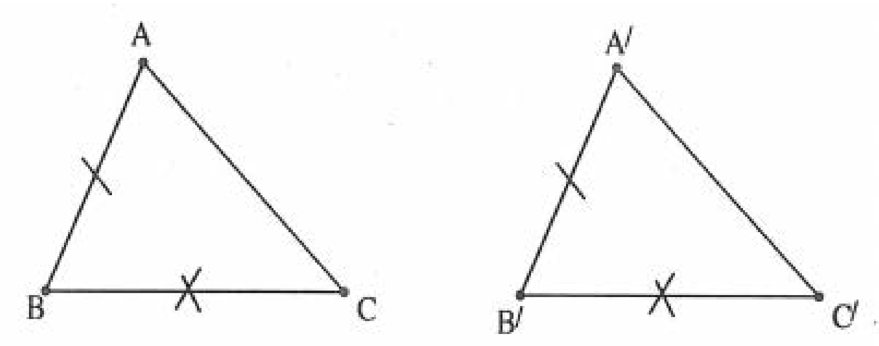
• Nếu ba cạnh của tam giác này bằng ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

$$\left.\begin{array}{l} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C' (\text{c.c.c})$$



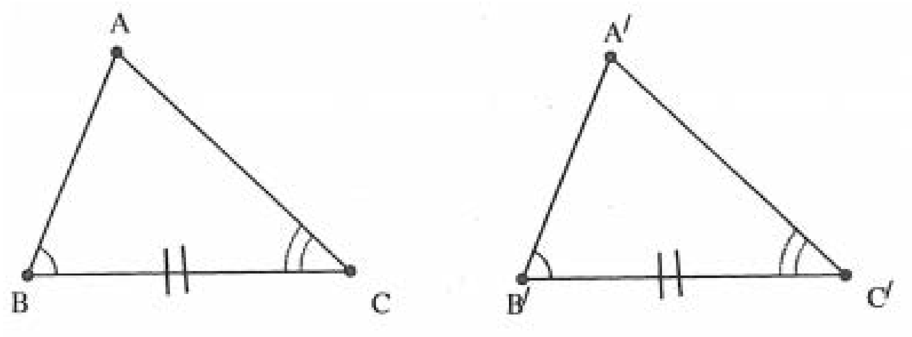
• Nếu hai cạnh và góc xen giữa của tam giác này bằng hai cạnh và góc xen giữa của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

$$\left.\begin{array}{l} AB = A'B' \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \\ BC = B'C' \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C' (\text{c.g.c})$$



• Nếu một cạnh và hai góc kề của tam giác này bằng một cạnh và hai góc kề của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{B}=\widehat{B'}\\ BC=B'C'\\ \widehat{C}=\widehat{C'}\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta ABC=\Delta A'B'C'(\text{g.c.g})$$



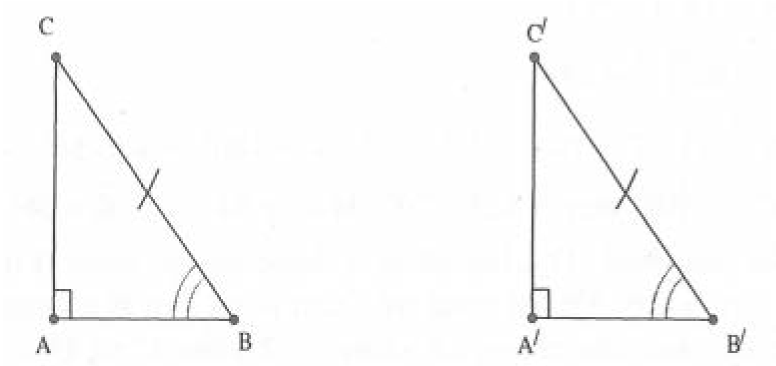
2. Hệ quả.

• Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

• Nếu một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông này bằng một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông ấy bằng nhau.

• Nếu cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{A}=\widehat{A'}=90^\circ\\ BC=B'C'\\ \widehat{B}=\widehat{B'}\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta ABC=\Delta A'B'C' \text{ (cạnh huyền – góc nhọn)}$$



B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho $\Delta ABC=\Delta MNP$.

a) Viết kí hiệu về sự bằng nhau của hai tam giác đó với ba cách khác.

b) Cho $AB=5\text{cm}$; $AC=6\text{cm}$; $NP=7\text{cm}$. Tính chu vi mỗi tam giác? Hãy nêu nhận xét?

Giải

* *Tìm cách giải.* Khi viết hai tam giác bằng nhau thì các đỉnh tương ứng phải viết theo cùng một thứ tự. Viết như vậy, thì việc suy ra các cặp cạnh tương ứng bằng nhau mới chính xác.

* *Trình bày lời giải.*

a) $\Delta ACB = \Delta MPN$; $\Delta CBA = \Delta PNM$; $\Delta BAC = \Delta NMP$.

b) $\Delta ABC = \Delta MNP$ suy ra $AB = MN = 5\text{cm}$; $AC = MP = 6\text{cm}$; $BC = NP = 7\text{cm}$.

Chu vị ΔABC bằng: $AB + AC + BC = 5 + 6 + 7 = 18(\text{cm})$.

Chu vi ΔMNP bằng: $MN + MP + NP = 5 + 6 + 7 = 18(\text{cm})$.

* *Nhận xét.* Hai tam giác bằng nhau thì có chu vi bằng nhau.

Ví dụ 2: Cho $\Delta ABC = \Delta HIK$, biết $\widehat{A} + \widehat{B} = 124°$; $\widehat{H} - \hat{I} = 16°$. Tính các góc của mỗi tam giác.

Giải

* *Tìm cách giải.* Bài toán yêu cầu tính số đo góc của tam giác nên từ $\Delta ABC = \Delta HIK$, chúng ta chỉ quan tâm tới cặp góc tương ứng bằng nhau.

* *Trình bày lời giải.*

$\Delta ABC = \Delta HIK \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{H};\ \widehat{B} = \hat{I};\ \widehat{C} = \widehat{K}$ (cặp góc tương ứng).

Vì $\widehat{A} + \widehat{B} = 124° \Rightarrow \widehat{H} + \hat{I} = 124°$; mà $\widehat{H} - \hat{I} = 16°$, nên

$\widehat{H} = (124° + 16°) : 2 = 70°$;

$\hat{I} = (124° - 16°) : 2 = 54°$.

ΔHIK có $\widehat{H} + \hat{I} + \widehat{K} = 180°$; $70° + 54° + \widehat{K} = 180° \Rightarrow \widehat{K} = 56°$.

Vì $\Delta ABC = \Delta HIK$ nên $\widehat{A} = \widehat{H} = 70°;\ \widehat{B} = \hat{I} = 54°;\ \widehat{C} = \widehat{K} = 56°$.

Ví dụ 3: Cho góc nhọn xOy . Lấy điểm *A* thuộc tia *Ox*, điểm *B* thuộc tia *Oy* sao cho $OA = OB$. Vẽ hai cung tròn tâm *A* và tâm *B* có cùng bán kính nhỏ hơn *OA* sao cho chúng cắt nhau tại 2 điểm *C* và *D*. Chứng minh rằng:

a) $\Delta AOC = \Delta BOC$.

b) Ba điểm *O*, *C*, *D* thẳng hàng.

Giải

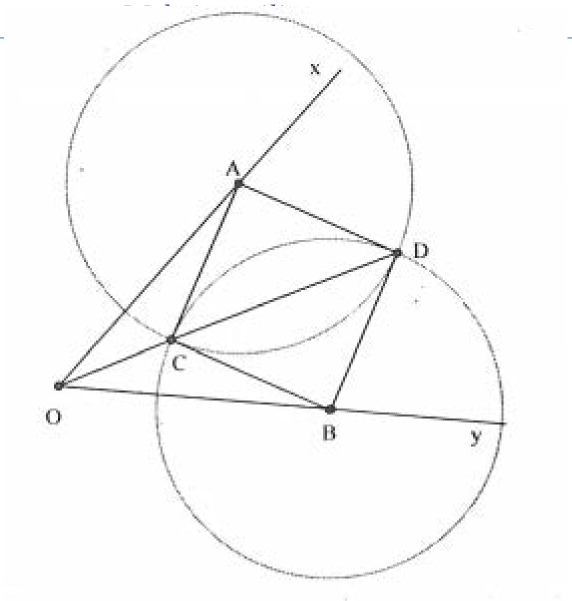
a) Xét ΔOAC và ΔOBC có: $OA = OB$ (giả thiết), $AC = BC$ (bán kính bằng nhau), *OC* cạnh chung.

$\Rightarrow \Delta OAC = \Delta OBC(\text{c.c.c})$.

b) $\Delta OAC = \Delta OBC$ (c.c.c) nên $\widehat{AOC} = \widehat{BOC}$

tương tự: $\Delta OAD = \Delta OBD$ (c.c.c) nên $\widehat{AOD} = \widehat{BOD}$.

Nên C, D cùng thuộc tia phân giác góc xOy hay O, C, D thẳng hàng.



*** Nhận xét.**

• Khi chứng minh hai tam giác bằng nhau bạn nên chú ý cạnh chung.

• Muốn chứng minh ba điểm thẳng hàng, ta có thể chứng minh ba điểm đó cùng nằm trên tia phân giác của một góc.

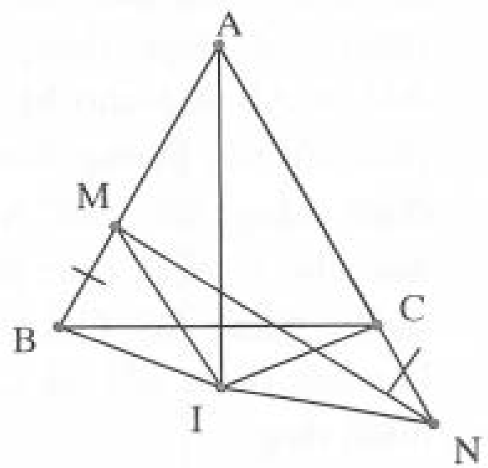
Ví dụ 4: Cho ΔABC có $AB = AC$. Lấy M thuộc cạnh AB; lấy N thuộc tia đối của tia CA sao cho $CN = BM$. Gọi I là một điểm sao cho $IB = IC$; $IM = IN$. Chứng minh rằng: $IC \perp AN$.

Giải

Ta có $\Delta ABI = \Delta ACI$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{ACI} = \widehat{ABI}$.

$\Delta MBI = \Delta NCI$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{NCI} = \widehat{ABI}$.

Suy ra $\widehat{ACI} = \widehat{NCI}$, mà đó là hai góc kề bù nên $\widehat{ACI} = \widehat{NCI} = 90°$, hay $IC \perp AN$.



*** Nhận xét.**

Đây là bài toán khó. Để chứng minh $IC \perp AN$ chúng ta suy nghĩ và chứng minh $\widehat{ICA} = \widehat{ICN}$ là điều cần thiết. Sau đó, chúng ta hãy tìm các cặp tam giác bằng nhau mà trong các tam giác ấy có chứa $\widehat{ICA}$ hoặc $\widehat{ICN}$.

Ví dụ 5: Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 90°$. Kẻ tia phân giác góc $\widehat{B}$ cắt AC tại D. Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $BM = BA$.

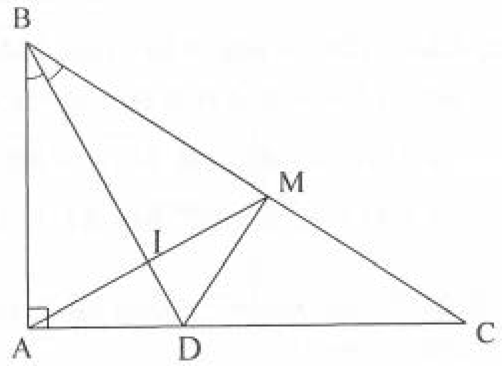
a) Chứng minh rằng $DM \perp BC$.

b) Chứng minh rằng $AM \perp BD$.

c) Nếu biết $\widehat{AMD} = 36°$. Tính số đo $\widehat{B}$; $\widehat{C}$ của ΔABC.

Giải

a) ΔABD và ΔMBD có $BA = BM$; $\widehat{ABD} = \widehat{MBD}$; BD là



cạnh chung $\Rightarrow \Delta ABD = \Delta MBD$ (c.g.c).

$\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{BMD} \Rightarrow \widehat{BMD} = 90^\circ$

$\Rightarrow DM \perp BC$.

b) Gọi I là giao điểm của AM và BD.

Xét ΔABI và ΔMBI có $AB = MB$; $\widehat{ABI} = \widehat{MBI}$; BI là cạnh chung

$\Rightarrow \Delta ABI = \Delta MBI$ (c.g.c)

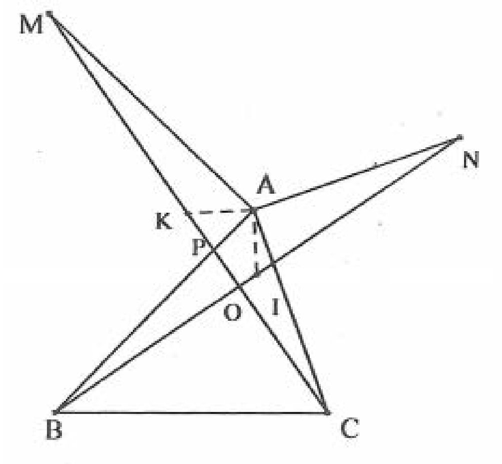
$\Rightarrow \widehat{AIB} = \widehat{MIB}$ mà $\widehat{AIB} + \widehat{MIB} = 180^\circ$ nên $\widehat{AIB} = \widehat{MIB} = 90^\circ$, suy ra: $AM \perp BD$.

c) $\widehat{AMD} = 36^\circ$ nên $\widehat{IMB} = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ$;

ΔBIM vuông nên $\widehat{IBM} = 90^\circ - 54^\circ = 36^\circ$.

Suy ra $\widehat{B} = 36^\circ.2 = 72^\circ$ do đó $\widehat{C} = 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$.

Ví dụ 6: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Vẽ đoạn thẳng $AM \perp AB$; $AM = AB$ sao cho M và C khác phía đối với đường thẳng AB. Vẽ đoạn thẳng $AN \perp AC$ và $AN = AC$ sao cho N và B khác phía đối với đường thẳng AC. Gọi I, K lần lượt là trung điểm BN và CM. Chứng minh rằng:



a) $\Delta AMC = \Delta ABN$;

b) $MC = BN$ và $MC \perp BN$;

c) $AI = AK$ và $AI \perp AK$.

Giải

a) $\widehat{MAC} = \widehat{BAN}\left(= 90^\circ + \widehat{BAC}\right)$ nên $\Delta MAC = \Delta BAN$ (c.g.c).

b) $\Delta MAC = \Delta BAN \Rightarrow BN = CM$. Và $\widehat{AMC} = \widehat{ABN}$.

Gọi P là giao điềm của AB và CM

Ta có: $\widehat{AMC} + \widehat{APM} = 90^\circ$ (vì ΔAMP vuông)

$\Rightarrow \widehat{ABN} + \widehat{BPO} = 90^\circ \Rightarrow BN \perp CM$.

c) $CM = BN \Rightarrow MK = BI$, mà $\widehat{AMK} = \widehat{ABN}$; $AM = AB$

nên $\Delta AMK = \Delta ABI$ (c.g.c) $\Rightarrow AK = AI$.

$\Rightarrow \widehat{MAK} = \widehat{BAI}$; mà $\widehat{MAK} + \widehat{KAB} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{BAI}+\widehat{KAB}=90^\circ$ hay $AI\perp AK$.

Ví dụ 7: Cho ΔABC vuông tại A có $BC=2.AB$. Tia phân giác của góc $\widehat{B}$ cắt AC tại D.

a) Chứng minh rằng $BD=CD$.

b) Tính góc $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ của tam giác ABC.

Giải

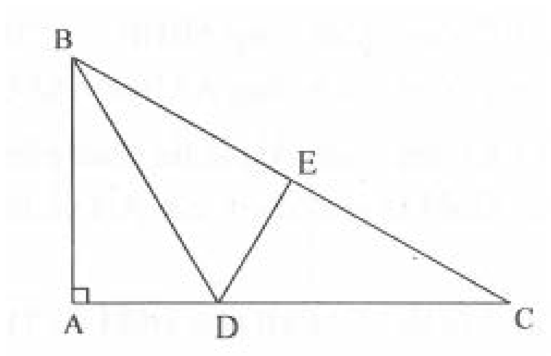
a) Gọi E là trung điểm của BC. Suy ra $BE=CE=AB\left(=\frac{1}{2}BC\right)$

ΔABD và ΔEBD có $BA=BE$; $\widehat{ABD}=\widehat{EBD}$ (giả thiết); BD là cạnh chung

$\Rightarrow \Delta ABD=\Delta EBD\,(\text{c.g.c})\Rightarrow \widehat{BAD}=\widehat{BED}\Rightarrow \widehat{BED}=90^\circ$.

Xét ΔBDE và ΔCDE có: $\widehat{BED}=\widehat{CED}=90^\circ$; $BE=CE$; DE chung

$\Rightarrow \Delta BDE=\Delta CDE\,(\text{c.g.c})$



$\Rightarrow BD=CD$

b) $\Delta BDE=\Delta CDE\,(\text{c.g.c})\Rightarrow \widehat{C}=\widehat{DBE}$

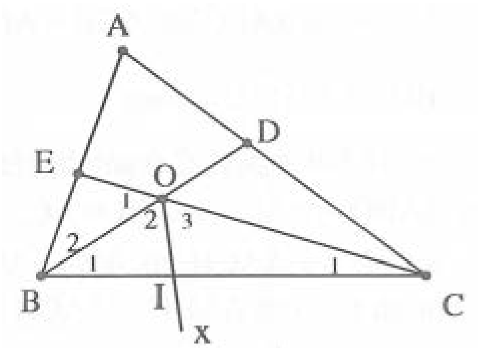
$\Rightarrow \widehat{B}=2.\widehat{C}$

Mặt khác: $\widehat{B}+\widehat{C}=90^\circ$ (Vì ΔABC vuông tại A)

$\Rightarrow 2\widehat{C}+\widehat{C}=90^\circ\Rightarrow \widehat{C}=30^\circ;\ \widehat{B}=60^\circ$.

Ví dụ 8: Cho tam giác ABC có $\widehat{A}=60^\circ$. Các tia phân giác góc B, góc C cắt nhau tại O và cắt AC; AB theo thứ tự D; E. Chứng minh rằng: $OD=OE$.

Giải



ΔABC có $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^\circ$

Mà $\widehat{A}=60^\circ$ nên $\widehat{B}+\widehat{C}=120^\circ$.

Ta có $\widehat{B_1}+\widehat{C_1}=\frac{1}{2}.\widehat{B}+\frac{1}{2}.\widehat{C}=60^\circ$.

ΔBOC có $\widehat{BOC}+\widehat{B_1}+\widehat{C_1}=180^\circ$

Nên $\widehat{BOC}=120^\circ$; $\widehat{O_1}=60^\circ$.

- Kẻ Ox là tia phân giác góc $\widehat{BOC}$, cắt BC tại I nên $\widehat{O_2}=\widehat{O_3}=60^\circ$.

Xét ΔBEO và ΔBIO có $\widehat{B_1}=\widehat{B_2}$ (giả thiết); $\widehat{O_1}=\widehat{O_2}\,(=60^\circ)$; BO là cạnh chung do đó $\Delta BEO = \Delta BIO$ (g.c.g). Suy ra $OE = OI$.

- Chứng minh tương tự ta có $\Delta COD = \Delta COI$ nên $OD = OI$.

Vậy $OE = OD (= OI)$.

**** Nhận xét.***

- Để chứng minh $OE = OD$, ta chưa thể ghép chúng vào hai tam giác nào bằng nhau được. Do vậy, ta nghĩ đến cách kẻ đường phụ. Cho số đo góc *A* ta liên hệ với bài đã biết nên tính được số đo góc *BOC* và góc *BOE* nên dựng được điểm *I*.

- Bài toán còn có cách khác, là lấy điểm *I* trên *BC* sao cho $BI = BE$, sau đó chứng minh $\Delta BOE = \Delta BOI$ rồi chứng minh $\Delta COD = \Delta COI$.

- Từ cách trên ta còn suy ra kết quả đẹp là $BE + CD = BC$.

Ví dụ 9: Cho tam giác *ABC*. Từ *B* kẻ $BD \perp AC$; $CE \perp AB$. Gọi *H* là giao điểm của *BD* và *CE*. Biết rằng $HD = HE$.

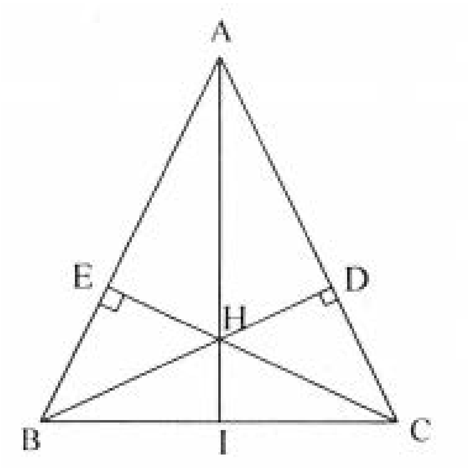
a) Chứng minh rằng $\Delta BHE = \Delta CHD$;

b) Chứng minh rằng $\Delta ABD = \Delta ACE$;

c) Chứng minh *AH* là tia phân giác của $\widehat{BAC}$.

d) Gọi *I* là giao điểm của *AH* và *BC*. Chứng minh rằng $AI \perp BC$.

Giải



a) ΔBHE và ΔCHD có $\widehat{BEH} = \widehat{CDH} (= 90°)$; $HD = HE$;
$\widehat{BHE} = \widehat{CHD}$

$\Rightarrow \Delta BHE = \Delta CHD$ (g.c.g).

b) $\Delta BHE = \Delta CHD \Rightarrow BH = CH$; mà $HD = HE$

$\Rightarrow BD = CE$.

ΔADB và ΔAEC có $\widehat{ADB} = \widehat{AEC} (= 90°)$; $BD = CE$; $\widehat{BAC}$ chung

$\Rightarrow \Delta ADB = \Delta AEC$ (cạnh huyền – góc nhọn).

c) $\Delta ABD = \Delta ACE \Rightarrow AB = AC$.

ΔABH và ΔACH có $AB = AC$; *AH* là cạnh chung; $BH = CH$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta ABH = \Delta ACH$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{BAH} = \widehat{CAH} \Rightarrow AH$ là tia phân giác của $\widehat{BAC}$.

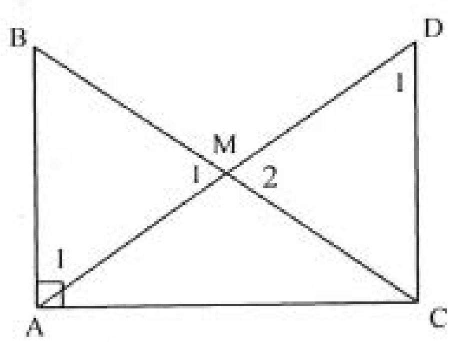
d) ΔABI và ΔACI có $AB = AC$; $\widehat{BAI} = \widehat{CAI}$; AI là cạnh chung

$\Rightarrow \Delta ABI = \Delta ACI\,(\text{c.g.c})$

$\Rightarrow \widehat{AIB} = \widehat{AIC}$; mà $\widehat{AIB} + \widehat{AIC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AIB} = \widehat{AIC} = 90^\circ$ hay $AI \perp BC$.

Ví dụ 10: Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng $AM = \frac{1}{2}BC$.

Giải



* *Tìm cách giải.* Để chứng minh $AM = \frac{1}{2}BC$ ta cần chứng minh $BC = 2.AM$. Về mặt suy luận, ta cần dựng một đoạn thẳng bằng $2.AM$ rồi chứng minh đoạn thẳng đó bằng BC.

* *Trình bày lời giải.*

Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $MD = MA$. Suy ra $AD = 2.AM$

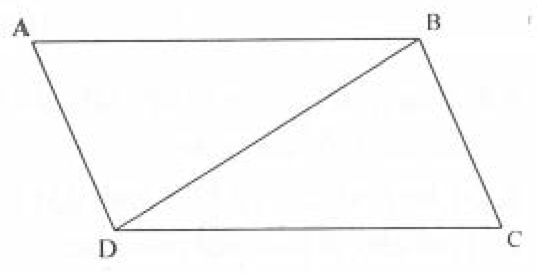
ΔAMB và ΔDMC có $AM = MD$; $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$; $MB = MC$ nên $\Delta AMB = \Delta DMC$.

Suy ra $AB = DC$; $\widehat{A_1} = \widehat{D_1}$ nên $AB // CD \Rightarrow DC \perp AC$.

ΔABC và ΔCDA có $AB = DC$; $\widehat{BAC} = \widehat{DCA} = (90^\circ)$, AC chung suy ra $\Delta ABC = \Delta CDA(\text{c.g.c})$

$\Rightarrow BC = DA \Rightarrow BC = 2.AM$ hay $AM = \frac{1}{2}BC$.

* *Nhận xét.* Bài này là một tính chất thú vị của tam giác vuông, thường được sử dụng trong những bài nối trung điểm của cạnh huyền với đỉnh góc vuông.



Ví dụ 11: Cho hình vẽ bên.

Biết rằng $AB // CD$; $AD // BC$.

Chứng minh rằng: $AB = CD$, $AD = BC$.

Giải

$AB // CD \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{CDB}$ (cặp so le trong)

$AD // BC \Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{CBD}$ (cặp so le trong)

ΔABD và ΔCDB có $\widehat{ABD} = \widehat{CDB}$, BD là cạnh chung, $\widehat{ADB} = \widehat{CBD}$.

Suy ra $\Delta ABD = \Delta CDB(\text{g.c.g}) \Rightarrow AB = CD,\ AD = BC$.

*** Nhận xét.** Đây là một tính chất thú vị, gọi là tính chất đoạn chắn song song. Tính chất này được vận dụng trong nhiều bài tập, đem lại hiệu quả cao.

C. Bài tập vận dụng

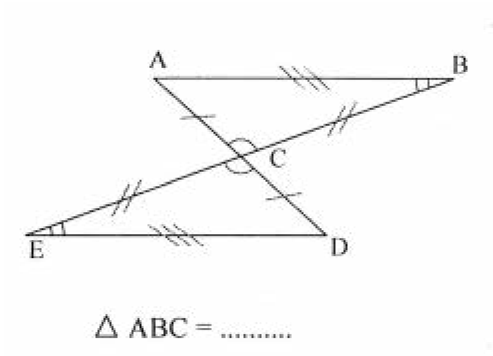
• ***Định nghĩa tam giác bằng nhau***

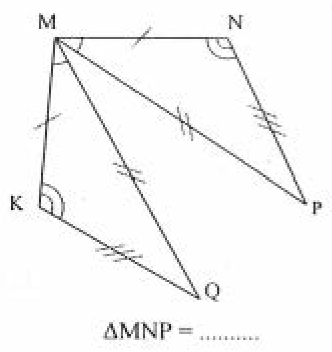
8.1. Điền vào chỗ trống (……) trong các phát biểu sau:

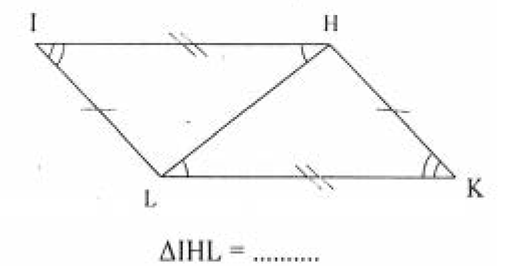
a) Nếu $\Delta ABC = \Delta MNP$ thì $AB = ...$; $...... = MP$; $BC = ...$

b) Nếu $\Delta IHK = \Delta DEF$ thì $\hat{I} = ...$; $...... = \widehat{F}$; $\widehat{H} = ...$

8.2. Điền vào ô trống:







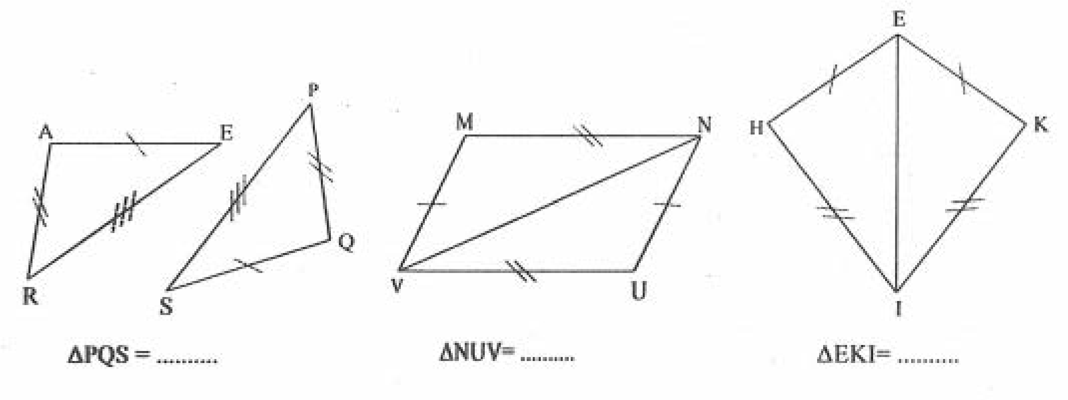
8.3. Cho $\Delta ABC = \Delta MNP$ biết $\widehat{B} - \widehat{C} = 10°$; $\widehat{N} + \widehat{P} = 120°$. Tính số đo các góc của mỗi tam giác.

8.4. Cho $\Delta ABC = \Delta MNP$. Biết $AB + AC = 9\text{cm}$; $MN - NP = 3\text{cm}$; $NP = 5\text{cm}$. Tính chu vi của mỗi tam giác.

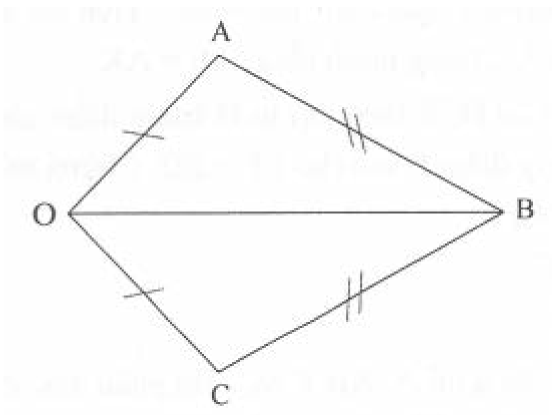
8.5. Cho $\Delta ABC = \Delta RST$, biết $\frac{BC}{5} = \frac{AB}{3}$ và $ST - RS = 8\text{cm}$; $AC = 18\text{cm}$. Tính mỗi cạnh của mỗi tam giác.

• ***Trường hợp c.c.c***

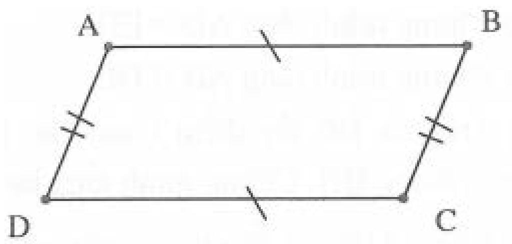
8.6. Điền vào ô trống:



8.7. Cho hình vẽ bên. Chứng minh rằng OB là tia phân giác của $\widehat{AOC}$.



8.8. Trong hình vẽ bên biết $AB = CD$, $AD = BC$. Chứng minh: $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$.



8.9. Cho ΔABC có $\widehat{A} = 50°$; $AB = AC$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính các góc của ΔABM, ΔACM.

• ***Trường hợp c.g.c***

8.10. Cho ΔABC vuông tại A. Tia phân giác của $\widehat{ABC}$ cắt AC ở D; E là một điểm trên cạnh BC sao cho $BE = BA$.

a) Chứng minh rằng: $\Delta ABD = \Delta EBD$.

b) Chứng minh rằng: $DE \perp BC$.

c) Gọi F là giao điểm của DE và AB. Chứng minh rằng $DC = DF$.

8.11. Cho tam giác ABC nhọn. Kẻ $BD \perp AC\left(D \in AC\right)$, $CE \perp AB\left(E \in AB\right)$. Trên tia đối của tia BD lấy điểm H sao cho $BH = AC$. Trên tia đối của tia CE lấy điểm K sao cho $CK = AB$. Chứng minh:

a) $\widehat{ABH} = \widehat{ACK}$;

b) $AH = AK$.

8.12. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 2.\widehat{C}$. Tia phân giác góc B cắt AC ở D. Trên tia đối BD lấy điểm E sao cho $BE = AC$. Trên tia đối CB lấy điểm K sao cho $CK = AB$. Chứng minh rằng: $AE = AK$.

8.13. Cho ΔABC. Gọi D; E theo thứ tự là trung điểm của AB, AC. Trên tia đối của tia ED lấy điểm F sao cho $EF = ED$. Chứng minh:

a) $BD = CF$; $AB\ //\ CF$.

b) $\Delta BCD = \Delta FDC$.

c) $DE\ //\ BC$.

8.14. Cho ΔABC vuông tại A, $AB < AC$. Tia phân giác của $\widehat{ABC}$ cắt AC tại D. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BE = BA$. Vẽ AH vuông góc với BC tại H.

a) Chứng minh rằng $AD = ED$.

b) Chứng minh rằng $AH // DE$.

c) Trên tia DE lấy điểm I sao cho $DI = AH$. Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng DH. Chứng minh rằng ba điểm A, O, I thẳng hàng.

8.15. Cho ΔABC có $\widehat{B} < 90°$. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A. Vẽ tia Bx vuông góc với BC. Trên tia Bx lấy điểm D sao cho $BD = BC$. Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa điểm C vẽ tia By vuông góc với BA. Trên tia By lấy điểm E sao cho $BE = BA$. Chứng minh rằng:

a) $AD = CE$.

b) $AD \perp CE$.

8.16. Cho ΔABC có $\widehat{A} < 90°$. Gọi M là trung điểm cạnh BC. Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa điểm C kẻ tia Ax vuông góc với AB, trên tia Ax lấy điểm D sao cho $AD = AB$. Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B kẻ Ay vuông góc với AC. Trên tia Ay lấy điểm E sao cho $AE = AC$. Trên tia đối tia MA lấy $MN = MA$. Chứng minh rằng:

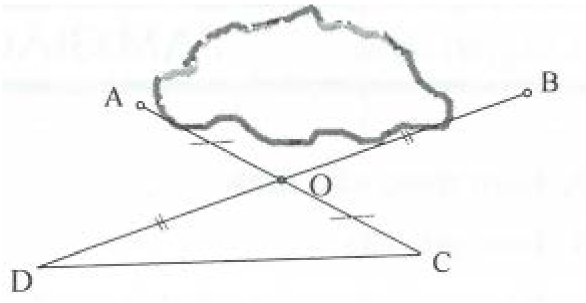
a) $BN = AE$;

b) $AM = \dfrac{DE}{2}$;

c) $AM \perp DE$.

8.17. Để đo khoảng cách AB mà không đo trực tiếp, người ta đã thực hiện như sau:

- Chọn vị trí điểm O.
- Lấy điểm C trên tia đối tia OA sao cho $OC = OA$.
- Lấy điểm D trên tia đối tia OB sao cho $OD = OB$.
- Đo độ dài đoạn thẳng CD, đó chính là khoảng cách AB. Hãy giải thích tại sao?



• ***Trường hợp g.c.g***

8.18. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120°$. Các tia phân giác của BE; CF của $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ACB}$ cắt nhau tại I (E, F lần lượt thuộc cạnh AC, AB). Trên cạnh BC lấy hai điểm M, N sao cho $\widehat{BIM} = \widehat{CIN} = 30°$.

a) Tính số đo của $\widehat{MIN}$.

b) Chứng minh $CE + BF < BC$.

8.19. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} + \widehat{C} = 60°$, tia phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt BC tại D. Trên AD lấy điểm O, trên tia đối của tia AC lấy điểm M sao cho $\widehat{ABM} = \widehat{ABO}$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm N sao cho $\widehat{ACN} = \widehat{ACO}$. Chứng minh rằng $AM = AN$.

8.20. Cho tam giác ABC có $BC = 5\text{cm}$. Trên tia AB lấy điểm K và D sao cho $AK = BD$.

Vẽ $KI // BC$; $DE // BC \left(I; E \in AC\right)$.

a) Chứng minh $AI = CE$.

b) Tính độ dài $DE + KI$.

8.21. Cho ΔABC vuông tại A có $AB = AC$. Lấy M thuộc $BC\left(BM > MC\right)$. Kẻ BD và CE vuông góc với đường thẳng AM. Chứng minh rằng:

a) $\Delta ABD = \Delta CAE$.

b) $BD - CE = DE$.

Hướng dẫn giải

• ***Định nghĩa tam giác bằng nhau***

8.1. Đáp số:

a) $AB = MN$; $AC = MP$; $BC = NP$.

b) $\hat{I} = \widehat{D}$; $\widehat{K} = \widehat{F}$; $\widehat{H} = \widehat{E}$.

8.2. Đáp số: $\Delta ABC = \Delta DEC$; $\Delta MNP = \Delta MKQ$; $\Delta IHL = \Delta KLH$.

8.3. $\Delta ABC = \Delta MNP$ suy ra: $\widehat{B} = \widehat{N}$; $\widehat{C} = \widehat{P}$ mà $\widehat{N} + \widehat{P} = 120°$

$\Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 120°$

Ta có: $\widehat{B} - \widehat{C} = 10°$ nên $\widehat{B} = (120° + 10°) : 2 = 65°$

$\widehat{C} = (120° - 10°) : 2 = 55°$

ΔABC có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$

$\widehat{A} + 120° = 180°$; $\widehat{A} = 60°$

Vậy $\widehat{M} = \widehat{A} = 60°$; $\widehat{N} = \widehat{B} = 65°$; $\widehat{P} = \widehat{C} = 55°$.

8.4. $\Delta ABC = \Delta MNP \Rightarrow AB = MN$; $BC = NP$; $AC = MP$ (cặp cạnh tương ứng).

Vì $AB + AC = 9\text{cm} \Rightarrow MN + MP = 9\text{cm}$, mà $MN - NP = 3\text{cm}$, nên

$MN = (9 + 3) : 2 = 6(\text{cm})$

$MP = (9 - 3) : 2 = 3(\text{cm})$

Do đó chu vi ΔMNP là: $MN + NP + MP = 6 + 5 + 3 = 14\text{cm}$.

Vì $\Delta ABC = \Delta MNP$ nên chu vi ΔABC bằng chu vi ΔMNP và bằng 14cm.

8.5. $\Delta ABC = \Delta RST \Rightarrow AB = RS$; $BC = ST$; $AC = RT$ (cặp cạnh tương ứng).

Vì $ST - RS = 8\text{cm} \Rightarrow BC - AB = 8\text{cm}$.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau:

$\dfrac{BC}{5} = \dfrac{AB}{3} = \dfrac{BC - AB}{5 - 3} = \dfrac{8}{2} = 4 \Rightarrow BC = 4.5 = 20\text{cm}$; $AB = 3.4 = 12\text{cm}$.

Vậy: $AB = RS = 12\text{cm}$; $AC = RT = 18\text{cm}$; $BC = ST = 20\text{cm}$.

• ***Trường hợp c.c.c***

8.6. Đáp số: $\Delta PQS = \Delta RAE$; $\Delta NUV = \Delta VMN$; $\Delta EKI = \Delta EHI$.

8.7. ΔOAB và ΔOCB có $OA = OC$; $AB = CB$; OB chung

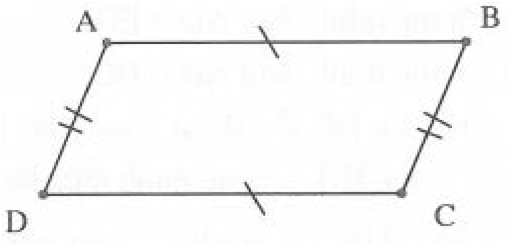
$\Rightarrow \Delta OAB = \Delta OCB$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{COB}$ (cặp góc tương ứng), hay OB là tia phân giác của $\widehat{AOC}$.

8.8. Nối AC.

Xét ΔABC và ΔCDA có:

$AB = CD$; $AD = BC$; AC cạnh chung



Nên $\Delta ABC = \Delta CDA$ (c.c.c)

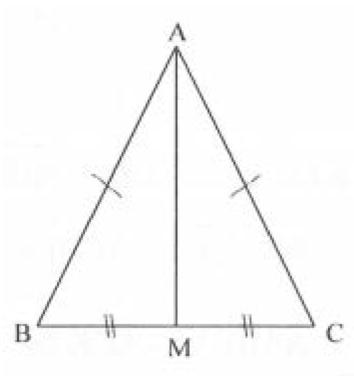
Suy ra $\widehat{DAC} = \widehat{BCA}$.

Mà hai góc ở vị trí so le trong $\Rightarrow AD // CD$.

$\widehat{BAC} = \widehat{DCA}$ mà hai góc ở vị trí so le trong $\Rightarrow AB // CD$.

8.9. ΔAMB và ΔAMC có AM chung; $AB = AC$; $BM = CM$

$\Rightarrow \Delta AMB = \Delta AMC$ (c.c.c)



$\Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{CAM}$ (góc tương ứng)

$\Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{CAM} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \frac{1}{2}.50^\circ = 25^\circ$.

$\Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{AMC}$ (góc tương ứng).

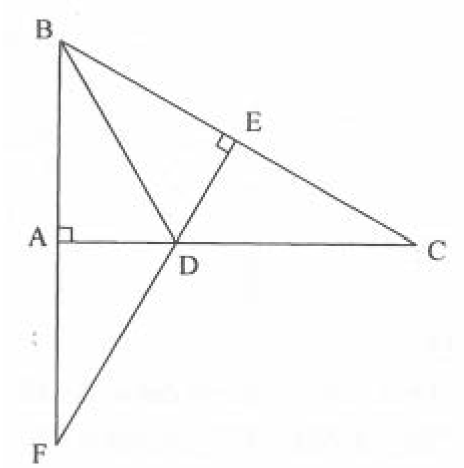
Mà $\widehat{AMB} + \widehat{AMC} = 180^\circ$ nên $\widehat{AMB} = \widehat{AMC} = 90^\circ$.

ΔAMB có $\widehat{ABM} + \widehat{BAM} + \widehat{AMB} = 180^\circ$.

$\widehat{ABM} + 25^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{ABM} = 65^\circ$ suy ra $\widehat{ACM} = 65^\circ$.

• ***Trường hợp c.g.c***

8.10.



a) ΔABD và ΔEBD có $AB = BE$; $\widehat{ABD} = \widehat{EBD}$; BD chung

$\Rightarrow \Delta ABD = \Delta EBD$ (c.g.c).

b) $\Delta ABD = \Delta EBD \Rightarrow \widehat{BED} = \widehat{BAD}$

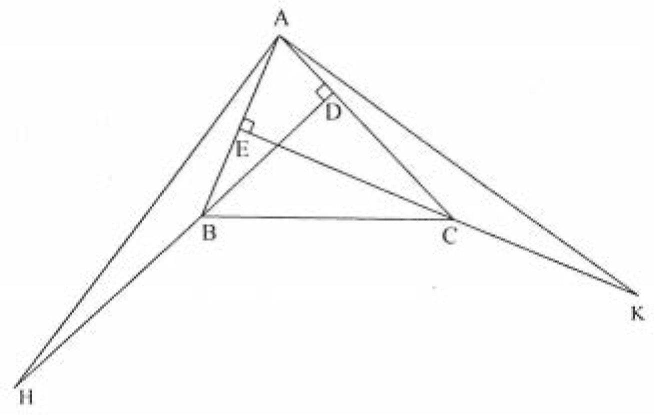
$\Rightarrow \widehat{BED} = 90^\circ \Rightarrow DE \perp AB$.

c) $\Delta ABD = \Delta EBD \Rightarrow AD = ED$.

ΔADF và ΔEDC có $\widehat{ADF}=\widehat{EDC}$; $AD=ED$; $\widehat{FAD}=\widehat{DEC}=\left(90^\circ\right)$

$\Rightarrow \Delta ADF=\Delta EDC\left(g.c.g\right)\Rightarrow DC=DF$.

8.11.



a) ΔABD có $\widehat{ADB}=90^\circ\Rightarrow \widehat{ABD}+\widehat{BAC}=90^\circ$ $\quad(1)$

ΔACE có $\widehat{AEC}=90^\circ\Rightarrow \widehat{ACE}+\widehat{BAC}=90^\circ$ $\quad(2)$

Từ (1) và (2), suy ra: $\widehat{ABD}=\widehat{ACE}$ do đó $\widehat{ABH}=\widehat{ACK}$.

b) ΔABH và ΔKCA có $AB=CK$; $\widehat{ABD}=\widehat{ACE}$; $BH=AC$

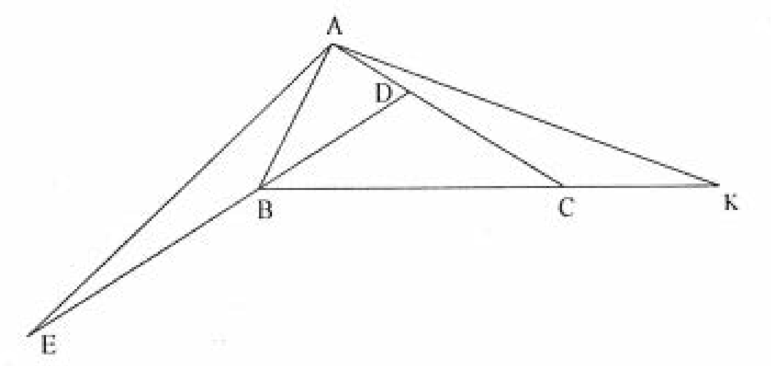
$\Rightarrow \Delta ABH=\Delta KCA(\text{c.g.c})\Rightarrow AH=AK$.

8.12. Ta có: $\widehat{ABE}+\widehat{ABD}=180^\circ$; $\widehat{ACK}+\widehat{ACB}=180^\circ$ (cặp góc kề bù)

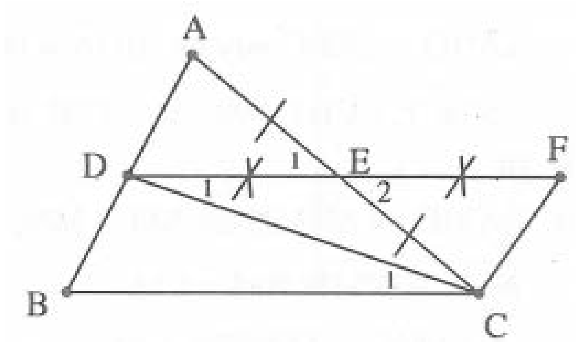
Mà $\widehat{ABD}=\widehat{ACB}=\left(\dfrac{1}{2}\widehat{ABC}\right)\Rightarrow \widehat{ABE}=\widehat{ACK}$.

ΔABE và ΔACK có: $AB=CK$; $\widehat{ABD}=\widehat{ACK}$; $BE=AC$

$\Rightarrow \Delta ABE=\Delta KCA\left(c.g.c\right)\Rightarrow AE=KA$.



8.13.



a) Ta dễ chứng minh được $\Delta ADE=\Delta CFE(\text{c.g.c})$

Suy ra $AD=CF\Rightarrow BD=CF$

Và $\widehat{A}=\widehat{FCE}$, mà hai góc ở vị trí so le trong nên $CF//AB$.

b) Xét ΔBDC và ΔFCD có $BD = FC$ (chứng minh trên); $\widehat{BDC} = \widehat{FCD}$ (so le trong $AB//CF$); CD là cạnh chung

do đó: $\Delta BDC = \Delta FCD(\text{c.g.c})$.

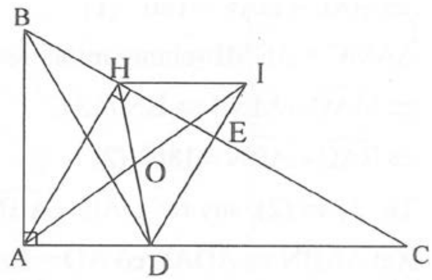
c) $\Delta BDC = \Delta FCD$ (chứng minh trên) nên $\widehat{D_1} = \widehat{C_1}$, mà hai góc ở vị trí so le trong suy ra $DE//BC$.

* *Nhận xét.* Từ kết luận $\Delta BDC = \Delta FCD$, chúng ta còn suy ra được: $DE = \frac{1}{2}.BC$.

8.14.

a) ΔABD và ΔEBD có $\widehat{ABD} = \widehat{EBD}$ (giả thiết); $BE = BA$; BD là cạnh chung

$\Rightarrow \Delta ABD = \Delta EBD(\text{c.g.c})$



$\Rightarrow AD = ED$.

b) $\Delta ABD = \Delta EBD \Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{BED}$

$\Rightarrow \widehat{BED} = 90° \Rightarrow DE \perp BC$,

Mà $AH \perp BC \Rightarrow AH//DE$.

c) $AH//DE \Rightarrow \widehat{AHO} = \widehat{IDO}$ (cặp góc so le trong).

ΔAHO và ΔIDO có $\widehat{AHO} = \widehat{IDO}$; $OH = OD$; $AH = ID$

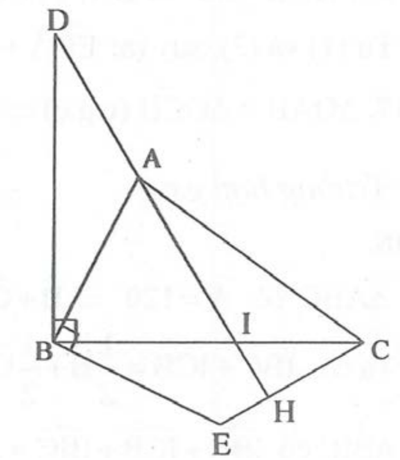
$\Rightarrow \Delta AHO = \Delta IDO(\text{c.g.c}) \Rightarrow \widehat{AOH} = \widehat{IOD}$.

Mà $\widehat{AOH} + \widehat{AOD} = 180°$ (kề bù) $\Rightarrow \widehat{IOD} + \widehat{AOD} = 180°$.

Suy ra *A*, *O*, *I* thẳng hàng.

8.15.

a) $\widehat{CBD} = \widehat{ABE}(= 90°)$



$\Rightarrow \widehat{CBA} + \widehat{ABD} = \widehat{CBA} + \widehat{CBE}$

$\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{CBE}$

Xét ΔABD và ΔEBC có $AB = EB$; $\widehat{ABD} = \widehat{CBE}$ (cùng phụ với góc ABC); $BD = BC$

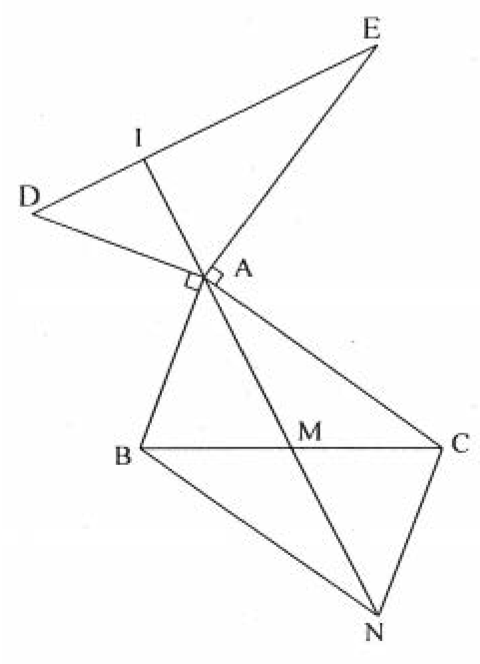
$\Rightarrow \Delta ABD = \Delta EBC(\text{c.g.c})$

$\Rightarrow AD = CE$.

b) Gọi H, I là giao điểm của đường thẳng AD với CE và BC. $\Delta ABD = \Delta EBC$ suy ra: $\widehat{BDA} = \widehat{BCE}$ mà $\widehat{BDA} + \widehat{BIA} = 90°$

$\Rightarrow \widehat{BCE} + \widehat{CIH} = 90° \Rightarrow \Delta CIH$ vuông, hay $AD \perp CE$.

8.16.



a) ΔAMC và ΔNMB có $AM = MN$; $\widehat{AMC} = \widehat{NMB}$; $BM = CM$

$\Rightarrow \Delta AMC = \Delta NMB(c.g.c)$

$\Rightarrow AC = BN$ mà $AC = AE$

$\Rightarrow BN = AE$.

b) Ta có $\widehat{BAD} = 90°$; $\widehat{CAE} = 90°$

$\Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{DAE} = 180° \quad (1)$

$\Delta AMC = \Delta NMB$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{MNB} \Rightarrow BN // AC$

$\Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{ABN} = 180° \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{DAE} = \widehat{ABN}$.

Xét ΔABN và ΔDAE có $AD = BA$; $\widehat{DAE} = \widehat{ABN}$; $AE = BN$

$\Rightarrow \Delta ABN = \Delta DAE(\text{c.g.c})$

$\Rightarrow AN = DE$; mà $AN = 2.AM \Rightarrow AM = \dfrac{DE}{2}$.

c) Gọi I là giao điểm của đường thẳng AM và DE.

$\Delta ABN = \Delta DAE$ (chứng minh trên) $\Rightarrow \widehat{EDA} = \widehat{NAB} \quad (1)$

Mà $\widehat{DAB} = 90° \Rightarrow \widehat{DAI} + \widehat{NAB} = 90° \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{EDA} + \widehat{DAI} = 90°$ hay $AM \perp DE$.

8.17. $\Delta OAB = \Delta OCD(\text{c.g.c}) \Rightarrow AB = CD$.

• ***Trường hợp g.c.g***

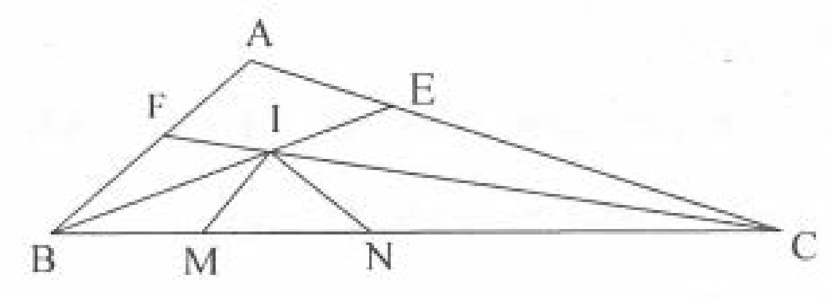
8.18.

a) ΔABC có $\widehat{A} = 120° \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 60°$.

Ta có: $\widehat{IBC}+\widehat{ICB}=\frac{1}{2}\widehat{B}+\frac{1}{2}\widehat{C}=\frac{1}{2}.60°=30°$.

ΔBIC có $\widehat{IBC}+\widehat{ICB}+\widehat{BIC}=180° \Rightarrow 30°+\widehat{BIC}=180° \Rightarrow \widehat{BIC}=150°$.

Từ đó $\widehat{MIN}=\widehat{BIC}-\widehat{BIM}-\widehat{CIN} \Rightarrow \widehat{MIN}=150°-30°-30°=90°$.



b) $\widehat{BIC}=150° \Rightarrow \widehat{BIF}=\widehat{CIE}=30°$.

ΔCIN và ΔCIE có $\widehat{ECI}=\widehat{NCI}$; CI là cạnh chung; $\widehat{EIC}=\widehat{NIC}\,(=30°)$

$\Rightarrow \Delta CIN=\Delta CIE\,(\text{g.c.g}) \Rightarrow CE=CN \quad (1)$

Chứng minh tương tự ta có: $\Delta BFI=\Delta BMI\,(\text{g.c.g}) \Rightarrow BM=BF \quad (2)$

Từ (1) và (2), ta có: $CE+BF=CN+BM<BC$.

8.19. ΔABC có $\widehat{B}+\widehat{C}=60° \Rightarrow \widehat{BAC}=120°$.

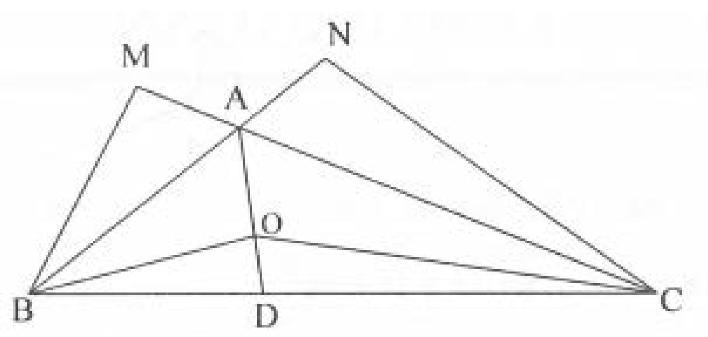
Ta có AD là tia phân giác $\widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{BAD}=\widehat{CAD}=\frac{1}{2}\widehat{BAC}=60°$.

ΔABO và ΔABM có $\widehat{BAO}=\widehat{BAM}\,(=60°)$; AB chung; $\widehat{ABM}=\widehat{ABO}$

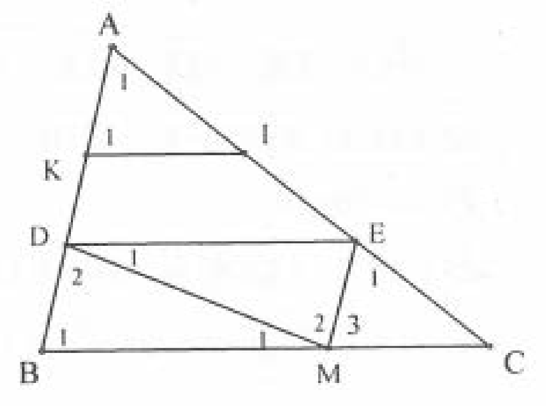
$\Rightarrow \Delta ABO=\Delta ABM\,(\text{g.c.g}) \Rightarrow AM=AO \quad (1)$

Chứng minh tương tự, ta có: $\Delta ACO=\Delta ACN\,(\text{g.c.g}) \Rightarrow AN=AO \quad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra: $AM=AN$.



8.20.



a) Kẻ $EM//AB\left(M \in BC\right)$

Tam giác DEM và tam giác MBD có $\widehat{D_1} = \widehat{M_1}$; DM chung; $\widehat{D_2} = \widehat{M_2}$

nên $\Delta DEM = \Delta MBD\left(\text{g.c.g}\right)$ suy ra $BD = ME$; $DE = BM$.

Ta có $AB//EM$ nên $\widehat{A_1} = \widehat{E_1}$; $\widehat{B_1} = \widehat{M_3}$

Lại có $KI//BC$ nên $\widehat{K_1} = \widehat{B_1}$.

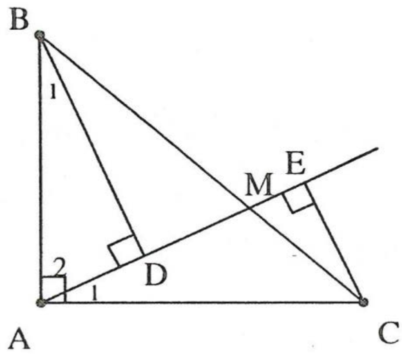
- Tam giac AKI và tam giác EMC có $\widehat{A_1} = \widehat{E_1}$; $AK = EM\left(= BD\right)$; $\widehat{M_3} = \widehat{K_1}\left(= \widehat{B_1}\right)$

Nên $\Delta AKI = \Delta EMC\left(\text{g.c.g}\right)$

Suy ra $AI = EC$ và $KI = MC$.

b) Ta có $KI = MC$; $DE = BM$ suy ra $KI + DE = MC + BM = BC = 5\text{cm}$.

8.21.



a) Xét ΔABD và ΔCAE có $\widehat{BDA} = \widehat{AEC} = 90°$; $AB = AC$ (giả thiết); $\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$ (cùng phụ với $\widehat{A_2}$)

do đó $\Delta ABD = \Delta CAE$ (cạnh huyền – góc nhọn).

b) $\Delta ABD = \Delta CAE$ nên $BD = AE$; $AD = CE$ do đó $BD - CE = AE - AD$. Vậy $BD - CE = DE$.

* ***Nhận xét.*** Để chứng minh một đoạn thẳng bằng tổng hay một hiệu hai đoạn thẳng ta thường biến đổi đoạn thẳng đó thành hai đoạn cùng nằm trên một đường thẳng và sử dụng cộng, trừ đoạn thẳng.

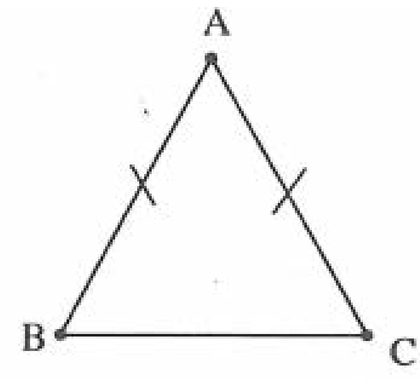
Chương II

TAM GIÁC

Chuyên đề 9. TAM GIÁC CÂN

A. Kiến thức cần nhớ

1. Tam giác cân



a) Định nghĩa. Tam giác cân là tam giác có hai cạnh bằng nhau.

ΔABC cân tại $A \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta ABC \\ AB = AC \end{cases}$

b) Tính chất. Trong tam giác cân, hai góc ở đáy bằng nhau.

ΔABC cân tại $A \Rightarrow \widehat{B}=\widehat{C}$.

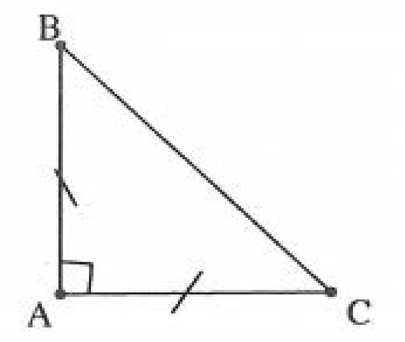
c) Dấu hiệu nhận biết

• Theo định nghĩa.

• Nếu một tam giác có hai góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.

2. Tam giác vuông cân

a) Định nghĩa. Tam giác vuông cân là tam giác vuông có hai cạnh góc vuông bằng nhau.



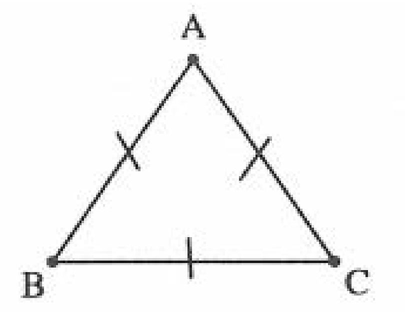
ΔABC vuông cân tại $A \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta ABC \\ \widehat{A}=90^\circ \\ AB=AC \end{cases}$

b) Tính chất. Mỗi góc nhọn của tam giác vuông cân bằng 45°.

$\widehat{B}=\widehat{C}=45^\circ$.

3. Tam giác đều

a) Định nghĩa. Tam giác đều là tam giác có ba cạnh bằng nhau.



ΔABC đều $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta ABC \\ AB=BC=CA \end{cases}$

b) Tính chất. Trong tam giác đều, mỗi góc bằng 60°.

$\widehat{A}=\widehat{B}=\widehat{C}=60^\circ$.

c) Dấu hiệu nhận biết

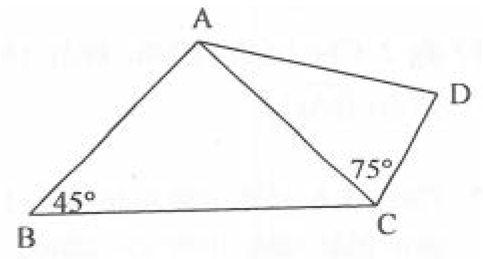
• Theo định nghĩa.

• Nếu một tam giác có ba góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác đều.

• Nếu một tam giác cân có một góc bằng 60° thì tam giác đó là tam giác đều.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho hình vẽ bên. Biết rằng $AB=AC=AD$; $\widehat{ABC}=45^\circ$; $\widehat{ACD}=75^\circ$. Tính số đo góc $\widehat{BAD}$.



Giải

* *Tìm cách giải.* Chúng ta lưu ý rằng: trong một tam giác cân, nếu biết một góc thì tính được hai góc còn lại. Chẳng hạn: nếu ΔABC cân tại A thì $\widehat{A} = 180° - 2.\widehat{B} = 180° - 2.\widehat{C}$ hoặc $\widehat{B} = \widehat{C} = \dfrac{180° - \widehat{A}}{2}$.

* *Trình bày lời giải.*

ΔABC cân tại A nên $\widehat{BAC} = 180° - 2\widehat{ABC} = 90°$.

ΔACD cân tại A nên $\widehat{CAD} = 180° - 2\widehat{ACD} = 30°$.

Ta có $\widehat{BAD} = \widehat{BAC} + \widehat{CAD} = 120°$.

Ví dụ 2:

a) Một tam giác cân có một góc là $80°$. Số đo của hai góc còn lại là bao nhiêu?

b) Một tam giác cân có một góc là $100°$. Số đo của hai góc còn lại là bao nhiêu?

Giải

a) Nếu góc ở đỉnh tam giác cân là $80°$, thì mỗi góc ở đáy tam giác cân là $\dfrac{180° - 80°}{2} = 50°$.

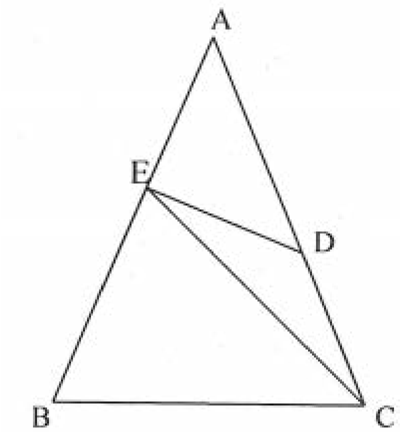
- Nếu mỗi góc ở đáy tam giác cân là $80°$, thì góc ở đỉnh tam giác cân là $180° - 80° - 80° = 20°$.

b) Nếu góc ở đáy tam giác cân là $100°$, thì tổng hai góc ở đáy là $100° + 100° = 200° > 180°$ (không xảy ra).

Do đó góc ở đỉnh tam giác cân là $100°$, thì mỗi góc ở đáy tam giác cân là $\dfrac{180° - 100°}{2} = 40°$.

* ***Nhận xét.*** Bài toán này dễ bỏ sót các trường hợp. Khi đề bài chưa cho cụ thể số đo đó là số đo góc ở đỉnh hay ở đáy, ta cần xét hai trường hợp.

Ví dụ 3: Cho hình vẽ bên. Biết $AB = AC$; $AE = DE = CD$ và $BC = CE$. Tính số đo $\widehat{BAC}$.



Giải

* *Tìm cách giải.* Bài toán xuất hiện nhiều tam giác cân, nên có nhiều góc bằng nhau. Để lời giải giản đơn, không bị nhầm lẫn, chúng ta nên đặt góc nhỏ nhất trong hình vẽ là x. Sau đó biểu diễn các góc khác theo x. Trong quá trình giải, lưu ý tính chất góc của tam giác cân và tính chất góc ngoài của tam giác.

* *Trình bày lời giải.*

ΔDEC cân tại D. Đặt $\widehat{DCE} = \widehat{DEC} = x$.

ΔDEC có $\widehat{ADE} = \widehat{DCE} + \widehat{DEC} = 2x$ (góc ngoài tam giác).

ΔAED cân tại E nên $\widehat{EAD} = \widehat{ADE} = 2x$.

ΔAEC có: $\widehat{BEC} = \widehat{CAE} + \widehat{ECA} = 3x$ (góc ngoài tam giác)

ΔBCE cân tại C nên $\widehat{B} = \widehat{BEC} = 3x$.

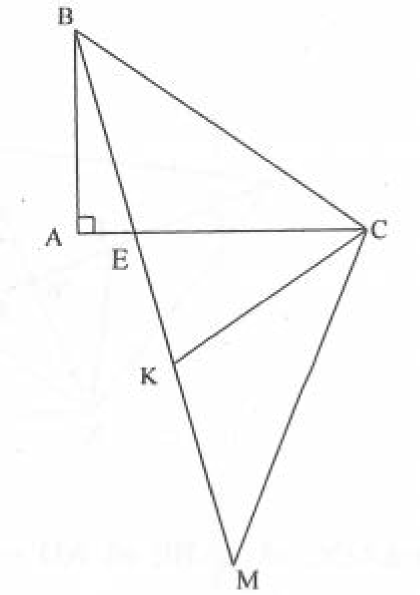
ΔABC cân tại A nên $\widehat{BCA} = \widehat{B} = 3x$.

ΔABC có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$.

Suy ra $2x + 3x + 3x = 180° \Leftrightarrow x = 22,5°$.

Do đó: $\widehat{BAC} = 2.22,5° = 45°$.

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên AC lấy điểm E sao cho $\widehat{EBC} = 2.\widehat{ABE}$. Trên tia BE lấy điểm M sao cho $EM = BC$. So sánh $\widehat{MBC}$ và $\widehat{BMC}$.



Giải

* ***Cách 1.*** Trên tia BE lấy điểm K sao cho $BK = BC \Rightarrow \Delta BKC$ cân tại B

$$\Rightarrow \widehat{BCK} = \widehat{BKC} = \frac{180° - \widehat{KBC}}{2} = 90° - \widehat{ABE} = \widehat{AEB}$$

$\Rightarrow \Delta CEK$ cân tại $C \Rightarrow CE = CK$;

$\widehat{CEK} = \widehat{CKE} \Rightarrow \widehat{CEB} = \widehat{CKM}$

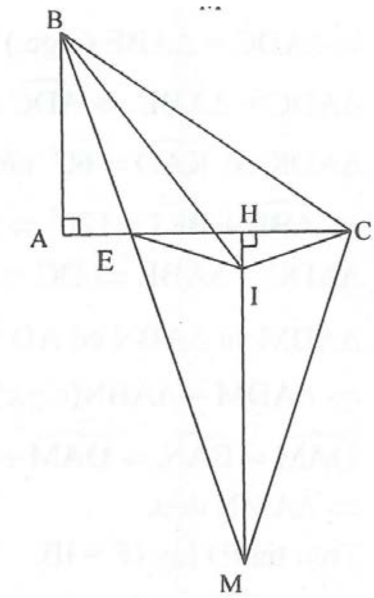
Mà $BK = EM \Rightarrow BE = KM$

$\Rightarrow \Delta CEB = \Delta CKM\,(\text{c.g.c})$, suy ra $\widehat{MBC} = \widehat{BMC}$.

* ***Cách 2.*** Kẻ $MH \perp AC\,(H \in AC)$

Gọi MH cắt tia phân giác $\widehat{CBE}$ tại I.

Ta có: $\widehat{ABE} = \widehat{EBI} = \widehat{IBC}\left(= \frac{1}{2}\widehat{EBC} \right)$



mà $\widehat{ABE} = \widehat{EMI}$ (so le trong) $\Rightarrow \widehat{EMI} = \widehat{CBI}\left(= \widehat{ABE} \right)$.

ΔBIM có $\widehat{IBM} = \widehat{IMB} \Rightarrow \Delta BIM$ cân $\Rightarrow IB = IM$.

Từ đó suy ra $\Delta IBC = \Delta IME$ (c.g.c)

$\Rightarrow IE = IC \Rightarrow \Delta IEC$ cân tại I, mà $IH \perp EC$

nên dễ có $\Delta EMH = \Delta CMH$ (c.g.c)

$\Rightarrow EM = CM \Rightarrow BC = CM$

$\Rightarrow \Delta BCM$ cân tại C suy ra $\widehat{MBC} = \widehat{BMC}$.

Ví dụ 5: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn $(AB < AC)$. Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE. Gọi I là giao điểm của CD và BE, K là giao điểm của AB và DC.

a) Chứng minh rằng: $\Delta ADC = \Delta ABE$.

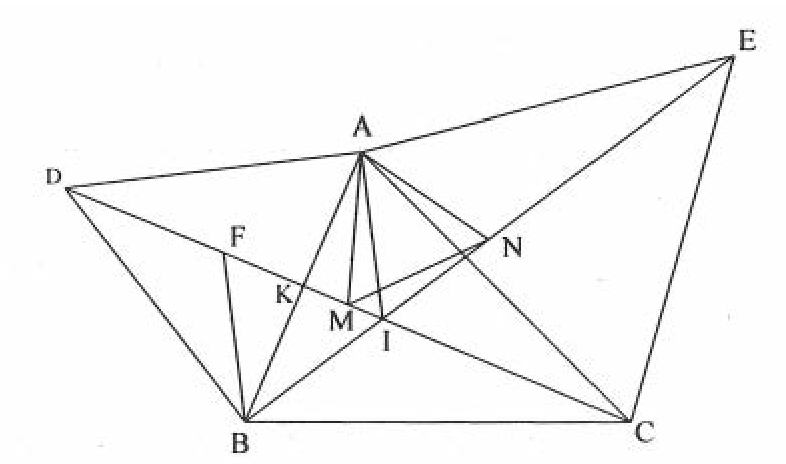
b) Chứng minh rằng: $\widehat{DIB} = 60°$.

c) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và BE. Chứng minh rằng ΔAMN đều.

d) Chứng minh rằng $IA + IB = ID$.

e) Chứng minh rằng IA là tia phân giác của góc DIE.

Giải



a) ΔADC và ΔABE có $AD = AB$; $\widehat{DAC} = \widehat{BAE} = \left(= 60° + \widehat{BAC} \right)$; $AC = AE$

$\Rightarrow \Delta ADC = \Delta ABE$ (c.g.c).

b) $\Delta ADC = \Delta ABE \Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{ABE}$.

ΔADK có $\widehat{KAD} = 60°$ nên $\widehat{ADC} + \widehat{AKD} = 120°$

$\Rightarrow \widehat{ABE} + \widehat{BKI} = 120° \Rightarrow \widehat{BIK} = 60°$ hay $\widehat{DIB} = 60°$.

c) $\Delta ADC = \Delta ABE \Rightarrow DC = BE \Rightarrow DM = BN$.

ΔADM và ΔABN có $AD = AB$; $\widehat{ADK} = \widehat{ABN}$; $DM = BN$

$\Rightarrow \Delta ADM = \Delta ABN\,(\text{c.g.c}) \Rightarrow AM = AN \Rightarrow \Delta AMN$ cân.

$\widehat{DAM} = \widehat{BAN} \Rightarrow \widehat{DAM} + \widehat{MAB} = \widehat{MAB} + \widehat{BAN} \Rightarrow \widehat{MAN} = 60°$

$\Rightarrow \Delta AMN$ đều.

d) Trên tia ID lấy $IF = IB$.

Ta có $\widehat{BIF} = 60°$ nên ΔBIF là tam giác đều.

Xét ΔBFD và ΔBIA có $BD = BA$; $\widehat{DBF} = \widehat{ABI}\left(= 60° - \widehat{FBA}\right)$; $BF = BI$

Suy ra $\Delta BFD = \Delta BIA(\text{c.g.c}) \Rightarrow DF = IA$.

Do đó $IA + IB = DF + FI = ID$.

e) ΔBIF đều nên $\widehat{BFI} = 60° \Rightarrow \widehat{BFD} = 120° \Rightarrow \widehat{BIA} = 120°$.

Mà $\widehat{BID} = 60°$ nên $\widehat{DIA} = 60° \Rightarrow \widehat{AIE} = 60°$. Do đó $\widehat{AID} = \widehat{AIE}\,(= 60°)$

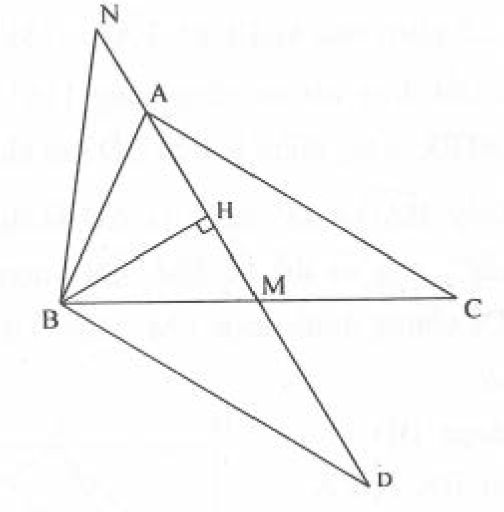
hay IA là tia phân giác của góc DIE.

Ví dụ 6: Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên đoạn thẳng AM. Trên tia đối tia AM lấy điểm N sao cho $AN = 2.MH$. Chứng minh $BN = AC$.

(Tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên ĐHKHTN Hà Nội, năm 2015)

Giải

* *Tìm cách giải.* Bài toán chưa thể ghép BN và AC vào hai tam giác bằng nhau trực tiếp được. Mặt khác $MB = MC$, do vậy rất tự nhiên chúng ta nghĩ tới việc trên tia đối của tia MA lấy $MD = MA$ bởi đây là giả thiết quen thuộc, để suy ra $AC = BD$. Sau đó chỉ việc chứng minh $BD = BN$.



* *Trình bày lời giải.*

Trên tia đối của tia *MA* lấy $MD = MA$.

ΔACM và ΔDBM có $MA = MD$; $\widehat{AMC} = \widehat{DMB}$; $BM = CM$

Suy ra $\Delta ACM = \Delta DBM$ (c.g.c)

$\Rightarrow AC = BD$.

Ta có: $HN = HA + AN = HA + 2.HM = AM + HM$

$HD = MD + HM = AM + HM \Rightarrow HN = HD$.

ΔBDN có $BH \perp DN$; $HD = HN \Rightarrow \Delta BDN$ cân tại $B \Rightarrow BN = BD$.

Vậy $BN = AC$.

Ví dụ 7: Cho tam giác *ABC* vuông cân tại *A*. Lấy điểm *D* thuộc nửa mặt phẳng bờ *AB* không chứa *C* sao cho tam giác *DAB* vuông cân tại *D*; điểm *E* (khác *A*) không thuộc đoạn *AD*. Đường thẳng qua *E*, vuông góc với *BE* cắt *AC* tại *F*. Chứng minh rằng $EF = EB$.

Giải

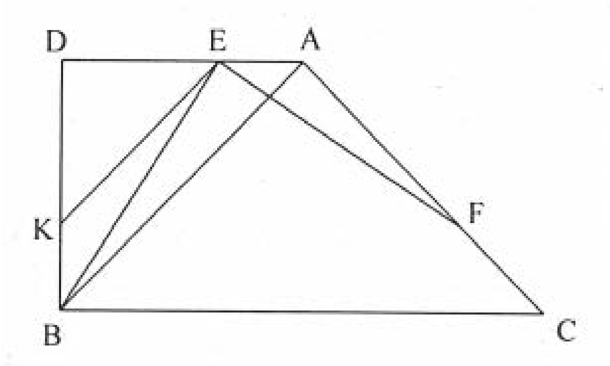
* *Tìm cách giải.* Để chứng minh $EF = EB$, thông thường chúng ta nghĩ tới việc ghép vào hai tam giác, sau đó chứng minh hai tam giác bằng nhau. Tuy nhiên, với hình vẽ chúng ta chưa thể ghép được. Phân tích đề bài, chúng ta có nhiều góc vuông, góc $45°$ cũng như cặp cạnh bằng nhau $DA = DB$, $AB = AC$. Với sự phân tích trên, chúng ta nghĩ tới việc kẻ thêm đường phụ nhằm kết hợp được giả thiết với nhau cũng như ghép *EF* và *EB* là hai cạnh tương ứng của hai tam giác bằng nhau. Từ đó chúng ta có hai hướng giải sau:

• *Cách 1.* Có thể *EF* ghép vào ΔAEF có $\widehat{EAF} = 135°$ nên cần ghép *EB* vào tam giác có góc đối diện với nó cũng bằng $135°$. Khai thác yếu tố tam giác vuông cân *ADB*, ta lấy điểm *K* trên *BD* sao cho ΔDEK vuông cân.

• *Cách 2.* Nhận thấy $\widehat{BAD} = 45°$, tia AD là tia phân giác góc ngoài đỉnh A của ΔABC, nên có thể kẻ EM, EN vuông góc với các đường thẳng AC, AB. Dễ chứng minh được $EM = EN$. Từ đó cũng có lời giải.

* *Trình bày lời giải.*

- *Cách 1.* Trên đoạn BD lấy điểm K sao cho $BK = EA\ (1)$. Vì tam giác DAB vuông cân tại D nên ΔDKE vuông cân tại D, suy ra $\widehat{DKE} = 45°$, do đó:
$\widehat{BKE} = 180° - 45° = 135°$;



Mà $\widehat{EAF} = 45° + 90° = 135°$,

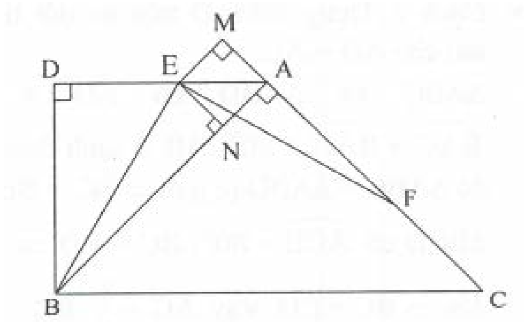
Nên $\widehat{BKE} = \widehat{EAF}\ (2)$

Mặt khác, $\widehat{KBE} = 90° - \widehat{DEB} = \widehat{AEF}\ (3)$ (do $\widehat{BEF} = 90°$)

Từ (1), (2), (3) suy ra: $\Delta BKE = \Delta EAF\,(\text{g.c.g})$

Từ đó $EF = EB$.

- *Cách 2.* Vẽ EM, EN vuông góc với các đường thẳng AC, AB.



ΔAME và ΔANE có: $\widehat{AME} = \widehat{ANE}\,(= 90°)$; $\widehat{MAE} = \widehat{NAE}\,(= 45°)$; AE là cạnh chung

$\Rightarrow \Delta AME = \Delta ANE$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow EM = EN$.

Mặt khác, ΔAME và ΔANE là tam giác vuông cân, suy ra $\widehat{MEN} = 90°$.

ΔBNE và ΔFME có: $\widehat{ENB} = \widehat{EMF}\,(= 90°)$; $\widehat{BEN} = \widehat{FEM}\left(= 90° - \widehat{FEN}\right)$; $EN = EM$

$\Rightarrow \Delta BNE = \Delta FME$ (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow EF = EB$.

Ví dụ 8: Cho tam giác ABC vuông tại A, có $\widehat{ABC} = 30°$. Chứng minh rằng $AC = \dfrac{1}{2}BC$.

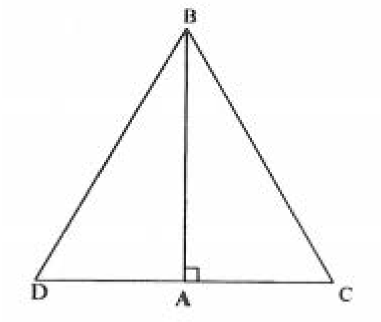
Giải

* *Tìm cách giải.* Từ đề bài, suy ra được. Gợi cho chúng ta liên tưởng tới góc của tam giác đều. Phân tích kết luận $AC = \dfrac{1}{2}BC$, dễ dàng cho chúng ta hai hướng suy luận:

• *Hướng 1.* Tạo ra một đoạn thẳng bằng $2.AC$, sau đó chứng minh đoạn thẳng ấy bằng BC. Chú ý $\widehat{ACB}=60°$, nên chúng ta dựng điểm D trên tia CA sao cho $CD=2.AC$, sau đó chứng minh $BC=CD$. Bài toán được giải quyết.

• Hướng 2. Tạo ra một đoạn thẳng bằng $\frac{1}{2}.BC$, sau đó chứng minh đoạn thẳng ấy bằng AC. Chú ý $\widehat{ACB}=60°$, nên chúng ta gọi trung điểm M của BC. Sau đó chứng minh $CM=AC$. Bài toán được giải quyết.

** Trình bày lời giải.*

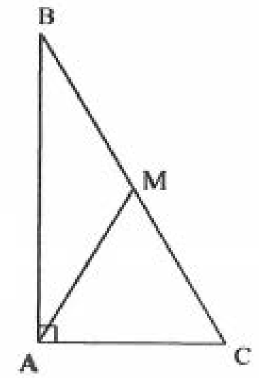


• *Cách 1.* Dựng điểm D trên tia đối tia AC sao cho $AD=AC$.

ΔABC và ΔABD có $AD=AC$; $\widehat{BAC}=\widehat{BAD}=90°$; AB là cạnh chung,

do đó $\Delta ABC=\Delta ABD(\text{c.g.c})\Rightarrow BC=BD$.

ΔBCD có $\widehat{ACB}=60°$, $BC=BD\Rightarrow\Delta BCD$ đều $\Rightarrow BC=CD$. Vậy $AC=\frac{1}{2}.BC$.



• Cách 2. Gọi M trung điểm của BC.

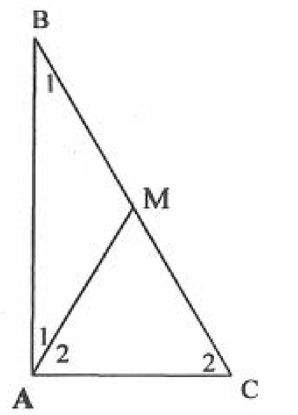
ΔABC vuông tại A có M là trung điểm của BC, suy ra: $MA=MB=MC$ (theo ***ví dụ 10***, chuyên đề 8).

ΔMAC có $MA=MC$, $\widehat{ACB}=60°$ nên ΔMAC là tam giác đều, suy ra $AC=MC$. Vậy $AC=\frac{1}{2}BC$.

* ***Nhận xét.*** Đây là một tính chất thú vị về một tam giác vuông đặc biệt.
Tính chất được phát biểu như sau: Trong một tam giác vuông có một góc bằng $30°$, thì cạnh đối diện với góc $30°$ bằng nửa cạnh huyền.

Ví dụ 9: Cho tam giác ABC có M là trung điểm cạnh BC. Biết rằng $AM=\frac{1}{2}.BC$, chứng minh rằng tam giác ABC vuông tại A.

Giải



ΔAMC có $AM=CM$, nên ΔAMC cân tại $M\Rightarrow\widehat{A_2}=\widehat{C_2}$.

ΔAMB có $AM=BM$, nên ΔAMB cân tại $M\Rightarrow\widehat{A_1}=\widehat{B_1}$.

ΔABC có $\widehat{A}+\widehat{B_2}+\widehat{C_1}=180°$

$\Rightarrow\widehat{A}+\widehat{A_2}+\widehat{A_1}=180°\Rightarrow 2\widehat{A}=180°$

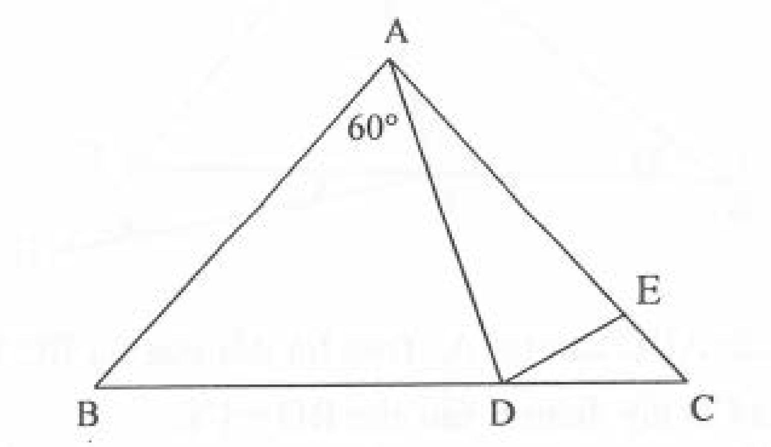
$\Rightarrow \widehat{A} = 90^\circ$.

Vậy tam giác ABC vuông tại A.

*** Nhận xét.** Đây là một tính chất thú vị để nhận biết tam giác vuông.

C. Bài tập vận dụng

9.1. Cho hình vẽ bên. Biết rằng $AB = AC$; $AD = AE$ và $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Tính số đo góc $\widehat{CDE}$.



9.2. Tam giác ABC có $\widehat{B} = 80^\circ$ và điểm D trên cạnh AC. Lấy E thuộc AB, F thuộc BC sao cho $AE = AD$ và $CF = CD$. Tính số đo góc $\widehat{EDF}$.

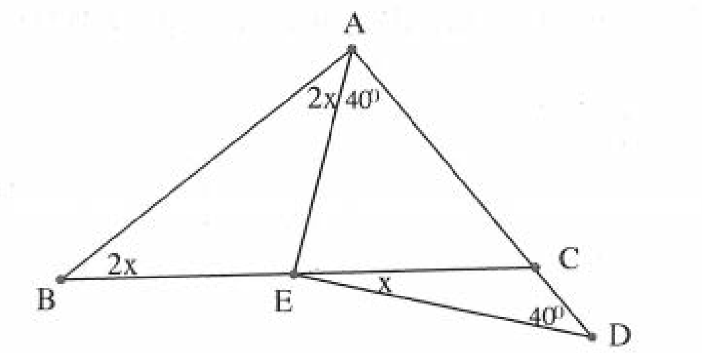
9.3. Cho tam giác ABC vuông tại $B(AB > BC)$. Đường trung trực của đoạn thẳng AC cắt AC và AB lần lượt tại D và E. Biết rằng $\dfrac{\widehat{DCE}}{5} = \dfrac{\widehat{BCE}}{2}$. Tính số đo $\widehat{ACB}$.

9.4. Cho tam giác ABC có đường phân giác góc A cắt BC tại D. Biết rằng $\widehat{BAC} = 114^\circ$; $AB + BD = AC$. Tính số đo góc $\widehat{ACB}$.

9.5. Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên cạnh BC lấy hai điểm M và N sao cho $BM = BA$; $CN = CA$. Tính góc MAN.

9.6. Cho tam giác ABC nhọn. Lấy D thuộc AC sao cho $AB = BD$, lấy điểm E thuộc AB sao cho $AC = CE$. Gọi F là giao điểm của BD và CE. Biết $\widehat{BFC} = 150^\circ$. Tính số đo góc $\widehat{BAC}$.

9.7. Tìm x trong hình vẽ sau:



9.8. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên tia đối của tia BC lấy điểm D, trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$.

a) Chứng minh rằng tam giác ADE là tam giác cân.

b) Kẻ $BH \perp AD\left(H \in AD\right)$, kẻ $CK \perp AE\left(K \in AE\right)$. Chứng minh rằng $BH = CK$.

c) Gọi O là giao điểm của BH và CK. Tam giác OBC là tam giác gì? Vì sao?

9.9. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 2.\widehat{C}$. Kẻ AH vuông góc BC (H thuộc BC). Trên tia đối BA lấy $BE = BH$. Đường thẳng EH cắt AC tại F. Chứng minh:

a) $FH = FA = FC$.

b) $AE = HC$.

9.10. Cho tam giác $ABC\left(\widehat{BAC} < 90^\circ\right)$, đường cao AH. Kẻ HI vuông góc với AB, kẻ HK vuông góc với AC. Gọi E; F lần lượt là điểm sao cho I; K lần lượt là trung điểm của HE và HF. Đường thẳng EF cắt AB; AC lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng:

a) $AE = AF$;

b) HA là phân giác của $\widehat{MHN}$.

9.11. Cho đoạn thẳng AB và điểm C nằm giữa A và B. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ hai tam giác đều ACD và BCE. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AE và BD. Chứng minh rằng:

a) $AE = BD$.

b) $\Delta CME = \Delta CNB$.

c) Tam giác MNC là tam giác đều.

9.12. Cho tam giác LMN có 3 góc đều nhọn. Dựng ra phía ngoài tam giác ấy ba tam giác đều LMA; MNB và NLC. Chứng minh rằng: $LB = MC = NA$.

9.13. Cho góc $\widehat{xOz} = 120°$. *Oy* là tia phân giác $\widehat{xOz}$; *Ot* là tia phân giác của $\widehat{xOy}$. *M* là điểm miền trong góc *yOz*. Vẽ *MA* vuông góc *Ox*, *MB* vuông góc *Oy*, *MC* vuông góc *Ot*. Chứng minh rằng: $OC = MA - MB$.

9.14. Cho tam giác *ABC* vuông cân tại *A*. Trên cạnh *AB* lấy điểm *D*. Trên cạnh *AC* lấy điểm *E* sao cho $AD = AE$. Các đường thẳng vuông góc kẻ từ *A* và *E* với *CD* cắt *BC* ở *G* và *H*. Đường thẳng *EH* và đường thẳng *AB* cắt nhau ở *M*. Đường thẳng kẻ từ *A* song song với *BC* cắt *MH* ở *I*. Chứng minh rằng:

a) $\Delta ACD = \Delta AME$;

b) $\Delta AGB = \Delta MIA$;

c) $BG = GH$.

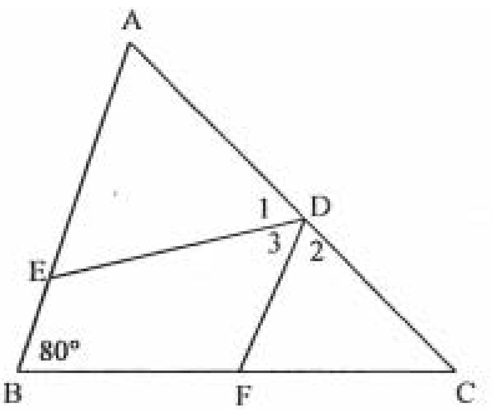
9.15. Cho tam giác *ABC* với $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 36°$. Trên tia phân giác của góc *ABC* lấy điểm *N* sao cho $\widehat{BCN} = 12°$. Hãy so sánh độ dài của *CN* và *CA*.

9.16. Cho ΔABC có các tia phân giác trong của góc *B* và *C* cắt nhau tại *I*. Qua *I* kẻ đường thẳng song song với *BC* cắt *AB*, *AC* tại *D* và *E*. Chứng minh $BD + CE = DE$.

9.17. Cho ΔABC có *M* là trung điểm *BC*. Biết rằng *AM* là phân giác góc *BAC*. Chứng minh rằng: ΔABC cân.

9.18. Cho *M* là một điểm bất kỳ nằm trong tam giác đều *ABC*. Chứng minh rằng từ ba đoạn *MA*, *MB*, *MC* ta có thể dựng được một tam giác.

Hướng dẫn giải



9.1. $\Delta ABC\,(AB = AC)$ cân. Đặt $\hat{B} = \hat{C} = \alpha$

ΔABD có $\widehat{ADC} = \hat{B} + \widehat{BAD} = \alpha + 60°$.

$\Delta ADE\,(AD = AE)$ cân nên $\widehat{ADE} = \widehat{AED}$

$\Rightarrow \widehat{AED} + \widehat{CDE} = \widehat{ADE} + \widehat{CDE} = \widehat{ADC} = \alpha + 60°$

ΔCED có $\widehat{AED} = \hat{C} + \widehat{CDE}$.

Từ đó suy ra:

$\hat{C} + \widehat{CDE} + \widehat{CDE} = \widehat{AED} + \widehat{CDE} = \widehat{ADC} = \alpha + 60°$

$\Rightarrow \alpha + 2.\widehat{CDE} = \alpha + 60° \Rightarrow \widehat{CDE} = 30°$.

9.2. ΔABC có $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$ mà $\hat{B} = 80° \Rightarrow \hat{A} + \hat{C} = 100°$.

ΔAED cân tại $A \Rightarrow \hat{D_1} = \dfrac{180° - \hat{A}}{2}$.

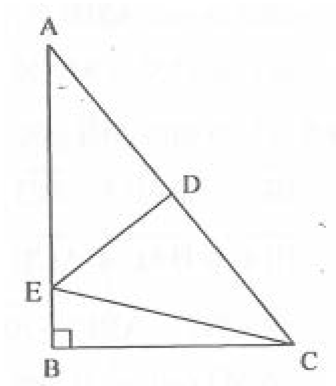
ΔCDF cân tại $C \Rightarrow \widehat{D_2} = \dfrac{180° - \widehat{C}}{2}$.

Suy ra: $\widehat{D_1} + \widehat{D_2} = \dfrac{360° - \widehat{A} - \widehat{C}}{2} = 130°$.

Do vậy $\widehat{D_3} = 50° \Rightarrow \widehat{EDF} = 50°$.

9.3. ΔAEC có ED là đường trung trực của AC nên dễ dàng chứng minh được ΔAEC cân tại E

$\Rightarrow \widehat{DCE} = \widehat{BAC}$ mà $\widehat{BAC} + \widehat{ACB} = 90° \Rightarrow \widehat{DCE} + \widehat{ACB} = 90°$



Đặt $\dfrac{\widehat{DCE}}{5} = \dfrac{\widehat{BCE}}{2} = x°$

$\Rightarrow \widehat{DCE} = 5x°$; $\widehat{BCE} = 2x°$

Suy ra: $5x° + 5x° + 2x° = 90° \Rightarrow x° = 7,5°$

Do vậy $\widehat{DCE} = 5.7,5° = 37,5°$; $\widehat{BCE} = 2.7,5° = 15°$

$\Rightarrow \widehat{ACB} = 37,5° + 15° = 52,5°$.

9.4. Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho $AM = AB$

Từ giả thiết suy ra $MC = BD$ (1)

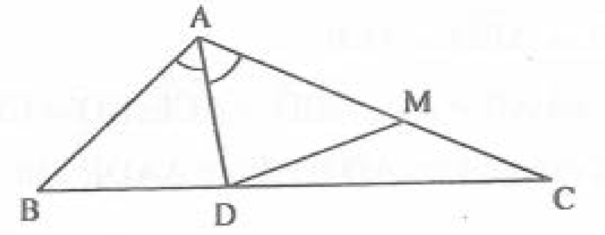
ΔABD và ΔAMD có $AB = AM$; $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$; AD là cạnh chung

$\Rightarrow \Delta ABD = \Delta AMD(\text{c.g.c}) \Rightarrow BD = MD$; $\widehat{ABD} = \widehat{AMD}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MD = MC \Rightarrow \Delta MCD$ cân

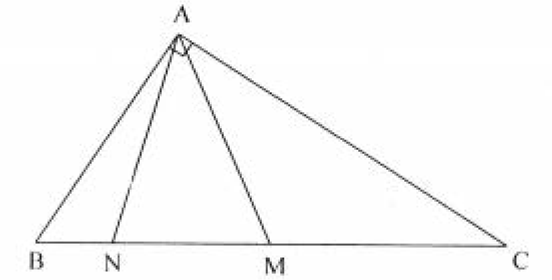
$\Rightarrow \widehat{AMD} = 2.\widehat{ACB}$ (góc ngoài của tam giác) $\Rightarrow \widehat{ABC} = 2.\widehat{ACB}$

Mà $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180° - 114° = 66°$ nên $\widehat{ACB} = 66° : 3 = 22°$.



9.5. ΔABM $(BA = BM)$ cân tại $B \Rightarrow \widehat{AMB} = \dfrac{180° - \widehat{B}}{2}$.

$\Delta CAN\left(CA=CN\right)$ cân tại $C \Rightarrow \widehat{ANC}=\dfrac{180^\circ-\widehat{C}}{2}$. Suy ra:



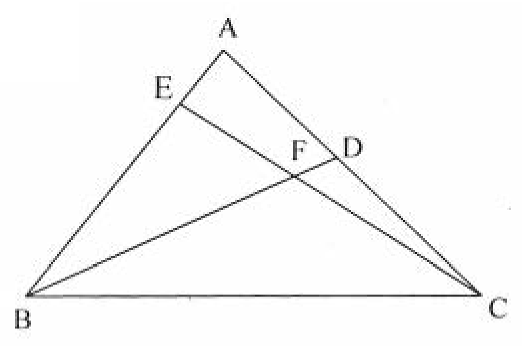
$\widehat{AMB}+\widehat{ANC}=\dfrac{180^\circ-\widehat{B}+180^\circ-\widehat{C}}{2}=\dfrac{360^\circ-90^\circ}{2}=135^\circ$.

ΔAMN có $\widehat{AMB}+\widehat{ANC}+\widehat{MAN}=180^\circ$.

Suy ra $135^\circ+\widehat{MAN}=180^\circ \Rightarrow \widehat{MAN}=45^\circ$.

9.6. Theo tính chất góc ngoài tam giác ta có:

$\widehat{BFC}=\widehat{BEF}+\widehat{ABD}$;



$\widehat{BEF}=\widehat{BAC}+\widehat{ACE}$

$\Rightarrow \widehat{BFC}=\widehat{ABD}+\widehat{ACE}+\widehat{BAC}$ (1)

ΔABD cân tại B nên $\widehat{ABD}=180^\circ-2.\widehat{BAC}$.

ΔACE cân tại C nên $\widehat{ACE}=180^\circ-2.\widehat{BAC}$

Thay vào (1) ta có: $\widehat{BFC}=180^\circ-2\widehat{BAC}+180^\circ-2\widehat{BAC}+\widehat{BAC}$

Suy ra: $\widehat{BAC}=70^\circ$.

9.7. ΔAED có $\widehat{EAD}=\widehat{EDA}=40^\circ$, nên nó là tam giác cân.

Suy ra $\widehat{AED}=180^\circ-2.40^\circ=100^\circ$.

ΔAEB cân tại E, theo tính chất góc ngoài tam giác: $\widehat{AEC}=2.\widehat{B}=4x$.

Suy ra $4x+x=100^\circ$, do đó $x=20^\circ$.

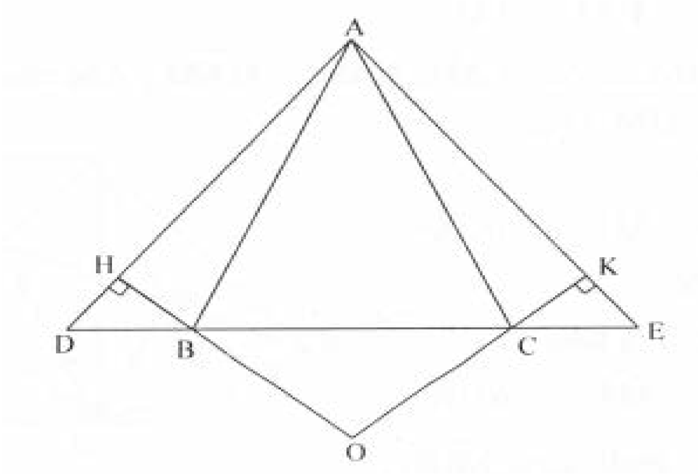
9.8.

a) $\widehat{ABD}+\widehat{ABC}=180^\circ$; $\widehat{ACE}+\widehat{ACB}=180^\circ$ (cặp góc kề bù)

mà $\widehat{ABC}=\widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{ABD}=\widehat{ACE}$

ΔABD và ΔACE có $AB=AC$; $\widehat{ABD}=\widehat{ACE}$; $BD=CE$

$\Rightarrow \Delta ABD=\Delta ACE\left(\text{c.g.c}\right) \Rightarrow AD=AE \Rightarrow \Delta ADE$ cân.

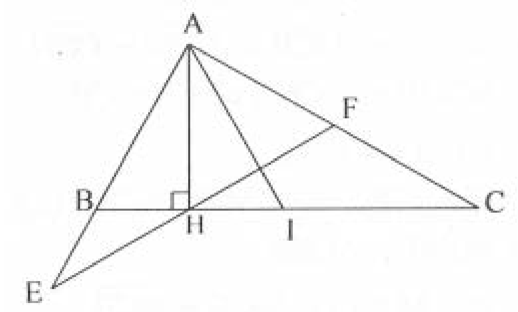


b) ΔBHD và ΔCKE có $\widehat{BHD}=\widehat{CKE}$; $\widehat{ADB}=\widehat{AEC}$; $BD=CE$

$\Rightarrow \Delta BHD=\Delta CKE \Rightarrow BH=CK$

c) $\Delta BHD=\Delta CKE \Rightarrow \widehat{HBD}=\widehat{KCE} \Rightarrow \widehat{OBC}=\widehat{OCB} \Rightarrow \Delta OBC$ cân tại O.

9.9.



a) $\Delta BHE\left(BH=BE\right)$ cân tại B $\Rightarrow \widehat{ABC}=2.\widehat{BHE}$.

Mà $\widehat{ABC}=2.\widehat{C} \Rightarrow \widehat{C}=\widehat{BHE}$

$\Rightarrow \widehat{C}=\widehat{FHC} \Rightarrow \Delta CHF$ cân tại F

$\Rightarrow FH=FC\ (1)$

Ta có $\widehat{FHC}+\widehat{FHA}=90°$; $\widehat{CAH}+\widehat{C}=90°$ mà $\widehat{FHC}=\widehat{C} \Rightarrow \widehat{FHA}=\widehat{CAH}$

$\Rightarrow \Delta FHA$ cân tại $F \Rightarrow FA=FH\ (2)$

Từ (1) và (2), suy ra: $FH=FA=FC$.

b) Trên tia HC lấy $HI=HB \Rightarrow \Delta AHB=\Delta AHI$ (c.g.c)

$\Rightarrow AB=AI$ và $\widehat{ABH}=\widehat{AIH} \Rightarrow \widehat{AIH}=2.\widehat{C}\ (1)$

Mà ΔAIC có $\widehat{AIH}=\widehat{C}+\widehat{IAC}\ (2)$

Từ (1) và (2), suy ra: $\widehat{C}+\widehat{IAC}=2\widehat{C} \Rightarrow \widehat{IAC}=\widehat{C}$

$\Rightarrow \Delta IAC$ cân tại $I \Rightarrow AI=IC$.

Từ đó suy ra $AB=IC$ mặt khác $BE=HI\left(=BH\right)$

$\Rightarrow AB+BE=IC+HI$ hay $AE=HC$.

9.10. a) ΔAIE và ΔAIH có: $\widehat{AIH}=\widehat{AIE}\left(=90°\right)$; $IE=IH$; AI chung

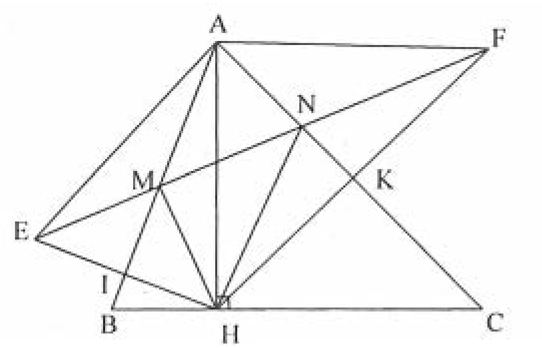
$\Rightarrow \Delta AIE = \Delta AIH\,(c.g.c) \Rightarrow AE = AH$.

Tương tự, ta có: $\Delta AKF = \Delta AKH \Rightarrow AF = AH \Rightarrow AE = AF$.

b) $\Delta AIE = \Delta AIH \Rightarrow \widehat{EAI} = \widehat{HAI}$

ΔAEM và ΔAHM có $AE = AH$; $\widehat{EAM} = \widehat{HAM}$; AM chung

$\Rightarrow \Delta AEM = \Delta AHM\,(c.g.c)$



$\Rightarrow \widehat{AEM} = \widehat{AHM}$.

Tương tự, ta có $\Delta AHN = \Delta AFN$

$\Rightarrow \widehat{AHN} = \widehat{AFN}$.

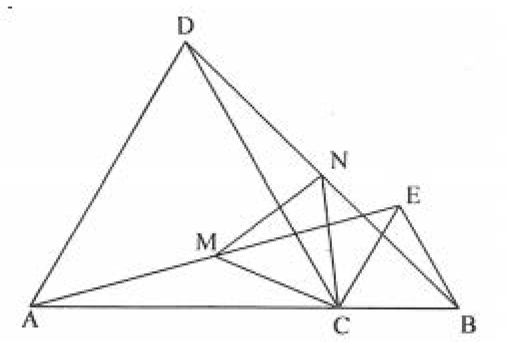
Mà ΔAEF cân tại A nên $\widehat{AEM} = \widehat{AFN} \Rightarrow \widehat{AHM} = \widehat{AHN}$.

Suy ra HA là tia phân giác $\widehat{MHN}$.

9.11.

a) ΔACE và ΔDCB có $AC = DC$; $\widehat{ACE} = \widehat{DBC}\,(=120°)$;

$EC = BC$



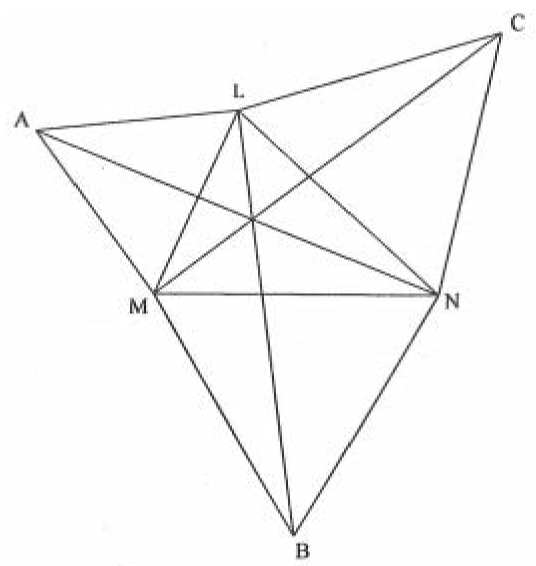
$\Rightarrow \Delta ACE = \Delta DCB\,(\text{c.g.c}) \Rightarrow AE = BD$.

b) $\Delta ACE = \Delta DCB \Rightarrow \widehat{CEM} = \widehat{CBN}$

ΔCME và ΔCNB có $CE = CB$; $\widehat{CEM} = \widehat{CBN}$; $EM = BN$

$\Rightarrow \Delta CME = \Delta CNB\,(\text{c.g.c})$.

c) $\Delta CME = \Delta CNB$



$\Rightarrow CM = CN$; $\widehat{MCE} = \widehat{NCB}$

$\Rightarrow \widehat{MCE} - \widehat{NCE} = \widehat{NCB} - \widehat{NCE} = 60°$

$\Rightarrow \widehat{MCN} = 60° \Rightarrow \Delta MNC$ là tam giác đều.

9.12. ΔMLC và ΔALN có $AL = LM$;

$\widehat{ALN} = \widehat{MLC}\left(= 60° + \widehat{MLN}\right)$;

$LN = LC \Rightarrow \Delta MLC = \Delta ALN\,(\text{c.g.c})$

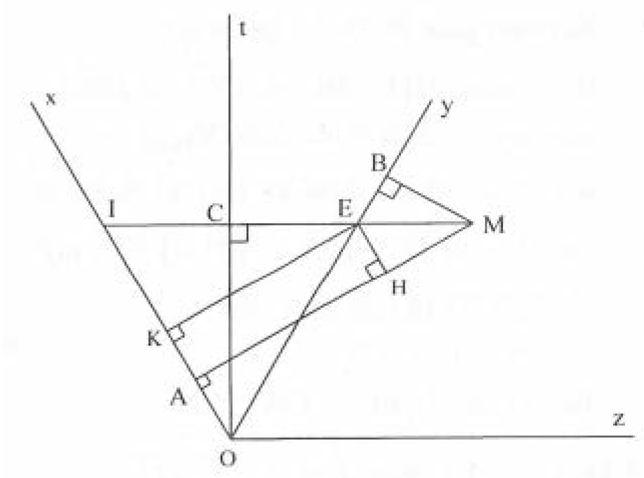
$\Rightarrow MC = AN$.

Chứng minh tương tự, ta có: $\Delta MAN = \Delta MLB(\text{c.g.c})$

$\Rightarrow AN = BL$

Từ đó suy ra: $LB = MC = NA$.

9.13.



Gọi E, I là giao điểm của MC với Oy; Ox.

$\Rightarrow \Delta EOI$ đều. Từ đó dễ dàng chứng minh được $\Delta OCE = \Delta EKO$

$\Rightarrow OC = EK$.

Vẽ $EH \perp MA$; $EK \perp OI$.

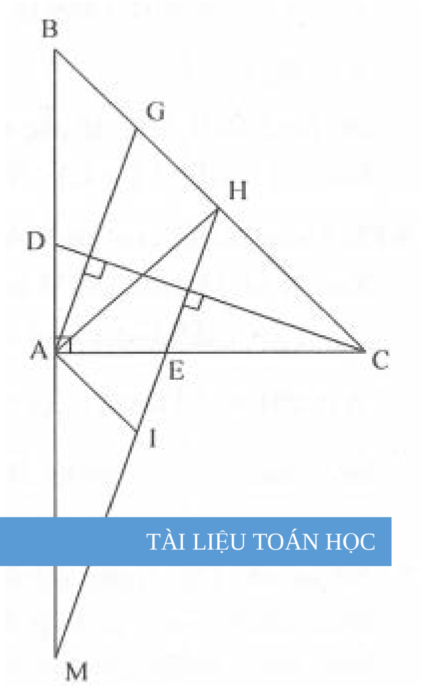
Dễ dàng chứng minh được: $\Delta MBE = \Delta MHE$

$\Rightarrow MH = MB$

$\Delta OCE = \Delta EKO \Rightarrow EK = OC$

$MA - MB = MA - MH = HA = EK = OC$.

9.14.



a) Ta có $\widehat{ACD} = \widehat{AME}\left(= 90° - \widehat{ADC}\right)$; $\widehat{CAD} = \widehat{MAE}$; $AD = AE$

$\Rightarrow \Delta ACD = \Delta AME(\text{g.c.g})$.

b) $\Delta ACD = \Delta AME \Rightarrow AC = AM \Rightarrow AB = AM$

ΔAGB và ΔMIA có: $\widehat{ABG} = \widehat{MAI}$ (đồng vị);

$AB = AM$; $\widehat{BAG} = \widehat{AMI}$ (đồng vị)

$\Rightarrow \Delta AGB = \Delta MIA(g.c.g)$.

c) $AG//MH$ (cùng vuông góc với CD)

$\Rightarrow \widehat{GAH} = \widehat{IHA}$ (cặp góc so le trong).

$AI//GH \Rightarrow \widehat{GHA} = \widehat{IAH}$ (so le trong);

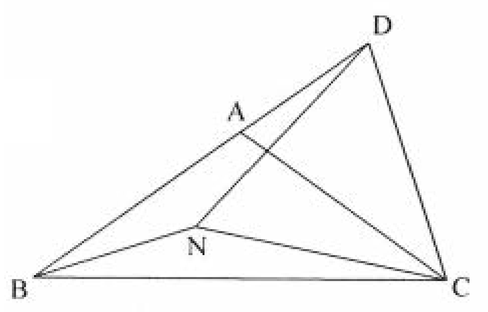
AH chung, suy ra $\Delta AGH = \Delta HIA(\text{g.c.g})$

$\Rightarrow HG = AI$ mặt khác $\Delta AGB = \Delta MIA$

$\Rightarrow AI = BG$. Từ đó suy ra $BG = HG$.

9.15. Trên tia BA lấy điểm D sao cho $BD = BC$.

Ta có tam giác BCD cân tại B.



Vì $\widehat{ABC} = 36°$ nên $\widehat{BCD} = \widehat{BDC} = \dfrac{180° - 36°}{2} = 72°$.

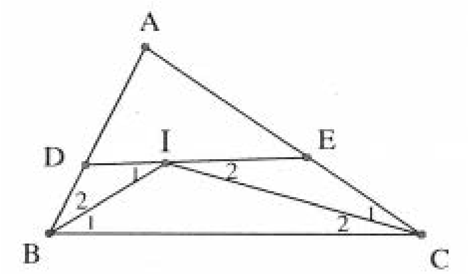
Ta lại có $\widehat{DAC} = \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 36° + 36° = 72°$ (tính chất của góc ngoài).

$\Rightarrow \widehat{BDC} = \widehat{DAC}\,(= 72°)$.

Suy ra tam giác ACD cân tại C do đó $CA = CD$ (1).

Xét tam giác BDN và BCN có:

BN chung, $BD = BC$ và $\widehat{CBN} = \widehat{DBN}$ nên suy ra $\Delta BDN = \Delta BCN\,(c.g.c)$



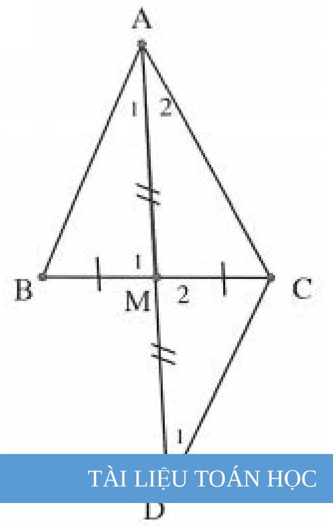
$\Rightarrow CN = DN \Rightarrow \Delta NCD$ cân tại N, lại có:
$\widehat{NCD} = \widehat{BCD} - \widehat{BCN} = 72° - 12° = 60°$

$\Rightarrow \Delta NCD$ là tam giác đều

$\Rightarrow CN = CD$ (2)

Từ (1) và (2), ta có: $CA = CN$.

9.16. $DE//BC$ nên $\widehat{I_1} = \widehat{B_1}$; $\widehat{I_2} = \widehat{C_2}$.



Mà $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$ (giả thiết)

$\widehat{C_1} = \widehat{C_2}$ (giả thiết) suy ra: $\widehat{I_1} = \widehat{B_2}$; $\widehat{I_2} = \widehat{C_1}$.

Do đó ΔDIB; ΔEIC là các tam giác cân đỉnh D và E.

Nên $DI = BD$; $EI = CE$. Vậy $DE = DI + IE = BD + CE$.

9.17. Trên tia đối của tia MA lấy D sao cho $MD = MA$.

- Xét ΔABM và ΔDCM có: $MB = MC$ (giả thiết);

$\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$ (đối đỉnh); $AM = MD$

do đó $\Delta AMB = \Delta DMC\left(\text{c.g.c}\right)$ nên $AB = DC$; $\widehat{A_1} = \widehat{D_1}$.

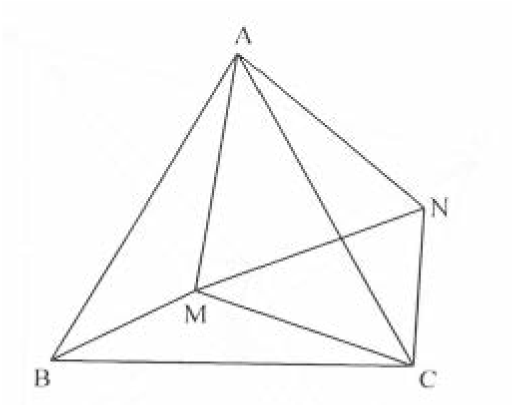
Mặt khác $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ suy ra $\widehat{D_1} = \widehat{A_2}$ hay ΔACD cân tại C

$\Rightarrow AC = CD \Rightarrow AC = AB$. Vậy ΔABC cân.

*** Nhận xét.** Để chứng minh ΔABC cân ta chưa tìm được cách nào trực tiếp để chứng minh cặp cạnh bằng nhau hoặc cặp góc bằng nhau, cũng như vận dụng $BM = CM$. Vì vậy, việc kẻ thêm đường phụ là điều cần thiết.

9.18.

Dựng tam giác đều *AMN* (*N* và *B* khác phía đối với *AC*). Ta có $MA = MN$. Mặt khác, $\widehat{CAN} = \widehat{BAM} = 60° - \widehat{MAC}$. Suy ra $\Delta MAB = \Delta NAC\left(\text{c.g.c}\right)$ dẫn đến $MB = NC$. Rõ ràng tam giác *MCN* có các cạnh tương ứng bằng MA, MB, MC.



Chương II

TAM GIÁC

Chuyên đề 10. ĐỊNH LÝ PY-TA-GO

A. Kiến thức cần nhớ

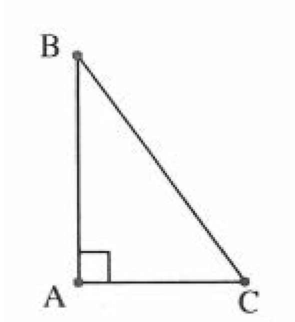
Trong toán học, **định lý Py-ta-go** là một liên hệ trong hình học phẳng giữa ba cạnh tam giác của một tam giác vuông.

- **Pythagoras** (tiếng Hy Lạp: Πυθαγόρας; sinh khoảng năm 580 đến 572 TCN - mất khoảng năm 500 đến 490 TCN) là một nhà triết học người Hy Lạp và là người sáng lập ra phong trào tín ngưỡng có tên học thuyết Pythagoras. Ông thường được biết đến như một nhà khoa học và toán học vĩ đại. Trong tiếng Việt, tên của ông thường được phiên âm từ tiếng Pháp (*Pythagore*) thành **Py-ta-go**.

- Pythagoras đã thành công trong việc chứng minh tổng 3 góc của một tam giác bằng 180° và nổi tiếng nhất nhờ định lý toán học mang tên ông. Ông cũng được biết đến là "cha đẻ của số học". Ông đã có nhiều đóng góp quan trọng cho triết học và tín ngưỡng vào cuối thế kỷ 7 TCN. Về cuộc đời và sự nghiệp của ông, có quá nhiều các huyền thoại khiến việc tìm lại sự thật lịch sử không dễ dàng. Pythagoras và các học trò của ông tin rằng mọi sự vật đều liên hệ đến toán học, và mọi sự việc đều có thể tiên đoán trước qua các chu kỳ.

1) Định lí Py-ta-go

Trong một tam giác vuông, bình phương của cạnh huyền bằng tổng các bình phương của hai cạnh góc vuông.



ΔABC vuông tại $A \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$.

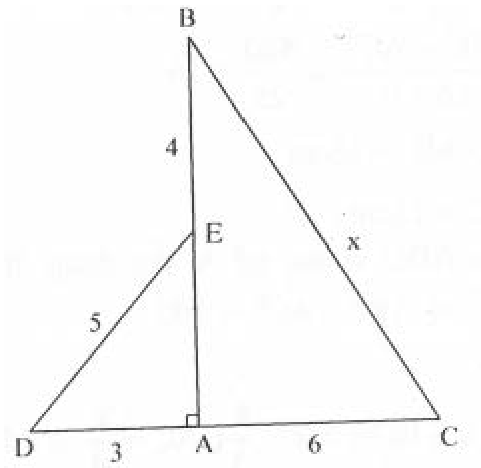
2) Định lí Py-ta-go đảo

Nếu một tam giác có bình phương của một cạnh bằng tổng các bình phương của hai cạnh kia thì tam giác đó là tam giác vuông.

$\Delta ABC : BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \widehat{BAC} = 90°$.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho hình vẽ sau. Tìm x:



Giải

* *Tìm cách giải.* Trong một tam giác vuông nếu biết độ dài hai cạnh thì tìm được độ dài cạnh thứ ba.

Xét ΔADE ta tính được AE từ đó xét ΔABC, tính được BC.

* *Trình bày lời giải.*

Tam giác ADE vuông tại A. Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:

$AD^2 + AE^2 = DE^2 \Rightarrow 3^2 + AE^2 = 5^2 \Rightarrow AE = 4$.

Từ đó suy ra $AB = 8$.

Tam giác ABC vuông tại A. Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:

$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow 8^2 + 6^2 = BC^2 \Rightarrow BC = 10$.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC vuông tại A. Biết $3AB = 4AC$ và $BC = 20\text{cm}$.

Tính độ dài các cạnh AB và AC.

Giải

* *Tìm cách giải.* Bài toán biết độ dài cạnh huyền tam giác vuông, tính độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác ấy, tất yếu suy nghĩ tới việc dùng định lý Py-ta-go.

Bài toán cho $3AB = 4AC$. Khai thác yếu tố này, chúng ta có thể giải bài toán theo ba cách:

* *Trình bày lời giải.*

- *Cách 1.* Tam giác ABC vuông tại A. Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:

$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow AB^2 + AC^2 = 400$

Từ đề bài: $3AB = 4AC \Rightarrow \dfrac{AB}{4} = \dfrac{AC}{3} \Rightarrow \dfrac{AB^2}{16} = \dfrac{AC^2}{9}$

Áp dụng tính chất dãy tỷ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{AB^2}{16} = \frac{AC^2}{9} = \frac{AB^2 + AC^2}{16+9} = \frac{400}{25} = 16$$

$\Rightarrow AB^2 = 16.16 \Rightarrow AB = 16\text{cm}$

$AC^2 = 9.16 \Rightarrow AC = 12\text{cm}$.

- *Cách 2.* Tam giác ABC vuông tại A. Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:

$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow AB^2 + AC^2 = 400$

Từ đề bài, đặt:

$$3AB = 4AC = k\left(k > 0\right) \Rightarrow AB = \frac{k}{3}; AC = \frac{k}{4} \Rightarrow AB^2 = \frac{k^2}{9}; AC^2 = \frac{k^2}{16}$$

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow \frac{k^2}{9} + \frac{k^2}{16} = 400 \Rightarrow 25k^2 = 57600 \Rightarrow k^2 = 2304$$

Với $k > 0 \Rightarrow k = 48$. Từ đó suy ra $AB = 16\text{cm}$, $AC = 12\text{cm}$.

- *Cách 3.* Tam giác ABC vuông tại A. Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:

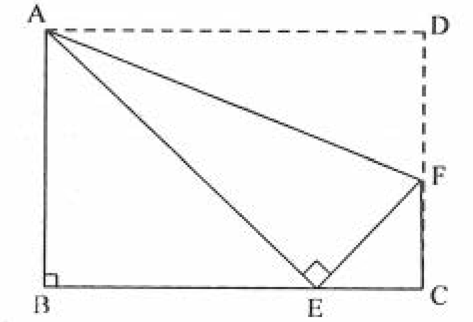
$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow AB^2 + AC^2 = 400$

Từ đề bài, đặt: $3AB = 4AC \Rightarrow AB = \dfrac{4.AC}{3} \Rightarrow AB^2 = \dfrac{16.AC^2}{9}$

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow \frac{16.AC^2}{9} + AC^2 = 400 \Rightarrow \frac{25.AC^2}{9} = 400 \Rightarrow AC^2 = 144$$

Từ đó suy ra $AC = 12\text{cm}$, $AB = 16\text{cm}$.

Ví dụ 3: Gấp mảnh giấy hình chữ nhật như hình dưới đây sao cho điểm *D* trùng với điểm *E*, là một điểm nằm trên cạnh *BC*. Biết rằng $AD = 10\text{cm}$, $AB = 8\text{cm}$. Tính độ dài của *CE*.



Giải

* *Tìm cách giải.* Khi gấp hình, chúng ta lưu ý các yếu tố bằng nhau. Suy ra được $AE = AD$

Để tính *CE*, chúng ta chỉ cần tính *BE*. Từ đó chúng ta có lời giải sau:

* *Trình bày lời giải.*

Ta có $\widehat{AEF} = \widehat{ADF} = 90°$; $AD = AE = 10\text{cm}$.

Áp dụng định lý Py-ta-go trong tam giác vuông *ABE*, ta có:

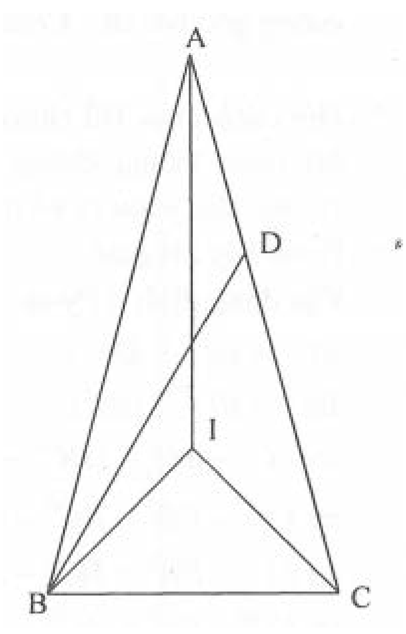
$BE^2 = AE^2 - AB^2 \Rightarrow BE^2 = 10^2 - 8^2 = 36 \Rightarrow BE = 6\text{cm}$.

Suy ra $CE = 10 - 6 = 4\text{cm}$.

Ví dụ 4: Cho tam giác *ABC* cân tại *A*, $\widehat{A} = 30°$; $BC = a$. Lấy điểm *D* trên cạnh *AC* sao cho $\widehat{CBD} = 60°$. Tính độ dài *AD* theo *a*.

Giải

- *Cách 1.* Tam giác *ABC* cân tại *A*; $\widehat{A} = 30°$ nên $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 75°$
.



Trên nửa mặt phẳng bờ *BC*, chứa điểm *A*, vẽ ΔBIC vuông cân tại *I* thì *I* nằm trong ΔABC.

Ta có: $\widehat{CBI} = 45°$; $\widehat{IBA} = 30° \Rightarrow \widehat{IBD} = 15° \Rightarrow \widehat{ABD} = 15°$.

ΔIAB và ΔIAC có $AB = AC$; $IB = IC$; *AI* là cạnh chung.

Do đó $\Delta IAB = \Delta IAC\,(\text{c.c.c}) \Rightarrow \widehat{IAB} = \widehat{IAC} = 15°$.

ΔIAB và ΔDBA có $\widehat{IBA} = \widehat{DBA}\,(= 15°)$; *AB* là cạnh chung;

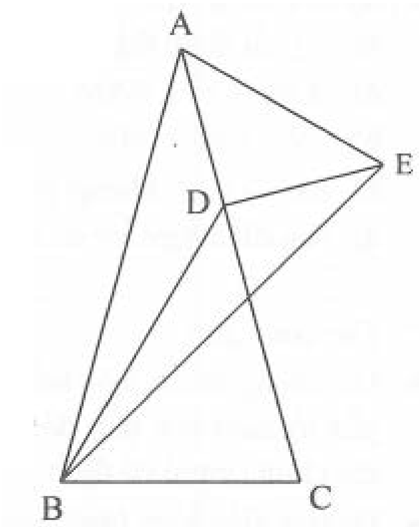
$\widehat{ABI} = \widehat{BAD}\,(= 30°)$. Do đó $\Delta IAB = \Delta DBA\,(\text{g.c.g}) \Rightarrow IB = AD$.

ΔIBC vuông cân tại *I*, theo định lý Py-ta-go, ta có:

$BI^2 + IC^2 = BC^2 = a^2 \Rightarrow 2.BI^2 = a^2 \Rightarrow BI = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$

Suy ra $AD = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

- *Cách 2.* Trên nửa mặt phẳng bờ *AC* không chứa điểm *B*, dựng tia *Ax* sao cho $\widehat{CAx} = 45°$. Trên *Ax* lấy điểm *E* sao cho $AE = BC$. Suy ra $\widehat{BAE} = 75°$.



ΔABC và ΔBAE có *AB* là cạnh chung; $\widehat{ABC} = \widehat{BAE}\,(= 75°)$; $AE = BC$. Do đó $\Delta ABC = \Delta BAE\,(\text{c.g.c})$.

$\Rightarrow AC = BE$; $\widehat{ABE} = \widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{ABE} = 30° \Rightarrow \widehat{DBE} = 15°$.

ΔABD và ΔEBD có $AB = EB\,(= AC)$; $\widehat{ABD} = \widehat{EBD}\,(= 15°)$; *BD* là cạnh chung.

Do đó $\Delta ABD = \Delta EBD\,(\text{c.g.c}) \Rightarrow AD = ED \Rightarrow \Delta AED$ vuông cân tại *D*.

ΔADE vuông cân tại *D*, theo định lý Py-ta-go, ta có:

$AD^2 + ED^2 = AE^2 = a^2 \Rightarrow 2.AD^2 = a^2 \Rightarrow AD = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

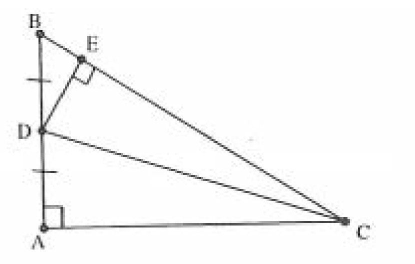
Ví dụ 5: Cho ΔABC vuông tại *A*. Lấy *D* là trung điểm của *AB*. Từ *D* vẽ *DE* vuông góc với *BC*. Chứng minh rằng: $EC^2 - EB^2 = AC^2$.

Giải

* *Tìm cách giải.* Để chứng minh đẳng thức, chỉ chứa các bình phương độ dài đoạn thẳng, chúng ta sử dụng định lý Py-ta-go vào các tam giác vuông, chú ý tạo ra vế trái, rồi biến đổi đại số tạo ra vế phải.

* *Trình bày lời giải.*

Vận dụng định lý Py-ta-go trong tam giác vuông, ta có:



$EC^2 = DC^2 - DE^2$;

$BE^2 = BD^2 - DE^2$;

$\Rightarrow EC^2 - BE^2 = \left(DC^2 - DE^2\right) - \left(BD^2 - DE^2\right)$

$\Rightarrow EC^2 - EB^2 = DC^2 - BD^2$

$\Rightarrow EC^2 - EB^2 = DC^2 - AD^2$ (vì $BD = AD$)

$\Rightarrow EC^2 - EB^2 = AC^2$.

Ví dụ 6: Cho ΔABC vuông cân tại đỉnh *A*. Qua *A* kẻ đường thẳng xy bất kỳ không cắt đoạn thẳng *BC*. Kẻ *BM* và *CN* vuông góc với xy. Chứng minh:

a) $\Delta ACN = \Delta BAM$.

b) $CN + BM = MN$.

c) $BM^2 + CN^2$ không phụ thuộc vào vị trí xy.

d) Tìm điều kiện xy để *A* là trung điểm *MN*.

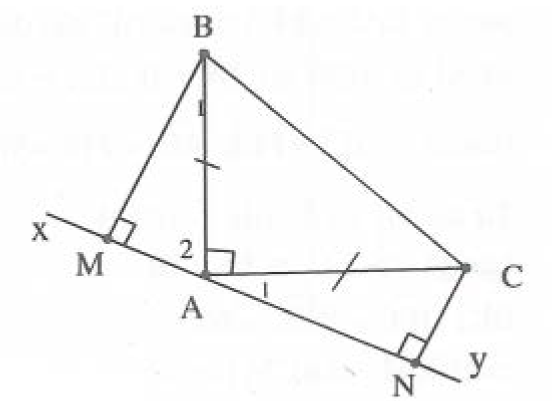
Giải

** Tìm cách giải.*

• Để chứng minh một biểu thức hình học không phụ thuộc vào vị trí của yếu tố hình học nào đó, ta biến đổi chứng tỏ biểu thức đó bằng kết quả chỉ chứa yếu tố cố định.

• Để tìm điều kiện hình học thỏa mãn yêu cầu nào đó, ta coi yêu cầu đó là giả thiết từ đó suy ra điều kiện cần tìm.

** Trình bày lời giải.*



a) Ta có: $\widehat{B_1} + \widehat{A_2} = 90°$; $\widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 90°$ nên $\widehat{B_1} = \widehat{A_1}$.

- ΔBAM và ΔACN có $\widehat{M} = \widehat{N}\left(= 90°\right)$; $\widehat{B_1} = \widehat{A_1}$; $AB = AC$ nên $\Delta BAM = \Delta ACN$ (cạnh huyền – góc nhọn)

b) $\Delta BAM = \Delta ACN$ nên $BM = AN$; $AM = CN$

Suy ra: $BM + CN = AN + AM = MN$.

c) Áp dụng định lý Py-ta-go cho tam giác vuông *BAM*:

$BM^2 + AM^2 = AB^2$ hay $BM^2 + CN^2 = AB^2$

Suy ra $BM^2 + CN^2$ không phụ thuộc vào vị trí xy.

d) $\Delta BAM = \Delta ACN$ nên $AM = CN$

$AM = AN \Leftrightarrow AN = CN$ hay ΔACN vuông cân tại *N*

$\Leftrightarrow \widehat{A_1} = 45° \Leftrightarrow xy // BC$.

**** Nhận xét.***

• Nếu gọi *I* là trung điểm của *BC* ta còn có kết quả đẹp: ΔIMN vuông cân.

Ví dụ 7: Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 50°$; $\widehat{B} = 20°$. Trên đường phân giác BE của góc $\widehat{ABC}$ lấy điểm F sao cho $\widehat{FAB} = 20°$. Gọi I là trung điểm của AF, K là giao điểm của tia EI với AB; M là giao điểm của CK với EB. Chứng minh rằng: $AI^2 + EI^2 = AF.\left(MF + \frac{1}{2}KE\right)$.

Giải

* *Tìm cách giải.* Phân tích kết luận $AI^2 + EI^2$ gợi cho chúng ta dùng định lý Py-ta-go.

Dựa vào hình vẽ, chúng ta phán đoán tam giác AIE vuông tại I. Sau đó chứng minh dự đoán này.

Phân tích từ giả thiết, với các yếu tố về góc, chúng ta tính được $\widehat{C}$; $\widehat{FAE} = 30°$; $\widehat{ABE} = \widehat{CBE} = 10°$. Từ đó tính được $\widehat{BEC} = 60°$. Từ phân tích đó, chúng ta có lời giải sau:

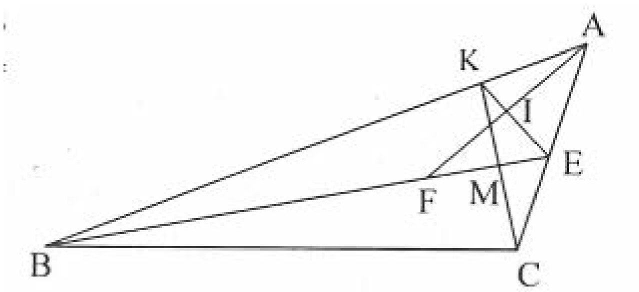
* *Trình bày lời giải.*

ΔABF có $\widehat{AFE} = \widehat{BAF} + \widehat{ABF} = 30°$ (tính chất góc ngoài của tam giác).

Suy ra $\widehat{EAF} = \widehat{EFA} \Rightarrow \Delta EAF$ cân đỉnh $E \Rightarrow EA = EF$.

ΔEAI và ΔEFI có $IA = IF$; $EA = EF$; EI là cạnh chung $\Rightarrow \Delta EAI = \Delta EFI$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{AEI} = \widehat{FEI}$; $\widehat{AIE} = \widehat{FIE} = 90° \Rightarrow \widehat{AEI} = \widehat{FEI} = \frac{1}{2}\widehat{AEF} = 60°$.



Từ đó suy ra $\Delta CEB = \Delta KEB$ (g.c.g) $\Rightarrow EC = EK$;

$BC = BK$; $\widehat{BEC} = \widehat{BEK} = 60°$

$\Rightarrow \Delta EKM = \Delta ECM$ (c.g.c)

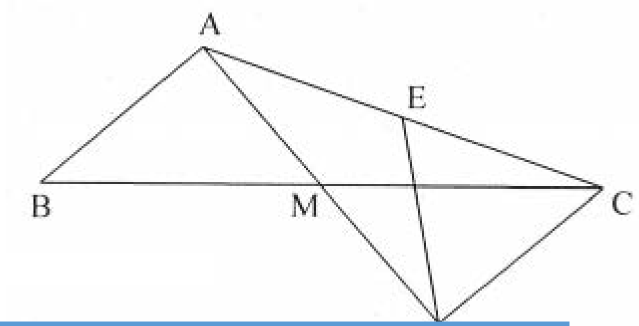
$\Rightarrow \widehat{EMK} = \widehat{EMC} = 90°$

$\Rightarrow EM = \frac{1}{2}EK$ (theo ***ví dụ 8***, chuyên đề 9)

ΔAIE vuông tại I suy ra:

$$AI^2 + EI^2 = AE^2 = AE.EF = AE(MF + EM) = AE\left(MF + \frac{1}{2}EK\right).$$

Ví dụ 8: Cho tam giác ABC có M là trung điểm của cạnh BC. Biết $AB = 2\text{cm}$; $AC = 4\text{cm}$ và $AM = \sqrt{3}\text{cm}$. Hãy tính số đo góc $\widehat{BAC}$ và độ dài BC.



Giải

Trên tia AM lấy điểm D sao cho M là trung điểm của $AD \Rightarrow AD = 2\sqrt{3}\text{cm}$

ΔAMB và ΔDMC có $MB = MC$; $\widehat{AMB} = \widehat{DMC}$; $MA = MD$

$\Rightarrow \Delta AMB = \Delta DMC\,(\text{c.g.c})$

$\Rightarrow AB = DC = 2\text{cm}$.

ΔADC có $DC^2 + AD^2 = 2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 16$; $AC^2 = 16 \Rightarrow DC^2 + AD^2 = AC^2$

$\Rightarrow \Delta ADC$ vuông tại D (định lý đảo Py-ta-go)

$\Rightarrow \widehat{MDC} = 90° \Rightarrow \widehat{MAB} = 90°$

Gọi E là trung điểm $AC \Rightarrow DE = 2\text{cm} = CE = DC$ (theo ***ví dụ 10***, chuyên đề 8) $\Rightarrow \Delta DCE$ là tam giác đều

$\Rightarrow \widehat{DCE} = 60° \Rightarrow \widehat{MAC} = 30° \Rightarrow \widehat{BAC} = 120°$.

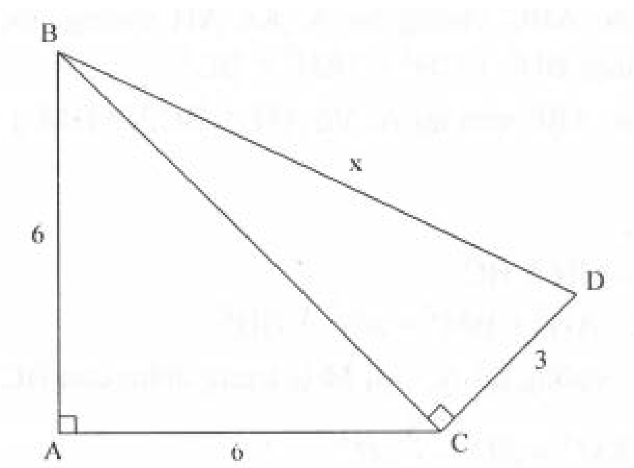
ΔABM vuông tại A nên $MB^2 = AB^2 + AM^2 = 2^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 7$

$\Rightarrow MB = \sqrt{7}\text{cm} \Rightarrow BC = 2\sqrt{7}\text{cm}$.

C. Bài tập vận dụng

10.1. Cho tam giác ABC nhọn, kẻ AH vuông góc với BC tại H. Biết $AB = 10\text{cm}$; $AH = 8\text{cm}$; $HC = 15\text{cm}$. Tính chu vi tam giác ABC.

10.2. Tìm x trong hình vẽ sau:



10.3. Cho tam giác ABC có góc A nhọn. Vẽ ra phía ngoài tam giác đó các tam giác ABM, ACN vuông cân tại A. BN và MC cắt nhau tại D.

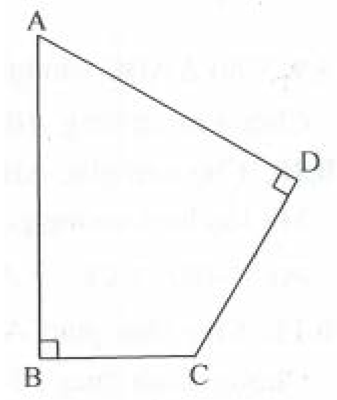
a) Chứng minh: $\Delta AMC = \Delta ABN$.

b) Chứng minh: $BN \perp CM$.

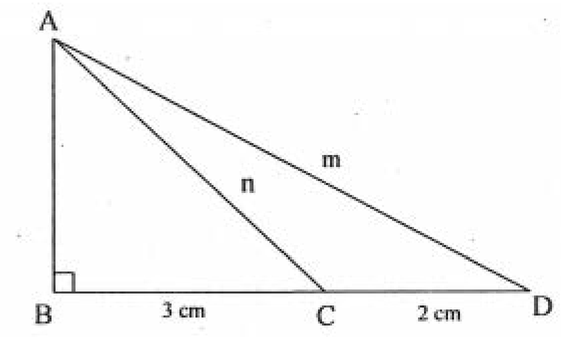
c) Cho $MB = 3\text{cm}$; $BC = 2\text{cm}$; $CN = 4\text{cm}$. Tính MN.

d) Chứng minh rằng DA là phân giác của góc MDN.

10.4. Cho hình vẽ sau. Biết rằng $\widehat{A} = 60°$; $\widehat{B} = \widehat{D} = 90°$, $BC = 4\text{cm}$; $CD = 6\text{cm}$. Tính độ dài đoạn thẳng AB?



10.5. Trong tam giác vuông dưới đây, biết $BC = 3\text{cm}$; $CD=2cm; AC = n$ và $AD = m$. Tính giá trị của $m^2 - n^2$.



10.6. Cho tam giác ABC vuông tại A. Kẻ AH vuông góc với BC tại H. Chứng minh rằng: $BH^2 + CH^2 + 2AH^2 = BC^2$.

10.7. Cho tam giác ABC cân tại A. Vẽ $AH \perp BC$. Vẽ $HM \perp AB$, $HN \perp AC$. Chứng minh:

a) ΔAMN cân;

b) Chứng minh $MN // BC$.

c) Chứng minh $AH^2 + BM^2 = AN^2 + BH^2$.

10.8. Cho ΔABC vuông tại A. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh:

$BM^2 = BC^2 - \frac{3}{4}.AC^2$.

10.9. Cho ΔABC cân tại A có $\widehat{A} < 90°$. Kẻ BH vuông góc với AC.

Chứng minh rằng $AB^2 + AC^2 + BC^2 = 2.BH^2 + 2.AH^2 + CH^2$.

10.10. Cho tam giác *ABC*. Từ điểm *M* nằm bên trong tam giác kẻ *MD*, *ME*, *MF* lần lượt vuông góc với *BC*, *CA*, *AB*. Chứng minh rằng: $AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + BF^2 + CD^2$.

10.11. Cho tam giác *ABC* nhọn có đường cao *AD*; *BE* cắt nhau tại *H*.

Chứng minh rằng: $AH^2 + BC^2 = CH^2 + AB^2$.

10.12. Cho đoạn thẳng *BC* cố định, *M* là trung điểm của đoạn thẳng *BC*. Vẽ góc CBx sao cho $\widehat{CBx} = 45°$, trên tia *Bx* lấy điểm *A* sao cho độ dài đoạn thẳng *BM* và *BA* tỉ lệ với 1 và $\sqrt{2}$. Lấy điểm *D* bất kì thuộc đoạn thẳng *BM*. Vẽ *BH* và *CI* vuông góc đường thẳng *AD*. Đường thẳng *AM* cắt *CI* tại *N*. Chứng minh rằng:

a) $BH^2 + CI^2$ có giá trị không đổi khi *D* di chuyển trên đoạn thẳng *BM*.

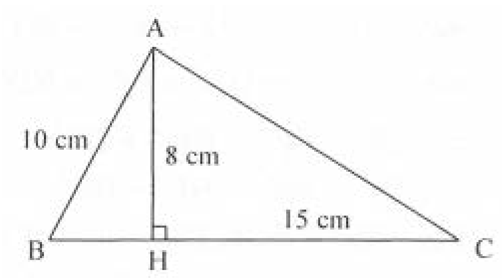
b) Tia phân giác của góc *HIC* luôn đi qua một điểm cố định.

10.13. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*. Đường cao *AH*, trên đó lấy điểm *D*. Trên tia đối *HA* lấy *E* sao cho $HE = AD$. Đường vuông góc với *AH* tại *D* cắt *AC* tại *F*. Chứng minh *EB* vuông góc với *EF*.

10.14. Cho tam giác *ABC* có góc $\widehat{A} = 30°$. Dựng bên ngoài tam giác *ABC* tam giác đều *BCD*. Chứng minh rằng $AD^2 = AB^2 + AC^2$.

Hướng dẫn giải

10.1. Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:



ΔABH vuông, nên $AH^2 + BH^2 = AB^2$

$64 + BH^2 = 100 \Rightarrow BH = 6(\text{cm})$.

ΔACH vuông, nên $AC^2 = AH^2 + HC^2$

$AC^2 = 64 + 225 \Rightarrow AC = 17(\text{cm})$.

Chu vi ΔABC là: $AB + AC + BC = 10 + 17 + 6 + 15 = 48(\text{cm})$.

10.2. Tam giác *ABC* vuông tại *A*. Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:

$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow 6^2 + 6^2 = BC^2 \Rightarrow BC^2 = 72$.

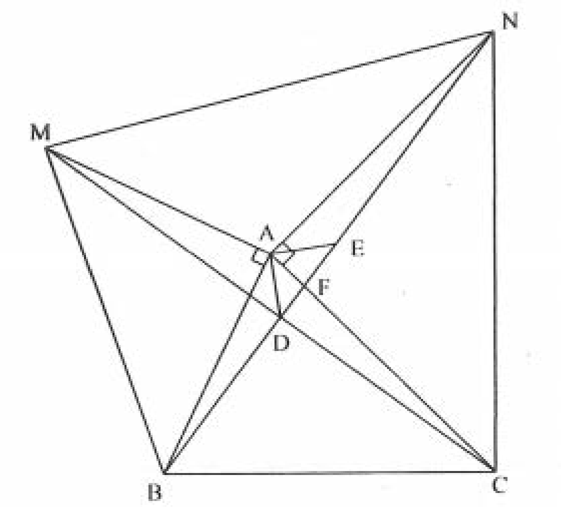
Tam giác *BCD* vuông tại *C*. Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:

$BC^2 + CD^2 = BD^2 \Rightarrow 72 + 3^2 = BD^2 \Rightarrow BD^2 = 81 \Rightarrow BD = 9$.

Từ đó suy ra $x = 9$.

10.3.

a) Ta có $\widehat{MAC} = \widehat{BAN}$ (cùng bằng $90° + \widehat{BAC}$).



$MA = AB$ (ΔMAB vuông cân tại A)

$AC = AN$ (tam giác NAC vuông cân tại A)

$\Rightarrow \Delta AMC = \Delta ABN\,(\text{c.g.c})$.

b) Gọi giao điểm của BN với AC là F.

$\widehat{ANF} = \widehat{FCD}$ (vì $\Delta AMC = \Delta ABN$), $\widehat{AFN} = \widehat{CFD}$ (đối đỉnh)

Từ đó suy ra $\widehat{FDC} = \widehat{FAN}$. Do đó $BN \perp CM$.

c) Áp dụng định lý Py-ta-go vào các tam giác vuông MDN, BDC, MDB, NDC, ta có:

$MN^2 + BC^2 = MD^2 + ND^2 + BD^2 + CD^2$

$BM^2 + CN^2 = MD^2 + BD^2 + ND^2 + CD^2$

$\Rightarrow MN^2 + BC^2 = BM^2 + CN^2$

$\Rightarrow MN^2 = MB^2 + NC^2 - BC^2$.

Thay $MB = 3\text{cm}$, $BC = 2\text{cm}$, $CN = 4\text{cm}$, vào đẳng thức $MN^2 = MB^2 + NC^2 - BC^2$, tính được $MN = \sqrt{21}\text{cm}$.

d) Trên tia BN lấy điểm E, sao cho $BE = MD$.

$\Delta AMD = \Delta ABE\,(\text{c.g.c})$

Suy ra $AD = AE \Rightarrow \Delta ADE$ cân tại A (1)

$\Delta AMD = \Delta ABE \Rightarrow \widehat{MAD} = \widehat{BAE} \Rightarrow \widehat{DAE} = \widehat{MAB} = 90°$

$\Rightarrow \Delta ADE$ vuông tại A (2).

Từ (1) và (2) $\widehat{ADE} = 45° \Rightarrow \widehat{ADE} = \frac{1}{2}\widehat{MDN}$.

$\Rightarrow DA$ là phân giác của $\widehat{MDN}$.

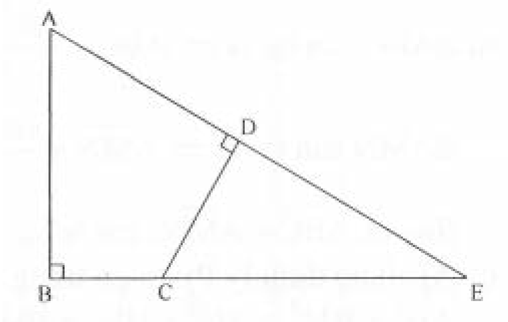
10.4. Ta kéo dài AD và BC sao cho chúng cắt nhau tại E. Suy ra $\widehat{E} = 30°$.

ΔCDE vuông tại D có $\widehat{E} = 30°$ nên $CE = 2.CD = 12\text{cm}$ (theo ***ví dụ 8***, chuyên đề 9)

$\Rightarrow BE = 4 + 12 = 16\text{cm}$.

Đặt $AB = x$, ΔABE vuông tại B có $\widehat{E} = 30°$ nên $AE = 2.AB = 2x$ (theo ***ví dụ 8***, chuyên đề 9).

Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:



$BE^2 + AB^2 = AE^2$

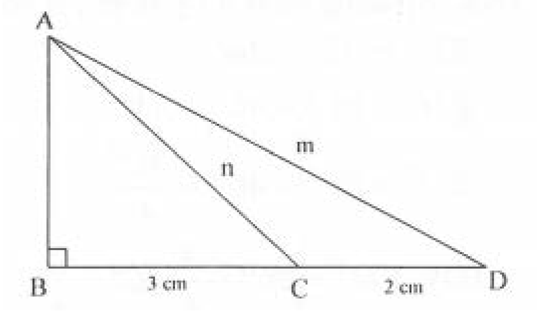
$BE^2 = 16^2 = 256$

Ta có $AB^2 = x^2$; $AE^2 = 4x^2$.

Nên $256 + x^2 = 4x^2 \Leftrightarrow 256 = 3x^2$

$\Leftrightarrow x^2 = \dfrac{256}{3} \Rightarrow x = \dfrac{16}{\sqrt{3}} = \dfrac{16\sqrt{3}}{3}$cm.

10.5. ΔABC vuông suy ra: $AB^2 = AC^2 - BC^2$



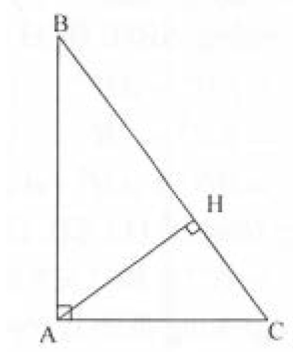
ΔABD vuông suy ra: $AB^2 = AD^2 - BD^2$

Do đó: $AD^2 - BD^2 = AC^2 - BC^2$

$\Rightarrow AD^2 - AC^2 = BD^2 - BC^2$

$\Rightarrow m^2 - n^2 = 5^2 - 3^2 = 16$.

10.6. Áp dụng định lý Py-ta-go trong tam giác vuông *ABC*, *AHB*, *AHC*, ta có:



$BC^2 = AB^2 + AC^2$

$\Rightarrow BC^2 = AH^2 + BH^2 + AH^2 + HC^2$

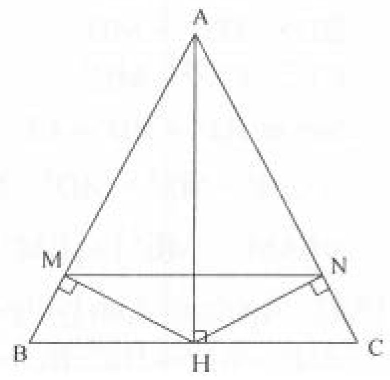
$\Rightarrow BC^2 = BH^2 + CH^2 + 2.AH^2$ (điều phải chứng minh).

10.7.

a) ΔAHB và ΔAHC có $AB = AC$; $\widehat{AHB} = \widehat{AHC}\left(=90°\right)$; $\widehat{B} = \widehat{C}$

$\Rightarrow \Delta AHB = \Delta AHC$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow BH = CH$; $\widehat{BAH} = \widehat{CAH}$.



ΔAMH và ΔANH có $\widehat{AMH} = \widehat{CAH}\left(=90°\right)$; $\widehat{MAH} = \widehat{NAH}$; *AH* chung

$\Rightarrow \Delta AMH = \Delta ANH$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow AM = AN \Rightarrow \Delta AMN$ cân.

b) ΔABC cân tại $A \Rightarrow \widehat{ABC} = \dfrac{180^\circ - \widehat{A}}{2}$.

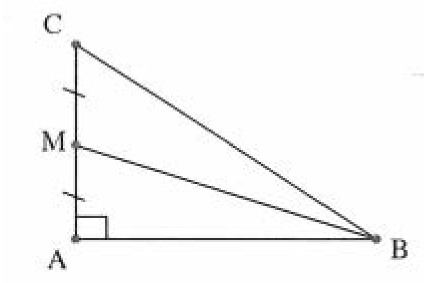
ΔAMN cân tại $A \Rightarrow \widehat{AMN} = \dfrac{180^\circ - \widehat{A}}{2}$.

Suy ra $\widehat{ABC} = \widehat{AMN}$, mà hai góc ở vị trí đồng vị nên $MN // BC$.

c) Áp dụng định lý Py-ta-go trong các tam giác vuông, ta có:

$AH^2 + BM^2 = AN^2 + HN^2 + BH^2 - HM^2 = AN^2 + BH^2$ (vì $HM = HN$).

10.8. Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:



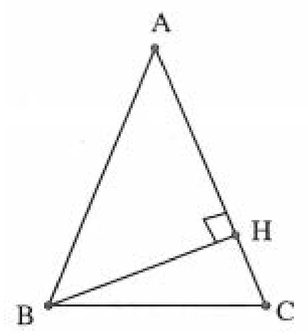
$BM^2 = AB^2 + AM^2$

$BM^2 = BC^2 - AC^2 + AM^2$

$BM^2 = BC^2 - AC^2 + \dfrac{AC^2}{4}$

Hay $BM^2 = BC^2 - \dfrac{3}{4}.AC^2$.

10.9. Áp dụng định lý Py-ta-go cho các tam giác vuông ABH; BCH ta có:



$AB^2 = BH^2 + AH^2 \ (1)$

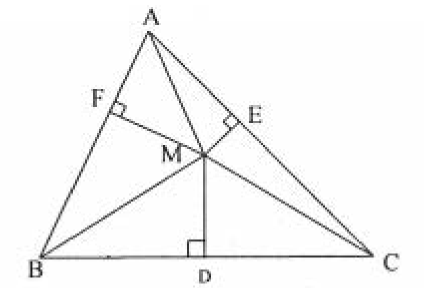
$BC^2 = BH^2 + CH^2 \ (2)$

$AC^2 = BH^2 + AH^2$ (vì $AB = AC$) (3).

Cộng từng vế (1), (2), (3), ta có:

$AB^2 + AC^2 + BC^2 = 3.BH^2 + 2.AH^2 + CH^2$.

10.10. Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:



$AF^2 = AM^2 - MF^2$

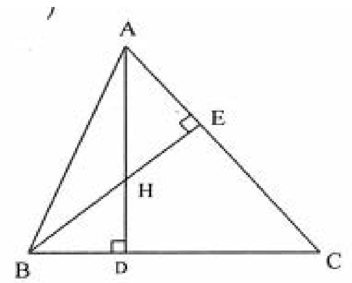
$BD^2 = BM^2 - MD^2$

$CE^2 = CM^2 - ME^2$

Suy ra $AF^2 + BD^2 + CE^2 = AM^2 + BM^2 + CM^2 - MF^2 - MD^2 - ME^2$

$= \left(AM^2 - ME^2\right) + \left(BM^2 - MF^2\right) + \left(CM^2 - MD^2\right) = AE^2 + BF^2 + CD^2$.

10.11. Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:

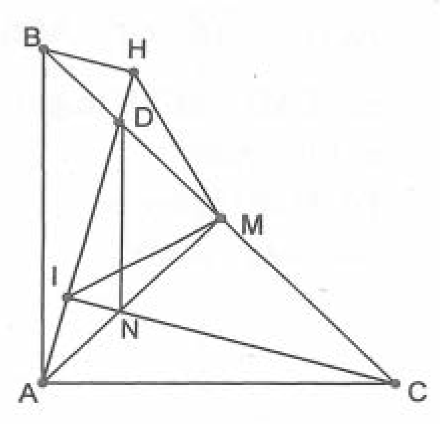


$AH^2 = AE^2 + HE^2$; $BC^2 = BE^2 + CE^2$

$\Rightarrow AH^2 + BC^2 = AE^2 + BE^2 + HE^2 + CE^2$.

$= AB^2 + CH^2$.

10.12. a) Từ M kẻ tia My vuông góc với BC và cắt tia Bx tại A'.



Tam giác BMA' vuông cân tại M nên $MB : BA' = 1 : \sqrt{2}$

Suy ra $A \equiv A'$ nên AM vuông góc với BC

Ta có $\Delta AMB = \Delta AMC\left(\text{c.g.c}\right)$ nên $AB = AC$ và góc $\widehat{ACB} = 45°$

Tam giác ABC vuông cân tại A và có $\widehat{BAH} = \widehat{ACI} = 90° - \widehat{CAH}$

H, I là hình chiếu của B và C trên AD nên $\widehat{H} = \widehat{I} = 90°$

Suy ra $\Delta AIC = \Delta BHA\left(\text{c.h} - \text{g.n}\right)$

$\Rightarrow CI = AH$.

Ta có $BH^2 + CI^2 = BH^2 + AH^2 = AB^2$ (không đổi).

b) $\Delta BHM = \Delta AIM\ \left(\text{c.g.c}\right) \Rightarrow HM = MI$ và $\widehat{BMH} = \widehat{IMA}$

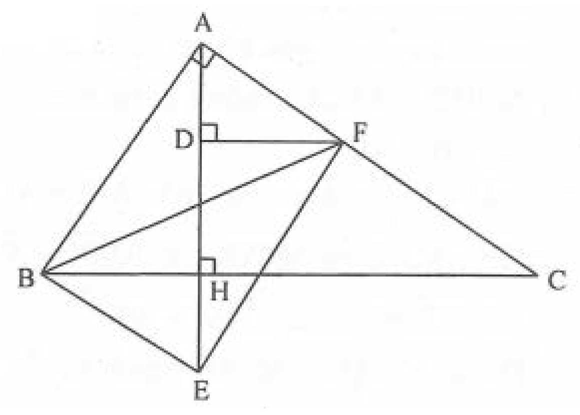
mà $\widehat{IMA} + \widehat{BMI} = 90° \Rightarrow \widehat{BMH} + \widehat{BMI} = 90°$.

$\Rightarrow \Delta HMI$ vuông cân $\Rightarrow \widehat{HIM} = 45°$ mà $\widehat{HIC} = 90° \Rightarrow \widehat{HIM} = \widehat{MIC} = 45°$

$\Rightarrow IM$ là tia phân giác của góc $\widehat{HIC}$.

Vậy tia phân giác của góc $\widehat{HIC}$ luôn đi qua điểm cố định M.

10.13. Vì $AD = HE\left(\text{gt}\right)$ nên $AH = DE$.



Áp dụng định lý Py-ta-go trong các tam giác vuông ABF; ABH; ADF; BHE; DEF ta được:

$BF^2 = AB^2 + AF^2$

$= \left(BH^2 + AH^2\right) + \left(AD^2 + DF^2\right)$

$= BH^2 + DE^2 + HE^2 + DF^2$

(vì $AH^2 = DE^2$; $AD^2 = HE^2$)

$= \left(BH^2 + HE^2\right) + \left(DE^2 + DF^2\right)$

$\Rightarrow BF^2 = BE^2 + EF^2$

Suy ra tam giác BEF vuông tại E (định lý Py-ta-go đảo) $\Rightarrow BE \perp EF$.

10.14.

Dựng ra phía ngoài ΔABC tam giác đều ACE.

$\Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{BAC} + \widehat{CAE} = 90^\circ$ và $AC = AE = CE$.

ΔABE có $\widehat{BAE} = 90^\circ$ theo định lý Py-ta-go, ta có: $AB^2 + AE^2 = BE^2$

$\Rightarrow AB^2 + AC^2 = BE^2$ (1)

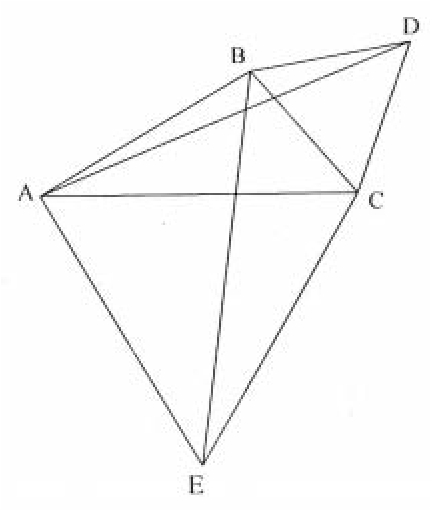
ΔCAD và ΔCEB có $CA = CE$; $\widehat{ACD} = \widehat{ECB}\left(= 60^\circ + \widehat{ACB}\right)$;

$CD = CB$

$\Rightarrow \Delta CAD = \Delta CEB(\text{c.g.c})$

$\Rightarrow BE = AD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $AB^2 + AC^2 = AD^2$.



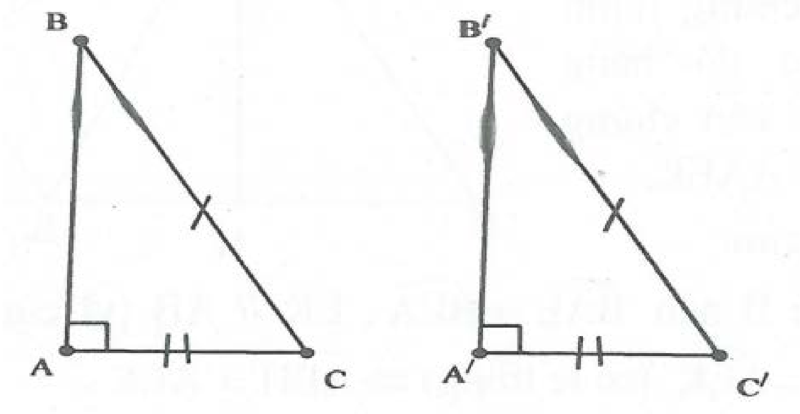
Chuyên đề 11. CÁC TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CỦA TAM GIÁC VUÔNG

A. Kiến thức cần nhớ

Ngoài các trường hợp bằng nhau đã biết của hai tam giác vuông, còn có trường hợp bằng nhau theo cạnh huyền – cạnh góc vuông.

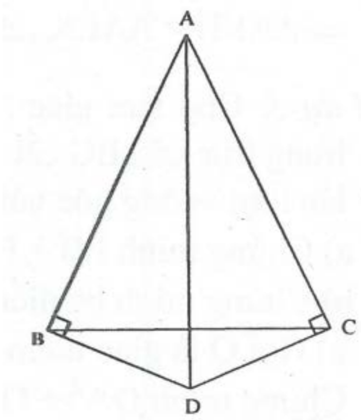
- Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{A} = \widehat{A'} = 90^\circ \\ BC = B'C' \\ AC = A'C' \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C' \text{ (cạnh huyền – cạnh góc vuông).}$$



B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho tam giác cân tại A. Đường thẳng vuông góc với AB tại B cắt đường thẳng vuông góc với AC tại C ở D. Chứng minh rằng AD là tia phân giác của góc BAC.



Giải

* *Tìm cách giải.* Để chứng minh AD là tia phân giác của góc BAC, chúng ta cần chứng minh $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$. Do đó hiển nhiên cần chứng minh $\Delta BAD = \Delta CAD$.

* *Trình bày lời giải.*

Xét ΔBAD và ΔCAD có: $\widehat{ABD} = \widehat{ACD} \left(= 90°\right)$; AD là cạnh chung; $AB = AC$ (ΔABC cân tại A).

Do đó $\Delta BAD = \Delta CAD$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{CAD}$ (cặp góc tương ứng).

Vậy AD là tia phân giác góc BAC.

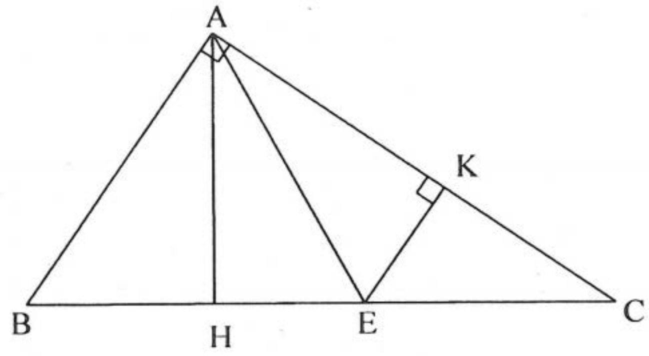
* *Nhận xét.* Chúng ta còn có DA là tia phân giác của góc BDC, tam giác DBC cân tại D.

AD vuông góc với BC.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC vuông tại A, vẽ AH vuông góc với BC. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BE = BA$. Kẻ $EK \perp AC \left(K \in AC\right)$. Chứng minh rằng $AK = AH$.

Giải

* *Tìm cách giải.* Để chứng minh $AK = AH$, chúng ta cần ghép chúng vào hai tam giác và chứng minh hai tam giác đó bằng nhau. Do vậy cần chứng minh $\Delta AEH = \Delta AEK$.



* *Trình bày lời giải.*

ΔABE cân tại B nên $\widehat{BAE} = \widehat{BEA}, EK // AB$ (vì cùng vuông góc với AC) $\Rightarrow \widehat{EAB} = \widehat{AEK}$ (so le trong) $\Rightarrow \widehat{AEH} = \widehat{AEK}$

$\Rightarrow \Delta AEH = \Delta AEK$ (cạnh huyền - góc nhọn), suy ra $AK = AH$.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC (AB < AC), M là trung điểm của BC. Đường trung trực của BC cắt tia phân giác của góc BAC tại điểm P. Vẽ PH và PK lần lượt vuông góc với đường thẳng AB và đường thẳng AC.

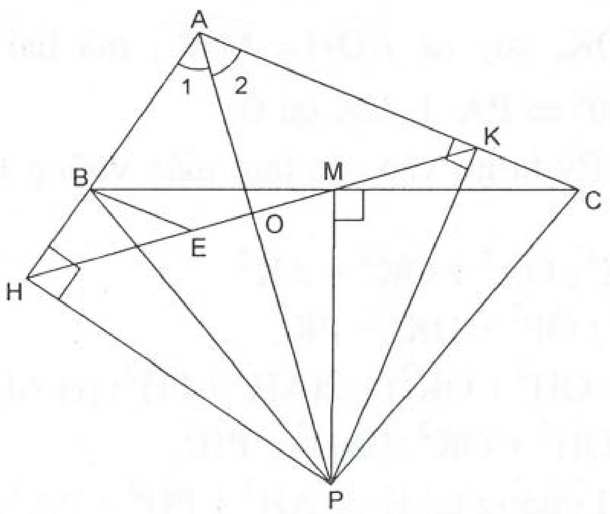
a) Chứng minh PB = PC và BH = CK.

b) Chứng minh ba điểm H, M, K thẳng hàng.

c) Gọi O là giao điểm của PA và HK.

Chứng minh $OA^2 + OP^2 + OH^2 + OK^2 = PA^2$

Giải



a) ΔPMB và ΔPMC có $\widehat{PMB} = \widehat{PMC} (= 90°), MB = MC$, MP là cạnh chung

$\Rightarrow \Delta PMB = \Delta PMC \ (c.g.c) \Rightarrow PB = PC$ (hai cạnh tương ứng)

b) ΔPHA và ΔPKA có $\widehat{PHA}=\widehat{PKA}\left(=90^\circ\right),\widehat{PAH}=\widehat{PAK}$, AP là cạnh chung

$\Rightarrow \Delta PHA=\Delta PKA$ (cạnh huyền - góc nhọn)

$\Rightarrow PH=PK$ (hai cạnh tương ứng)

ΔPHB và ΔPKC có $\widehat{PHB}=\widehat{PKC}=90^\circ, PB=PC,\ PH=PK$

$\Rightarrow \Delta PHB=\Delta PKC$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông)

$\Rightarrow BH=CK$ (hai cạnh tương ứng)

b) Kẻ $BE//AC\left(E\in HK\right)\Rightarrow \widehat{BEH}=\widehat{AKH}$ (hai góc đồng vị) (1)

Mà $\Delta PHA=\Delta PKA$ (chứng minh trên) $\Rightarrow AH=AK$ (hai cạnh tương ứng)

$\Rightarrow \Delta AHK$ cân tại A $\Rightarrow \widehat{AHK}=\widehat{AKH}$ (tính chất tam giác cân) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{BEH}=\widehat{AHK}$ hay $\widehat{BEH}=\widehat{BHE}$

$\Rightarrow \Delta BEH$ cân tại $B\Rightarrow BH=BE.$

Mà $BH=CK$ (chứng minh trên) $\Rightarrow BE=CK$

ΔBEM và ΔCKM có $MB=MC,\widehat{EBM}=\widehat{KCM},\ BE=CK$

$\Rightarrow \Delta BEM=\Delta CKM$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{BME}=\widehat{CMK}$ (hai góc tương ứng)

Mà $\widehat{BME}+\widehat{EMC}=180^\circ$ (hai góc kề bù)

$\Rightarrow \widehat{CMK}+\widehat{EMC}=180^\circ\Rightarrow \widehat{EMK}=180^\circ\Rightarrow$ E, M, K thẳng hàng.

Mà $E\in HK\Rightarrow H, M, K$ thẳng hàng.

c) ΔAOH và ΔAOK có $AH=AK,\widehat{OAH}=\widehat{OAK},\ AO$ là cạnh chung

$\Rightarrow \Delta AOH=\Delta AOK$, suy ra $\widehat{AOH}=\widehat{AOK}$, mà hai góc này kề bù nên

$\widehat{AOH}=\widehat{AOK}=90^\circ\Rightarrow PA\perp HK$ tại O.

Áp dụng định lý Py-ta-go vào các tam giác vuông tại O là OAH, OAK, OPH, OPK ta có:

$OA^2+OH^2=AH^2; OA^2+OK^2=AK^2$

$OP^2+OH^2=PH^2; OP^2+OK^2=PK^2$

$\Rightarrow 2\left(OA^2+OP^2+OH^2+OK^2\right)=2\left(AH^2+PH^2\right)$ (vì $AH=AK$ và $PH=PK$)

$\Rightarrow OA^2+OP^2+OH^2+OK^2=AH^2+PH^2$

Mà tam giác PAH vuông tại H $\Rightarrow AH^2 + PH^2 = PA^2$ (định lý Py-ta-go)

$\Rightarrow OA^2 + OP^2 + OH^2 + OK^2 = PA^2$

C. Bài tập vận dụng

11.1. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên cạnh BC lấy D, E (D nằm giữa B và E) sao cho $BD = CE$. Vẽ $DM \perp AB$ tại M, $EN \perp AC$ tại N. Gọi K là giao điểm của MD và NE. Chứng minh rằng:

a) $\Delta MBD = \Delta NCE$;

b) $\Delta MAK = \Delta NAK$.

11.2. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên tia đối của tia BC lấy điểm D, trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Kẻ $BH \perp AD$ tại H, kẻ $CK \perp AE$ tại K.

Chứng minh rằng:

a) $\Delta BHD = \Delta CKE$;

b) $\Delta AHB = \Delta AKC$;

c) $BC // HK$.

11.3. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC, AM là tia phân giác góc A. Kẻ MH vuông góc với AB; MK vuông góc với AC. Chứng minh rằng:

a) $MH = MK$;

b) ΔABC cân.

11.4. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{C} = 30°$, đường cao AH. Trên đoạn HC lấy điểm D sao cho $HD = HB$. Từ C kẻ $CE \perp AD$. Chứng minh rằng:

a) Tam giác ABD là tam giác đều.

b) EH song song với AC.

11.5. Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $BD = BA$. Qua D vẽ đường thẳng vuông góc với BC cắt AC tại E.

a) Chứng minh rằng: $AE = DE$.

b) Đường phân giác góc ngoài tại C cắt đường thẳng BE tại K. Tính $\widehat{BAK}$.

11.6. Cho tam giác ABC có $AB = AC$; $\widehat{BAC} = 90°$ và M là trung điểm của BC. Trên tia đối của tia CB lấy điểm D. Kẻ BK vuông góc với đường thẳng AD tại K. Chứng minh rằng KM là tia phân giác của $\widehat{BKD}$.

11.7. Cho tam giác DEF vuông tại D và $DF > DE$. Kẻ DH vuông góc với EF (H thuộc cạnh EF). Gọi M là trung điểm của EF. Chứng minh rằng $\widehat{MDH} = \widehat{E} - \widehat{F}$.

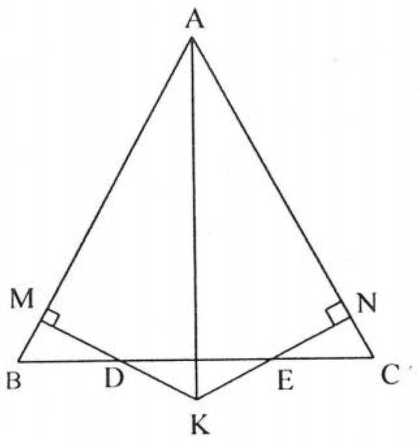
11.8. Cho tam giác ABC vuông cân đáy BC. Gọi M, N là trung điểm của AB, AC. Kẻ $NH \perp CM$ tại H, kẻ $HE \perp AB$ tại E. Chứng minh rằng:

a) Tam giác ABH cân.

b) HM là tia phân giác góc BHE.

HƯỚNG DẪN GIẢI

11.1.



a) Xét ΔMBD và ΔNCE có: $\widehat{BMD} = \widehat{CNE}\left(=90°\right)$;

$\widehat{B} = \widehat{C}; BD = CE$. Do đó $\Delta MBD = \Delta NCE$

(cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow MB = NC$.

b) $\Delta MBD = \Delta NCE$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow MB = NC$

$AM + MB = AN + NC$ nên $AM = AN$

Xét ΔMAK và ΔNAK có: $\widehat{AMK} = \widehat{ANK}\left(=90°\right)$;

AK là cạnh chung; AM = AN.

Do đó $\Delta MAK = \Delta NAK$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông).

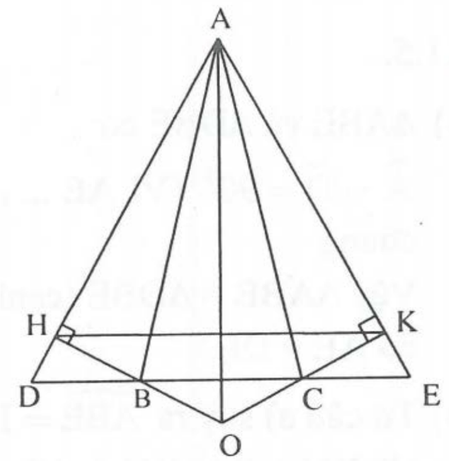
11.2.

a) Ta có $\widehat{ABD} + \widehat{ABC} = 180°; \widehat{ACE} + \widehat{ACB} = 180°$ mà

$\widehat{ABC} = \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{ACE} = \widehat{ABD}$

ΔABD và ΔACE có $AB = AC; \widehat{ABD} = \widehat{ACE}; BD = CE$

$\Rightarrow \Delta ABD = \Delta ACE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{AEC}$



ΔBHD và ΔCKE có $\widehat{BHD} = \widehat{CKE}\left(=90°\right); \widehat{HDB} = \widehat{KEC}$;

$BD = CE \Rightarrow \Delta BHD = \Delta CKE$ (cạnh huyền – góc nhọn).

b) Ta có ΔAHB và ΔAKC có $\widehat{AHB} = \widehat{AKC}\left(=90°\right)$;

$AB = AC; BH = CK\left(\Delta BHD = \Delta CKE\right)$

$\Rightarrow \Delta AHB = \Delta AKC$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông).

c) $\Delta AHB = \Delta AKC \Rightarrow AH = AK$

$\Rightarrow \Delta AHK$ cân tại A $\Rightarrow \widehat{AHK} = \dfrac{180^\circ - \widehat{HAK}}{2}$

ΔADE cân tại A $\Rightarrow \widehat{ADE} = \dfrac{180^\circ - \widehat{DAE}}{2}$

$\Rightarrow \widehat{AHK} = \widehat{ADE} \Rightarrow HK // DE$. Vậy BC // HK.

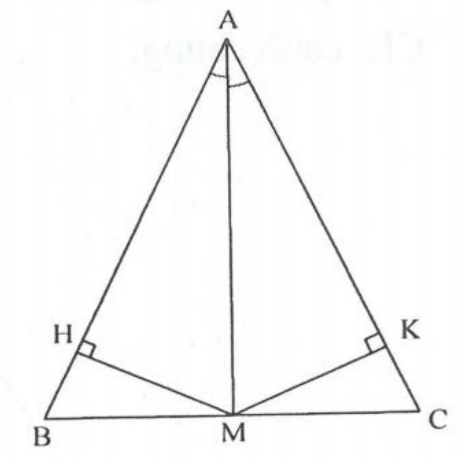
11.3.

a) ΔAHM và ΔAKM có: $\widehat{AHM} = \widehat{AKM} = 90^\circ$;

AM chung; $\widehat{HAM} = \widehat{KAM}$

$\Rightarrow \Delta AHM = \Delta AKM$ (cạnh huyền góc nhọn)

$\Rightarrow MH = MK$.



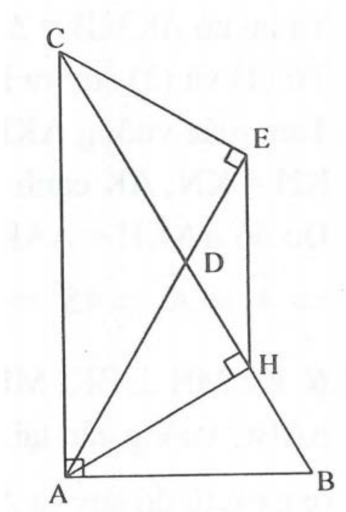
b) ΔBHM và ΔCKM có $\widehat{BHM} = \widehat{CKM} (= 90^\circ)$;

$BM = MC; MH = MK$

$\Rightarrow \Delta BHM = \Delta CKM$ (cạnh huyền, cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} \Rightarrow \Delta ABC$ cân tại A.

11.4.



a) $\Delta AHB = \Delta AHD$ (c.g.c), suy ra AB = AD.

ΔABC vuông tại A, có $\widehat{C} = 30^\circ$ nên $\widehat{B} = 60^\circ$.

Tam giác ABD cân, có $\widehat{B} = 60^\circ$ nên ΔABD là tam giác đều.

b) $\widehat{EAC} = \widehat{BAC} - \widehat{BAE} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

$\Rightarrow \widehat{EAC} = \widehat{ACB}$

$\Rightarrow \Delta AHC = \Delta CEA$ (cạnh huyền – góc nhọn)

Suy ra CH = AE.

ΔADC cân tại vì $\widehat{DAC} = \widehat{DCA}$ nên DA = DC.

Suy ra $AE - AD = CH - CD$ hay $DE = DH$. Do đó ΔDEH cân tại D, hai tam giác cân DAC và DEH có góc ở đỉnh $\widehat{ADC} = \widehat{EHD} \Rightarrow \widehat{EAC} = \widehat{AEH}$

$\Rightarrow EH // AC$.

11.5.

a) ΔABE và ΔDBE có:

$\widehat{A} = \widehat{D} = 90°$ (Vì $AE \perp AB, AD \perp BC$) $AB = AD$ (giả thiết), BE: cạnh chung

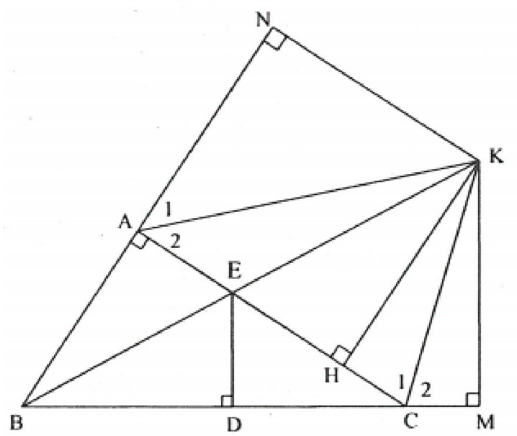
Vậy $\Delta ABE = \Delta DBE$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow AE = DE$.

b) Từ câu a) suy ra $\widehat{ABE} = \widehat{DBE}$, do đó BK là phân giác của góc ABC.

Vẽ $KN \perp BA, KH \perp AC, KM \perp BC$.

Tam giác vuông KMC và tam giác vuông KHC có: $\widehat{C_2} = \widehat{C_1}$ (giả thiết); CK cạnh chung.



Do đó $\Delta KMC = \Delta KHC$ (cạnh huyền – góc nhọn), suy ra $KM = KH$ (1)

Ta lại có $\Delta KMB = \Delta KNB$ (cạnh huyền – góc nhọn) nên $KM = KN$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $KH = KN$

Tam giác vuông AKH và tam giác vuông AKN có:

$KH = KN; AK$ cạnh chung.

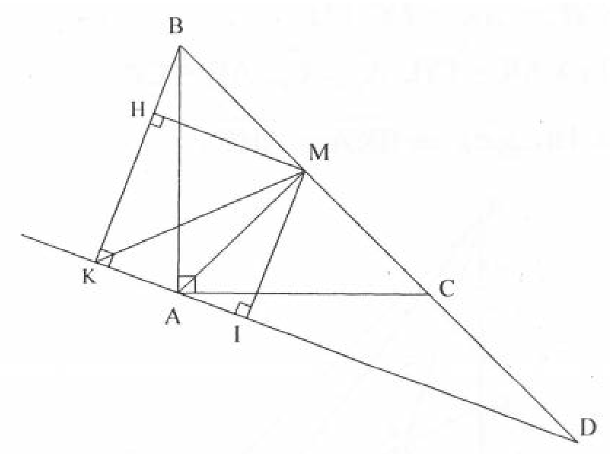
Do đó $\Delta AKH = \Delta AKN$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A_2} = 45° \Rightarrow \widehat{BAK} = 135°$

11.6. Kẻ $MH \perp BK, MI \perp KD$

ΔABC vuông cân tại A có $MB = MC$ nên dễ dàng suy ra $\Delta AMB = \Delta AMC$ (c.c.c), từ đó suy ra $AM \perp BC, \widehat{BMA} = \widehat{CAM}$

$\Rightarrow AM = MB; \widehat{MAC} = 45°$



Ta có: $\widehat{KBA}=\widehat{CAD}\left(=90^\circ-\widehat{BAK}\right)\Rightarrow \widehat{KBC}=\widehat{MAI}$

ΔBMH và ΔAMI có $\widehat{AIM}=\widehat{BHM}=90^\circ; BM=AM$

$\widehat{MBH}=\widehat{MAI}\Rightarrow \Delta BMH=\Delta AMI$ (cạnh huyền – góc nhọn)$\Rightarrow MH=MI$.

ΔMHK và ΔMIK có $\widehat{MHK}=\widehat{MIK}=90^\circ$, MK chung; MH = MI

$\Rightarrow \Delta MHK=\Delta MIK$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông) $\Rightarrow \widehat{HKM}=\widehat{IKM}$

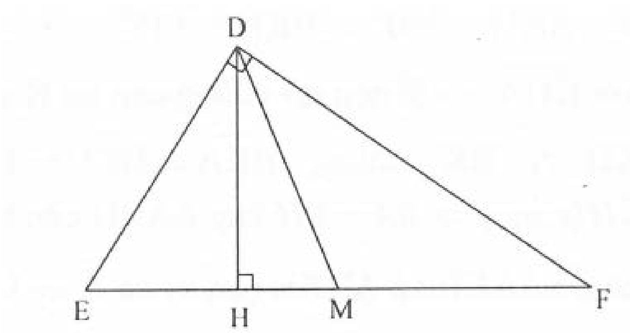
Vậy KM là tia phân giác $\widehat{BKD}$

11.7. Áp dụng ***ví dụ 10*** chuyên đề 8, ta có: ME = MD

$\Rightarrow \Delta MDE$ cân tại M $\Rightarrow \widehat{MDE}=\widehat{E}$

Mặt khác, ta có: $\widehat{HDE}=\widehat{F}$ (cùng phụ với góc HDF)

Ta có: $\widehat{MDH}=\widehat{MDE}-\widehat{HDE}=\widehat{E}-\widehat{F}$



11.8.

a) Từ A kẻ $AK\perp MC$ tại K và $AQ\perp HN$ tại Q.

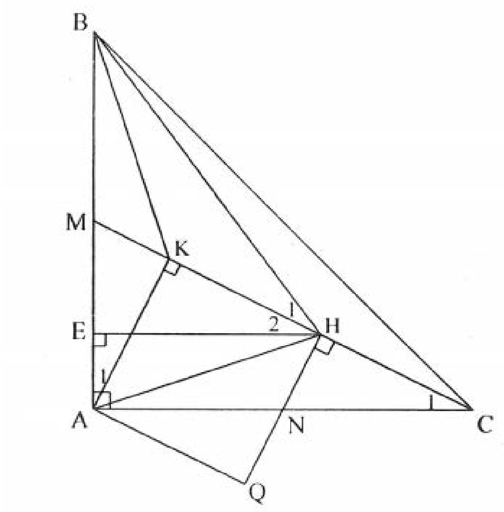
Hai tam giác vuông MAK và NCH có

$MA=NC\left(=\dfrac{1}{2}AB\right),\widehat{A_1}=\widehat{C_1}$ (cùng phụ với góc AMC)

$\Rightarrow \Delta MAK=\Delta NCH\Rightarrow AK=HC$ (1)

ΔBAK và ΔACH có AK = CH, $\widehat{A_1}=\widehat{C_1}$, AB = CA

$\Rightarrow \Delta BAK=\Delta ACH\left(c.g.c\right)\Rightarrow \widehat{BKA}=\widehat{AHC}$



ΔAQN và ΔCHN có AN = NC,

$\widehat{ANQ} = \widehat{CNH} \Rightarrow \Delta ANQ = \Delta CNH\left(ch - gn\right) \Rightarrow AQ = CH$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: AK = AQ.

ΔAKH và ΔAQH có $\widehat{AKH} = \widehat{AQH} = 90°, AK = AQ, AH$ chung

$\Rightarrow \Delta AKH = \Delta AQH\left(ch - cgv\right)\widehat{KHA} = \widehat{QHA} \Rightarrow HA$ là tia phân giác của góc KHQ

$\Rightarrow \widehat{AHQ} = 45° \Rightarrow \widehat{AHC} = 135° \Rightarrow \widehat{BKA} = 135°$

Từ $\widehat{BKA} + \widehat{BKH} + \widehat{AKH} = 360° \Rightarrow \widehat{BKH} = 135°$

Tam giác AKH có $\widehat{KHA} = 45°$ nên nó vuông cân tại K suy ra KA = KH.

$\Rightarrow \Delta BKA = \Delta BKH\left(c.g.c\right) \Rightarrow BA = BH$ hay ΔABH cân tại B.

b) Dễ chứng minh được ΔAKB và $\Delta HKB\left(c.c.c\right) \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{H_1}$

Mà $HE // CA \Rightarrow \widehat{H_2} = \widehat{C_1}$ (góc đồng vị) vì $\widehat{A_1} = \widehat{C_1} \Rightarrow \widehat{H_1} = \widehat{H_2}$.

Hay HM là tia phân giác góc BHE.

Chuyên đề 12. VẼ HÌNH PHỤ ĐỂ GIẢI TOÁN

A. Kiến thức cần nhớ

Trong một số bài toán ở các chuyên đề trước, chúng ta đã phải vẽ thêm hình phụ thì mới giải được. Trong chuyên đề này, chúng ta hệ thống một vài kỹ thuật về hình phụ để giải toán.

1. Mục đích của việc vẽ thêm hình phụ

Khi vẽ thêm đường phụ, chúng ta thường nhằm các mục đích sau đây:

- Đem những điều kiện đã cho của bài toán và những hình có liên quan đến chứng minh tập hợp (ở một hình mới) làm cho chúng có liên quan đến nhau.

- Tạo nên đoạn thẳng thứ ba (hoặc góc thứ ba) làm cho hai đoạn thẳng (hoặc hai góc) cần chứng mình trở lên có mối quan hệ với nhau.

- Tạo nên đoạn thẳng (hay góc) bằng tổng, hiệu gấp đôi hay bằng $\frac{1}{2}$ đoạn thẳng (hay góc) cho trước để đạt được chứng minh của bài tập hình học.

- Tạo nên những đại lượng mới (đoạn thẳng hay góc) bằng nhau, thêm vào những đại lượng bằng nhau mà đề bài đã cho để giúp cho việc chứng minh.

- Tạo nên một hình mới, để có thể áp dụng một định lý nào đó.

- Biến đổi kết luận, hình vẽ làm cho bài toán trở lên dễ chứng minh hơn.

2. Các loại đường phụ thường vẽ

- Kéo dài một đoạn thẳng cho trước với một độ dài tùy ý hoặc cắt một đường thẳng khác.

- Nối hai điểm cho trước hoặc cố định

- Từ một điểm cho trước dựng đuờng thẳng song song với một đường thẳng cho trước.

- Dựng đường phân giác của một góc cho trước.

- Dựng đường thẳng đi qua một điểm cho trước hợp thành với đường thẳng khác một góc bằng một góc cho trước.

* *Chú ý:* Khi vẽ đường phụ phải có mục đích không vẽ tùy tiện.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{A}=100^\circ$. Tia phân giác của góc B cắt AC tại D.

Chứng minh $BC = AD + BD$.

Giải

* ***Tìm cách giải.*** Đây là bài toán khó tuy nhiên nếu bạn biết lưu tâm đến giả thiết của bài toán và phương pháp kẻ đường phụ thì bài toàn trở nên đơn giản. Phân tích kết luận, chúng ta có hai hướng vẽ đường phụ cho bài toán này.

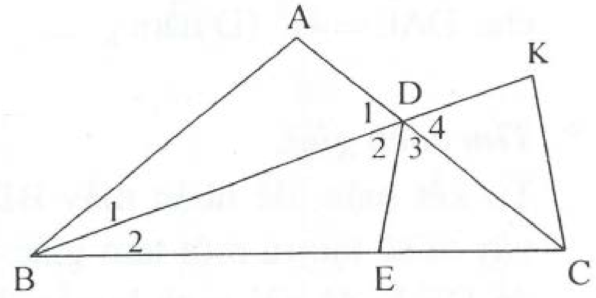
- Vì A, D, B không thẳng hàng, mà kết luận $AD + BD = BC$, do vậy chúng ta vẽ thêm hình phụ sao cho $AD + BD$ bằng một đoạn thẳng. Sau đó chứng minh đoạn thẳng đó bằng BC.

- Phân tích kết luận, chúng ta cũng có thể nghĩ tới việc tách BC thành tổng hai đoạn thẳng mà trong đó có một đoạn thẳng bằng BD (hoặc AD) và chứng minh đoạn thẳng còn lại bằng AD (hoặc BD).

Trong hai hướng suy nghĩ trên, chúng ta lưu ý đến giả thiết là tam giác cân và biết số đo góc để tính tất cả các góc có thể.

*** Trình bày lời giải**

- *Cách vẽ 1.* Trên tia đối của tia DB lấy điểm K sao cho $DA = DK$. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BE = BA$.



ΔABC cân tại A có $\widehat{A} = 100°$ nên $\widehat{B} = \widehat{C} = 40°$.

Ta có: $\Delta ABD = \Delta EBD$ (c.g.c) $\Rightarrow AD = DE$,

$\widehat{BED} = \widehat{BAD} = 100° \Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{D_2} = \widehat{D_3} = 60°$

Mà BD là tia phân giác của góc B nên $\widehat{B_1} = \widehat{B_2} = 20°$

Mặt khác: $\widehat{BDC} = 120° \Rightarrow \widehat{D_4} = 60°$. Từ đó ta có:

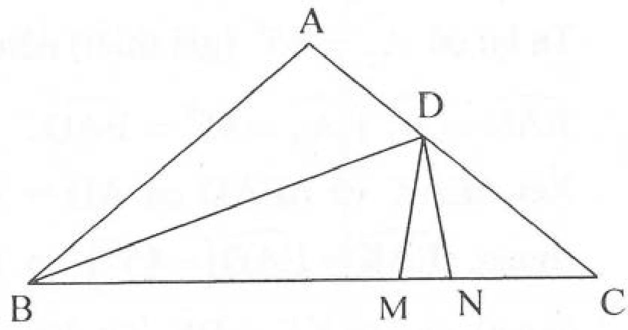
$\Delta KDC = \Delta EDC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{DKC} = \widehat{DEC} = 180° - 100° = 80°$

$\Rightarrow \widehat{KCB} = 80° \Rightarrow \Delta BKC$ cân tại B $\Rightarrow BC = BK = BD + DK = BD + AD$

Vậy $BC = BD + AD$.

- *Cách vẽ 2.* Trên tia BC lấy điểm M sao cho $BM = BA$, lấy điểm N sao cho $BN = BD$.

Ta có: $\Delta ABD = \Delta MBD$ (c.g.c) $\Rightarrow AD = DM\,(*), \widehat{A} = \widehat{BMD} = 100°$.



Do $\widehat{BMD} = 100° \Rightarrow \widehat{DNM} = 80°$ (1)

Mặt khác ΔBDN cân tại B nên

$\widehat{BDN} = \widehat{BND} = 80°$ (2)

Từ (1) (2) ta có: ΔMDN cân tại D

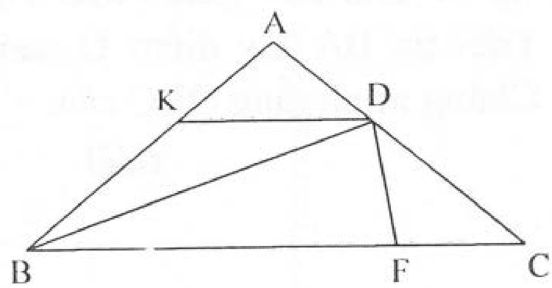
nên $DM = DN$ (**)

Ta có: $\widehat{NDC} = \widehat{NCD} = 40°$

$\Rightarrow \Delta DNC$ cân tại N, nên $NC = ND$ (***)

Từ (*)(**)(***) $\Rightarrow AD = NC \Rightarrow BC = BN + NC \Rightarrow BC = BD + AD$.

- *Cách vẽ 3.* Trên cạnh BC lấy điểm F sao cho $BF = BD$, trên cạnh AB lấy điểm K sao cho $AK = AD$. Ta sẽ chứng minh được tam giác BKD



cân tại K nên $KB = KD$, mà $KB = DC$

nên $KD = DC$ do đó $\Delta AKD = \Delta FDC$ $(g.c.g) \Rightarrow AD = FC$

$\Rightarrow BC = BF + FC = BD + AD.$

Vậy $BC = BD + AD.$

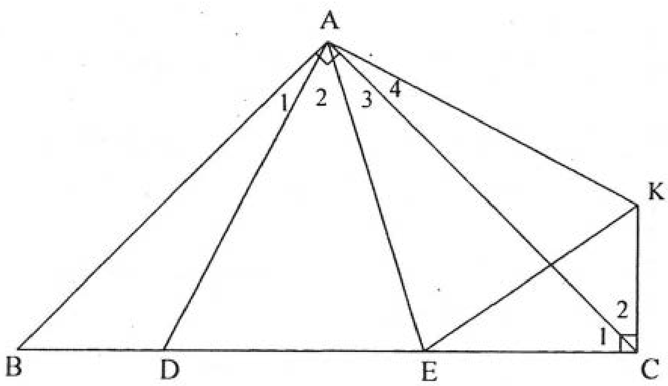
Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, các điểm D và E thuộc BC sao cho $\widehat{DAE} = 45°$ (D nằm giữa B và E). Chứng minh rằng $BD^2 + CE^2 = DE^2$.

Giải

*** Tìm cách giải.***

Từ kết luận, để nhận thấy BD, CE, DE thỏa mãn định lý Py-ta-go. Do vậy ta sẽ tạo ra một tam giác vuông có ba cạnh bằng BD, CE, DE trong đó DE là độ dài cạnh huyền. Do BD, CE, DE cùng nằm trên một đường thẳng. Do vậy cần kẻ thêm đường phụ. Từ C kẻ $CK \perp BC$ và lấy $CK = BD$ (K và A cùng phía đối với BC). Chỉ cần chứng minh $KE = DE.$

*** Trình bày lời giải.***



Từ C kẻ $CK \perp BC$ và lấy $CK = BD$

(K và A cùng phía đối với BC). Ta

có $\widehat{C_2} = 90° - \widehat{C_1} = 90° - 45° = \widehat{B},$

$CK = BD$ (theo cách dựng)

$AC = AB$ (giả thiết)

Do đó $\Delta ACK = \Delta ABD$ $(c.\ g.\ c)$,

suy ra $AK = AD, \widehat{A_4} = \widehat{A_1}$

Ta lại có $\widehat{A_2} = 45°$ (giả thiết) nên $\widehat{A_1} + \widehat{A_3} = 45°$ suy ra:

$\widehat{EAK} = \widehat{A_4} + \widehat{A_3} = 45° = \widehat{EAD}$

Xét ΔEAK và ΔEAD có $AD = AK$, AE là cạnh

chung, $\widehat{EAK} = \widehat{EAD} (= 45°) \Rightarrow \Delta EAK = \Delta EAD$

(c.g.c), suy ra $KE = DE$. Từ đây, hiển nhiên ta có

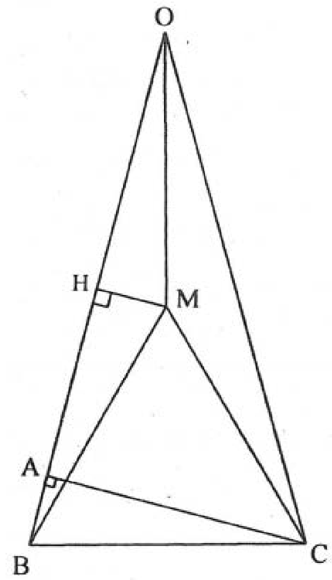
điều phải chứng minh.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC vuông tại A, $\widehat{C} = 15°$.

Trên tia BA lấy điểm O sao cho $BO = 2AC$.

Chứng minh rằng OBC cân.

Giải



* ***Tìm cách giải.*** Trong bài toán trên, vì phát hiện thấy $\widehat{C}=15^\circ$ suy ra $\widehat{B}=75^\circ$, mà $75^\circ-15^\circ=60^\circ$ là số đo của mỗi góc trong tam giác đều.

Điều này gợi ý cho chúng ta vẽ tam giác đều BCM như hình vẽ. Nhờ các cạnh của tam giác đều bằng nhau, các góc của tam giác đều là 60°, chúng ta chứng minh được $\Delta HMB=\Delta ABC\ (c.g.c)$; $\Delta MOB=\Delta MOC\ (c.g.c)$ dẫn tới ΔOBC cân tại O. Do đó nên nghĩ tới việc vận dụng vẽ thêm tam giác đều vào giải toán.

* ***Trình bày lời giải***

Ta có: ΔABC; $\widehat{A}=\ 90^\circ$; $\widehat{C}=15^\circ(gt)\Rightarrow\widehat{B}=75^\circ$.

Vẽ tam giác đều BCM.

(M và A cũng thuộc nửa mặt phẳng bờ BC)

Ta có: $\widehat{OBM}=\widehat{ABC}-\widehat{MBC}=75^\circ-60^\circ=15^\circ$

Gọi H là trung điểm của OB $\Rightarrow HO=HB=\dfrac{1}{2}OB$

Mặt khác $BO=2AC$ (gt) nên $AC=\dfrac{1}{2}OB$ từ đó ta có $AC=BH$

Xét ΔHMB và ΔABC có: $BH=AC$ (cmt) $\widehat{HBM}=\widehat{ACB}\ (=15^\circ)$;

$MB=BC$ (cạnh Δ đều BMC)

Do đó $\Delta HMB=\Delta ABC$ (c.g.c) $\Rightarrow\widehat{H}=\widehat{A}=90^\circ\Rightarrow MH\perp OB$

ΔMBH và ΔMOH có $\widehat{MHB}=\widehat{MHO}=90^\circ$, $BH=HO$, MH chung

$\Rightarrow\Delta MBH=\Delta MOH\ \Rightarrow\widehat{OBM}=\widehat{BOM}\Rightarrow\widehat{OBM}=\widehat{BOM}=15^\circ$.

$\Rightarrow\widehat{BMO}=180^\circ-2.15^\circ=150^\circ$

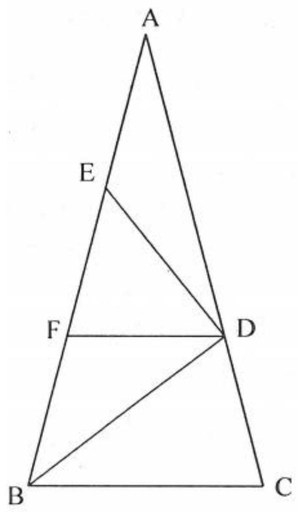
Từ đó MB = MC, $\widehat{CMO}=\widehat{BMO}(=150^\circ)$, OM là cạnh chung

Do đó $\Delta MOB=\Delta MOC\ (c-g-c)\Rightarrow OB=OC$.

Vậy ΔOBC cân tại O. (điều phải chứng minh)

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC cân tại A, đường phân giác BD. Trên tia BA lấy điểm E sao cho BE = 2CD. Chứng minh rằng $\widehat{EDB} = 90°$.

Giải



* ***Tìm cách giải.*** Từ giả thiết BE = 2CD, gợi ý cho chúng ta vẽ trung điểm F của BE. Muốn chứng minh $\widehat{EDB} = 90°$ mà FB = FE, nên chúng ta chỉ cần chứng minh BF = FD = FE.

* ***Trình bày lời giải***

- ***Cách 1.*** Gọi F là trung điểm của BE thì FB = CD (cùng bằng $\frac{1}{2}BE$). Mà AB = AC (tam giác ABC cân tại A) nên AF = AD. Suy ra tam giác AFD cân tại A.

Từ đó $\widehat{AFD} = \widehat{ABC}$ (cùng bằng $\frac{180° - \widehat{BAC}}{2}$).

Suy ra DF // BC (hai góc đồng vị bằng nhau),

nên $\widehat{FBD} = \widehat{FDB}$ (cùng bằng $\widehat{DBC}$). Điều này dẫn đến tam giác FBD cân tại F, hay

$FD = FB = \frac{1}{2}BE.$

Tam giác BDE có F là trung điểm cạnh BE và $DF = \frac{1}{2}BE$ nên tam giác BDE vuông tại D hay $\widehat{EDB} = 90°$ (điều phải chứng minh).

- ***Cách 2.*** Từ D kẻ $DF//BC$ $(F \in AB)$. Suy ra $\widehat{FDB} = \widehat{CBD}$ (so le trong)

$\Rightarrow \widehat{FDB} = \widehat{FBD} \Rightarrow \Delta FBD$ cân tại $F \Rightarrow BF = FD$

Mặt khác, ΔAFD và ΔABC cân tại A, suy ra AF = AD, AB = AC

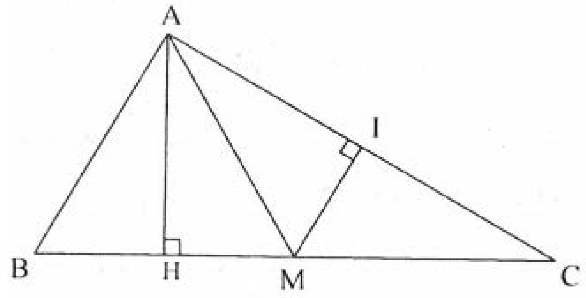
$\Rightarrow$ BF = CD.

Từ đó suy ra BF = FD = FE $\Rightarrow$ tam giác BDE vuông tại D hay $\widehat{EDB} = 90°$ (điều phải chứng minh).

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC (AB < AC), kẻ AH vuông góc với BC tại H. Gọi M là trung điểm của BC. Biết rằng AH và AM chia góc A thành 3 góc bằng nhau. Chứng minh rằng:

a) Tam giác ABC vuông.

b) Tam giác ABM là tam giác đều.



Giải

* ***Tìm cách giải***. Muốn chứng minh tam giác ABC vuông tại A ta cần kẻ thêm đường thẳng vuông góc với AC và chứng minh đường thẳng đó song song với AB, từ đó suy ra $AB \perp AC$ và suy ra $\widehat{A} = 90°$.

* ***Trình bày lời giải.***

a) Vẽ MI vuông góc với AC.

ΔAHM và ΔAIM có $\widehat{AHM} = \widehat{AIM} = 90°$, AM là cạnh chung, $\widehat{HAM} = \widehat{IAM}$

$\Rightarrow \Delta MAI = \Delta MAH(\text{c.h}-\text{g.n}) \Rightarrow \text{MI} = \text{MH}$

ΔAHM và ΔAHB có $\widehat{AHM} = \widehat{AHB} = 90°$, AH là cạnh chung,

$\widehat{HAM} = \widehat{HAB} \Rightarrow \Delta AHM = \Delta AHB(g.c.g) \Rightarrow BH = MH$

$\Rightarrow BH = MH = \frac{1}{2}BM \Rightarrow MI = \frac{1}{2}MC \Rightarrow \widehat{C} = 30°; \widehat{HAC} = 60°$

Vậy $\widehat{BAC} = (60°.3):2 = 90° \Rightarrow$ Tam giác ABC vuông tại A.

b) Ta có $\widehat{C} = 30° \Rightarrow \widehat{B} = 60°; AM = BM = \frac{1}{2}BC \Rightarrow$ tam giác ABM cân có một góc bằng $60° \Rightarrow$ tam giác ABM đều.

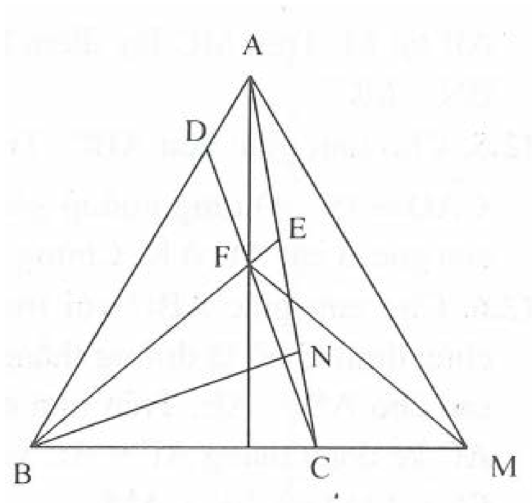
* *Nhận xét:* Trong bài toán trên nếu chỉ có các yếu tố bài ra thì tưởng chừng như rất khó giải, tuy nhiên, chỉ bằng một đường vẽ thêm ($MI \perp AC$) thì bài toán lại trở nên rất dễ dàng, qua đó càng thấy rõ vai trò của việc vẽ thêm yếu tố phụ trong giải toán hình học.

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC với $\widehat{BAC} = 40°$ và $\widehat{ABC} = 60°$. Gọi D và E theo thứ tự là các điểm nằm trên cạnh AB và AC sao cho $\widehat{DCB} = 70°$ và $\widehat{EBC} = 40°$; F là giao điểm của DC và EB. Chứng minh rằng AF vuông góc với BC.

Giải

Trên AC lấy điểm N sao cho $\widehat{ABN} = 40°$. Ta có $\widehat{ABN} = \widehat{BAN} = 40°$ nên ΔABN cân tại N, suy ra $\widehat{BNC} = 80°$ (tính chất góc ngoài của tam giác). Do đó $\widehat{BNC} = \widehat{BCN} = 80°$ suy ra ΔBCN cân tại B

$\Rightarrow BN = BC$ (1)



ΔBFC có $\widehat{FBC} = 40°, \widehat{FCB} = 70°$ nên $\widehat{BFC} = 70°$

Vậy ΔBFC cân tại B $\Rightarrow$ $BC = BF$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra BN = BF (3). Kéo dài BC lấy điểm M sao cho BM = BA

$\Rightarrow \Delta ABM$ đều.

Xét ΔABN và ΔMBF có AB = MB, BN = BF (do (3)), $\widehat{ABN} = \widehat{FBM} = 40°$, do đó $\Delta ABN = \Delta MBF$ (c.g.c). Mà ΔABN cân tại N, suy ra ΔMBF cân tại F. Từ AB = AM (do ΔABM đều), $FB = FM \Rightarrow \Delta ABF = \Delta AMF$ $(c.c.c)$, suy ra $\widehat{BAF} = \widehat{MAF}$.

Mặt khác, ΔABM đều nên AF vuông góc với BC.

* *Nhận xét:*

- Bài toán này tương đối khó vì phải vẽ thêm nhiều đường phụ.

- Ngoài cách giải trên đây, có thể dựng thêm tam giác đều BCK hoặc tam giác đều AFH, cũng đi đến kết luận của bài toán.

C. Bài tập vận dụng

12.1. Cho ΔABC (AB = AC), trên cạnh AB lấy điểm D, trên phần kéo dài của cạnh AC lấy điểm E sao Cho BD = CE. Gọi F là giao điểm của DE và BC. Chứng minh DF = FE

12.2. Cho ΔABC có $\widehat{B} = 45°; \widehat{A} = 15°$. Trên tia đối của tia CB lấy D sao cho CD = 2.CB. Tính $\widehat{ADB}$

12.3. Ở trong góc nhọn $\widehat{xOy}$ vẽ Oz sao cho $\widehat{xOz} = \frac{1}{2}\widehat{yOz}$. Qua điểm A thuộc Oy vẽ AH vuông góc Ox cắt Oz ở B. Trên tia Bz lấy D sao cho BD = OA. Chứng minh tam giác AOD cân.

12.4. Cho ΔABC có $\widehat{ABC} = 50°; \widehat{BAC} = 70°$. Tia phân giác góc ACB cắt AB tại M. Trên MC lấy điểm N sao cho $\widehat{MBN} = 40°$. Chứng minh rằng: $BN = MC$

12.5. Cho tam giác đều ABC. Trên tia đối của tia CB, lấy điểm D sao cho $\widehat{CAD} = 15^\circ$. Đường vuông góc với BC tại C cắt AD ở E. Tia phân giác của góc B cắt AD ở K. Chứng minh rằng AK = ED.

12.6. Cho tam giác ABC với trung điểm M của BC. Trên nửa mặt phẳng chứa đỉnh C bờ là đường thẳng AB kẻ đoạn thẳng AE vuông góc với AB sao cho AB = AE. Trên nửa mặt phẳng chứa đỉnh B bờ là đường thẳng AC kẻ đoạn thẳng AF = AC và AF vuông góc với AC. Chứng minh rằng $EF = 2AM$ và $EF \perp AM$.

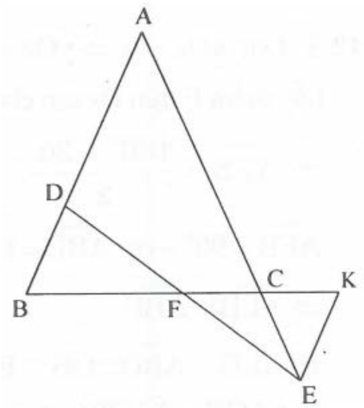
12.7. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi E là trung điểm của cạnh AC. Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với BE cắt BC tại D. Chứng minh rằng AD = 2ED.

12.8. Về phía ngoài của tam giác ABC, dựng tam giác XBC cân tại X có góc BXC bằng 120° và các tam giác YCA, ZAB đều. Chứng minh XA vuông góc với YZ.

12.9. Cho tam giác ABC vuông tại A và $\widehat{ABC} = 54^\circ$ .Gọi M là trung điểm của BC. Đường thẳng AM và đường phân giác trong CD của tam giác cắt nhau tại E. Chứng minh rằng CE = AB.

12.10. Cho ΔABC vuông tại A, AB < AC. Vẽ AH vuông góc với BC. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho AD = AB. Gọi I là trung điểm của BD. Chứng minh rằng $\widehat{BIH} = \widehat{ACB}$

HƯỚNG DẪN GIẢI



12.1. *Cách 1.* Từ D kẻ $DH // AC \left(H \in BC\right)$ suy ra $\widehat{DHB} = \widehat{ACB}$, mà

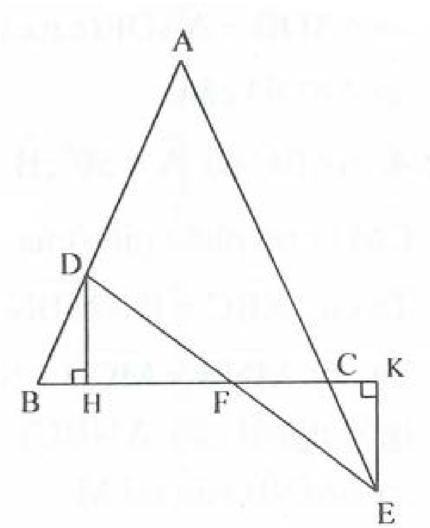
$\widehat{ABC} = \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{DHB} = \widehat{ABC} \Rightarrow \Delta DHB$ cân tại D $\Rightarrow DH = DB$

$\Rightarrow DH = CE$

ΔDHF và ΔECF có $\widehat{DHF} = \widehat{ECF}, DH = CE, \widehat{HDF} = \widehat{CEF}$

Suy ra $\Delta DHE = \Delta ECF\left(g.c.g\right) \Rightarrow DF = FE$

- *Cách 2.* Từ E kẻ $EK // AB\left(K \in BC\right)$



$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{CKE}$, mà $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$

$\Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{CKE} \Rightarrow \widehat{ECK} = \widehat{CKE}$

$\Rightarrow \Delta ECK$ cân tại E $\Rightarrow CE = KE \Rightarrow BD = KE$

ΔBDF và ΔKEF có $\widehat{DBF} = \widehat{EKF}, BD = KE$,

$\widehat{BDF} = \widehat{KEF}$

Suy ra $\Delta BDF = \Delta KEF\left(g.c.g\right) \Rightarrow DF = FE$

- *Cách 3.* Hạ $DH \perp BC$, $EK \perp BC$ $\left(H, K \in BC\right)$

ΔBDH và ΔCEK có $\widehat{BHD} = \widehat{CKE} = 90^\circ$,

BD = CE, $\widehat{DBH} = \widehat{KCE}$

Suy ra $\Delta DBH = \Delta ECK$ (cạnh huyền, góc nhọn)

$\Rightarrow$ DH = EK.

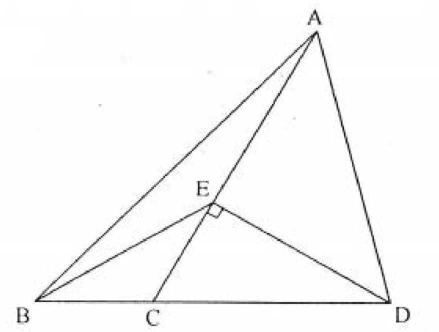
ΔHDF và ΔKEF có $\widehat{DHF} = \widehat{EKF} = 90^\circ$,

DH = KE, $\widehat{DFH} = \widehat{KFE}$

Suy ra $\Delta DHF = \Delta EKF$ $(g.c.g) \Rightarrow DF = FE$.

Tóm lại: Chứng minh DF = EF dựa vào cặp tam giác bằng nhau, do đó cần tạo ra cặp tam giác bằng nhau.

12.2. *Tìm cách giải.* Dễ thấy $\widehat{DCA} = 60^\circ$ mà CD = 2.BC nên ta nghĩ tới tam giác vuông có góc nhọn 60°.



Ta hạ $DE \perp AC \Rightarrow CD = 2.CE \Rightarrow CE = CB.$

Dễ thấy ΔBED và ΔBEA cân tại E

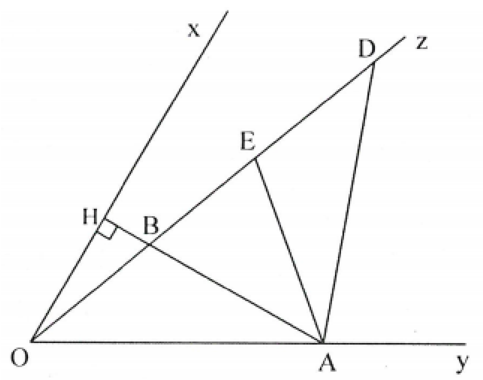
$\Rightarrow \Delta EAD$ cân tại E.

Từ đó tính được:

$\widehat{ADE} = 45^\circ, \widehat{EDB} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{ADB} = 75^\circ$

12.3. Đặt $\widehat{xOz} = \alpha \Rightarrow \widehat{yOz} = 2\alpha$

Lấy điểm E trên Bz sao cho OE = OA ΔAEO cân tại O



$\Rightarrow \widehat{AEB} = \dfrac{180^\circ - 2\alpha}{2}$

$\widehat{AEB} = 90^\circ - \alpha; \widehat{ABE} = \widehat{OBH} = 90^\circ - \alpha$

$\Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{ABE}$

$\Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{ABO}; OB = ED; AE = AB$

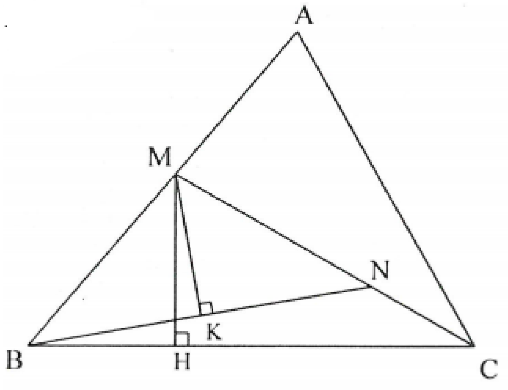
$\Rightarrow \Delta AOB = \Delta ADE (c.g.c) \Rightarrow AO = AD$

$\Rightarrow \Delta AOD$ cân.

12.4. ΔABC có $\widehat{A} = 50^\circ; \widehat{B} = 70^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 60^\circ.$

CM là tia phân giác của $\widehat{C}$ nên $\widehat{MCA} = \widehat{MCB} = 30^\circ$.

Ta có: $\widehat{NBC} = \widehat{B} - \widehat{MBN} = 50° - 40° = 10°$.



Ta có: $\widehat{MNB} = \widehat{MCB} + \widehat{NBC} = 30° + 10° = 40°$

(góc ngoài của ΔNBC)

$\Rightarrow \Delta MNB$ cân tại M

Từ M vẽ $MH \perp BC$ ta có $MH = \frac{1}{2}MC$ (1)

Từ M vẽ $MK \perp BN \Rightarrow BK = KN = \frac{1}{2}BN$ (2)

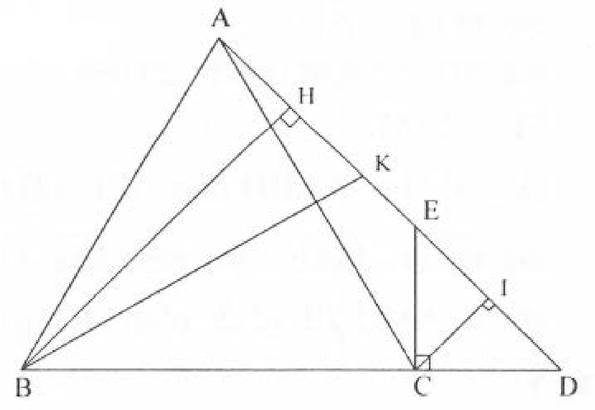
Xét ΔMKB và ΔBHM có $\widehat{BHM} = \widehat{BKM}\left(= 90°\right)$, BM là cạnh chung,

$\widehat{MBK} = \widehat{BMH} = 40° \Rightarrow \Delta MKB = \Delta BHM$ (cạnh huyền, góc nhọn)

$\Rightarrow MH = KB$ (3)

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow BN = MC$ (điều phải chứng minh).

12.5. Kẻ $BH \perp AD$; $CI \perp AD$.



ΔBDK có $\widehat{AKB} = \widehat{KBD} + \widehat{KDB} = 30° + 45°$

$\Rightarrow \widehat{AKB} = 75°$

ΔABK có $\widehat{BAK} = \widehat{AKB}\left(= 75°\right)$,

$BH \perp AK$ nên AH = KH

BH là tia phân giác của $\widehat{ABK}$ nên

$\widehat{ABH} = \frac{1}{2}\widehat{ABK} = 15°$

ΔCDE có $\widehat{ECD} = 90°; \widehat{CDE} = 45°$ nên ΔCDE vuông cân tại C.

Kẻ $CI \perp ED$ suy ra EI = ID = CI suy ra ED = 2.CI.

ΔAHB và ΔCIA có $\widehat{AHB} = \widehat{CIA}\left(= 90°\right); AB = AC; \widehat{ABH} = \widehat{CAI}\left(= 15°\right)$

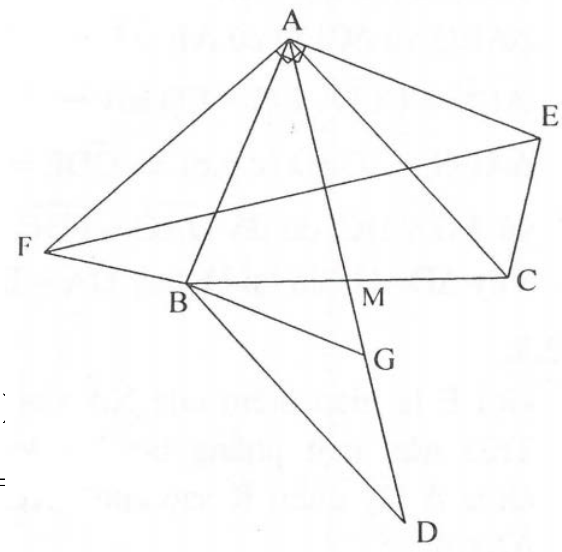
nên $\Delta AHB = \Delta CIA$ (cạnh huyền - góc nhọn) suy ra AH = CI. Từ đó suy ra AK = ED.

12.6. Trường hợp $\widehat{BAC} = 90°$, kết quả là hiển nhiên.

Ta chứng minh cho trường hợp $\widehat{BAC} < 90°$.

Trường hợp $\widehat{BAC} > 90°$, cách chứng minh

hoàn toàn tương tự.



Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho MA = MD.

Nối B với D. Từ B kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt AD tại G.

Xét hai tam giác AMC và DMB có AM = MD;

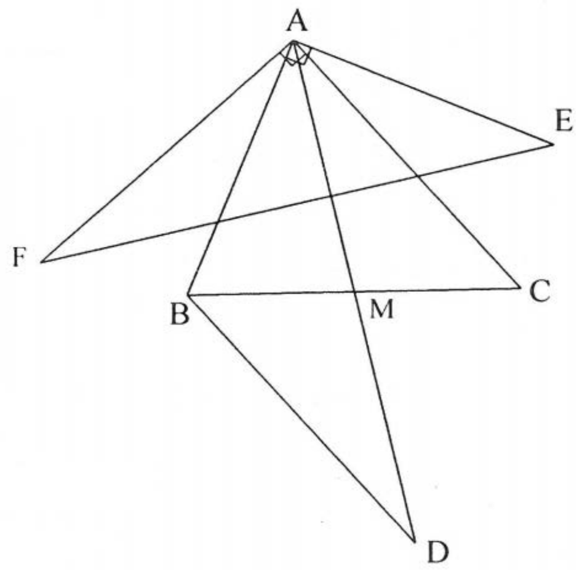
$\widehat{AMC} = \widehat{DMB}; BM = MC$

Nên $\Delta AMC = \Delta DMB$ (c.g.c), suy ra $\widehat{CAM} = \widehat{BDM}$ (1

Ta có $AE \perp AB; BG \perp AB$ nên BG // AE suy ra $\widehat{EAM} =$

Mà $\widehat{BGA} = \widehat{GBD} + \widehat{BDM}$ và $\widehat{EAM} = \widehat{EAC} + \widehat{CAM}$ (3)

Nên từ (1) và (2), (3) suy ra $\widehat{EAC} = \widehat{GBD}$.



Ta có AE = AB; $\widehat{EAF} = \widehat{ABD} = 180° - \widehat{BAC}$;

BD = AF (=AC).

Do đó $\Delta EAF = \Delta ABD$ (c.g.c)

Suy ra EF = AD,

Mà AD = 2.AM (cách vẽ) nên EF = 2AM.

Do $\Delta EAF = \Delta ABD$ nên $\widehat{AEF} = \widehat{BAD}$

Mà $\widehat{BAD} + \widehat{DAE} = 90°$ nên $\widehat{AEF} + \widehat{DAE} = 90°$

Suy ra $AM \perp EF$ (điều phải chứng minh).

12.7.

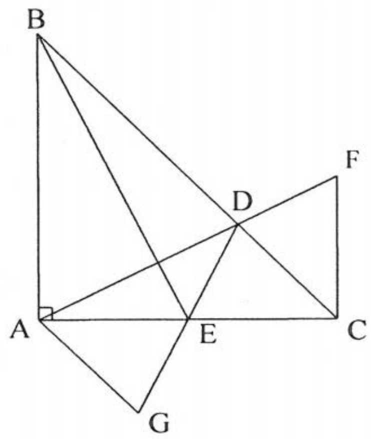
Qua C vẽ đường thẳng vuông góc với AC cắt tia AD ở F.

Do AB = AC, $\widehat{ABE} = \widehat{CAF}$ (cùng phụ với góc AEB);

$\widehat{BAE} = \widehat{ACF} = 90°$ nên

$\Delta BAE = \Delta ACF(g.c.g) \Rightarrow AE = CF$

$\Rightarrow CE = CF$.



Suy ra $\Delta CED = \Delta CFD(c.g.c)$

Trên tia DE lấy điểm G sao cho EG = ED,

ΔAEG và ΔCED có AE = CE,

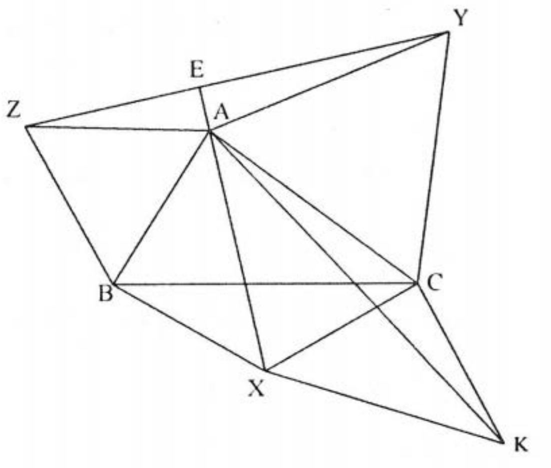
$\widehat{AEG} = \widehat{CED}, EG = ED$ suy ra

$\Delta AEG = \Delta CED\ (c.g.c) \Rightarrow \widehat{CDE} = \widehat{AGE}$

và AG // DC, do đó $\widehat{DAG} = \widehat{FDC}$ (đồng vị) suy ra $\widehat{DAG} = \widehat{DGA}$.

Vậy ΔDAG cân tại D, hay DA = DG = 2DE (điều phải chứng minh).

12.8.



Gọi E là giao điểm của XA với YZ.

Trên nửa mặt phẳng bờ XC không chứa A lấy điểm K sao cho $\Delta XCK = \Delta XBA$.

Ta có XK = XA và $\widehat{KXC} = \widehat{AXB}$ suy ra

$\widehat{AXK} = \widehat{BXC} = 120°$

Do đó $\widehat{XAK} = 30°$. Mặt khác, ta có CK = BA = AZ

(vì $\Delta XCK = \Delta XBA$ và ΔABZ đều) ; CA = AY (vì ΔYCA đều);

$\widehat{ACK} = \widehat{ACB} + \widehat{BCX} + \widehat{XCK} = \widehat{C} + 30° + \widehat{XBA}$

$= \widehat{C} + 30° + 30° + \widehat{B} = 60° + \left(180° - \widehat{A}\right)$

$= 240° - \left(360° - \widehat{YAC} - \widehat{ZAB} - \widehat{YAZ}\right) = \widehat{YAZ}$;

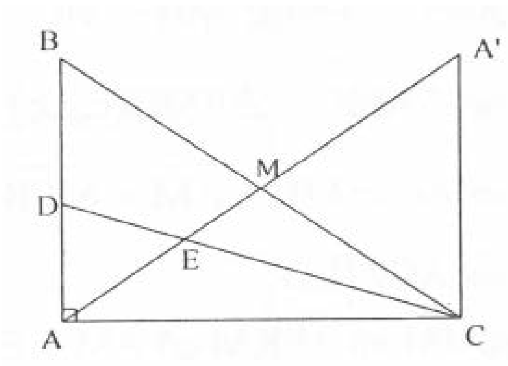
suy ra $\Delta CAK = \Delta AYZ$ (c.g.c)

do đó $\widehat{CAK} = \widehat{AYZ} = \widehat{EYA}$

Ta có: $\widehat{EAY} + \widehat{CAK} = 180° - \left(\widehat{YAC} + \widehat{XAK}\right) = 180° - \left(60° + 30°\right) = 90°$

ΔEAY có $\widehat{EAY} + \widehat{EYA} = 90°$, suy ra $\widehat{AEY} = 90°$. Vậy $XA \perp YZ$.

12.9.



* Trên tia đối của tia MA lấy A′ sao cho MA′ = MA.

Khi đó $\Delta MCA' = \Delta MBA$ (c.g.c),

suy ra CA' = AB (1);

$\widehat{MCA'} = \widehat{MBA} = 54°$

Do đó $\widehat{ACA'} = \widehat{ACB} + \widehat{BCA'} = 36° + 54° = 90°$

Từ $\Delta ABC = \Delta CA'A\ (c.g.c) \Rightarrow AA' = BC;\ MC = MA = \frac{1}{2}BC, \widehat{MAC} = \widehat{MCA} = 36^\circ$.

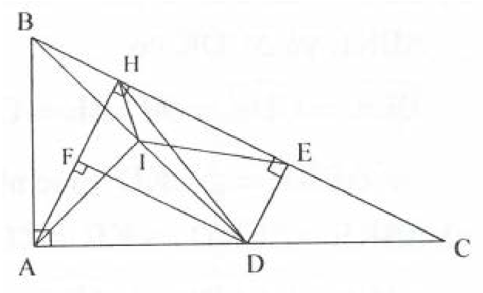
Mặt khác, CD là phân giác $\widehat{ACB}$ nên $\widehat{ECA} = 18^\circ$, $\widehat{A'EC}$ là góc ngoài của tam giác AEC nên

$\widehat{A'EC} = \widehat{EAC} + \widehat{ECA} = 36^\circ + 18^\circ = 54^\circ = \widehat{EA'C}$,

suy ra tam giác ECA′ cân tại C, nên CE = CA′(2)

Từ (1) và (2) suy ra CE = AB.

12.10.



Kẻ $DE \perp BC$ tại E, $DF \perp AH$ tại F.

Xét các tam giác vuông ABD và EBD

Có IB = ID nên $AI = EI = \frac{BD}{2}$.

Ta có $\Delta ABH = \Delta DAF$ (cạnh huyền, góc nhọn) $\Rightarrow AH = DF$ (1).

$\Delta HED = \Delta DFH$ (cạnh huyền, góc nhọn) $\Rightarrow HE = DF$ (2).

Từ (1) và (2), suy ra: AH = HE. Từ đó $\Delta IHA = \Delta IHE$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{IHA} = \widehat{IHE} = 90^\circ : 2 = 45^\circ$. Ta có $\widehat{BIH} + \widehat{IBH} = \widehat{IHE} = 45^\circ$

Mà $\widehat{IBH} = \widehat{FDI}$ (so le trong) $\Rightarrow \widehat{BIH} = \widehat{ADF}$. Lại có $\widehat{ADF} = \widehat{ACB}$ (đồng vị), suy ra $\widehat{BIH} = \widehat{ACB}$ (điều phải chứng minh).

Chuyên đề 13. CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

A. Kiến thức cần nhớ

Ba điểm cùng thuộc một đường thẳng gọi là ba điểm thẳng hàng. Để chứng minh ba điểm thẳng hàng, chúng ta có thể sử dụng một số phương pháp sau đây:

1. Phương pháp 1.

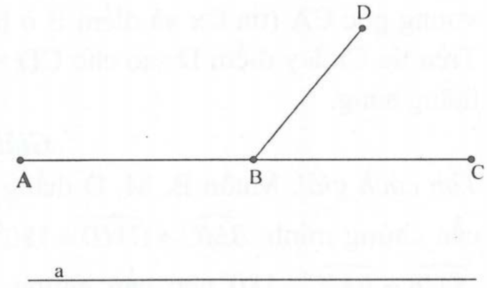
Nếu $\widehat{ABD} + \widehat{DBC} = 180^\circ$ thì ba

Điểm A; B; C thẳng hàng.

2. Phương pháp 2.

Nếu AB // a và AC // a thì ba điểm A; B; C thẳng hàng.

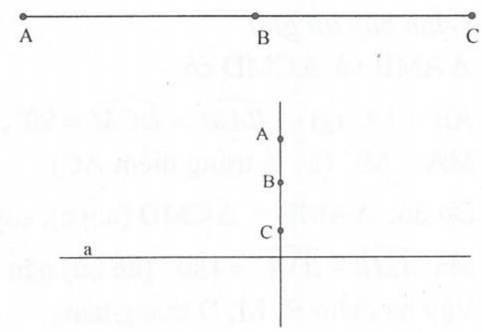
(Cơ sở của phương pháp này là: tiên đề Ơ-Clit)



3. Phương pháp 3.

Nếu $AB \perp a$; $AC \perp a$ thì ba điểm A; B; C thẳng hàng.

(Cơ sở của phương pháp này là: ***Có một và chỉ một đường thẳng a′ đi qua điểm O và vuông góc với đường thẳng a cho trước)***



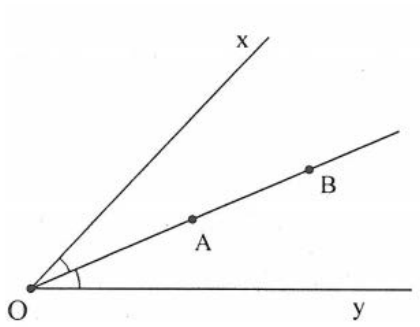
Hoặc A; B; C cùng thuộc một đường trung trực của một đoạn thẳng.

4. Phương pháp 4.

Nếu tia OA và tia OB là hai tia phân giác của góc xOy thì ba điểm O; A; B thẳng hàng.

(Cơ sở của phương pháp này là:

Mỗi góc khác góc bẹt có một và chỉ một tia phân giác).



* **Hoặc:** Hai tia OA và OB cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ chứa tia Ox, $\widehat{xOA} = \widehat{xOB}$ thì ba điểm O, A, B thẳng hàng.

5. Nếu K là trung điểm BD, K′ là giao điểm của BD và AC. Nếu K′ là trung điểm BD thì $K' \equiv K$ và A, K, C thẳng hàng.

(Cơ sở của phương pháp này là: Mỗi đoạn thẳng chỉ có một trung điểm).

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông ở A, M là trung điểm AC. Kẻ tia Cx vuông góc CA (tia Cx và điểm B ở hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AC).Trên tia Cx lấy điểm D sao cho CD = AB. Chứng minh ba điểm B, M, D thẳng hàng.

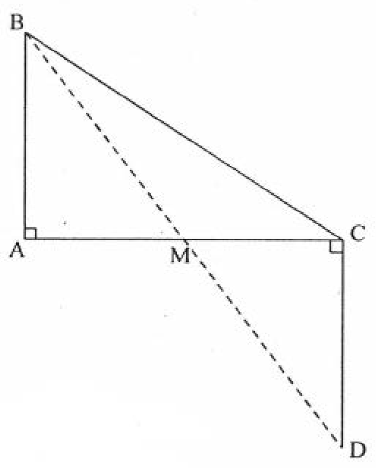
Giải

* *Tìm cách giải.* Muốn B, M, D thẳng hàng

cần chứng minh $\widehat{BMC}+\widehat{CMD}=180°$. Do

$\widehat{AMB}+\widehat{BMC}=180°$ nên cần chứng minh

$\widehat{AMB}=\widehat{DMC}$



* *Trình bày lời giải*

ΔAMB và ΔCMD có:

AB = DC (gt), $\widehat{BAM}=\widehat{DCM}=90°$,

MA = MC (M là trung điểm AC)

Do đó: $\Delta AMB=\Delta CMD$ (c.g.c), suy ra: $\widehat{AMB}=\widehat{DMC}$

Mà $\widehat{AMB}+\widehat{BMC}=180°$ (kề bù) nên $\widehat{BMC}+\widehat{CMD}=180°$

Vậy ba điểm B; M; D thẳng hàng.

Ví dụ 2. Cho hai đoạn thẳng AC và BD cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đoạn. Trên tia AB lấy điểm M sao cho B là trung điểm AM, trên tia AD lấy điểm N sao cho D là trung điểm AN. Chứng minh ba điểm M, C, N thẳng hàng.

Giải

* ***Tìm cách giải.*** Chứng minh: CM // BD và CN // BD từ đó suy ra M, C, N thẳng hàng.

* ***Trình bày lời giải***

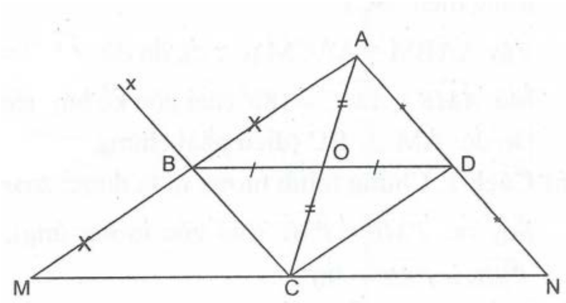
ΔAOD và ΔCOB có OA = OC

(vì O là trung điểm AC)

$\widehat{AOD}=\widehat{COB}$ (hai góc đối đỉnh)

OD = OB

(vì O là trung điểm BD)



Do đó $\Delta AOD=\Delta COB$ (c.g.c)

Suy ra: $\widehat{DAO}=\widehat{OCB}$. Mà hai góc ở vị tri so le trong,

do do: AD // BC, nên $\widehat{DAB}=\widehat{CBM}$ (ở vị trí đồng vị)

ΔDAB và ΔCBM có: AD = BC (do $\Delta AOD=\Delta COB$), $\widehat{DAB}=\widehat{CBM}$, AB = BM (B là trung điểm AM). Vậy $\Delta DAB=\Delta CBM$ (c.g.c). Suy ra $\widehat{ABD}=\widehat{BMC}$. Do đó BD // CM. (1)

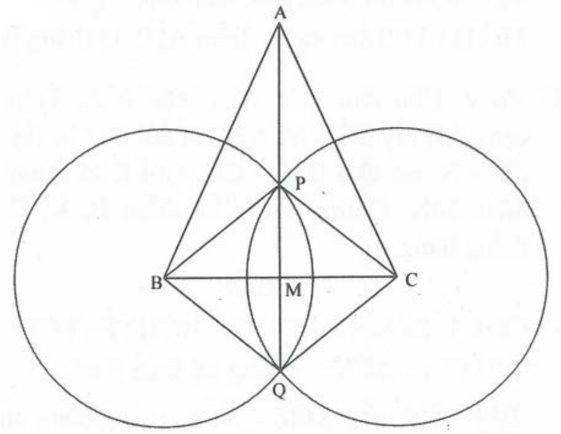
Lập luận tương tự ta được BD // CN. (2)

Từ (1) và (2), theo tiên đề Ơ-Clit suy ra ba điểm M, C, N thẳng hàng.

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC có AB = AC. Gọi M là trung điểm BC.

a) Chứng minh $AM \perp BC$.

b) Vẽ hai đường tròn tâm B và tâm C có cùng bán kính sao cho chúng cắt nhau tại hai điểm P và Q. Chứng minh ba điểm A, P, Q thẳng hàng.



Giải

* *Tìm cách giải.* Chứng minh ba điểm A, P, Q thẳng hàng, chúng ta có thể:

- Chứng minh AM, PM, QM cùng vuông góc BC

- Hoặc AP, AQ là tia phân giác của góc BAC.

* *Trình bày lời giải*

a) ΔABM và ΔACM có: AB =AC (giả thiết), AM chung, MB = MC (M là trung điểm BC)

Vậy $\Delta ABM = \Delta ACM$ (c.c.c), do đó $\widehat{AMB} = \widehat{AMC}$ (hai góc tương ứng).

Mà $\widehat{AMB} + \widehat{AMC} = 180^\circ$ (hai góc kề bù) nên $\widehat{AMB} = \widehat{AMC} = 90^\circ$

Do đó: $AM \perp BC$ (điều phải chứng minh).

b) **Cách 1.** Chứng minh tương tự ta được: $\Delta BPM = \Delta CPM$ (c.c.c).

Suy ra: $\widehat{PMB} = \widehat{PMC}$ (hai góc tương ứng), mà $\widehat{PMB} + \widehat{PMC} = 180^\circ$ nên $\widehat{PMB} = \widehat{PMC} = 90^\circ$

Do đó: $PM \perp BC$.

Lập luận tương tự $QM \perp BC$.

Từ điểm M trên BC có $AM \perp BC$, $PM \perp BC$, $QM \perp BC$ nên ba điểm A, P, Q thẳng hàng (điều phải chứng minh).

- **Cách 2.** ΔBPA và ΔCPA có AB = AC, AP là cạnh chung, BP = CP (cùng bán kính)

$\Rightarrow \Delta BPA = \Delta CPA$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{BAP} = \widehat{CAP}$. Vậy AP là tia phân giác của $\widehat{BAC}$. (1)

ΔABQ và ΔACQ có AB = AC, AQ là cạnh chung, BQ = CQ (cùng bán kính)

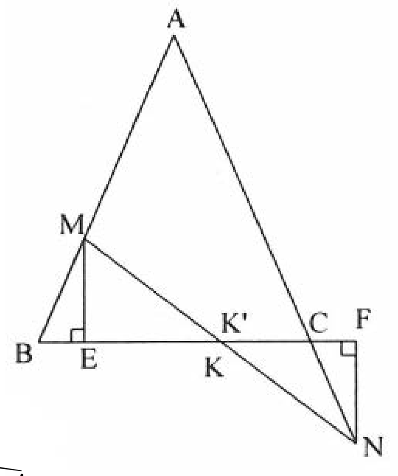
$\Rightarrow \Delta ABQ = \Delta ACQ$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{BAQ} = \widehat{CAQ}$.

Vậy AQ là tia phân giác của $\widehat{BAC}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra ba điểm A; P; Q thẳng hàng.

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC cân ở A. Trên cạnh AB lấy điểm M, trên tia đối tia CA lấy điểm N sao cho BM = CN. Gọi K là trung điểm MN. Chứng minh ba điểm B, K, C thẳng hàng.

Giải



- **Cách 1.** Kẻ $ME \perp BC; NF \perp BC\left(E; F \in BC\right)$

ΔBME và ΔCNF vuông tại E và F có:

BM = CN (gt), $\widehat{MBE} = \widehat{NCF}$ (cùng bằng $\widehat{ACB}$)

Do đó: $\Delta BME = \Delta CNF$ (cạnh huyền-góc nhọn)

Suy ra: ME = NF.

Gọi K' là giao điểm của BC và MN.

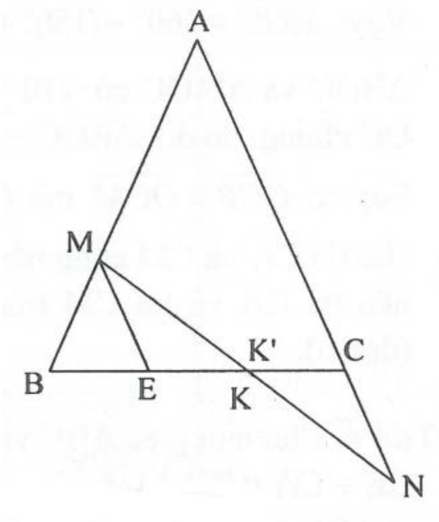
$\Delta MEK'$ và $\Delta NFK'$ vuông ở E và F có: ME = NF (cmt), $\widehat{EMK'} = \widehat{FNK'}$

(so le trong của ME // FN). Vậy $\Delta MEK' = \Delta NFK'$ (g-c-g).

Do đó: $MK' = NK'$.

Vậy K' là trung điểm MN, mà K là trung điểm MN nên $K = K'$

Do đó ba điểm B, K, C thẳng hàng.



- Cách 2. Kẻ ME // AC ($E \in BC$)

$\Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{MEB}$ (hai góc đồng vị)

Mà $\widehat{ACB} = \widehat{ABC}$ nên $\widehat{MBE} = \widehat{MEB}$

Vậy ΔMBE cân ở M.

Do đó: MB = ME, kết hợp với giả thiết MB = NC ta được ME = CN.

Gọi K' là giao điểm của BC và MN.

$\Delta MEK'$ và $\Delta NCK'$ có: $\widehat{K'ME} = \widehat{K'NC}$

(so le trong của ME //AC)

ME = CN (chứng minh trên), $\widehat{MEK'} = \widehat{NCK'}$ (so le trong của ME //AC).

Do đó: $\Delta MEK' = \Delta NCK'$ (g.c.g) $\Rightarrow MK' = NK'$

Vậy K' là trung điểm MN, mà K là trung điểm MN nên $K \equiv K'$.

Do đó ba điểm B, K, C thẳng hàng.

- Lưu ý. Cả hai cách giải trên, có nhiều bạn chứng minh $\Delta MEK = \Delta NCK$ vô tình thừa nhận B, K, C thẳng hàng, việc chứng minh nghe có lý lắm nhưng không biết là chưa chính xác.

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC cân ở A, $\widehat{BAC} = 108°$. Gọi O là một điểm nằm trên tia phân giác của góc C sao cho $\widehat{CBO} = 12°$. Vẽ tam giác đều BOM (M và A cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ BO). Chứng minh ba điểm C, A, M thẳng hàng.

Giải

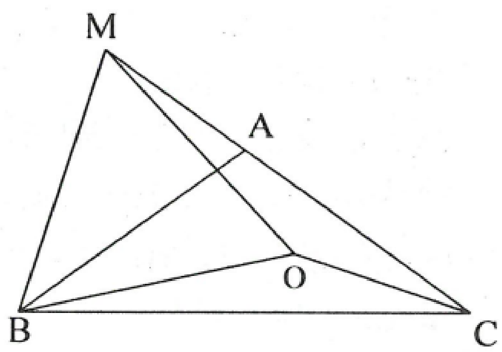
* *Tìm cách giải.* Chứng minh $\widehat{OCA} = \widehat{OCM}$ từ đó suy ra tia CA và tia CM trùng nhau.

* *Trình bày lời giải*

Tam giác ABC cân ở A nên

$$\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \frac{180° - 108°}{2} = 36°$$

(tính chất của tam giác cân).



Mà CO là tia phân giác của $\widehat{ACB}$,

nên $\widehat{ACO} = \widehat{BCO} = 18°$. Do đó $\widehat{BOC} = 150°$

ΔBOM đều nên $\widehat{BOM} = 60°$.

Vậy: $\widehat{MOC} = 360° - (150° + 60°) = 150°$

ΔBOC và ΔMOC có: OB = OM (vì ΔBOM đều);

$\widehat{BOC} = \widehat{MOC} = 150°$;

OC chung, do đó: $\Delta BOC = \Delta MOC$ (c.g.c)

Suy ra: $\widehat{OCB} = \widehat{OCM}$ mà $\widehat{OCB} = \widehat{OCA}$ (gt) nên $\widehat{OCA} = \widehat{OCM}$

Hai tia CA và CM cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ CO và $\widehat{OCA} = \widehat{OCM}$

nên tia CA và tia CM trùng nhau. Vậy ba điểm C, A, M thẳng hàng. (đpcm).

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC vuông tại A và $\widehat{B} = 60°$. Vẽ tia $Cx \perp BC$ và lấy CE = CA (CE và CA cùng phía với BC). Trên tia đối tia BC và lấy F sao cho BF = BA. Chứng minh rằng:

a) ΔACE đều;

b) E, A, F thẳng hàng.

Giải

* ***Tìm cách giải.*** Nhận thấy tam giác

ABC vuông tại A và $\widehat{B} = 60°$ nên

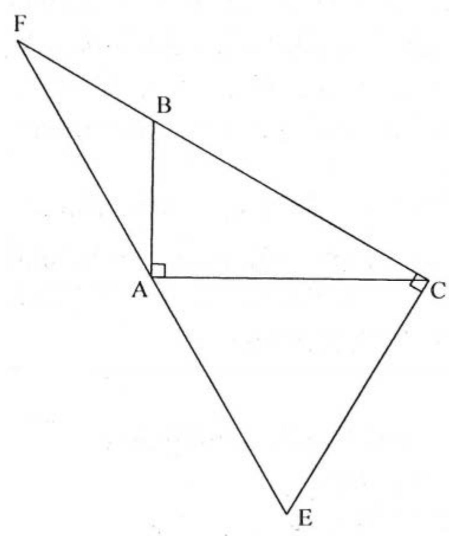
$\widehat{ACB} = 30° \Rightarrow \widehat{ACE} = 60°$

ΔCAE đều.

Do đó muốn chứng tỏ B, A, F

thẳng hàng thì chúng ta chỉ cần

chứng tỏ $\widehat{BAF} = 30°$.



* ***Trình bày lời giải.***

a) ABC vuông tại A và $\widehat{B} = 60°$ nên $\widehat{ACB} = 30°$

$\Rightarrow \widehat{ACE} = 60°$ mà CA = CB nên ΔCAE đều.

b) Ta có: BA = BF (gt) $\Rightarrow \Delta BFA$ cân $\Rightarrow \widehat{ABC} = 2.\widehat{BAF}$.

Suy ra: $\widehat{BAF} = 30°$.

Vậy: $\widehat{FAB} + \widehat{BAC} + \widehat{CAE} = 30° + 90° + 60° = 180°$

Ta suy ra ba điểm F; A; E thẳng hàng.

C. Bài Tập vận dụng

13.1. Cho tam giác ABC, M là trung điểm của BC. Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$.

a) Chứng minh rằng AC = EB và AC // BE.

b) Gọi I là một điểm trên AC; K là một điểm trên EB sao cho AI = EK.

Chứng minh ba điểm I, M, K thẳng hàng.

13.2. Cho ΔABC cân tại A, có góc $\widehat{A} < 90°$. Kẻ BD vuông góc với AC, kẻ CE vuông góc với AB. Gọi K là giao điểm của BD và CE. Chứng minh rằng:

a) $\Delta BCE = \Delta CBD$;

b) $\Delta BEK = \Delta CDK$;

c) AK là phân giác góc BAC.

d) Ba điểm A, K, I thẳng hàng (với I là trung điểm BC).

13.3. Cho ΔABC có AB < AC. Kẻ tia phân giác AD của $\widehat{BAC}$ (D thuộc BC). Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho AE = AB, trên tia AB lấy điểm F sao cho AF = AC. Chứng minh rằng:

a) $\Delta BDF = \Delta EDC$;

b) F, D E thẳng hàng;

c) $AD \perp FC$

13. 4. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Vẽ ra phía ngoài tam giác ABC tam giác BCM cân tại M có góc ở đáy là $15°$. Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa điểm C, vẽ tam giác đều ABN. Chứng minh ba điểm B, M, N thẳng hàng.

13.5. Cho tam giác ABC. Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác vuông tại A là $\Delta ADB; \Delta ACE$ có AB = AD, AC= AE. Kẻ AH vuông góc BC; DM vuông góc AH và EN vuông góc AH. Chứng minh rằng:

a) DM= AH.

b) Gọi I là trung điểm của MN. Chứng minh rằng D, I, E thẳng hàng.

13.6. Cho góc xOy. Trên hai cạnh Ox và Oy lấy lần lượt hai điểm B và C sao cho OB = OC. Vẽ đường tròn tâm B và tâm C có cùng bán kính sao cho chúng cắt nhau tại hai điểm A và D nằm trong góc xOy. Chứng minh ba điểm O, A, D thẳng hàng.

13.7. Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa điểm A, vẽ các điểm D, E sao cho BD vuông góc và bằng BA, BE vuông góc và bằng BC. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng CE. Chứng minh A, D, M thẳng hàng.

13.8. Cho ΔABC vuông tại A, BC = 2AB. Gọi D là điểm trên cạnh AC sao cho $\widehat{ABD} = \frac{1}{3}\widehat{ABC}$. Lấy E là một điểm trên cạnh AB sao cho $\widehat{ACE} = \frac{1}{3}\widehat{ACB}$. BD và CE cắt nhau tại F; I và K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ F đến BC và AC. Vẽ các điểm G và H sao cho I là trung điểm của FG, K là trung điểm của FH. Chứng minh rằng ba điểm H, D, G thẳng hàng.

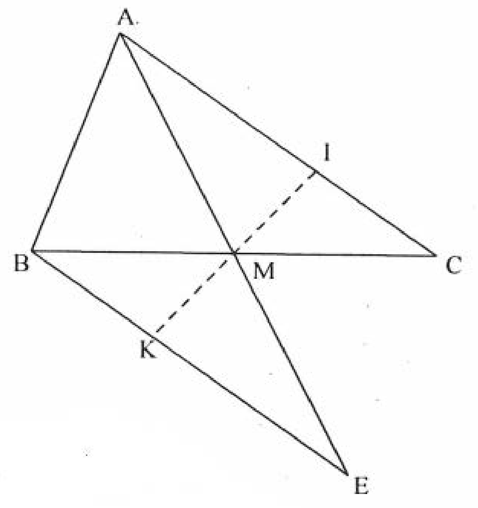
13.9. Cho tam giác ABC vuông tại A. Kẻ AH vuông góc với BC tại H; $\widehat{ACB} = 30°$. Dựng tam giác ACD đều (D và B nằm khác phía đối với AC). Kẻ HK vuông góc với AC tại K. Đường thẳng qua H và song song với AD cắt AB kéo dài tại M. Chứng minh rằng ba điểm M, K, D thẳng hàng.

HƯỚNG DẪN GIẢI

13.1.

a) ΔAMC và ΔEMB có MA = ME,

$\widehat{AMC} = \widehat{EMB}; MB = MC$



$\Rightarrow \Delta AMC = \Delta EMB$ (c.g.c)

$\Rightarrow AC = EB; \widehat{CAM} = \widehat{MEB}$

$\Rightarrow AC // BD$.

b) ΔAIM và ΔEKM có AM = EM;

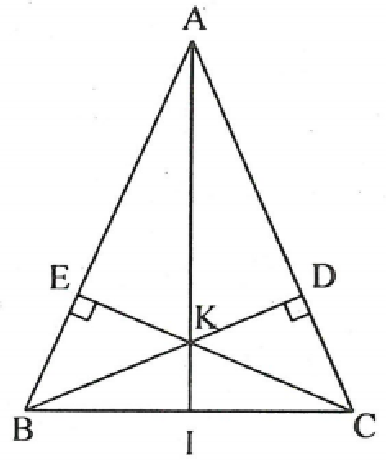
$\widehat{CAM} = \widehat{MEB}; AI = EK \Rightarrow \Delta AIM = \Delta EKM$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{AMI} = \widehat{EMK}$ mà $\widehat{AMI} + \widehat{IME} = 180° \Rightarrow \widehat{EMK} + \widehat{IME} = 180°$

$\Rightarrow$ I, M, K thẳng hàng.

13.2.

a) ΔBCE và ΔCBD có $\widehat{BEC} = \widehat{CDB} = 90°; \widehat{EBC} = \widehat{DCB}$; BC là cạnh chung



$\Rightarrow \Delta BCE = \Delta CBD$ (cạnh huyền, góc nhọn)

b) $\Delta BCE = \Delta CBD \Rightarrow BE = CD$.

ΔBKE và ΔCDK có

$\widehat{BEK} = \widehat{CDK} = 90°; BE = CD; \widehat{BKE} = \widehat{CKD}$

$\Rightarrow \Delta BKE = \Delta CKD$ (góc nhọn, cạnh góc vuông)

c) $\Delta BKE = \Delta CKD \Rightarrow KE = KD$.

ΔAEK và ΔADK có $\widehat{AEK} = \widehat{ADK} = 90°$;

AI chung; KE = KD $\Rightarrow \Delta AEK = \Delta ADK \Rightarrow \widehat{EAK} = \widehat{DAK}$

Hay AK là tia phân giác $\widehat{BAC}$ (1).

d) ΔABI và ΔACI có AB = AC; AI là cạnh chung; BI = CI

$\Rightarrow \Delta ABI = \Delta ACI$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{BAI} = \widehat{CAI}$ hay AI là tia phân giác của $\widehat{BAC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra A; K; I thẳng hàng.

13.3.

a) ΔABD và ΔAED có AB = AE; $\widehat{BAD} = \widehat{EAD}$; AD là cạnh chung

$\Rightarrow \Delta ABD = \Delta AED$ (c.g.c) $\Rightarrow BD = ED; \widehat{ABD} = \widehat{AED}$.

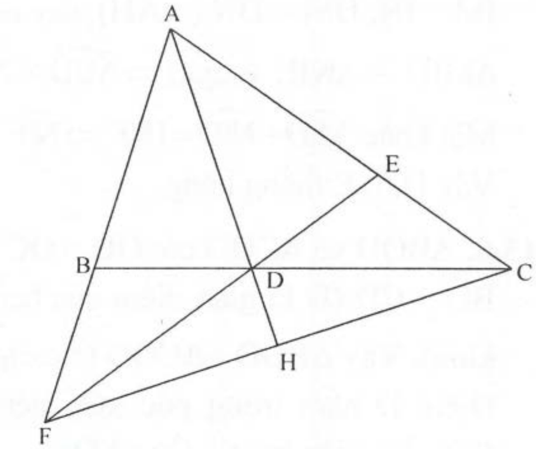
Mặt khác $\widehat{ABD} + \widehat{DBF} = 180°; \widehat{AED} + \widehat{DEC} = 180°$ nên $\widehat{DBF} = \widehat{DEC}$.

Ta có $AF = AC; AB = AE \Rightarrow BF = EC$.

ΔBDF và ΔEDC có BF = CF;

$\widehat{DBF} = \widehat{DEC}; DB = DE$

$\Rightarrow \Delta BDF = \Delta EDC$ (c.g.c)



b) $\Delta BDF = \Delta EDC$

$\Rightarrow \widehat{BDF} = \widehat{EDC}$ mà

$\widehat{BDF} + \widehat{FDC} = 180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{EDC} + \widehat{FDC} = 180^\circ$

$\Rightarrow F, D, E$ thẳng hàng.

c) Gọi H là giao điểm của AD và CF

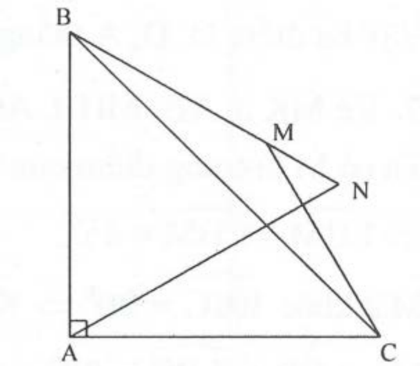
ΔAHF và ΔAHC có AF = AC; $\widehat{FAH} = \widehat{CAH}$; AH chung

$\Delta AHF = \Delta AHC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AHF} = \widehat{AHC}$ mà $\widehat{AHF} + \widehat{AHC} = 180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{AHF} = \widehat{AHC} = 90^\circ$

Vậy $AH \perp FC$ hay $AD \perp FC$.

13.4.



Gợi ý: Tính góc $\widehat{ABN} = 60^\circ$

$\Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{ABC} + \widehat{CBM} = 60^\circ$ mà BN;

BM thuộc cùng một nửa mặt phẳng

bờ AB nên tia BM trùng với tia BN.

Vậy B, M, N thẳng hàng.

13.5.

a) Ta có ΔDMA vuông tại M nên $\widehat{MDA} + \widehat{MAD} = 90^\circ$ mà $\widehat{BAH} + \widehat{MAD} = 90^\circ$ (vì $\widehat{BAD} = 90^\circ$)

$\Rightarrow \widehat{MDA} = \widehat{BAH}$

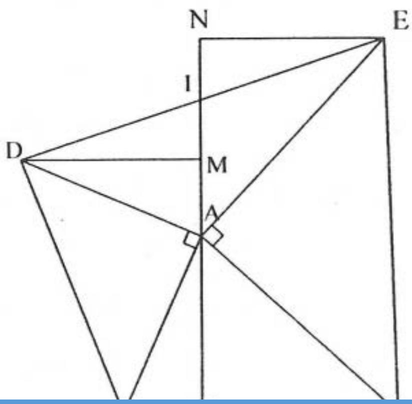
Xét ΔDMA và ΔAHB có $\widehat{DMA} = \widehat{AHB} = 90^\circ$;

$\widehat{MDA} = \widehat{BAH}; AD = AB$ nên $\Delta DMA = \Delta AHB$

(cạnh huyền, góc nhọn) $\Rightarrow DM = AH$.

b) Chứng minh tương tự câu a, ta có:

$\Delta ANE = \Delta CHA$, suy ra AH = EN.



Xét ΔMID và ΔNIE có $\widehat{IMD}=\widehat{INE}(=90^\circ)$,

IM = IN, DM = DN (= AH), suy ra

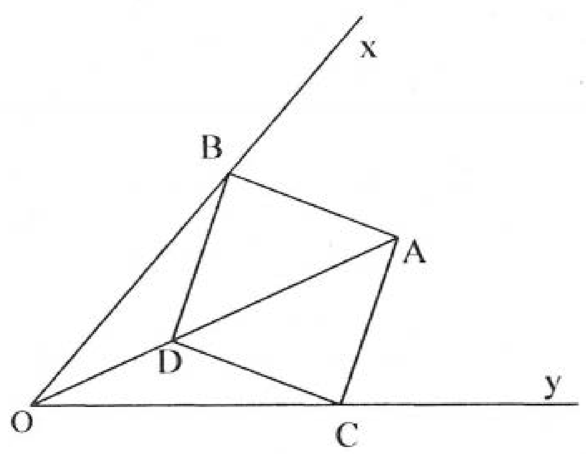
$\Delta MID=\Delta NIE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MID}=\widehat{NIE}$.

Mặt khác $\widehat{MID}+\widehat{NID}=180^\circ \Rightarrow \widehat{NIE}+\widehat{NID}=180^\circ$

Vậy D, I, E thẳng hàng.

13.6. ΔBOD và ΔCOD có: OB = OC (gt); OD cạnh chung;

BD = CD (D là giao điểm của hai đường tròn tâm B và tâm C cùng bán kính). Vậy $\Delta BOD=\Delta COD$ (c.c.c), suy ra: $\widehat{BOD}=\widehat{COD}$.



Điểm D nằm trong góc xOy nên tia OD nằm giữa hai tia Ox và Oy.

Do đó OD là tia phân giác của $\widehat{xOy}$.

Chứng minh tương tự ta được OA là tia phân giác của $\widehat{xOy}$.

Góc xOy chỉ có một tia phân giác nên hai tia OD và OA trùng nhau.

Vậy ba điểm O, D, A thẳng hàng.

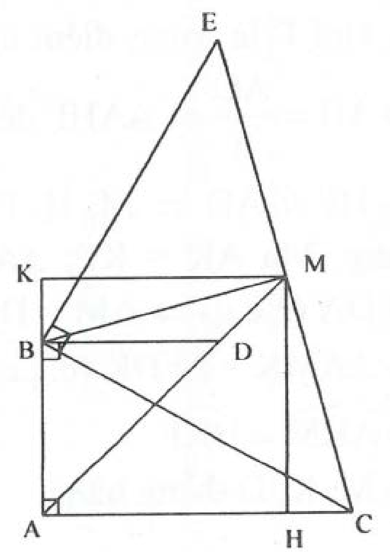
13.7. Kẻ $MK\perp AB$; $MH\perp AC$,

Ta có M là trung điểm của CE nên $\Delta BME=\Delta BMC$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{EBM}=\widehat{CBM}=45^\circ$

Mặt khác $\widehat{EBC}=90^\circ \Rightarrow \widehat{KBE}+\widehat{ABC}=90^\circ$

Mà $\widehat{ACB}+\widehat{ABC}=90^\circ$,suy ra: $\widehat{KBE}=\widehat{ACB}\Rightarrow \widehat{KBM}=\widehat{HCM}$.



Lại có BM = MC $\Rightarrow \Delta KBM=\Delta HCM$

(cạnh huyền, góc nhọn) $\Rightarrow$ MK = MH

$\Rightarrow \Delta AKM=\Delta AHM$ (cạnh huyền, cạnh góc vuông) $\Rightarrow \widehat{KAM}=\widehat{HAM}\Rightarrow AM$ là tia phân giác của góc A.

Mặt khác, ΔBAD vuông cân tại A

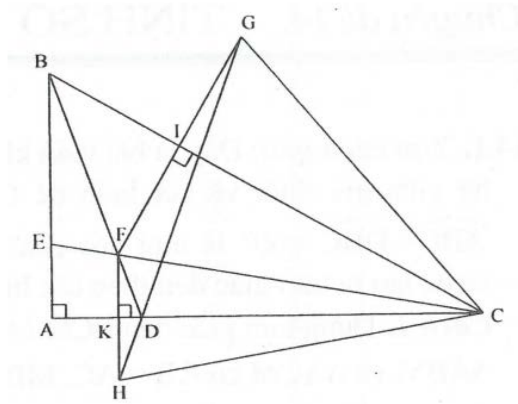
$\Rightarrow \widehat{BAD} = 45° \Rightarrow$ AD là tia phân giác

của góc A

$\Rightarrow$ A; D; M thẳng hàng (vì A; D; M

cùng thuộc tia phân giác của góc A).

13.8. Theo đề bài ΔABC vuông tại A có BC = 2AB nên $\widehat{ABC} = 60°; \widehat{ACB} = 30°$.



$\widehat{ABD} = \frac{1}{3}\widehat{ABC} = 20° \Rightarrow \widehat{DBC} = 40°$

$\widehat{ABD} = \frac{1}{3}\widehat{ABC} = 10° \Rightarrow \widehat{BCE} = 20°$

ΔCIF và ΔCIG có IF = IG (gt)

$\widehat{CIF} = \widehat{CIG} = 90°$; IC: cạnh chung

$\Rightarrow \Delta CIF = \Delta CIG$ (c.g.c)

$\Rightarrow CG = CF$ và $\widehat{ICG} = \widehat{ICF} = 20°$

Tương tự $\Delta CKF = \Delta CKH$ (c.g.c)

$\Rightarrow CF = CH$ và $\widehat{KCH} = \widehat{KCF} = 10°$

Từ đó suy ra CG = CH và $\widehat{GCF} + \widehat{FCH} = 2\widehat{ACB} = 60°$, do đó $\widehat{CHG} = 60°$ (1)

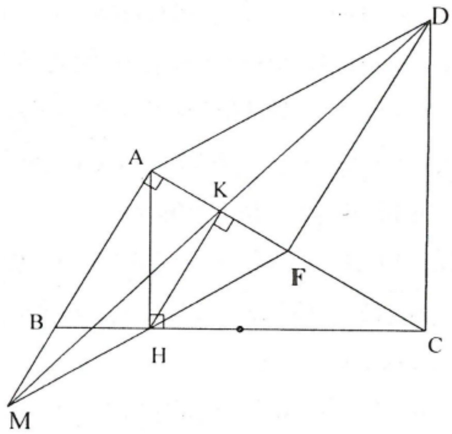
$\Delta DKF = \Delta DKH$ vì có KF = KH (giả thiết), $\widehat{DKF} = \widehat{DKH} = 90°$, KD: cạnh chung, do đó DF = DH, vì thế $\Delta CDF = \Delta CDH$ (c.c.c) suy ra $\widehat{CHD} = \widehat{CFD}$.

ΔABD vuông tại A có $\widehat{ABD} = 20° \Rightarrow \widehat{ADB} = 70° \Rightarrow \widehat{CDF} = 110°$

$\Rightarrow \widehat{CFD} = 180° - \widehat{CDF} - \widehat{FCD} = 180° - 110° - 10° = 60°$ vì thế $\widehat{CHD} = 60°$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{CHD} = 60° = \widehat{CHG}$. Mà hai tia HD, HG cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng HC nên HD trùng với HG, nghĩa là ba điểm H, D, G thẳng hàng.

13.9. Gọi F là trung điểm của AC



$\Rightarrow AH = \frac{AC}{2} \Rightarrow \Delta AHF$ đều

$\Rightarrow HF // AD \Rightarrow$ M, H, F thẳng hàng.

Mà AK = KF; $\Delta AMF = \Delta FDA(g.c.g) \Rightarrow AM = DF$

$\Rightarrow \Delta AMK = \Delta FDK(c.g.c)$

$\Rightarrow \widehat{AKM} = \widehat{DKF}$

$\Rightarrow$ M, K, D thẳng hàng.

Chuyên đề 14. TÍNH SỐ ĐO GÓC

A. Kiến thức cần nhớ

Để giải tốt bài toán tính số đo góc thì chúng ta phải nắm vững kiến thức cơ bản sau:

*** Trong tam giác:**

+ Tổng ba góc trong bằng $180°$.

+ Biết hai góc chúng ta xác định được góc còn lại.

*** Trong tam giác cân:** Biết một góc chúng ta xác định được hai góc còn lại.

*** Trong tam giác vuông:**

+ Biết một góc nhọn, chúng ta xác định được góc nhọn còn lại.

+ Cạnh góc vuông bằng nửa cạnh huyền thì góc đối diện với cạnh góc vuông đó có số đo bằng $30°$.

*** Trong tam giác vuông cân:** Mỗi góc nhọn có số đo bằng $45°$.

*** Trong tam giác đều:** Mỗi góc có số đo bằng $60°$.

* Đường phân giác của một góc chia góc đó ra hai góc có số đo bằng nhau.

* Hai đường phân giác của hai góc kề bù thì vuông góc với nhau.

* Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau.

* Tính chất về góc so le trong, đồng vị, trong cùng phía, của một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song.

Trong thực tế, để giải bài toán tính số đo góc, ta thường xét các góc đó nằm trong mối liên hệ với các góc ở các hình đặc biệt đã nêu ở trên hoặc xét các góc tương ứng bằng nhau,. .. rồi suy ra kết quả.

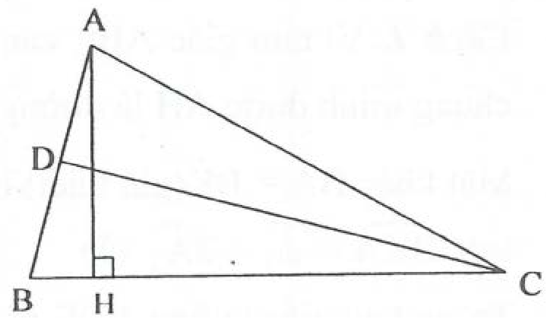
B. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Cho ΔABC, $\widehat{C}=30°$. Kẻ AH vuông góc với BC tại H, biết rằng $AH=\frac{1}{2}BC$. Gọi D là trung điểm của AB. Tính số đo góc ACD?

Giải

*** Tìm cách giải.** Xuất phát từ ΔAHC vuông có $\widehat{C}=30^\circ$ và $AH=\dfrac{1}{2}BC$ .Với hai yếu tố này giúp chúng ta nghĩ tới tam giác vuông có một góc bằng 30° . Với lập luận đó, chúng ta nghĩ tới việc chứng minh tam giác ABC cân. Chúng ta có thể giải theo hướng suy nghĩ đó.

Trình bày lời giải.



Xét ΔAHC có $\widehat{C}=30^\circ, \widehat{AHC}=90^\circ$

$\Rightarrow AH=\dfrac{1}{2}AC$

Mà $AH=\dfrac{1}{2}BC\left(gt\right)\Rightarrow AC=BC$

$\Rightarrow \Delta ACB$ cân tại $C\Rightarrow CD$ là đường phân giác của góc $C\Rightarrow \widehat{ACD}=15^\circ$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có tia phân giác góc B và góc C cắt nhau tại I. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Biết rằng BI = 2.IM và $\widehat{BIM}=90^\circ$. Tính số đo $\widehat{A}$.

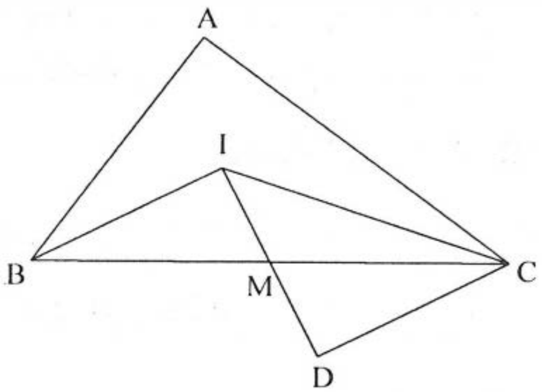
Giải

*** Tìm cách giải.** Dựa vào **ví dụ 4, chuyên đề 7**, chúng ta biết rằng $\widehat{BIC}=90^\circ+\dfrac{\widehat{A}}{2}$. Do vậy chúng ta chỉ cần tính $\widehat{BIC}$. Mặt khác, theo giả thiết $\widehat{BIM}=90^\circ$ nên chúng ta chỉ cần tính $\widehat{MIC}$. Do MB = MC và BI = 2.IM nên dễ dàng suy luận được tạo ra điểm D sao cho M là trung điểm của ID. Từ đó chúng ta có lời giải sau:

Trình bày lời giải.

Trên tia đối của tia MI lấy MD = MI. $\widehat{BMI}=\widehat{CMD}; IM=DM$

Suy ra $\Delta BIM=\Delta CDM\ \left(c.g.c\right)\Rightarrow BI=CD; \widehat{BIM}=\widehat{CDM}\Rightarrow \widehat{CDI}=90^\circ$



Từ $BI=2.IM\Rightarrow BI=ID\left(=2.\text{IM}\right)$

$\Rightarrow CD=ID\Rightarrow \Delta CDI$ vuông cân tại D

$\Rightarrow \widehat{CID}=45^\circ\Rightarrow \widehat{BIC}=135^\circ$

ΔBIC có $\widehat{BIC}=135^\circ$ nên

$\widehat{IBC}+\widehat{ICB}=45^\circ$

BI; CI là tia phân giác $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ nên

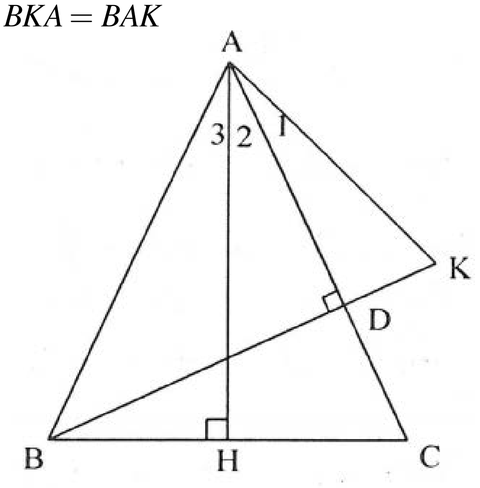
$\widehat{ABC}+\widehat{ACB}=2.\left(\widehat{IBC}+\widehat{ICB}\right)=90^\circ$, suy ra $\widehat{A}=90^\circ$

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC cân ở tại A với $\widehat{BAC} < 90°$ và kẻ BD, AH lần lượt vuông góc với AC; BC. Trên tia BD lấy điểm K sao cho BK = BA. Tính số đo của góc HAK.

Giải

- *Cách 1.* Vì tam giác ABC cân tại A có AH vuông góc với BC, dễ dàng chứng minh được AH là đường phân giác của góc $\widehat{BAC}$ suy ra $\widehat{A_2} = \widehat{A_3}$.

Mặt khác BA = BK (giả thiết) nên ΔABK cân tại B, suy ra $\widehat{BKA} = \widehat{BAK}$



hay $\widehat{BKA} = \widehat{A_1} + 2\widehat{A_2}$ (1)

Trong tam giác vuông ADK có:

$\widehat{K} + \widehat{A_1} = 90°$ (2)

Thay (1) vào (2) ta được:

$2\widehat{A_1} + 2\widehat{A_2} = 90°$,

Suy ra $\widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 45°$

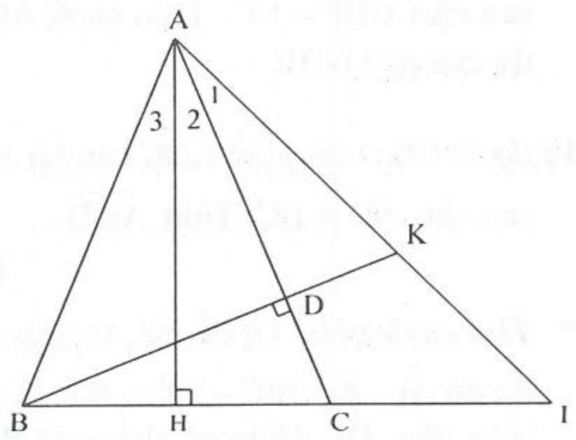
Vậy $\widehat{HAK} = 45°$

- *Cách 2.* Gọi I là giao điểm của AK và BC.

ΔBIK có $\widehat{AKB} = \widehat{I} + \widehat{CBD}$ (góc ngoài tam giác)

Mà $\widehat{CBD} = \widehat{A_2}\left(= 90° - \widehat{ACB}\right)$ nên $\widehat{AKB} = \widehat{I} + \widehat{A_2}$ (1)

Ta có $\widehat{KAB} = \widehat{IAH} + \widehat{A_3}$ (2)



Mặt khác: $\widehat{AKB} = \widehat{KAB}$ (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra:

$\widehat{IAH} + \widehat{A_3} = \widehat{I} + \widehat{A_2}$

Lại có $\widehat{A_2} = \widehat{A_3} \Rightarrow \widehat{IAH} = \widehat{I}$

suy ra ΔAHI cân tại H

$\Rightarrow \widehat{HAK} = 45°$

**** Nhận xét:***

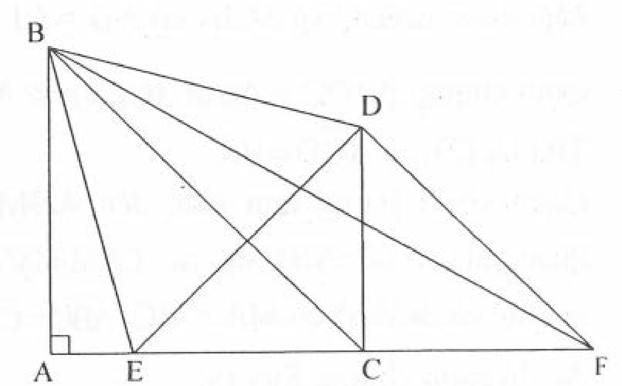
- Bài toán này có nhiều cách giải. Ngoài hai cách tính trên đây, chúng ta có thể hạ $KJ \perp AH\left(J \in AH\right)$ rồi chứng minh ΔAJK vuông cân tại J.

- Nếu $\widehat{BAC} > 90^\circ$ ta có kết quả $\widehat{HAK} = 135^\circ$ (bạn đọc tự chứng minh theo ý tưởng trên)

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trên tia AC lấy hai điểm E và F sao cho $\widehat{ABE} = 15^\circ$ và CE = CF. Tính số đo của góc CBF.

Giải

Trên nửa mặt phẳng bờ BE chứa điểm F, dựng tam giác đều BED. Ta có
$\widehat{EBC} = \widehat{ABC} - \widehat{ABE} = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ \Rightarrow \widehat{CBD} = 30^\circ$



Khi đó BC là tia phân giác góc EBD nên

$\Delta BCD = \Delta BCE$ (c.c.c) $\Rightarrow CD = CE = CF$,

Suy ra tam giác DEF vuông

tại D. Ta có:

$\widehat{DEF} = 180^\circ - \widehat{AEB} - \widehat{BED}$

$= 180^\circ - 75^\circ - 60^\circ = 45^\circ$

Vậy DEF vuông cân tại D.

Lại có.

$\widehat{DFE} = 45^\circ; \widehat{ACB} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{DFE} = \widehat{ACB}$, do đó BC // DF.

Ta lại có tam giác DBF cân tại D (vì DB = DF = DE) và $\widehat{BDF} = \widehat{BDE} + \widehat{EDF} + 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$ nên $\widehat{DFB} = \widehat{DBF} = 15^\circ$, suy ra $\widehat{CBF} = \widehat{DFB} = 15^\circ$. Vậy $\widehat{CBF} = 15^\circ$

* ***Nhận xét.*** Dựa vào kỹ thuật trên, chúng ta có thể giải được bài toán đảo: Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trên tia đối của tia CA lấy điểm F sao cho $\widehat{CBF} = 15^\circ$. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho CE = CF. Tính số đo của góc CBE.

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{A} = 20^\circ$. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho AD = BC. Tính $\widehat{ACD}$.

Giải

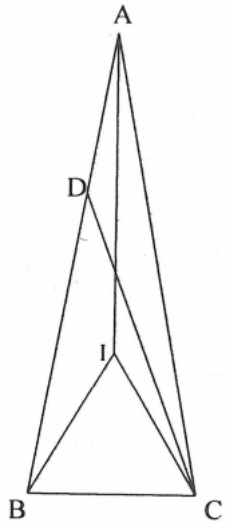
* ***Tìm cách giải.*** Từ đề bài, ta tính được $\widehat{B} = \widehat{C} = 80^\circ$ do đó $\widehat{B} - \widehat{A} = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ$ là một góc của tam

giác đều. Do đó ta có thể nghĩ đến phương pháp để vẽ đường phụ là tam giác đều.

Khi vẽ đường phụ chúng ta chú ý vẽ xuất phát điểm luôn luôn xuất hiện mối liên hệ giữa $20^\circ;\ 60^\circ;\ 80^\circ$. Sau đây là một vài cách:

* ***Trình bày lời giải***

- **Cách vẽ 1.** Dựng điểm I nằm trong tam giác sao cho tam giác BIC là tam giác đều.



Ta có ΔABI và ΔACI có AB = AC, IB = IC, AI là cạnh chung $\Rightarrow \Delta ABI = \Delta ACI$ (c.c.c)

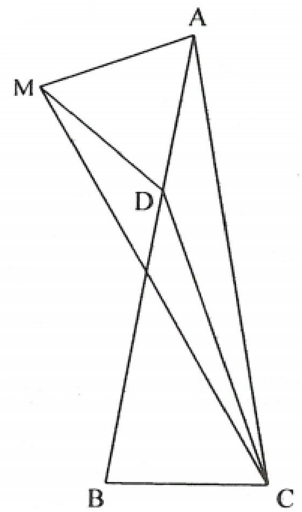
$\Rightarrow \widehat{BAI} = \widehat{CAI} = 10^\circ$ (1)

Mặt khác ΔADC và ΔCIA có AD = CI (= BC), $\widehat{DAC} = \widehat{ICA}(= 20^\circ)$, AC là cạnh chung $\Delta ADC = \Delta CIA$

(c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{CAI}$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow \widehat{ACD} = 10^\circ$

- **Cách vẽ 2.** Dựng tam giác đều ADM (M và C khác phía so với AB). suy ra:
$\widehat{CAM} = 20^\circ + 60^\circ = 80^\circ$.



ΔABC và ΔCAM có MA = BC,
$\widehat{ABC} = \widehat{CAM}(= 80^\circ)$, AC là cạnh chung. Suy ra:

$\Delta ABC = \Delta CMA(c.g.c) \Rightarrow \widehat{ACM} = 20^\circ$ và CM = AC.

ΔADC và ΔMDC có AD = MD, AC = MC, CD là cạnh chung. Suy ra:

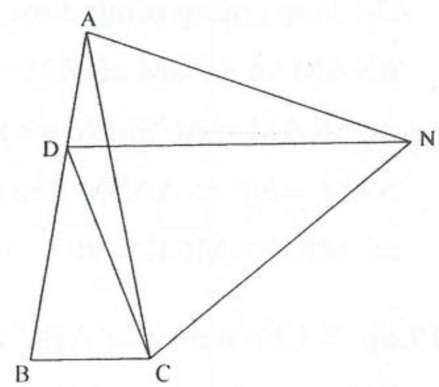
$$\Delta ADC = \Delta MDC\ (c.c.c) \Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{MCD} = \frac{20^\circ}{2} = 10^\circ$$

- **Cách vẽ 3.** Dựng tam giác đều CAN (B; N khác phía so với AC) suy ra:
$\widehat{DAN} = 20^\circ + 60^\circ = 80^\circ$.

ΔABC và ΔNAD có AD = BC,

$\widehat{ABC} = \widehat{NAD}(= 80^\circ), AB = AN(= AC)$

Suy ra $\Delta ABC = \Delta NAD(c.g.c)$



$\Rightarrow AC = ND$ và $\widehat{AND} = 20^\circ$

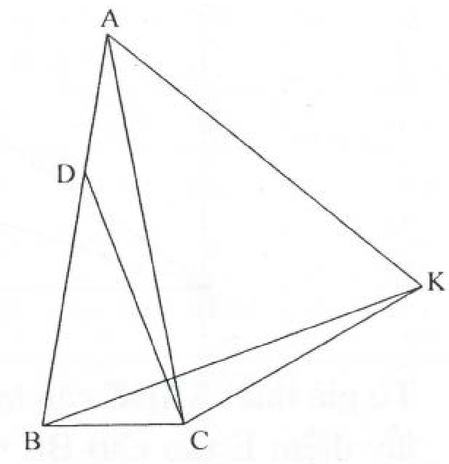
Xét ΔDNC ta có ND = NC (cùng bằng AC)

$\Rightarrow \Delta CND$ cân tại N mà

$\widehat{CND} = 60^\circ - \widehat{AND} = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ$

$\Rightarrow \widehat{NCD} = \dfrac{180° - 40°}{2} = 70° \Rightarrow \widehat{ACD} = 70° - 60° = 10°$

- **Cách vẽ 4.** Dựng tam giác đều ABK (K; C cùng phía so với AB).



Ta có ΔACK cân tại A mà

$\widehat{CAK} = 60° - 20° = 40°$

$\Rightarrow \widehat{AKC} = \dfrac{180° - 40°}{2} = 70°$

Mặt khác: ADC và ΔBCK có AD = BC,

$\widehat{DAC} = \widehat{CBK} (= 20°)$, $AC = AK\ (= AB)$.

Suy ra $\Delta ADC = \Delta BCK (c.g.c)$

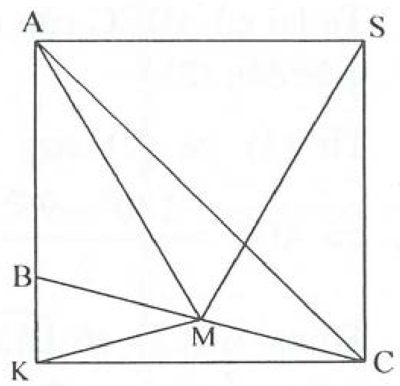
$\Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{BKC} = 70° - 60° = 10°$

Ví dụ 6. Cho ΔABC, M là trung điểm của BC, $\widehat{BAM} = 30°, \widehat{MAC} = 15°$. Tính số đo góc $\widehat{BCA}$?

Giải

* ***Tìm cách giải.*** Do $\widehat{BAC} = 45°$ nên chúng ta nghĩ tới việc dựng tam giác vuông cân. Do vậy chúng ta có thể giải như sau:

* ***Trình bày lời giải***



Kẻ $CK \perp AB$. Ta có ΔAKC vuông cân tại K

(vì $\widehat{BAC} = 45°$)

$\Rightarrow KA = KC$. Vẽ ΔASC vuông cân tại S (K, S khác phía so với A(

Do ΔBKC vuông tại K $\Rightarrow KM = \dfrac{1}{2} BC = MC$

$\Rightarrow \Delta KMC$ cân tại M $\widehat{MKC} = \widehat{MCK} \Rightarrow \widehat{AKM} = \widehat{SCM}$

Dễ dàng chứng minh được $\Delta KAC = \Delta SAC \Rightarrow AK = CK = CS = SA$.

ΔKAM và ΔCSM có $KM = CM, \widehat{AKM} = \widehat{SCM}$, $KA = CS$

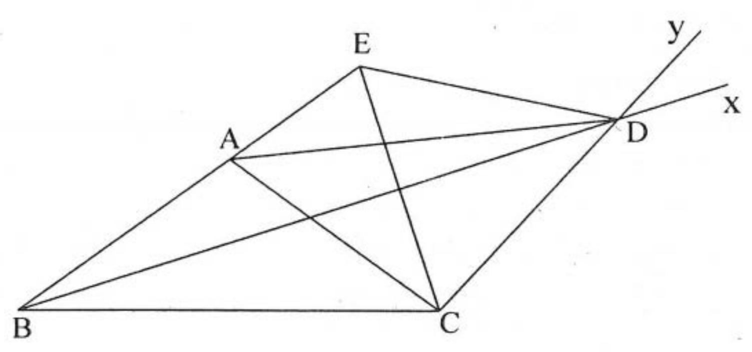
$\Rightarrow \Delta KAM = \Delta CSM (c.g.c) \Rightarrow \widehat{CSM} = 30° \Rightarrow \widehat{ASM} = 60°$ và

$\widehat{SAM} = 60° \Rightarrow \Delta ASM$ đều $\Rightarrow AS = SM = AK \Rightarrow \Delta AKM$ cân tại A

$\Rightarrow \widehat{MKC} = \widehat{MCK} = 90° - 75° = 15° \Rightarrow \widehat{BCA} = 45° - 15° = 30°$

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{A}=3.\widehat{B}$. Trên nửa mặt phẳng bờ BC, chứa điểm A, vẽ tia Cy sao cho $\widehat{BCy}=132°$. Tia Cy cắt tia phân giác Bx của góc B tại D. Tính số đo góc ADB.

Giải



Từ giả thiết ΔABC cân tại A và $\widehat{A}=3.\widehat{B}$, suy ra $\widehat{B}=\widehat{C}=36°$. Trên tia BA lấy điểm E sao cho BE = BC (E nằm ngoài đoạn AB), khi đó Bx là tia phân giác của $\widehat{ABC}$ từ đó dễ dàng chứng minh được BD vuông góc với CE.

Tam giác EBC cân tại B có; $\widehat{EAC}=\widehat{ABC}+\widehat{ACB}=72°$

$\widehat{AEC}=\dfrac{180°-36°}{2}=72°$. Do đó $\widehat{AEC}=\widehat{CAE}\Rightarrow \Delta ACE$ cân tại C nên CA = CE (1).

Ta lại có ΔDEC cân tại D, và $\widehat{ECD}=132°-72°=60°$ nên ΔDEC là tam giác đều (2).

Từ (1) và (2) suy ra ΔCAD cân tại C, có $\widehat{ACD}=132°-36°=96°$

$\Rightarrow \widehat{ADC}=\dfrac{180°-96°}{2}=42°$.

Trong ΔBCD có $\widehat{BDC}=180°-132°-18°=30°$, suy ra:

$\widehat{ADB}=\widehat{ADC}-\widehat{BDC}=42°-30°=12°$. Vậy $\widehat{ADB}=12°$

C. Bài tập vận dụng

14.1. Cho tam giác ABC cân tại A, $\widehat{A}=80°$. Điểm D thuộc miền trong tam giác sao cho $\widehat{DBC}=10°;\widehat{DCB}=30°$. Tính số đo $\widehat{ADB}$.

14.2. Cho tam giác vuông ABC vuông cân tại A. Điểm D thuộc miền trong tam giác sao cho $\widehat{ADC}=150°$ và tam giác DAC cân tại D. Tính số đo $\widehat{ADB}$

14.3. Cho $\Delta ABC, \widehat{B} = 45°; \widehat{A} = 15°$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm D sao cho CD = 2BC. Vẽ $DE \perp AC \left(E \in AC\right)$.

a) Chứng minh rằng: EB = ED.

b) Tính số đo $\widehat{ADB}$.

14.4. Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{A} = 100°$. Qua B dựng tia Bx sao cho $\widehat{CBx} = 30°$. Tia phân giác của góc ACB cắt tia Bx tại D.

a) So sánh CD với CA.

b) Tính số đo của góc BDA.

14.5. Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{A} = 40°$. Trên tia phân giác AD của góc A lấy điểm E sao cho $\widehat{ABE} = 30°$; trên cạnh AC lấy điểm F sao cho $\widehat{CBF} = 30°$

a) Chứng minh rằng: AE = AF.

b) Tính số đo của $\widehat{BEF}$.

14.6. Cho tam giác cân ABC (AB = AC) với $\widehat{BAC} = 20°$. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $\widehat{CBD} = 50°$, trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $\widehat{BCE} = 60°$. Tính số đo góc $\widehat{CED}$.

14.7. Cho tam giác ABC cân có $\widehat{BAC} = 100°$. Điểm M nằm trong tam giác sao cho $\widehat{MAC} = \widehat{MCA} = 20°$. Tính số đo góc AMB.

14.8. Cho tam giác ABC với $\widehat{BAC} = 55°, \widehat{ABC} = 115°$. Trên tia phân giác của góc ACB lấy điểm M sao cho $\widehat{MAC} = 25°$. Tính số đo góc BMC.

14.9. Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{BAC} = 80°$. Điểm M nằm trong tam giác sao cho $\widehat{MAC} = \widehat{MCA} = 10°$. Tính số đo góc AMB.

14.10. Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{BAC} = 80°$. Gọi M là điểm nằm ngoài tam giác sao cho $\widehat{MBC} = 10°, \widehat{MCB} = 30°$. Tính số đo các góc $\widehat{AMB}; \widehat{AMC}$.

14.11. Cho tam giác đều ABC, điểm D nằm giữa A và B. Đường thẳng vẽ từ D vuông góc với AC cắt đường thẳng vẽ từ B vuông góc với BC tại điểm M. Gọi N là trung điểm của AD. Tính số đo góc MCN?

HƯỚNG DẪN GIẢI

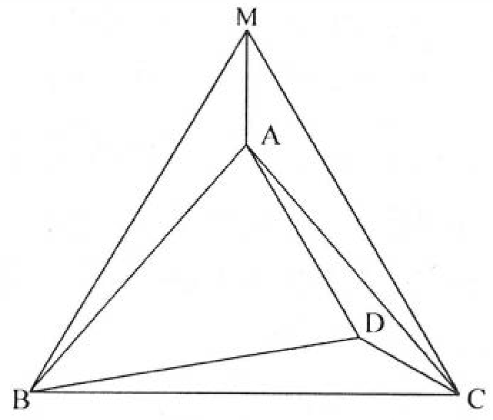
14.1. ***Tìm cách giải.*** Đây là bài toán khó bởi chúng ta khó nhận ra mối quan hệ giữa giả thiết và kết luận để tìm cách giải quyết bài toán. Ta có: $\widehat{ABC} + \widehat{DBC} = 60°$ là một góc của tam giác đều. Từ đó chúng ta có thể vẽ để tạo ra tam giác đều theo các hướng sau:

- *Cách 1.* Dựng tam giác đều BCM (A; M cùng phía so với BC).

ΔABM và ΔACM có AB = AC, MB = MC, MA là cạnh chung.

Suy ra $\Delta ABM = \Delta ACM$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{AMC} = 30^\circ$



Xét ΔABM và ΔDBC có BM = BC,

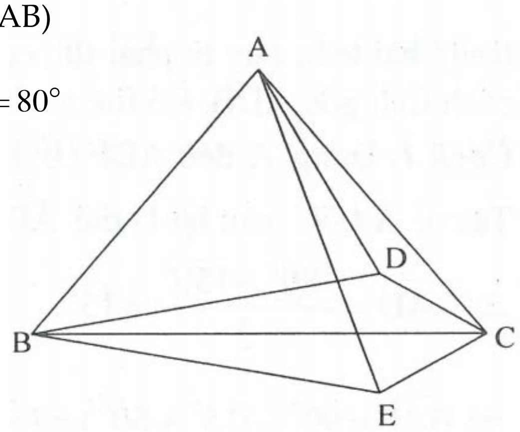
$\widehat{AMB} = \widehat{DCB} = 30^\circ; \widehat{ABM} = \widehat{DBC} = 10^\circ$

$\Rightarrow \Delta ABM = \Delta DBC(g.c.g) \Rightarrow AB = DB$

$\Rightarrow \Delta ABD$ cân tại B

$\Rightarrow \widehat{ADB} = \dfrac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$

- *Cách 2.* Dựng tam giác đều ABE (C và E cùng phía so với AB)



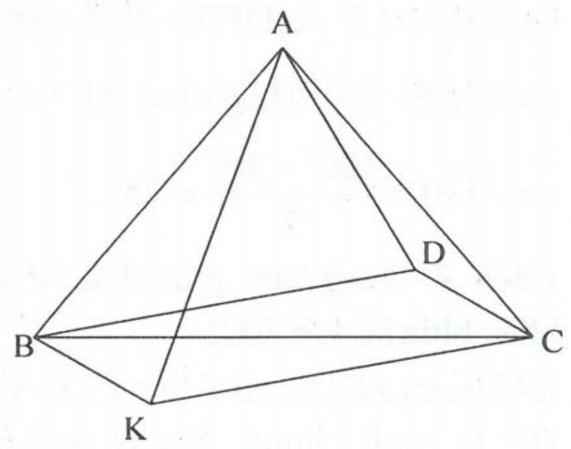
Ta có: ΔACE cân tại A, mà $\widehat{CAE} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{ACE} = \dfrac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ$

$\Rightarrow \widehat{BCE} = 80^\circ - 50^\circ = 30^\circ \Rightarrow \Delta BDC = \Delta BEC(g.c.g)$

$\Rightarrow BD = BE = BA \Rightarrow \Delta BAD$ cân tại B

$\Rightarrow \widehat{ADB} = \dfrac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$.

- Cách 3. Dựng tam giác đều ACK (B; K cùng phía so với AC)



Ta có ΔABK cân lại K, mà

$\widehat{BAK} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{ABK} = 80^\circ$

$\Rightarrow \widehat{CBK} = 80^\circ - 50^\circ = 30^\circ$

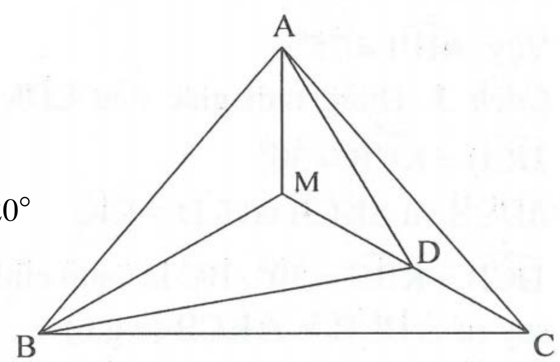
$\Rightarrow \Delta BDC = \Delta CKB$ (g.c.g)

$\Rightarrow BD = CK \Rightarrow \Delta ABD$ cân tại B

Mà $\widehat{ABD} = 40^\circ$

$\Rightarrow \widehat{ADB} = \dfrac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$

- *Cách 4.*



Kẻ tia phân giác của góc $\widehat{ABD}$ cắt CD kéo dài tại M.

Ta có: $\widehat{MBC} = \widehat{MCB} = 30^\circ \Rightarrow \Delta BMC$ cân tại M $\Rightarrow \widehat{BMC} = 120^\circ$

Mặt khác $\Delta AMB = \Delta AMC(\text{c.c.c})$

$\Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{AMC} = \dfrac{360^\circ - 120^\circ}{2} = 120^\circ$

$\Rightarrow \Delta ABM = \Delta DBM(\text{c.g.c})$

$\Rightarrow AB = DB \Rightarrow \Delta ABD$ cân tại B,

Mà $\widehat{ABD} = 40^\circ$

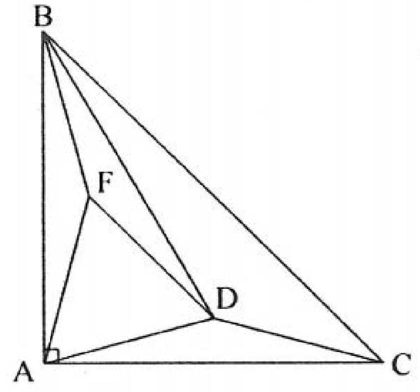
$$\Rightarrow \widehat{ADB} = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$$

14.2. Nhận xét. Để tính được góc ADB ta cần chứng minh tam giác ABD cân tại B. Ta có $150^\circ - 90^\circ = 60^\circ$ là một góc của tam giác đều. Do vậy trong bài toán này ta phải tìm cách vẽ kẻ để tạo ra tam giác đều từ đó tìm cách tính góc ADB. Có thể vẽ đường phụ theo các cách sau:

- *Cách 1.* Dựng Δ đều ADF (B; F cùng phía so với AC).

Ta có: ΔADC cân tại D mà $\widehat{ADC} = 150^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{CAD} = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ$$



$\Rightarrow \widehat{BAF} = 90^\circ - (15^\circ + 60^\circ) = 15^\circ$

$\Rightarrow \Delta ADC = \Delta AFB(c.g.c) \Rightarrow \widehat{AFB} = 150^\circ$

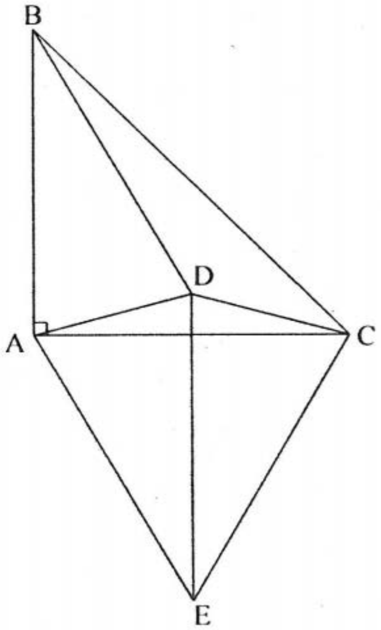
Và $\widehat{ABF} = 15^\circ \Rightarrow \widehat{DFB} = 360^\circ - (60^\circ + 150^\circ) = 150^\circ$

$\Rightarrow \Delta AFB = \Delta DFB(c.g.c) \Rightarrow AB = DB \Rightarrow \Delta ABD$ cân tại B

mà $\widehat{ABD} = 30^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{ADB} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$$

- *Cách 2.* Dựng tam giác đều ACE (E; B khác phía so với AC)



ΔADE và ΔCDE có AD = CD, AB = CE,

DE là cạnh chung, suy ra

$\Delta ADE = \Delta CDE(c.c.c) \Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{CDE} = 75^\circ$

ΔADE và ΔADB có AB = AE,

$\widehat{BAD} = \widehat{EAD}(= 75^\circ)$, AD là cạnh chung,

suy ra $\Delta ADE = \Delta ADB$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{ADB} = 75^\circ$

Vậy $\widehat{ADB} = 75^\circ$

- ***Cách 3.*** Dựng tam giác đều CDK (K; B cùng phía so với AC) suy ra

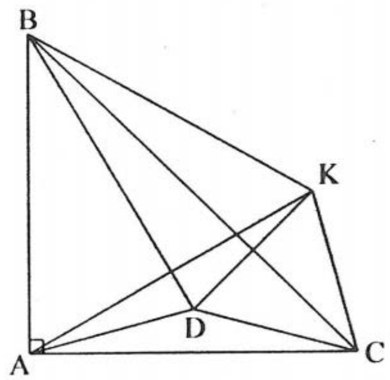
$\widehat{DCB} = \widehat{KCB} = 30°$

ΔDCB và ΔKCB có CD = CK,

$\widehat{DCB} = \widehat{KBC} = 30°$, BC là cạnh chung,

suy ra $\Delta DCB = \Delta KCB$ (c.g.c)

$\Rightarrow$ DB = KB (*)



ΔADK và ΔADC có DK = DC,

$\widehat{ADK} = \widehat{ADC} = 150°$, AD là cạnh chung,

suy ra $\Delta ADC = \Delta ADK$ $(\text{c.g.c}) \Rightarrow AC = AK;\ AC = AB \Rightarrow AK = AB$ (1)

Mặt khác: $\widehat{CAD} = \widehat{KAD} = 15° \Rightarrow \widehat{KAB} = 90° - 30° = 60°(2)$

Từ (1), (2) $\Rightarrow \Delta ABK$ là tam giác đều $\Rightarrow$ BK = BA(**)

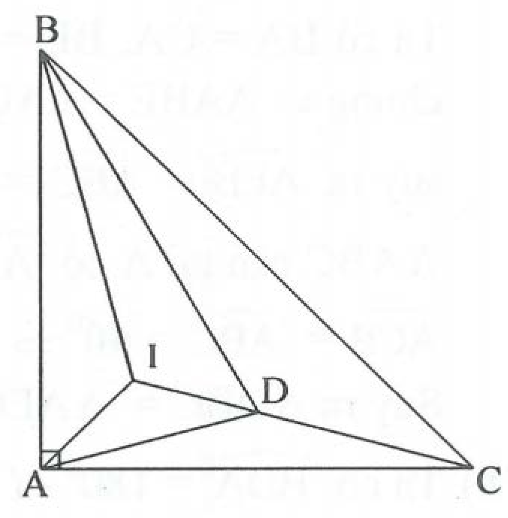
Từ (*) (**)$\Rightarrow DB = BA \Rightarrow \Delta ABD$ cân tại B

$\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{BDA} = 90° - 15° = 75°$.

Vậy $\widehat{ADB} = 75°$.

- ***Cách 4.*** Dựng tia Bx sao cho $\widehat{ABx} = 15°$ (Bx và C cùng phía so với AB).

Tia Bx cắt tia CD tại I.



Ta có ΔBIC cân tại I ($\widehat{IBC} = \widehat{ICB} = 30°$)

$\Rightarrow BI = CI \Rightarrow \Delta ABI = \Delta ACI$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{BAI} = \widehat{CAI} = 45°$ do ΔBIC cân tại I

$\Rightarrow \widehat{BIC} = 150° - (30° + 30°) = 120°$.

Mặt khác, ΔACI có:

$\widehat{ACI} = 15°; \widehat{CAI} = 45° \Rightarrow \widehat{AIC} = 180° - (15° + 45°) = 120°$.

Từ đó ta có: $\widehat{AIB} = 360° - (120° + 120°) = 120°$.

Vậy $\widehat{AIB} = \widehat{DIB} = 120°$.(*)

Xét tam giác: AID có $\widehat{ADI} = \widehat{ACD} + \widehat{CAD} = 30°$ (Góc ngoài tam giác)

$\widehat{DAI} = 45° - 15° = 30° \Rightarrow \Delta AID$ cân tại $I \Rightarrow IA = ID$ (**)

Từ (*) và (**) $\Rightarrow \Delta AIB = \Delta DIB\ (c.g.c) \Rightarrow AB = DB$ và $\widehat{ABI} = \widehat{DBI} = 15°$

$\Rightarrow \Delta ABD$ cân tại B.

$\Rightarrow \widehat{ABI} = \dfrac{180° - 30°}{2} = 75°$

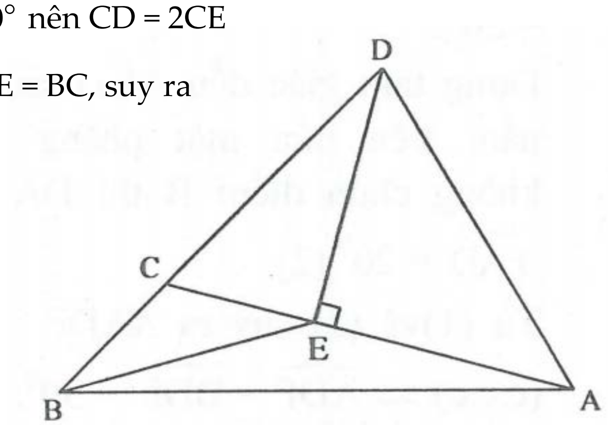
14.3.

a) Ta có $\widehat{ACD} = \widehat{ABC} + \widehat{BAC} = 45° + 15° = 60°$

Từ đó trong tam giác ECD vuông tại E, có $\widehat{CDE} = 30°$ nên CD = 2CE (theo ***ví dụ 8***, chuyên đề 9), ta lại có CD= 2BC nên CE = BC, suy ra

$\widehat{CBE} = 30° = \widehat{CDE}$

ΔEBD cân tại E suy ra EB = ED.



b) Ta có $\widehat{ABE} = \widehat{ABC} - \widehat{CBE} = 45° - 30° = 15° = \widehat{EAB} \Rightarrow \Delta EAB$ cân tại E,

ta lại có EA = EB = ED $\Rightarrow \Delta EAD$ vuông cân tại E $\Rightarrow \widehat{EDA} = 45°$.

Vậy $\widehat{ADB} = \widehat{ADE} + \widehat{EDB} = 45° + 30° = 75°$

14.4.

a) Dựng tam giác đều BEC sao cho E và A cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ BC.

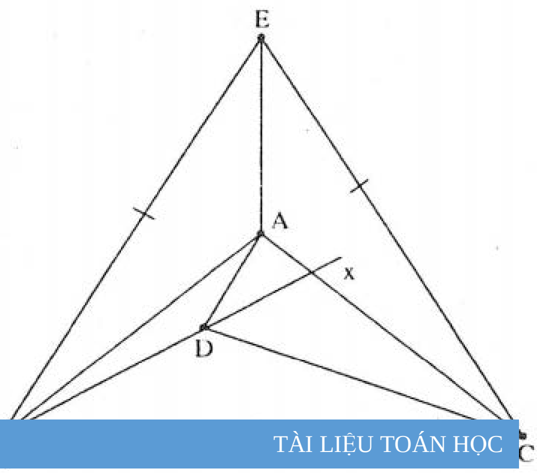
Ta có BA = CA, BE = CE, AE là một cạnh chung $\Rightarrow \Delta ABE = \Delta ACE$ (c.c.c)

suy ra $\widehat{AEB} = \widehat{AEC} = 30°$

ΔABC cân tại A có $\widehat{A} = 100°$ nên suy ra

$\widehat{ACB} = \widehat{ABC} = 40° \Rightarrow \widehat{ECA} = \widehat{ACD} = \widehat{DCB} = 20°$

Suy ra $\Delta DBC = \Delta AEC\left(g - c - g\right) \Rightarrow CD = CA$



b) Ta có $\widehat{BDA} = 180° - \left(\widehat{ABD} + \widehat{BAD}\right)$ (1).

Mà $\widehat{ABD} = \widehat{ABC} - \widehat{DBC} = 10°(2)$.

$$\widehat{BAD} = \widehat{BAC} - \widehat{DAC} = \widehat{BAC} - \left(\frac{180° - \widehat{ACD}}{2}\right) = 100° - \left(\frac{180° - 20°}{2}\right) = 20° \quad (3).$$

Từ (l), (2) và (3) suy ra:

$\widehat{BDA} = 180° - \left(\widehat{ABD} + \widehat{BAD}\right) = 180° - (10° + 20°) = 150°$.

* ***Mở rộng bài toán:*** Có thể thay kết luận bằng yêu cầu: Tính số đo các góc ADC; BAD.

14.5.

a) Ta có $\widehat{FBA} = 40° = \widehat{BAC} \Rightarrow \Delta BFA$ cân tại $F \Rightarrow FA = FB$ (1)

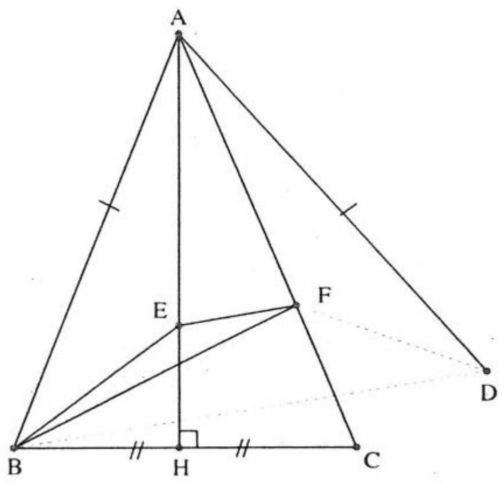
AH là phân giác của $\widehat{BAC}$ nên $\widehat{BAE} = 20°$.

Dựng tam giác đều ABD sao cho D nằm trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B thì DA = DB,

$\widehat{FAD} = 20°$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta ADF = \Delta BDF$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{ADF} = \widehat{BDF} = 30°$.

Từ đó dễ dàng suy ra $\Delta FAD = \Delta EAB$ $(g-c-g) \Rightarrow AE = AF$.



b) Ta có $\widehat{DFA} = 180° - \widehat{ADF} - \widehat{DAF} = 180° - 30° - 20° = 130°$

Ta có $\widehat{DFA} = \widehat{DFB} = 130°; \widehat{EFA} = 80°$ nên suy ra $\widehat{EFB} = 20°$, $\widehat{EBF} = 10°$

Trong ΔBFE thì $\widehat{BEF} = 180° - \left(\widehat{EBF} + \widehat{EFB}\right) = 150°$.

14.6.

- ***Cách 1.*** Vẽ tam giác đều ACF sao cho F nằm trên nửa mặt bờ AB không chứa điểm C

Gọi giao điểm của CF và AB là K

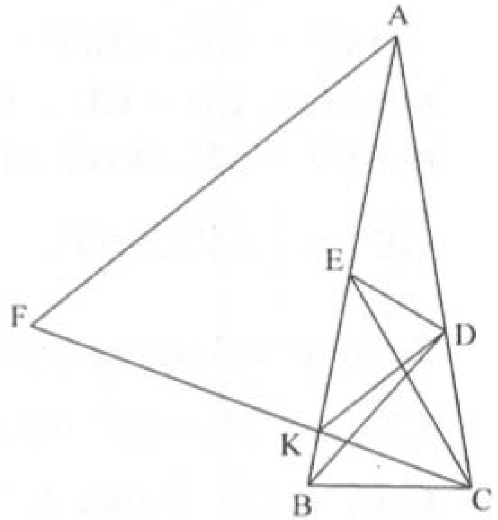
Ta có $\widehat{BCK} = 20°; \widehat{ECK} = 40°$;

$\widehat{BKC}=180°-\left(\widehat{CBK}+\widehat{BCK}\right)=80°$

$\Rightarrow \Delta CBK$ cân tại C $\Rightarrow CK=BC$ (1).

$\widehat{BDC}=180°-\left(\widehat{CBD}+\widehat{BCD}\right)=50°$

$\Rightarrow \Delta CBD$ cân tại C $\Rightarrow CD=BC$ (2).



Từ (1) và (2) suy ra CD = CK

$\Rightarrow \Delta KCD$ cân tại C và $\widehat{DCK}=60°$

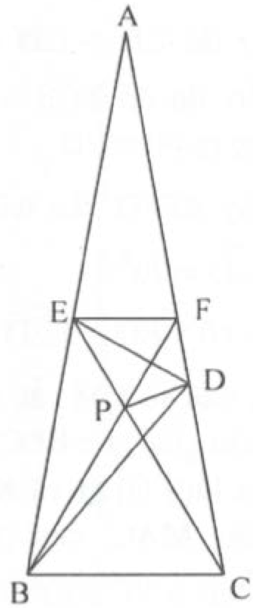
$\Rightarrow \Delta KCD$ là tam giác đều $\Rightarrow CK=DK$ (3).

ΔCKE có $\widehat{KCE}=\widehat{KEC}=40°$ nên ΔCKE cân tại K $\Rightarrow CK=EK$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $EK=DK \Rightarrow \Delta EKD$ cân tại K và có

$\widehat{EKD}=180°-\left(\widehat{CKD}+\widehat{BKC}\right)=40°$ nên $\widehat{KED}=70°$ mà $\widehat{BEC}=40°$

$\Rightarrow \widehat{CED}=30°$



- Cách 2. Vẽ EF // BC (F thuộc AC). Gọi P là giao điểm của BF và CE, do $\widehat{BCE}=60°$ nên ΔBPC đều $\Rightarrow CP=CB$ (1).

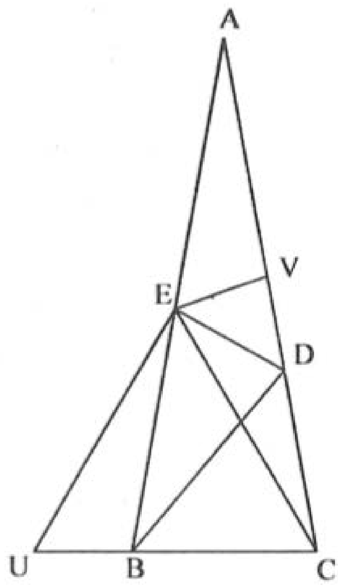
Do $\widehat{CBD}=\widehat{CDB}=50°$ nên ΔBCD cân tại C, dẫn đến CD = CB (2).

Từ (1) và (2) suy ra ΔDCP cân tại C nên

$\widehat{CPD}=80°; \widehat{DPF}=40°$. Mà $\widehat{DFP}=40°$ nên ΔDPF cân DP = DF.

Từ đó $\Delta DPF=\Delta DFE$ (c.c.c)

Suy ra $\widehat{PED}=\widehat{FED}=30°$. Hay $\widehat{CED}=30°$



- Cách 3. Trên tia CA; CB lấy V và U sao cho CV = CU = CE.

Ta có CE = CU và $\widehat{BCE}=60°$ nên ΔCEU đều, do đó EU = EC

và $\widehat{CEU}=60°$. Vì $\widehat{CEB}=40°$ nên $\widehat{BEU}=20°$.

Lại có ΔACE cân nên AE = CE, do đó AE = EU.

Có $\Delta AEV=\Delta EUB\left(AE=EU\right), \widehat{EAV}=\widehat{UEB}$

$=20°, AV=AC-CV=AB-EC=AC-AE=EB$

Nên EV = BU và $\widehat{AVE}=\widehat{EBU}$

$=180^\circ - \widehat{ABC} = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$.

Mặt khác, $BU = CU - BC = CV - CD = DV$

Nên EV = DV. Do đó ΔEVD cân tại V, suy ra

$\widehat{DEV} = \dfrac{1}{2}\widehat{AVE} = 50^\circ$.

Ta có ΔCVE cân tại C có $\widehat{ECV} = 20^\circ$, suy ra

$\widehat{CEV} = \widehat{CVE} = 80^\circ$. Từ đó $\widehat{CED} = \widehat{CEV} - \widehat{DEV} = 80^\circ - 50^\circ = 30^\circ$

- *Cách 4.* Lấy F trên AB sao cho $\widehat{DCF} = 60^\circ$

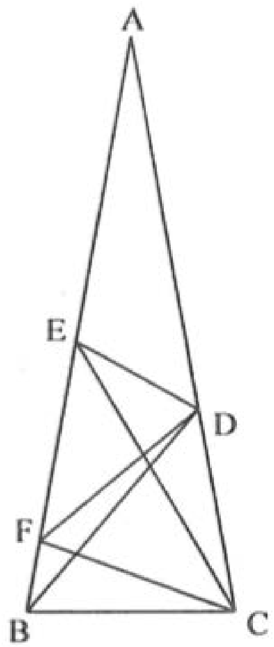
$\Rightarrow \widehat{FCB} = 20^\circ \Rightarrow \Delta BCF$ cân $\left(\widehat{CFB} = \widehat{CBF} = 80^\circ\right)$,

Nên CF = CB. Ta có ΔBCD cân $\left(\widehat{CBD} = \widehat{CDB} = 50^\circ\right)$

Suy ra CB = CD

Từ đó CF = CD mà $\widehat{DCF} = 60^\circ$ nên ΔCDF đều, do đó

$\widehat{FCE} = 40^\circ = \widehat{FEC}$ nên FE = FC, suy ra FE = FD.



Vậy ΔFED cân tại F. Vì $\widehat{EFD} = 40^\circ$, suy ra $\widehat{FED} = 70^\circ$.

Ta có $\widehat{CED} = \widehat{FED} - \widehat{FEC} = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ$.

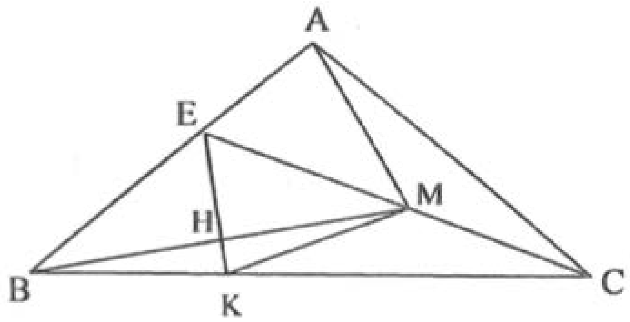
14.7. Giả sử CM cắt AB tại E, tia phân giác góc BEC cắt BM, BC lần lượt tại H và K. Ta có tam giác MAC cân tại M, nên $\widehat{AME} = 20^\circ + 20^\circ = 40^\circ$

Lại có $\widehat{CEA} = \widehat{CEK} = \widehat{BEK} = 60^\circ$, suy ra $\Delta CEA = \Delta CEK$ (g.c.g)

$\Rightarrow \Delta MEA = \Delta MEK$ (c.g.c)

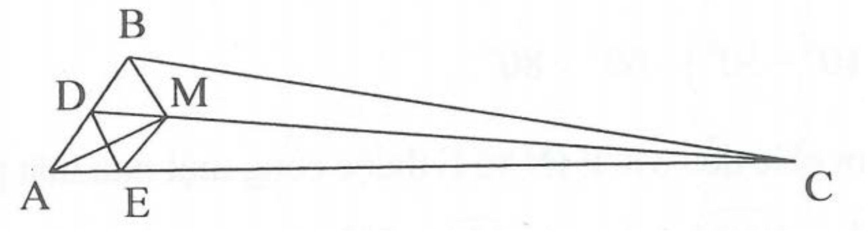
Suy ra $\widehat{AME} = \widehat{KME} = 40^\circ$. Vì $\widehat{EBK} = 40^\circ$ nên $\Delta EKB = \Delta EKM$ (g.c.g), suy ra $\Delta EHB = \Delta EHM$ (c.g.c), do đó $\widehat{EHM} = 90^\circ$.

Xét tam giác HEM có $\widehat{EHM} = 90^\circ, \widehat{HEM} = 60^\circ$, nên $\widehat{EMH} = 30^\circ$. Do đó $\widehat{AMB} = \widehat{BME} + \widehat{EMA} = 30^\circ + 40^\circ = 70^\circ$.



14.8. Ta có $\widehat{C} = 180^\circ - (55^\circ + 115^\circ) = 10^\circ$

Kẻ $DE \perp AM\,(E \in AC)$.



Ta có $\widehat{DAM}=\widehat{DMA}=30^\circ \Rightarrow \Delta DAM$ cân tại D từ đó suy ra $\widehat{ADM}=120^\circ$, và DE là đường phân giác của góc ADM nên $\widehat{EDM}=\widehat{BDM}=60^\circ$. Do đó $\Delta EDC=\Delta BDC\left(g.c.g\right)\Rightarrow BC=EC$.

Xét ΔBMC và ΔEMC có $BC=EC;\widehat{MCB}=\widehat{MCE}=5^\circ$, MC chung.

Do đó $\Delta BMC=\Delta EMC$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{BMC}=\widehat{EMC}=180^\circ-\widehat{DME}=180^\circ-\widehat{DAE}=180^\circ-55^\circ=125^\circ$

14.9. Vẽ tam giác AEM đều với E và B cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ AM.

Ta có $\widehat{BAE}=80^\circ-10^\circ-60^\circ=10^\circ$

ΔBAE và ΔCAM có AB = AC,

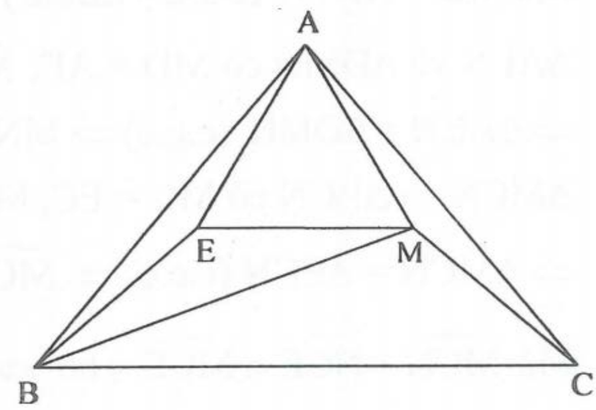
$\widehat{BAE}=\widehat{MAC}\left(=10^\circ\right), AE=AM$

Suy ra $\Delta BAE=\Delta CAM$ (c.g.c)

$\widehat{ABE}=\widehat{ACM}=10^\circ$. Do đó

$\widehat{EAB}=\widehat{EBA}=10^\circ \Rightarrow \widehat{AEB}=160^\circ$

$\Rightarrow \widehat{BEM}=360^\circ-60^\circ-160^\circ=140^\circ$.



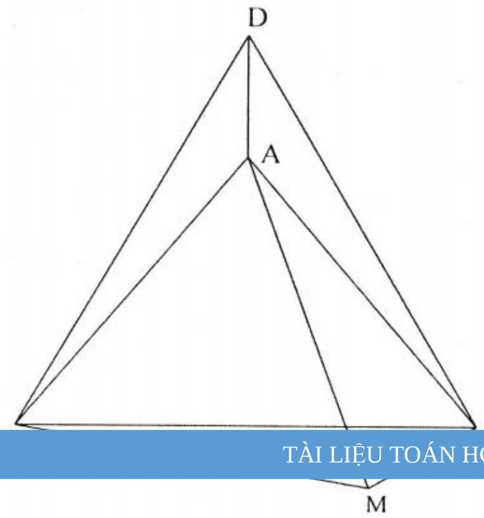
Xét tam giác BEM có BE = AE = EM nên $\widehat{EBM}$ = $\widehat{EMB}=(180^0-140^{0)}:2=20^0$. Do đó $\widehat{AMB}=20^0+60^0=80^0$.

14.10. Dựng tam giác BCD đều với A, D cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ BC. Ta có $\widehat{ABC}=\widehat{ACB}=50^\circ$, suy ra $\widehat{ABD}=10^\circ$.

Từ $\Delta ADB=\Delta ADC$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{ADB}=\widehat{ADC}=30^\circ$

Từ đó $\Delta BAD=\Delta BMC$ (g.c.g), suy ra BA = BM, dẫn đến tam giác BAM đều, suy ra $\widehat{AMB}=60^\circ$ và $\widehat{AMC}=\left(180^\circ-10^\circ-30^\circ\right)-60^\circ=80^\circ$.



14.11. Vẽ tam giác đều MCE (N và E thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ CM).

Ta có $\widehat{ACE}=\widehat{BCM}$ (cùng + $\widehat{MCA}=60^\circ$)

ΔACE và ΔBCM có BC = AC,

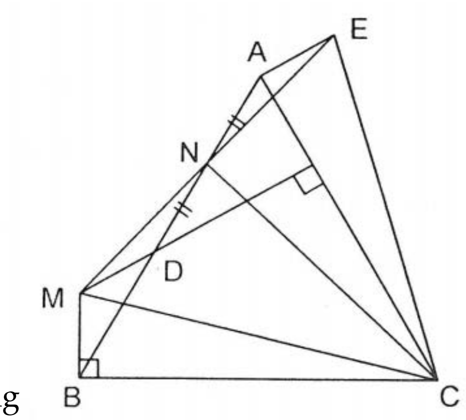
$\widehat{ACE}=\widehat{BCM}, MC=EC$

$\Rightarrow \Delta ACE=\Delta BCM$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{CAE}=\widehat{CBM}=90^\circ$

$\Rightarrow AE//DM$ (cùng $\perp AC$)

$\Rightarrow \widehat{EAN}=\widehat{MDN}$ (so le trong).



Ta có $\widehat{MBD}=\widehat{MDB}=30^\circ \Rightarrow \Delta MBD$ cân tại $M \Rightarrow MB=MD$

Mà $MB=AE$ (vì $\Delta ACE=\Delta BCM$) $\Rightarrow MD=AE$.

ΔAEN và ΔDMN có $MD=AE, \widehat{MDN}=\widehat{EAN}=150^\circ$

$\Rightarrow \Delta AEN=\Delta DMN(c.g.c) \Rightarrow MN=NE$

ΔMCN và ΔECN có $MC=EC, MN=EN, CN$ là cạnh chung

$\Rightarrow \Delta MCN=\Delta ECN(c.c.c) \Rightarrow \widehat{MCN}=\widehat{NCE}$

Mà $\widehat{MCN}+\widehat{NCE}=\widehat{MCE}=60^\circ \Rightarrow \widehat{MCN}=\frac{1}{2}\widehat{MCE}=30^\circ$.

PHẦN I. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

DẠNG 1: VẬN DỤNG QUAN HỆ GIỮA ĐƯỜNG VUÔNG GÓC VÀ ĐƯỜNG XIÊN. QUAN HỆ GIỮA ĐƯỜNG XIÊN VÀ HÌNH CHIẾU

1. KIÊN THÚC CƠ BẢN:

1.1. Trong các tam giác vuông có các cạnh góc vuông AH và cạnh huyền AB thì $AB \geq AH$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ B trùng với H.

1.2. Trong các đoạn thẳng nối từ một điểm đến các điểm thuộc một đường thẳng, đoạn thẳng vuông góc với đường thẳng có độ dài nhỏ nhất.

1.3. Trong các đoạn thẳng nối hai điểm nằm trên hai đường thẳng song song, đoạn thẳng vuông góc với hai đường thẳng song song có độ dài nhỏ nhất.

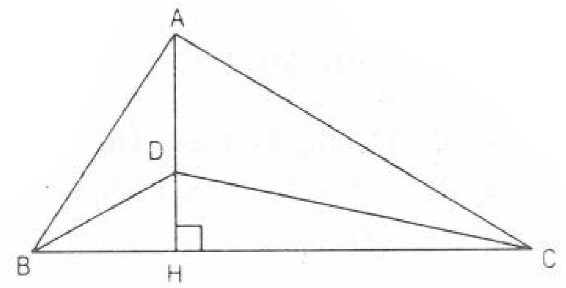
1.4. Trong hai đường xiên cùng kẻ từ một điểm nằm ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó. đường xiên nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn.

2. BÀI TẬP VẬN DỤNG.

Bài 1: Cho tam giác ABC có $AB \leq AC$; AH là đường cao. D là điểm trên đường thẳng AH.

Chứng minh rằng $DB \leq DC$

HƯỚNG DẪN GIẢI



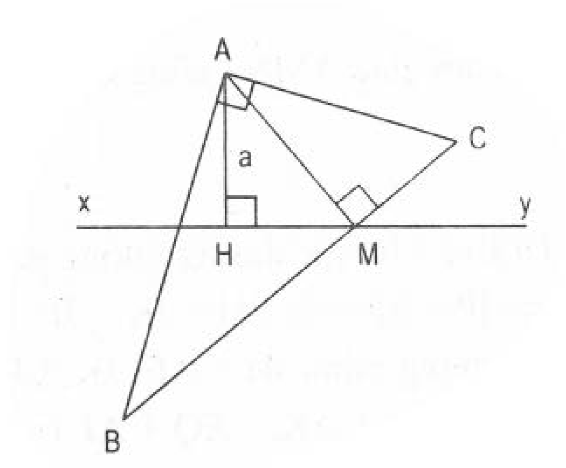
HB, HC lần lượt là hình chiếu của AB và AC trên đường thẳng BC; $AB \leq AC \Rightarrow HB \leq HC$

HB và HC lần lượt là hình chiếu của DB và DC trên đường thẳng BC nên $HB \leq HC$

$\Rightarrow DB \leq DC$

Bài 2: Cho điểm A nằm ngoài đường thẳng xy và cách đường thẳng xy một khoảng bằng a. Gọi M là điểm di động trên xy. Vẽ tam giác ABC vuông tại A sao cho AM là đường cao của tam giác đó. Tính giá trị nhỏ nhất của tích MB.MC

HƯỚNG DẪN GIẢI



Gọi H là hình chiếu của A trên đường thẳng xy

H là điểm cố định và AH = a. Ta có: $AM \geq AH$. Dấu '=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv H$

Xét ΔABC vuông tại A có AM là đường cao nên $MB.MC = AM^2 \geq AH^2 = a^2$: không đổi

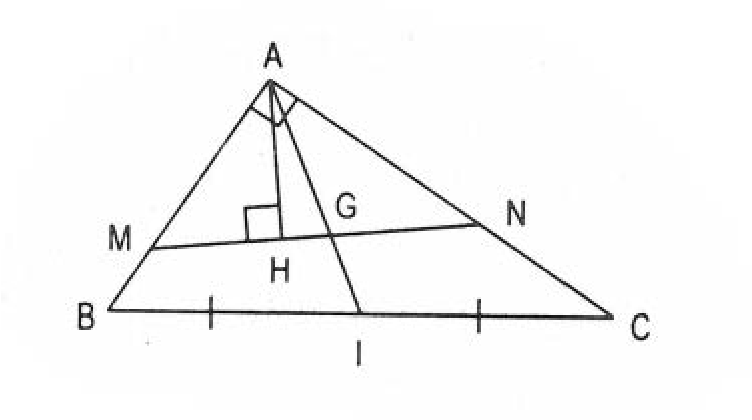
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow AM = AH \Leftrightarrow M \equiv H$

Vậy tích MB.MC đạt giá trị nhỏ nhất là a^2

$\Leftrightarrow M \equiv H$

Bài 3: Cho tam giác ABC vuông tại A. Một đường thẳng d đi qua trọng tâm G của tam giác cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng: $\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} \geq \frac{9}{BC^2}$

HƯỚNG DẪN GIẢI



Kẻ AH vuông góc với d tại H. Gọi I là giao điểm của AG và BC nên I là trung điểm của BC.

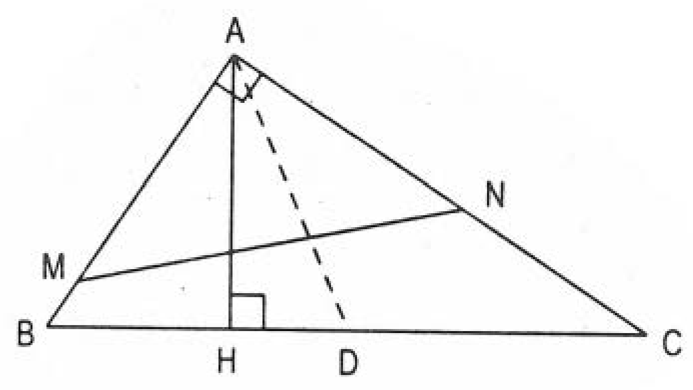
Ta có: $\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{AN^2}=\frac{1}{AH^2}$

Mà $\frac{1}{AH^2}\geq\frac{1}{AG^2}=\frac{1}{\left(\frac{2}{3}AI\right)^2}=\frac{9}{BC^2}$ (vì $AH\leq AG$)

Do đó $\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{AN^2}\geq\frac{9}{BC^2}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow d\perp AG$

Bài 4: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Trên AB vả AC lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho AM = AH = AN. Chứng minh rằng $S_{AMN}\leq\frac{1}{2}S_{ABC}$

HƯỚNG DẪN GIẢI



$AM=AH=AN\Rightarrow S_{AMN}=\frac{1}{2}AM.AN=\frac{1}{2}AH^2\,(1)$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}BC.AH$

Gọi D là trung điểm của BC

$\Rightarrow BC=2.AD\geq 2.AH$ nên

$S_{ABC}\geq AH^2\,(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $S_{AMN}\leq\frac{1}{2}S_{ABC}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow AH=AD\Leftrightarrow\Delta ABC$ là tam giác vuông cân tại A.

Bài 5: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AD, gọi I là giao điểm các đường phân giác của tam giác ABD, J là giao điểm các đường phân giác của tam giác ADC, đường thẳng IJ cắt AB tại M và cắt AC tại N. Chứng minh rằng:

a) Tam giác AMN vuông cân

b) $S_{AMN} \le \frac{1}{2}S_{ABC}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

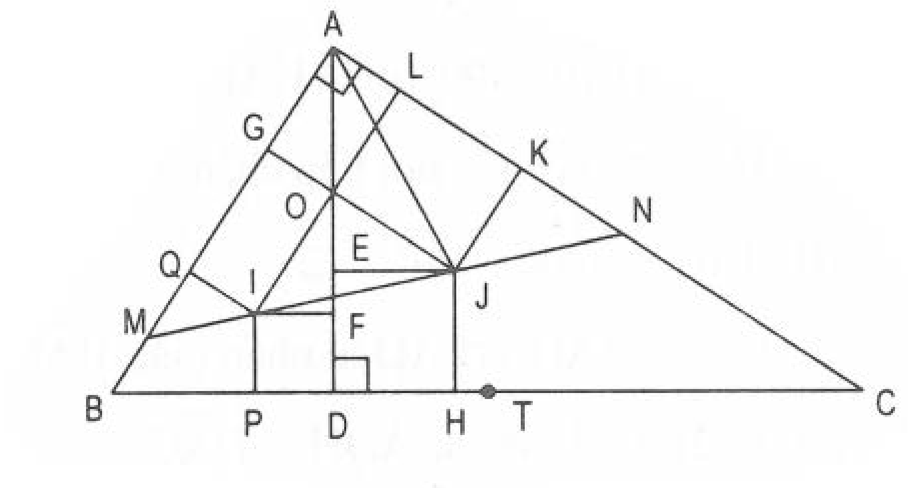
a) Từ I và J hạ các đường vuông góc với các cạnh AB, AC, BC và AD (như hình vẽ)

$\Rightarrow IP = IQ = IF, JH = JK = JE$

Ta chứng minh $JG = AE; JK = JE = JH = ED$ nên $JG + JK = AD \Rightarrow AK + AG = AD$

Do đó $AG + AK = AQ + AL\left(= AD\right)$. Nên $AQ - AG = AK - AL \Rightarrow GQ = LK$

Gọi O là giao điểm của IL và IG $\Rightarrow OI = OJ \Rightarrow \Delta AMN$ vuông cân tại A.



b) Từ câu a) suy ra AM = AN = AD

$\Rightarrow S_{AMN} = \frac{1}{2}AM.AN = \frac{1}{2}AD^2$

Gọi T là trung điểm của BC, ta có

$S_{ABC} = \frac{1}{2}BC.AD = AT.AD \ge AD^2$

Suy ra: $S_{AMN} \le \frac{1}{2}S_{ABC}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow AD = AT \Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác vuông cân tại A

Cách 1: Câu a.

Gọi O là giao điểm của BI và CJ; P, Q là giao điểm của AI và AJ với BC

Ta có: $\widehat{P_1} = \widehat{ABC} + \widehat{A_1}; \widehat{PAC} = \widehat{DAC} + \widehat{A_2} \Rightarrow \widehat{P_1} = \widehat{PAC}$ (vì $\widehat{ABC} = \widehat{DAC}$)

$\Rightarrow \Delta CPA$ cân tại C $\Rightarrow$ Phân giác CJ cũng là đường cao

$\Rightarrow CJ \perp AP \Rightarrow JQ \perp AP$ (1)

Tương tự ΔABQ cân tại B

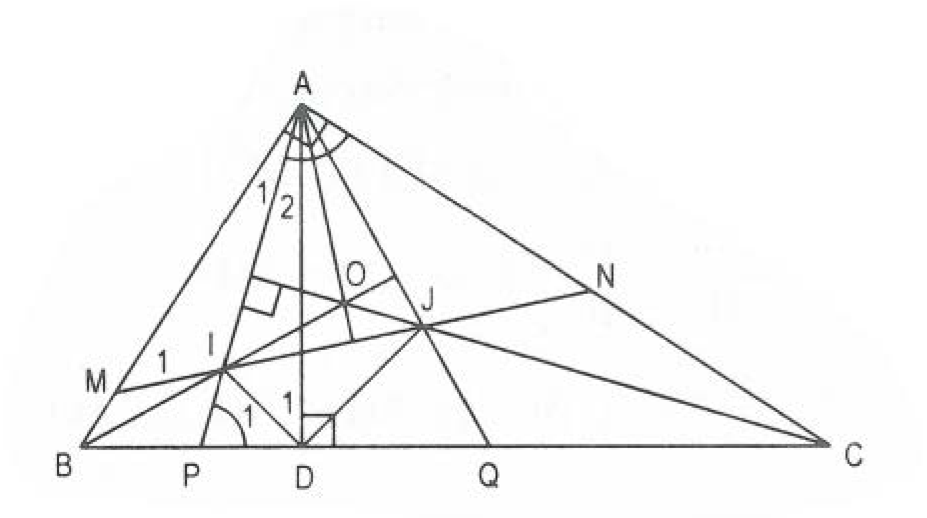
$\Rightarrow$ Phân giác BI cũng là đường cao

$\Rightarrow BI \perp AQ \Rightarrow IO \perp AQ$ (2)

Từ (l) và (2) suy ra $AO \perp MN$ mà AO là phân giác của góc $\widehat{MAN}$.

Do đó ΔAMN vuông cân tại A

Ta có: $\widehat{M_1} = \widehat{D_1} = 45°$ do đó ta chứng minh được: $\Delta AMI = \Delta ADI\,(g.c.g) \Rightarrow AM = AD = AN$



Cách 2: Câu b.

Ta có: $\dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} \geq 2.\dfrac{1}{AB.AC}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}AB.AC \geq AD^2 \Rightarrow S_{ABC} \geq 2S_{AMN} \Rightarrow S_{AMN} \leq \dfrac{1}{2}S_{ABC}$

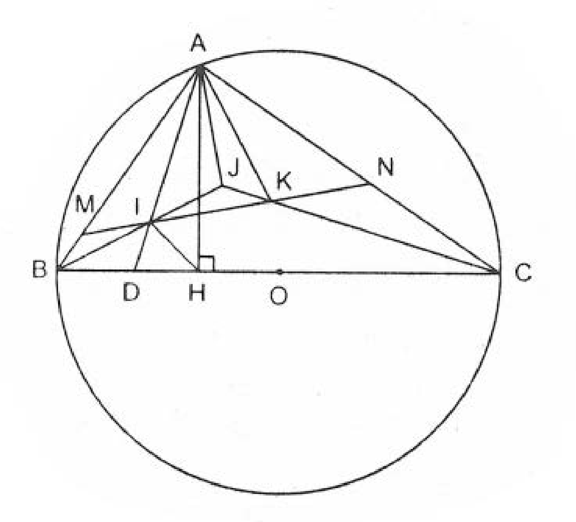
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow AB = AC \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại A.

Bài 6: Cho đường tròn (O) đường kính BC và điểm A thuộc đường tròn (O). Đường cao AH của tam giác ABC. Gọi I, K theo thứ tự là giao điểm của các phân giác của các tam giác AHB, AHC. Đường thẳng IK cắt AB, AC tại M và N. Chứng.minh $S_{AMN} \leq \dfrac{1}{2}S_{ABC}$

(S_{AMN} là diện tích của tam giác AMN; S_{ABC} là diện tích của tam giác ABC)

(Đề thi chọn học sinh giỏi toán lớp 9, Quận Phú Nhuận - Tp.Hồ Chí Minh năm học 2005 - 2006)

HƯỚNG DẪN GIẢI



Gọi D là giao điểm của AI và BC, J là giao điểm của BI và CK.

ΔABC có BJ, CJ là hai đường phân giác $\Rightarrow$ J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC

$\Rightarrow$ AJ là phân giác cúa tam giác ABC

Mặt khác ta có:

$\widehat{ADH}+\widehat{DAH}=90°$ (vì ΔHAD vuông tại H) (1)

$\widehat{BAC}=90°$ (vì góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Nên $\widehat{DAC}+\widehat{BAD}=90°$ (2)

Mà $\widehat{DAH}=\widehat{BAD}$ (vì AD là phân giác $\widehat{BAH}$) (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\widehat{ADH}=\widehat{DAC}$

$\Rightarrow \Delta CAD$ cân tại C.

Lại có CJ là phân giác của ΔCAD nên CJ là đường cao của $\Rightarrow \Delta CAD \Rightarrow KJ \perp AI$

Chứng minh tương tự, ta có $IJ \perp AK \Rightarrow$ J là trực tâm $\Delta AIK \Rightarrow AJ \perp IK$

ΔAMN có AJ vừa là đường cao vừa là phân giác nên là tam giác cân.

Do đó ΔAMN vuông cân tại A.

Ta có: $\Delta AMN \backsim \Delta AHI$ (vì $\widehat{MAI}=\widehat{IAH};\widehat{AMI}=\widehat{AHI}=45°$)

$\Rightarrow \dfrac{AM}{AH} = \dfrac{AI}{AI} = 1 \Rightarrow AM = AH$

Ta có: $AH \perp BC$ nên $AH \le AO$ mà $AO = \dfrac{BC}{2}$

$S_{AMN} = \dfrac{1}{2} AM.AN = \dfrac{1}{2} AH^2; S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AH.BC \Rightarrow S_{AMN} \le \dfrac{1}{2} S_{ABC}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow AB = AC \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại A.

Cách 2:

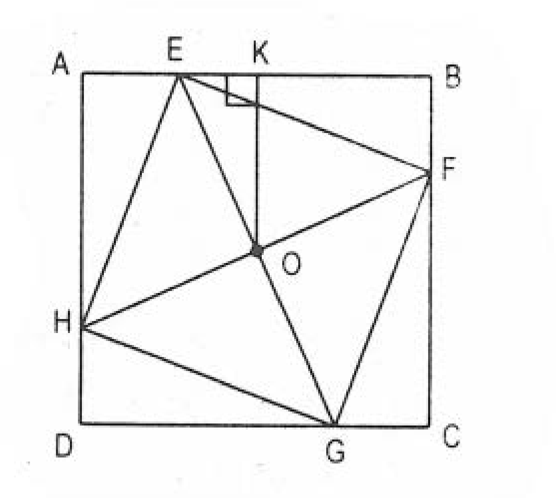
Ta có: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} \ge 2.\dfrac{1}{AB.AC}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2} AB.AC \ge AH^2 \Rightarrow S_{ABC} \ge 2S_{AMN} \Rightarrow S_{AMN} \le \dfrac{1}{2} S_{ABC}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow AB = AC \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại A.

Bài 7: Cho hình vuông ABCD. Hình vuông HEFG có các đỉnh H, E, F, G lần lượt nằm trên các cạnh DA, AB. BC, CD. Hãy xác định vị trí hình vuông HEFG để nó có diện tích nhỏ nhất

HƯỚNG DẪN GIẢI



Kẻ $OK \perp AB$ tại K $\Rightarrow$ K cố định

Tâm của hai hình vuông trùng nhau tại một điểm O.

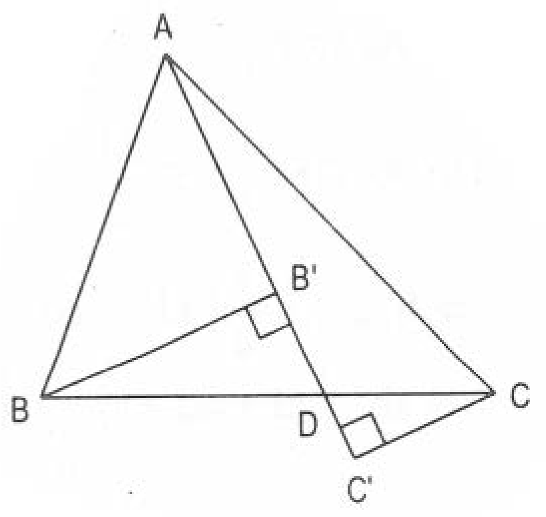
Ta có: $S_{EFGH} = \dfrac{EG.FH}{2} = \dfrac{2OE.2OE}{2} = 2.OE^2 \ge 2.OK^2$:không đổi

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow OE = OK \Leftrightarrow$ E trùng K

Vậy diện tích EFGH nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ Các đỉnh H, E. F, G lần lượt là trung điểm các cạnh DA, AB, BC, CD.

Bài 8: Cho tam giác ABC. Qua A dựng đường thẳng d cắt cạnh BC của tam giác sao cho tổng các khoảng cách từ B và C đến d có giá trị nhỏ nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI



Gọi D là giao điểm của d và cạnh BC.

Vẽ BB', CC' vuông góc với d tại B', C'

Với mọi vị trí của D trên cạnh BC ta có $S_{BAD} + S_{CAD} = S_{ABC}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}AD.BB' + \frac{1}{2}AD.CC' = S \Rightarrow BB' + CC' = \frac{2S}{AD}$$

Do đó $BB' + CC'$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow \dfrac{2S}{AD}$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow$ AD lớn nhất

Giả sử $AC \geq AB$ thì trong hai đường xiên AD, AC đường xiên AD có hình chiếu nhỏ hơn.

Do đó $AD \leq AC$: không đổi

$AD = AC \Leftrightarrow$ D trùng C

Vậy đường thẳng d phải dựng là đường thẳng chứa cạnh lớn nhất trong hai cạnh AB. AC.

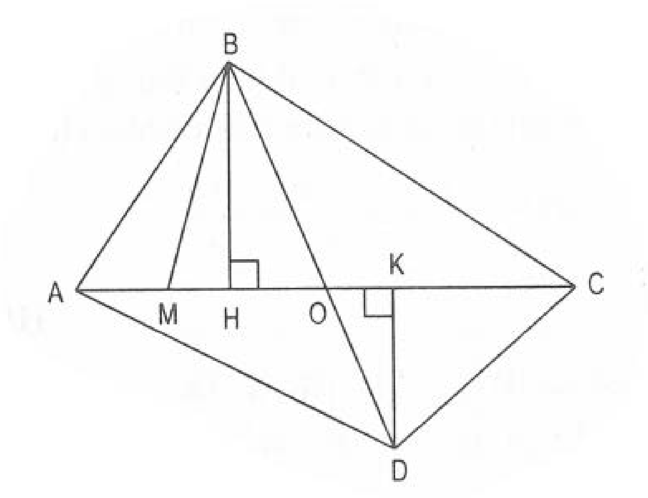
Bài 9:

a) Cho tam giác ABC. M là điểm thuộc AC. Chứng minh rằng:

$$S_{ABC} \le \frac{1}{2}AB.AC; S_{ABC} \le \frac{1}{2}BM.AC$$

b) Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng $S_{ABCD} \le \frac{1}{2}AC.BD$

HƯỚNG DẪN GIẢI



a) Gọi BH là đường cao của ΔABC.

Ta có: $BH \le AB$

Do đó: $S_{ABC} = \frac{1}{2}BH.AC \le \frac{1}{2}AB.AC$

Ta có: $BH \le BM$.

Do đó $S_{ABC} = \frac{1}{2}BH.AC \le \frac{1}{2}BM.AC$

b) Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC, BD

BH và DK là hai đường cao của ΔABC và ΔDAC

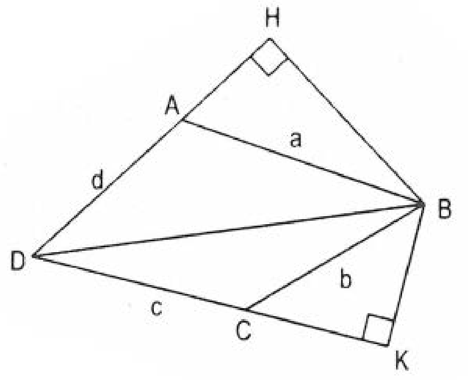
Ta có: $BH \le OB$ và $DK \le OD$

Suy ra $BH + DK \le BO + OD = BD$

Do đó $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{DAC} = \frac{BH.AC}{2} + \frac{DK.AC}{2} = \frac{AC}{2}(BH + DK) \le \frac{AC.BD}{2}$

Bài 10: Cho tứ giác ABCD có các cạnh AB = a, BC = b, CD = c, DA = d. Chứng minh rằng:
$S_{ABCD} \le \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$

HƯỚNG DẪN GIẢI



Kẻ $BH \perp AD, BK \perp DC$. Ta có: $BH \le AB = a, BK \le BC = b$

$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{DBC} = \frac{BH.AD}{2} + \frac{BK.DC}{2} \le \frac{a.d}{2} + \frac{b.c}{2}$

Tương tự $S_{ABCD} \le \frac{a.b}{2} + \frac{c.d}{2}$

Do đó $2.S_{ABCD} \le \frac{a.b}{2} + \frac{c.d}{2} + \frac{a.d}{2} + \frac{b.c}{2}$

$\Rightarrow S_{ABCD} \le \frac{1}{4}(a.b + c.d + ad + bc)$

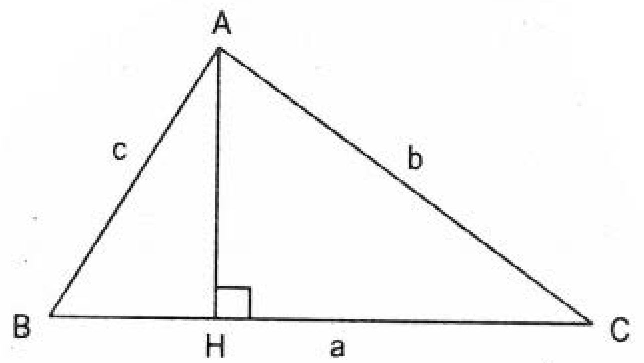
Mà $ab + cd + ad + bc = (ab + ad) + (cd + bc)$

$= a(b+d) + c(b+d) = (b+d)(a+c)$

Do đó $S_{ABCD} \le \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$

Bài 11. Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh a, b, c, diện tích tam giác bằng S. Chứng minh rằng: $6S \le a^2 + b^2 + c^2$

HƯỚNG DẪN GIẢI



Theo bài 9, ta có: $2S \le ab; 2S \le ac; 2S \le bc$

Nên $6S \le ab + bc + ca$ (1)

Ta có: $2ab \le a^2 + b^2; 2bc \le b^2 + c^2; 2ac \le a^2 + c^2$

Suy ra: $ab + bc + ca \le a^2 + b^2 + c^2$ (2)

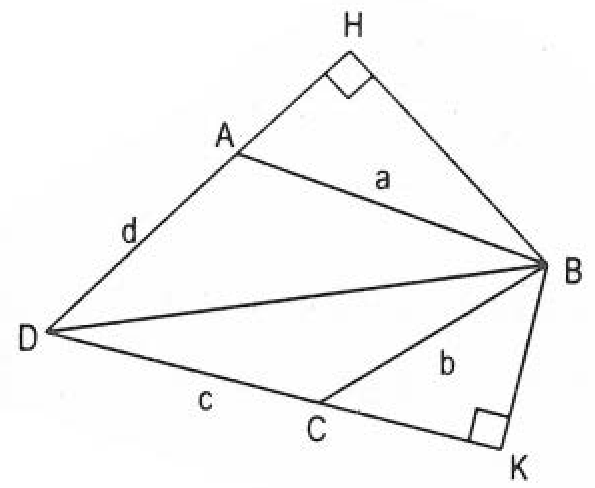
Từ (1) và (2) suy ra: $6S \le a^2 + b^2 + c^2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Bài 12. Gọi a, b, c, d theo thứ tự là độ dài các cạnh AB, BC, CD, DA của tứ giác ABCD; S, p theo thứ tự là diện tích và nửa chu vi của tứ giác. Chứng minh rằng:

a) $S \le \dfrac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}$ b) $4S \le (a + c)(b + d) \le p^2$

HƯỚNG DẪN GIẢI



a) Kẻ $BH \perp AD, BK \perp DC$.

Ta có: $BH \le AB = a, BK \le BC = b$

$$S = S_{ABD} + S_{DBC} = \frac{BH.AD}{2} + \frac{BK.DC}{2} \le \frac{a.d}{2} + \frac{b.c}{2}$$

Tương tự: $S \le \dfrac{a.b}{2} + \dfrac{c.d}{2}$

Do đó: $2.S \le \dfrac{a.b}{2} + \dfrac{c.d}{2} + \dfrac{a.d}{2} + \dfrac{b.c}{2}$.

$\Rightarrow S \le \frac{1}{4}(a.b + c.d + ad + bc)$

Mà $ab + cd + ad + bc = (ab + ad) + (cd + bc) = a(b + d) + c(b + d) = (b + d)(a + c)$

Do đó: $S_{ABCD} \le \frac{1}{4}(a + c)(b + d)$. Ta có: $S \le \frac{1}{4}(a.b + c.d + ad + bc)$ (theo bài toán trên)

Cách 1:

Áp dụng bất đẳng thức $xy \le \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ với $x, y > 0$.

Ta có: $S \le \frac{1}{4}(ab + bc + cd + da) \le \frac{1}{4}.\frac{1}{2}.2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$

Vậy $S \le \dfrac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}$

Cách 2:

$S_{ABC} \le \frac{1}{2}ab \le \frac{a^2 + b^2}{4}; S_{ADC} \le \frac{1}{2}cd \le \frac{c^2 + d^2}{4}$. Do đó: $S \le \dfrac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}$

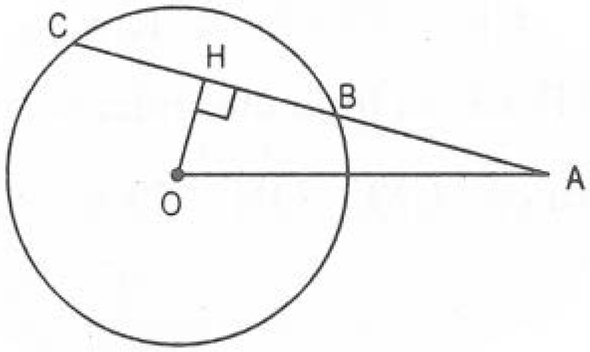
b) Ta có: $S \le \frac{1}{4}(a + c)(b + d) \Leftrightarrow 4S \le (a + c)(b + d)$

Theo bài toán 9b, ta có: $2S \le ab + cd; 2S \le ad + bc$

Suy ra: $4S \le (ab + cd) + (ad + bc) = (a + c)(b + d) \le \left(\dfrac{a + b + c + d}{2}\right)^2 = p^2$

Bài 13. Cho đường tròn (O; R) và điểm A cố định sao cho OA > R, một đường thẳng d quay quanh A cắt đường tròn (O) tại B và C. Xác định vị trí của đường thẳng d để tổng độ dài AB + AC đạt giá trị lớn nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI



Kẻ $OH \perp BC$ tại H $\Rightarrow HB = HC$

Ta có: $AH \perp OH \Rightarrow AH \leq OA$

Do đó : $AB + AC = AH - BH + AH + HC$

$= 2AH \leq 2.OA$ không đổi (vì O, A cố định)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow H \equiv O$

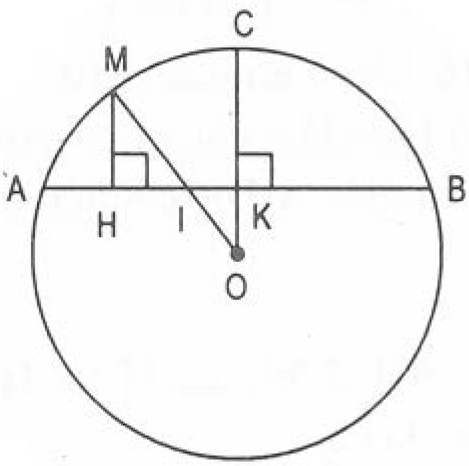
$\Leftrightarrow$ Đường thẳng d đi qua tâm O

Bài 14. Cho đường tròn (O; R), AB là dây cung (AB không phải là đường kính), C là điểm chính giữa cung AB. M là điểm trên cung AB. OC cắt AB tại K. Vẽ $MH \perp AB$, H thuộc đoạn AB.

a) Chứng minh rằng $MH \leq CK$.

b) Xác định vị trí của M để diện tích tam giác MAB lớn nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI



a) Vì C là điểm chính giữa cung AB nên $OC \perp AB$

Gọi I là giao điểm của OM và AB.

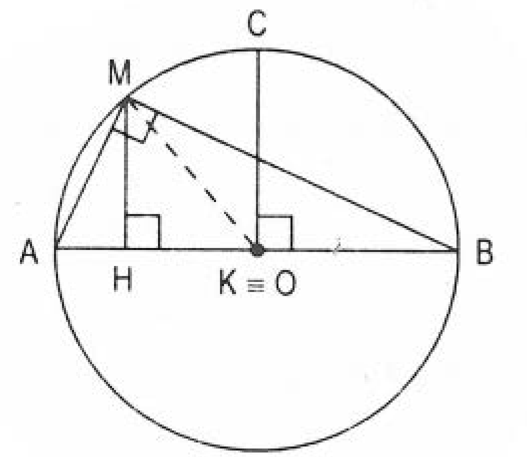
Ta có: $MH \le MI = OM - OI \le OC - OK = CK$

Vậy $MH \le CK$

b) Ta có: $S_{MAB} = \frac{1}{2}AB.MH \le \frac{1}{2}AB.CK = S_{CAB}$: không đổi (vì A, B, C cố định)

Dấu « = » xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv C$. Vậy S_{MAB} lớn nhất $\Leftrightarrow M \equiv C$

❖ **Chú ý:** Khi AB = 2R. Ta có:



a) $MH \le MO = CK$

b) Cách 1: Chứng minh như trường hợp trên

Cách 2:

$$S_{MAB} = \frac{1}{2}MA.MB = \frac{1}{2}\sqrt{MA^2.MB^2} \le \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\left(MA^2 + MB^2\right)$$

$= \frac{1}{4}.AB^2 = R^2$ không đổi

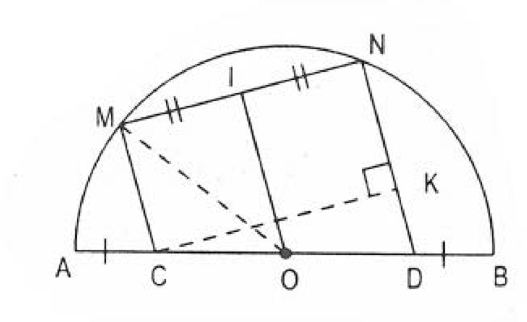
Dấu « = » xảy ra $\Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow M \equiv C$

Vậy S_{MAB} lớn nhất $\Leftrightarrow M \equiv C$

Bài 15. Cho nửa đường tròn (O; R). đường kính AB. Trên đoạn thẳng AB lấy hai điểm C và

D sao cho AC = BD (C nằm giữa A và O). Từ C và D kẻ các đường thẳng song song với nhau cắt nửa đường tròn tương ứng tại M và N. Hãy xác định vị trí của M và N để CM + DN nhỏ nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI



Gọi I là trung điểm của MN $\Rightarrow OI \perp MN$

Ta có: OI // MC // ND.

Do đó $CM \perp MN \Rightarrow$ Tứ giác CMND là hình thang vuông có OI là đường trung bình.

Kẻ $CK \perp DN$ tại K. Khi đó MNKC là hình chữ nhật (vì $\widehat{CMN} = \widehat{NMK} = \widehat{NKC} = 90° \Rightarrow MN = CK$

Ta có: $CM + DN = 2OI = 2.\sqrt{OM^2 - MI^2}$

$$= 2\sqrt{R^2 - \left(\frac{MN}{2}\right)^2} = 2\sqrt{R^2 - \left(\frac{CK}{2}\right)^2} \geq 2\sqrt{R^2 - \left(\frac{CD}{2}\right)^2} \text{ (vì } CK \leq CD)$$

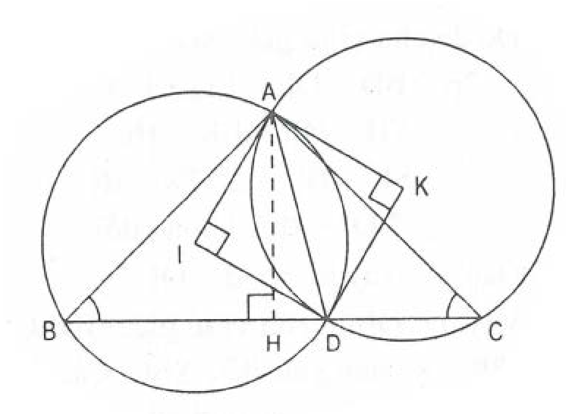
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow MN = CD \Leftrightarrow$ Hình thang CMND là hình chữ nhật

$\Leftrightarrow$ CM và DN vuông góc với AB thì

Vậy CM + DN nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ CM và DN vuông góc với AB.

Bài 16. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, điểm D di chuyển trên cạnh BC. Gọi I và K theo thứ tự là tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ADB và ADC. Tìm vị trí của điểm D để tứ giác AIDK có diện tích nhỏ nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI



Kẻ $AH \perp BC$ tại H $\Rightarrow$ H cố định và HB = HC. Theo liên hệ giữa góc nội tiếp và góc ở tâm. ta có:

$\overset{\frown}{AID} = 2.\widehat{B} = 2.45° = 90°$

$\overset{\frown}{AKD} = 2.\widehat{C} = 2.45° = 90°$

Suy ra $\overset{\frown}{IAK} + \overset{\frown}{IDK} = 360° - (90° + 90°) = 180°$

Lại có : $\Delta IAK = \Delta IDK\,(c.c.c)$

$\Rightarrow \widehat{IAK} = \widehat{IDK} = 90°$

Do đó AIDK là hình chữ nhật

Lại có IA = ID nên A1DK là hình vuông

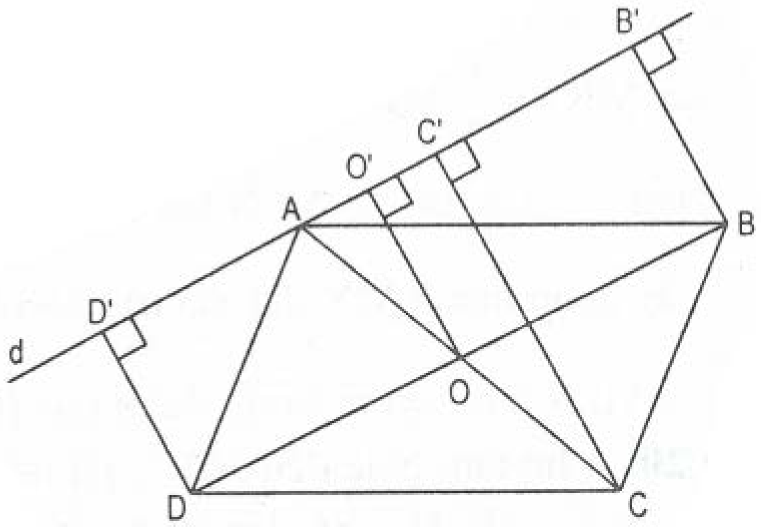
$$S_{AIDK} = \frac{1}{2}AD.IK = \frac{1}{2}AD^2 \geq \frac{1}{2}AH^2 \text{ : không đổi}$$

(AH là đường cao của ΔABC)

Vậy giá trị nhỏ nhất của S_{AIDK} là $\frac{1}{2}AH^2$ $\Leftrightarrow$ D là trung điểm của BC.

Bài 17. Cho hình bình hành ABCD. Qua A vẽ đường thẳng d không cắt hình bình hành. Gọi B', C', D' lần lượt là hình chiếu vuông góc của các điểm B, C, D trên đường thẳng d. Xác định vị trí của đường thẳng d để tổng $BB' + CC' + DD'$ có giá trị lớn nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI



Gọi O là giao điểm của AC và BD.

O' là hình chiếu của O trên đường thẳng d

$DD' \perp d, BB' \perp d \Rightarrow DD' // BB' \Rightarrow DD'B'B$ là hình thang.

Ta có: OO' là đường trung bình của hình thang $DD'B'B$

$$\Rightarrow OO' = \frac{BB' + DD'}{2} \Rightarrow BB' + DD' = 2.OO'$$

Ta có: OO' là đường trung bình của $\Delta ACC'$

$$\Rightarrow OO' = \frac{CC'}{2} \Rightarrow CC' = 2.OO'$$

Vì $OO' \le OA$ nên

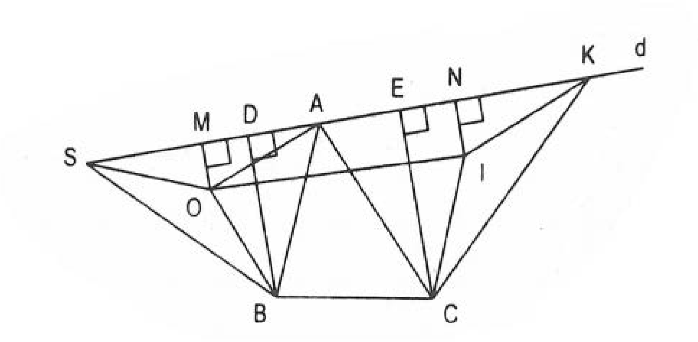
$BB' + CC' + DD' = 4.OO' \le 4.OA$: không đổi

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow O'$ trùng A

$\Leftrightarrow$ d vuông góc với AC tại A.

Bài 18. Cho tam giác ABC, đường thẳng d quay quanh A và d không cắt đoạn thẳng BC, D và E lần lượt là hình chiếu của B và C trên đường thẳng d. Xác định vị trí của đường thẳng d để chu vi tứ giác BDEC lớn nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI



Vẽ phía ngoài tam giác ABC các tam giác OAB vuông cân tại O, IAC vuông cân tại I.

Ta có: O, I cố định. Vẽ OM, IN vuông góc với d lần lượt tại M và N

Gọi S là điểm đối xứng của A qua M, K là điểm đối xứng của A qua N

Ta có: OS = OA = OB suy ra $\widehat{ASB} = 45°$

ΔDSB vuông cân tại D $\Rightarrow$ DB = DS

Tương tự: EC = EK

Do đó chu vi tứ giác BDEC là:

$2p = BD + DE + EC + CB$

$= SD + DE + EK + BC$

$= SK + BC = 2.MN + BC$

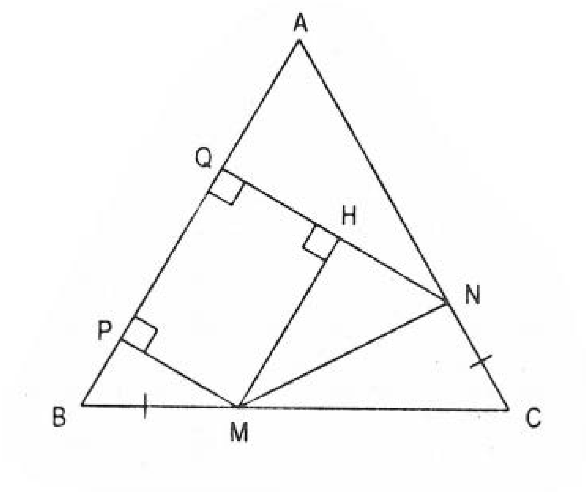
$\leq 2.OI + BC$: không đổi

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ d // OI

Vậy d // OI thì chu vi tứ giác BDEC lớn nhất

Bài 19. Cho tam giác đều ABC. Các điểm M và N lần lượt di động trên các cạnh BC và AC sao cho BM = CN. Xác định vị trí của M và N để độ dài đoạn thẳng MN đạt giá trị nhỏ nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI.



Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của M, N trên AB, ΔQAN vuông tại Q, ta có:

$AQ=\frac{1}{2}AN; PB=\frac{1}{2}BM \Rightarrow PB=\frac{1}{2}CN$

Do đó: $AQ+PB=\frac{1}{2}AN+\frac{1}{2}CN=\frac{1}{2}AC$

Vẽ $MH\perp NQ$. Tứ giác QHMP là hình chữ nhật

$\Rightarrow MH=PQ$

Ta có: $MH\perp NQ \Rightarrow MN\ge MH$

Do đó: $MN\ge PQ=AB-\left(AQ+PB\right)=AB-\frac{1}{2}AC$

$\Rightarrow MN\ge\frac{1}{2}AB$: không đổi

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ M, N lần lượt là trung điểm của BC, AC.

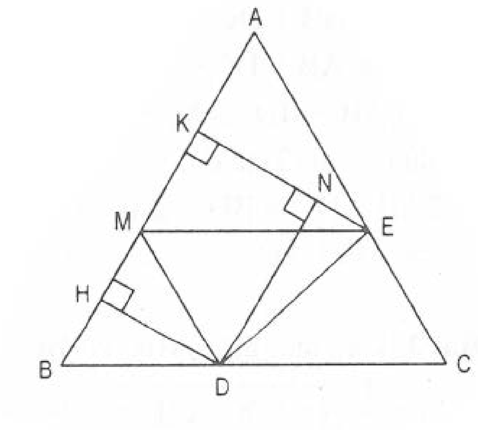
Vậy đoạn thẳng MN đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{1}{2}AB$

$\Leftrightarrow$ M, N lần lượt là trung điểm của BC, AC.

Bài 20. Cho tam giác đều ABC. Từ một điểm M trên cạnh AB vẽ hai đường thẳng song song với hai cạnh AC. BC lần lượt cắt BC, AC tại D và E. Tìm vị trí M trên AB để chiều dài đoạn thẳng DE đạt giá trị nhó nhất.

(Đề thi chọn học sinh giỏi toán lớp 9. Tp. Hồ Chí Minh năm học 2005 2006)

HƯỚNG DẪN GIẢI



$\Delta AME, \Delta BMD$ là các tam giác đều. Vẽ $DH \perp AB$ tại H, $EK \perp AB$ tại K, $DN \perp KE$ tại N

Ta có: $MK = \frac{1}{2}AM; MH = \frac{1}{2}MB$

Do đó $HK = MK + MH = \frac{1}{2}AM + \frac{1}{2}MB = \frac{1}{2}AB$

Tứ giác HKND là hình chữ nhật $\Rightarrow DN = HK$

Lại có $DN \perp NE$ nên $DE \geq DN$. Do vậy $DE \geq \frac{1}{2}AB$:không đổi

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow E \equiv N \Leftrightarrow DE // AB$

$\Rightarrow$ Các tứ giác BMED, DMAE là hình bình hành

$\Leftrightarrow MA = MB = ME = DE$

Vậy đoạn thẳng DE đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{1}{2}AB$

$\Leftrightarrow$ M, N lần lượt là trung điểm của BC, AC.

$\Leftrightarrow MA = MB = ME = DE$

DẠNG 2: VẬN DỤNG CÁC BẤT ĐẲNG THỨC TRONG TAM GIÁC VÀ QUY TẮC CÁC ĐIỂM

1. KIẾN THỨC CƠ BẢN:

1.1. Bất đẳng thức tam giác: Với ba điểm A, B, C bất kì ta có $AB + BC \geq AC$

Dấu "="xảy ra $\Leftrightarrow$ B thuộc đoạn thẳng AC.

1.2. Mở rộng: với n điểm bất kì $A_1; A_2; A_3; ...; A_n$ ta có:

$A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + ... + A_{n-1}A_n \geq A_1A_n$

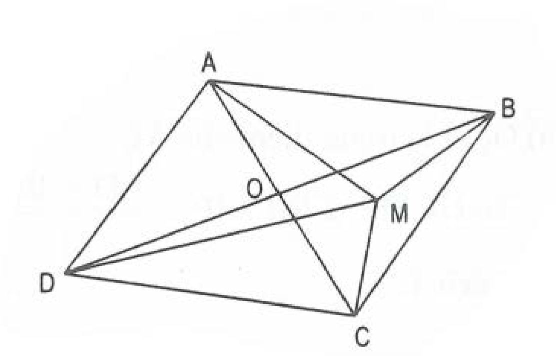
1.3. Nếu M là trung điểm của đoạn thẳng BC thì với điểm A bất kì ta có $AB + AC \geq 2AM$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ A, B, C thẳng hàng và A nằm ngoài đoạn thẳng BC (A có thể trùng B hoặc C)

2. BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Bài 1. Cho tứ giác ABCD, O là giao điểm cứa hai dường chéo AC và BD. M là điểm nằm trong tứ giác ABCD (M khác O).

Chứng minh ràng MA + MB + MC + MD > AC + BD

HƯỚNG DẢN GIẢI



* Xét ΔMAC có:

  MA + MC > AC (1)

* Xét ΔMBD có

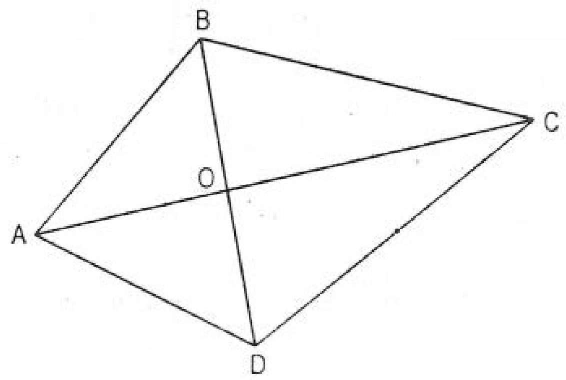
  MB + MD >BD (2)

  Từ (1) và (2), ta có:

  MA + MB + MC + MĐ > AC + BD

Bài 2. Cho tứ giác ABCD có $AB + BD \leq AC + DC$. Chứng minh rằng AB < AC.

HƯỚNG DẢN GIẢI



Gọi O là giao điểm của AC và BD.

* Xét ΔOAB có AB < OA + OB

* Xét ΔODC có DC < OC + OD

Do đó AB + DC < OA + OC + OB + OD

$\Rightarrow$ AB + DC < AC + BD (1)

Mà $AB + BD \le AC + DC$ (2)

Từ (1) và (2) ta có:

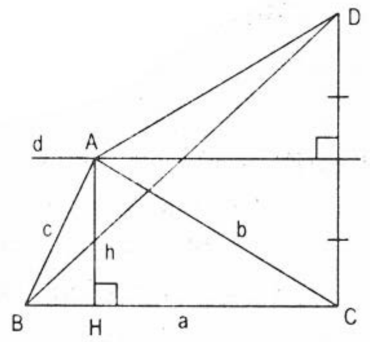
2AB + DC + BD < 2AC + BD + DC

$\Rightarrow$ AB < AC

Bài 3. Cho tam giác ABC có BC = a, AC = b, AB = c đường cao AH = h. Chứng minh rằng:

$h \le \frac{1}{2}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)}$

HƯỚNG DẪN GIẢI



Gọi d là đường thẳng qua A và song song với BC.

Gọi D là điểm đối xứng của điểm C qua dường thẳng d.

Dễ thấy $AD = AC = b, DC = 2h; \widehat{DCB} = 90°$;

ΔDCB có $\widehat{ACB} = 90°$ theo định lí Pytago ta có

$BD^2 = DC^2 + BC^2 = 4h^2 + a^2$

$\Rightarrow BD = \sqrt{4h^2 + a^2}$

Ta có: $BD \le AB + AD$

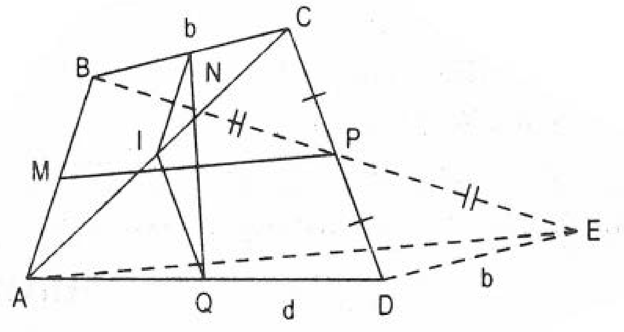
$\Rightarrow \sqrt{4h^2 + a^2} \le b + c \Rightarrow 4h^2 + a^2 \le (b+c)^2 \Rightarrow h^2 \le \frac{1}{4}\left[(b+c)^2 - a^2\right]$

$h \le \frac{1}{2}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)}$

Bài 4. Cho tứ giác ABCD có AB = a, BC = b, CD = c, DA = d. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB. BC, CD. DA. Chứng minh rằng:

a) $MP \le \frac{d+b}{2}$ b) $MP + NQ \le \frac{a+b+c+d}{2}$

HƯỚNG DẪN GIẢI



a) Gọi I là trung điểm của AC.

Ta có: $MP \le MI + IP = \frac{AD + BC}{2} = \frac{d+b}{2}$

Cách 1:

Áp dụng câu a) ta có $NQ \le \frac{a+c}{2}$

Do đó $MP + NQ \le \frac{d+b}{2} + \frac{a+c}{2}$

$\Rightarrow MP + NQ \le \frac{a+b+c+d}{2}$

Cách 2:

Trên tia đối của tia PB lấy điểm E sao cho PE = PB

$\Delta BCP = \Delta EDP\left(c.g.c\right) \Rightarrow DE = BC = b$

Ta có: MP là đường trung bình ΔABE nên $MP = \frac{AE}{2}$

Xét ΔADE có $AE \le AD + DE \Rightarrow AE \le d + b$. Suy ra: $MP \le \frac{d+p}{2}(1)$

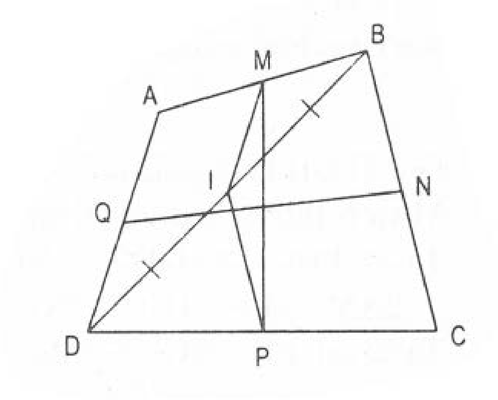
Chứng minh tương tự ta được: $NQ \le \frac{a+c}{2}(2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $MP + NQ \le \frac{a+b+c+d}{2}$

Nhận xét: Từ bài toán trên ta có được bài toán sau: Cho tứ giác ABCD có AB, BC, CD, DA có độ dài lần lượt là a, b, c. d. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh ràng: điều kiện cần và đủ để tứ giác ABCD là hình bình hành là $MP + NQ \le \frac{a+b+c+d}{2}$

Bài 5. Cho tứ giác ABCD, gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng $S_{ABCD} \le MP.NQ \le \frac{1}{4}(AB+CD)(BC+DA)$

HƯỚNG DẪN GIẢI



Gọi I là trung điểm của BD. Ta có $QN \le \frac{AB+CD}{2}(1)$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ QN đi qua trung điểm của BD.

Tương tự $MP \le \frac{BC+DA}{2}(2)$

MQ là đường trung bình của ΔABD

$\Rightarrow S_{AMQ} = \frac{1}{4}S_{ABD}$ .Tương tự, ta có $S_{CNP} = \frac{1}{4}S_{CBD}$

Suy ra $S_{AMQ} + S_{CNP} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$. Tương tự, ta có: $S_{BMN} + S_{DQP} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$

Do đó: $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$

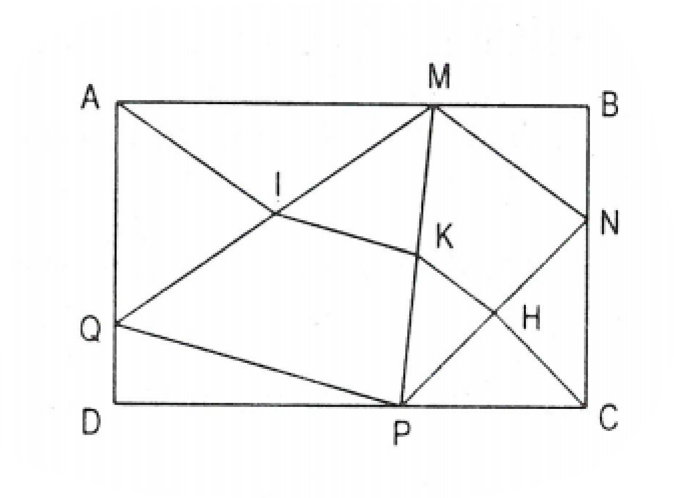
Ta chứng minh được: $S_{MNPQ} \le \frac{1}{2}MP.NQ$

Kết hợp (1) và (2) suy ra: $S_{ABCD} \le MP.NQ \le \frac{1}{4}(AB+CD)(BC+DA)$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ ABCD là hình chữ nhật.

Bài 6: Cho hình chữ nhật có chu vi không nhỏ hơn $2\sqrt{2}$. Lấy M, N, P, Q theo thứ tự thuộc đoạn thẳng AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng chu vi tứ giác MNPQ không nhỏ hơn 2.

HƯỚNG DẪN GIẢI



❖ **Cách 1:**

Áp dụng bất đẳng thức $2\left(a^2+b^2\right)\ge\left(a+b\right)^2$

Ta có: $2.MN^2=2\left(BM^2+BN^2\right)\ge\left(BM+BN\right)^2$

$\Rightarrow\sqrt{2}.MN\ge BM+BN\,(1)$

Tương tự ta có: $\sqrt{2}.NP\ge CN+CP\,(2)$

$\sqrt{2}.PQ\ge PD+DQ\,(3)$

$\sqrt{2}.QM\ge AQ+AM\,(4)$

Từ (1), (2), (3) và (4) cộng vế theo vế ta được:

$\sqrt{2}\left(MN+NP+PQ+QM\right)\ge AB+BD+CD+DA\ge 2\sqrt{2}$

Vậy chu vi tứ giác MNPQ không nhỏ hơn 2.

❖ **Cách 2:**

Gọi I, K, H lần lượt là trung điểm MQ, MP, PN.

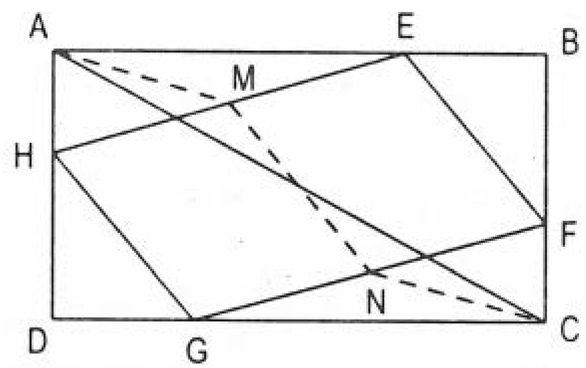
Áp dụng tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông và đường trung bình trong tam giác ta được: $MN+NP+PQ+QM=2\left(AI+IK+KH+HC\right)\ge 2AC$

Mà $2AC=2\sqrt{AB^2+BC^2}\ge 2\sqrt{\dfrac{\left(AB+BC\right)^2}{2}}\ge 2$

Vậy chu vi tứ giác MNPQ không nhỏ hơn 2.

Bài 7: Cho hình chữ nhật ABCD. Tìm tứ giác có bốn đỉnh thuộc bốn cạnh của hình chữ nhật sao cho chu vi tứ giác có giá trị nhỏ nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI.



Gọi EFGH là tứ giác nội tiếp hình chữ nhật.

M và N thứ tự là trung điểm của EH và FG.

Ta có: EH = 2AM, FG = 2NC nên chu vi EFGH là:

$2AM + (EF + GH) + 2NC$

Ta lại có: $EF + HG \geq 2MN$

Dấu "=′xảy ra $\Leftrightarrow EF // MN // HC$

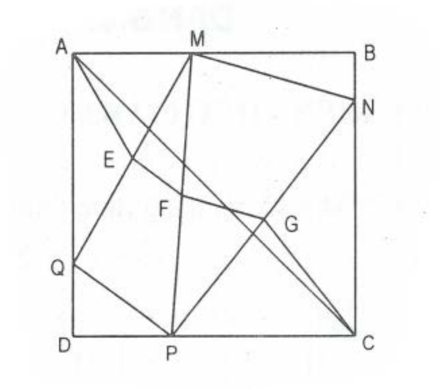
Do đó chu vi $EFGH \geq 2(AM + MN + NC) \geq 2AC$

Chu vi tứ gác EFGH nhỏ nhất bằng 2AC $\Leftrightarrow$ A, M, N, C thẳng hàng và EF // MN // HG.

Khi đó EFGH là hình bình hành có cạnh tương ứng song song với các đường chéo của hình chữ nhật (có vô số hình chữ nhật như vậy)

Bài 8: Cho hình vuông ABCD, M, N, P, Q là các đỉnh của tứ giác MNPQ lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA (MNPQ gọi là tứ giác nội tiếp hình vuông). Tìm điều kiện để tứ giác MNPQ có chu vi nhỏ nhất

HƯỚNG DẪN GIẢI



✓ **Cách 1 :**

Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng MQ, MP, NP

ΔAMQ vuông tại A có AE là đường trung tuyến nên $AE = \frac{1}{2}MQ \Rightarrow MQ = 2.AE$

Tương tự NP = 2CG

Mặt khác EF, FG lần lượt là đường trung bình của các tam giác MPQ và NPM nên

$EF = \frac{1}{2}PQ$ và $FG = \frac{1}{2}MN$.

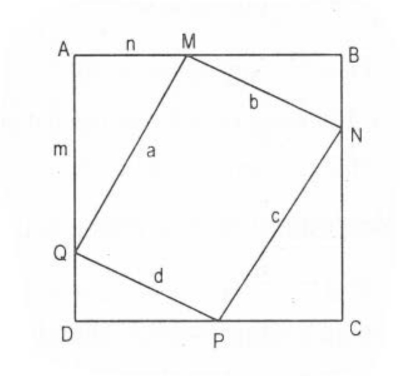
Suy ra PQ = 2EF và MN = 2FG

Do đó: $P_{MNPQ} = MN + NP + PQ + MQ$

$= 2\left(FG + GC + EF + AE\right) \geq 2AC$: không đổi

Dấu "=" xảy ra A, E, F, G, C thẳng hàng $\Leftrightarrow$ MN // AC // PQ và MQ // BD // NP

Khi đó MNPQ là hình chữ nhật



✓ **Cách 2:**

Đặt MQ = a, MN = b, NP = c, PQ = d, AQ = m, AM = n.

Ta có: $a^2 = m^2 + n^2 \geq \frac{\left(m+n\right)^2}{2} \Rightarrow a \geq \frac{m+n}{\sqrt{2}}$

$a\sqrt{2} \geq AQ + AM$

Tương tự ta có $b\sqrt{2} \geq BM + BN; c\sqrt{2} \geq CN + CP; d\sqrt{2} \geq DQ + DP$

Suy ra $(a+b+c+d)\sqrt{2} \geq AB + BC + CD + DA = 4AB$

$\Rightarrow a+b+c+d \geq 2\sqrt{2}.AB = 2AC$:không đổi

Vậy chu vi tứ giác MNPQ nhỏ nhất bằng 2AC $\Leftrightarrow$ M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh của hình vuông ABCD. Khi đó MNPQ là hình chữ nhật.

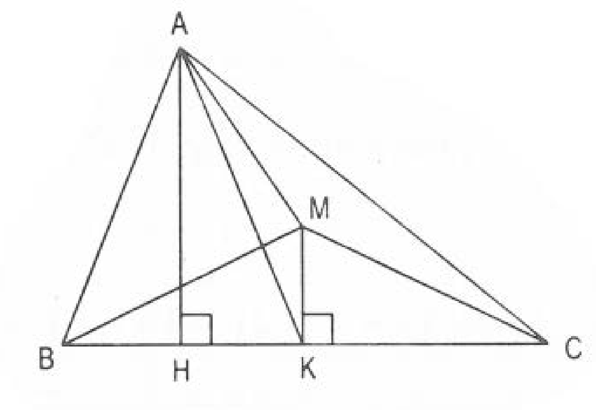
❖ **Nhận xét**: Từ lời giải bài toán ta có:

a**)** Các hình chữ nhật nội tiếp được trong hình vuông đều có chu vi bằng nhau

b**)** Các tứ giác nội tiếp được trong hình vuông thì hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất.

Bài 9: Cho tam giác ABC, M là trung điểm trong tam giác. Chứng minh rằng: $BC.MA + CA.MB + AB.MC \geq 2(BC.x + CA.y + AB.z)$ (x, y, z theo thứ tự là khoảng cách từ M đến các cạnh BC, AC, AB**)**.

HƯỚNG DẪN GIẢI



Kẻ $AH \perp BC$ tại H, $MK \perp BC$ tại K

Ta có: $AM + MK \geq AK \geq AH$

$\Rightarrow MA \geq AH - MK = \dfrac{2}{BC}(S_{ABC} - S_{MBC})$

$\Rightarrow MA.MB \geq 2(S_{MCA} + S_{MAB}) = AC.y + AB.z$

$\Rightarrow MA.BC \geq AC.y + AB.z$

Tương tự ta có: $MB.AC \geq AB.z + BC.x; MC.AB \geq BC.x + AC.y$

Do đó $BC.MA + CA.MB + AB.MC \geq 2(BC.x + CA.y + AB.z)$

DẠNG 3: VẬN DỤNG CÁC BẤT ĐẲNG THỨC ĐẠI SỐ

1. KIẾN THỨC CƠ BẢN.

1.1. $x^2 \geq 0, -x^2 \leq 0$

1.2. Một số bất đẳng thức thường gặp:

$$x^2 + y^2 \geq 2xy; (x+y)^2 \geq 4xy; 2(x^2 + y^2) \geq (x+y)^2$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$

$$3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x+y+z)^2$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$

Với x,y dương ta có $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}; \frac{x}{y} + \frac{y}{z} \geq 2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$

1.3. Bất đẳng thức Cô si với hai số x và y không âm: $(x+y)^2 \geq 4xy$ hay $x + y \geq 2\sqrt{xy}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$

Tổng quát: Cho n số không âm: $x_1; x_2; ....; x_n$ ta có: $\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 .....x_n}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = ... = x_n$

❖ **Chú ý rằng:** với bất đẳng thức (3). ta còn suy ra với hai số không âm x, y:

- Nếu x + y là hằng số thì x.y đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow x = y$
- Nếu xy là hằng số thì x + y đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow x = y$

Để sử dụng bất đẳng thức đại số. ta thường đặt một độ dài thay đổi bằng x, biểu thị đại lượng cần tìm cực trị bằng một biểu thức của x, rồi tìm điều kiện để biểu thức có cực trị.

2. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Chứng minh rằng $2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2 \geq 4ab$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Ta có: $(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + a^2 + b^2 \geq 2ab + a^2 + b^2 \geq 2ab + 2ab \Rightarrow 2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2 \geq 4ab$

Bài 2: Chứng minh rằng $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a+b+c)^2$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Ta có: $(a+b+c)^2+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \ge (a+b+c)^2$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc+a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ac+a^2 \ge (a+b+c)^2$

$\Rightarrow 3(a^2+b^2+c^2) \ge (a+b+c)^2$

Ta cũng chứng minh được: $n(a_1^2+a_2^2+.....+a_n^2) \ge (a_1+a_2+....+a_n)^2$

Bài 3: Chứng minh rằng nếu $a,b,c>0$ thì:

a) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \ge 4$

b) $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \ge 9$

HƯỚNG DẪN GIẢI

a) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=1+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1=2+\frac{a^2+b^2}{ab} \ge 2+\frac{2ab}{ab} \ge 2+2=4$

b) $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1$

$$=9+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}-2\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}-2\right)$$

$$=9+\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(a-c)^2}{ac}+\frac{(b-c)^2}{bc} \ge 9$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

Như vậy ta cũng có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \ge \frac{4}{a+b}; \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge \frac{9}{a+b+c}$ (với $a,b,c>0$)

Ta cũng chứng minh được $(a_1+a_2+....+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+....+\frac{1}{a_n}\right) \ge n^2$;

với $a_1;a_2;...;a_n>0$

Bài 4: Bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki với các số m, n, x, y

Cho bốn số thực a, b, c, x, y ta có: $(ax+by)^2 \le (a^2+b^2)(x^2+y^2)$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow ay=bx$

HƯỚNG DẪN GIẢI

$\left(ax+by\right)^2 \le \left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right) \Leftrightarrow a^2x^2+2abxy+b^2y^2+\le a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2$

$\Leftrightarrow a^2y^2-2abxy+b^2x^2 \ge 0 \Leftrightarrow \left(ay-bx\right)^2 \ge 0$ (bất đẳng thức đúng

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow ay=bx$

❖ **Tổng quát**: Cho hai bộ số $\left(a_1;a_2;.......;a_n\right)$ và $\left(b_1;b_2;......;b_n\right)$

Ta có: $\left(a_1b_1+a_2b_2+.....+a_nb_n\right)^2 \le \left(a_1^2+a_2^2+......+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+......+b_n^2\right)$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=.......=\frac{a_n}{b_n}$ với qui ước nếu mẫu bằng 0 thì tử phải bằng 0.

Bài 5: Chứng minh rằng nếu $a,b,c>0$ thì : $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\left(\frac{a}{b+c}+1\right)+\left(\frac{b}{c+a}+1\right)+\left(\frac{c}{a+b}+1\right)-3$$

$$=\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)-3$$

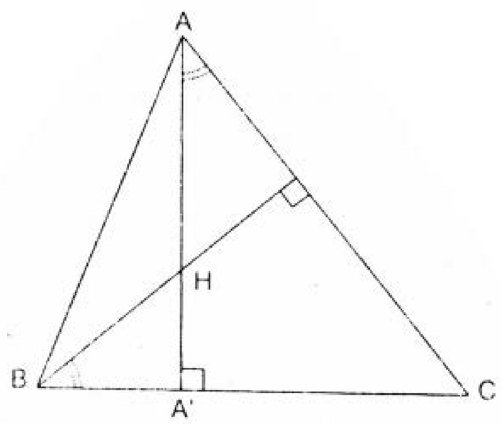
$$=\frac{1}{2}\left[\left(b+c\right)+\left(c+a\right)+\left(a+b\right)\right]\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)-3$$

$\ge\frac{1}{2}.9-3=\frac{3}{2}$ (vận dụng bài toán 3)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

Bài 6: Cho tam giác ABC nhọn, AA′ là đường cao. H là trực tâm. Chứng minh $AA'A.A'H\le\frac{BC^2}{4}$

HƯỚNG DẪN GIẢI



❖ **Cách 1:**

∗ Xét $\Delta A'BH$ và $\Delta A'AC$ có:

$\widehat{BA'H} = \widehat{AA'C}\left(=90^\circ\right); \widehat{A'BH} = \widehat{A'AC}$ (cùng phụ với góc C)

Do đó: $\Delta A'BH \backsim \Delta A'AC\left(g.g\right)$

$$\Rightarrow \frac{A'H}{A'C} = \frac{A'B}{A'A} \Rightarrow A'A.A'H = A'B.A'C$$

Áp dụng BĐT Côsi ta có:

$$A'B.A'C \le \frac{\left(A'B + A'C\right)^2}{4} = \frac{BC^2}{4}$$

Do đó: $AA'A.A'H \le \dfrac{BC^2}{4}$

❖ **Cách 2:**

Giải tương tự cách 1 ta có: $A'A.A'H = A'B.A'C$

Do đó: $A'A.A'H = A'B.\left(BC - A'B\right) = A'B.BC - A'B^2 = \dfrac{BC^2}{4} - \left(\dfrac{BC^2}{4} - A'B.BC + A'B^2\right)$

$$= \frac{BC^2}{4} - \left(\frac{BC}{2} - A'B\right)^2 \le \frac{BC^2}{4}$$

❖ **Cách 3:**

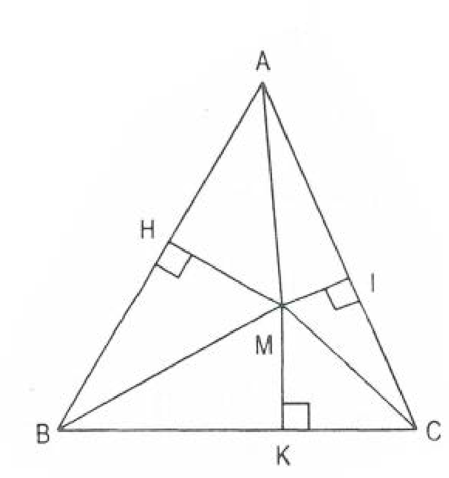
Giải tương tự cách 1 ta có: $A'A.A'H = A'B.A'C$.Đặt $A'B = \dfrac{BC}{2} + x$

Do đó $A'C = BC - \left(\dfrac{BC}{2} + x\right) = \dfrac{BC}{2} - x$

Do đó $A'A.A'H = A'B.A'C = \left(\frac{BC}{2}+x\right)\left(\frac{BC}{2}-x\right) = \frac{BC^2}{4} - x^2 \le \frac{BC^2}{4}$

Bài 7: Cho tam giác đều ABC cạnh a. M là điểm bất kì ở trong tam giác ABC. Chứng minh rằng: $MA + MB + MC > \frac{a\sqrt{3}}{2}$

HƯỚNG DẪN GIẢI



Kẻ $MH \perp AB$ tại H, $MK \perp BC$ tại K, $MI \perp AC$ tại I

$\Rightarrow MA > NH; MB > MK; MC > MI$

Do đó MA + MB + MC > MH + MK + MI (1)

Mặt khác: MH + MK + MI

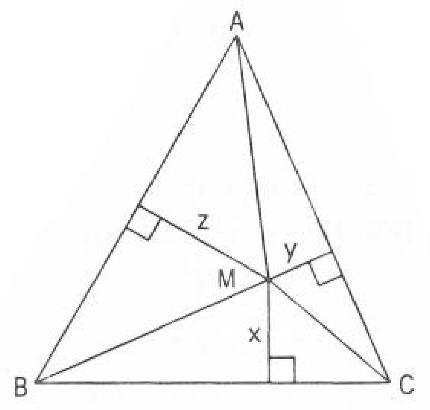
$= \frac{2S_{MAB}}{AB} + \frac{2S_{MBC}}{BC} + \frac{2S_{MAC}}{AC} = \frac{2S_{MAB}}{a} + \frac{2S_{MBC}}{b} + \frac{2S_{MAC}}{c}$

$= \frac{2}{a}\left(S_{MAB} + S_{MBC} + S_{MAC}\right) = \frac{2}{a}S_{ABC} = \frac{2}{a}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (2)

Từ (1 và (2) suy ra: $MA + MB + MC > \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Bài 8. Cho tam giác đều ABC. M là điểm nằm trong tam giác. Gọi khoảng cách từ M đến các cạnh BC. CA, AB lần lượt là x, y, z và h là đường cao của tam giác đều. Chứng minh rằng $x^2 + y^2 + z^2 \ge \frac{1}{3}h^2$

HƯỚNG DẪN GIẢI



Gọi a là cạnh của tam giác đều ABC.

$$S_{ABC} = S_{MBC} + S_{MAC} + S_{MAB} \Rightarrow \frac{ah}{2} = \frac{ax}{2} + \frac{ay}{2} + \frac{az}{2} \Rightarrow h = x + y + z$$

Chứng minh bài toán phụ: $3\left(a^2+b^2+c^2\right) \geq \left(a+b+c\right)^2$

Ta có:

$$\left(a+b+c\right)^2 + \left(a-b\right)^2 + \left(b-c\right)^2 + \left(c-a\right)^2 \geq \left(a+b+c\right)^2$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc+a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ac+a^2 \geq \left(a+b+c\right)^2$$

$$\Rightarrow 3\left(a^2+b^2+c^2\right) \geq \left(a+b+c\right)^2$$

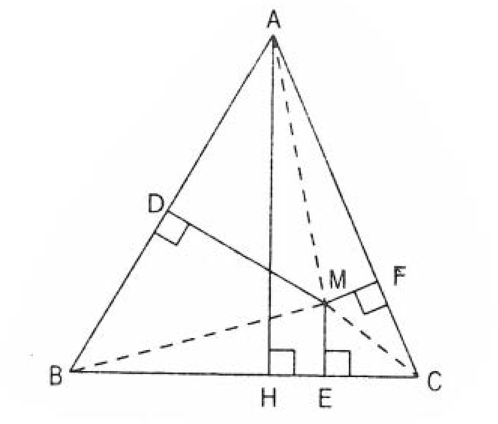
Ta có: $x^2+y^2+z^2 \geq \frac{1}{3}\left(x+y+z\right)^2$ hay $x^2+y^2+z^2 \geq \frac{1}{3}h$

Bài 9. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Từ điểm M nằm trong tam giác vẽ MD. ME, MF lần lượt vuông góc với BC, CA. AB. Xác định vị trí của điểm M để:

$\frac{1}{MD+ME} + \frac{1}{ME+MF} + \frac{1}{MF+MD}$ có giá trị nhỏ nhất.

(Đề thi chọn học sinh giỏi toán lớp 9, Quận 1 Tp. Hồ Chí Minh, năm học 2000 2001)

HƯỚNG DẪN GIẢI



Bài toán phụ: Chứng minh rằng nếu $a,b,c>0$ thì: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

Ta có: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1$

$=9+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}-2\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}-2\right)$

$=9+\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(a-c)^2}{ac}+\frac{(b-c)^2}{bc}\ge 9$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

Ta chứng minh được: $MF+MD+ME=AH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Áp dụng bài toán phụ ở trên, ta có:

$T=\frac{1}{MD+ME}+\frac{1}{ME+MF}+\frac{1}{MF+MD}\ge\frac{9}{MD+ME+ME+MF+MF+MD}$

$=\frac{9}{2(MF+MD+ME)}=\frac{9}{a\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{a}$

Vậy $1\ge\frac{9}{a\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{a}$:không đổi

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow MD+ME=ME+MF=MF+MD\Leftrightarrow MD=ME=MF$

$\Leftrightarrow$ M là tâm đường tròn nột tiếp ΔABC $\Leftrightarrow$ M là tâm ΔABC

Vậy khi M là tâm tam giác đều ABC thì tổng $\frac{1}{MD+ME}+\frac{1}{ME+MF}+\frac{1}{MF+MD}$ có giá trị nhỏ nhất.

Bài 10. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC nhọn, ba đường cao của tam giác ABC là $AA_1; BB_1; CC_1$

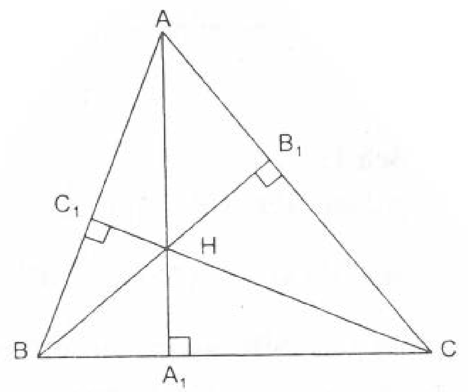
Chứng minh rằng:

a) $\frac{AA_1}{HA_1}+\frac{BB_1}{HB_1}+\frac{CC_1}{HC_1}\geq 9$

b) $\frac{HA_1}{HA}+\frac{HB_1}{HB}+\frac{HC_1}{HC}\geq \frac{3}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi nào?

HƯỚNG DẪN GIẢI



a) Gọi diện tích các tam giác ABC, HBC, HAB, HAC lần lượt là S, S_1, S_2, S_3 thì $S = S_1 + S_2 + S_3$

Dễ thấy $\frac{HA_1}{AA_1}=\frac{S_1}{S};\frac{HB_1}{BB_1}=\frac{S_2}{S};\frac{HC_1}{CC_1}=\frac{S_3}{S}$

Do đó: $\frac{HA_1}{AA_1}+\frac{HB_1}{BB_1}+\frac{HC_1}{CC_1}=1$

Vận dụng bài toán: Nếu $a,b,c>0$ thì:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$. Ta có:

$$\left(\frac{AA_1}{HA_1}+\frac{BB_1}{HB_1}+\frac{CC_1}{HC_1}\right)\left(\frac{HA_1}{AA_1}+\frac{HB_1}{BB_1}+\frac{HC_1}{CC_1}\right)\geq 9$$

$$\Rightarrow \frac{AA_1}{HA_1}+\frac{BB_1}{HB_1}+\frac{CC_1}{HC_1}\geq 9$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow S_1 = S_2 = S_3 = \frac{S}{3}$

Khi đó H vừa là trọng tâm ΔABC nên là tam giác đều.

b) Từ $\frac{HA_1}{AA_1} = \frac{S_1}{S} \Rightarrow \frac{HA_1}{AA_1 - HA_1} = \frac{S_1}{S - S_1}$ .Hay $\frac{HA_1}{HA} = \frac{S_1}{S_2 + S_3}$

Tương tự: $\frac{HB_1}{HB} = \frac{S_2}{S_1 + S_3}; \frac{HC_1}{HC} = \frac{S_3}{S_1 + S_2}$

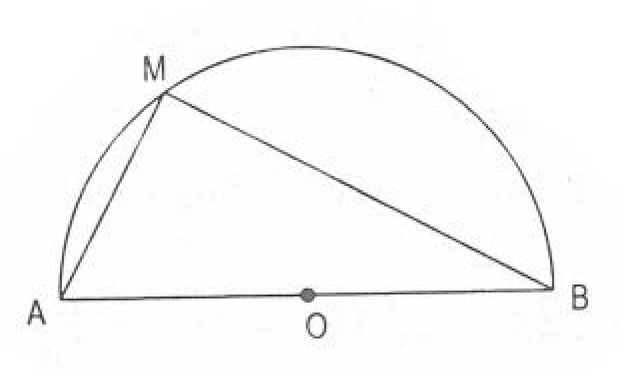
Áp dụng bất đẳng thức: Với $a,b,c > 0$ thì $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

Ta có: $\frac{HA_1}{HA} + \frac{HB_1}{HB} + \frac{HC_1}{HC} = \frac{S_1}{S_2 + S_3} + \frac{S_2}{S_1 + S_3} + \frac{S_3}{S_1 + S_2} \geq \frac{3}{2}$

Bài 11: Cho nửa đường tròn (O; R) đường kính AB, M là điểm chuyển động trên nửa đường tròn. Xác định vị trí của điểm M để $MA + \sqrt{3}.MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI



Ta có: $MA^2 + MB^2 = AB^2 = 4R^2$

Áp dụng BĐT $|ax + by| \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}$

Ta có $MA + \sqrt{3}.MB = |MA + \sqrt{3}.MB|$

$$\leq \sqrt{\left(1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2\right)\left(MA^2 + MB^2\right)} = \sqrt{4.4R^2} = 4R$$

$MA + \sqrt{3}.MB \leq 4R$ không đổi

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{3}.MA = MB \Leftrightarrow \Delta MAB$ là nửa tam giác đều sđ $\overset{\frown}{MA} = 60^o$

Bài 12: Cho tam giác ABC vuông tại A. Chứng minh rằng: $3AB + 4AC \leq 5BC$

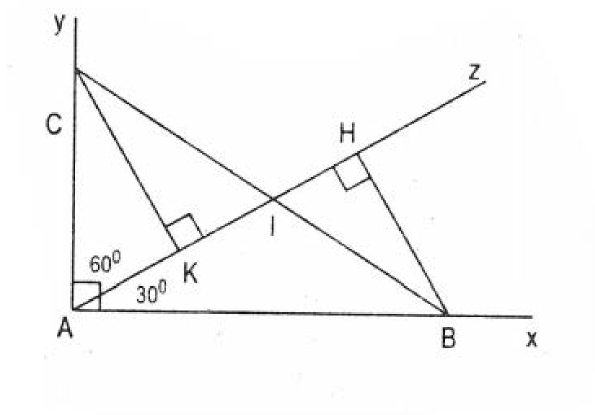
HƯỚNG DẪN GIẢI

Theo định lí Pytago, ta có $AB^2+AC^2=BC^2$

Áp dụng BĐT (B.C.S) ta có : $3AB+4AC=|3AB+4AC|\le\sqrt{3^2+4^2}.\sqrt{AB^2+AC^2}=5.BC$

Bài 13: Cho góc vuông xOy, B là điểm trên tia Ax, C là điểm trên tia Ay (B, C không trùng với A). Chứng minh rằng : $AB+\sqrt{3}.AC\le 2BC$

HƯỚNG DẪN GIẢI



✓ **Cách 1:**

Áp dụng BĐT (B.C.S) ta có:

$$AB+\sqrt{3}.AC=\left|AB+\sqrt{3}.AC\right|\le\sqrt{1+\left(\sqrt{3}\right)^2}.\sqrt{AB^2+AC^2}=2\sqrt{AB^2+AC^2}$$

Tam giác ABC vuông tại A, theo định lí Pytago, ta có: $AB^2+AC^2=BC^2$

Do đó $AB+\sqrt{3}.AC\le 2BC$

✓ **Cách 2:**

Trong góc xOy vẽ tia Az sao cho $\widehat{xAz}=30^\circ$

Do đó $\widehat{yAz}=60^\circ$

Vẽ $BH\perp Az, CK\perp Az\left(H,K\in Az\right)$,Az cắt BC tại I

* Xét ΔABH vuông tại H, $\widehat{BAH}=30^\circ$

$\Rightarrow BH=\dfrac{1}{2}AB$ mà $BH\le BI$ (vì $BH\perp IH$)

Do đó $\dfrac{1}{2}AB\le BI\Rightarrow AB\le 2BI\,(1)$

Xét ΔACK vuông tại K, $\widehat{CAK}=60^\circ\Rightarrow CK=\dfrac{AC\sqrt{3}}{2}$ mà $CK\le IC$ (vì $CK\perp IK$)

Do đó: $\frac{\sqrt{3}}{2}AC \le IC \Rightarrow \sqrt{3}AC \le 2IC\,(2)$

Từ (1) và (2) ta có: $AB + \sqrt{3}AC \le 2(BI + IC) = 2BC$

Vậy $AB + \sqrt{3}.AC \le 2BC$

✓ **Cách 3:**

Tam giác ABC vuông tại A, theo định lí Pytago, ta có: $AB^2 + AC^2 = BC^2$ .Do đó:

$$2BC = 2\sqrt{AB^2 + AC^2} = 2\sqrt{\left(\frac{AB}{2} + \frac{\sqrt{3}AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}AB}{2} - \frac{AC}{2}\right)^2}$$

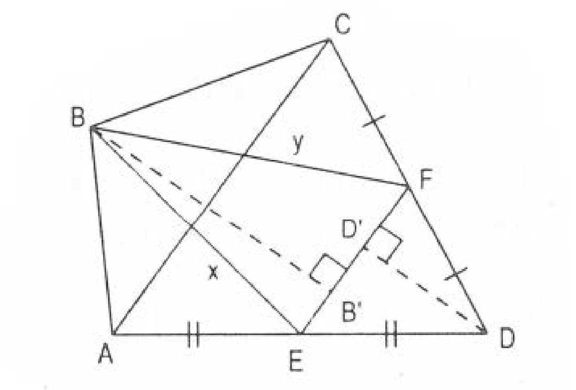
$$\ge 2\sqrt{\left(\frac{AB}{2} + \frac{\sqrt{3}AC}{2}\right)^2} = 2\left(\frac{AB}{2} + \frac{\sqrt{3}AC}{2}\right) = AB + \sqrt{3}AC$$

Vậy $AB + \sqrt{3}.AC \le 2BC$

Bài 14: Cho tứ giác ABCD, E và F theo thứ tự là trung điểm của AD và CD.

Biết BE + BF = a, chứng minh rằng $S_{ABCD} < \frac{a^2}{2}$

HƯỚNG DẪN GIẢI



Dễ thấy $S_{ABCD} = 2S_{BEDF}$. Cần chứng minh $S_{BEDF} < \frac{a^2}{4}$

Dùng S_{BEF} làm trung gian:

Vẽ BB', DD' vuông góc với EF

Dễ thấy $BB' > DD'$ nên $S_{BEDF} < 2S_{BEF}\,(1)$

Mặt khác, đặt BE = x, BF = y thì $2S_{BEF} \le xy$

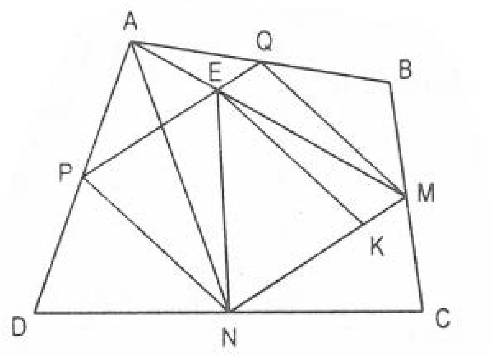
Mà $xy \le \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{a^2}{4}$ nên $S_{BEF} \le \frac{a^2}{4}(2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $S_{BEDF} < \frac{a^2}{4}$

Do đó: $S_{ABCD} < \frac{a^2}{2}$

Bài 15: Cho tứ giác ABCD, gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và CD đồng thời AM + AN = a. Chứng minh rằng $S_{ABCD} < \frac{a^2}{2}$

HƯỚNG DẪN GIẢI



Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AD và AB, giao điểm của AM và PQ là E, kẻ EK // MQ

Ta có: $S_{EMN} \le \frac{1}{2}EM.EN \le \frac{1}{2}\left(\frac{EM+EN}{2}\right)^2$

$< \frac{1}{8}(AM + AN)^2 = \frac{a^2}{8}$

$S_{MNPQ} = S_{KNPE} + S_{KMQE} = 2.S_{EMN} < \frac{a^2}{4}$

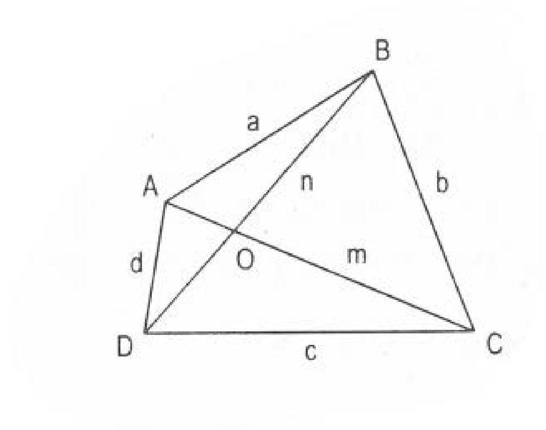
Ta lại có $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$ nên $S_{ABCD} < \frac{a^2}{2}$

Bài 16: Tứ giác ABCD có diện tích S, có tổng các bình phương các cạnh và hai đường chéo bằng P. Chứng minh rằng:

a) $S \le \frac{1}{2}AC.BD$

b) $S \le \frac{P}{8}$

HƯỚNG DẪN GIẢI



a) $S = S_{ABC} + S_{CDA} \le \frac{1}{2}AC.BO + \frac{1}{2}AC.DO$

$S \le \frac{1}{2}AC.BD\left(1\right)$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow AC \perp BD$

Gọi các cạnh của tứ giác ABCD là a, b, c, d và hai đường chéo là m, n.

Ta có: $S = S_{ABC} + S_{CDA} \le \frac{1}{2}a.b + \frac{1}{2}dc = \frac{1}{2}\left(ab + cd\right)\left(2\right)$

Theo giả thuyết, ta có $P = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + m^2 + n^2 \ge 2ab + 2cd + 2mn$

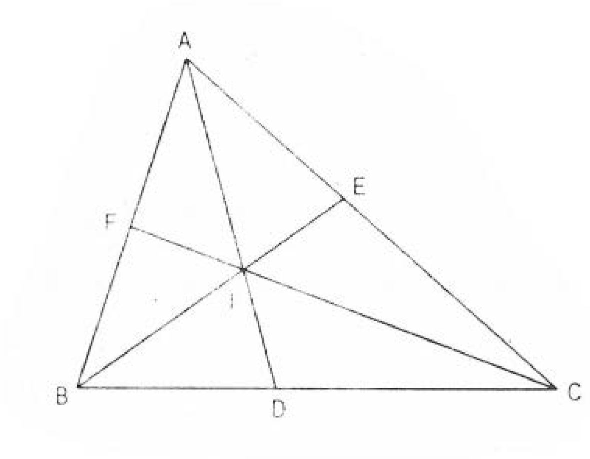
Do (1) nên $2mn \ge 4S$ .Suy ra $S \le \frac{P}{8}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow AC \perp BD$ và tứ giác có hai góc đối bằng $90°$

Bài 17:

Cho tam giác ABC. các phân giác trong AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại I. Xác định hình dạng của tam giác ABC để $\frac{AI}{AD}.\frac{BI}{BE}.\frac{CI}{CF}$ đạt giá trị lớn nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI.



Ta có: $\frac{AI}{DI}=\frac{AB}{BD}\Rightarrow\frac{AI}{AI+DI}=\frac{AB}{AB+BD}\Rightarrow\frac{AI}{AD}=\frac{AB}{AB+BD}$

Chứng minh tương tự, ta có: $\frac{AI}{AD}=\frac{AC}{AC+CD}$

Do đó $\frac{AI}{AD}=\frac{AB}{AB+BD}=\frac{AC}{AC+CD}=\frac{AB+AC}{AB+BD+AC+DC}=\frac{AB+AC}{AB+AC+BC}$

Tương tự $\frac{BI}{BE}=\frac{AB+BC}{AB+AC+BC}$

$\frac{CI}{CF}=\frac{AC+BC}{AB+AC+BC}$

Vậy $\frac{AI}{AD}.\frac{BI}{BE}.\frac{CI}{CF}=\frac{(AB+AC)(AB+BC)(AC+BC)}{(AB+AC+BC)}$

Mà $(AB+AC)(AB+BC)(AC+BC)\le\left(\frac{AB+AC+AB+BC+AC+BC}{3}\right)^3$

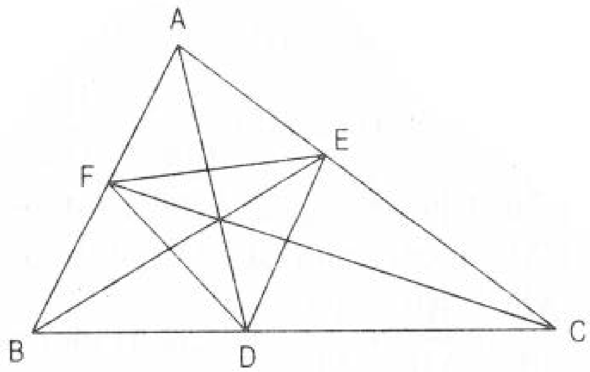
$$=\frac{8}{27}(AB+AC+BC)^3$$

Vậy: $\frac{AI}{AD}.\frac{BI}{BE}.\frac{CI}{CF}\le\frac{8}{27}$:không đổi

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow AB=AC=BC\Leftrightarrow\Delta ABC$ đều

Bài 18: Cho tam giác ABC, gọi AD, BE, CF là các đường phân giác của nó. Chứng minh rằng: $S_{DEF}\le\frac{1}{4}S$

HƯỚNG DẪN GIẢI



Ta có: $\frac{AE}{EC}=\frac{AB}{BC}\Rightarrow\frac{AE}{EC+AE}=\frac{AB}{BC+AB}\Rightarrow\frac{AE}{AC}=\frac{AB}{BC+AB}\Rightarrow AE=\frac{bc}{a+c}$

Tương tự $AF = \dfrac{bc}{a+b}$

Suy ra $\dfrac{S_{AEF}}{S} = \dfrac{AE.AF}{bc} = \dfrac{bc}{(a+c)(a+b)}$

Tương tự: $\dfrac{S_{BDF}}{S} = \dfrac{ac}{(b+c)(a+b)}$

$\dfrac{S_{CDE}}{S} = \dfrac{ab}{(a+c)(c+b)}$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{S_{AEF}}{S} + \frac{S_{BDF}}{S} + \frac{S_{CDE}}{S} \ge \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{ac}{(b+c)(a+b)} + \frac{ab}{(a+c)(c+b)} \ge \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b \ge 6abc$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) \ge 6$$

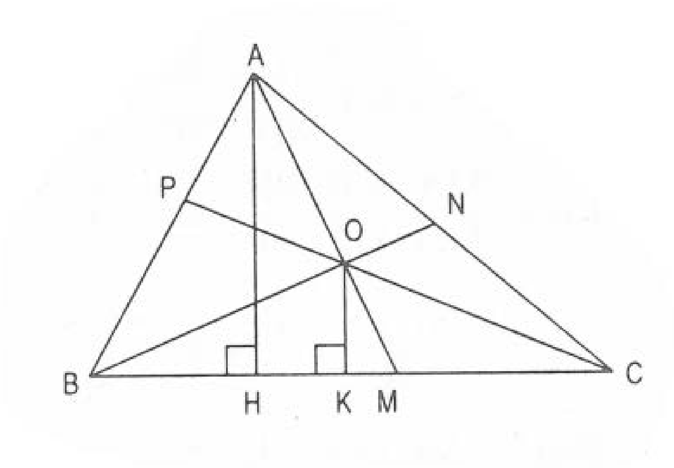
Ta có: $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \ge 2$. Áp dụng cho ba cặp số, suy ra điều phải chứng minh.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều

Bài 19: Cho tam giác ABC nhọn và O là một điểm nằm trong tam giác. Các tia AO, BO, CO lần lượt cắt BC, AC, AB tại M, N, P. Chứng minh rằng $\dfrac{AM}{OM} + \dfrac{BN}{ON} + \dfrac{CP}{OP} \ge 9$

(Đề thi chọn học sinh giỏi toán lớp 9, tỉnh Quảng Ngãi năm học 2009 2010

HƯỚNG DẪN GIẢI



Kẻ $AH \perp BC$ tại H, $OK \perp BC$ tại K

$AH//OK \Rightarrow \frac{OM}{AM} = \frac{OK}{AH}(1)$

$\frac{S_{BOC}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}OK.BC}{\frac{1}{2}AH.BC} = \frac{OK}{AH}(2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{S_{BOC}}{S_{ABC}} = \frac{OM}{AM}$

Tương tự $\frac{S_{AOC}}{S_{ABC}} = \frac{ON}{BN}; \frac{S_{AOB}}{S_{ABC}} = \frac{OP}{CP}$

Do đó $\frac{OM}{AM} + \frac{ON}{BN} + \frac{OP}{CP} = \frac{S_{BOC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{AOC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{AOB}}{S_{ABC}} = 1(3)$

Với $a,b,c > 0$ thì: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

Do đó: $\left(\frac{OM}{AM} + \frac{ON}{BN} + \frac{OP}{CP}\right)\left(\frac{AM}{OM} + \frac{BN}{ON} + \frac{CP}{OP}\right) \geq 9(4)$

từ (3) và (4) suy ra: $\frac{AM}{OM} + \frac{BN}{ON} + \frac{CP}{OP} \geq 9$

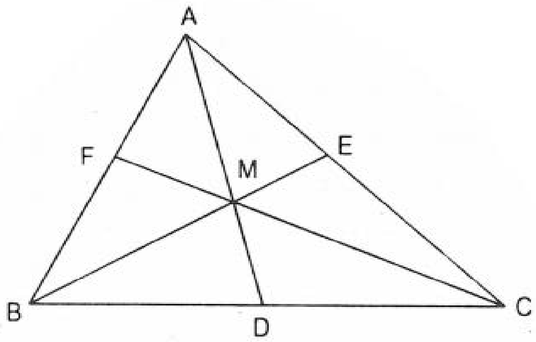
Bài 20. Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác. Kẻ các đường thẳng AM, BM, CM cắt các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. xác định vị trí của điểm M để:

a) $\frac{AD}{MD} + \frac{BE}{ME} + \frac{CF}{MF}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị đó.

b) $\frac{MA}{MD}.\frac{MB}{ME}.\frac{MC}{MF}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị đó

(Đề thi chọn học sinh giỏi toán lớp 9 vòng 2, huyện Phù Cát tỉnh Bình Định năm học 2016 2017)

HƯỚNG DẪN GIẢI



a) Gọi diện tích của các tam giác ABC, BMC, CMA, AMB theo thứ tự là S, S_1, S_2, S_3.

Chứng minh được $\frac{AD}{MD}=\frac{S}{S_1};\frac{BE}{ME}=\frac{S}{S_2};\frac{CF}{MF}=\frac{S}{S_3}$

Suy ra: $\frac{AD}{MD}+\frac{BE}{ME}+\frac{CF}{MF}=\frac{S}{S_1}+\frac{S}{S_2}+\frac{S}{S_3}$

$=\left(S_1+S_2+S_3\right)\left(\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}\right)$

Ta có: $\left(S_1+S_2+S_3\right)\left(\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}\right)\geq 9$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow S_1=S_2=S_3 \Leftrightarrow$ M là trọng tâm của ΔABC

Vậy GTNN của $\frac{AD}{MD}+\frac{BE}{ME}+\frac{CF}{MF}$ là 9 khi M là trọng tâm của ΔABC

b) Ta có: $\frac{MA}{MD}.\frac{MB}{ME}.\frac{MC}{MF}=\frac{S-S_1}{S_1}.\frac{S-S_2}{S_2}.\frac{S-S_3}{S_3}$

$=\frac{S_2+S_3}{S_1}.\frac{S_1+S_3}{S_2}.\frac{S_1+S_2}{S_3}\geq\frac{2\sqrt{S_2S_3}}{S_1}.\frac{2\sqrt{S_1S_3}}{S_2}.\frac{2\sqrt{S_1S_2}}{S_3}=\frac{8.S_1S_2S_3}{S_1S_2S_3}=8$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow S_1=S_2=S_3 \Leftrightarrow$ M là trọng tâm của ΔABC

Vậy GTNN của $\frac{MA}{MD}.\frac{MB}{ME}.\frac{MC}{MF}$ là 8 $\Leftrightarrow$ M là trọng tâm của ΔABC

Bài 21. Cho tam giác ABC, M ở trong tam giác các đường thẳng AM, BM, CM lần lượt cắt các cạnh BC, AC, AB tại A', B', C'. Xác định vị trí của điểm M để:

a) Tổng $\frac{AM}{A'M}+\frac{BM}{B'M}+\frac{CM}{C'M}$ đạt giá trị nhỏ nhất

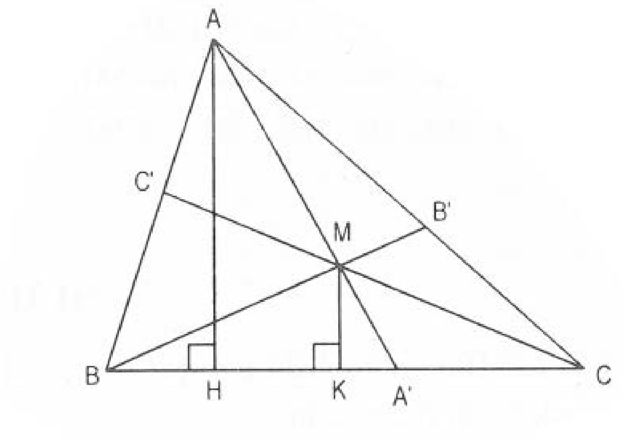
b) Tích $\frac{AM}{A'M}.\frac{BM}{B'M}.\frac{CM}{C'M}$ đạt giá trị nhỏ nhất

c) Tổng $\frac{A'M}{AM}+\frac{B'M}{BM}+\frac{C'M}{CM}$ đạt giá trị nhỏ nhất

d) Tích $\frac{A'M}{AM}.\frac{B'M}{BM}.\frac{C'M}{CM}$ đạt giá trị lớn nhất

e) Tổng $\sqrt{\frac{AM}{A'M}}+\sqrt{\frac{BM}{B'M}}+\sqrt{\frac{CM}{C'M}}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI



Gọi S, S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích các tam giác ABC, MBC, MAB, MAC

Vẽ $AH \perp BC, MK \perp BC$ (H,K thuộc BC) $\Rightarrow AH // MK \Rightarrow \dfrac{AA'}{A'M} = \dfrac{AH}{MK} = \dfrac{S}{S_1}$

$\Rightarrow \dfrac{AA' - A'M}{A'M} = \dfrac{S - S_1}{S_1} = \dfrac{S_2 + S_3}{S_1}$ (vì $S = S_1 + S_2 + S_3$)

$\Rightarrow \dfrac{AM}{A'M} = \dfrac{S_2 + S_3}{S_1} = \dfrac{S_2}{S_1} + \dfrac{S_3}{S_1}$

Tương tự: $\dfrac{BM}{B'M} = \dfrac{S_1 + S_3}{S_2} = \dfrac{S_1}{S_2} + \dfrac{S_3}{S_2}$

$\dfrac{CM}{C'M} = \dfrac{S_1 + S_2}{S_3} = \dfrac{S_1}{S_3} + \dfrac{S_2}{S_3}$

a) Ta có $\dfrac{AM}{A'M} + \dfrac{BM}{B'M} + \dfrac{CM}{C'M} = \left(\dfrac{S_2}{S_1} + \dfrac{S_3}{S_1}\right) + \left(\dfrac{S_1}{S_2} + \dfrac{S_3}{S_2}\right) + \left(\dfrac{S_1}{S_3} + \dfrac{S_2}{S_3}\right) \geq 2 + 2 + 2 = 6$

Do đó $\dfrac{AM}{A'M} + \dfrac{BM}{B'M} + \dfrac{CM}{C'M} \geq 6$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{S_2}{S_1} = \dfrac{S_3}{S_1} . \dfrac{S_2}{S_3} = \dfrac{S_3}{S_2} . \dfrac{S_1}{S_3} = \dfrac{S_3}{S_1} \Leftrightarrow S_1 = S_2 = S_3$

$\Leftrightarrow$ M là trọng tâm tam giác ΔABC

b) Ta có $\dfrac{AM}{A'M} . \dfrac{BM}{B'M} . \dfrac{CM}{C'M} = \dfrac{S_2 + S_3}{S_1} . \dfrac{S_1 + S_2}{S_3} . \dfrac{S_1 + S_2}{S_3} \geq \dfrac{2\sqrt{S_2 S_3}}{S_1} . \dfrac{2\sqrt{S_3 S_1}}{S_2} . \dfrac{2\sqrt{S_1 S_2}}{S_3} = 8$

Do đó $\dfrac{AM}{A'M} . \dfrac{BM}{B'M} . \dfrac{CM}{C'M} \geq 8$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow S_1 = S_2 = S_3 \Leftrightarrow$ M là tọng tâm của ΔABC

c) Ta có: $\dfrac{A'M}{AM}+\dfrac{B'M}{BM}+\dfrac{C'M}{CM}=\dfrac{S_1}{S_2+S_3}+\dfrac{S_2}{S_1+S_3}+\dfrac{S_3}{S_1+S_2}\geq\dfrac{3}{2}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow S_1=S_2=S_3 \Leftrightarrow$ M là trọng tâm của ΔABC

d) Theo câu b ta có: $\dfrac{AM}{A'M}.\dfrac{BM}{B'M}.\dfrac{CM}{C'M}\geq 8 \Leftrightarrow \dfrac{A'M}{AM}.\dfrac{B'M}{BM}.\dfrac{C'M}{CM}\leq\dfrac{1}{8}$

Dấu "="xảy ra $\Leftrightarrow S_1=S_2=S_3 \Leftrightarrow$ M là trọng tâm của ΔABC

e) $\sqrt{\dfrac{AM}{A'M}}+\sqrt{\dfrac{BM}{B'M}}+\sqrt{\dfrac{CM}{C'M}}=\sqrt{\dfrac{S_2+S_3}{S_1}}+\sqrt{\dfrac{S_1+S_3}{S_2}}+\sqrt{\dfrac{S_1+S_2}{S_3}}$

$$\geq\sqrt{\frac{\left(\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\right)^2}{2S_1}}+\sqrt{\frac{\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_3}\right)^2}{2S_2}}+\sqrt{\frac{\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}\right)^2}{2S_3}}$$

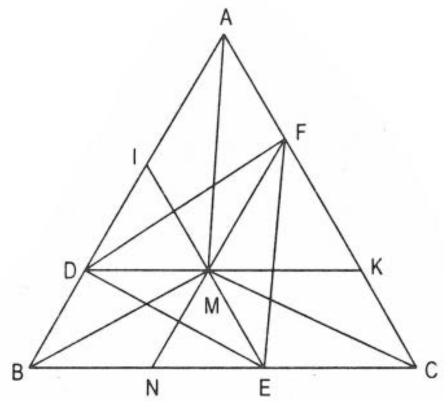
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}}{\sqrt{S_1}}+\frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_3}}{\sqrt{S_2}}+\frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_3}}\right)\geq\frac{1}{\sqrt{2}}.6=3\sqrt{2}$$

Dấu "="xảy ra $\Leftrightarrow S_1=S_2=S_3 \Leftrightarrow$ M là trọng tâm của ΔABC

Bài 22. Cho tam giác ABC và điểm M nằm bên trong tam giác. Gọi D là điểm trên cạnh AB sao cho MD song song với BC, E là điểm trên cạnh BC sao cho ME song song với AC, F là điểm trên cạnh AC sao cho MF song song với AB. Kí hiệu S_{ABC}, S_{DEF} lần lượt là diện tích của tam giác ABC, DEF. Chứng minh rằng $S_{ABC}\geq 3S_{DEF}$.

(Đề thi chọn học sinh giỏi toán lớp 9. tinh Thái Bình năm học 2017- 2018)

HƯỚNG DẪN GIẢI



MF cắt BC tại N, MD cắt AC tại K, ME cắt AB tại I. Các tứ giác ADMF, BDME, CFME là các hình thang cân.

Do đó: ${}_{MDE} = S_{MBD} = \frac{1}{2}S_{MDBN}$

Tương tự: $S_{MEF} = \frac{1}{2}S_{MKCE}; S_{MDF} = \frac{1}{2}S_{MEAI}$

Do đó: $2S_{DEF} = S_{ABC} - \left(S_{IDM} + S_{FMK} + S_{MNE}\right)(1)$

Các tam giác IDM, FMK, MNE, ABC đều MF = AI, MN = DB.

Do đó $\frac{S_{IDM} + S_{FMK} + S_{MNE}}{S_{ABC}} = \frac{S_{IDM}}{S_{ABC}} + \frac{S_{FMK}}{S_{ABC}} + \frac{S_{MNE}}{S_{ABC}}$

$= \frac{ID^2}{AB^2} + \frac{AI^2}{AB^2} + \frac{DB^2}{AB^2} \geq \frac{1}{3}\left(\frac{ID}{AB} + \frac{AI}{AB} + \frac{DB}{AB}\right)^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow S_{IDM} + S_{FMK} + S_{MNE} \geq \frac{1}{3}S_{ABC}\,(2)$

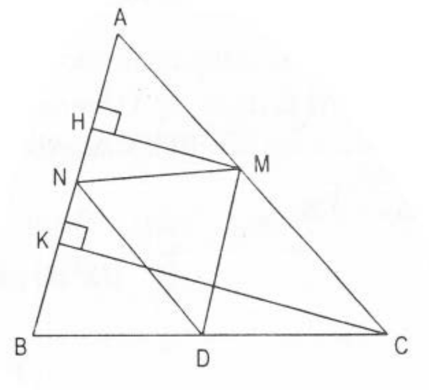
Từ (1 và (2) ta có $2S_{DEF} \leq S_{ABC} - \frac{1}{3}S_{ABC}; 2S_{DEF} \leq \frac{2}{3}S_{ABC}$

Vậy $S_{ABC} \geq 3S_{DEF}$

Bài 23. Cho tam giác ABC. trên các cạnh BC, CA, AB lần lượt lấy các điểm D, M, N (không trùng với các đỉnh của tam giác). Chứng minh rằng trong các tam giác AMN, BDN, CDM có ít nhất một tam giác mà diện tích không vượt quá $\frac{1}{4}$ diện tích tam giác ABC. Khi nào cả ba tam giác đó cùng có diện tích bằng $\frac{1}{4}$ diện tích tam giác ABC?

(Đề thi chọn học sinh giỏi toán lớp 9, tỉnh Sơn La, năm học 2017 ~ 2018)

HƯỚNG DẪN GIẢI



✓ **Cách 1:**

Vẽ $MH \perp AB$ tại H, $CK \perp AB$ tại K $\Rightarrow MH//CK$

ΔACK có $MH//CK \Rightarrow \dfrac{MH}{CK} = \dfrac{AM}{AC}$

$$\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}MH.AN}{\frac{1}{2}CK.AB} = \frac{AM.AN}{AB.AC}$$

Tương tự: $\dfrac{S_{BDN}}{S_{ABC}} = \dfrac{BD.BN}{AB.BC}; \dfrac{S_{CDM}}{S_{ABC}} = \dfrac{CD.CM}{AC.BC}$

Mà $AN.BN \le \left(\dfrac{AN+BN}{2}\right)^2 = \dfrac{AB^2}{4}$

$$CM.AN \le \frac{AC^2}{4}; BD.CD \le \left(\frac{BD+CD}{2}\right)^2 = \frac{BC^2}{4}$$

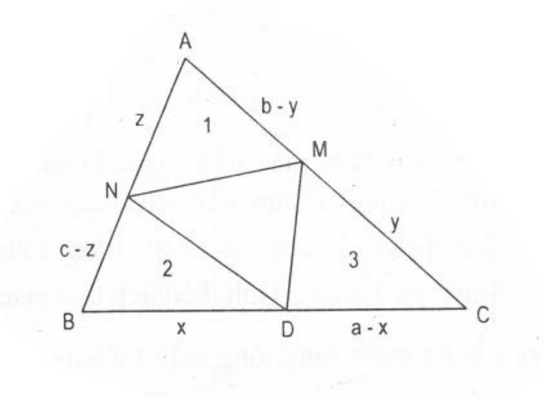
Do đó $\dfrac{S_{AMN}}{S_{ABC}}.\dfrac{S_{BDN}}{S_{ABC}}.\dfrac{S_{CDM}}{S_{ABC}} \le \dfrac{1}{64}$

Không mất tính tổng quát, giả sử $S_{AMN} \le S_{BDN}, S_{AMN} \le S_{CDM}$

Ta có: $(S_{AMN})^3 \le S_{AMN}.S_{BDN}.S_{CDM} \le \dfrac{1}{64}S_{ABC}^3 \Rightarrow S_{AMN} \le \dfrac{1}{4}S_{ABC}$

Vậy ta có điều cần chứng minh.

✓ **Cách 2:**



Chứng minh bằng phản chứng

Gọi S là diện tích tam giác ABC và kí hiệu như hình vẽ

Giả sử $\dfrac{S_1}{S} > \dfrac{1}{4}; \dfrac{S_2}{S} > \dfrac{1}{4}; \dfrac{S_3}{S} > \dfrac{1}{4}$

thì $\dfrac{S_1S_2S_3}{S^3} > \dfrac{1}{64}(1)$

Áp dụng công thức $S_{ABC}=\frac{1}{2}bc.\sin\alpha$, ta có

$$\frac{S_1}{S}=\frac{z(b-y)}{bc};\frac{S_2}{S}=\frac{x(c-z)}{ac};\frac{S_3}{S}=\frac{y(a-x)}{ab}$$

$$\frac{S_1S_2S_3}{S^3}=\frac{x(a-x)}{a^2}.\frac{y(b-y)}{b^2}.\frac{z(c-z)}{c^2}$$

Ta có $\frac{x(a-x)}{a^2}\le\frac{1}{4}\Leftrightarrow a^2\ge 4x(a-x)\Leftrightarrow(a-2x)^2\ge 0$ (bất đẳng thức đúng)

Tương tự, ta có $\frac{y(b-y)}{b^2}\le\frac{1}{4};\frac{z(c-z)}{c^2}\le\frac{1}{4}$

Suy ra $\frac{S_1S_2S_3}{S^3}\le\frac{1}{64}$ mâu thuẫn với (1)

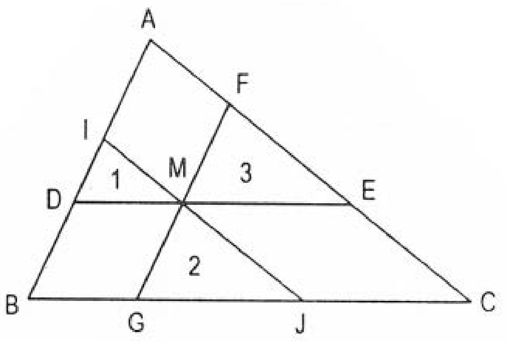
Suy ra điều phải chứng minh: $S_1=S_2=S_3=\frac{1}{4}S\Leftrightarrow a=2x,b=2y,c=2z$

$\Leftrightarrow$ M, N, D là trung điểm các cạnh của tam giác ABC.

Bài 24: Gọi M là điểm bất kì trong tam giác ABC. Qua M kẻ các đường thẳng DE, IJ, FG lần lượt song song với BC, CA, AB (G, J thuộc BC; E, F thuộc CA; D, I thuộc AB). Chứng minh rằng $S_{AIMF}+S_{BGMD}+S_{CEMJ}\le\frac{2}{3}S_{ABC}$

(Đề thi chọn học sinh giỏi toán lớp 9 Quận Cầu giấy, Tp Hà Nội năm học 2009 -2010

HƯỚNG DẪN GIẢI



Dễ thấy các tam giác ABC, IDM, MGJ, FEM đồng dạng với nhau.

Gọi S, S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích các tam giác trên

Ta có: $\frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}=\sqrt{\frac{S_1}{S}}+\sqrt{\frac{S_2}{S}}+\sqrt{\frac{S_3}{S}}$

$$= \frac{DM}{BC} + \frac{GJ}{BC} + \frac{ME}{BC} = \frac{DM + GJ + ME}{BC} = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} = \sqrt{S}$$

$$3(S_1 + S_2 + S_3) \geq \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}\right)^2 \Rightarrow S_1 + S_2 + S_3 \geq \frac{1}{3}S$$

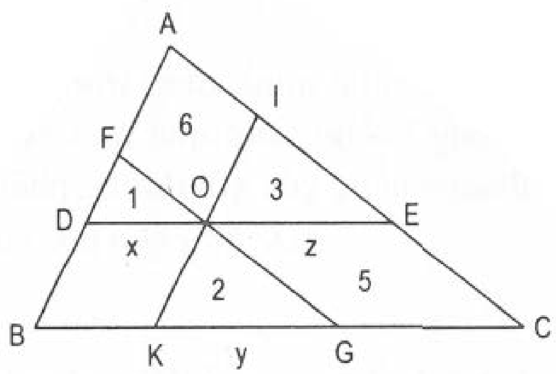
Suy ra $S_{AIMF} + S_{BGMD} + S_{CEMJ} \leq \frac{2}{3} S_{ABC}$

Bài 25. Cho tam giác ABC. Qua O nằm bên trong tam giác, vẽ các đường thẳng song song với các cạnh của tam giác, chia tam giác thành ba hình bình hành và ba tam giác nhỏ.

a) Biết diện tích tam giác ABC bằng 81 cm², hai trong ba tam giác nhỏ có diện tích bằng 4cm² và 16cm². Tính diện tích tam giác còn lại.

b) Chứng minh rằng tổng diện tích của ba tam giác nhỏ lớn hơn hoặc bằng $\frac{1}{3}$ diện tích tam giác ABC. Điểm O ở vị trí nào thì xảy ra dấu bằng?

HƯỚNG DẪN GIẢI



a) Đặt BC = a. đặt x, y, z là cạnh song song với BC hoặc nằm trên BC của các tam giác nhỏ; S_1, S_2, S_3 là các diện tích của chúng, S là diện tích ΔABC

Các tam giác nhỏ đồng dạng với ΔABC

Nên $\left(\frac{x}{a}\right)^2 = \frac{S_1}{S} = \frac{4}{81} = \left(\frac{2}{9}\right)^2 \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{2}{9}$

$$\left(\frac{y}{a}\right)^2 = \frac{S_2}{S} = \frac{16}{81} = \left(\frac{4}{9}\right)^2 \Rightarrow \frac{y}{a} = \frac{4}{9}$$

Chú ý rằng: $x + y + z = a$ nên $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

Suy ra $\frac{z}{a} = \frac{1}{3}$. Do đó: $\frac{S_3}{S} = \left(\frac{z}{a}\right)^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow S_3 = 9\left(cm^2\right)$

b) Ta có $\frac{S_1 + S_2 + S_3}{S} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2}(1)$

Từ $x + y + z = a$ suy ra $x^2 + y^2 + z^2 + 2\left(xy + yz + xz\right) = a^2$

Nhưng $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$ nên $3\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \geq a^2\,(2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow S_1 + S_2 + S_3 \geq \frac{1}{3}S$

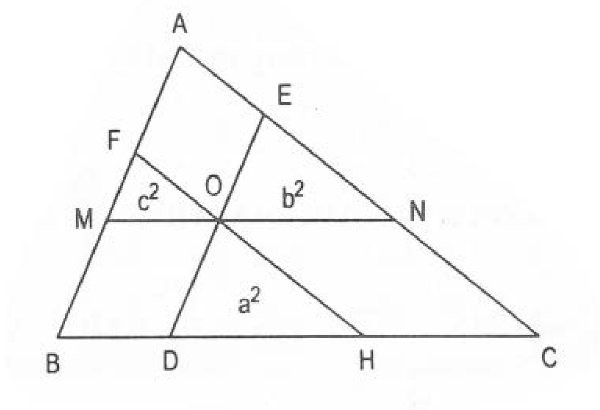
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow OD = OE, OF = OG, OI = OK \Leftrightarrow$ O là trọng tâm ΔABC

Bài 26. Qua điểm O nằm trong tam giác ABC ta vẽ những đường thẳng song song với ba cạnh. Các đường thẳng này chia tam giác ABC thành ba hình bình hành và ba tam giác nhỏ. Biết diện tích của các tam giác đó là a^2, b^2, c^2.

a) Tính diện tích S của tam giác ABC

b) Chứng minh $S \leq 3\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$

HƯỚNG DẪN GIẢI.



a) Ta dễ thấy các tam giác ODH, EON, FMO đồng dạng ΔABC với nên

Đặt $S_{ABC} = d^2$ .Ta có:

$$\frac{a^2}{d^2} = \left(\frac{DH}{BC}\right)^2 \Rightarrow \frac{a}{d} = \frac{DH}{BC}(1)$$

$$\frac{b^2}{d^2} = \left(\frac{ON}{BC}\right)^2 = \left(\frac{HC}{BC}\right)^2 \Rightarrow \frac{b}{d} = \frac{HC}{BC}(2)$$

$$\frac{c^2}{d^2}=\left(\frac{MO}{BC}\right)^2=\left(\frac{BD}{BC}\right)^2 \Rightarrow \frac{c}{d}=\frac{BD}{BC}(3)$$

Từ (1) , (2) và (3) suy ra $\frac{a+b+c}{d}=\frac{DH+HC+BD}{BC}=1$ .Vậy $S=d^2=(a+b+c)^2$

b) $S=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

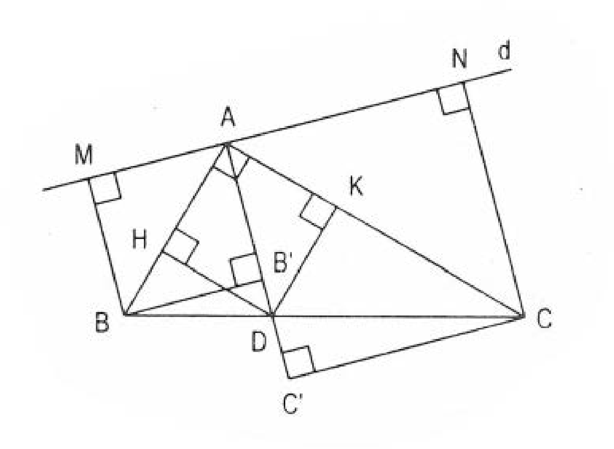
$\le a^2+b^2+c^2+(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(a^2+c^2)=3(a^2+b^2+c^2)$

Vậy $S\le 3(a^2+b^2+c^2)$

Bài 27. Chứng minh rằng trong một tam giác vuông độ dài đường phân giác trong của góc vuông không vượt quá một nửa độ dài hình chiếu vuông góc của cạnh huyền lên đường thẳng vuông góc với đường phân giác ấy.

(Đề thi chọn học sinh giỏi toán lớp 9, Tp. Hồ Chí Minh năm học 1994-1995)

HƯỚNG DẪN GIẢI



✓ **Cách 1:** Tam giác ABC vuông tại A. phân giác AD. Vẽ đường thẳng $d\perp AD$ tại A; $BB'\perp AD$ tại B', $CC'\perp AB$ tại C', $DH\perp AB$ tại H, $DK\perp AC$ tại K

Tứ giác AKDH là hình vuông

nên $DH=DK=\frac{\sqrt{2}}{2}AD$

Ta có: $S_{ABC}=S_{DAB}+S_{DAC}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}DH.AB + \frac{1}{2}DK.AC$

Do đó $\frac{\sqrt{2}}{2}AD(AB + AC) = AB.AC \Rightarrow AD = \frac{\sqrt{2}.AB.AC}{AB + AC}(1)$

$\Delta ABB'$ vuông cân tại B' nên $BB' = \frac{\sqrt{2}}{2}AB$

Tương tự $CC' = \frac{\sqrt{2}}{2}AC$

Do đó: $\frac{BB' + CC'}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(AB + AC)(2)$

Ta có: $AB.AC \le \left(\frac{AB + AC}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}.AB.AC}{AB + AC} \le \frac{\sqrt{2}}{4}(AB + AC)(3)$

Từ (1) và (2) và (3) suy ra $AD \le \frac{BB' + CC'}{2} = \frac{MN}{2}$

✓ **Cách 2:**

Ta có: $AM = AB.\cos MAB = \frac{\sqrt{2}}{2}AB; AN = \frac{\sqrt{2}}{2}AC$

nên $MN = AM + AN = \frac{\sqrt{2}}{2}(AB + AC) \Rightarrow AB + AC = \sqrt{2}.MN$

Ta có: $\frac{\sqrt{2}}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} \ge \frac{4}{AB + AC} = \frac{4}{\sqrt{2}.MN} \Rightarrow AD \le \frac{MN}{2}$

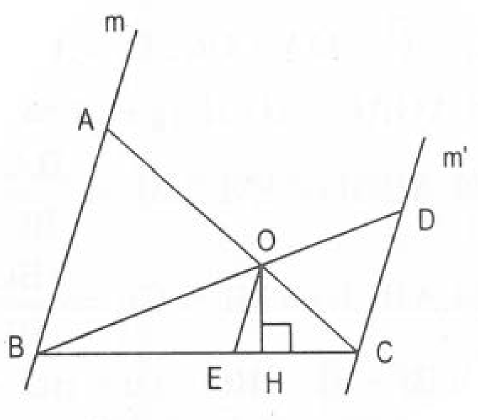
Bài 28. Cho tam giác OBC. Hai đường thẳng m và m' lần lượt qua B và C song song với nhau và không cắt các cạnh của tam giác OBC. Gọi A là giao điểm của hai đường thẳng OC và m, D là giao điểm của hai đường thẳng OB và m'.

a) Xác định vị trí của m và m' để $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}$ đạt giá trị lớn nhất.

b) Xác định vị trí của m và m' để tích AB.CD đạt giá trị nhỏ nhất.

(Đề thi chọn học sinh giỏi toán lớp 9, huyện Phù Cát, tỉnh Bình Định - Vòng 2, năm học 2017 - 2018)

HƯỚNG DẪN GIẢI



a) Vẽ $OE//m, E \in BC, OH \perp BC$ tại H

Ta có: $OE//m, m//m'$ nên $OE//m'$

ΔABC có $OE//AB$ nên $\frac{OE}{AB} = \frac{EC}{BC}(1)$

ΔBCD có $OE//CD$ nên $\frac{OE}{CD} = \frac{BE}{BC}(2)$

Do đó: $\frac{OE}{AB} + \frac{OE}{CD} = \frac{EC+BE}{BC} = \frac{BC}{BC} = 1$

Suy ra: $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{1}{OE}$

Ta có: $OE \geq OH$ nên $\frac{1}{OE} \leq \frac{1}{OH}$:không đổi

Ta có: $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} \leq \frac{1}{OH}$:không đổi

Dấu "=' xảy ra $\Leftrightarrow E \equiv H \Leftrightarrow$ m và m' vuông góc với BC

Vậy khi hai đường thẳng m và m' lần lượt vuông góc với BC tại B, C thì $\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}$ đạt giá trị lớn nhất.

b) Ta có $\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}=\frac{1}{OE}$

Do đó $\frac{1}{AB}.\frac{1}{CD}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}\right)^2$ (vận dụng $xy\le\frac{1}{4}(x+y)^2$)

$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{OE}\right)^2\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{OH}\right)^2\Rightarrow AB.CD\ge 4.OH^2$:không đổi (vì $OE\ge OH$)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow E\equiv H\Leftrightarrow$ m và m' vuông góc với BC

Cách khác:

Từ (1) và (2) ta có: $\frac{OE^2}{AB.CD}=\frac{BE.EC}{BC^2}$ mà $BE.EC\le\frac{1}{4}(BE+EC)^2=\frac{1}{4}BC^2$

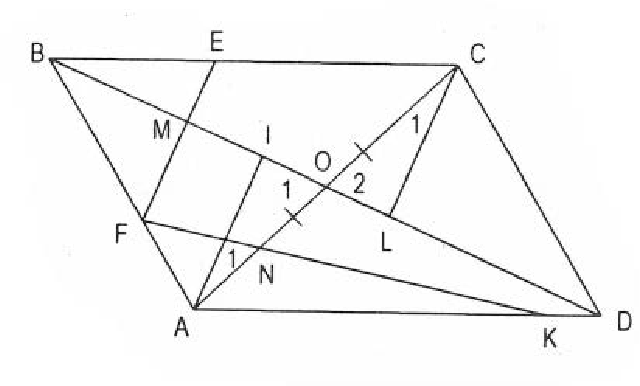
Suy ra $AB.CD\ge 4.OE^2\ge 4.OH^2$ không đổi (vì $OE\ge OH$)

Dấu '=' xảy ra $\Leftrightarrow BE=EC, E\equiv H\Leftrightarrow$ m và m' vuông góc với BC.

Bài 29. Cho hình bình hành ABCD, O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BO và AO.Lấy điểm F trên cạnh AB sao cho tia FM cắt cạnh BC tại E và tia FN cắt cạnh AD tại K.

a) Chứng minh rằng: $\frac{BA}{BF}+\frac{BC}{BE}=4$ b) Chứng minh rằng: $BE+AK\ge BC$

HƯỚNG DẪN GIẢI



a) Qua A vẽ đường thẳng song song với EF.

Gọi I là giao điểm của đường thẳng này với BD.

Qua C vẽ đường thẳng song song với EF.

Gọi L là giao điểm của đường thẳng này với BD.

Ta có: AI // CL (vì cùng song song với EF) $\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{C_1}$

* Xét ΔOAI và ΔOCL có:

$\widehat{A_1} = \widehat{C_1} : OA = OC; \widehat{O_1} = \widehat{O_2}$

$\Rightarrow \Delta OAI = \Delta OCL\left(g.c.g\right) \Rightarrow OI = OL$

* Xét ΔBAI có $FM // AI \Rightarrow \dfrac{BA}{BF} = \dfrac{BI}{BM}$

* Xét ΔBCL có $ME // CL \Rightarrow \dfrac{BC}{BE} = \dfrac{BL}{BM}$

Mà: $BI + BL = BO - OI + BO + OL = 2.BO = 4.BM$

Do đó: $\dfrac{BA}{BF} + \dfrac{BC}{BE} = 4.\dfrac{BM}{BM} = 4$ (đpcm)

b) Ta có $\dfrac{BA}{BF} + \dfrac{BC}{BE} = 4$ (chứng minh câu a) .Tương tự: $\dfrac{BA}{AF} + \dfrac{AD}{AK} = 4$

Bài toán phụ:

Với $x > 0, y > 0$ thì $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \geq \dfrac{4}{x+y}$

Ta có: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}\Leftrightarrow\frac{x+y}{xy}\ge\frac{4}{x+y}\Leftrightarrow(x+y)^2\ge 4xy$

$\Leftrightarrow(x+y)^2-4xy\ge 0\Leftrightarrow(x-y)^2\ge 0$ (bất đẳng thức đúng)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y$

Áp dụng, ta có: $\frac{1}{BF}+\frac{1}{AF}\ge\frac{4}{BF+AF}=\frac{4}{AB};\frac{1}{BE}+\frac{1}{AK}\ge\frac{4}{BE+AK}$

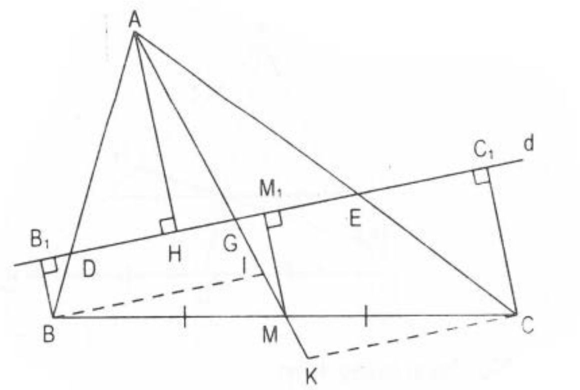
Do đó: $8=\frac{BA}{BF}+\frac{BC}{BE}+\frac{BA}{AF}+\frac{AD}{AK}$

$$=BA\left(\frac{1}{BF}+\frac{1}{AF}\right)+BC\left(\frac{1}{BE}+\frac{1}{AK}\right)\ge BA.\frac{4}{AB}+BC.\frac{4}{BE+AK}$$

$\Rightarrow 4\ge\frac{4.BC}{BE+AK}\Rightarrow BE+AK\ge BC$ (đpcm)

Bài 30. Cho tam giác ABC. Một đường thẳng d đi qua trọng tâm G của tam giác và cắt cạnh AB tại D và cắt cạnh AC tại E. Tìm giá trị lớn nhất của tổng diện tích các tam giác BDE và CDE

HƯỚNG DẪN GIẢI



Gọi M là trung điểm cua BC. dựng BI. CK song song với đường thăng d (I, K nằm trên AM), khi đó: MI = MK

Suy ra: AI + AK = 2AM = 3AG

Vậy có: $\frac{AB}{AD}+\frac{AC}{AE}=\frac{AI}{AG}+\frac{AK}{AG}=\frac{3AG}{AG}=3$

Dựng AH, BB_1, MM_1, CC_1 , vuông góc với d.

Khi đó: $AH=2MM_1$

Mặt khác: MM_1 là đường trung bình của hình thang BB_1C_1C nên: $BB_1 + CC_1 = 2MM_1 = AH$

Do đó: $\dfrac{S_{BDE} + S_{CDE}}{S_{ABC}} = \dfrac{\frac{1}{2}DE\left(BB_1 + CC_1\right)}{S_{ABC}} = \dfrac{\frac{1}{2}DE.AH}{S_{ABC}} = \dfrac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \dfrac{AD}{AB}.\dfrac{AE}{AC}$

Ta có: $\dfrac{AB}{AD}.\dfrac{AC}{AE} \le \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{AB}{AD} + \dfrac{AC}{AE}\right)^2 = \dfrac{9}{4}$. Do đó: $\dfrac{S_{BDE} + S_{CDE}}{S_{ABC}} = \dfrac{AD}{AB}.\dfrac{AE}{AC} \le \dfrac{4}{9}$

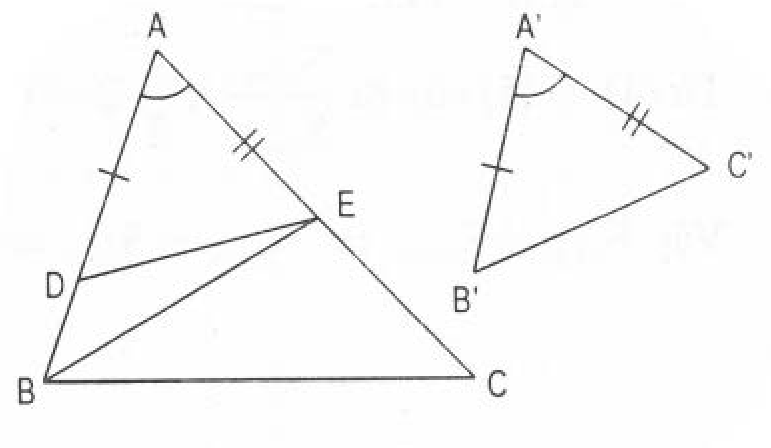
Hay: $S_{BDE} + S_{CDE} \le \dfrac{4}{9}S_{ABC}$: không đổi .Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} \Leftrightarrow d\,//\,BC$

Bài 31. Cho tam giác ABC có diện tích S. Một đường thẳng d đi qua trọng tâm G của tam giác cắt các cạnh AB và AC thoe thứ tự M và N. Chứng minh rằng:

a) $S_{AMN} \ge \dfrac{4}{9}S$

b) $S_{AMN} \le \dfrac{1}{2}S$

HƯỚNG DẪN GIẢI



Bố đề về hai tam giác có một goác bằng nhau:

Chứng minh rằng nếu tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$ có $\widehat{A} = \widehat{A'}$ thì $\dfrac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \dfrac{A'B'.A'C'}{AB.AC}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Trên tia AB lấy điểm D sao cho $AD = A'B'$ trên tia AC lấy điểm E sao cho $AE = A'C'$

$\Delta A'B'C' = \Delta ADE\,(c.g.c) \Rightarrow S_{A'B'C'} = S_{ADE}\,(1)$

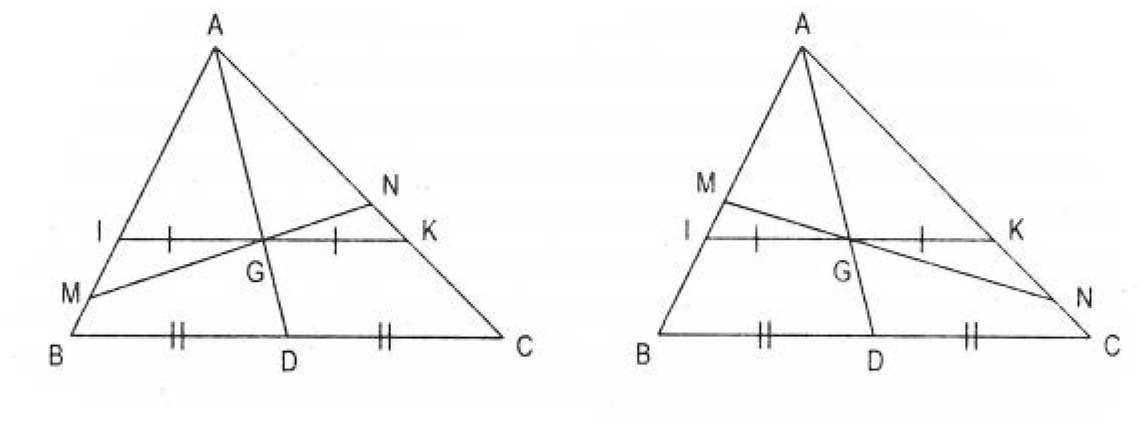
Ta lại có $\dfrac{S_{ADE}}{S_{ABE}} = \dfrac{AD}{AB}\dfrac{S_{ABE}}{S_{ABC}} = \dfrac{AE}{AC}$

nên $\dfrac{S_{ADE}}{S_{ABE}} = \dfrac{AD}{AB}.\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{A'B'.A'C'}{AB.AC}(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \dfrac{A'B'.A'C'}{AB.AC}$

a) Gọi D là giao điểm của AG và BC. Qua G kẻ IK // BC. Do BD = DC nên GI = GK.

Theo bổ đề trên ta có: $\dfrac{S_{AIK}}{S} = \dfrac{AI}{AB}.\dfrac{AK}{AC} = \dfrac{2}{3}.\dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9}$



* Xét ba trường hợp

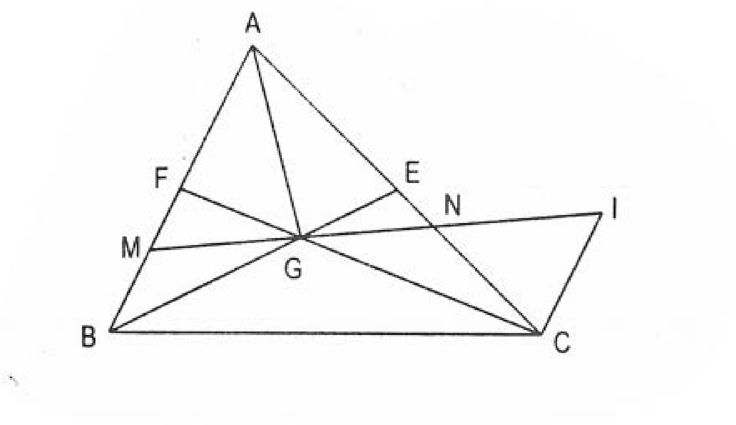
– *Trường hợp* GM = GN thì M trùng I và N trùng K, khi đó $S_{AMN} = S_{AIK} = \dfrac{4}{9}S$ (1)

– *Trường hợp* $GM > GN$ thì $S_{IGM} > S_{KGN}$ nên $S_{AMN} > S_{AIK} = \dfrac{4}{9}S\,(2)$

– *Trường hợp* $GM < GN$ thì $S_{IGM} < S_{KGN}$ nên $S_{AMN} > S_{AIK} = \dfrac{4}{9}S\,(3)$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $S_{AMN} \geq \dfrac{4}{9}S$

b) Gọi E là giao điểm của BG và AC



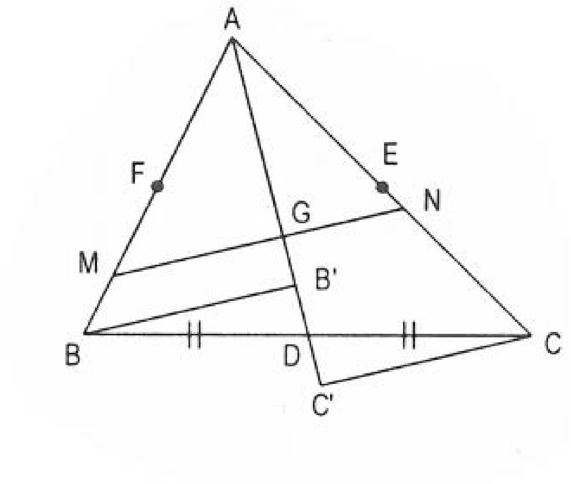
ta có: $S_{ABE} = \frac{1}{2}S$

Ta sẽ chứng minh $S_{GEN} \le S_{GBM}$

Ta có $\frac{S_{GEN}}{S_{GBM}} = \frac{GE}{GB}.\frac{GN}{GM}$ mà $\frac{GE}{GB} = \frac{1}{2}$

nên $\frac{S_{GEN}}{S_{GBM}} = \frac{1}{2}.\frac{GN}{GM}(4)$

Qua C kẻ đường thẳng song song với AB, cắt MN tại I. Gọi F là giao điểm của CG và AB.



Ta có: $\frac{GN}{GM} \le \frac{GI}{GM} = \frac{GC}{GF} = 2(5)$

Từ (4) và (5) suy ra $\frac{S_{GEN}}{S_{GBM}} \le \frac{1}{2}.2 = 1$

Vậy $S_{GEN} \le S_{GBM} \Rightarrow S_{AMN} \le S_{ABE} = \frac{1}{2}S$

Cách 2: Trước hết ta chứng minh $\frac{AB}{AM}+\frac{AC}{AN}=3$

Thật vậy, kẻ $BB'//CC'//MN$ và AG cắt BC tại D là trung điểm của BC, ta có $DB'=DC'$

$$\frac{AB}{AM}+\frac{AC}{AN}=\frac{AB'}{AG}+\frac{AC'}{AG}=\frac{AB'+AC'}{AG}=\frac{AD-DB'+AD+DC'}{AG}=\frac{2AD}{\frac{2}{3}AD}=3$$

Đặt $\frac{AB}{AM}=m,\frac{AC}{AN}=n$ thì $m+n=3(1)$

Đặt $S_{AMN}=S'$.Ta có $\frac{S}{S'}=\frac{AB}{AM}.\frac{AC}{AN}=mn(2)$

a) $\frac{S}{S'}=mn\le\frac{(m+n)^2}{4}=\frac{3^2}{4}=\frac{9}{4}\Rightarrow S'\ge\frac{4}{9}S$

Dấu "=" bằng xảy ra khi và chỉ khi m = n $\Leftrightarrow$ MN // BC

b) $\frac{S}{S'}=mn=m(3-m)=3m-m^2\,(3)$

Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AC và AB; M, N thuộc các cạnh AB, AC

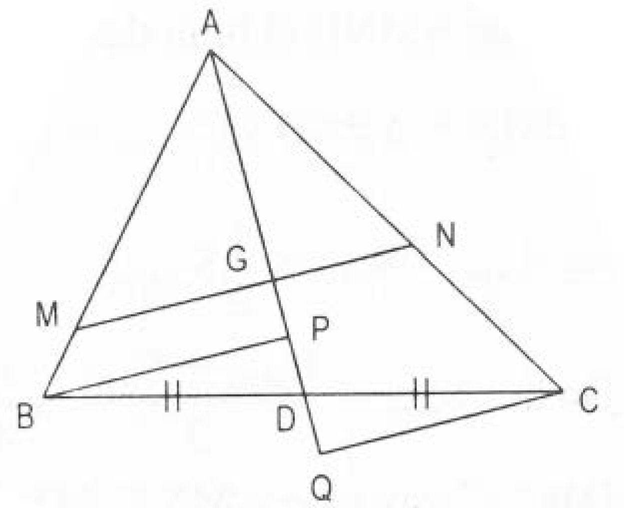
$AB\ge AM\ge AF\Leftrightarrow\frac{AB}{AB}\le\frac{AB}{AM}\le\frac{AB}{AF}\Leftrightarrow 1\le m\le 2$

Do $1\le m\le 2$ nên $(m-1)(2-m)\ge 0\Rightarrow 3m-m^2\ge 2(4)$

Từ (3) và (4) suy ra $\frac{S}{S'}\ge 2$ tức là $S'\le\frac{1}{2}S$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ m = 1 hoặc m = 2 tức là M trùng B (khi đó N là trung điểm AC) hoặc M là trung điểm của AB (khi đó N trùng C)

Cách 3: Câu a



Đặt AM = x, AN = y, AB = c, AC = b $\Rightarrow 0 < x \le c; 0 < y \le b$

Kẻ BP // MN và CQ // MN $\Rightarrow \dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AP}{AG}; \dfrac{AC}{AN} = \dfrac{AQ}{AG}$

Ta có $DP = DQ \Rightarrow AP + AQ = 2.AD$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} = \frac{c}{x} + \frac{b}{y} = \frac{AP}{AG} + \frac{AQ}{AG} = \frac{2AD}{AG} = 3$$

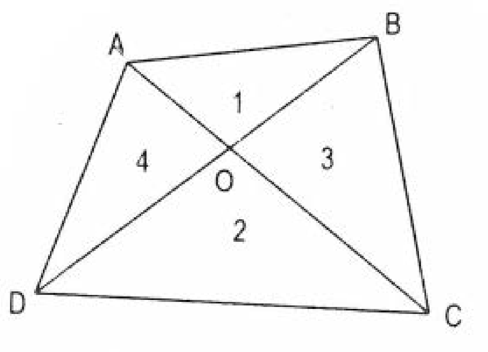
$$\Rightarrow 9 = \left(\frac{c}{x} + \frac{b}{y}\right)^2 \ge 4\frac{c}{x}.\frac{b}{y} = \frac{4bc}{xy}$$

$$\Rightarrow xy \ge \frac{4bc}{9} \Rightarrow S_{AMN} \ge \frac{4}{9} S_{ABC}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{x}{c} = \dfrac{y}{b} \Leftrightarrow MN // BC$

Bài 32: Cho các đường chéo của tứ giác ABCD cắt nhau tại O. tính diện tích nhỏ nhất của tứ giác, biết $S_{AOB} = 4cm^2, S_{COD} = 9cm^2$

HƯỚNG DẪN GIẢI



Ta có: $\frac{S_4}{S_2} = \frac{OA}{OC} = \frac{S_1}{S_3} \Rightarrow S_1 S_2 = S_3 S_4 \,(1)$

Theo bất đẳng thức Cô si, ta có

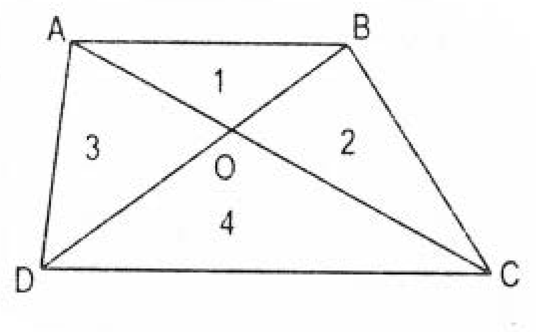
$S_3 + S_4 \ge 2\sqrt{S_3.S_4} = 2\sqrt{4.9} = 12$

Ta có: $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \ge 4 + 9 + 12 = 25$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow S_3 = S_4 \Leftrightarrow S_{ADC} = S_{BCD} \Leftrightarrow AB//CD$

Bài 33. Cho hình thang ABCD $(AB//CD)$ có diện tích là S, gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Chứng minh rằng $S_{OAB} + S_{OCD} \ge \frac{1}{2}S$. Dấu "=" xảy ra khi nào?

HƯỚNG DẪN GIẢI



Gọi S1, S2, S3, S4 lần lượt là diện tích các tam giác OAB, OBC, OAD, OCD

Ta có: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{OA}{OC} = \frac{S_3}{S_4} \Rightarrow S_1.S_4 = S_2.S_3$

$AB//CD \Rightarrow S_{ADC} = S_{BDC} \Rightarrow S_2 = S_3$

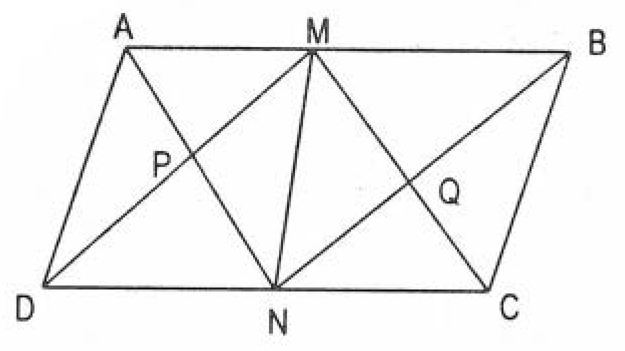
Ta có: $(S_1 + S_4)^2 \ge 4S_1.S_4 = 4S_2.S_3 = 4S_2^2$

$\Rightarrow S_1 + S_4 \geq 2S_2 = S_2 + S_3 \Rightarrow 2(S_1 + S_4) \geq S \Rightarrow S_1 + S_4 \geq \frac{1}{2}S$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow S_1 = S_4 \Leftrightarrow AD//BC \Leftrightarrow$ ABCD là hình bình hàng

Bài 34. Cho hình bình hành ABCD và điểm M trên cạnh AB, N là điểm thay đổi trên cạnh CD, AN cắt DM tại P. BN cắt CM tại Q. Xác định vị trí của N để diện tích tứ giác MPNQ đạt giá trị lớn nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI



Tứ giác AMND là hình thang nên

$\Delta PMN = \Delta PAD$ và $S_{PAM} + S_{PDN} \geq \frac{1}{2}S_{AMND}$

$\Rightarrow S_{PMN} + S_{PAD} \leq \frac{1}{2}S_{AMND}$

Do đó: $S_{PMN} = \frac{S_{PMN} + S_{PAD}}{2} \leq \frac{1}{4}S_{AMND}$

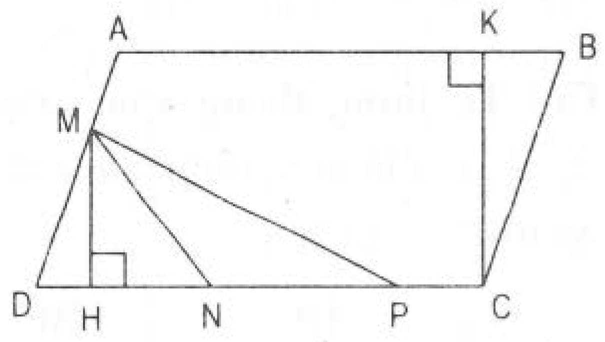
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow MN//AD$

Tương tự: $S_{QMN} \leq \frac{1}{4}S_{BMNC}$ .Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow MN//BC$

Do đó: $S_{MNPQ} \leq \frac{1}{4}S_{ABCD}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow MN//BC//AD$

Bài 35. Cho hình bình hành ABCD. Ba điểm M, N, P nằm trên các cạnh của hình bình hành. Chứng minh rằng $S_{ABCD} \geq 2S_{MNP}$

HƯỚNG DẪN GIẢI



+ Trường hợp M, N, P cùng thuộc một cạnh: Khi đó: $S_{MNP} = 0$

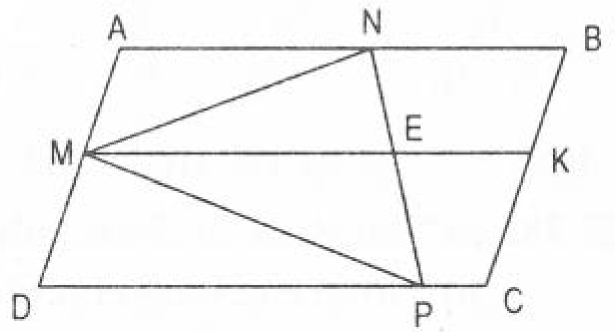
+ Trường hợp hai trong ba điểm M, N, P nằm trên cùng một cạnh của hình bình hành

Kẻ $MH \perp CD$ tại H, $CK \perp AB$ tại K

Ta có: $S_{MNP} = \frac{1}{2}NP.MH \le \frac{1}{2}CD.CK = \frac{1}{2}S_{ABCD}$

$\Rightarrow S_{ABCD} = 2.S_{MNP}$

Dấu "=" xảy ra khi $M \equiv A, N \equiv D, P \equiv C$ (hay M , N, P trùng ba đỉnh của hình bình hành ABCD)



+ Trường hợp mỗi điểm nằm trên mỗi cạnh của hình bình hành, Kẻ MK // AB, MK cắt NP tại E.

Ta có: $S_{MNP} = S_{MNE} + S_{MEP}$

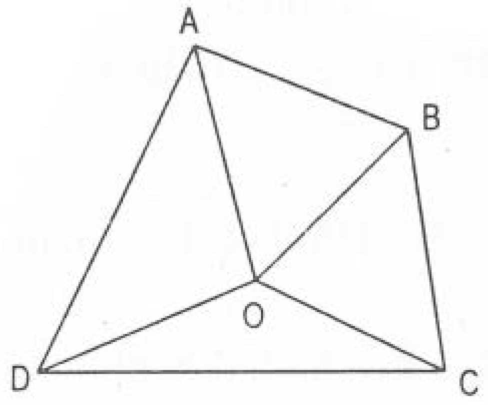
Theo chứng minh trên có hai đỉnh nằm trên một cạnh. Ta có:

$S_{MNP} = S_{MNE} + S_{MEP} \le \frac{1}{2} S_{ABKM} + \frac{1}{2} S_{MKCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$

$\Rightarrow S_{ABCD} \ge 2S_{MNP}$

Bài 36. Cho tứ giác ABCD có diện tích S, điểm O nằm trong tứ giác. Chứng minh rằng $OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 \ge 2S$. Dấu "=" xảy ra khi nào?

HƯỚNG DẪN GIẢI



Ta có: $S_{OAB} \le \frac{1}{2} OA.OB \le \frac{1}{2} . \frac{OA^2 + OB^2}{2}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow OA \perp OB$ và OA = OB

Tương tự: $S_{OBC} \le \frac{1}{2} . \frac{OB^2 + OC^2}{2}$;

$S_{OCD} \le \frac{1}{2} . \frac{OC^2 + OD^2}{2}; S_{ODA} \le \frac{1}{2} . \frac{OD^2 + OA^2}{2}$

Do đó: $S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCD} + S_{ODA} \le \frac{1}{2}\left(OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2\right)$

$\Rightarrow OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 \ge 2S$

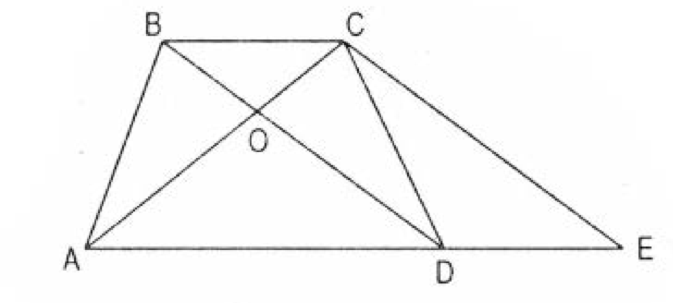
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow OA \perp OB, OB \perp OC, OC \perp OD, OD \perp OA$

và OA = OB = OC = OD

$\Leftrightarrow$ Tứ giác ABCD là hình vuông, O là giao điểm hai đường chéo.

Bài 37. Cho hình thanh ABCD $(AD // BC)$ có diện tích S. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Xác định dạng của hình thang ABCD để diện tích tam giác OAB có diện tích lớn nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI.



$$AD//BC \Rightarrow S_{OAB} = S_{OCD}; \frac{S_{OBC}}{S_{OAB}} = \frac{OC}{OA} = \frac{S_{OCD}}{S_{OAD}} \Rightarrow S_{OAB}^2 = S_{OBC}.S_{OAD}$$

Từ C kẻ đường thẳng song song với BD cắt AD tại E

$\Rightarrow$ BCED là hình bình hành $\Rightarrow S_{ABCD} = S_{ACE} = S$

$\Delta OBC \backsim \Delta CEA$

nên $\dfrac{S_{OBC}}{S} = \left(\dfrac{BC}{AE}\right)^2 = \dfrac{BC^2}{(AD+BC)^2};$

$\Delta OAD \backsim \Delta CAE$ nên $\dfrac{S_{OAD}}{S} = \left(\dfrac{AD}{AE}\right)^2 = \dfrac{AD^2}{(AD+BC)^2}$

$$\Rightarrow \left(\frac{S_{OAB}}{S}\right)^2 = \frac{S_{OBC}}{S}.\frac{S_{OAD}}{S} = \frac{BC^2.AD^2}{(AD+BC)^2} \Rightarrow \frac{S_{OAB}}{S} = \frac{BC.AD}{(AD+BC)^2} \le \frac{1}{4} \Rightarrow S_{OAB} \le \frac{1}{4}S$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow BC = AD \Leftrightarrow$ ABCD là hình bình hành.

Bài 38. a) Trong các hình chữ nhật cùng chu vi. hình nào có diện tích lớn nhất?

b) Trong các hình chữ nhật cùng diện tích, hình nào có chu vi nhỏ nhất?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi x, y là các kích thước của hình chữ nhật.

Dùng bất đẳng thức $(x+y)^2 \ge 4xy$

a) Chu vi hình chữ nhật không đổi nên x + y là hằng số, khi đó xy lớn nhất $\Leftrightarrow x = y$.

Vậy hình vuông có diện tích lớn nhất.

b) Diện tích hình chữ nhật không đổi nên xy là hằng số, khi đó nhỏ nhất $\Leftrightarrow x = y$.

c) Vậy hình vuông có chu vi nhỏ nhất.

Bài 39. Trong các hình thoi có cùng chu vi. tìm hình có diện tích lớn nhất?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Xét hình thoi cạnh a và hình vuông cạnh a. Gọi h là đường cao của hình thoi, ta có

$$h \le a \Rightarrow ah \le a^2$$

Diện tích hình thoi nhỏ hơn hoặc bằng diện tích hình vuông.

Vậy trong các hình thoi có cùng chu vi, hình vuông có diện tích lớn nhất

Bài 40. Trong các hình thoi có cùng diện tích, hình nào có chu vi nhỏ nhất?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Xét hình thoi cạnh a và hình vuông cạnh b. gọi h là chiều cao hình thoi, ta cỏ: $ah = b^2$

Ta có: $h \le a \Rightarrow ah \le a^2 \Rightarrow b^2 \le a^2$ nên $b \le a$

Chu vi hình thoi lớn hơn hoặc bằng chu vi hình vuông.

Vậy trong các hình thoi có cùng diện tích, hình vuông cỏ chu vi nhỏ nhất?

Bài 41.

a) Trong các tam giác vuông có tổng hai cạnh góc vuông không đổi. tam giác nào có chu vi nhỏ nhất?

b) Chứng minh rằng trong các tam giác vuông có cạnh huyền không đổi. tam giác vuông cân có chu vi nhỏ nhất?

HƯỚNG DẢN GIẢI

a) Gọi b, c là các cạnh góc vuông của các tam giác vuông có b + c = 2m (m là hằng số).

Chu vi tam giác nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ cạnh huyền nhỏ nhất $\Leftrightarrow b^2 + c^2$ nhỏ nhất

Đặt $b = m + x$ thì $c = m - x$.

Khi đó: $b^2 + c^2 = (m+x)^2 + (m-x)^2 = 2m^2 + 2x^2 \ge 2m^2$

$b^2 + c^2 \ge 2m^2$: không đổi.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow b = c$

b) Xét các tam giác vuông có cạnh huyền a không đổi.

Gọi x, y là độ dài các cạnh góc vuông.

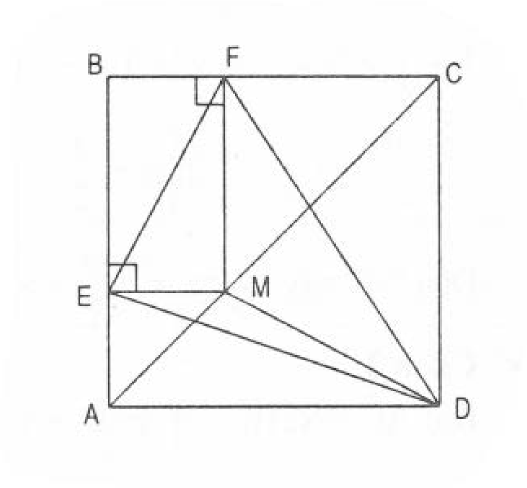
Ta có: $(x+y)^2 \le 2(x^2+y^2) \Leftrightarrow (x+y)^2 \le 2a^2 \Leftrightarrow x+y \le a\sqrt{2}$: không đổi.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$

Chu vi tam giác vuông lớn nhất bằng $a + a\sqrt{2} \Leftrightarrow$ Tam giác đó vuông cân.

Bài 42. Cho hình vuông ABCD có cạnh a. Điểm M di động trên đường chéo AC. Kẻ $ME \perp AB, MF \perp BC\,(E \in AB, F \in BC)$. Xác định vị trí của điểm M để tam giác DEF có diện tích nhỏ nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI



Đặt a là độ dài cạnh hình vuông.

Tứ giác BFME là hình chữ nhật $\Rightarrow BF = EM$.

ΔEAM vuông cân tại E nên EA = EM.

Do đó $BE + BF = BE + EA = a$

Mặt khác $EM \,//\, AD \Rightarrow S_{DEM} = S_{AEM}\,; FM \,//\, DC \Rightarrow S_{DMF} = S_{MFC}$

Do đó $S_{DEF} = S_{DEM} + S_{DMF} + S_{MEF}$

$= S_{AEM} + S_{MFC} + S_{MEF} = S_{AEFC}$

$= S_{ABC} - S_{BEF} = \dfrac{1}{2}a^2 - \dfrac{1}{2}BE.BF$ (1)

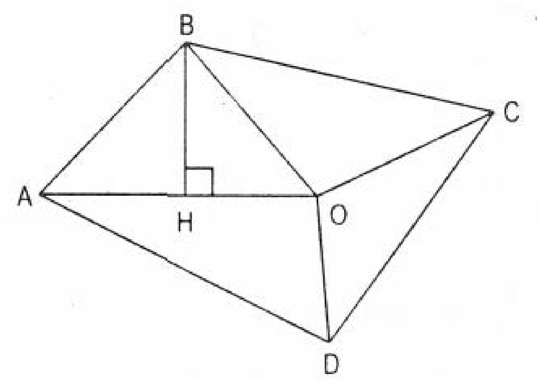
Ta có: $(BE+BF)^2 \ge 4BE.BF \Leftrightarrow \dfrac{a^2}{4} \ge BE.BF$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $S_{DEF} \ge \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}.\frac{a^2}{4} \Leftrightarrow S_{DEF} \ge \frac{3}{8}a^2$: không đổi.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow BE = BF \Leftrightarrow$ M là trung điểm của AC.

Bài 43. Cho tứ giác ABCD có diện tích không đổi S. O là điểm nằm trong tứ giác ABCD. Xác định hình dạng của tứ giác ABCD và vị trí điểm O để tổng $OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI



Gọi BH là đường cao của ΔOAB. Ta có: $OA^2 + OB^2 \ge 2.OA.OB$

$S_{OAB} = \frac{1}{2}OA.BH; BH \perp OA$ nên $OB \ge BH$

Do đó $OA^2 + OB^2 \ge 4.S_{OAB}; OB^2 + OC^2 \ge 4.S_{OBC}$;

$OC^2 + OD^2 \ge 4.S_{OCD}; OD^2 + OA^2 \ge 4.S_{OAD}$

Vậy : $2\left(OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2\right)$

$\ge 4\left(S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCD} + S_{OAD}\right) = 4S$

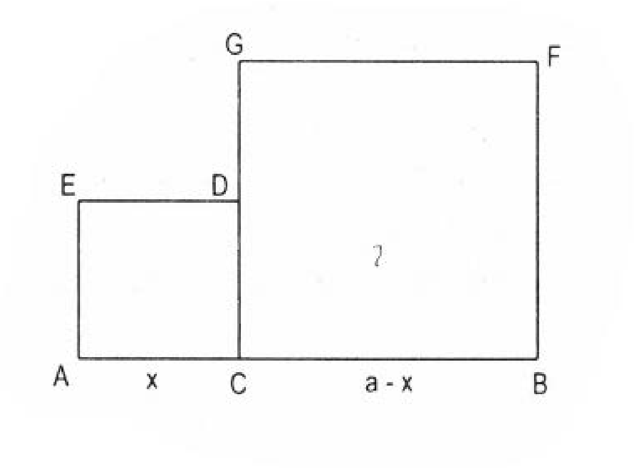
$\Rightarrow OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 \ge 2S$: không đổi

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow OA = OB = OC = OD$ và $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOA} = 90°$

$\Leftrightarrow$ ABCD là hình vuông và O là tâm hình vuông

Bài 44. Cho đoạn thẳng AB = a, C là điểm trên đoạn thẳng AB. Vẽ các hình vuông ACDE và CBFG. Xác định vị trí điểm C để tổng diện tích hai hình vuông ACDE và CBFG đạt giá trị nhó nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI



✓ **Cách 1:**

Đặt $AC = x \Rightarrow CB = a - x\left(0 < x < a\right)$

$S_{ACDE} + S_{CBFG} = x^2 + \left(a - x\right)^2 = 2x^2 - 2ax + a^2$

$= 2\left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2 + \dfrac{a^2}{2} \geq \dfrac{a^2}{2}$: không đổi

Dấu “=′ xảy ra $\Leftrightarrow x = \dfrac{a}{2} \Leftrightarrow$ C là trung điểm của AB

✓ **Cách 2:**

Đặt $AC = x; BC = y \Rightarrow x + y = a$ không đổi $\left(0 < x, y < a\right)$

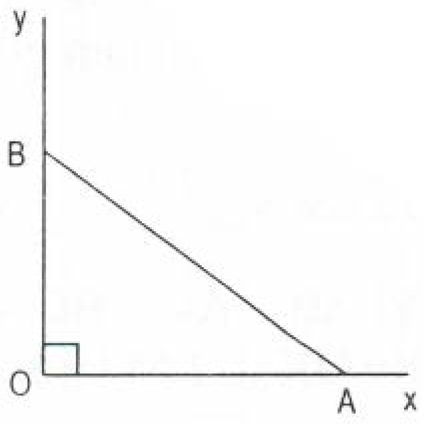
Ta có $S_{ACDE} + S_{CBFG} = x^2 + y^2 \geq \dfrac{\left(x + y\right)^2}{2} = \dfrac{a^2}{2}$: không đổi

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = y = \dfrac{a}{2} \Leftrightarrow$ Clà trung điểm của AB

Bài 45. Cho góc $\widehat{xOy} = 90°$, A và B là hai điểm lần lượt di động trên hai tia Ox, Oy sao cho

OA + OB = a (a > 0, a không đổi). Xác định vị trí của A và B để độ dài đoạn thẳng AB ngắn nhất

HƯỚNG DẪN GIẢI



✓ **Cách 1**

Ta có: $AB^2 = OA^2 + OB^2 \geq \frac{(OA+OB)^2}{2} = \frac{a^2}{2}$

$\Rightarrow AB \geq \frac{\sqrt{2}}{2}a$: không đổi

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow OA = OB = \frac{a}{2}$

✓ **Cách 2:**

Đặt $OA = x \Rightarrow OB = a - x\,(0 < x < a)$

Ta có: $AB^2 = OA^2 + OB^2 = x^2 + (a-x)^2$

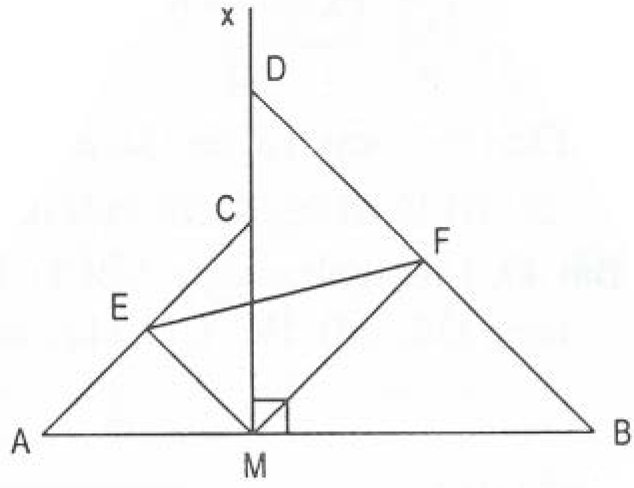
$= 2x^2 - 2ax + a^2 = 2\left(x^2 - ax + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right)$

$= 2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2} \geq \frac{a^2}{2} \Rightarrow AB \geq \frac{\sqrt{2}}{2}a$: không đổi

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{a}{2} \Leftrightarrow OA = OB = \frac{a}{2}$

Bài 46. Cho đoạn thẳng AB cố định. M là điểm di động trên đoạn thẳng AB, kẻ tia Mx vuông góc với AB tại M trên tia Mx lần lượt lấy các điểm C và D sao cho MC = MA, MD = MB. Gọi E, F lần vượt và trung điểm của AC và BD. Xác định vị trí của điểm M để diện tích tam giác MEF lớn nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI



ΔMAC vuông cân tại M $\Rightarrow AC = AM\sqrt{2}$

Ta có: $ME = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}AM$,ME là đường phân giác góc AMC

Tương tự $MF = \dfrac{\sqrt{2}}{2}BM$,MF là đường phân giác góc DMB

Do đó $\widehat{EMF} = 90°$

Ta có: $MA.MB \le \dfrac{(MA+MB)^2}{4} = \dfrac{AB^2}{4}$

$S_{MEF} = \dfrac{1}{2}ME.MF = \dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2}MA.\dfrac{\sqrt{2}}{2}MB$

$= \dfrac{1}{2}MA.MB \le \dfrac{1}{2}.\dfrac{AB^2}{4} = \dfrac{AB^2}{8}$: không đổi

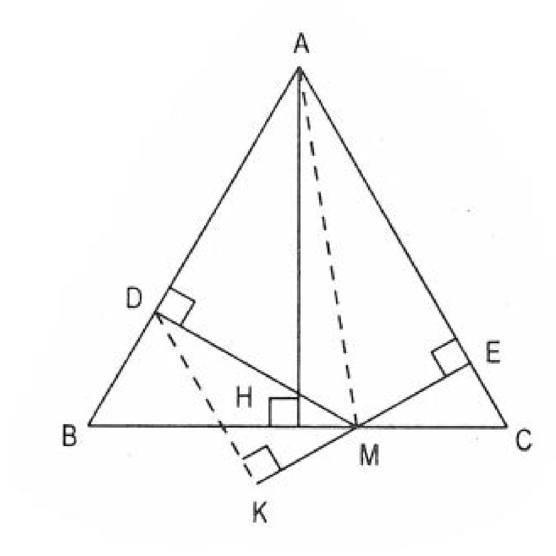
Dấu '=' xảy ra $\Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow$ M là trung điểm của đoạn thẳng AB

Bài 47. Cho tam giác đều ABC, đường cao $AH = h$.Lấy điểm M nằm giữa B và C. Vẽ $MD \perp AB, ME \perp AC$

a) Chứng minh rằng $MD + ME = h$

b) Gọi diện tích tam giác MDE là S. Tìm giá trị lớn nhất của S.

HƯỚNG DẪN GIẢI



a) Ta có: $S_{ABM} + S_{ACM} = S_{ABC} \Rightarrow \frac{1}{2}AB.MD + \frac{1}{2}AC.ME = \frac{1}{2}BC.h$

Vì $AB = AC = BC$ nên ta được $MD + ME = h$

b) Kẻ $DK \perp EM$ tại K

Ta có: $\widehat{DME} = 120°$ do đó góc nhọn giữa MD và ME là $60°$

Diện tích ΔMDE là:

$$S = \frac{1}{2}DK.ME = \frac{1}{2}MD.ME.\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{4}MD.ME$$

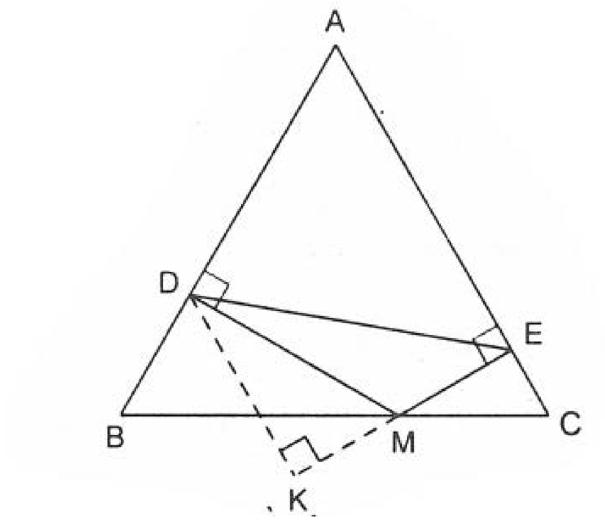
$$\Rightarrow S \le \frac{\sqrt{3}}{4}.\frac{(MD+ME)^2}{4} = \frac{\sqrt{3}}{16}.h^2 : \text{không đổi}$$

Dấu '=" xảy ra $\Leftrightarrow$ M là trung điểm của BC

Vậy S lớn nhất là $\frac{\sqrt{3}}{16}.h^2 \Leftrightarrow$ M là trung điểm của BC

Bài 48. Cho tam giác đều ABC, M trên cạnh BC (M khác B và C). Vẽ MD vuông góc với AB tại D, ME vuông góc với AC tại E. Xác định vị trí của điểm M để diện tích tam giác MDE lớn nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI



Kẻ $DK \perp EM$ tại K. Ta có: $\widehat{DME} = 120°$ suy ra $\widehat{DMK} = 60°$

$$S_{MDE} = \frac{1}{2}DK.ME = \frac{1}{2}MD.ME.\sin 60°$$

$$= \frac{1}{2}MB.MC.\sin 60°.\sin 60°.\sin 60° = \frac{1}{2}MB.MC.\sin^3 60°$$

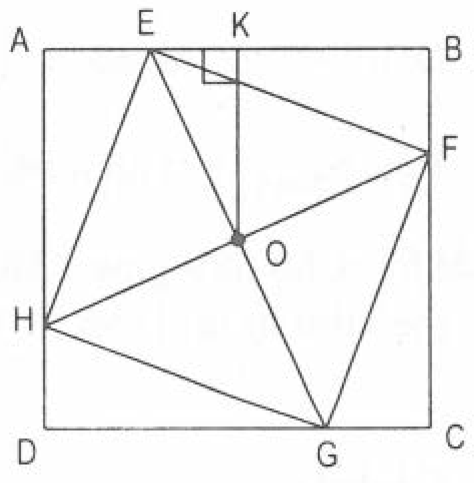
$$\leq \frac{1}{2}.\frac{3\sqrt{3}}{8}.\frac{(MB+MC)^2}{4} = \frac{BC^2.3\sqrt{3}}{64}$$: không đổi.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ M trùng H, ME = MD

$\Leftrightarrow$ M là trung điểm của đoạn thẳng BC

Bài 49. Cho hình vuông ABCD. Hình vuông HEFG có các đỉnh H, E, F, G lần vượt nawmgf trên các cạnh DA, AB, BC, CD. Hãy xác định vị trí hình vuông HEFG để nó có diện tích nhỏ nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI



✓ **Cách 1:**

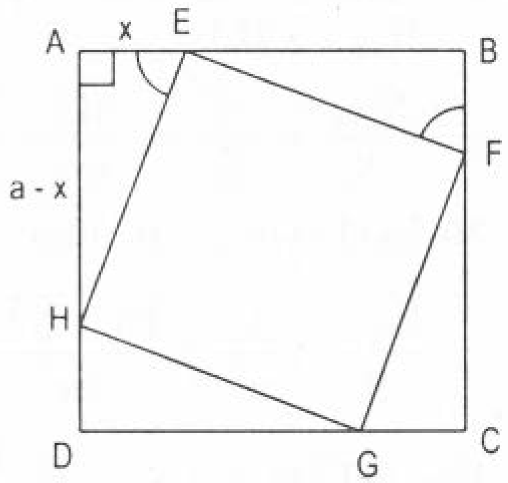
Kẻ $OK \perp AB$ tại K $\Rightarrow$ K cố định

Tâm của hai hình vuông trùng nhau tại một điểm O

Ta có: $S_{EFGH} = \dfrac{EG.FH}{2} = \dfrac{2OE.2OE}{2} = 2.OE^2 \geq 2.OK^2$:không đổi

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow OE = OK \Leftrightarrow$ E trùng K

Vậy diện tích HEFG nhỏ nhất khi các đỉnh H, E, F, G lần lượt là trung điểm các cạnh DA, AB, BC, CD.



✓ **Cách 2:**

Ta chứng minh được $AE = BF = CG = DH$

Gọi $AB = a$, $AE = x$ thì $EB = FC = DG = HA = a - x$

Gọi S là diện tích hình vuông HEFG ta có:

$$S = a^2 - 4.\frac{x(a-x)}{2} = a^2 - 2ax + 2x^2$$

$$= 2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2} \ge \frac{a^2}{2}$$

Dấu '=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{a}{2} \Leftrightarrow$ E là trung điểm của AB

- ✓ **Cách 3**

S_{HEFG} nhỏ nhất $\Leftrightarrow 4S_{AEH}$ lớn nhất $\Leftrightarrow 4.\frac{x(a-x)}{2}$

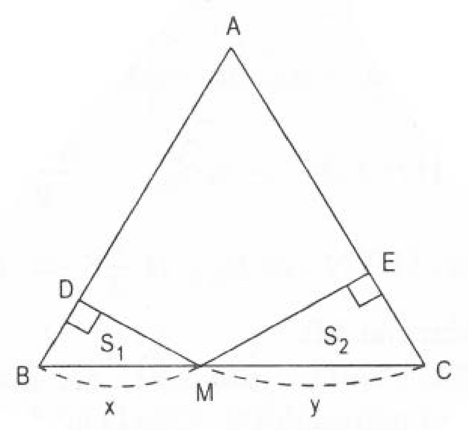
$\Leftrightarrow x(a-x)$ lớn nhất

Chú ý rằng: x và a - x là hai số dương có tổng không đổi (bằng a) nên tích của chúng lớn nhất khi và chí khi hai số ấy bằng nhau.

Khi đó $x = a - x \Leftrightarrow x = \frac{a}{2} \Leftrightarrow$ E là trung điểm của AB.

Bài 50. Cho tam giác đều ABC. Tìm vị trí của điểm M trên cạnh BC sao cho nếu gọi D là hình chiếu của M trên AB, gọi E là hình chiếu của M trên AC thì tứ giác ADME có diện tích lớn nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI



Đặt $S_{MDB} = S_1, S_{MEC} = S_2$

S_{ADME} lớn nhất $\Leftrightarrow S_1+S_2$ nhỏ nhất

Đặt $MB=x,\ MC=y$ và $x+y=a$: không đổi

Tam giác MDB là nữa tam giác đều cạnh x nên $S_1=\dfrac{x^2\sqrt{3}}{8}$

Tương tự ta có: $S_2=\dfrac{y^2\sqrt{3}}{8}$

$$S_1+S_2=\frac{\sqrt{3}}{8}\left(x^2+y^2\right)\geq\frac{\sqrt{3}}{8}.\frac{\left(x+y\right)^2}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{16}\Rightarrow S_1+S_2\geq\frac{a^2\sqrt{3}}{16}$$

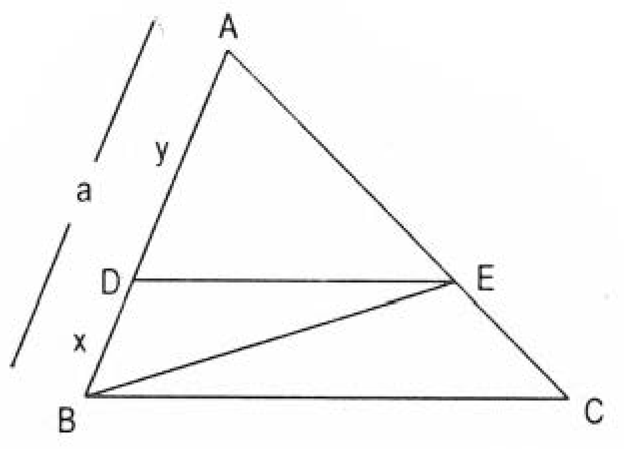
Do đó : $S_{ADMF}=S_{ABC}-\left(S_1+S_2\right)\leq\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}-\dfrac{a^2\sqrt{3}}{16}=\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{16}$: không đổi

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y$

Vậy S_{ADMF} lớn nhất bằng $\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{16}\Leftrightarrow$ M là trung điểm của BC

Bài 51. Cho tam giác ABC có diện tích S. Một đường thẳng song song với BC cắt AB và AC theo thứ tự tại điểm D và E. Tính diện tích lớn nhất của tam giác BDE

HƯỚNG DẪN GIẢI



✓ **Cách 1**

Đặt $BD=x,\ AD=y,\ AB=a$, ta có $x+y=a$

$$\frac{S_{BDE}}{S_{BAE}}=\frac{BD}{BA}=\frac{x}{a}(1)$$

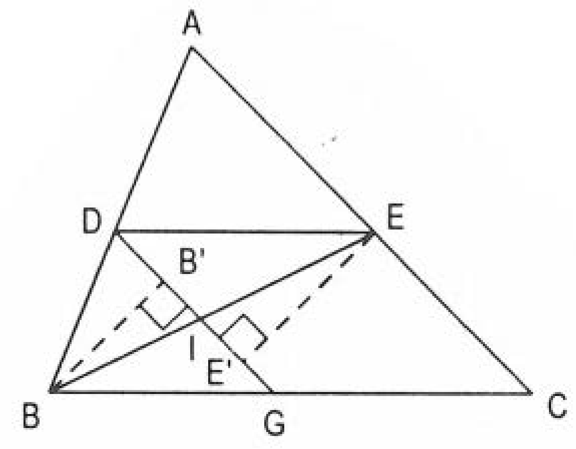
$$\frac{S_{BAE}}{S}=\frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}=\frac{y}{a}(2)$$

Nhân (1) với (2) ta được:

$$\frac{S_{BDE}}{S}=\frac{xy}{a^2}\le\frac{(x+y)^2}{4a^2}=\frac{a^2}{4a^2}=\frac{1}{4}$$

Vậy GTLN của S_{BDE} là $\frac{1}{4}S \Leftrightarrow x=y \Leftrightarrow$ D, E lần lượt là trung điểm của AB, AC

✓ **Cách 2:**



Kẻ DG // AC, cắt BE tại I

Kẻ BB', EE' vuông góc với DG.

$$S_{BDE}=DI.\frac{BB'+EE'}{2}=DI.\frac{h}{2}$$

(h là độ dài đường cao kẻ từ B của ΔABC) (1)

Do DG // AC nên $\frac{DI}{AE}=\frac{DG}{AC}$

$$\Rightarrow DI.AC=AE.DG=AE.EC\le\frac{(AE+EC)^2}{4}=\frac{AC^2}{4}\Rightarrow DI\le\frac{AC}{4}(2)$$

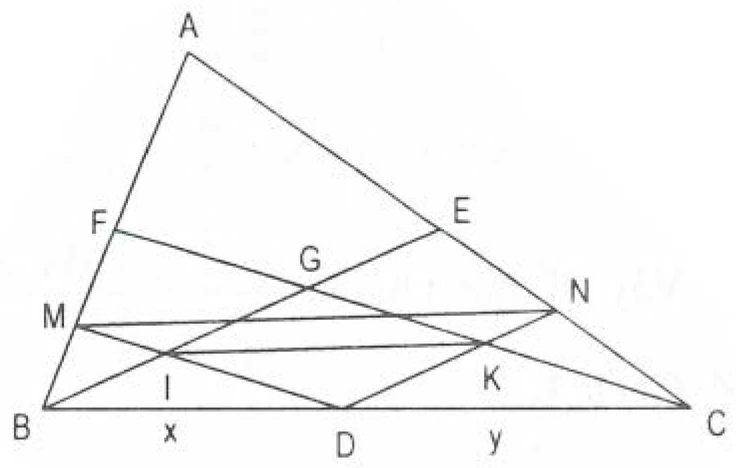
Từ (1) và (2) suy ra $S_{BDE}\le\frac{AC.h}{8}=\frac{1}{4}S$

Vậy GTLN của S_{BDE} là $\frac{1}{4}S \Leftrightarrow AE=EC \Leftrightarrow$ E lần lượt là trung điểm của AC, khi đó D là trung điểm của AB.

Bài 52. Cho tam giác ABC, các đường trung tuyến BE và CF cắt nhau ở G. Gọi D là một điểm trên cạnh BC. Qua D kẻ đường thẳng song song với CF cắt BE và BA theo thứ tự tại I và M. Qua D kẻ đường thẳng song song với BE, cắt CF và CA theo thứ tự tại K và N. Tìm vị trí của điểm D để:

a) Tứ giác GIDK có diện tích lớn nhất b) Tam giác DMN có diện tích lớn nhất

HƯỚNG DẪN GIẢI



a) Đặt $S_{GBC} = S, S_{GIDK} = S', BD = x, DC = y$

Các tam giác IBD, GBC, KDC đồng dạng nên

$$\frac{S'}{S} = \frac{S - S_{IBD} - S_{KDC}}{S} = 1 - \left(\frac{x}{BC}\right)^2 - \left(\frac{y}{BC}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{x^2 + y^2}{(x+y)^2}$$

S' lớn nhất $\Leftrightarrow \dfrac{x^2+y^2}{(x+y)^2}$ nhỏ nhất

Do $2(x^2+y^2) \ge (x+y)^2$ nên $\dfrac{x^2+y^2}{(x+y)^2} \ge \dfrac{1}{2}$

S' lớn nhất $\Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow$ D là trung điểm của BC

b) Ta có: DM // CF nên $\dfrac{DM}{DI} = \dfrac{CF}{CG} = \dfrac{3}{2}$

Tương tự $\dfrac{DN}{DK} = \dfrac{3}{2}$ suy ra $\dfrac{S_{DMN}}{S_{DIK}} = \dfrac{DM}{DI}.\dfrac{DN}{DK} = \dfrac{3}{2}.\dfrac{3}{2} = \dfrac{9}{4} \Rightarrow S_{DMN} = \dfrac{9}{4} S_{DIK} = \dfrac{9}{8} S'$

S_{DMN} lớn nhất $\Leftrightarrow S'$ lớn nhất $\Leftrightarrow x = y$ (theo câu a) $\Leftrightarrow$ D và trung điểm của BC

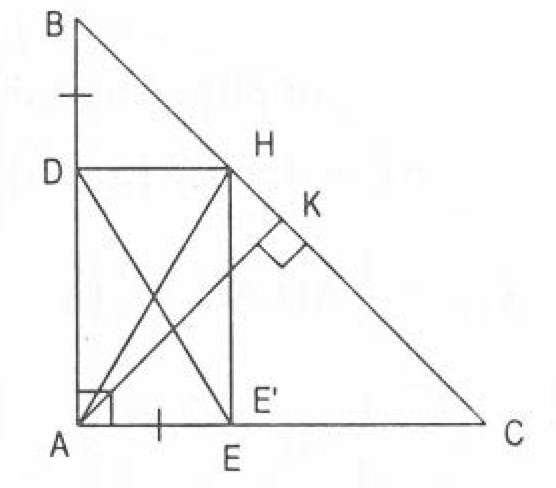
Bài 53. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Các điểm D, E theo thứ tự di chuyển trên các cạnh AB. AC sao cho BD = AE. Xác đinh vị trí của điểm D và E sao cho:

a) DE có độ dài nhỏ nhất

b) Tứ giác BDEC có diện tích nhỏ nhất.

(Đề thi chọn học sinh giỏi toán lớp 9. tỉnh Bình Định năm học 2017-2018)

HƯỚNG DẪN GIẢI



✓ **Cách 1:**

Kẻ $DH \perp AB$ tại D (H thuộc BC); $HE' \perp AC$ tại E'

$\Rightarrow \widehat{HDA} = \widehat{DAE'} = \widehat{HE'A} = 90°$

$\Rightarrow$ Tứ giác $ADHE'$ là hình chữ nhật $\Rightarrow DH = AE'$

Ta có: DB = DH, DB = AE.

Do đó: $AE = AE' \Rightarrow$ E trùng với E'

Kẻ $AK \perp BC \Rightarrow$ AK là đường trung tuyến ΔABC

$\Rightarrow AH \geq AK = \dfrac{BC}{2}$: không dổi

Mà AH = DE (vì ADHE là hình chữ nhật) $\Rightarrow DE \geq \dfrac{BC}{2}$:không đổi

Vậy DE nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ H trùng K $\Leftrightarrow$ D, E là hình chiếu của K trên AB, AC

$\Leftrightarrow$ Khi D, E lần lượt là trung điểm của AB và AC

✓ **Cách 2:**

Đặt $AB = AC = a\left(a > 0\right); DB = DH = AE = x \Rightarrow AD = a - x$

Ta có: $DE^2 = AD^2 + AE^2 = \left(a - x\right)^2 + x^2 = 2x^2 - 2ax + a^2$

$= 2\left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2 + \dfrac{a^2}{2} \geq \dfrac{a^2}{2}$: không đổi $\Rightarrow DE \geq \sqrt{\dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$: không đổi

Dấu '=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \dfrac{a}{2}$

Vậy DE nhỏ nhất là $\dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{AB\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$ D, E lần lượt là trung điểm của AB và AC

✓ **Cách 3:**

Áp dụng bất đẳng thức: $a^2 + b^2 \geq \dfrac{\left(a+b\right)^2}{2}$ với $a, b > 0$

Thật vậy: $a^2 + b^2 \geq \dfrac{\left(a+b\right)^2}{2} \Leftrightarrow 2\left(a^2 + b^2\right) \geq a^2 + 2ab + b^2 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow \left(a - b\right)^2 \geq 0$ (BĐT đúng)

Dấu '=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$

Đặt AB = AC = a: không đổi $\left(a > 0\right)$

Ta có: $DE^2 = AD^2 + AE^2 \geq \dfrac{\left(AD + AE\right)^2}{2} = \dfrac{AB^2}{2} = \dfrac{a^2}{2} \Rightarrow DE \geq \sqrt{\dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$:không đổi

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow AD = AE \Leftrightarrow \begin{cases} DB = DA \\ EC = EA \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ D, E lần lượt là trung điểm của AB và AC

Vậy DE nhỏ nhất là $\dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{AB\sqrt{2}}{2}$ khi D, E lần lượt là trung điểm của AB và AC

b) **Cách 1**

Đặt $AB = AC = a\left(a > 0\right); DB = DH = AE = x \Rightarrow AD = a - x$

∗ **Xét bài toán phụ**: Cho $a, b > 0$. Ta luôn có:

$(a+b)^2 \ge 4ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \ge 0$. Dấu "=' xảy ra $\Leftrightarrow a=b$

$$S_{ADE} = \frac{1}{2}AD.AE = \frac{1}{2}(a-x)x \le \frac{1}{8}\left[(a-x)+x\right]^2 = \frac{a^2}{8}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{a^2}{2}$$

Do đó: $S_{BDEC} = S_{ABC} - S_{ADE} \ge \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{8} = \frac{3a^2}{8}$:không đổi

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a-x=x \Leftrightarrow x=\frac{a}{2}$

Vậy tứ giác BDEC có diện tích nhỏ nhất là $\frac{3a^2}{8} = \frac{3AB^2}{8}$

$\Leftrightarrow$ D, E lần lượt là trung điểm của AB và AC

✓ **Cách 2**

Đặt $AB = AC = a(a>0); DB = DH = AE = x \Rightarrow AD = a-x$

Ta có: $S_{BDEC} = S_{ABC} - S_{ADE} = \frac{AB^2}{2} - \frac{AD.AE}{2} = \frac{a^2}{2} - \frac{x(a-x)}{2}$

S_{BDEC} nhỏ nhất $\Leftrightarrow \frac{x(a-x)}{2}$ lớn nhất

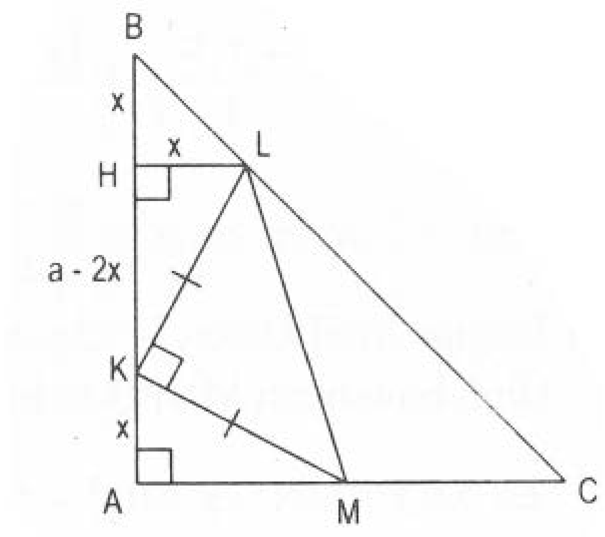
$\Leftrightarrow a-x=x$ (vì tổng $x+a-x-a$ không đổi)

$\Leftrightarrow x=\frac{a}{2} \Leftrightarrow$ D, E lần lượt là trung điểm của AB và AC

Bài 54. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trên các cạnh AB. BC, CA lần lượt lấy các điểm K, L, M sao cho tam giác KLM vuông cân tại K. Xác định vị trí của điểm K để diện tích tam giác KLM đạt giá trị nhỏ nhất.

(*Đề thi chọn học sinh giỏi toán lớp 9 vòng 1, huyện Phù Cát tỉnh Bình Định năm học 2017 - 2018*)

HƯỚNG DẪN GIẢI



✓ **Cách 1**

Kẻ $LH \perp AB$ tại H

$\Delta HLK = \Delta AKM \Rightarrow HL = AK, HK = AM$

Đặt $AB = AC = a, HB = x \Rightarrow HL = AK = x, HK = a - 2x$

Ta có: $S_{KLM} = \frac{1}{2}KL^2 = \frac{1}{2}\left(HL^2 + HK^2\right)$

$= \frac{1}{2}\left[x^2 + (a-2x)^2\right]$

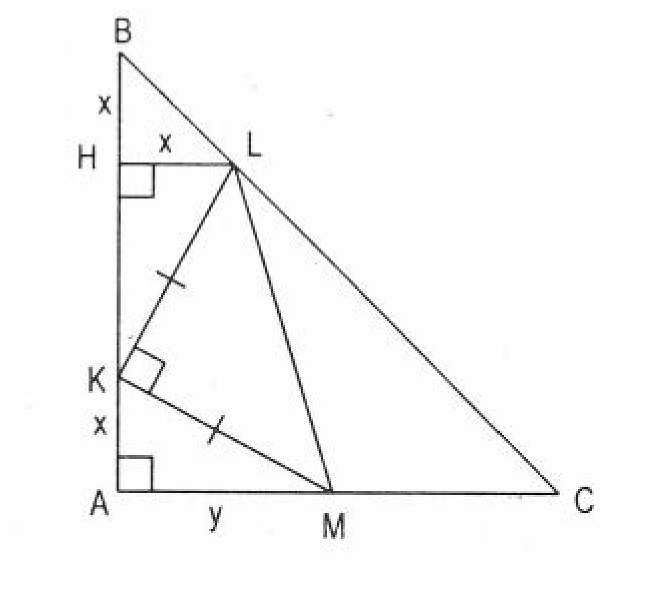
$= \frac{1}{2}\left(5x^2 - 4ax + a^2\right) = \frac{5}{2}\left[\left(x - \frac{2a}{5}\right)^2 + \frac{a^2}{25}\right]$

$= \frac{5}{2}\left(x - \frac{2a}{5}\right)^2 + \frac{1}{2}.\frac{a^2}{5}$

$\Rightarrow S_{KLM} \geq \frac{1}{2}.\frac{a^2}{5} = \frac{S_{ABC}}{5}$: không đổi

Dấu '=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{2a}{5} \Leftrightarrow AK = \frac{2a}{5} = \frac{2.AB}{5}$

✓ **Cách 2:**



Đặt $AK = x$, $AM = y$

Ta có $AB = 2x + y$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB^2 = \frac{1}{2}(2x+y)^2$

$= \frac{1}{2}\left[5\left(x^2+y^2\right)-(x-2y)^2\right]$

$\le \frac{1}{2}.5\left(x^2+y^2\right) = \frac{5}{2}KM^2 = 5.S_{KLM}$

$\Rightarrow S_{KLM} \ge \frac{S_{ABC}}{5}$ không đổi

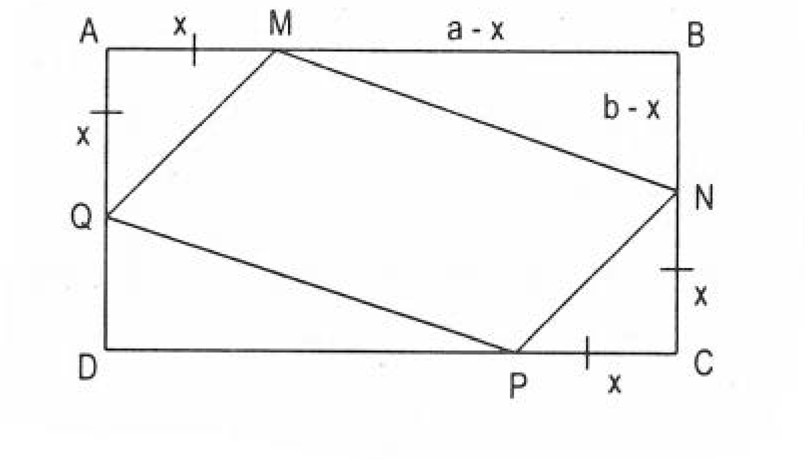
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 2y \Leftrightarrow AK = \frac{2.AB}{5}$

Bài 55. Cho hình chữ nhật ABCD. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt lấy các điểm M, N, P, Q sao cho AM = AQ = CN = CP. Xác định các điểm M, N, P, Q để:

a) Tứ giác MNPQ có diện tích lớn nhất. Tính diện tích lớn nhất đó.

b) Tứ giác MNPQ là hình thoi. Tính diện tích hình thoi đó khi AB = 14cm; BC = 6cm

HƯỚNG DẪN GIẢI



a) Ta có: $S_{AMQ} = S_{CNP}; S_{BMN} = S_{DPQ}$

Đặt $AB = a$, $BC = b$; $AM = AQ = CN = CP = x$

$\Rightarrow BM = a - x; BN = b - x$

$S_{MNPQ} = S_{ABCD} - 2\left(S_{AMQ} + S_{BMN}\right)$

$= ab - \left[x^2 + (a-x)(b-x)\right]$

$S_{MNPQ} = ab - \left[x^2 + (a-x)(b-x)\right]$

$= -2x^2 + (a+b)x$

$= -2\left(x - \dfrac{a+b}{4}\right)^2 + \dfrac{(a+b)^2}{8} \le \dfrac{(a+b)^2}{8}$: không đổi

Dấu '=' xảy ra $\Leftrightarrow x = \dfrac{a+b}{4}$

Vậy GTLN của S_{MNPQ} là $\dfrac{(a+b)^2}{8} \Leftrightarrow x = \dfrac{a+b}{4}$

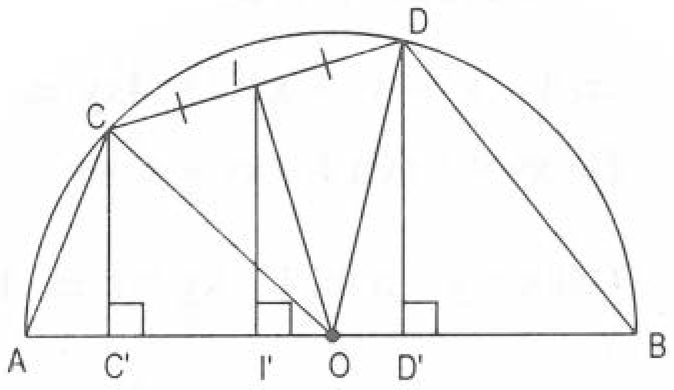
b) Tứ giác MNPQ có các cặp cạnh đối bằng nhau nên là hình bình hành

Hình bình hành MNPQ là hình thoi

$\Leftrightarrow MQ = MN \Leftrightarrow MQ^2 = MN^2 \Leftrightarrow 2x^2 = (a-x)^2 + (b-x)^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{a^2+b^2}{2(a+b)} = 5,8$

Bài 56. Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB = 2R. Hai bán kính OC và OD thay đổi vị trí sao cho thuộc cung AD và $\widehat{COD} = 60°$.Tìm vị trí của điểm C và D để tứ giác ACDB có diện tích lớn nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI



Ta có: ΔCOD đều nên $S_{COD} = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}(1)$

Đặt $S_{ACBD} = S$ thì S lớn nhất $\Leftrightarrow S_{AOC} + S_{BOD}$ lớn nhất

Gọi I là trung điểm của CD

Kẻ II', CC', DD' vuông góc với AB

Ta có: $S_{AOC} + S_{BOD} = R.\dfrac{CC' + DD'}{2} = R.II'(2)$

Ta lại có $II' \le IO = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}(3)$

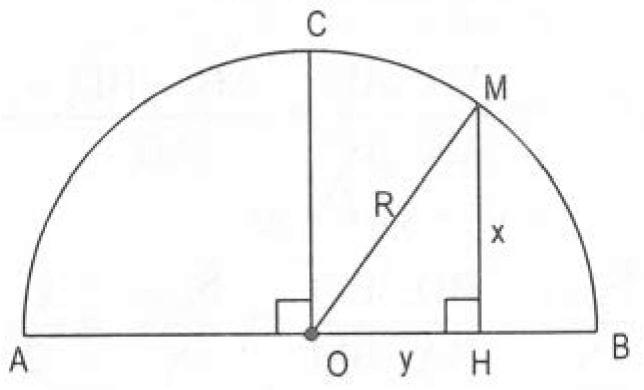
Từ (1), (2) và (3) suy ra $S < \dfrac{R^2\sqrt{3}}{2} + R.\dfrac{R\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}$

Vậy GTLN của S là $\dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow I'$ trùng O $\Leftrightarrow \widehat{AOC} = \widehat{BOD} = 60°$

Bài 57. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB = 2R. bán kính OC vuông góc với AB, điểm M chuyển động trên cung CB. Gọi H là hình chiếu của M trên OB. Tìm vị trí của điểm M để tam giác MOH có:

a) Chu vi lớn nhất b) Diện tích lớn nhất

HƯỚNG DẪN GIẢI



Đặt $MH = x,\ OH = y$

a) Chu vi ΔMOH bằng $R + x + y$. Ta có $(x+y)^2 \le 2(x^2+y^2) = 2R^2$

Chu vi ΔMOH lớn nhất bằng $R + R\sqrt{2}$

$x = y \Leftrightarrow \widehat{BOM} = 45°$

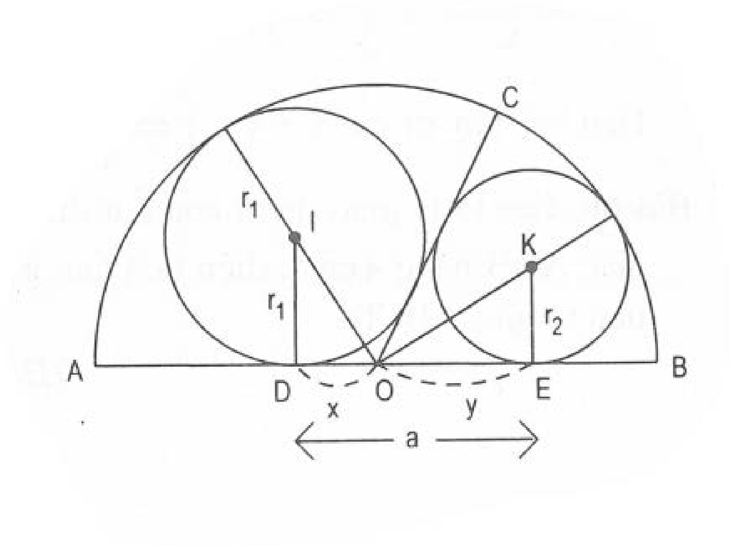
b) $2S_{MOH} = MH.OH = xy \le \dfrac{x^2+y^2}{2} = \dfrac{R^2}{2}$

Vậy GTLN của S là $\dfrac{R^2}{2} \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow \widehat{BOM} = 45°$

Bài 58. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB = 2. Điểm C di chuyển trên nửa đường tròn.

Gọi (I) là đường tròn tiếp xúc vời các bán kính OA, OC và cung AC. Gọi (K) là đường tròn tiếp xúc với các bán kính OB, OC và cung BC. Gọi tiếp điểm của các đường tròn (I), (K) trên AB theo thứ tự là D, E. Tìm giá trị nhỏ nhất của DE.

HƯỚNG DẪN GIẢI



Đặt $ID = r_1, KE = r_2, OD = x, OE = y$

Ta có: $OD^2 = OI^2 - ID^2$

$\Rightarrow x^2 = (1-r_1)^2 - r_1^2 = 1 - 2r_1$

$\Rightarrow 1 - x^2 = 2r_1\,(1)$:tương tự $1 - y^2 = 2r_2\,(2)$

$\Delta ODI \backsim \Delta KEO\,(g.g)$

$$\Rightarrow \frac{OD}{KE} = \frac{DI}{EO} \Rightarrow \frac{x}{r_2} = \frac{r_1}{y} \Rightarrow xy = r_1r_2\,(3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $(1-x^2)(1-y^2) = 4xy$

$\Rightarrow 1 - x^2 - y^2 + x^2y^2 = 4xy \Rightarrow 1 - 2xy + x^2y^2 = x^2 + y^2 + 2xy \Rightarrow (1-xy)^2 = (x+y)^2$

Do $xy < 1$ nên $1 - xy = x + y$

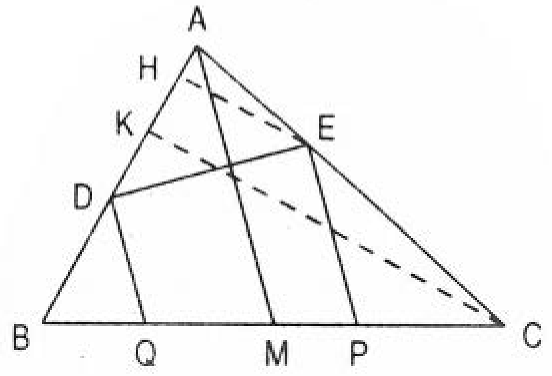
Đặt $x + y = a$ thì $1 - xy = a \Rightarrow 1 - a = xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{a^2}{4}$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{4} + a \geq 1 \Rightarrow \left(\frac{a}{2} + 1\right)^2 \geq 2 \Rightarrow \frac{a}{2} + 1 \geq \sqrt{2} \Rightarrow a \geq 2\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

Vậy GTLN của a là $2\left(\sqrt{2}-1\right) \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow$ C là điểm chính giữa của nửa đường tròn.

Bài 59. Cho tam giác ABC có diện tích S và đường trung tuyến AM, D là điểm trên AB, E là điểm trên AC, từ D và E kẻ các đường thẳng song song với AM cắt BC lần lượt tại Q và P. Chứng minh rằng $S_{DEPQ} \leq S$

HƯỚNG DẪN GIẢI



Đặt $\frac{BD}{BA} = x; \frac{CE}{CA} = y \Rightarrow 0 < x; y < 1$

$$\frac{S_{ADE}}{S} = \frac{\frac{1}{2}AD.AE.\sin A}{\frac{1}{2}AB.AC.\sin A}$$

$$= \frac{AD}{AB}.\frac{AE}{AC} = \frac{AB - BD}{AB}.\frac{AC - CE}{AC}$$

$$= (1-x)(1-y)$$

$\frac{S_{BDQ}}{S} = \frac{BD}{BA}.\frac{BQ}{BM} \Rightarrow \frac{S_{BDQ}}{S} = \frac{x^2}{2}$. Tương tự $\frac{S_{CEP}}{S} = \frac{y^2}{2}$

Từ đó ta có: $\frac{S_{ADE} + S_{BDQ} + S_{CEP}}{S} = (1-x)(1-y) + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$

$$= \frac{2(1-x)(1-y) + x^2 + y^2}{2} = \frac{(x+y-1)^2}{2} \geq \frac{1}{2}$$

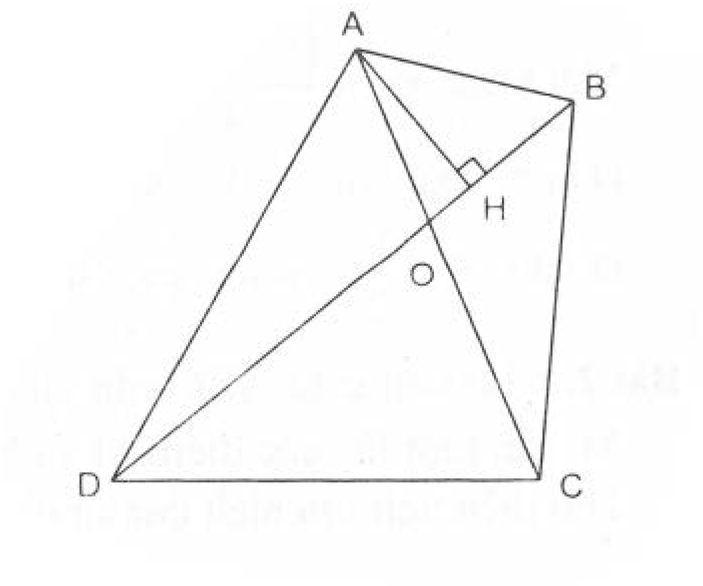
$$\Rightarrow \frac{S - S_{DEPQ}}{S} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow S_{DEPQ} \leq \frac{1}{2}S$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x + y + 1 \Leftrightarrow \frac{BD}{BA} + \frac{CE}{CA} = 1 \Leftrightarrow \frac{DQ}{AM} + \frac{EP}{AM} = 1 \Leftrightarrow DQ + EP = AM$

Bài 60. Gọi O là giao điểm của hai dường chéo của tứ giác ABCD. Cho biết diện tích tam giác AOB bằng 4cm², diện tích tam giác COD bằng 9cm². Tìm giá trị nhỏ nhất cúa diện tích tứ giác ABCD

(Đề thi chọn học sinh giỏi toán lớp 9, Tp. Hồ Chí Minh năm học 2001 - 2002)

HƯỚNG DẪN GIẢI



Vẽ $AH \perp BD$ tại H. $\dfrac{S_{AOB}}{S_{AOD}} = \dfrac{\frac{1}{2}OB.AH}{\frac{1}{2}OD.AH} = \dfrac{OB}{OD}$

Tương tự: $\dfrac{S_{BOC}}{S_{COD}} = \dfrac{OB}{OD}\dfrac{S_{AOB}}{S_{AOD}} = \dfrac{S_{BOC}}{S_{COD}}$

$\Leftrightarrow S_{AOD}S_{BOC} = S_{AOB}.S_{COD} = 4.9 = 36$

Áp dụng BĐT Cô si cho hai số dương ta có:

$S_{AOD} + S_{BOC} \geq 2\sqrt{S_{AOD}.S_{BOC}}$

Vậy: $S_{AOD} + S_{BOC} \geq 2\sqrt{36} = 12$

Do đó:

$S_{AOB} + S_{COD} + S_{AOD} + S_{BOC} \geq 4 + 9 + 12 \Leftrightarrow S_{ABCD} \geq 25$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow S_{AOD} = S_{BOC} \Leftrightarrow S_{ADC} = S_{BDC}$

$\Leftrightarrow$ A, B cách đều DC $\Leftrightarrow$ AB // DC $\Leftrightarrow$ Tứ giác ABCD là hình thang

Vậy GTLN của diện tích tứ giác ABCD là 25 cm^2

DANG 4: VẬN DỤNG TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

1. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1.1. Cho tam giác ABC vuông tại A. ta có:

$AB = BC.\sin C = BC.\cos B; AC = BC.\sin B = BC.\cos C$

$AB = AC.\tan C = AC.\cot B; AC = AB.\tan B = AB.\cot C$

1.2. Với góc nhọn α, ta có: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

1.3. Cho tam giác nhọn ABC, ta có:

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A = \frac{1}{2}BA.BC.\sin B = \frac{1}{2}CA.CB.\sin C$

1.4.Gọi α là góc nhọn tạo bởi hai dường chéo AC và BD của tứ giác ABCD. ta có:

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.BD.\sin\alpha$

1.5.Với góc nhọn α, ta có

a) $\tan\alpha + \cot\alpha \geq 2$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \alpha = 45°$

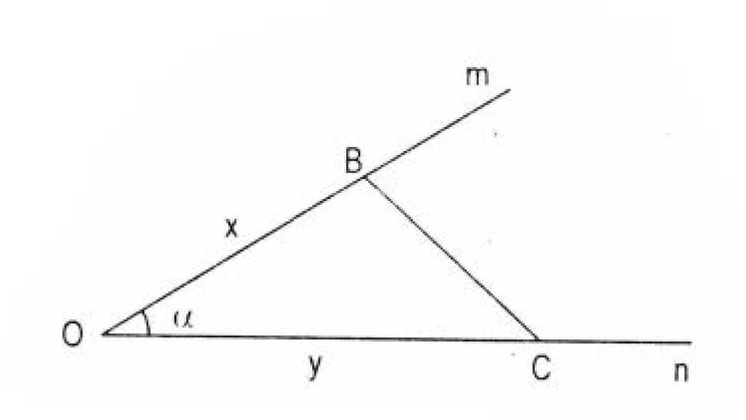
b) $\sin\alpha.\cos\alpha \leq \frac{1}{2}$.Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \alpha = 45°$

c)

2.BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Cho góc nhọn mOn. Trên hai cạnh Om và On lần lượt lấy các điểm B và C sao cho OB + OC = 2a. Tính diện tích lớn nhất của tam giác OBC.

HƯỚNG DẪN GIẢI



Đặt $\widehat{mOn} = \alpha; OB = x; OC = y$

Diện tích ΔOBC là $S = \frac{1}{2}xy.\sin\alpha$

Mặt khác $xy \le \frac{(x+y)^2}{4}$ hay $xy \le \frac{(2a)^2}{4} = a^2$

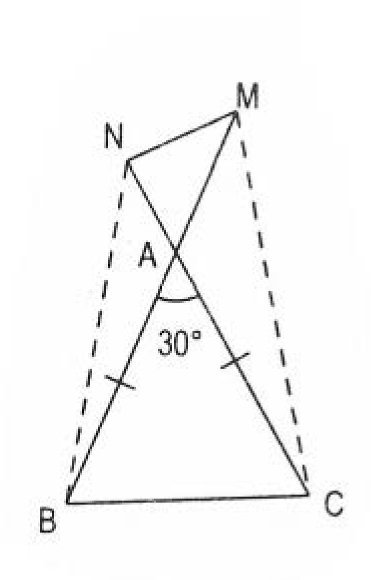
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = a$

Do đó: $S \le \frac{1}{2}a^2.\sin\alpha \Leftrightarrow OB = OC = a$

Bài 2. Cho tam giác ABC cân tại A, AB = AC = a, $\widehat{A} = 30°$. Trên tia đối của các tia AB và AC lần lượt lấy các điểm M và N sao cho AM + AN = b.

Tìm diện tích lớn nhất của tứ giác BCMN.

HƯỚNG DẪN GIẢI



Ta có: BM + CN = AB + AC + AM + AN = 2a + b

Diện tích tứ giác BCMN là:

$$S = \frac{1}{2}BM.CN.\sin 30° = \frac{1}{4}BM.CN$$

$$\le \frac{1}{4}.\frac{(BM+CN)^2}{4} = \frac{1}{16}(2a+b)^2$$

Dấu "=" xảy ra khi $BM = CN = \frac{2a+b}{2}$

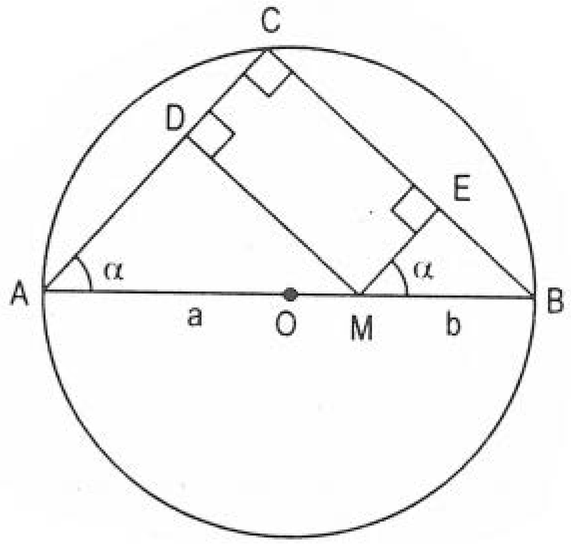
Vậy diện tích tứ giác BCMN lớn nhất là $\frac{1}{16}(2a+b)^2 \Leftrightarrow BM = CN = \frac{2a+b}{2}$

Bài 3. Cho đường tròn (O) đường kính AB cố định, điểm M cố định thuộc đường kính AB, có MA = a,

MB = b. Điểm C chuyển động trên đường tròn. Gọi D, E theo thứ tự là hình chiếu của M trên AC, BC.

Tìm vị trí của điểm C để hình chữ nhật MDCE có diện tích lớn nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI



$S_{MDCE} = MD.ME$ đặt $\widehat{MAD} = \widehat{BME} = \alpha$ ta có

$MD = MA.\sin\alpha = a.\sin\alpha$

$ME = MB.\cos\alpha = b.\cos\alpha$

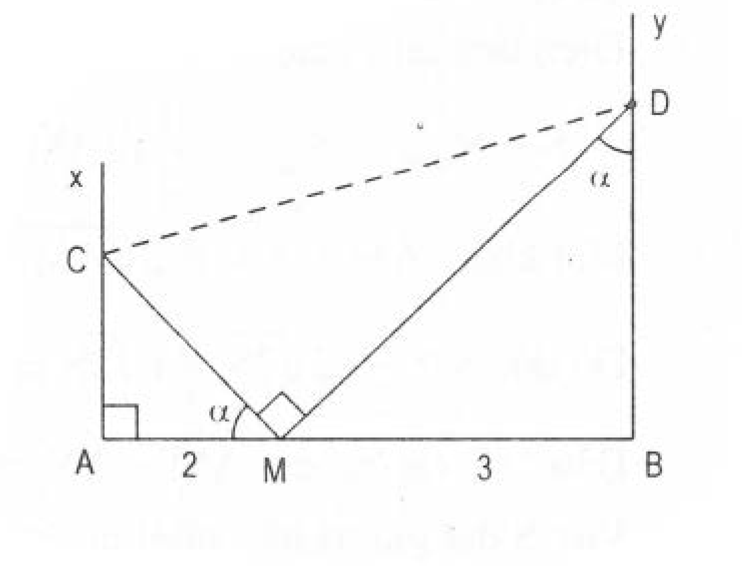
$S_{MDCE} = ab.\sin\alpha.\cos\alpha \le \frac{ab}{2}\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) = \frac{ab}{2}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sin\alpha = \cos\alpha \Leftrightarrow \alpha = 45°$

$\Leftrightarrow$ C là điểm chính giữa của cung AB

Bài 4. Cho đoạn thẳng AB = 5cm. Lấy điểm M nằm giữa A và B sao cho AM = 2cm. Trên một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ các tia Ax, By cùng vuông góc với AB. Một góc vuông đỉnh M quay quanh M cắt các tia Ax, By lần lượt tại C và D. Tính diện tích nhỏ nhất của tam giác MCD.

HƯỚNG DẪN GIẢI



✓ **Cách 1:**

Đặt $\widehat{AMC} = \alpha$ thì $\widehat{BDM} = \alpha$

* Xét ΔAMC vuông tại A có: $MC = \dfrac{AM}{\cos\alpha} = \dfrac{2}{\cos\alpha}$

* Xét ΔBMD vuông tại B có: $MD = \dfrac{BM}{\sin\alpha} = \dfrac{3}{\sin\alpha}$

Diện tích tam giác MCD là:

$$S = \frac{1}{2}MC.MD = \frac{1}{2}.\frac{2}{\cos\alpha}.\frac{3}{\sin\alpha} = \frac{3}{\cos\alpha.\sin\alpha}(1)$$

Áp dụng BĐT $xy \le \dfrac{x^2+y^2}{2}$ ta có: $\sin\alpha.\cos\alpha \le \dfrac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}(2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $S \ge 3 : \dfrac{1}{2} = 6$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sin\alpha = \cos\alpha \Leftrightarrow \alpha = 45° \Leftrightarrow AC = AM = 2$

✓ **Cách 2**

Đặt AC = x, BD = y.

Ta có: $S = \dfrac{1}{2}MC.MD = \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+4}.\sqrt{y^2+9} \ge \dfrac{1}{2}\sqrt{4x.6y} = \sqrt{6xy}$

Mà: $\dfrac{x}{2} = \dfrac{3}{y}(= \tan\alpha) \Rightarrow xy = 6$. Vậy: $S \ge 6$: không đổi

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = 2; y = 3$

✓ **Cách 3:**

Đặt AC = x, BD = y. Ta có: $MC^2.MD^2 = \left(x^2 + 2^2\right)\left(y^2 + 3^2\right) \ge \left(xy + 2.3\right)^2$

Mà: $\frac{x}{2} = \frac{3}{y}\left(= \tan\alpha\right) \Rightarrow xy = 6$

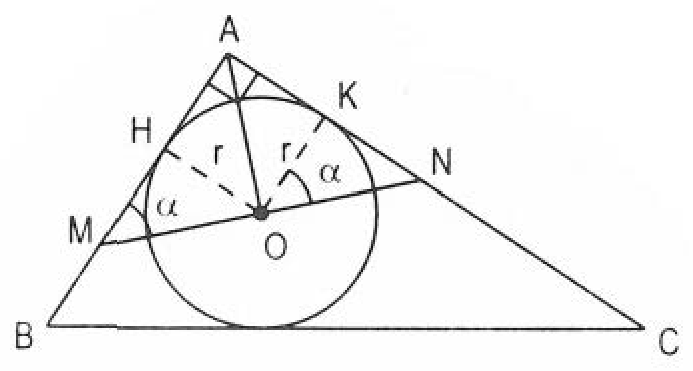
Do đó: $MC^2.MD^2 \ge 144 \Rightarrow \frac{1}{2}MC.MD \ge 6$

Vậy $S \ge 6$ không đổi . Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = 2; y = 3$

Vậy diện tích nhỏ nhất của tam giác MCD là 6 $\Leftrightarrow x = 2; y = 3$

Bài 5. Cho trước tam giác ABC vuông tại A. Đường tròn (O) nội tiếp có bán kính r. Vẽ đường thẳng d đi qua O cắt hai cạnh AB và AC lần lượt tại M và N. Xác định vị trí của đường thẳng d để tam giác AMN có diện tích nhỏ nhất. Tính diện tích nhỏ nhất đó.

HƯỚNG DẪN GIẢI



✓ **Cách 1:**

Gọi các tiếp điểm của đường tròn (O) trên các cạnh AB, AC lần lượt là H và K.

Ta có: $OH \perp AB, OK \perp AC$

Diện tích tam giác AMN là

$$S = S_{AOM} + S_{AON} = \frac{1}{2}r.\left(AM + AN\right)$$

Mặt khác: $AM + AN \ge 2\sqrt{AM.AN} = 2\sqrt{2S}$

Do đó: $S \ge \frac{1}{2}r.2\sqrt{2S} = r\sqrt{2S} \Rightarrow S \ge 2r^2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow AM = AN \Leftrightarrow \Delta AMN$ vuông cân tại A $\Leftrightarrow d \perp OA$

Vậy S đạt giá trị nhỏ nhất là $2r^2$ khi $d \perp OA$

✓ **Cách 2:**

Đặt $\widehat{HMO} = \alpha \Rightarrow \widehat{KON} = \alpha$

Ta có: $S_{HMO} + S_{KON} = \frac{1}{2}OH.MH + \frac{1}{2}OK.KN$

$= \frac{1}{2}r.OH.\cot\alpha + \frac{1}{2}r.OK\tan\alpha = \frac{1}{2}r^2(\cot\alpha + \tan\alpha)$

$S_{HMO} + S_{KON} = \frac{1}{2}r^2(cot\alpha + \tan\alpha) \ge \frac{1}{2}r^2.2 = r^2$

Dấu "=" xảy ra khi $\alpha = 45°$

Do đó: $S_{AMN} = S_{HMO} + S_{KON} + S_{AHOK} \ge r^2 + r^2 = 2r^2$:không đổi

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \cot\alpha = \tan\alpha \Leftrightarrow \alpha = 45° \Leftrightarrow AM = AN$

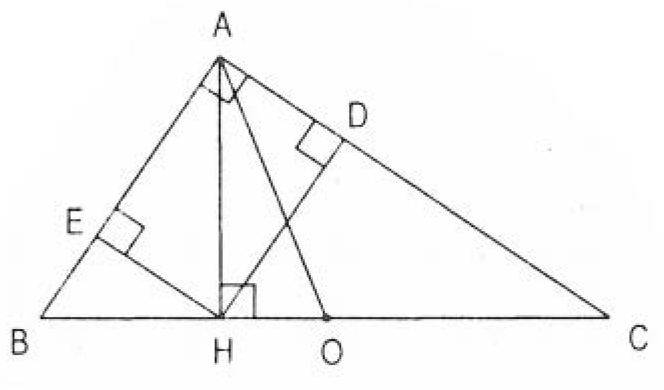
$\Leftrightarrow \Delta AMN$ vuông cân tại A $\Leftrightarrow d \perp OA$

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A, BC = 2a, đường cao AH. Kẻ $HD \perp AC, HE \perp AB$ .Tìm giá trị lớn nhất của:

a) Độ dài đoạn thẳng DE

b) Diện tích tứ giác ADHE.

HƯỚNG DẪN GIẢI



a) **Cách 1:**

Độ dài đoạn thẳng DE

Gọi O là trung điểm của BC $\Rightarrow$ O cố định

Ta chứng minh được AEHD là hình chữ nhật (vì có 3 góc vuông)

Ta có: $DE = AH \le AO = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}2a = a$ không đổi

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow AH = AO \Leftrightarrow H \equiv O \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại A

Cách 2:

Ta có: $DE^2 = AH^2 = HB.HC \le \frac{(HB+HC)^2}{4} = \frac{BC^2}{4} = \frac{(2a)^2}{4} = a^2$

Do đó: $DE \le \sqrt{a^2} = a$ không đổi

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow HB = HC \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại A.

b) Diện tích tứ giác ADHE.

- ✓ **Cách 1:**

$S_{AEHD} = AE.AD$

Ta có: $AH^2 = AE.AB \Rightarrow AE = \frac{AH^2}{AB}$ .Tương tự $AD = \frac{AH^2}{AC}$

Do đó: $S_{AEHD} = \frac{AH^4}{AB.AC} = \frac{AH^4}{AH.BC} = \frac{AH^3}{BC} \le \frac{OA^3}{BC} = \frac{a^3}{2a} = \frac{a^2}{2}$

Vậy: $S_{AEHD} = \frac{a^2}{2}$ lớn nhất $\Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại A

- ✓ **Cách 2:**

$S_{AEHD} = 2S_{AEH}$ .Do đó: S_{AEHD} lớn nhất $\Leftrightarrow S_{AEH}$ lớn nhất

Ta có: $\Delta AHE \backsim \Delta CBA(g.g)$

$$\Rightarrow \frac{S_{AHE}}{S_{CBA}} = \left(\frac{AH}{BC}\right)^2 \le \frac{AO^2}{BC^2} = \frac{BC^2}{4BC^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{AHE} \le \frac{1}{4}S_{CBA}$$

$$\Rightarrow S_{AEHD} \le \frac{1}{2}S_{CBA} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}AB.AC \le \frac{1}{4}.\frac{AB^2 + AC^2}{2}$$

$= \frac{1}{4}.\frac{BC^2}{2} = \frac{1}{4}.\frac{4a^2}{2} = \frac{a^2}{2}$: không đổi

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow AH = AO \Leftrightarrow H \equiv O \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại A

- ✓ **Cách 3:**

Đặt BH =x, CH = y; BH + CH = x + y = BC = 2a

Gọi $S_1;S_2;S$ lần lượt là diện tích $\Delta EBH, \Delta DHC, \Delta ABC$

Ta có: $\Delta EBH \backsim \Delta ABC$ và $\Delta DHC \backsim \Delta ABC$ nên

$$\frac{S_1}{S}+\frac{S_2}{S}=\left(\frac{x}{BC}\right)^2+\left(\frac{y}{BC}\right)^2=\frac{x^2+y^2}{BC^2}\ge\frac{(x+y)^2}{2.BC^2}=\frac{BC^2}{2.BC^2}=\frac{1}{2}$$

$$S_1+S_2\ge\frac{1}{2}S\Rightarrow S-(S_1+S_2)\le S-\frac{1}{2}S$$

$$\Rightarrow S_{AEHD}\le\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}.AB.AC\le\frac{a^2}{2}$$:không đổi

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow AB=AC$ và $x=y\Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại A

- ✓ **Cách 4:**

Đặt BH = x, CH = y; BH + CH = x + y = BC = 2a

Ta có: $S_{AEHD}=HE.HD=x.\sin B.y\sin C=xy.\sin B.\sin C=xy.\sin B.\cos B$

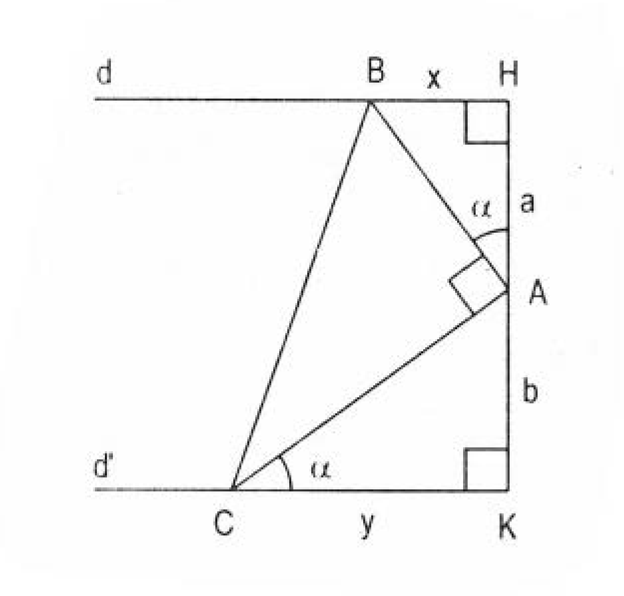
Mà: $xy\le\frac{(x+y)^2}{4}=\frac{4a^2}{4}=a^2\sin B.\cos B\le\frac{\sin^2 B+\cos^2 B}{2}=\frac{1}{2}$

Do đó: $S_{AEHD}\le\frac{a^2}{2}$:không đổi. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sin B=\cos B$ và $x=y$

$\Leftrightarrow HB=HC$ và $\widehat{B}=45°\Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại A

Bài 7. Cho điểm A năm bên trong dải tạo bởi hai đường thẳng song song d và d'. Dựng điểm B thuộc d, điểm C thuộc d' sao cho tam giác ABC vuông tại A và có diện tích nhỏ nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI



✓ **Cách 1:**

Gọi H, K là hình chiếu của A trên d, d'

Đặt HB = x, KC = y.

Cần tìm x,y để S_{ABC} nhỏ nhất

Ta có: $2.S_{ABC} = AB.AC$

$AB.AC$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow AB^2.AC^2$ nhỏ nhất

Ta có: $AB^2.AC^2 = \left(a^2 + x^2\right)\left(b^2 + y^2\right)(1)$

Lại có $\left(a^2 + x^2\right)\left(b^2 + y^2\right) \geq (ax + by)^2\ (2)$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow ay = bx(3)$

$\Delta ABH \backsim \Delta CAK\,(g.g)$

$$\Rightarrow \frac{AH}{CK} = \frac{BH}{AK} \Rightarrow \frac{a}{y} = \frac{x}{b} \Leftrightarrow ab = xy(4)$$

Từ (1), (2), (3) và (4) suy ra $AB^2.AC^2 \geq 4a^2b^2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ xảy ra (3) , (4) tức là $x = a, y = b$

✓ **Cách 2:**

$AB^2.AC^2 = \left(a^2 + x^2\right)\left(b^2 + y^2\right) \geq 2ax.2by(5)$

$$\Delta ABH \backsim \Delta CAK\,(g.g)\frac{AH}{CK} = \frac{BH}{AK} \Rightarrow \frac{a}{y} = \frac{x}{b} \Leftrightarrow ab = xy(6)$$

Từ (5 và (6 suy ra: $AB^2.AC^2 = \left(a^2+x^2\right)\left(b^2+y^2\right) \geq 2ax.2by = 4a^2b^2$

Do đó: $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2.AC^2} \geq \frac{1}{2}\sqrt{4a^2b^2} = ab$ không đổi

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = a, y = b$

✓ **Cách 3:**

Đặt $\widehat{HAB} = \widehat{ACK} = \alpha$. Ta có: $AB = \frac{a}{\cos\alpha}; AC = \frac{b}{\sin\alpha}$ nên

$S_{ABC} = \frac{1}{2}.\frac{a}{\cos\alpha}.\frac{b}{\sin\alpha} = \frac{ab}{2\sin\alpha.\cos\alpha}(7)$

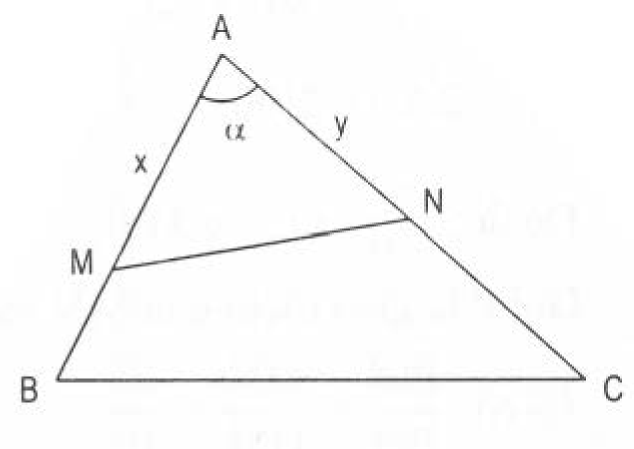
Ta có: $2\sin\alpha.\cos\alpha \leq \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sin\alpha.\cos\alpha} \geq 1(8)$

Từ (7) và (8) suy ra $S_{ABC} \geq ab$:không đổi

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sin\alpha = \cos\alpha \Leftrightarrow \alpha = 45°$

Bài 8. Tam giác ABC có diện tích S, góc A là góc nhỏ nhất của tam giác. Trên hai cạnh AB và AC lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho tam giác AMN có diện tích $S_1 = \frac{1}{2}S$. Tính độ dài nhỏ nhất của MN.

HƯỚNG DẪN GIẢI



Góc A là góc nhỏ nhất của ΔABC nên A là góc nhọn.

Đặt $\widehat{A} = \alpha, AM = x, AN = y$ thì diện tích ΔAMN là $S_1 = \frac{1}{2}xy.\sin\alpha$

Vì $S_1 = \frac{1}{2}S$ có giá trị không đổi, α không đổi nên tích xy không đổi.

Ta có: $MN^2 = x^2 + y^2 - 2xy.\cos\alpha$

Mặt khác $x^2 + y^2 \geq 2xy$ (Dấu "=" xảy ra khi x = y)

Do đó $MN^2 \geq 2xy - 2xy.\cos\alpha = 2xy(1-\cos\alpha)$

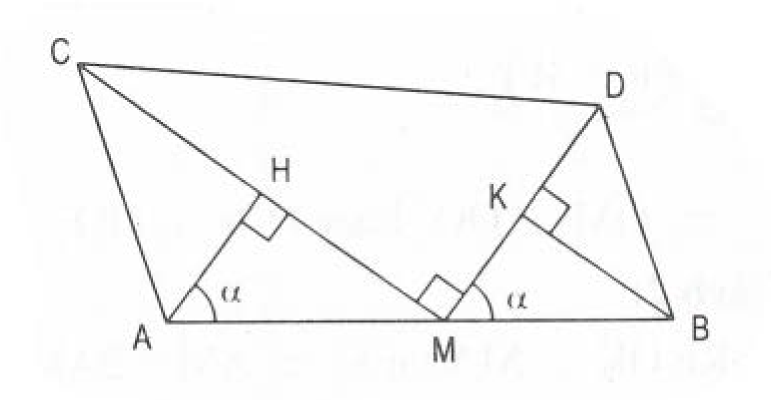
hay $MN^2 \geq \frac{2xy\sin\alpha(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{4S_1(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha}$

Nên $MN^2 \geq \frac{2S(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha}$:không đổi

Vậy giá trị nhỏ nhất của MN là $\sqrt{\frac{2S(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha}} \Leftrightarrow AM = AN$

Bài 9. Cho điểm M nằm trên đoạn thẳng AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ tam giác AMC cân tại A, tam giác BMD cân tại B sao cho $MC \perp MD$. Cho biết MA = a, MB = b, tính diện tích lớn nhất của tam giác MCD.

HƯỚNG DẪN GIẢI



Vẽ $AH \perp MC$ tại H, $BK \perp MD$ tại K ta được:

$MH = \frac{1}{2}MC; MK = \frac{1}{2}MD$

Đặt $\widehat{MAH} = \alpha \Rightarrow \widehat{BMK} = \alpha$

Ta có: $MH = a.\sin\alpha; MK = b.\cos\alpha$

Diện tích tam giác MCD là:

$S = \frac{1}{2}MC.MD = \frac{1}{2}.2MH.2MK = 2 \Leftrightarrow ab\sin\alpha.\cos\alpha \leq 2ab.\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{2} = ab$

$S \le ab$ không đổi. Dấu "=' xảy ra $\Leftrightarrow \sin\alpha = \cos\alpha \Leftrightarrow \alpha = 45°$

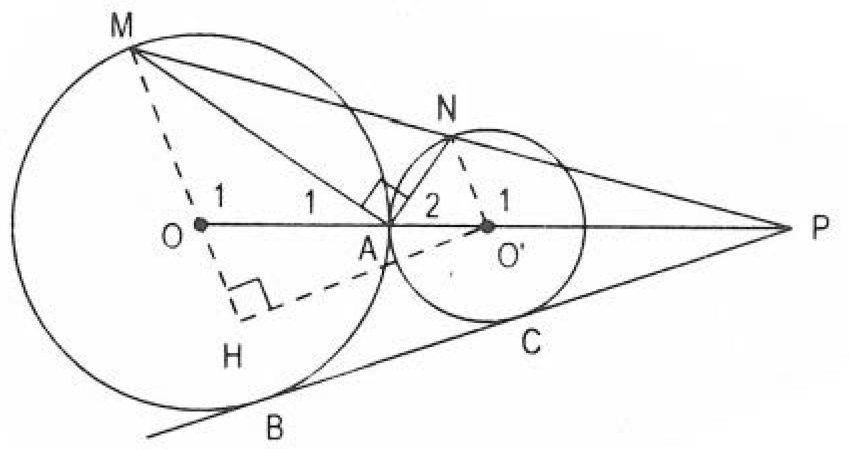
Vậy tam giác MCD có giá trị có giá trị lớn nhất là a.b $\Leftrightarrow \widehat{MAH} = \widehat{BMD} = 45°$

Bài 10. Cho hai đường tròn (O; R) và $(O; R')$ tiếp xúc ngoài tại A $(R > R')$. Vẽ dây AM của đường tròn (O) và dây AN của đường tròn (O') sao cho $AM \perp AN$. Gọi BC là một tiếp tuyến chung ngoài của hai dường tròn (O) và (O') với $B \in (O), C \in (O')$.

a) Chứng minh rằng ba đường thẳng MN, BC,và OO' đồng quy.

b) Xác định vị trí của điểm M và N để tứ giác $MNO'O$ có diện tích lớn nhất .Tính diện tích lớn nhất đó..

HƯỚNG DẪN GIẢI



a) **Cách 1:**

Ta có: $\widehat{O_1} = 180° - 2\widehat{A_1}$

$\widehat{O'_1} = 2\widehat{A_2} = 2\left(90° - \widehat{A_1}\right) = 180° - 2\widehat{A_1}$

Do đó: $\widehat{O_1} = \widehat{O'_1} \Rightarrow OM // O'N$

Gọi P là giao điểm của MN và OO'

Ta có: $\dfrac{PO'}{PO} = \dfrac{O'N}{OM} = \dfrac{R'}{R}$

Gọi P' là giao điểm của BC và OO'

Vì $OB // O'C$ nên $\dfrac{P'O'}{P'O} = \dfrac{O'C}{OB} = \dfrac{R'}{R}$

Suy ra P' trùng với P (vì cùng chỉ ngoài đoạn thẳng OO' theo tỉ số $\frac{R'}{R}$)

b) Tứ giác $MNO'O$ là hình thang, có diện tích

$S = \frac{(OM + O'N).O'H}{2}$ (H là hình chiếu của O' trên OM)

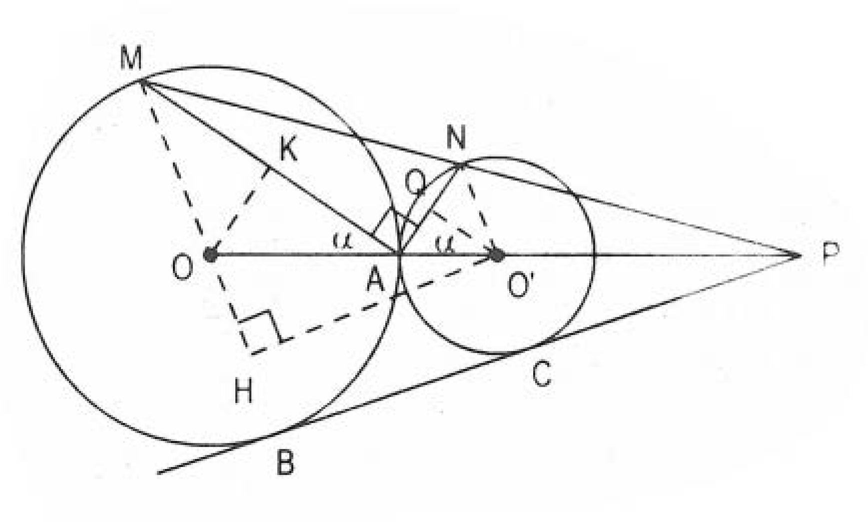
$$S = \frac{R+R'}{2}.O'H \le \frac{R+R'}{2}.OO' = \frac{(R+R')^2}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $H \equiv O \Leftrightarrow OM \perp OO'$ hoặc $O'N \perp OO'$

Vậy tứ giác $MNO'O$ có diên tích lớn nhất là $\frac{(R+R')^2}{2}$

$\Leftrightarrow OM \perp OO'$ hoặc $O'N \perp OO'$

Cách 2:



Kẻ $OK \perp MA$ tại K $\Rightarrow AM = 2AK$

Kẻ $O'I \perp NA$ tại Q $\Rightarrow AN = 2AQ$

Đặt $\widehat{KAO} = \alpha \Rightarrow \widehat{QO'A} = \alpha$

Ta có:

$$S = S_{AMN} + S_{OAM} + S_{O'AN} = \frac{1}{2}AM.AN + \frac{1}{2}OK.AM + \frac{1}{2}O'Q.AN$$

$$= \frac{1}{2}2AK.2AQ + \frac{1}{2}OK.2AK + \frac{1}{2}O'Q.2AQ = 2AK.AQ + OK.AK + O'Q.AQ$$

$$= 2.R.\cos\alpha.R'.\sin\alpha + R.\sin\alpha.R.\cos\alpha + R'.\cos\alpha.R'.\sin\alpha$$

$=\left(R^2+2R.R'+R'^2\right).\sin\alpha.\cos\alpha\le\dfrac{\left(R+R'\right)^2}{2}$: không đổi (vì $\sin\alpha.\cos\alpha\le\dfrac{1}{2}$)

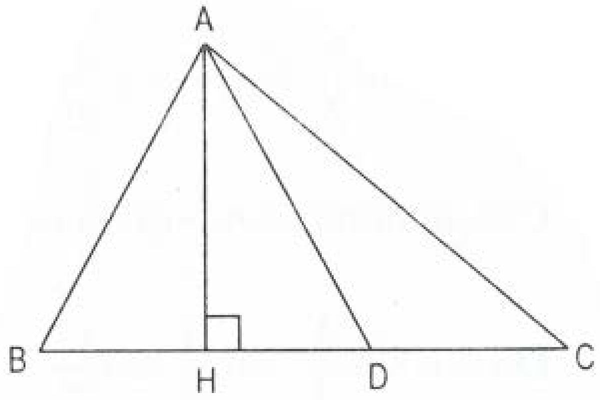
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\alpha=45°\Leftrightarrow OM\perp OO'$ hoặc $O'N\perp OO'$

Vậy tứ giác $MNO'O$ có diện tích lớn nhất là $\dfrac{\left(R+R'\right)^2}{2}$

$\Leftrightarrow OM\perp OO'$ hoặc $O'N\perp OO'$

Bài 11. Cho tam giác nhọn ABC, D là điểm thuộc BC. Cho biết AD = BC, chứng minh rằng: $\sin A\ge\sin B.\sin C$

HƯỚNG DẪN GIẢI



Vẽ $AH\perp BC$ tại H. Đặt BC = a, CA = b, AB = c, AH = h

Gọi S là diện tích của ΔABC

Xét các tam giác ΔABH và ΔACH vuông tại H, ta có:

$h=AH=c.\sin B=b.\sin C\Rightarrow h^2=bc.\sin B.\sin C$

Ta có: $AD\ge AH$ (Dấu "=" xảy ra khi $D\equiv H$)

Suy ra: $a\ge h\Leftrightarrow ah\ge h^2=b.c.\sin B.\sin C.(1)$

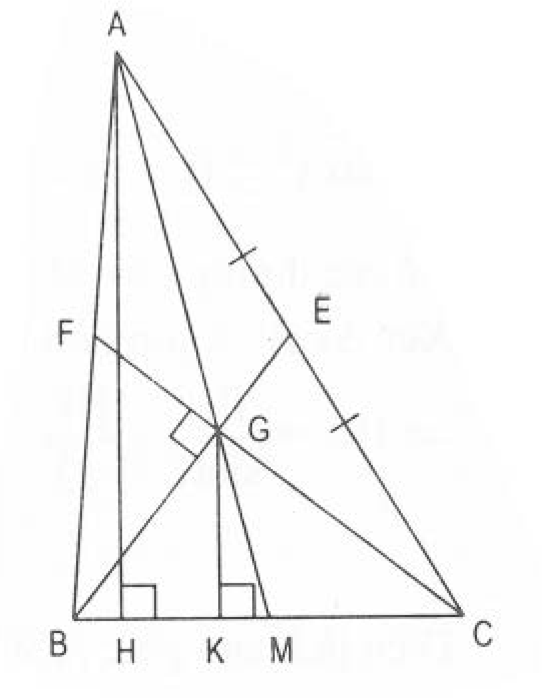
Mặt khác: $a.h=2S=2.\dfrac{1}{2}b.c.\sin A=b.c.\sin A(2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $b.c.\sin A\ge b.c.\sin B.\sin C$ hay $\sin A\ge\sin B.\sin C$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow D\equiv H$

Bài 12. Cho tam giác ABC, hai đường trung tuyến BE, CF vuông góc với nhau. Chứng minh rằng $\cot B+\cot C\ge\dfrac{2}{3}$

HƯỚNG DẪN GIẢI



✓ **Cách 1:**

Gọi G là giao điểm của BE và CF. Tia AG cắt BC tai M

Vẽ $AH \perp BC; GK \perp BC$

Xét ΔAMH có GK // AH, AM = 3GM nên AH = 3GK

Ta có : $\cot B + \cot C = \dfrac{BH}{AH} + \dfrac{CH}{AH} = \dfrac{BC}{AH} = \dfrac{BC}{3GK} = \dfrac{2GM}{3GK}$

Mặt khác $GM \geq GK$ nên $\cot B + \cot C \geq \dfrac{2GK}{3GK} = \dfrac{2}{3}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ cân

✓ **Cách 2:**

$$\cot B + \cot C = \frac{BH}{AH} + \frac{CH}{AH} = \frac{BC}{AH} \geq \frac{BC}{3AM} = \frac{2GM}{3GM} = \frac{2}{3}$$

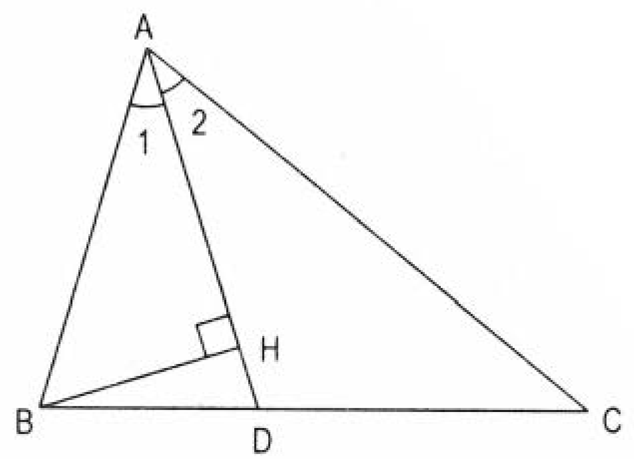
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ cân

Bài 13. Cho tam giác ABC, BC = a, CA = b, AB = c. Chứng minh rằng:

a) $\sin\dfrac{A}{2} \leq \dfrac{a}{b+c}$

b) $\sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2} \leq \dfrac{1}{8}$

HƯỚNG DẪN GIẢI



a) Vẽ đường phân giác AD và vẽ $BH \perp AD$

Ta có: $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$

$\Rightarrow \frac{DB}{AB} = \frac{DC}{AC} = \frac{DB + DC}{AB + AC} = \frac{a}{b + c}$

Xét ΔABH vuông tại H, có

$s\text{in}\frac{A}{2} = \frac{BH}{AB} \le \frac{BD}{AB} = \frac{a}{b + c}$

b) Ta có: $\sin\frac{A}{2} \le \frac{a}{b + c} \le \frac{a}{2\sqrt{bc}}$ (BĐT Cô si)

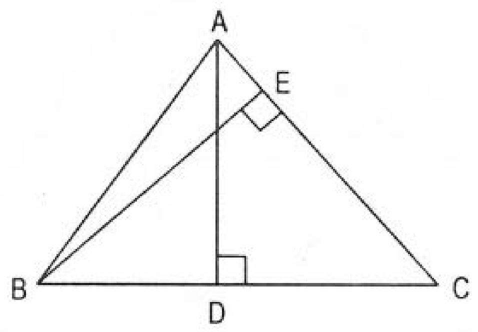
Chứng minh tương tự, ta có: $\sin\frac{B}{2} \le \frac{b}{b + c} \le \frac{b}{2\sqrt{ac}}; \sin\frac{C}{2} \le \frac{c}{a + b} \le \frac{c}{2\sqrt{ab}}$

Do đó: $\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} \le \frac{a}{2\sqrt{bc}}.\frac{b}{2\sqrt{ac}}.\frac{c}{2\sqrt{ab}} = \frac{1}{8}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều

Bài 14. Tam giác ABC có diện tích S, các đường cao không nhỏ hơn 1cm. Chứng minh rằng: $S \ge \frac{\sqrt{3}}{3}$

HƯỚNG DẪN GIẢI



Giả sử $\widehat{C} \le \widehat{B} \le \widehat{A} \Rightarrow \widehat{C} = 60° \Rightarrow \sin C \le \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Vẽ các đường cao AD và BE

Xét ΔEBC vuông tại E, có BE= BC. sinC

$\Rightarrow BC = \dfrac{BE}{\sin C} \ge \dfrac{BE}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2BE}{\sqrt{3}} \ge \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ (vì $BE \ge 1$)

Diện tích tam giác ABC là: $S = \dfrac{1}{2}BC.AD \ge \dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{\sqrt{3}}.1 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

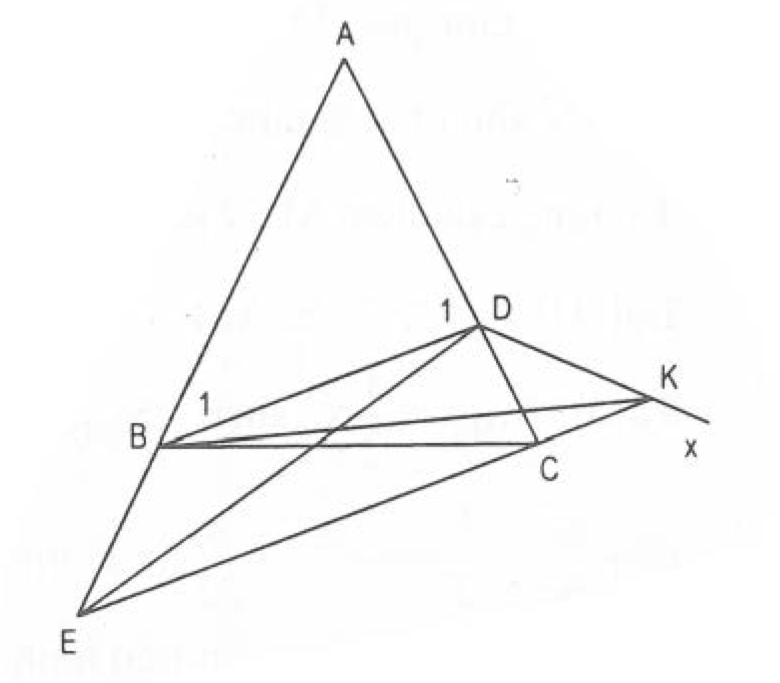
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

Bài 15.

a) Chứng minh rằng trong các tam giác ABC có diện tích S và có số đo góc A không đổi, tam giác có cạnh BC nhỏ nhất là tam giác cân tại A.

b) Cho tam giác ABC. Dựng điểm M thuộc tia AB, điểm N thuộc tia AC sao cho $S_{AMN} = \dfrac{1}{2}S_{ABC}$ và MN có độ dài nhỏ nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI



a) Gọi ABC là tam giác cân tại A.

* Xét ΔADE bất kì có góc DAE trung với góc BAC và $S_{ADE} = S_{ABC}$

Giả sử D thuộc cạnh AC thì E phải thuộc tia đối của tia BA.

Ta sẽ chứng minh rằng BC < DE.

Thật vậy, do $S_{ADE} = S_{ABC}$ nên trừ đi suy ra CE // BD.

Kẻ thêm điểm K sao cho EBDK là hình thang cân đáy BD.

(Cách vẽ: trên nửa mặt phẳng chứa E có bờ BD vẽ tia Dx sao cho $\widehat{BDx} = \widehat{DBE}$,Dx cắt EC tại K)

Do đó: BK = DE (1)

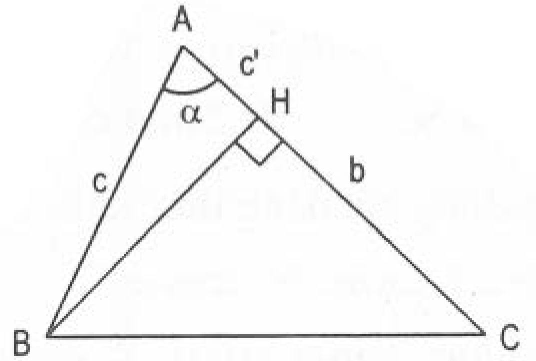
Ta có: AB > AD nên $\widehat{D_1} > \widehat{B_1}$, suy ra $\widehat{BDC} < \widehat{DBE}$, do đó $\widehat{BDC} < \widehat{BDK}$ vì thế C nằm giữa E và K.

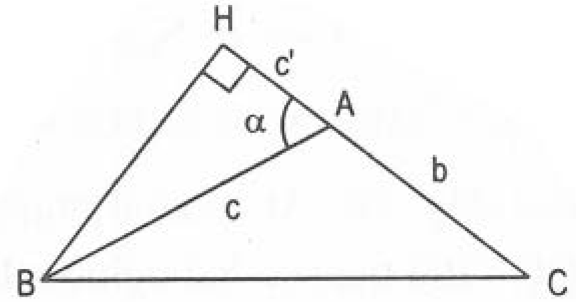
Ta có: $\widehat{BCK} > \widehat{CBE} > 90°$ nên BK > BC (2)

Từ (1) và (2) suy ra BC < DE

❖ **Lưu ý: Cách giải khác**

Xét tam giác ABC có diện tích S và có số đo góc A không đổi. Đặt AC = b, AB = c. Gọi c' là hình chiếu của cạnh AB trên cạnh AC. Xét ba trường hợp:





- Trường hợp $\widehat{A} = a < 90^\circ$

Ta có:

$BC^2 = b^2 + c^2 - 2bc' = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\alpha$

$= (b-c)^2 + 2bc.(1-\cos\alpha)$

Do $1-\cos\alpha$ không đổi (vì $bc = \dfrac{2S}{\sin\alpha}$)

nên BC nhỏ nhất $\Leftrightarrow b = c$

- Trường hợp $\widehat{A} > 90^\circ$. Đặt $\alpha = 180^\circ - \widehat{A}$

Ta có: $BC^2 = b^2 + c^2 + 2bc'$

$= b^2 + c^2 + 2bc.\cos\alpha = (b-c)^2 + 2bc.(1+\cos\alpha)$

Do $1+\cos\alpha$ không đổi (vì $bc = \dfrac{2S}{\sin\alpha}$)nên BC nhỏ nhất $\Leftrightarrow b = c$

- Trường hợp $\widehat{A} = 90^\circ$

Ta có: $BC^2 = b^2 + c^2 = b^2 + c^2 = (b-c)^2 + 2bc$

Do bc = 2S không đổi nên BC nhỏ nhất $\Leftrightarrow b = c$

Vậy trong các trường hợp các tam giác ABC có diện tích S và có số đo góc A không đổi, tam giác có cạnh BC nhỏ nhất là tam giác cân tại A.

b) Xét các tam giác MAN có $\widehat{MAN}$ không đổi, cùng có diện tích bằng $\dfrac{1}{2}S_{ABC}$ nên tam giác có MN nhỏ nhất là tam giác cân tại A (theo câu a)

Ta dựng các điểm M, N sao cho AM = AN và $S_{AMN} = \dfrac{1}{2}S_{ABC}$ bằng phương pháp đại số.

Đặt AB = c, AC = b, AM = AN = x.

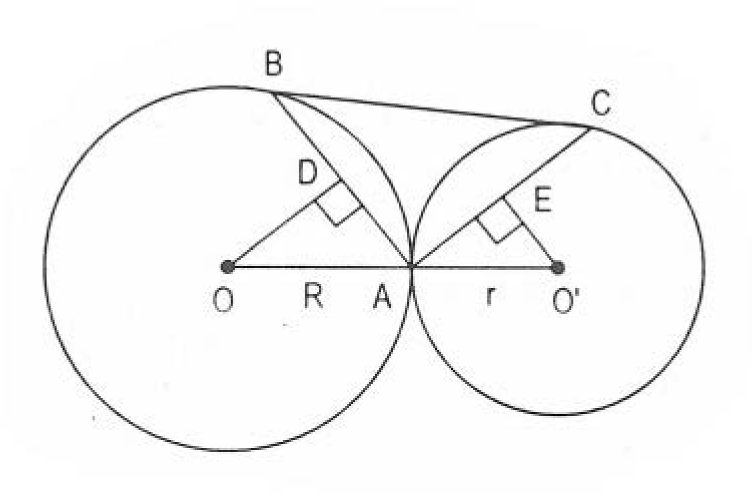
Ta có: $S_{AMN} = \frac{1}{2}x^2.\sin\alpha; S_{AMN} = \frac{1}{2}S_{ABC}$

nên $\frac{x^2}{bc} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 = b.\frac{c}{2}$; x là trung bình nhân của $\frac{c}{2}$ và b.

Cách dựng được thể hiện trên hình vẽ.

Bài 16. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Qua A dựng hai tia vuông góc với nhau sao cho chúng cắt các đường tròn (O) và (O') theo thứ tự tại B và C tạo thành tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI.



Kẻ $OD \perp AB, O'E \perp AC$. Ta có

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}.2AD.2AE = 2AD.AE$

Đặt $OA = R, O'A = r, \widehat{AOD} = \widehat{O'AE} = \alpha\left(\alpha < 90°\right)$

Ta có: $AD = R.\sin\alpha; AE = r.\cos\alpha$

Do đó: $S_{ABC} = Rr.2\sin\alpha.\cos\alpha\,(1)$

Áp dụng bất đẳng thức $2ab \le a^2 + b^2$

với $a = \sin\alpha; b = \cos\alpha$ ta được: $2\sin\alpha.\cos\alpha \le \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $S_{ABC} \le Rr$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sin\alpha = \cos\alpha \Leftrightarrow \alpha = 45°$

Các dây AB, AC phải dựng sao cho $\widehat{OAB}=\widehat{O'AC}=45°$, B và C nằm cung phía đối với OO'.
Bài toán có hai nghiệm hình.

Chương III

QUAN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC.

CÁC ĐƯỜNG ĐỒNG QUY CỦA TAM GIÁC

Chuyên đề 15. QUAN HỆ GIỮA GÓC VÀ CẠNH ĐỐI DIỆN TRONG MỘT TAM GIÁC

A. Kiến thức cần nhớ

- ***Định lí 1.*** Trong một tam giác:

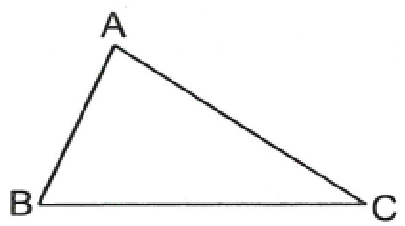
– Góc đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn.

– Đảo lại, cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.

Trong hình 15.1:

ΔABC

$AC > AB \Leftrightarrow \widehat{B} > \widehat{C}.$



Hình 15.1

Suy ra, trong một tam giác:

– Góc đối diện với cạnh nhỏ nhất là góc nhọn;

– Cạnh đối diện với góc tù (hoặc góc vuông) là cạnh lớn nhất.

- ***Định lí 2.*** Hai tam giác có hai cặp cạnh bằng nhau

– Nếu cạnh thứ ba không bằng nhau thì góc đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn.

– Đảo lại, nếu hai góc xen giữa không bằng nhau thì cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.

B. Một số ví dụ

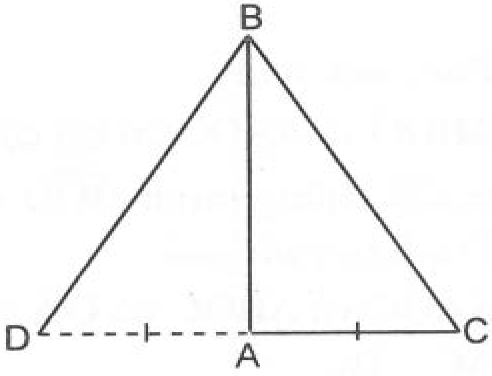
Ví dụ 1: Chứng minh rằng nếu một tam giác vuông có một góc nhọn lớn hơn 30^o thì cạnh đối diện với góc ấy lớn hơn một nửa cạnh huyền.

Giải (h.15.2)

* *Tìm cách giải.*

Giả sử tam giác ABC vuông tại A, $\widehat{ABC} > 30^o$,ta phải chứng minh $AC > \frac{1}{2}BC$. Muốn vậy, phải chứng minh $2AC > BC$.

Ta tạo ra đoạn thẳng 2AC bằng cách lấy điểm D trên tia đối của tia AC sao cho $AD = AC$. Khi đó, xét ΔBDC chỉ cần chứng minh $DC > BC$.



Hình 15.2

* *Trình bày lời giải.*

Trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho $AD = AC$.

$\Delta ABD = \Delta ABC$ $(c.g.c) \Rightarrow BD = BC$ và

$\widehat{ABD} = \widehat{ABC} > 30^o$. Suy ra $\widehat{DBC} > 60^o$.

ΔBCD cân có góc ở đỉnh lớn hơn 60^o nên các góc ở đáy nhỏ hơn 60^o.

Xét ΔDBC có $\widehat{DBC} > \widehat{D}$ nên $CD > BC$ (quan hệ giữa cạnh và góc đối diện).

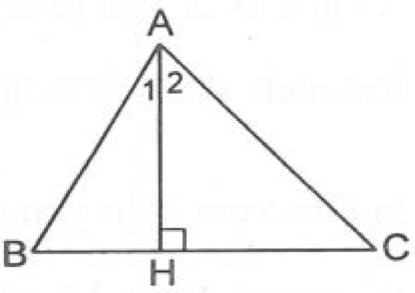
Do đó $2AC > BC$ hay $AC > \frac{1}{2}BC$.

Ví dụ 2: Tam giác ABC có góc B, góc C là những góc nhọn, $\widehat{B} > 45^o$; $\widehat{C} < 45^o$. Vẽ đường cao AH. Hãy so sánh HA, HB, HC.

Giải (h.15.3)

* *Tìm cách giải.*

Ta thấy HA, HB, HC không phải là ba cạnh của một tam giác. HA và HB là hai cạnh của tam giác HAB còn HA và HC là hai cạnh của tam giác HAC. Vì vậy ta dùng HA làm trung gian để so sánh HA, HB, HC.



Hình 15.3

* *Trình bày lời giải.*

Xét ΔABH có $\widehat{H} = 90^o; \widehat{B} > 45^o$ nên $\widehat{A_1} < 45^o$.

Vậy $\widehat{A_1} < \widehat{B} \Rightarrow HB < HA(1)$ (quan hệ giữa góc và cạnh đối diện).

Xét ΔACH có $\widehat{H} = 90^o; \widehat{C} < 45^o$ nên $\widehat{A_2} > 45^o$.

Vậy $\widehat{C} < \widehat{A_2} \Rightarrow HA < HC(2)$ (quan hệ giữa góc và cạnh đối diện).

Từ (1) và (2) suy ra $HB < HA < HC$.

Ví dụ 3: Cho hai đoạn thẳng AB và CD cắt nhau tại trung điểm O của AB. Chứng minh rằng nếu $AC > BC$ thì $BD > AD$.

Giải (h.15.4)

* *Tìm cách giải.*

ΔBDO và ΔADO có hai cặp cạnh bằng nhau, do đó để chứng minh $BD > AD$ ta cần chứng minh $\widehat{BOD} > \widehat{AOD}$.

* *Trình bày lời giải.*

ΔAOC và ΔBOC có OA=OB; OC chung;

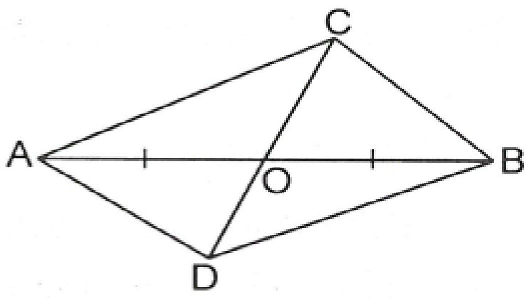
$AC > BC$

suy ra $\widehat{AOC} > \widehat{BOC}$ (định lí 2).

Do đó $\widehat{BOD} > \widehat{AOD}$.

ΔBOD và ΔAOD có $OB = OA$,OD chung,

$\widehat{BOD} > \widehat{AOD}$.suy ra $BD > AD$ (định lí 2).



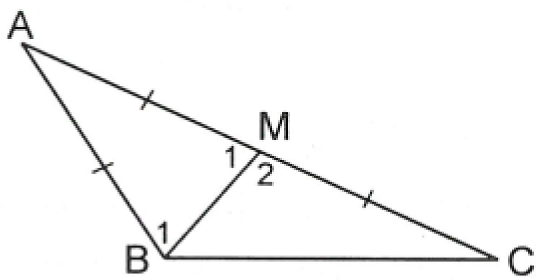
Hình 15.4

Ví dụ 4: Tam giác ABC có $\widehat{B} > 90^o$ và $AB = \frac{1}{2}AC$. Hãy sắp xếp ba cạnh của tam giác theo thứ tự tăng dần.

Giải (h.15.5)

* *Tìm cách giải.*

Vì góc B là góc tù nên cạnh AC là cạnh lớn nhất.
Khai thác điều kiện $AB = \frac{1}{2}AC$ ta làm xuất hiện yếu tố $\frac{1}{2}AC$ bằng cách vẽ trung điểm M của AC.
Khi đó AB và BC là hai cạnh của hai tam giác có hai cặp cạnh bằng nhau, do đó ta có thể dùng định lí 2.



Hình 15.5

* *Trình bày lời giải.*

Xét ΔABC có $\widehat{B} > 90^o$ nên cạnh AC là cạnh lớn nhất, do đó $BC < AC\,(1)$

Gọi M là trung điểm của AC. Xét ΔABM có $AB = AM\left(=\frac{1}{2}AC\right)$nên

ΔABM cân $\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{M_1} < 90^o$,do đó $\widehat{M_2} > 90^o$. Vậy $\widehat{M_1} < \widehat{M_2}$.

ΔAMB và ΔCMB có: $MA = MC$, MB chung và $\widehat{M_1} < \widehat{M_2}$ nên $AB < BC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AB < BC < CA.$

C. Bài tập vận dụng

- *Quan hệ giữa cạnh và góc đối diện trong một tam giác*

15.1. Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi M là một điểm trên đường thẳng BC. Hãy so sánh AM với AB.

15.2. Cho tam giác ABC, tia phân giác của góc A cắt BC tại D. Cho biết góc ADB là góc nhọn, hãy so sánh AB và AC.

15.3. Tam giác ABC có $AB < AC.$ Trên cạnh AB lấy điểm M $(M \neq B).$ Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa C vẽ tia Mx//AC và trên tia này lấy điểm N sao cho $MN = MB.$ Chứng minh rằng $BC < NC.$

15.4. Cho tam giác ABC, $\widehat{A} = 60^o; \widehat{B} = 75^o.$ Trong tam giác lấy điểm O sao cho $\widehat{OAC} = \widehat{OCA} = 15^o.$ Chứng minh rằng $OA \perp OB.$

15.5. Cho tam giác ABC. Vẽ $AH \perp BC\,(H \in BC)$ và $BK \perp AC\,(K \in AC).$ Biết rằng $AH \geq BC; BK \geq AC.$ Tính số đo các góc của tam giác ABC.

15.6. Trong tam giác ABC có $AB < AC.$ Tia phân giác của góc A cắt BC tại D. Gọi M là một điểm trên đoạn thẳng AD. Hãy so sánh MB với MC.

15.7. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên BC lấy E và F sao cho $\widehat{BAE} = \widehat{EAF} = \widehat{FAC}.$ Chứng minh rằng đoạn thẳng EF có độ dài nhỏ nhất trong ba đoạn thẳng BE, EF và FC.

15.8. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên BC lấy M và N sao cho $BM = MN = NC$ .Chứng minh rằng góc MAN là góc lớn nhất trong ba góc $\widehat{BAM}, \widehat{MAN}$ và $\widehat{NAC}.$

15.9. Chứng minh rằng nếu một tam giác có một góc lớn hơn 60^o thì cạnh đối diện với góc ấy lớn hơn trung bình cộng của hai cạnh còn lại.

15.10. Cho tam giác ABC vuông cân tại B. Gọi M là một điểm nằm trong tam giác sao cho $\widehat{BMC} > 105^o.$ Chứng minh rằng $MA > \dfrac{MB + MC}{2}.$

- *Hai tam giác có hai cạnh bằng nhau*

15.11. Tam giác ABC có $AB < AC.$ Trên tia đối của tia BA lấy điểm E $(E \neq B)$,trên tia đối của tia CA lấy điểm F $(F \neq C)$ sao cho $BE = CF.$ Gọi D là trung điểm của BC. Chứng minh rằng $\widehat{DEF} > \widehat{DFE}.$

15.12. Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi M là một điểm nằm trong tam giác sao cho $\widehat{ABM} < \widehat{ACM}.$ Hãy so sánh các góc $\widehat{AMB}$ và $\widehat{AMC}.$

15.13. Cho tam giác ABC cân tại A. Lấy điểm M nằm giữa A và B. Gọi O là trung điểm của CM. Tia AO cắt BC tại D. Chứng minh rằng $BD > CD$.

15.14. Cho tam giác ABC cân tại A. Lấy điểm M nằm trong tam giác sao cho $\widehat{AMB} > \widehat{AMC}$. Tia AM cắt BC tại D. Chứng minh rằng $BD < CD$.

15.15. Cho tam giác ABC, $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của BC. Lấy điểm D nằm giữa A và C sao cho $\widehat{AMD} \geq 90^o$. Chứng minh rằng $MD < MB$.

15.16. Cho tam giác ABC, $\widehat{A} = 60^o$, tổng $AB + AC = 10cm$.

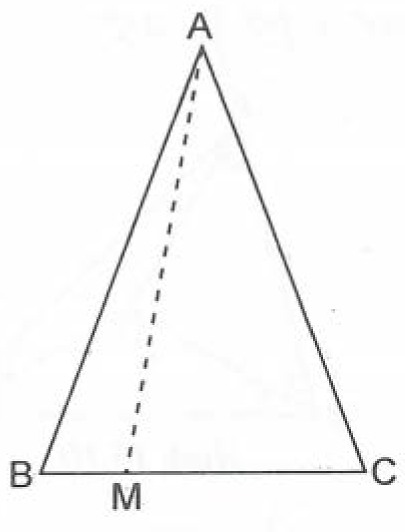
Tìm giá trị nhỏ nhất của chu vi tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

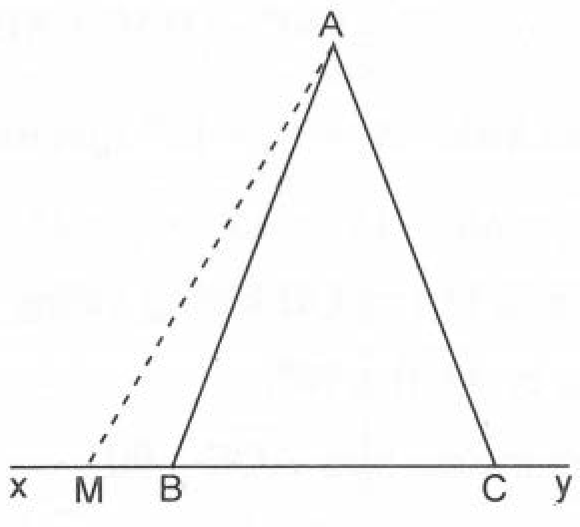
15.1.

- *Trường hợp* $M \equiv B$ hoặc $M \equiv C$: Khi đó $AM = AB$.
- *Trường hợp* M *nằm giữa* B *và* C (h.15.6)

  Ta có $\widehat{AMB} > \widehat{ACB}$ (tính chất góc ngoài của tam giác).
  Do đó $\widehat{AMB} > \widehat{ABC}$ (vì $\widehat{ACB} = \widehat{ABC}$).
  Xét ΔABM có $\widehat{ABM} < \widehat{AMB}$.
  Suy ra $AM < AB$ (quan hệ giữa góc và cạnh đối diện).



Hình 15.6



Hình 15.7

- *Trường hợp* $M \in$ tia Bx *là tia đối của tia* BC *và* $M \neq B$ (h.15.7)

  Ta có $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} < 90^o$ (tính chất của tam giác cân). Do đó $\widehat{ABM} > 90^o$.
  Xét ΔABM có $\widehat{ABM}$ là góc tù nên AM là cạnh lớn nhất.
  Vậy $AM > AB$.

Chứng minh tương tự, nếu $M \in$ tia Cy là tia đối của tia CB và $M \neq C$ thì $AM > AB$.

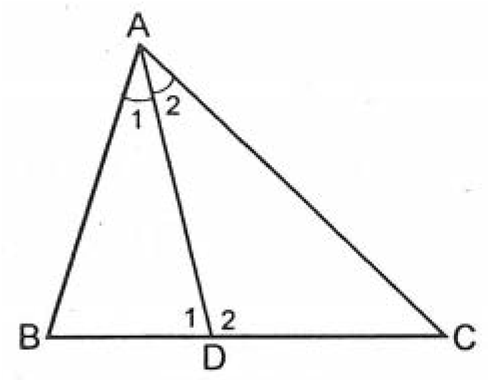
15.2. (h.15.8)

Góc ADB là góc nhọn nên góc ADC là góc tù.

ΔABD và ΔACD có $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}; \widehat{D_1} < \widehat{D_2}$

nên $\widehat{B} > \widehat{C}$.

ΔABC có $\widehat{B} > \widehat{C} \Rightarrow AC > AB$ (định lí 1).



Hình 15.8

15.3. (h.15.9)

Ta có $MN // AC \Rightarrow \widehat{MNC} = \widehat{ACN}$ (so le trong).

Mặt khác, $\widehat{ACN} < \widehat{ACB}$ nên $\widehat{MNC} < \widehat{ACB}$.

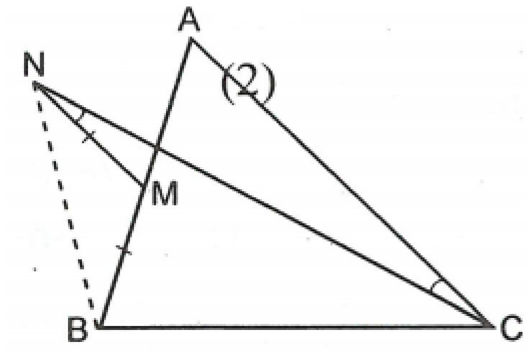
ΔABC có $AB < AC$ nên $\widehat{ACB} < \widehat{ABC}$.

Từ (1) và (2), suy ra $\widehat{MNC} < \widehat{ABC}$. (3)

Tam giác MNB cân $\Rightarrow \widehat{MNB} = \widehat{MBN}.(4)$

Từ (3) và (4), suy ra $\widehat{MNC} + \widehat{MNB} < \widehat{ABC} + \widehat{MBN}$.

Do đó $\widehat{BNC} < \widehat{NBC} \Rightarrow BC < NC$ (định lí 1).



Hình 15.9

15.4. (h.15.10)

Ta có $\widehat{ACB} = 180^o - \left(\widehat{BAC} + \widehat{ABC}\right) = 180^o - \left(60^o + 75^o\right) = 45^o$.

Mặt khác, $\widehat{A_1} = \widehat{C_1} = 15^o$ (giả thiết) nên

$\widehat{A_2} = 60^o - 15^o = 45^o, \widehat{C_2} = 45^o - 15^o = 30^o$.

Giả sử OA và OB không vuông góc với nhau,

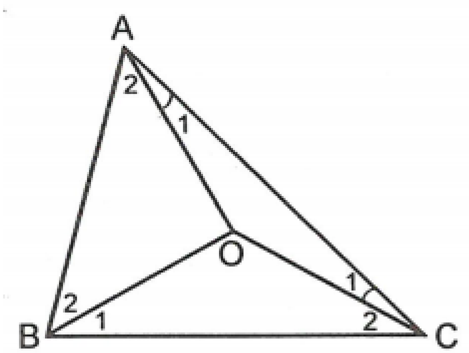
Tức là $\widehat{AOB} \neq 90^o$.

- Xét trường hợp $\widehat{AOB} < 90^o$

  Ta có

  $\widehat{B_2} = 180^o - \left(\widehat{AOB} + \widehat{A_2}\right) = 180^o - \left(\widehat{AOB} + 45^o\right) > 45^o$.

  Vậy $\widehat{B_2} > \widehat{A_2} \Rightarrow OA > OB$ (định lí 1).



Hình 15.10

Mặt khác, ΔAOC cân nên $OA = OC$ suy ra $OC > OB \Rightarrow \widehat{B_1} > \widehat{C_2}$ (định lí 1).

Từ đó ta được $\widehat{B_2} + \widehat{B_1} > \widehat{A_2} + \widehat{C_2} = 45^o + 30^o$ hay $\widehat{ABC} > 75^o$ (trái giả thiết).

- Xét trường hợp $\widehat{AOB} > 90^o$, chứng minh tương tự ta được $\widehat{ABC} < 75^o$ (trái giả thiết).

Vậy $\widehat{AOB} = 90^o \Rightarrow OA \perp OB.$

15.5. (h.15.11)

Xét ΔAHC vuông tại H, ΔBKC vuông tại K,

Ta có: $AH \le AC; BK \le BC$ (1)

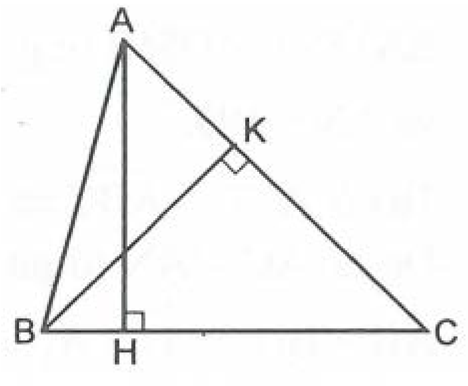
Mặt khác $BC \le AH; AC \le BK$ (giả thiết). (2)

Từ (1) và (2), suy ra $BC \le AH \le AC \le BK \le BC$.

Do đó $BC = AH = AC = BK$.

Vậy Δ ABC phải là tam giác vuông cân tại C.

Suy ra $\widehat{C} = 90^o, \widehat{A} = \widehat{B} = 45^o.$



Hình 15.11

15.6. (h.15.12)

Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$.

Vì $AE < AC$ nên điểm E nằm giữa A và C.

$\Delta ABM = \Delta AEM$ (c.g.c)

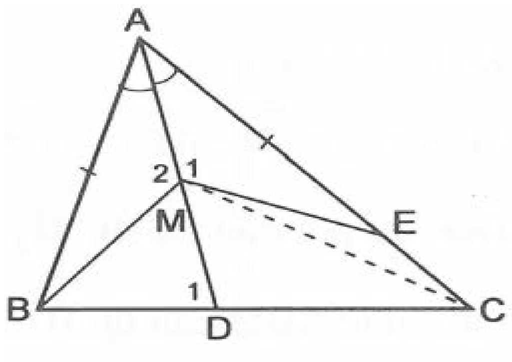
$\Rightarrow MB = ME$ và $\widehat{M_2} = \widehat{M_1}$.

Xét ΔAME có $\widehat{MEC}$ là góc ngoài nên $\widehat{MEC} > \widehat{M_1}$

Do đó $\widehat{MEC} > \widehat{M_2}; \widehat{M_2} > \widehat{D_1}; \widehat{D_1} > \widehat{ACD}; \widehat{ACD} > \widehat{ECM}$.

Xét ΔMEC có $\widehat{MEC} > \widehat{ECM} \Rightarrow MC > ME$ (định lí 1).

Do đó $MC > MB$ (vì $MB = ME$).



Hình 15.12

15.7. (h.15.13)

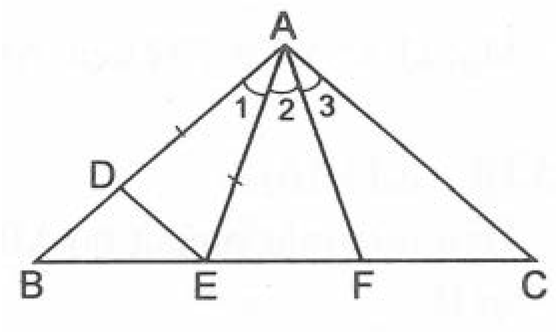
$\Delta ABE = \Delta ACF$ (c.g.c)

$\Rightarrow AE = AF$ và $BE = CF$. (1)

ΔAEF cân $\Rightarrow \widehat{AEF} < 90^o \Rightarrow \widehat{AEB} = 90^o$.

Xét ΔAEB có $\widehat{AEB} > 90^o$ nên $AB > AE$.

Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $AD = AE$.



Hình 15.13

$\Delta ADE = \Delta AFE$ (c.g.c) $\Rightarrow ED = EF$.

ΔADE cân $\Rightarrow \widehat{ADE}$ là góc nhọn $\Rightarrow \widehat{BDE}$ là góc tù.

Xét ΔBDE có $\widehat{BDE}$ là góc tù $\Rightarrow$ BE là cạnh lớn nhất.

Do đó $BE > DE \Rightarrow BE > EF$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra EF có độ dài nhỏ nhất trong ba đoạn thẳng BE, EF và FC.

15.8. (h.15.14)

Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $MD = MA$.

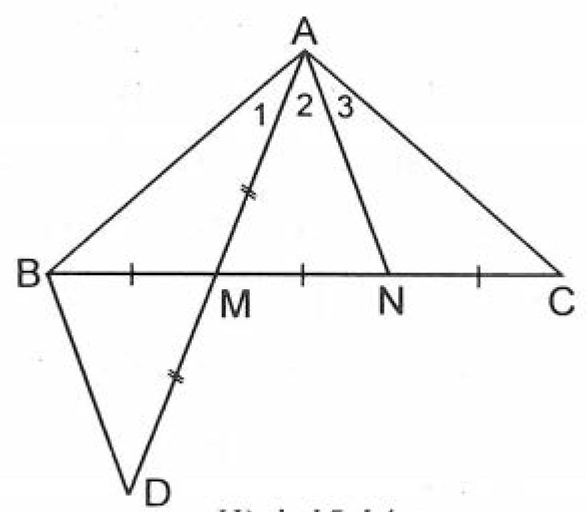
$\Delta AMN = \Delta DMB$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{A_2} = \widehat{D}$ và $AN = BD$.

Ta có $\widehat{ANC} > \widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{ANC} > \widehat{C}$.

Do đó $AC > AN$ (định lí 1). Suy ra

$AB > BD \Rightarrow \widehat{D} > \widehat{A_1} \Rightarrow \widehat{A_2} > \widehat{A_1}$.

Dễ thấy $\widehat{A_1} = \widehat{A_3}$ do đó $\widehat{A_2}$ là góc lớn nhất trong ba góc $\widehat{A_1}, \widehat{A_2}, \widehat{A_3}$.



Hình 15.14

15.9. (h.15.15)

Giả sử tam giác ABC có $\widehat{ABC} > 60^o$, ta phải chứng minh $AC > \dfrac{AB + BC}{2}$.

Trên tia đối của tia BC lấy điểm D sao cho $BD = BA$. Vẽ $CH \perp AD$.

Tam giác ABD cân tại B $\Rightarrow \widehat{ABC} = 2\widehat{D} \Rightarrow \widehat{D} = \dfrac{\widehat{ABC}}{2}$.

Vì $\widehat{ABC} > 60^o$ nên $\widehat{D} > 30^o$.

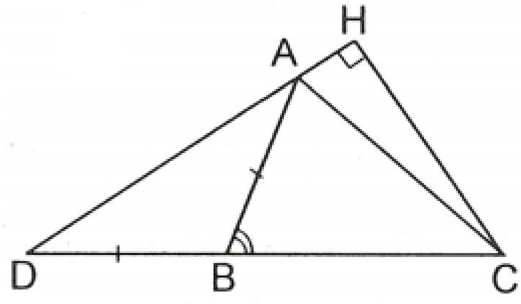
Xét ΔHCD vuông tại H,

có $\widehat{D} > 30^o$ nên $CH > \frac{1}{2}CD$

(xem ví dụ 1).

Mặt khác $AC \geq CH$ nên

$AC > \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}(DB + BC) = \frac{1}{2}(AB + BC)$.



Hình 15.15

15.10. (h.15.16)

Trên nửa mặt phẳng bờ MB không chứa C, vẽ tam giác BDM vuông cân tại B.

$\Delta ABD = \Delta CBM$ (c.g.c)

$\Rightarrow AD = CM$ và $\widehat{ADB} = \widehat{BMC} > 105^o$.

ΔBDM vuông cân tại B $\Rightarrow \widehat{BDM} = 45^o$

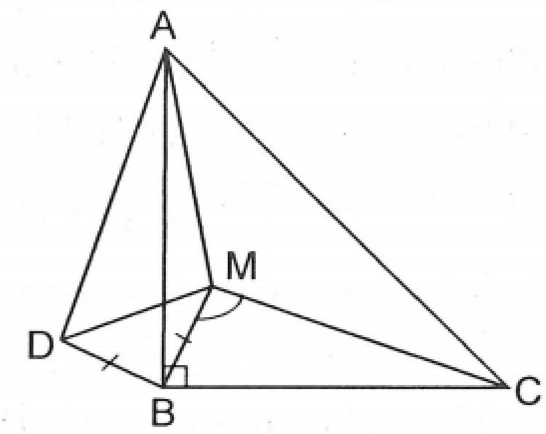
$\Rightarrow \widehat{ADM} > 60^o$.

Xét ΔADM có $\widehat{ADM} > 60^o$ nên

$MA > \frac{AD + DM}{2}$ (xem bài 15.9).

Mặt khác, $DM > MB$ (vì ΔBDM vuông) suy ra

$MA > \frac{MC + MB}{2}$.



Hình 15.16

15.11. (h.15.17)

ΔABC có $AB < AC \Rightarrow \widehat{ACB} < \widehat{ABC}$.

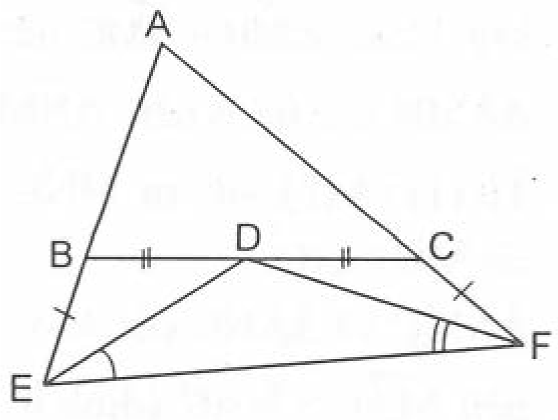
Do đó $\widehat{FCB} > \widehat{EBC}$.

ΔFCD và ΔEBD có:

$CF = BE, CD = BD$ và $\widehat{FCB} > \widehat{EBC}$

nên $DF > DE$ (định lí 2).

Xét ΔDEF có $DF > DE$ nên $\widehat{DEF} > \widehat{DFE}$ (định lí 1).



Hình 15.17

15.12. (h.15.18)

Tam giác ABC cân tại A $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

Ta có $\widehat{B_1} < \widehat{C_1}$ (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{B_2} > \widehat{C_2}$

$\Rightarrow MC > MB$ (định lí 1).

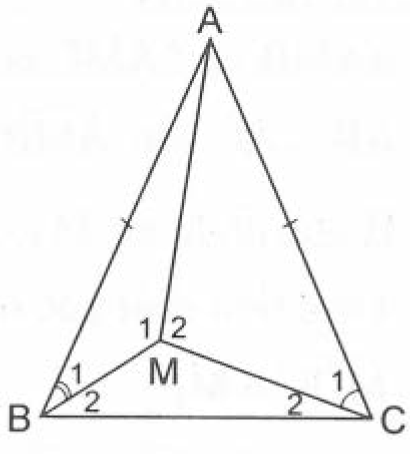
Xét ΔABM và ΔACM có: $AB = AC$;

AM chung; $MB < MC$

$\Rightarrow \widehat{MAB} < \widehat{MAC}$ (định lí 2).

Mặt khác $\widehat{B_1} < \widehat{C_1}$ nên $\widehat{MAB} + \widehat{B_1} < \widehat{MAC} + \widehat{C_1}$.

Do đó $\widehat{M_1} > \widehat{M_2}$.



Hình 15.18

15.13. (h.15.19)

Trên tia đối của tia OA lấy điểm N sao cho $ON = OA$.

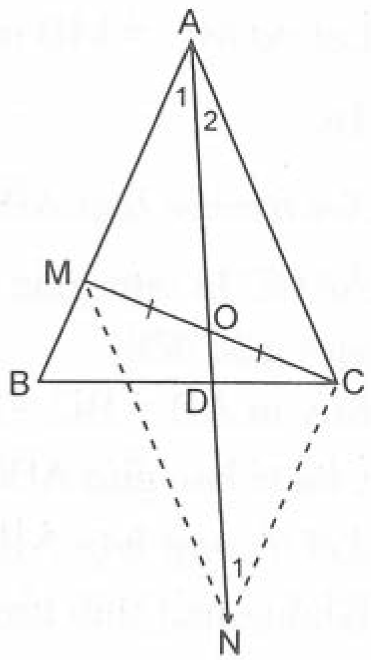
$\Delta AMO = \Delta NCO$ (c.g.c) $\Rightarrow AM = NC$ và $\widehat{A_1} = \widehat{N_1}$.

Ta có $AB > AM \Rightarrow AC > NC$.

Xét ΔACN có $AC > NC \Rightarrow \widehat{N_1} > \widehat{A_2} \Rightarrow \widehat{A_1} > \widehat{A_2}$.

ΔABD và ΔACD có: $AB = AC$; AD chung và $\widehat{A_1} > \widehat{A_2}$

nên $BD > CD$ (định lí 2).



Hình 15.19

15.14. (h.15.20)

Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa B, vẽ tia Ax sao cho $\widehat{CAx} = \widehat{BAM}$.

Trên tia Ax lấy điểm N sao cho $AN = AM$.

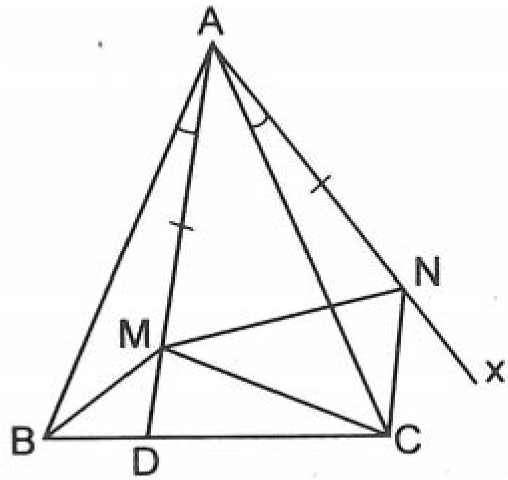
$\Delta AMB = \Delta ANC$ (c.g.c) $\Rightarrow BM = CN$ và $\widehat{AMB} = \widehat{ANC}$.

Mặt khác, $\widehat{AMB} > \widehat{AMC}$ nên $\widehat{ANC} > \widehat{AMC}$. (1)

ΔAMN cân tại A nên $\widehat{ANM} = \widehat{AMN}$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $\widehat{MNC} > \widehat{NMC}$

$\Rightarrow MC > NC$.



Hình 15.20

ΔAMC và ΔANC có: $AM = AN$, AC chung và $MC > NC$

nên $\widehat{MAC} > \widehat{NAC}$ (định lí 2) do đó $\widehat{MAC} > \widehat{MAB}$.

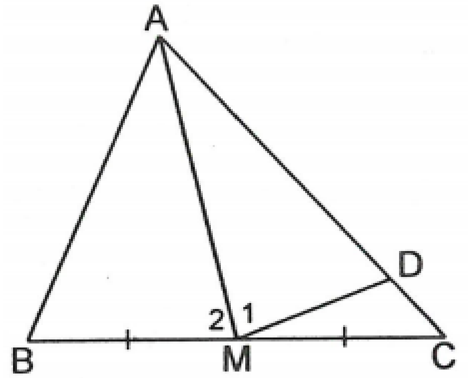
ΔDAC và ΔDAB có $AC = AB$, AD chung, $\widehat{DAC} > \widehat{DAB}$ nên $DC > DB$ (định lí 2).

15.15. (h.15.21)

ΔAMB và ΔAMC có: $MB = MC$; MA chung và $AB < AC$

nên $\widehat{AMB} < \widehat{AMC}$ (định lí 2) $\Rightarrow \widehat{M_2}$ là góc nhọn

$\Rightarrow \widehat{M_2} < \widehat{AMD}$.



Hình 15.21

Theo tính chất góc ngoài của tam giác ta có:

$\widehat{MDC} > \widehat{M_1}$.

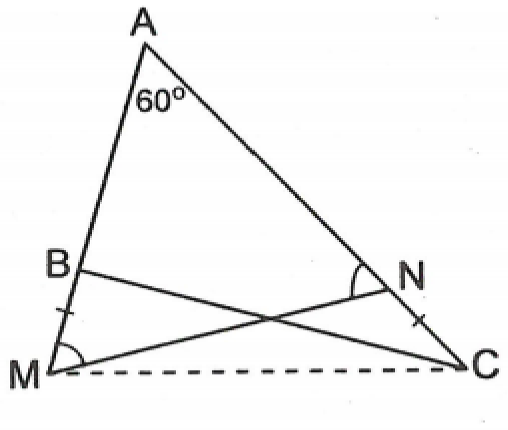
Mặt khác, $\widehat{M_1} > \widehat{M_2}; \widehat{M_2} > \widehat{C}$ nên $\widehat{MDC} > \widehat{C}$.

Xét ΔMDC có $\widehat{MDC} > \widehat{C} \Rightarrow MC > MD$ (định lí 1).

Lại do $MC = MB$ nên $MB > MD$ hay $MD < MB$.

15.16.

- *Xét trường hợp $AB = AC$*



Hình 15.22

ΔABC là tam giác cân, có $\widehat{A} = 60^o$ nên là tam giác đều.
Suy ra $AB = BC = CA = 5cm.$
Chu vi tam giác ABC là $5 \times 3 = 15$ (cm). (1)

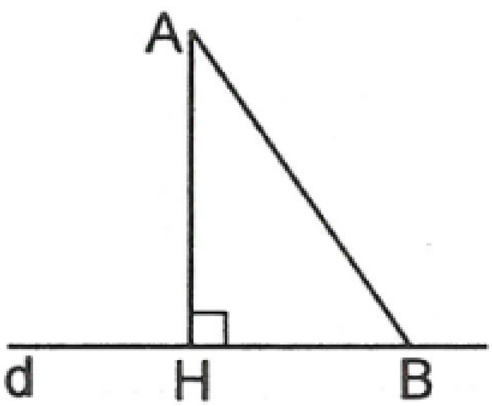
- *Xét trường hợp $AB \neq AC$*

Không mất tính tổng quát, giả sử $AB < AC$ (h.15.22).
Trên các tia AB, AC lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $AM = AN = 5cm.$
Khi đó ΔAMN là tam giác đều $\Rightarrow MN = 5cm.$
Vì $AM + AN = AB + AC$ (= 10 cm) nên
$AB + BM + AN = AB + AN + CN \Rightarrow BM = CN.$
Ta có $\widehat{BMC} > \widehat{BMN}; \widehat{BMN} = \widehat{ANM}; \widehat{ANM} > \widehat{NCM}$ (tính chất góc ngoài của tam giác) suy ra $\widehat{BMC} > \widehat{NCM}$.
ΔBMC và ΔNCM có: $BM = CN$, MC chung và $\widehat{BMC} > \widehat{NCM}$ suy ra $BC > MN$ (định lí 2).
Chu vi $\Delta ABC = AB + BC + CA = 10 + BC > 10 + MN = 15$ (cm). (2)
Từ (1) và (2), suy ra chu vi ΔABC nhỏ nhất là 15cm, khi $AB = AC = 5cm.$

Chuyên đề 16. QUAN HỆ GIỮA ĐƯỜNG VUÔNG GÓC VÀ ĐƯỜNG XIÊN, ĐƯỜNG XIÊN VÀ HÌNH CHIẾU

A. Kiến thức cần nhớ

- ***Khái niệm:*** Trong hình 16.1



Hình 16.1

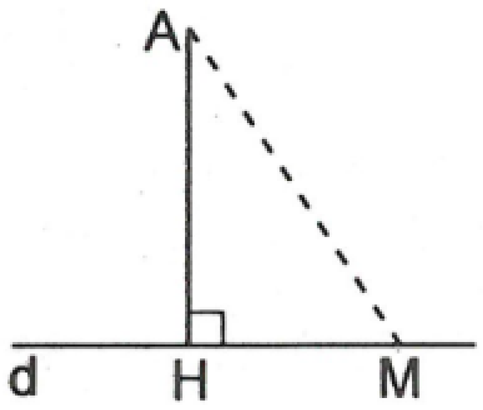
- Điểm H gọi là hình chiếu của A trên đường thẳng d.
- Đoạn thẳng AH gọi là đường vuông góc, đoạn thẳng AB gọi là đường xiên.
- Đoạn thẳng HB gọi là hình chiếu của đường xiên AB trên đường thẳng d.

- ***Định lí 1.*** Trong các đường xiên và đường vuông góc kẻ từ một điểm ở ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó, đường vuông góc là đường ngắn nhất.

Trong hình 16.1 ta có $AH < AB$.

Bổ sung: Trong hình 16.2: $A \notin d; M \in d; AH \perp d$.

Ta có $AM \geq AH$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv H$).



Hình 16.2

- Định lí 2. Trong hai đường xiên kẻ từ một điểm nằm ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó:

- Đường xiên nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn;
- Đường xiên nào lớn hơn thì có hình chiếu lớn hơn;
- Nếu hai đường xiên bằng nhau thì hai hình chiếu bằng nhau. Ngược lại, nếu hai hình chiếu bằng nhau thì hai đường xiên bằng nhau.

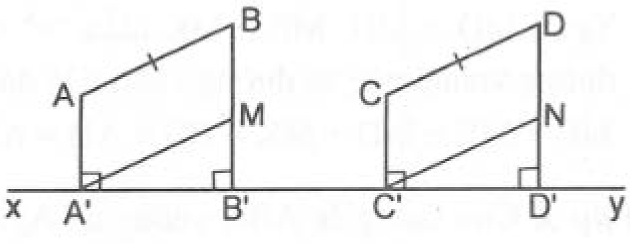
B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho hai đoạn thẳng AB và CD song song và bằng nhau.
Một đường thẳng xy không song song, không vuông góc với hai đoạn thẳng đó. Hãy so sánh các hình chiếu của AB và CD trên đường thẳng xy.

Giải (h.16.3)

* Tìm cách giải.

Muốn có hình chiếu của AB và CD trên xy, ta vẽ AA', BB', CC', DD' cùng vuông góc với xy. Ta phải chứng minh $A'B' = C'D'$. Muốn vậy ta tạo ra hai tam giác bằng nhau bằng cách vẽ đường phụ.



Hình 16.3

* *Trình bày lời giải.*

Vẽ $AA' \perp$ xy, $BB' \perp$ xy, $CC' \perp$ xy, $DD' \perp$ xy. Khi đó $A'B'$ và $C'D'$ lần lượt là hình chiếu của AB và CD trên xy.

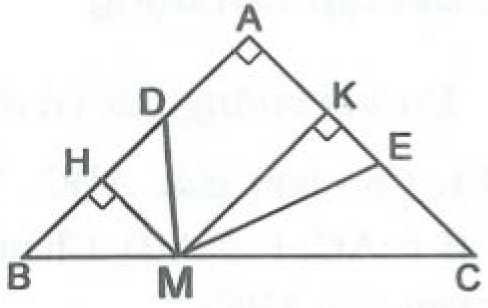
Vẽ $A'M // AB, C'N // CD$ theo tính chất đoạn chắn song song ta có $A'M = AB$; $C'N = CD$. Mặt khác do $AB = CD$ nên $A'M = C'N$.

$\Delta MA'B'$ và $\Delta NC'D'$ có: $\widehat{B'} = \widehat{D'} \left(= 90^\circ\right); A'M = C'N$ và $\widehat{M} = \widehat{N}$ (hai góc có cạnh tương ứng song song cùng nhọn).

Do đó $\Delta MA'B' = \Delta NC'D'$ (cạnh huyền, góc nhọn). Suy ra $A'B' = C'D'$.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC vuông cân tại A, $BC = a\sqrt{2}$. Trên các cạnh AB, BC, CA lần lượt lấy các điểm D, M, E. Chứng minh rằng $MD + ME \geq a$.

Giải (h.16.4)



Hình 16.4

* Tìm cách giải.

Ta thấy giữa các độ dài a và $a\sqrt{2}$ có sự liên hệ với nhau: $a\sqrt{2}$ là độ dài cạnh huyền của một tam giác vuông cân còn a là độ dài của cạnh góc vuông. Ta phải chứng minh $MD + ME \geq AB$.

Vì MD, ME là các đường xiên vẽ từ M đến các cạnh góc vuông AB, AC nên ta vẽ thêm các đường vuông góc từ M đến AB, AC để có thể dùng định lí về mối quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên.

* Trình bày lời giải.

Ta có: $AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow 2AB^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow AB = a$.

Vẽ $MH \perp AB; MK \perp AC$, khi đó $MH \parallel AC; MK \parallel AB$ suy ra $MK = AH$ (tính chất đoạn chắn song song).

ΔHBM vuông cân $\Rightarrow MH = BH$.

Ta có $MD \geq MH; ME \geq MK$ (dấu "=" $\Leftrightarrow D \equiv H; E \equiv K$) (quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên). Do đó:

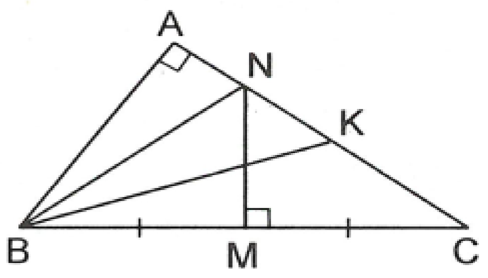
$MD + ME \geq MH + MK = BH + AH = AB = a$.

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB < AC$. Đường trung trực của BC cắt BC tại M, cắt AC tại N. Lấy điểm K trên đoạn thẳng CN. Hãy so sánh BK và CN.

Giải (h.16.5)

* Tìm cách giải.

Ta có thể dễ dàng so sánh các đường xiên BK và BN nhờ so sánh các hình chiếu của chúng. Vậy chỉ còn phải so sánh BN với CN mà thôi.



Hình 16.5

* Trình bày lời giải.

Ta có BK và BN là các đường xiên vẽ từ B tới đường thẳng AC, còn AK và AN là các hình chiếu của chúng trên AC.

Vì $AK > AN$ nên $BK > BN$ (quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu) (1)

Mặt khác, $MN \perp BC$ và $MB = MC$ nên $NB = NC$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $BK > NC$.

C. Bài tập vận dụng

- *Đường vuông góc và đường xiên*

16.1. Cho tam giác ABC. Vẽ $AD \perp BC, BE \perp AC, CF \perp AB \left(D \in BC, E \in AC, F \in AB\right)$. Chứng minh rằng tổng $AD + BE + CF$ nhỏ hơn chu vi tam giác ABC.

16.2. Cho tam giác ABC, góc A tù. Qua A vẽ đường thẳng d cắt cạnh BC tại O. Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ B và từ C đến đường thẳng d luôn nhỏ hơn hoặc bằng BC.

16.3. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi M là trung điểm của AC. Chứng minh rằng trung bình cộng các hình chiếu của AB và BC trên đường thẳng BM thì lớn hơn AB.

16.4. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Qua A vẽ đường thẳng xy không cắt cạnh BC. Gọi D và E thứ tự là hình chiếu của B và C trên xy.

Xác định vị trí của xy để $BD + CE = BC$.

16.5. Cho tam giác ABC và một điểm M ở trong tam giác. Biết đường trung trực của CM đi qua A. Hãy so sánh AB và AC.

16.6. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên các tia đối của BA và CA lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $BM = CN$. Chứng minh rằng:

a) $BN > \dfrac{MN + BC}{2}$;

b) $BM > \dfrac{MN - BC}{2}$.

16.7. Cho đoạn thẳng $BC = 5cm$ và trung điểm M của nó. Vẽ điểm A sao cho $\widehat{BAC} = 90^o$. Qua M vẽ một đường thẳng vuông góc với AM cắt các tia AB, AC lần lượt tại E và F. Xác định vị trí của điểm A để EF có độ dài ngắn nhất. Tính độ dài ngắn nhất đó.

- *Đường xiên và hình chiếu*

16.8. Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ $AH \perp BC\left(H \in BC\right)$.

Cho biết $\widehat{BAH} < \widehat{CAH}$. Hãy so sánh HB với HC.

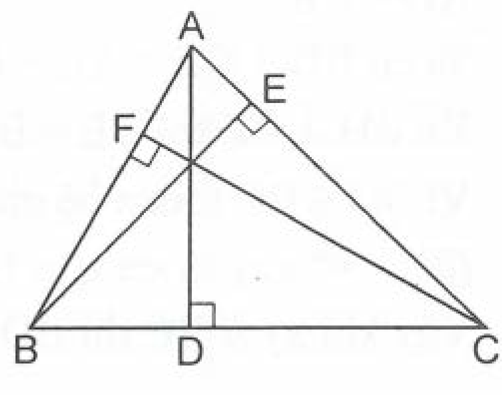
16.9. Cho tam giác ABC, $\widehat{B} < \widehat{C} < 90^o$. Chứng minh rằng với mọi vị trí của điểm M nằm giữa B và C ta luôn có $AM < AB$.

16.10. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = 5, AC = 12$. Vẽ $AH \perp BC$. Gọi M là một điểm trên đoạn thẳng AH. Chứng minh rằng: $13 \le MB + MC \le 17$.

16.11. Cho tam giác ABC. Vẽ $AH \perp BC$ (H nằm giữa B và C). Lấy điểm M nằm trên AH. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của M trên AB và AC. Chứng minh rằng nếu $BD = CE$ thì tam giác ABC là tam giác cân.

Hướng dẫn giải

16.1. (h.16.6)



Hình 16.6

Vì $AD \perp BC$ nên $AD \le AB$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \widehat{ABC} = 90^o$).

Vì $BE \perp AC$ nên $BE \le BC$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \widehat{ACB} = 90^o$).

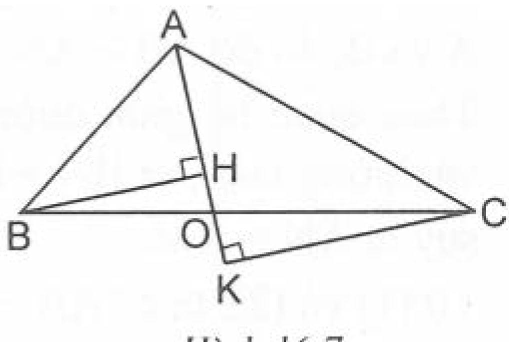
Vì $CF \perp AB$ nên $CF \le CA$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \widehat{BAC} = 90^o$).

Do các dấu "=" không thể xảy ra đồng thời nên

$AD + BE + CF < AB + BC + CA =$ chu vi ΔABC.

16.2. (h.16.7)

Vẽ $BH \perp d; CK \perp d$.



Hình 16.7

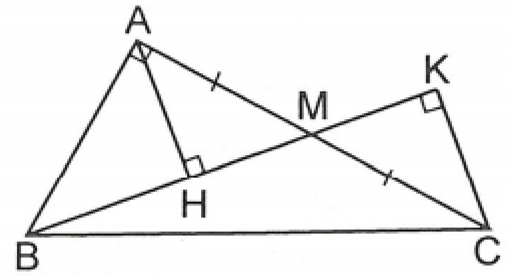
Theo quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên ta có $BH \leq BO; CK \leq CO$.

Do đó $BH + CK \leq BO + CO = BC$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow H \equiv O$ và $K \equiv O \Leftrightarrow d \perp BC$.

Vì góc A tù nên d luôn cắt BC.

16.3. (h.16.8)



Hình 16.8

Vẽ $AH \perp BM, CK \perp BM$ thì BH và CK lần lượt là hình chiếu của AB và BC trên đường thẳng BM.

Ta có $\Delta HAM = \Delta KCM$ (cạnh huyền, góc nhọn)

$\Rightarrow MH = MK$.

Ta có $AB < BM$ (quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên).

Do đó $AB < BH + HM$. (1)

Mặt khác cũng do $AB < BM$ nên $AB < BK - MK$. (2)

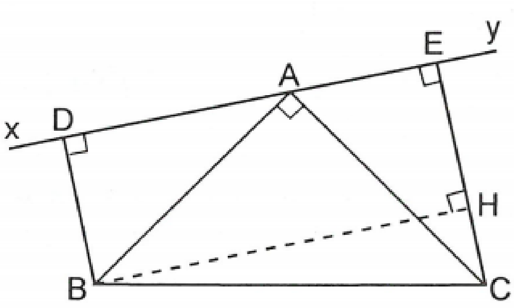
Từ (1) và (2), suy ra $2AB < (BH + HM) + (BK - MK)$.

Lại do $MH = MK$ nên $2AB < BH + BK$ hay $AB < \dfrac{BH + BK}{2}$.

16.4. (h.16.9)

ΔABD và ΔCAE có: $\widehat{D} = \widehat{E} \left(= 90^o\right), AB = AC, \widehat{ABD} = \widehat{CAE}$

(cùng phụ với góc BAD).



Hình 16.9

Do đó $\Delta ABD = \Delta CAE$ (cạnh huyền, góc nhọn). Suy ra $BD = AE$ và $AD = CE$.

Ta có $BD + CE = AE + AD = DE$.

Vẽ $BH \perp CE$ thì $DE = BH$ (tính chất đoạn chắn song song).

Vì $BH \leq BC$ (quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên) nên $DE \le BC$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow C \equiv H$ hay xy $//BC$).

Vậy khi xy $//BC$ thì $BD + CE = BC$.

16.5. (h.16.10)

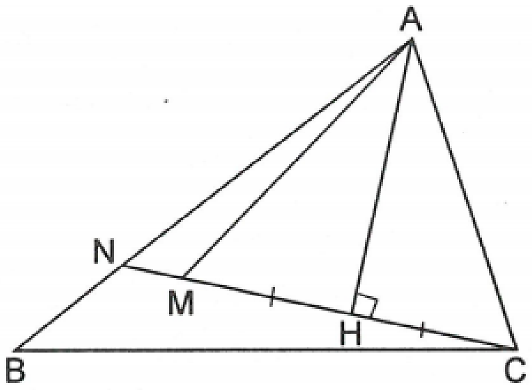
Gọi N là giao điểm của AB và tia CM.

Vì M nằm trong tam giác ABC nên tia CM cắt cạnh AB tại điểm N nằm giữa A và B, do đó $AB > AN$. (1)

Theo quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên, từ $HN > HM$ suy ra $AN > AM$. (2)

Từ (1) và (2), ta có $AB > AM$.

Mặt khác $AM = AC$ (vì $HM = HC$) nên $AB > AC$.



Hình 16.10

16.6. (h.16.11)

a) Ta có $AB = AC, BM = CN \Rightarrow AM = AN$.

ΔABC và ΔAMN cân tại A

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{AMN} = \dfrac{180^o - \widehat{A}}{2}$

$\Rightarrow BC // MN$ (vì có cặp góc đồng vị bằng nhau).

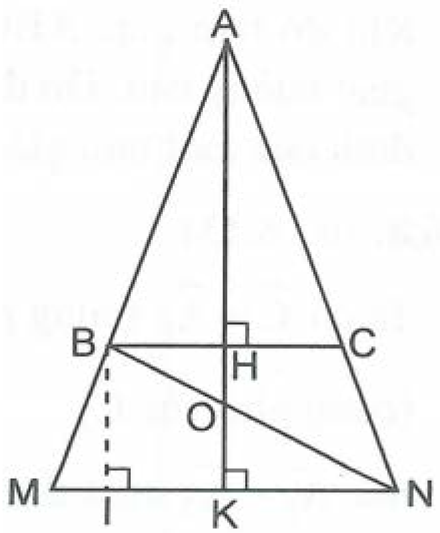
Vẽ $AH \perp BC$ thì $AH \perp MN$ (tại K).

Ta có $BH = \dfrac{1}{2}BC; KN = \dfrac{1}{2}MN$.

Gọi O là giao điểm của BN với AK. Theo quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên ta có:

$BO > BH = \dfrac{1}{2}BC; ON > KN = \dfrac{1}{2}MN$.

Do $BN = BO + ON$ nên $BN > \dfrac{BC}{2} + \dfrac{MN}{2} = \dfrac{MN + BC}{2}$.



Hình 16.11

b) Vẽ $BI \perp MN \Rightarrow BI // HK$. Do đó $IK = BH$ (tính chất đoạn chắn song song).

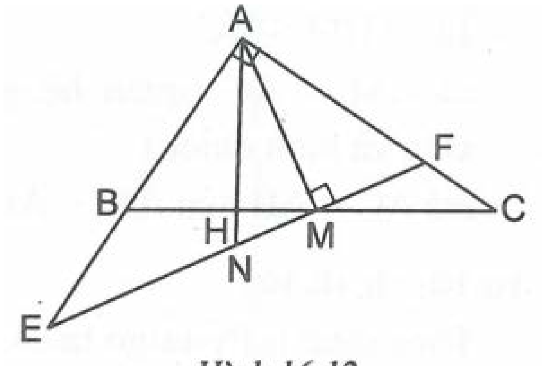
Ta có $MI = MK - IK = \dfrac{1}{2}MN - \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{MN - BC}{2}$.

Mặt khác $BM > MI$ nên $BM > \dfrac{MN - BC}{2}$.

16.7. (h.16.12)

Gọi N là trung điểm của EF. Các tam giác ABC và AEF là những tam giác vuông, M và N là trung điểm của cạnh huyền nên

$AM = \dfrac{1}{2}BC, AN = \dfrac{1}{2}EF$. (1)



Hình 16.12

Suy ra $BC = 2AM; EF = 2AN$.

Theo quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên ta có $AN \geq AM$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $EF \geq BC = 5cm$.

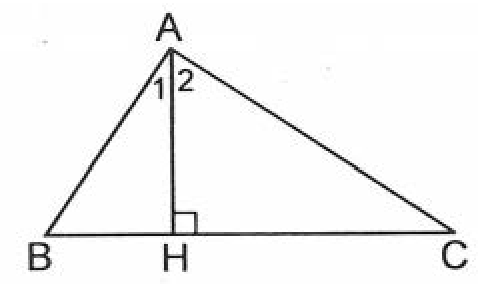
Để xác định khi nào dấu "=" xảy ra, ta gọi H là giao điểm của AN với BC. Ta có $AH \perp BC$ (bạn đọc tự chứng minh).

Ta có $EF = BC \Leftrightarrow AN = AM \Leftrightarrow N \equiv M \Leftrightarrow H \equiv M$.

Khi đó tam giác ABC có $MB = MC, AM \perp BC$ (vì $M \equiv H$) nên là tam giác vuông cân. Do đó độ dài ngắn nhất của EF là 5cm khi và chỉ khi A là đỉnh của một tam giác vuông cân có cạnh huyền là BC.

16.8. (h.16.13)

Ta có $\widehat{C} = \widehat{A_1}$ (cùng phụ với $\widehat{B}$); $\widehat{B} = \widehat{A_2}$ (cùng phụ với $\widehat{C}$) mà $\widehat{A_1} < \widehat{A_2}$ (giả thiết) nên $\widehat{C} < \widehat{B}$.



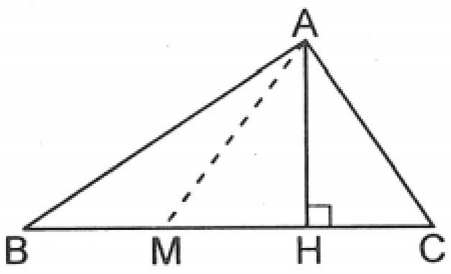
Hình 16.15

Xét ΔABC có $\widehat{C} < \widehat{B}$ nên $AB < AC$ (quan hệ giữa cạnh và góc đối diện trong tam giác). Suy ra $HB < HC$ (quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu).

16.9. (h.16.14)

Vẽ $AH \perp BC$.

Vì các góc B và C nhọn nên H nằm giữa B và C.

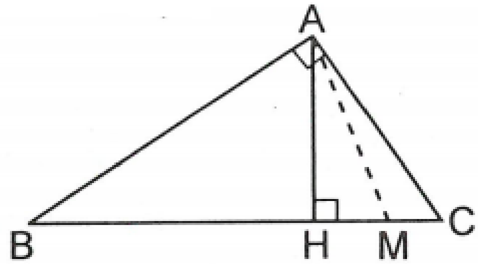


Hình 16.14

Ta có $\widehat{B} < \widehat{C} \Rightarrow AC < AB$ (quan hệ giữa cạnh và góc đối diện trong tam giác).

- Nếu $M \equiv H$ thì $AM < AB$ (quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên).
- Nếu M nằm giữa B và H thì $HM < HB$

  $\Rightarrow AM < AB$ (quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu).



Hình 16.15

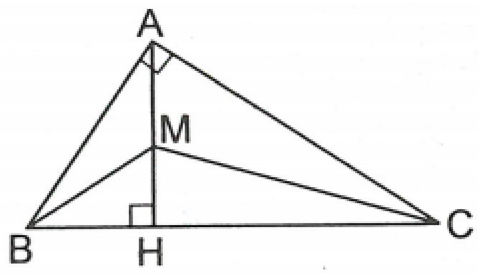
- Nếu M nằm giữa H và C (h.16.15)

  Ta có $HM < HC$

  $\Rightarrow AM < AC$ (quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu)

  mà $AC < AB$ nên $AM < AB$.

16.10. (h.16.16)



Hình 16.16

Theo định lí Py-ta-go ta có:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 5^2 + 12^2 = 169$

$\Rightarrow BC = 13$.

Ta có $BM \ge BH$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv H$);

$CM \ge CH$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv H$).

Do đó $BM + CM \ge BH + CH = 13$ (dấu "=" xảy ra

$\Leftrightarrow M \equiv H$). (1)

Ta có $HM \le HA$ nên $BM \le BA$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv A$).

Tương tự $CM \le CA$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv A$).

Do đó $BM + CM \le BA + CA = 5 + 12 = 17$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv A$). (2)

Từ (1) và (2), suy ra $13 \le MB + MC \le 17$.

16.11. (h.16.17)

- Giả sử $AB < AC$, theo quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu ta có $HB < HC$, do đó $MB < MC$.

  Từ điều kiện $AB < AC$ và $BD = CE$ suy ra $AD < AE$.

  Theo định lí Py-ta-go, ta có:

  $MD^2 = AM^2 - AD^2; ME^2 = AM^2 - AE^2$

  do đó $MD^2 > ME^2$.

  Ta có $MB^2 = MD^2 + BD^2; MC^2 = ME^2 + CE^2$.

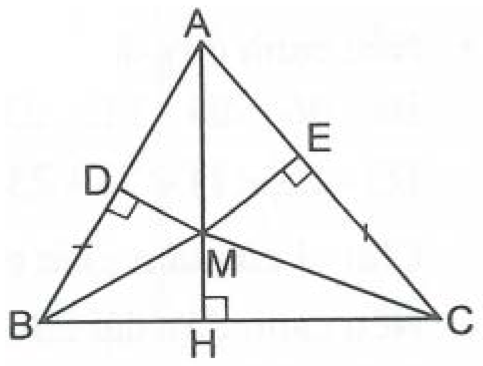
  Vì $MD^2 > ME^2$ và $BD^2 = CE^2$ nên $MB^2 > MC^2$

  suy ra $MB > MC$.

  Theo quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu ta suy ra $HB > HC$, do đó $AB > AC$ (trái giả thiết).

  Chứng minh tương tự, nếu $AB > AC$ thì cũng suy ra mâu thuẫn.

  Vậy $AB = AC$ hay tam giác ABC là tam giác cân.



Hình 16.17

Chuyên đề 17. QUAN HỆ GIỮA BA CẠNH CỦA MỘT TAM GIÁC

A. Kiến thức cần nhớ

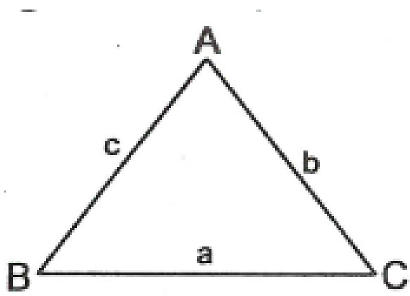
1. Bất đẳng thức tam giác

Trong một tam giác, độ dài một cạnh bao giờ cũng lớn hơn hiệu và nhỏ hơn tổng các độ dài của hai cạnh còn lại.

Trong hình 17.1 ta có: $|b-c| < a < b+c$.

Đảo lại, nếu $|b-c| < a < b+c$ thì a, b, c

có thể là độ dài ba cạnh của một tam giác.



Hình 17.1

2. Bất đẳng thức tam giác mở rộng

Với ba điểm M, A, B bất kì ta luôn có: $MA + MB \geq AB$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ M thuộc đoạn thẳng AB.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho hai đoạn thẳng AB và CD cắt nhau tại điểm O nằm giữa hai đầu mỗi đoạn thẳng. Biết $AB = 3cm, CD = 5cm.$ Chứng minh rằng trong hai đoạn thẳng AC và BD ít nhất cũng có một đoạn thẳng có độ dài nhỏ hơn 4cm.

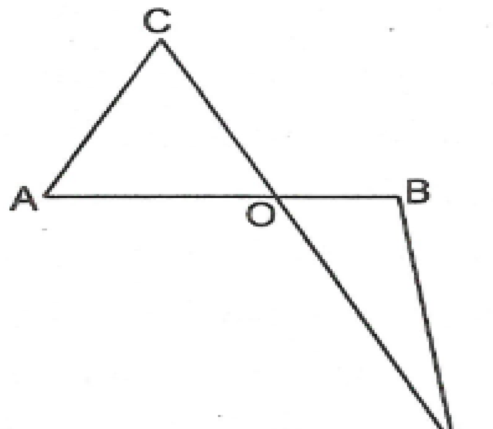
Giải (h.17.2)

* *Tìm cách giải.*

Muốn chứng minh trong hai đoạn thẳng AC và BD ít nhất cũng có một đoạn thẳng có độ dài nhỏ hơn 4cm, ta chứng minh tổng:

$AC + BD < 8cm.$

Ta thấy AC là một cạnh của tam giác AOC, BD là một cạnh của tam giác BOD. Vậy cần vận dụng quan hệ giữa ba cạnh của tam giác để đánh giá AC và BD. *Hình 17.2*



Hình 17.2

* *Trình bày lời giải.*

Xét ΔAOC có $AC < OA + OC.$ Xét ΔBOD có $BD < OB + OD.$

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta được: $AC + BD < OA + OB + OC + OD$ dẫn tới $AC + BD < AB + CD.$ Do đó $AC + BD < 3 + 5 = 8$ (cm).

Suy ra trong hai đoạn thẳng AC và BD ít nhất cũng có một đoạn thẳng nhỏ hơn 4cm.

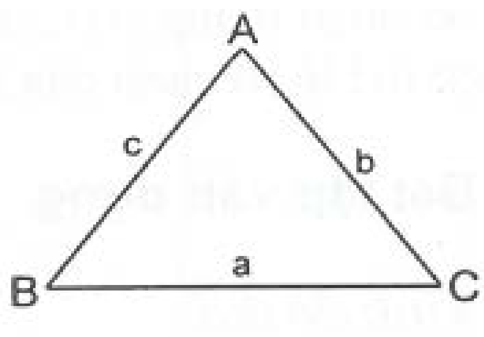
* *Nhận xét:* Trong lời giải trên ta đã dung một tính chất của hai bất đẳng thức cùng chiều: Nếu $a < b$ và $c < d$ thì $a + c < b + d$.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng trong một tam giác, mỗi cạnh bao giờ cũng nhỏ hơn nửa chu vi của tam giác ấy.

Giải (h.17.3)

* *Tìm cách giải.*

Ta phải chứng minh $a < \dfrac{a+b+c}{2}.$ Muốn vậy ta chứng minh $2a < a + b + c.$ Trừ a vào hai vế của bất đẳng thức ta được $2a - a < a + b + c - a,$ dẫn tới $a < b + c.$



Bất đẳng thức này đúng nên ta có thể xuất phát từ đây rồi chứng minh "ngược" lên.

* *Trình bày lời giải.*

Gọi a là độ dài của một cạnh bất kì của tam giác. Gọi b và c là độ dài hai cạnh còn lại. Theo quan hệ giữa ba cạnh còn lại của tam giác ta có: $a < b + c$.

Cộng a vào hai vế của bất đẳng thức này ta được: $a + a < a + b + c$ dẫn tới $2a < a + b + c$. Suy ra $a < \dfrac{a+b+c}{2}$.

* *Nhận xét:* Trong lời giải trên ta đã dùng các tính chất sau của bất đẳng thức:

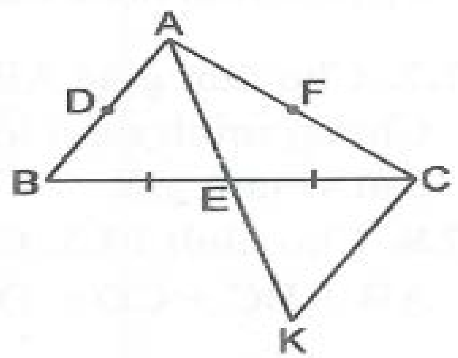
- Cộng cùng một số vào hai vế của một bất đẳng thức thì được một bất đẳng thức cùng chiều.
- Nhân (hay chia) cả hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số dương thì được một bất đẳng thức cùng chiều.

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA. Chứng minh rằng ba đoạn thẳng AD, AE và AF có thể là ba cạnh của một tam giác.

Giải (h.17.4)

* *Tìm cách giải.*

Muốn chứng minh ba đoạn thẳng AD, BE, CF có thể là ba cạnh của một tam giác, ta chứng minh ba đoạn thẳng đó thỏa mãn bất đẳng thức tam giác hoặc chứng minh chúng lần lượt bằng ba cạnh của một tam giác nào đó.



Hình 17.4

* *Trình bày lời giải.*

Trên tia đối của tia EA lấy điểm K sao cho $EK = EA$.

$\Delta ABE = \Delta KCE$ (c.g.c) $\Rightarrow AB = CK$.

Xét ΔACK, theo bất đẳng thức tam giác ta có: $|CA - CK| < AK < CA + CK$.

Do đó $|2AF - 2AD| < 2AE < 2AF + 2AD$ (vì $AC = 2AF, AB = 2AD$).

Suy ra $|AF - AD| < AE < AF + AD$.

Ba đoạn thẳng AD, AE, AF thỏa mãn bất đẳng thức tam giác nên chúng có thể là ba cạnh của một tam giác.

C. Bài tập vận dụng

- *Tính độ dài*

17.1. Một tam giác cân có chu vi là 40cm và một cạnh có độ dài 10cm. Tính độ dài của hai cạnh còn lại.

17.2. Tính chu vi của một tam giác cân biết độ dài hai cạnh của nó bằng:

a) 11cm và 20cm; b) 11cm và 23 cm.

17.3. Ba cạnh của một tam giác có số đo là ba số chẵn liên tiếp (tính bằng xen-ti-mét). Tam giác đó có chu vi nhỏ nhất là bao nhiêu?

17.4. Một đoạn dây thép có độ dài 25cm.

Hỏi có thể uốn nó thành một hình tam giác có một cạnh là:

a) 13cm; b) 12cm?

- *So sánh một độ dài với chu vi của tam giác*

17.5. Cho tam giác ABC. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC.

Hãy so sánh độ dài BC với chu vi tam giác AMN.

17.6. Chứng minh rằng cạnh lớn nhất của một tam giác thì:

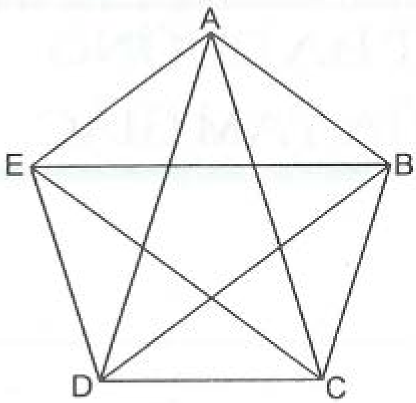
a) Nhỏ hơn nửa chu vi của tam giác;

b) Lớn hơn hoặc bằng $\frac{1}{3}$ chu vi của tam giác.

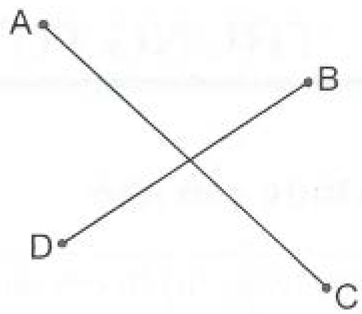
17.7. Cho tam giác ABC. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm BC, CA và AB. Chứng minh rằng tổng $AD + BE + CF$ lớn hơn nửa chu vi nhưng nhỏ hơn chu vi tam giác.

17.8. Cho hình 17.5. Chứng minh rằng:

$AB + BC + CD + DE + EA < AD + DB + BE + EC + CA.$



Hình 17.5



Hình 17.6

17.9. Cho hình 17.6.

a) Tìm điểm O sao cho tổng các khoảng cách từ O đến A, B, C, D có độ dài nhỏ nhất.

b) Chứng minh rằng $AC + BD > \dfrac{AB + BC + CD + DA}{2}$.

17.10. Cho tam giác ABC có chu vi là 2p. Lấy điểm M bất kì nằm trong tam giác.

Chứng minh rằng $p < MA + MB + MC < 2p$.

- *Chứng minh bất đẳng thức hình học*

17.11. Cho tam giác ABC. Vẽ đường thẳng xy chứa tia phân giác góc ngoài tại đỉnh A. Trên xy lấy điểm M khác A. Chứng minh rằng: $AB + AC < MB + MC$.

17.12. Cho tam giác ABC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Chứng minh rằng không thể xảy ra đồng thời $BN < \dfrac{1}{2}AC$ và $CM < \dfrac{1}{2}AB$.

17.13. Cho đoạn thẳng AB và ba điểm M, N, P không có điểm nào nằm trên đường thẳng AB. Cho biết $MA + NA + PA = MB + NB + PB = s$. Chứng minh rằng tồn tại một điểm O thỏa mãn $MO + NO + PO < s$.

17.14. Cho tam giác đều ABC. Trên các cạnh AB, AC, BC lần lượt lấy các điểm M, N, K không trùng với các đỉnh của tam giác sao cho $AM = AN$.

Chứng minh rằng $KM + KN \geq KA$.

17.15. Tam giác ABC không có hai cạnh nào bằng nhau. Độ dài mỗi cạnh có số đo là một số nguyên (tính bằng xen-ti-mét). Biết $AB = 2cm, BC = 3cm$. Vẽ đường trung trực xy của BC, trên đó lấy một điểm M. Xác định vị trí của điểm M để tổng $MA + MB$ có giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

Hướng dẫn giải

17.1.

- Nếu cạnh đáy dài 10cm thì mỗi cạnh bên dài là : $(40-10):2 = 15(\text{cm})$.

  Ba độ dài 10, 15,15 thỏa mãn bất đẳng thức tam giác vì $|15-15| < 10 < 15+15$.

  Vậy độ dài hai cạnh còn lại là: 15cm; 15cm.

- Nếu cạnh bên dài 10cm thì cạnh đáy dài là: $40 - 2.10 = 20(\text{cm})$.

  Ba độ dài 10, 20, 20 không thỏa mãn bất đẳng thức tam giác. Vậy trường hợp này bị loại.

17.2.

a)

- Nếu cạnh đáy dài 11cm thì cạnh bên dài 20cm.

  Ba độ dài 11, 20 ,20 thỏa mãn bất đẳng thức tam giác vì $|20-20|<11<20+20$.

  Chu vi của tam giác cân là: $11+20+20=51(\text{cm})$.

- Nếu cạnh đáy dài 20cm thì cạnh bên dài 11cm.

  Ba độ dài 20, 11, 11 thỏa mãn bất đẳng thức tam giác vì $|11-11|<20<11+11$.

  Chu vi của tam giác cân là: $20+11+11=42(\text{cm})$.

b)

- Nếu cạnh đáy dài 11cm thì cạnh bên dài 23cm.

  Ba độ dài 11, 23, 23 thỏa mãn bất đẳng thức tam giác vì $|23-23|<11<23+23$.

  Chu vi tam giác cân là: $11+23+23=57(\text{cm})$.

- Nếu cạnh đáy dài 23cm thì cạnh bên dài 11cm.

  Ba độ dài 23, 11, 11 không thỏa mãn bất đẳng thức tam giác. Vậy trường hợp này bị loại.

17.3. Gọi độ dài ba cạnh của tam giác là n, n + 2 và n + 4 (n là số tự nhiên chẵn).

Theo quan hệ giữa ba cạnh của tam giác ta có: $n+(n+2)>n+4 \Rightarrow n>2$.

Số chẵn nhỏ nhất lớn hơn 2 là 4.

Vậy độ dài ba cạnh của tam giác đó là 4, 6, 8 (cm).

Chu vi nhỏ nhất của tam giác là $4+6+8=18(\text{cm})$.

17.4.

a) Nếu một cạnh dài 13cm thì tổng hai cạnh còn lại là: $25-13=12(\text{cm})$.

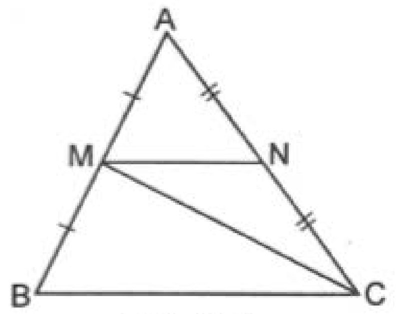
Ta thấy một cạnh lớn hơn tổng của hai cạnh còn lại, không thỏa mãn bất đẳng thức tam giác. Vậy không thể uốn đoạn dây thép trên thành một hình tam giác có một cạnh là 13cm.

b) Nếu một cạnh dài 12cm thì tổng hai cạnh còn lại là: $25-12=13(\text{cm})$.

Đoạn dây thép 13cm này có thể uốn thành hai đoạn chẳng hạn 8cm và 5cm. Rõ ràng $8-5<12<8+5$ thỏa mãn bất đẳng thức tam giác.

Vậy có thể uốn đoạn dây thép 25cm thành một tam giác có một cạnh 12cm.

17.5. (h.17.7)



Hình 17.7

Xét ΔMBC ta có: $BC < MB + MC$. (1)

Xét ΔMNC ta có: $MC < MN + NC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BC < MB + MN + NC$.

Do đó $BC < MA + MN + NA$ (vì $MA = MB$ và $NA = NC$).

Suy ra $BC <$ chu vi ΔAMN.

17.6. Gọi a, b, c là ba cạnh của tam giác ABC.

Giả sử a là cạnh lớn nhất: $a \geq b; a \geq c$.

a) Theo quan hệ giữa ba cạnh của tam giác ta có $a < b + c$.

Cộng a vào hai vế của bất đẳng thức này ta được $a + a < a + b < c$, do đó $2a < a + b + c$, suy ra $a = \dfrac{a+b+c}{2}$.

b) Vì $a \geq b; a \geq c$ nên $2a \geq b + c$.

Cộng a vào hai vế ta được $3a \geq a + b + c$. Suy ra $a \geq \dfrac{a+b+c}{3}$.

17.7. (h.17.8)

- Xét ΔABD và ΔACD, ta có: $AD + BD > AB; AD + CD > AC$.

  Suy ra $2AD + BC > AB + AC \Rightarrow 2AD > AB + AC - BC$. (1)

  Tương tự, $2BE > BC + BA - AC$. (2)

  $2CF > CA + CB - AB$. (3)

  Cộng từng vế các bất đẳng thức (1), (2), (3) ta được:

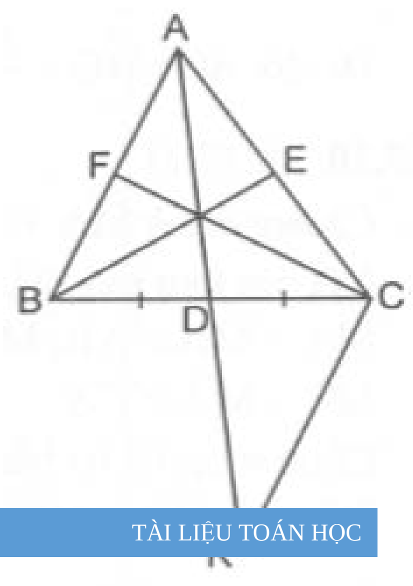
  $2(AD + BE + CF) > (AB + AC - BC) + (BC + BA - AC) + (CA + C$

  Do đó $AD + BE + CF > \dfrac{AB + BC + CA}{2}$. $(*)$

- Trên tia đối của tia DA lấy điểm K sao cho $DK = DA$.

  $\Delta ABD = \Delta KCD$ (c.g.c) $\Rightarrow AB = CK$.

  Xét ΔACK có $AK < AC + CK = AC + AB$



Hình 17.8

$\Rightarrow 2AD < AB + AC.$

Chứng minh tương tự ta được

$2BE < BA + BC; 2CF < CB + CA.$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta được

$2(AD + BE + CF) < 2(AB + BC + CA).$

Do đó

$AD + BE + CF < AB + BC + CA =$ chu vi $\Delta ABC.$ $\quad (**)$

Từ (*) và (**), suy ra điều phải chứng minh.

17.8. (h.17.9)

Gọi các điểm A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 là các điểm như trong hình 17.9. Theo quan hệ giữa ba cạnh của tam giác ta có

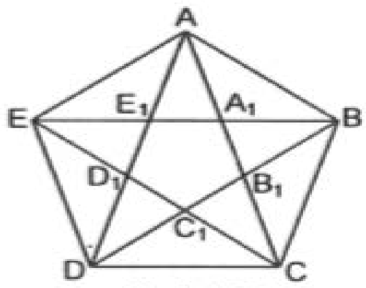
$AB < A_1A + A_1B; BC < B_1B + B_1C; CD < C_1C + C_1D; DE < D_1D + D_1E; EA < E_1E + E_1A.$.

Cộng từng vế các bất đẳng thức ta được:

$AB + BC + CD + DE + EA < (A_1A + B_1C) + (A_1B + E_1E) +$

$(B_1B + C_1D) + (C_1C + D_1E) + (D_1D + E_1A) <$

$AC + BE + BD + CE + DA.$



Hình 17.9

17.9. (h.17.10)

a) Gọi M là điểm bất kì, ta có: $MA + MC \geq AC$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \in [AC]$).

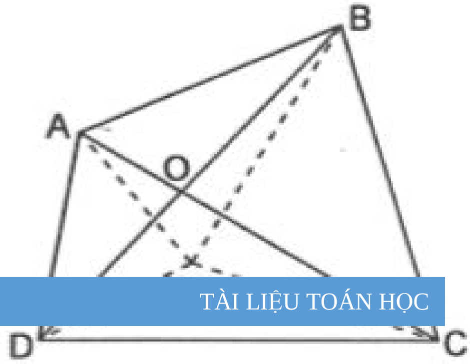
$MB + MD \geq BD$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \in [BD]$).

Suy ra $MA + MC + MB + MD \geq AC + BD$ (không đổi).

Do đó tổng $MA + MB + MC + MD$ nhỏ nhất bằng $AC + BD$ khi và chỉ khi M là giao điểm O của AC và BD.

b) Xét các tam giác AOB, BOC, COD, DOA ta có:

$OA + OB > AB; OB + OC > BC;$



Hình 17.10

$OC + OD > CD; OD + OA > DA.$

Cộng từng vế bốn đẳng thức trên ta được:

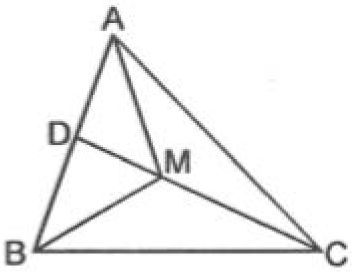
$2(OA + OB + OC + OD) > AB + BC + CD + DA.$

Suy ra $2(AC + BD) > AB + BC + CD + DA.$

Do đó $AC + BD > \dfrac{AB + BC + CD + DA}{2}.$

17.10. (h.17.11)

- *Chứng minh* $MA + MB + MC > p$



Hình 17.11

Xét các tam giác MAB, MBC và MCA ta có:

$MA + MB > AB; MB + MC > BC;$

$MC + MA > CA.$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta được:

$2(MA + MB + MC) > AB + BC + CA.$

Suy ra $MA + MB + MC > \dfrac{AB + BC + CA}{2} = \dfrac{2p}{2} = p.\quad (*)$

- *Chứng minh* $MA + MB + MC < 2p$

Gọi D là giao điểm của tia CM với cạnh AB. Xét ΔMDB có $MB < MD + DB.$

Cộng thêm MC vào hai vế ta được $MB + MC < MC + MD + DB.$

Suy ra $MB + MC < CD + DB.\ (1)$

Xét ΔADC có $CD < AD + AC.$

Cộng thêm DB vào hai vế ta được $CD + DB < DB + AD + AC.$

Suy ra $CD + DB < AB + AC.\qquad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $MB + MC < AB + AC.$

Chứng minh tương tự ta được: $MC + MA < BC + BA;$

$$MA + MB < CA + CB.$$

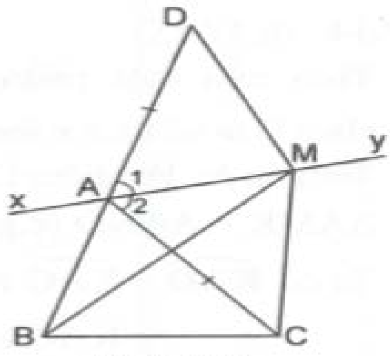
Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta được:

$2(MA + MB + MC) < 2(AB + BC + CA).$

Suy ra $MA + MB + MC < AB + BC + CA = 2p.\quad (**)$

Từ (*) và (**) suy ra $p < MA + MB + MC < 2p$.

17.11. (h.17.12)



Hình 17.12

Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $AD = AC$.

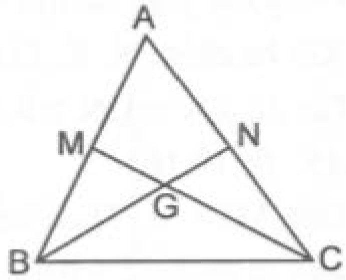
$\Delta AMD = \Delta AMC$ (c.g.c). Suy ra $MD = MC$.

Ta có $AB + AC = AB + AD = BD.\quad (1)$

$MB + MC = MB + MD > BD.\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $AB + AC < MB + MC$.

17.12. (h.17.13)



Hình 17.13

Ta chứng minh bằng phương pháp phản chứng

Giả sử đồng thời xảy ra $BN < \frac{1}{2}AC$ và

$CM < \frac{1}{2}AB$.

Khi đó $BN + CM < \frac{1}{2}(AB + AC).\quad (1)$

Gọi G là giao điểm của BN và CM.

Xét ΔMBG và ΔNCG, theo quan hệ giữa ba cạnh của tam giác ta có:

$BM < GB + GM; GN < GC + GN$.

Suy ra $BM + CN < GB + GM + GC + GN$ hay $BM + CN < BN + CM$

Do đó $BN + CM > BM + CN = \frac{1}{2}(AB + AC).\qquad (2)$

(1) và (2) mâu thuẫn. Vậy điều giả sử là sai.

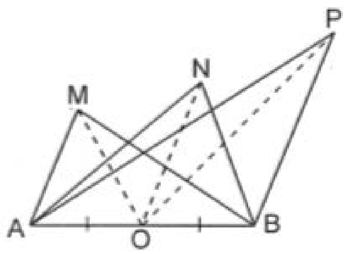
Do đó không thể xảy ra đồng thời $BN < \frac{1}{2}AC$ và $CM < \frac{1}{2}AB$.

17.13. (h.17.14)

Gọi O là trung điểm của AB.

Ta chứng minh được (xem bài 17.7):

$MO < \frac{1}{2}(MA + MB)$;



Hình 17.14

$NO < \frac{1}{2}(NA + NB); PO < \frac{1}{2}(PA + PB).$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta được:

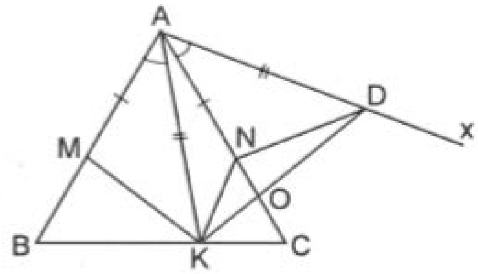
$$MO + NO + PO < \frac{1}{2}(MA + NA + PA) + \frac{1}{2}(MB + NP + PB) = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}s = s.$$

17.14. (h.17.15)

Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa B ta vẽ tia Ax sao cho $\widehat{CAx} = \widehat{BAK}$.

Trên tia Ax lấy điểm D sao cho $AD = AK$.

$\Delta AMK = \Delta AND$ (c.g.c) $\Rightarrow KM = DN$.



Hình 17.15

Ta có $\widehat{KAD} = \widehat{KAC} + \widehat{CAD} = \widehat{KAC} + \widehat{BAK} = 60^o$.

ΔAKD có $AK = AD$ và $\widehat{KAD} = 60^o$ nên là tam giác đều $\Rightarrow KA = KD$.

Gọi O là giao điểm của AC với KD.

Xét ba điểm N, K, D ta có $KN + DN \geq KD$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow N \equiv O$).

Do đó $KN + DN \geq KA$ (vì $KA = KD$).

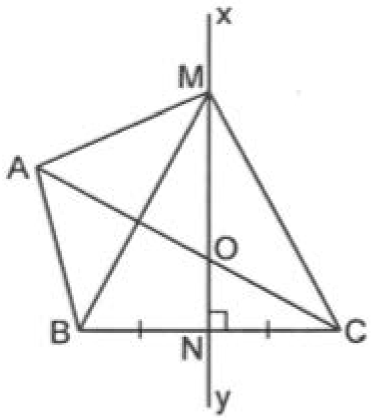
17.15. (h.17.16)

Đặt $AC = b$. Theo bất đẳng thức tam giác ta có $3 - 2 < b < 3 + 2$ hay $1 < b < 5$.

Vì b nguyên nên $b \in \{2; 3; 4\}$.

Mặt khác, tam giác ABC không có hai cạnh nào bằng nhau nên $b = 4cm$.

Vì $M \in$ xy nên ta chứng minh được $MB = MC$.



Hình 17.16

Ta có $MA + MB = MA + MC$.

Xét ba điểm M, A, C ta có $MA + MC \geq AC = 4cm$.

(Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv O$ với O là giao điểm của xy với AC).

Suy ra $MA + MB \geq 4cm$. Do đó tổng $MA + MB$ có giá trị nhỏ nhất là 4cm khi và chỉ khi M là giao điểm của xy với AC.

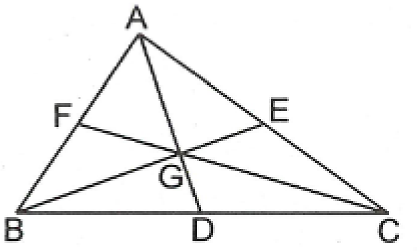
Chuyên đề 18. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN CỦA TAM GIÁC

A. Kiến thức cần nhớ

1. Đường trung tuyến của tam giác là đoạn thẳng nối một đỉnh của tam giác với trung điểm của cạnh đối diện.

2. Ba đường trung tuyến của một tam giác cùng đi qua một điểm (điểm này gọi là trọng tâm của tam giác).

Trọng tâm cách mỗi đỉnh một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ độ dài đường trung tuyến đi qua điểm đó (h.18.1).



Hình 18.1

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC, hai đường trung tuyến BM và CN cắt nhau tại G. Trên tia GB và GC lấy các điểm F và E sao cho G là trung điểm của FM đồng thời là trung điểm của EN. Chứng minh rằng ba đường thẳng AG, BE và CF đồng quy.

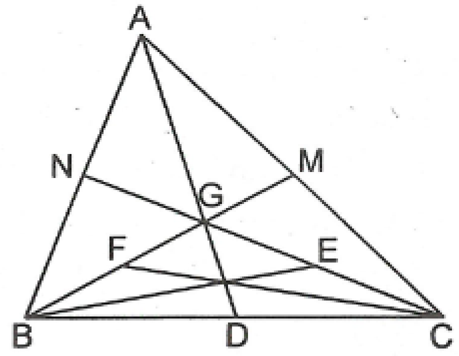
Giải (h.18.2)

* *Tìm cách giải.*

Để chứng minh ba đường thẳng AG, BE và CF đồng quy ta có thể chứng minh chúng là ba đường trung tuyến của tam giác GBC.

* *Trình bày lời giải.*

Gọi D là giao điểm của AG và BC. Vì G là trọng tâm của ΔABC nên AD là đường trung tuyến, suy ra $DB = DC$.



Hình 18.2

Ta có $GF = GM = \frac{1}{3}BM; GE = GN = \frac{1}{3}CN$.

Do đó $GF = FB\left(=\frac{1}{3}BM\right); GE = EC\left(=\frac{1}{3}CN\right)$.

Xét ΔGBC có GD, BE, CF là ba đường trung tuyến nên chúng đồng quy suy ra ba đường thẳng AD, BE, CF đồng quy.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC. Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa C vẽ tia $Bx // AC$. Lấy điểm $D \in Bx$ và điểm E thuộc tia đối của tia CA sao cho BD = CE. Chứng minh rằng ΔABC và ΔADE có cùng một trọng tâm.

Giải (h.18.3)

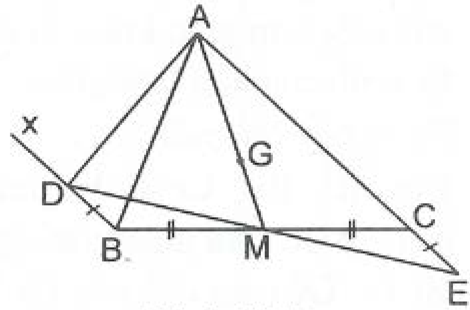
* *Tìm cách giải*

Tam giác ABC và ADE có chung đỉnh A nên muốn chứng minh chúng có cùng một trọng tâm, chỉ cần chứng minh chúng có chung một đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh A.

* *Trình bày lời giải.*

Vì $Bx \,//\, AC$ nên $\widehat{CBx} = \widehat{BCE}$ (so le trong).

Gọi M là trung điểm của BC.



Hình 18.3

Ta có $\Delta BMD = \Delta CME$ (c.g.c).

Suy ra $MD = ME$ (1) và $\widehat{BMD} = \widehat{CME}$.

Ta có $\widehat{BME} + \widehat{CME} = 180^o$ (kề bù).

Do đó $\widehat{BME} + \widehat{BMD} = 180^o \Rightarrow$ D, M, E thẳng hàng. (2)

Từ (1) và (2) suy ra M là trung điểm của DE.

ΔABC và ΔADE chung đỉnh A, chung đường trung tuyến AM nên trọng tâm G của hai tam giác này trùng nhau.

* *Nhận xét:* Để chứng minh hai tam giác có cùng trọng tâm ta có thể chứng minh chúng có chung một đỉnh và chung đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy.

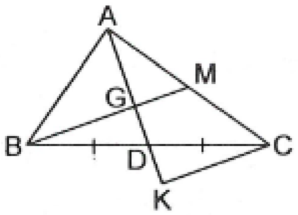
Ví dụ 3: Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AD. Trên tia đối của tia DA lấy điểm K sao cho $DK = \frac{1}{3}AD.$ Qua B vẽ một đường thẳng song song với CK cắt AC tại M. Chứng minh rằng M là trung điểm của AC.

Giải (h.18.4)

* *Tìm cách giải.*

Để chứng minh M là trung điểm của AC ta chứng minh BM là đường trung tuyến. Muốn vậy, chỉ cần chứng minh BM đi qua trọng tâm G.

* *Trình bày lời giải.*



Hình 18.4

Gọi G là giao điểm của BM và AD.

Ta có $\Delta BDG = \Delta CDK$ (g.c.g).

Suy ra $DG = DK = \frac{1}{3}AD.$

Xét ΔABC có điểm G nằm trên đường trung tuyến AD mà $GD = \frac{1}{3}AD$ nên G là trọng tâm.

Suy ra BM là đường trung tuyến do đó $MA = MC$.

Ví dụ 4: Chứng minh rằng ba đường trung tuyến của một tam giác có thể là ba cạnh của một tam giác khác.

Giải (h.18.5)

* *Tìm cách giải.*

Để chứng minh ba đường trung tuyến của tam giác này có thể là ba cạnh của một tam giác khác, ta chứng minh ba đường trung tuyến đó tỉ lệ với ba cạnh của một tam giác.

* *Trình bày lời giải.*

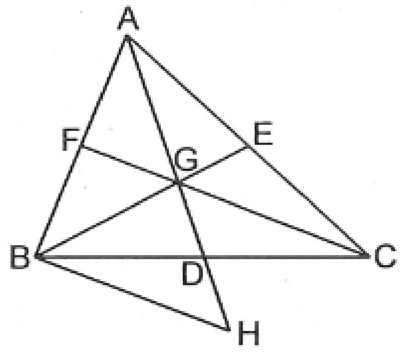
Gọi AD, BE, CF là ba đường trung tuyến của ΔABC. Ba đường trung tuyến cắt nhau tại G. Trên tia đối của tia DG lấy điểm H sao cho $DH = DG$.

Ta có $\Delta CDG = \Delta BDH$ (c.g.c) $\Rightarrow GC = HB$.

Theo tính chất ba đường trung tuyến của ΔABC ta có:

$$AD = \frac{3}{2}GA = \frac{3}{2}GH; BE = \frac{3}{2}GB; CF = \frac{3}{2}GC = \frac{3}{2}BH.$$

Suy ra $\frac{AD}{GH} = \frac{BE}{GB} = \frac{CF}{BH} = \frac{3}{2}$.



Hình 18.5

Vậy ba đường trung tuyến AD, BE, CF tỉ lệ với ba cạnh của tam giác GHB, do đó ba đường trung tuyến này có thể là ba cạnh của một tam giác.

C. Bài tập vận dụng

- *Chứng minh đồng quy, thẳng hàng*

18.1. Chứng minh rằng trong một tam giác có hai cạnh không bằng nhau thì đường trung tuyến ứng với cạnh lớn hơn sẽ nhỏ hơn đường trung tuyến ứng với cạnh bé.

18.2. Cho tam giác nhọn ABC. Vẽ $AH \perp BC$. Cho biết $AB = \sqrt{10}cm$, $AC = \sqrt{13}cm$, và $AH = 3cm$. Gọi O là một điểm trên AH sao cho $AO = 2cm$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và HC.

Chứng minh ba điểm M, O, N thẳng hàng.

- *Chứng minh trọng tâm*

18.3. Cho tam giác ABC. Gọi D và E là hai điểm trên cạnh BC sao cho $BD = DE = EC$. Vẽ đường trung tuyến AO của tam giác ABC. Trên tia đối của tia OA lấy điểm F sao cho $OF = OA$.

a) Chứng minh rằng D là trọng tâm của tam giác BAF; E là trọng tâm của tam giác CAF.

b) Tia AD cắt BF tại N, tia FE cắt AC tại M. Chứng minh rằng tam giác ABC và tam giác AMN có cùng trọng tâm.

18.4. Cho tam giác ABC. Qua A vẽ đường thẳng $a\,//\,BC$. Qua B vẽ đường thẳng $b\,//\,AC$ và qua C vẽ đường thẳng $c\,//\,AB$. Các đường thẳng b và c cắt nhau tại A′ và cắt đường thẳng a lần lượt tại C′ và B′.

Chứng minh rằng ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có cùng một trọng tâm.

18.5. Cho góc xOy và một điểm G ở trong góc đó. Hãy xác định điểm $A \in Ox; B \in Oy$ sao cho G là trọng tâm của tam giác AOB.

- *Tính độ dài các đường trung tuyến*

18.6. Cho tam giác ABC cân tại A, $AB = 3\sqrt{41}cm, BC = 24cm.$

Tính độ dài đường trung tuyến BM.

18.7. Cho tam giác ABC vuông tại A. Các đường trung tuyến BE, CF cắt nhau tại G. Biết $GB = 4\sqrt{61}cm, GC = 2\sqrt{601}cm.$ Tính chu vi tam giác ABC.

18.8. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB^2 = 2AC^2$.

Chứng minh rằng các đường trung tuyến AM và CN vuông góc với nhau.

18.9. Chứng minh rằng tổng ba đường trung tuyến của một tam giác thì lớn hơn $\frac{3}{4}$ chu vi của tam giác đó.

- *Chứng minh trung tuyến, trung điểm*

18.10. Tam giác ABC có hai đường trung tuyến BE và CF bằng nhau. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng $AG \perp BC$.

18.11. Cho tam giác ABC. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $AD = \frac{2}{3}AC.$ Trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $CE = CB.$ Tia BD cắt AE tại điểm M. Trên tia CM lấy điểm N sao cho M là trung điểm của NC. Chứng minh rằng $AN = BC$.

18.12. Cho tam giác ABC và trọng tâm G của nó. Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác cân khi và chỉ khi $AB + GB = AC + GC$.

18.13. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM.

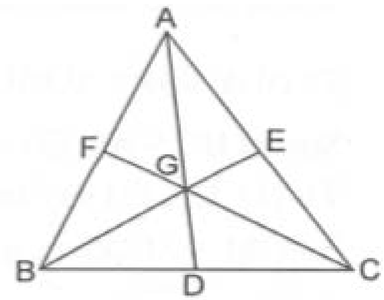
Chứng minh rằng $AM > \frac{1}{2}BC$ khi và chỉ khi $\widehat{A} < 90^o$.

18.14. Cho tam giác ABC trọng tâm G.

Chứng minh rằng nếu $\widehat{BGC} < 90^o$ thì $AB + AC > 3BC$.

Hướng dẫn giải

18.1. (h.18.6)



Hình 18.6

Xét tam giác ABC có BE và CF là hai đường trung tuyến cắt nhau tại G.

Giả sử $AC > AB$, ta phải chứng minh $BE < CF$.

Ta vẽ thêm đường trung tuyến AD, theo tính chất ba đường trung tuyến ta có AD đi qua G.

- Xét ΔADB và ΔADC có:

  $DB = DC$, AD chung và $AB < AC$ nên $\widehat{ADB} < \widehat{ADC}$ (định lí hai tam giác có hai cặp cạnh bằng nhau).

- Xét ΔGDB và ΔGDC có: $DB = DC$, GD chung và $\widehat{ADB} < \widehat{ADC}$ (chứng minh trên) nên $GB < GC$, suy ra $\frac{2}{3}BE < \frac{2}{3}CF$, do đó $BE < CF$.

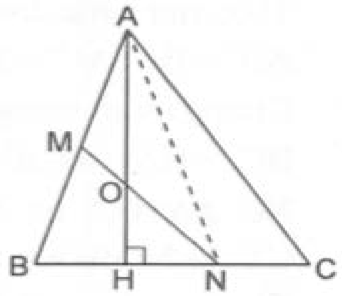
18.2. (h.18.7)

Áp dụng định lí Py-ta-go vào các tam giác vuông ABH và ACH ta tính được HB = 1cm, HC = 2cm.

Vì N là trung điểm của HC nên $HN = NC = 1$cm.

Do đó $HN = HB = 1$cm.

Vậy AH là đường trung tuyến của ΔABN.



Hình 18.7

Mặt khác $AH = 3cm, AO = 2cm$ nên $AO = \frac{2}{3}AH$, suy ra O là trọng tâm của ΔABN.

Ta có NM là một đường trung tuyến của ΔNAB, do đó NM phải đi qua trọng tâm O. Vậy ba điểm M, N, O thẳng hàng.

18.3. (h18.8)

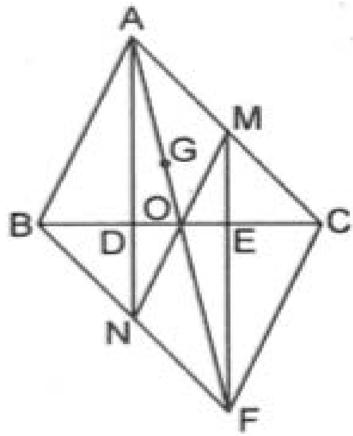
a) Xét ΔBAF có $OA = OF$ nên BO là đường trung tuyến.

Điểm D nằm trên đường trung tuyến BO mà $BD = \frac{1}{3}BC = \frac{2}{3}BO$ (vì $BC = 2BO$) nên D là trọng tâm của ΔBAF.

Chứng minh tương tự ta được E là trọng tâm của ΔCAF.

b) Vì D là trọng tâm của ΔBAF nên đường thẳng AD là một đường trung tuyến.

Vì AD cắt BF tại N nên $FN = BN = \frac{1}{2}BF$. (1)



Hình 18.8

Chứng minh tương tự ta được $AM = MC = \frac{1}{2}AC$. (2)

Ta có $\Delta OFB = \Delta OAC$ (c.g.c).

Suy ra $BF = AC\,(3)$ và $\widehat{OFB} = \widehat{OAC}$.

Từ (1), (2), (3) suy ra $AM = FN$.

$\Delta AOM = \Delta FON$ (c.g.c), suy ra $OM = ON\,(4)$ và $\widehat{AOM} = \widehat{FON}$.

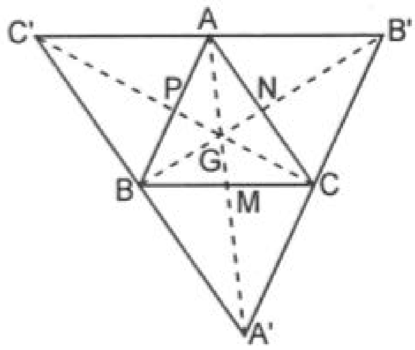
Ta có $\widehat{AOM} + \widehat{FOM} = 180^o$ (kề bù).

Suy ra $\widehat{FON} + \widehat{FOM} = 180^o$, do đó ba điểm M, O, N thẳng hàng. (5)

Từ (4) và (5) suy ra O là trung điểm của MN do đó AO là đường trung tuyến của ΔAMN.

ΔABC và ΔAMN có chung đỉnh A, chung đường trung tuyến AO nên có cùng trọng tâm G.

18.4. (h.18.9)



Hình 18.9

Theo tinh chất đoạn chắn song song ta có $AB' = BC, AC' = BC$ suy ra $AB' = AC'$.

Chứng minh tương tự ta được $BC' = BA'$ và $CA' = CB'$.

Xét $\Delta A'B'C'$, ba đường thẳng $A'A, B'B, C'C$ là ba đường trung tuyến nên chúng đồng quy tại một điểm G.

Gọi M là giao điểm của AA' với BC; N là giao điểm của BB' với AC; P là giao điểm của CC' với AB.

Ta có $\Delta AMC = \Delta A'MB\,(\text{c.g.c})$ suy ra $MC = MB$.

Vậy AM là đường trung tuyến ứng với cạnh BC của ΔABC.

Chứng minh tương tự ta được BN, CP là đường trung tuyến tương ứng với cạnh AC, AB của ΔABC.

Ba đường trung tuyến AM, BN, CP của ΔABC gặp nhau tại một điểm. Mặt khác ba đường thẳng AM, BN, CP cũng là ba đường thẳng $A'A, B'B, C'C$. Do đó trọng tâm G của $\Delta A'B'C'$ cũng là trọng tâm của ΔABC.

18.5. (h.18.10)

- *Tìm cách giải*

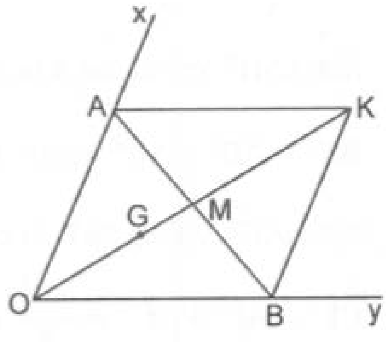
Giả sử đã vẽ được tam giác AOB sao cho G là trọng tâm của nó. Tia OG cắt AB tại trung điểm M. Trên tia OG lấy điểm K sao cho $OK = 3OG$. Ta chứng minh được

$\Delta AMK = \Delta BMO(\text{c.g.c}); \Delta AMO = \Delta BMK(\text{c.g.c})$.

Suy ra $KA // Oy; KB // Ox$. Do đó xác định được A và B.

- *Trình bày lời giải.*

- Vẽ tia OG, trên đó lấy điểm K sao cho $OK = 3OG$.
- Từ K vẽ $KA // Oy (A \in Ox)$ và $KB // Ox (B \in Oy)$
- Vẽ đoạn thẳng AB cắt OK tại M. Khi đó G là trọng tâm của ΔAOB.



Hình 18.10

Thực vậy, ta có $AK = OB$ (tính chất đoạn chắn song song).

$\Delta AMK = \Delta BMO(\text{g.c.g})$, suy ra $MA = MB\ (1)$ và $MK = MO$.

Vì $OK = 3OG$ nên $OM = \frac{3}{2}OG$ hay $OG = \frac{2}{3}OM$. $\quad (2)$

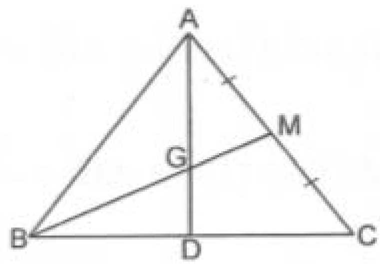
Từ (1) và (2) suy ra G là trọng tâm của ΔAOB.

18.6. (h.18.11)

Vẽ các đường trung tuyến AD, BM cắt nhau tại G.

Ta có $\Delta ADB = \Delta ADC(\text{c.c.c})$. Suy ra $DB = DC = 12cm; \widehat{ADB} = \widehat{ADC} = 180^o : 2 = 90^o$.

Áp dụng định lí Py-ta-go vào ΔABD vuông tại D ta được



Hình 18.11

$AD^2 = AB^2 - BD^2 = (3\sqrt{41})^2 - 12^2 = 225 \Rightarrow AD = 15(cm)$

Vì G là trọng tâm của ΔABC nên $GD = \frac{1}{3}AD = 5cm$.

Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác GBD vuông tại D ta được

$GB^2 = GD^2 + BD^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \Rightarrow GB = 13(cm)$.

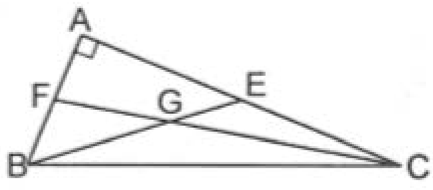
Suy ra $BM = \frac{3}{2}BG = \frac{3}{2}.13 = 19,5(cm)$.

18.7. (h.18.12)

Vì G là trọng tâm của ΔABC nên

$BE = \dfrac{3}{2}BG = \dfrac{3}{2}.4\sqrt{61} = 6\sqrt{61}\left(cm\right).$

$CF = \dfrac{3}{2}CG = \dfrac{3}{2}.2\sqrt{601} = 3\sqrt{601}\left(cm\right).$



Hình 18.12

- Xét ΔABE vuông tại A ta có:

$$BE^2 = AB^2 + AE^2 = AB^2 + \dfrac{AC^2}{4} = \left(6\sqrt{61}\right)^2 = 2196. \quad (1)$$

- Xét ΔACF vuông tại A ta có:

$$CF^2 = AF^2 + AC^2 = \dfrac{AB^2}{4} + AC^2 = \left(3\sqrt{601}\right)^2 = 5409. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra $\dfrac{5}{4}\left(AB^2 + AC^2\right) = 7605.$

Mặt khác $AB^2 + AC^2 = BC^2. \quad (3)$

Suy ra $\dfrac{5}{4}BC^2 = 7605 \Rightarrow BC^2 = 6084 \Rightarrow BC = 78\left(cm\right).$

Ta viết (3) thành $AB^2 + \dfrac{AC^2}{4} + \dfrac{3AC^2}{4} = 6084. \qquad (*)$

Mà theo (1) thì $AB^2 + \dfrac{AC^2}{4} = 2196. \qquad (**)$

So sánh (*) và (**) ta được $\dfrac{3}{4}AC^2 = 6084 - 2196 = 3888$

$\Rightarrow AC^2 = 5184 \Rightarrow AC = 72\left(cm\right).$

Từ đó ta tính được $AB^2 = BC^2 - AC^2 = 6084 - 5184 = 900$

$\Rightarrow AB = 30cm.$

Vậy chu vi ΔABC là: $78 + 72 + 30 = 180\left(cm\right).$

18.8. (h.18.13)

Đặt $AC = b.$Áp dụng định lí Py-ta-go cho ΔABC vuông tại A ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 2AC^2 + AC^2 = 3AC^2 = 3b^2 = \left(\sqrt{3}b\right)^2$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{3}b \Rightarrow AM = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{\sqrt{3}}{2}b.$$

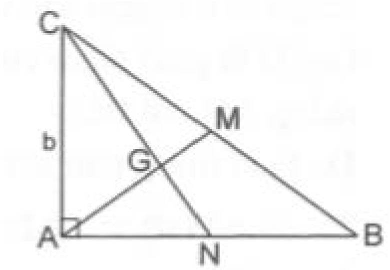
Áp dụng định lí Py-ta-go cho ΔACN vuông tại A ta có:

$$CN^2 = AC^2 + AN^2 = AC^2 + \frac{AB^2}{4} = AC^2 + \frac{2AC^2}{4} = \frac{6b^2}{4} = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}b\right)^2 \Rightarrow CN = \frac{\sqrt{6}}{2}b.$$

Gọi G là trọng tâm của ΔABC, ta có

$$CG = \frac{2}{3}CN = \frac{2}{3}.\frac{\sqrt{6}}{2}.b = \frac{\sqrt{6}}{3}b \Rightarrow CG^2 = \frac{2}{3}b^2.$$

$$AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}.b = \frac{\sqrt{3}}{3}b \Rightarrow AG^2 = \frac{1}{3}b^2.$$



Hình 18.13

Xét ΔGAC có $CG^2 + AG^2 = \frac{2}{3}b^2 + \frac{1}{3}b^2 = b^2$ mà

$AC^2 = b^2$ nên $AC^2 = CG^2 + AG^2$.

Do đó theo định lí Py-ta-go đảo ta được ΔGAC vuông tại G. Suy ra $AM \perp CN$.

18.9. (h.18.14)

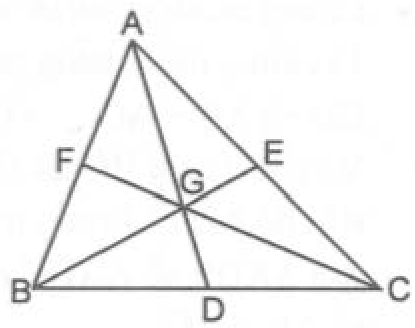
Xét ΔABC có các đường trung tuyến AD, BE, CF cắt nhau tại G.

Xét ΔGBC ta có $GB + GC > BC \Rightarrow \frac{2}{3}(BE + CF) > BC$

$\Rightarrow BE + CF > \frac{3}{2}BC.(1)$

Tương tự, ta có $CF + AD > \frac{3}{2}CA;\quad (2)$

$AD + BE > \frac{3}{2}AB.\qquad (3)$



Hình 18.14

Cộng từng vế các bất đẳng thức (1) (2) (3) ta được:

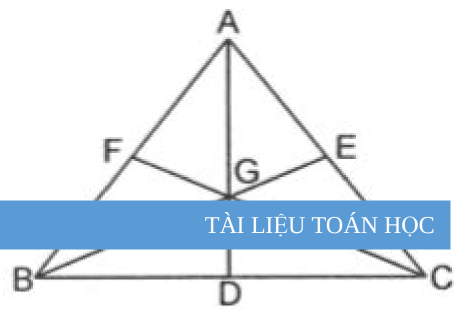
$$2(BE + CF + AD) > \frac{3}{2}(BC + CA + AB).$$

Suy ra $BE + CF + AD > \frac{3}{4}(BC + CA + AB)$.

Nhận xét: Trong bài 17.7 ta đã chứng minh được AD + BE + CF lớn hơn nửa chu vi tam giác. Như vậy kết quả bài này "mạnh" hơn kết quả ở bài 17.7.

18.10. (h.18.15)

Xét ΔABC có BE và CF là hai đường trung tuyến và $BE = CF$.



Hình 18.15

Vì G là trọng tâm nên $GB = \frac{2}{3}BE, GC = \frac{2}{3}CF$ do đó $GB = GC; GE = GF$.

Ta có $\Delta GBF = \Delta GCE$ (c.g.c)

$\Rightarrow BF = CE$, dẫn tới $AB = AC$.

Gọi D là giao điểm của đường thẳng AG với BC.

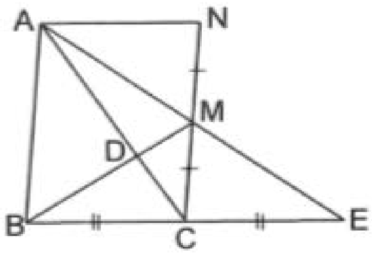
Do G là trọng tâm nên AG là đường trung tuyến. Suy ra $DB = DC$.

Ta có $\Delta ADB = \Delta ADC$ (c.c.c), do đó $\widehat{ADB} = \widehat{ADC} = 180^o : 2 = 90^o$.

Vậy $AG \perp BC$.

18.11. (h.18.16)

Xét ΔABE có AC là đường trung tuyến. Mặt khác $D \in AC$ và $AD = \frac{2}{3}AC$ nên D là trọng tâm của ΔABE.



Hình 18.16

Suy ra đường thẳng BD chứa đường trung tuyến ứng với cạnh AE, do đó $MA = ME$.

Ta có $\Delta AMN = \Delta EMC$ (c.g.c) $\Rightarrow AN = EC$. Do đó $AN = BC$ (vì $BC = EC$).

18.12. (h.18.17)

- *Chứng minh mệnh đề nếu* $AB + GB = AC + GC$ thì ΔABC *cân tại* A.

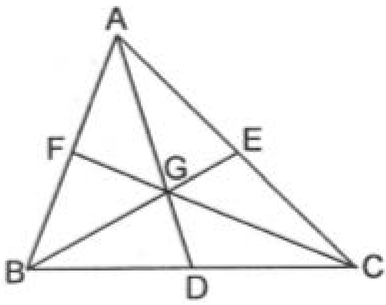
  Ta chứng minh bằng phản chứng.

  Giả sử $AB < AC$. (1)

  Vẽ tia AG cắt BC tại D.

  Khi đó AD là đường trung tuyến nên $DB = DC$.

  Xét ΔADB và ΔADC có: AD chung; $DB = DC$ và $AB < AC$ nên $\widehat{ADB} < \widehat{ADC}$ (định lí hai tam giác có hai cặp cạnh bằng nhau).



Hình 18.17

  Xét ΔGDB và ΔGDC có: GD chung; $DB = DC$ và $\widehat{GDB} < \widehat{GDC}$ (chứng minh trên) nên $GB < GC$. (2)

  Từ (1) và (2) suy ra $AB + GB < AC + GC$ (trái giả thiết).

  Vậy điều giả sử $AB < AC$ là sai. (*)

  Nếu $AB > AC$ ta cũng đi đến mâu thuẫn vậy $AB > AC$ là sai (**)

Từ (*) và (**) suy ra $AB = AC$ do đó ΔABC cân tại A.

- *Chứng minh mệnh đề nếu* ΔABC cân tại A thì $AB + GB = AC + GC$.

Gọi E là giao điểm của BG voi AC; F là giao điểm của CG với AB.

Khi đó $EA = EC; FA = FB$.

$\Delta ABE = \Delta ACF\,(\text{c.g.c}) \Rightarrow BE = CF$, do đó $\frac{2}{3}BE = \frac{2}{3}CF$, dẫn tới $GB = GC$.

Suy ra $AB + GB = AC + GC$.

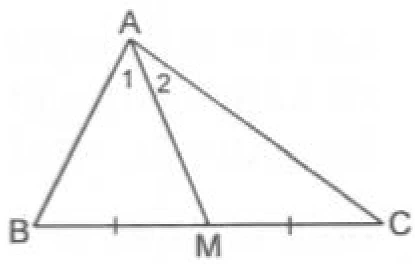
18.13. (h.18.18)

- *Chứng minh mệnh đề nếu* $\widehat{A} < 90^o$ thì $AM > \frac{1}{2}BC$.

Ta chứng minh bằng phản chứng.

Giả sử $AM = \frac{1}{2}BC$, khi đó $\widehat{A} = 90^o$, trái giả thiết.

Giả sử $AM < \frac{1}{2}BC$, tức là $AM < BM$ và $AM < MC$.



Hình 18.18

Xét ΔABM có $AM < BM \Rightarrow \widehat{B} < \widehat{A_1}$. Xét ΔACM có $AM < CM \Rightarrow \widehat{C} < \widehat{A_2}$.

Do đó $\widehat{B} + \widehat{C} < \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = \widehat{BAC}$.

Suy ra $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} < 2\widehat{A} \Rightarrow \widehat{A} > \frac{180^o}{2} = 90^o$ trái giả thiết.

Vậy nếu $\widehat{A} < 90^o$ thì $AM > \frac{1}{2}BC$.

- *Chứng minh mệnh đề nếu* $AM > \frac{1}{2}BC$ thì $\widehat{A} < 90^o$.

Ta có $AM > \frac{1}{2}BC$ tức là $AM > BM$ và $AM > CM$.

Xét ΔABM có $AM > BM \Rightarrow \widehat{B} > \widehat{A_1}$. Xét ΔACM có $AM > CM \Rightarrow \widehat{C} > \widehat{A_2}$.

Do đó $\widehat{B} + \widehat{C} > \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = \widehat{BAC}$. Suy ra $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} > 2\widehat{A} \Rightarrow \widehat{A} < \frac{180^o}{2} = 90^o$.

18.14. (h.18.19)

Gọi D là giao điểm của tia AG với BC.

Ta có $DB = DC$ do đó GD là đường trung tuyến của tam giác GBC.

Xét ΔGBC có $\widehat{BGC} < 90^o$ (giả thiết) suy ra $GD > \frac{1}{2}BC$

(xem bài 17.13) do đó $AD > \frac{3}{2}BC$. (1)

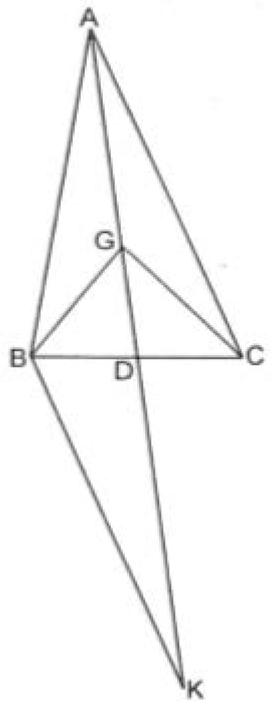
Trên tia AD lấy điểm sao cho $DK = DA.$.

$\Delta ACD = \Delta KBD(\text{c.g.c})$.Suy ra $AC = BK$.

Xét ΔABK có $AB + BK > AK$.

Do đó $AB + AC > 2AD.\ (2)$

Từ (1) và (2), suy ra $AB + AC > 2.\frac{3}{2}.BC = 3BC$.



Hình 18.19

Chương

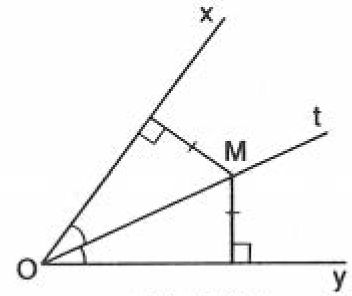
Chuyên đề 19. TÍNH CHẤT TIA PHÂN GIÁC CỦA MỘT GÓC. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

A. Kiến thức cần nhớ

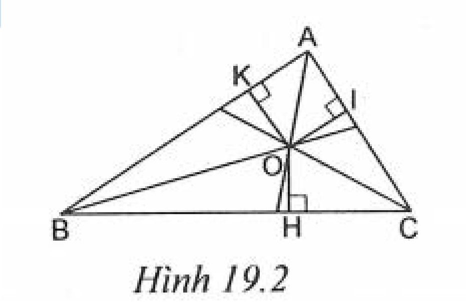
1. Điểm nằm trên tia phân giác của một góc thì cách đều hai cạnh của góc đó (h.19.1).

2. Đảo lại, điểm nằm bên trong một góc và cách đều hai cạnh của góc thì nằm trên tia phân giác của góc đó.

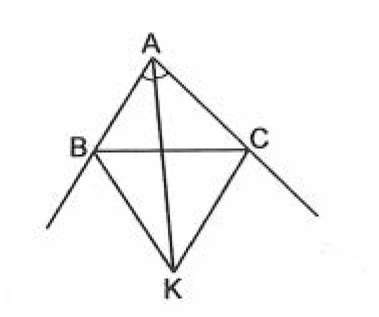
3. Ba đường phân giác của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm này cách đều ba cạnh của tam giác đó (h.19.2).



Hình 19.1



Hình 19.2



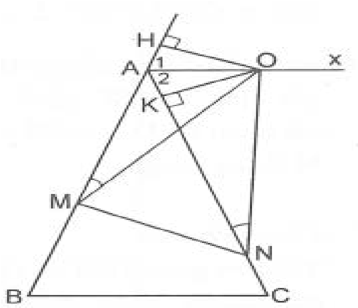
Hình 19.3

4. Trong một tam giác, hai đường phân giác của hai góc ngoài và đường phân giác của góc trong không kề cùng đi qua một điểm (h.19.3).

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác *ABC* cân tại *A*. Trên nửa mặt phẳng bờ *AC* không chứa *B* vẽ tia $Ax//BC$. Lấy điểm *O* trên tia *Ax*, điểm *M* trên *AB* và điểm *N* trên *AC* sao cho $\widehat{AMO} = \widehat{ANO}$. Chứng minh rằng ΔOMN là tam giác cân.

Giải (h.19.4)



Hình 19.4

**** Tìm cách giải.***

Ta có $Ax//BC$ nên dễ thấy *Ax* là tia phân giác của góc ngoài tại đỉnh *A* của tam giác *ABC*. Vì điểm *O* nằm trên tia phân giác này nên ta vẽ $OH \perp AB$, $OK \perp AC$ để vận dụng tính chất cách đều hai cạnh của điểm *O*. Từ đó dùng phương pháp tam giác bằng nhau để chứng minh $OM = ON$.

*** Trình bày lời giải.**

Ta có $Ax//BC$ nên $\widehat{A_1} = \widehat{B}$ (cặp góc đồng vị); $\widehat{A_2} = \widehat{C}$ (cặp góc so le trong).

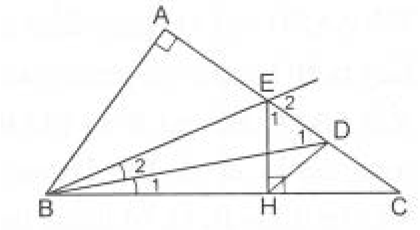
Mặt khác, $\widehat{B} = \widehat{C}$ (hai góc ở đáy của tam giác cân) nên $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$.

Vẽ $OH \perp AB$, $OK \perp AC$ ta được $OH = OK$ (tính chất điểm nằm trên tia phân giác).

Ta chứng minh được $\Delta HOM = \Delta KON$ (g.c.g). Suy ra $OM = ON$, do đó ΔOMN cân.

Ví dụ 2. Cho tam giác *ABC* vuông tại A, $AB < AC$. Trên cạnh *AC* lấy điểm *D* sao cho $AD = AB$. Gọi *E* là một điểm nằm giữa *A* và *D* sao cho tia *BD* là tia phân giác của góc *CBE*. Vẽ $EH \perp BC$. Tính số đo của góc *CHD*.

Giải (h.19.5)



Hình 19.5

*** Tìm cách giải.**

Vẽ hình chính xác, ta dự đoán $\widehat{CHD} = 45°$. Do đó cần chứng minh *HD* là đường phân giác của góc *CHE*. Muốn vậy phải chứng minh *EC* là đường phân giác ngoài tại đỉnh *E* của tam giác *EBH*.

*** Trình bày lời giải.**

Ta có $\widehat{E}_1 = \widehat{ABC}$ (cùng phụ với góc *C*). Do đó $\widehat{E}_1 = \widehat{ABD} + \widehat{B}_1$. (1)

Lại có $\widehat{E_2} = \widehat{D_1} + \widehat{B_2}$ (2) (tính chất góc ngoài của ΔEBD).

Mặt khác, $\widehat{ABD} = \widehat{D_1}\left(= 45°\right)$ và $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$ nên $\widehat{E}_1 = \widehat{E}_2$.

Xét ΔEBH có *D* là giao điểm của đường phân giác góc *B* với đường phân giác góc ngoài tại đỉnh *E* nên *HD* là đường phân giác góc ngoài tại đỉnh *H*.

Suy ra $\widehat{CHD} = 90° : 2 = 45°$.

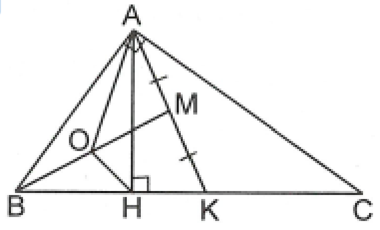
Ví dụ 3. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*. Vẽ $AH \perp BC$. Tia phân giác của góc *HAC* cắt *BC* tại *K*. Các đường phân giác của góc *BAH* và góc *BHA* cắt nhau tại *O*. Gọi *M* là trung điểm của *AK*. Chứng minh ba điểm *B, O, M* thẳng hàng.

Giải (h.19.6)

*** Tìm cách giải.**

Xét tam giác *ABH* có *O* là giao điểm của hai đường phân giác nên *O* nằm trên đường phân giác của góc B. Để chứng minh ba điểm *B, O, M* thẳng hàng ta chỉ cần chứng minh *M* cũng nằm trên đường phân giác của góc *B*. Muốn thế ta phải chứng minh tam giác *BAK* cân tại *B*.

*** Trình bày lời giải.**



Hình 19.6

Ta có: $\widehat{BAK}+\widehat{KAC}=90°$ (vì $\widehat{BAC}=90°$) ;

$\widehat{BKA}+\widehat{KAH}=90°$ (vì $\widehat{AHK}=90°$).

Mặt khác, $\widehat{KAC}=\widehat{KAH}$ nên $\widehat{BAK}=\widehat{BKA},$ suy ra ΔBAK cân tại *B*.

Xét ΔABH có *O* là giao điểm của hai đường phân giác của góc *A* và góc *H*. Suy ra *BO* là đường phân giác của góc *B*.

Xét ΔBAK cân tại B có *BO* là đường phân giác nên đồng thời là đường trung tuyến, do đó *BO* đi qua trung điểm *M* của *AK*.

Vậy ba điểm *B, O, M* thẳng hàng.

C. Bài tập vận dụng

• Tính góc đo, tính độ dài

19.1. Cho tam giác *ABC*. Gọi *K* là giao điểm của đường phân giác góc *B* với đường phân giác góc ngoài tại đỉnh *C*.

Cho biết $\widehat{AKC}=65°,$ tính số đo của góc *ABC*.

19.2. Cho tam giác *ABC*. Ba đường phân giác *AD, BE, CF* cắt nhau tại *O*. Cho biết $\widehat{BOC}=150°,$ tính số đo của góc *EDF*.

19.3. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*. Các tia phân giác của góc *B*, góc *C* cắt nhau Tại *O*. Cho biết $OA=\sqrt{8}cm.$

Tính khoảng cách từ *O* đến ba cạnh của tam giác.

19.4. Cho tam giác $ABC,\ AB=3cm,\ AC=5cm,\ BC=6cm.$ Gọi *O* là giao điểm các đường phân giác của góc *B*, góc C. Vẽ $OH\perp BC.$

Tính các độ dài *HB* và *HC*.

• Chứng minh tia phân giác

19.5. Cho tam giác *ABC* vuông cân tại *A*. Vẽ tam giác *OBC* vuông tại *O* sao cho *O* và *A* thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ *BC*.

Chứng minh rằng tia *OA* là tia phân giác của góc *BOC*.

19.6. Cho tam giác *ABC* vuông cân tại *A*. Gọi *M* là trung điểm của *BC*. Lấy điểm *N* nằm giữa *M* và *C*. Vẽ $BH \perp AN$. Chứng minh rằng khi điểm *N* di động thì tia phân giác của góc *BHN* luôn đi qua một điểm cố định.

19.7. Cho tam giác *ABC*. Trên tia đối của tia *BC* lấy điểm *M*, trên tia đối của tia *CB* lấy điểm *N* sao cho $BM = BA$ và $CN = CA$. Vẽ $BH \perp AM$, $CK \perp AN$. Hai đường thẳng *BH* và *CK* cắt nhau tại *O*.

Chứng minh rằng tia *AO* là tia phân giác của góc *BAC*.

19.8. Cho tam giác *ABC*, $\widehat{A} = 120°$. Các đường phân giác của góc *B*, góc *C* cắt nhau tại *O*. Vẽ tia *Bx* sao cho *BA* là tia phân giác của góc *OBx*. Vẽ tia *Cy* sao cho *CA* là tia phân giác của góc *OCy*. Hai tia *Bx* và *CA* cắt nhau tại *E*; hai tia *Cy* và *BA* cắt nhau tại *D*. Chứng minh rằng:

a) Tam giác *ODE* là tam giác đều;

b) Tia *OA* là tia phân giác của góc *DOE*.

19.9. Cho tam giác *ABC*. Nếu cách vẽ đoạn thẳng $MN // BC$ $(M \in AB,\ N \in AC)$ sao cho $BM + CN = BC$.

19.10. Cho tam giác *ABC*, $\widehat{A} = 105°$, $\widehat{B} = 40°$. Vẽ điểm *D*, điểm *M* trên cạnh *BC* sao cho $AD \perp AC$ và *AD* là đường phân giác của góc *BAM*.

Chứng minh rằng $AB + AM = BC$.

• **Chứng minh thẳng hàng, đồng quy**

19.11. Cho tam giác *ABC*. Gọi *D, E, F* lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh *BC, CA* và *AB* sao cho $BF = BD$ và $CE = CD$. Đường thẳng qua *B* và vuông góc với *DF* cắt đường thẳng qua *C* và vuông góc với *DE* tại *I*. Đường thẳng qua *B* và song song với *DF* cắt đường thẳng qua *C* và song song với *DE* tại *K*. Chứng minh rằng ba điểm *A, I, K* thẳng hàng.

19.12. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*, tam giác *DBC* vuông tại *D* trong đó *A* và *D* thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ *BC*. Vẽ tia *Ax* sao cho *AC* là tia phân giác của góc *DAx*. Vẽ tia *Dy* sao cho *DB* là tia phân giác của góc *ADy*. Hai tia *Ax* và *Dy* cắt nhau tại *K*.

Chứng minh rằng ba điểm *B, K, C* thẳng hàng.

19.13. Hãy nếu cách vẽ một đường thẳng chứa tia phân giác của một góc có đỉnh nằm ngoài tờ giấy

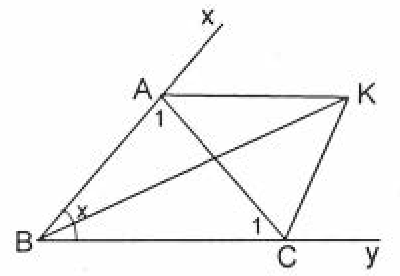
19.14. Cho tam giác *ABC* cân tại *A*. Qua *A* vẽ đường thẳng $xy // BC$. Các đường phân giác của góc *B*, góc *C* cắt nhau tại *O* và cắt *xy* lần lượt tại *D* và *E*.

Chứng minh rằng các đường thẳng *BE, CD* và *AO* cùng đi qua một điểm.

Hướng dẫn giải

19.1. (h.19.7)

Xét ΔABC có đường phân giác của góc *B* và đường phân giác ngoài tại đỉnh *C* cắt nhau tại *K*. Suy ra *AK* là đường phân giác ngoài tại đỉnh *A*.



Hình 19.7

Ta đặt $\widehat{ABC} = x$ (độ) thì $\widehat{CAx} = x + \widehat{C}_1$;

$\widehat{ACy} = x + \widehat{A}_1$.

Do đó $\widehat{CAx} + \widehat{ACy} = x + \widehat{C}_1 + x + \widehat{A}_1 = x + 180°$.

Suy ra $\dfrac{\widehat{CAx} + \widehat{ACy}}{2} = 90° + \dfrac{x}{2}$

Xét ΔAKC có $\widehat{AKC} = 180° - \dfrac{\widehat{CAx} + \widehat{ACy}}{2} = 180° - \left(90° + \dfrac{x}{2}\right) = 90° - \dfrac{x}{2}$

Vì $\widehat{AKC} = 65°$ nên $90° - \dfrac{x}{2} = 65° \Rightarrow x = 50°$.

19.2. (h.19.8)

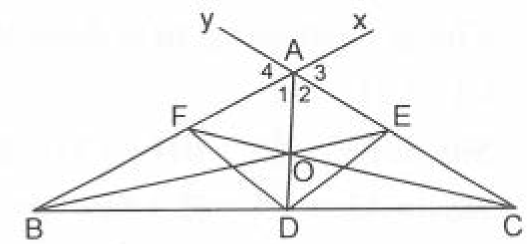
Xét ΔBOC có $\widehat{BOC} = 180° - \dfrac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2}$

$= 180° - \dfrac{180° - \widehat{BAC}}{2} = 90° + \dfrac{\widehat{BAC}}{2}$

Mà $\widehat{BOC} = 150°$ nên $90° + \dfrac{\widehat{BAC}}{2} = 150°$

$\Rightarrow \widehat{BAC} = 120°$

Vẽ các tia *Ax*, *Ay* lần lượt là tia đối của các tia *AB*, *AC*.



Hình 19.8

Dễ thấy $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \widehat{A}_3 = \widehat{A}_4 = 60°$.

Xét ΔABD có *AC* là đường phân giác ngoài tại đỉnh *A*; *BO* là đường phân giác trong không kề. Hai đường phân giác này cắt nhau tại *E*, suy ra *DE* là đường phân giác góc ngoài tại đỉnh *D* của ΔABD

Chứng minh tương tự ta được *DF* là đường phân giác góc ngoài tại đỉnh *D* của ΔACD.

Suy ra $DE \perp DF$ (hai đường phân giác của hai góc kề bù), do đó $\widehat{EDF} = 90°$.

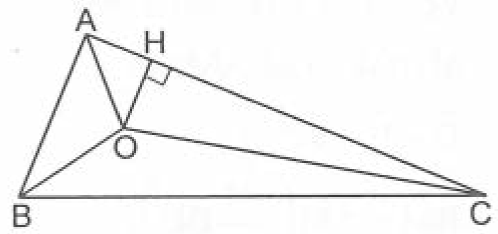
19.3. (h.19.9)

Vì O là giao điểm các đường phân giác của góc B, góc C nên AO là đường phân giác góc A, do đó

$\widehat{OAB} = \widehat{OAC} = 45°$.

Vẽ $OH \perp AC$ thì ΔHAO vuông cân tại H, suy ra $AH = OH$.

Áp dụng định lí Py-ta-go, ta có:

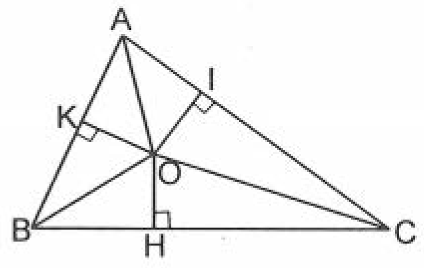


Hình 19.9

$$AH^2 + OH^2 = OA^2 \Rightarrow 2OH^2 = \left(\sqrt{8}\right)^2 = 8 \Rightarrow OH^2 = 4 \Rightarrow OH = 2.$$

Vậy khoảng cách từ O tới mỗi cạnh của tam giác là 2cm.

19.4. (h.19.10)



Hình 19.10

Vẽ thêm $OK \perp AB;\ OI \perp AC$.

$\Delta AOK = \Delta AOI$ (cạnh huyền, góc nhọn) $\Rightarrow AK = AI$.

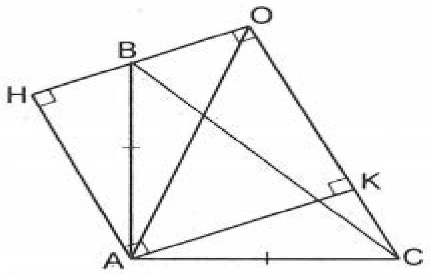
Chứng minh tương tự ta được $BK = BH;\ CI = CH$.

Suy ra $BK + CI = BH + CH = BC = 6cm$.

Do đó $AK + AI = (3+5) - 6 = 2cm$ mà $AK = AI$ nên $AK = AI = 1\ cm$. Vậy $BK = 3 - 1 = 2cm \Rightarrow BH = 2cm$ và $CH = 6 - 2 =\ 4cm$.

19.5. (h.19.11)

Vẽ $AH \perp OB,\ AK \perp OC,$ ta được



Hình 19.11

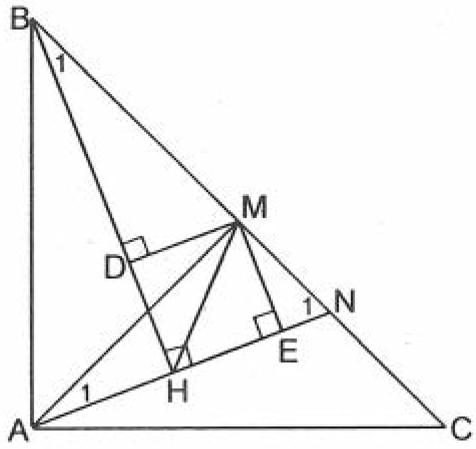
$\widehat{ABH} = \widehat{ACK}$ (hai góc có cạnh tương ứng vuông góc).

$\Delta ABH = \Delta ACK$ (cạnh huyền, góc nhọn).

Suy ra $AH = AK$.

Điểm A ở trong góc BOC và cách đều hai cạnh của góc này nên A nằm trên tia phân giác của góc đó. Như vậy tia OA là tia phân giác của góc BOC.

19.6. (h.19.12)



Hình 19.12

Vẽ $MD \perp BH$, $ME \perp AN$.

ΔDBM và ΔEAM có:

$\widehat{D} = \widehat{E} = 90°$;

$BM = AM\left(= \dfrac{1}{2}BC\right)$;

$\widehat{B}_1 = \widehat{A}_1$ (cùng phụ với $\widehat{N}_1$).

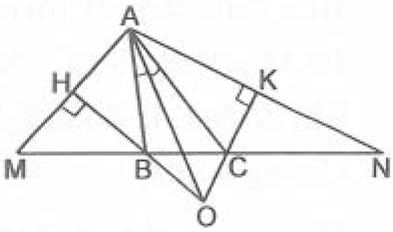
Do đó $\Delta DBM = \Delta EAM$ (cạnh huyền, góc nhọn).

Suy ra $MD = ME$.

Điểm M cách đều hai cạnh của góc BHN nên HM là tia phân giác của góc BHN.

Nói cách khác tia phân giác của góc BHN luôn đi qua một điểm cố định là điểm M.

19.7. (h. 19.13)



Hình 19.13

$\Delta ABH = \Delta MBH$ (cạnh huyền, cạnh góc vuông).

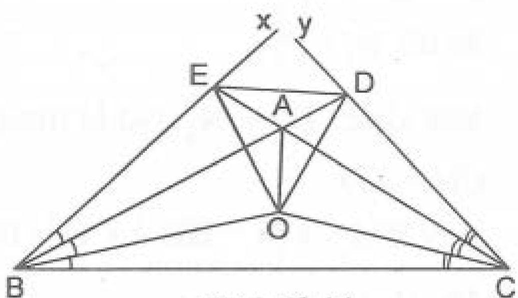
Suy ra $\widehat{ABH} = \widehat{MBH}$.

Chứng minh tương tự ta được $\widehat{ACK} = \widehat{NCK}$.

Xét ΔABC có BH và CK là hai đường phân giác ngoài tại đỉnh B và đỉnh C cắt nhau tại O nên AO là đường phân giác của góc BAC.

19.8. (h.19.14)

a) Xét ΔABC có hai đường phân giác góc B, góc C cắt nhau tại O. Suy ra tia AO là đường phân giác thứ ba.



Hình 19.14

Từ đó ta được $\widehat{BAO} = \widehat{CAO} = \widehat{CAD}$

$= \widehat{BAE} = 60°$.

$\Delta BAE = \Delta BAO\ (g.c.g) \Rightarrow BE = BO$.

$\Delta CAD = \Delta CAO\ (g.c.g) \Rightarrow CD = CO$.

Do đó $\Delta BDE = \Delta BDO$ (c.g.c)

$\Rightarrow DE = DO$. (1)

$\Delta CED = \Delta CEO$ (c.g.c) $\Rightarrow DE = OE$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $OD = OE = DE$ nên ΔODE đều.

b) Ta có $\widehat{BDE} = \widehat{BDO}$ (hai góc tương ứng của hai tam giác bằng nhau).

$\widehat{CED} = \widehat{CEO}$ (hai góc tương ứng của hai tam giác bằng nhau).

Xét ΔODE có hai đường phân giác của góc *D*, góc *E* cắt nhau tại *A*, suy ra *OA* là đường phân giác của góc *DOE*.

19.9. (h.19.15)

• *Tìm cách giải*

Giả sử đã vẽ được $MN // BC$ sao cho $BM + CN = BC$.

Lấy điểm $D \in BC$ sao cho $BD = BM$, khi đó $CD = CN$.

ΔBMD cân tại $B \Rightarrow \widehat{M_1} = \widehat{D_1}$ mà $\widehat{M_2} = \widehat{D_1}$ (cặp góc so le trong) nên $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$

Chứng minh tương tự ta được $\widehat{N_1} = \widehat{N_2}$.

Xét ΔAMN có *D* là giao điểm của hai đường phân giác góc ngoài tại đỉnh *M* và *N*, suy ra *AD* là đường phân giác của góc *A*.

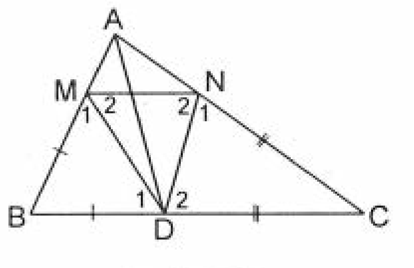
• *Cách vẽ MN*

- Vẽ đường phân giác *AD* của ΔABC

- Trên cạnh *BA* lấy điểm *M* sao cho $BM = BD$;

- Từ *M* vẽ $MN // BC$ $(N \in AC)$.

Khi đó *MN* là đoạn thẳng cần vẽ.



Hình 19.15

• *Chứng minh*

Theo cách vẽ ta có $MN // BC$, do đó $\widehat{M_2} = \widehat{D_1}$ (so le trong) mà $\widehat{M_1} = \widehat{D_1}$ (hai góc ở đáy của tam giác cân) nên $\widehat{M_2} = \widehat{M_1}$

Xét ΔAMN có *D* là giao điểm của đường phân giác góc *A* và đường phân giác góc ngoài tại đỉnh *M* nên *ND* là đường phân giác ngoài tại đỉnh *N*,do đó $\widehat{N_1} = \widehat{N_2}$.

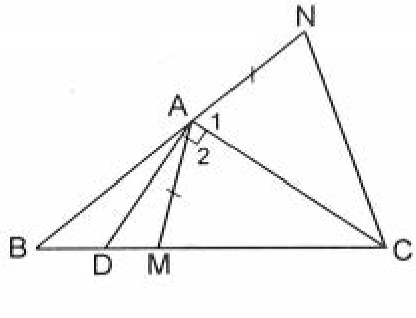
Mặt khác, $\widehat{D_2} = \widehat{N_2}$ (so le trong) nên $\widehat{N_1} = \widehat{D_2}$, suy ra ΔCND cân, dẫn tới $CN = CD$.

Vậy $BM + CN = BD + CD = BC$.

19.10. (h.19.16)

Trên tia đối của tia *AB* lấy điểm *N* sao cho $AN = AM$.

Xét ΔABM có $AD \perp AC$ mà AD là đường phân giác trong của góc A nên AC là đường phân giác ngoài tại đỉnh A.



Hình 19.16

Từ đó suy ra $\Delta ANC = \Delta AMC$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{ANC} = \widehat{AMC}$.

Ta có $\widehat{BAD} = 105° - 90° = 15°$, do đó $\widehat{BAM} = 30°$.

Xét ΔABM có góc AMC là góc ngoài nên

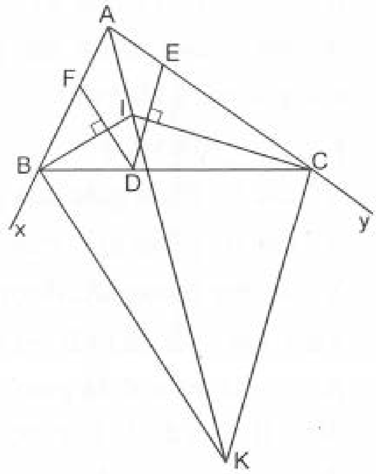
$\widehat{AMC} = \widehat{BAM} + \widehat{B} = 70°$ suy ra $\widehat{N} = 70°$.

Xét ΔBCN có $\widehat{BCN} = 180° - \left(\widehat{B} + \widehat{N}\right) = 180° - \left(40° + 70°\right) = 70°$.

Vậy $\widehat{BCN} = \widehat{N}\left(= 70°\right)$, suy ra ΔBCN cân tại B.

Do đó $BN = BC$, dẫn tới $AB + AN = BC$ hay $AB + AM = BC$.

19.11. (h.19.17)



Hình 19.17

ΔBDF và ΔCDE là những tam giác cân. Mặt khác, $BI \perp DF$, $CI \perp DE$ nên ta có BI và CI lần lượt là các đường phân giác của góc B và góc C. Suy ra I nằm trên đường phân giác của góc A. (1)

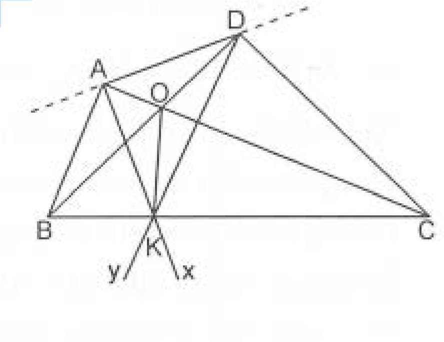
Ta có $BK // DF$ mà $BI \perp DF$ nên $BI \perp BK$, do đó BK là đường phân giác ngoài tại đỉnh B của ΔABC

Chứng minh tương tự ta được CK là đường phân giác ngoài tại đỉnh C của ΔABC.

Do đó K nằm trên đường phân giác của góc A. (2)

Từ (1) và (2), suy ra ba điểm A, I, K thẳng hàng

19.12. (h.19.18)



Hình 19.18

Xét ΔADK có AC là đường phân giác của góc trong tại đỉnh A.

Mặt khác, $AB \perp AC$ nên AB là đường phân giác góc ngoài tại đỉnh A.

Xét ΔADK có B là giao điểm của một đường phân giác góc trong và đường phân giác góc ngoài không kề nên tia KB là đường phân giác góc ngoài tại đỉnh K.

Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Xét ΔADK có O là giao điểm của hai đường phân giác nên KO là đường phân giác của góc K.

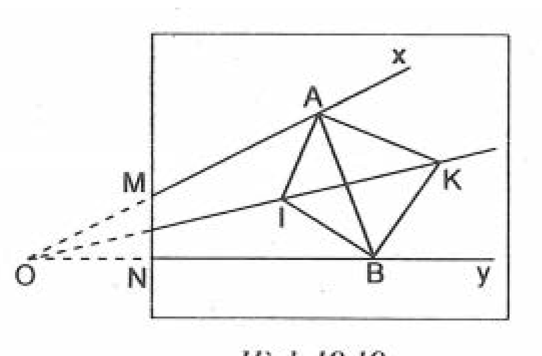
Suy ra $KO \perp KB$ (tính chất hai tia phân giác của hai góc kề bù). (1)

Chứng minh tương tự ta được $KO \perp KC$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra ba điểm B, K, C thẳng hàng.

19.13. (H.19.19)

Giả sử góc xOy có đỉnh O nằm ngoài tờ giấy, còn lại một phần của hai cạnh nằm trong tờ giấy. Ta vẽ đường thẳng chứa tia phân giác của góc xOy như sau:



Hình 19.19

- Lấy $A \in Mx$ và $B \in Ny$;

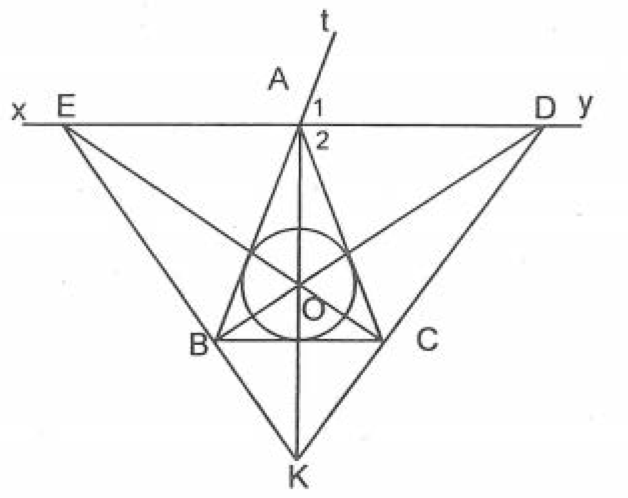
- Vẽ các tia phân giác của góc MAB và NBA, chúng cắt nhau tại I;

- Vẽ các tia phân giác của góc BAx và ABy, chúng cắt nhau tại K;

- Vẽ đường thẳng IK, đường thẳng này chứa tia phân giác của góc xOy. Thật vậy, xét ΔOAB có I là giao điểm của các đường phân giác của góc A, góc B. còn K là giao điểm của các đường phân giác ngoài tại đỉnh A, đỉnh B. Do đó I, K cùng nằm trên đường phân giác của góc xOy, tức là đường thẳng IK chứa tia phân giác cúa góc xOy.

19.14. (h.19.20)

Điểm O là giao điểm hai đường phân giác của góc B và góc C nên AO là đường phân giác của góc A. Vẽ tia At là tia đối của tia AB.



Hình 19.20

Vì $xy//BC$ nên $\widehat{A_1} = \widehat{ABC}$ (cặp góc đồng vị);

$\widehat{A_2} = \widehat{ACB}$ (cặp góc so le trong)

mà $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ nên $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$.

Xét ΔABC có D là giao điểm của đường phân giác góc B và đường phân giác góc ngoài tại đỉnh A nên CD là đường phân giác góc ngoài tại đỉnh C. Chứng minh tương tự ta được BE là đường phân giác góc ngoài tại đỉnh B. Ba đường thẳng BE, CD, AO là hai đường phân giác góc ngoài và đường phân giác của góc trong không kề nên chúng cùng đi qua một điểm.

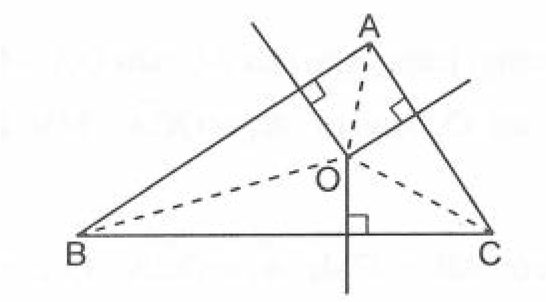
Chuyên đề 20. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC, BA ĐƯỜNG CAO CỦA TAM GIÁC

A. Kiến thức cần nhớ

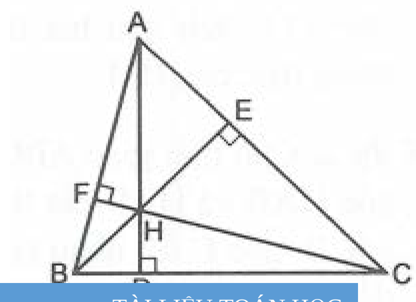
1. Điểm nằm trên đường trung trực của một đoạn thẳng thì cách đều hai mút của đoạn thẳng đó.

2. Điểm cách đều hai mút của một đoạn thẳng thì nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng đó.

3. Ba đường trung trực của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm này cách đều ba đỉnh của tam giác đó và là tâm của đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác (gọi là đường tròn ngoại tiếp tam giác) (h.20.1).



Hình 20.1



Hình 20.2

4. Trong một tam giác, đoạn vuông góc vẽ từ một đỉnh đến đường thẳng chứa cạnh đối diện gọi là đường cao của tam giác đó.

5. Ba đường cao của một tam giác cùng đi qua một điểm (h.20.2). Điểm này gọi là trực tâm của tam giác.

6. *Bổ sung tính chất của tam giác cân*

- Trong một tam giác cân, đường trung trực ứng với cạnh đáy, đồng thời là đường phân giác, đường trung tuyến và đường cao cùng xuất phát từ đỉnh đối diện với cạnh đó.

- Trong một tam giác, nếu hai trong bốn loại đường trùng nhau thì tam giác đó là một tam giác cân.

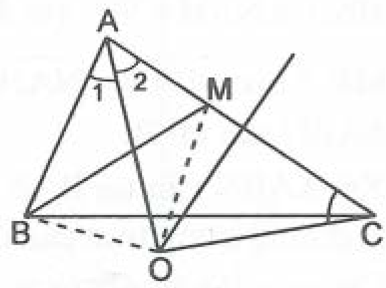
B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC, $AB < AC$. Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho $CM = AB$. Vẽ đường trung trực của AC, cắt đường phân giác của góc A tại điểm O. Chứng minh rằng O nằm trên đường trung trực của BM.

Giải (h.20.3)

**** Tìm cách giải.***

Muốn chứng minh điểm O nằm trên đường trung trực của BM ta cần chứng minh điểm O cách đều hai đầu của đoạn thẳng BM, nghĩa là phải chứng minh $OB = OM$. Muốn vậy phải chứng minh $\Delta ABO = \Delta CMO$.



Hình 20.3

Dễ thấy hai tam giác này có hai cặp cạnh bằng nhau nên chỉ cần chứng minh cặp góc xen giữa bằng nhau là đủ

*** Trình bày lời giải**

Điểm O nằm trên đường trung trực của AC nên $OA = OC$.

Do đó ΔOAC cân tại O, suy ra $\widehat{A}_2 = \widehat{OCA}$.

Mặt khác $\widehat{A}_2 = \widehat{A}_1$ nên $\widehat{A}_1 = \widehat{OCA}$.

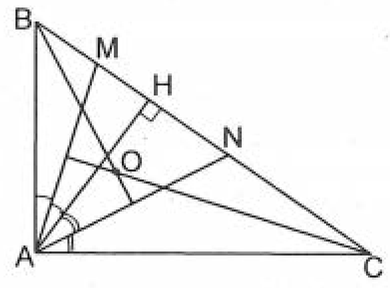
ΔABO và ΔCMO có: $AB = CM$; $\widehat{A}_1 = \widehat{OCA}$; $OA = OC$ nên $\Delta ABO = \Delta CMO$ (c.g.c). Suy ra $OB = OM$.

Điểm O cách đều hai đầu của đoạn thẳng BM nên O nằm trên đường trung trực của BM.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Tia phân giác của góc HAB và HAC cắt BC lần lượt tại M và N. Các đường phân giác của góc B, góc C cắt nhau tại O. Chứng minh rằng O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN.

Giải (h.20.4)

*** Tìm cách giải.**



Hình 20.4

Muốn chứng minh *O* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *AMN*, ta phải chứng minh *O* là giao điểm các đường trung trực của các cạnh *AM* và *AN*.

Xét ΔABN có *BO* là đường phân giác góc *B* nên để chứng minh *BO* là đường trung trực của *AN* thì chỉ cần chứng minh ΔABN là tam giác cân tại *B*.

*** Trình bày lời giải.**

Ta có $\widehat{BAN}+\widehat{CAN}=90°$ (vì $\widehat{BAC}=90°$). (1)

$\widehat{BNA}+\widehat{NAH}=90°$ (vì $\widehat{H}=90°$). (2)

Mặt khác, $\widehat{CAN}=\widehat{NAH}$ nên từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BAN}=\widehat{BNA}$ do đó ΔABN cân tại *B*.

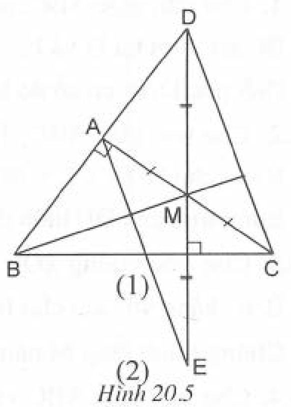
Xét ΔABN cân tại B có *BO* là đường phân giác của góc B nên *BO* cũng là đường trung trực của cạnh AN.

Chứng minh tương tự ta được *CO* là đường trung trực của cạnh *AM*.

Xét ΔAMN có *O* là giao điểm của hai đường trung trực của hai cạnh *AN* và *AM* nên *O* là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAMN

Ví dụ 3. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*, đường trung tuyến *BM*. Qua *M* vẽ một đường thẳng vuông góc với *BC* cắt đường thẳng *AB* tại *D*. Vẽ điểm *E* sao cho *M* là trung điểm của *DE*. Chứng minh rằng $AE \perp BM$.

Giải (h.20.5)



Hình 20.5

*** Tìm cách giải.**

Xét ΔDBC, dễ thấy *M* là trực tâm, suy ra $BM \perp CD$. Do đó muốn chứng minh $BM \perp AE$ ta chỉ cần chứng minh $CD // AE$.

*** Trình bày lời giải.**

Xét ΔDBC có *CA* và *DM* là hai đường cao cắt nhau tại *M* nên *M* là trực tâm. Suy ra *BM* là đường cao thứ ba, do đó $BM \perp CD$. Ta có $\Delta MEA = \Delta MDC$ (c.g.c).

Suy ra $\widehat{MEA}=\widehat{MDC}$. Do đó $AE // CD$.

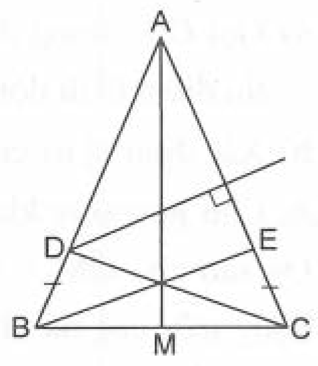
Từ (1) và (2) ta được $AE \perp BM$.

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC cân tại A, $\hat{A} = 45°$. Vẽ đường trung tuyến AM. Đường trung trực của cạnh AC cắt AB tại D. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $CE = BD$. Chứng minh rằng ba đường thẳng AM, BE, CD đồng quy.

Giải (h.20.6)

** Tìm cách giải.*

Vẽ hình chính xác ta dự đoán ba đường thẳng AM, BE, CD là ba đường cao của tam giác ABC nên chúng đồng quy. Do đó ta cần chứng minh $AM \perp BC$, $CD \perp AB$ và $BE \perp AC$.



Hình 20.6

*** Trình bày lời giải.**

Điểm D nằm trên đường trung trực của AC nên $DA = DC$.

Do đó ΔDAC cân suy ra $\widehat{ACD} = \widehat{CAD} = 45°$.

Xét ΔDAC có $\widehat{ADC} = 180° - (45° + 45°) = 90°$. Vậy $CD \perp AB$.

Ta lại có $\Delta BCD = \Delta CEB$ (c.g.c) $\Rightarrow \hat{E} = \hat{D} = 90°$. Do đó $BE \perp AC$.

Mặt khác, AM là đường trung tuyến ứng với cạnh đáy của tam giác cân nên $AM \perp BC$.

Xét ΔABC có AM, BE và CD là ba đường cao nên chúng đồng quy.

C. Bài tập vận dụng

• Tính chất đường trung trực

20.1. Cho tam giác ABC, góc A tù. Các đường trung trực của AB và AC cắt BC lần lượt tại D và E.

Biết góc DAE có số đo bằng $30°$, tính số đo của góc BAC.

20.2. Cho tam giác ABC. Trên các tia BA và CA lần lượt lấy các điểm D và E sao cho $BD + CE = BC$. Chứng minh rằng khi D và E di động thì đường trung trực của DE luôn đi qua một điểm cố định ở trong tam giác ABC.

20.3. Cho góc vuông xOy và một điểm A cố định ở trong góc đó. Vẽ góc BAC bằng $90°$ sao cho $B \in Ox$, $C \in Oy$. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng M nằm trên một đường thẳng cố định.

20.4. Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên cạnh BC lấy điểm M bất kì. Vẽ các điểm D và E sao cho AB là đường trung trực của MD, AC là đường trung trực của ME.

Xác định vị trí của điểm M để cho đoạn thẳng DE có độ dài ngắn nhất.

20.5. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Trên cạnh AB lấy điểm M, trên cạnh AC lấy điểm N sao cho $\widehat{MHN} = 90°$.

a) Gọi O là trung điểm của MN. Chứng minh rằng khi M và N di động thì điểm O di động trên một đường thẳng cố định.

b) Xác định vị trí của M và N để MN có độ dài nhỏ nhất.

20.6. Cho góc xOy khác góc bẹt. Lấy điểm M trên tia Ox, điểm N trên tia Oy sao cho $OM + ON = a$ không đổi. Chứng minh rằng khi M và N di động trên các tia Ox, Oy thì đường trung trực của MN luôn đi qua một điểm cố định.

20.7. Cho tam giác ABC sao cho $\widehat{B} < 90^\circ$ và $\widehat{C} > \frac{1}{2}\widehat{B}$. . Hãy tìm điểm M trên cạnh AB, điểm N trên cạnh BC sao cho $BM = MN = NC$.

• **Chứng minh đồng quy thẳng hàng**

20.8. Cho tam giác $ABC, AB < AC$. Trên các tia BA và CA lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $BM = CN$. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $CD = AB$. Chứng minh rằng các đường trung trực của AD, BC và MN cùng đi qua một điểm.

20.9. Cho các tam giác ABC vuông tại A, tam giác DBC vuông tại D trong đó A và D cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ BC. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Vẽ $AE \perp DN$; $DF \perp AN$.

Chứng minh rằng ba đường thẳng AE, DF, MN cùng đi qua một điểm.

20.10. Cho tam giác nhọn ABC, đường cao AD. Trên tia DA lấy điểm H sao cho $DH = DB$. Trên tia DC lấy điểm K sao cho $DK = DA$.

Chứng minh rằng $KH \perp AB$.

20.11. Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên cạnh AB lấy điểm H, trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $\widehat{AHD} + \widehat{ACD} = 180^\circ$. Đường thẳng DH cắt đường thẳng AC tại O.

Chứng minh rằng hai đường thẳng OB và CH vuông góc với nhau.

20.12. Cho tam giác nhọn ABC, $\widehat{A} = 60^\circ$. Hai đường cao BE, CF cắt nhau tại H. Đường trung trực của HB cắt AB tại M, đường trung trực của HC cắt AC tại N. Chứng minh rằng ba điểm M, H, N thẳng hàng.

20.13. Cho tam giác nhọn ABC. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác và H là trực tâm của tam giác.

Chứng minh rằng $\widehat{BOC} + 2\widehat{BHC} = 360^\circ$.

• **Tam giác cân**

20.14. Cho tam giác ABC, đường phân giác AD. Một đường thẳng song song với AD cắt các đường thẳng AB và AC lần lượt tại E và F.

Chứng minh rằng đường trung trực của *EF* luôn đi qua một điểm cố định.

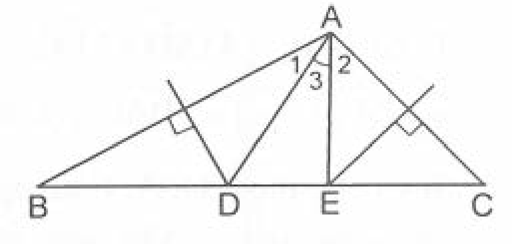
20.15. Cho tam giác nhọn *ABC*, đường cao *AH*, đường trung tuyến *BM* và đường phân giác *CD* cắt nhau tại ba điểm phân biệt *E, F, G*.

Hỏi tam giác *EFG* có thể là tam giác đều không?

Hướng dẫn giải

20.1. (h.20.7)

Điểm *D* nằm trên đường trung trực của *AB* nên $DA = DB$.



Hình 20.7

Suy ra ΔDAB cân, do đó $\widehat{A_1} = \widehat{B}$.

Chứng minh tương tự, ta được $\widehat{A_2} = \widehat{C}$.

Ta có $\widehat{A_1} + \widehat{A_2} = \widehat{B} + \widehat{C} = 180° - \widehat{BAC}$.

Mặt khác, $\widehat{A_3} = \widehat{BAC} - \left(\widehat{A_1} + \widehat{A_2}\right)$ nên

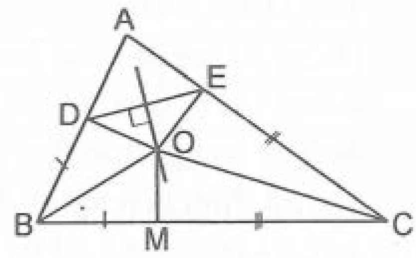
$30° = \widehat{BAC} - \left(180° - \widehat{BAC}\right)$.

Suy ra $2\widehat{BAC} - 180° = 30° \Rightarrow \widehat{BAC} = 105°$.

20.2. (h.20.8)

Vẽ tia phân giác của góc *B*, góc *C*, chúng cắt nhau tại điểm O ở trong tam giác *ABC*. Đó là một điểm cố định.

Trên cạnh *BC* lấy một điểm *M* sao cho $BM = BD$, khi đó $CM = CE$.



Hình 20.8

$\Delta BOD = \Delta BOM \ (c.g.c) \Rightarrow OD = OM$. (1)

$\Delta COE = \Delta COM \ (c.g.c) \Rightarrow OE = OM$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $OD = OE$.

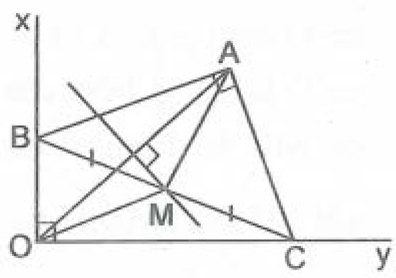
Điểm *O* cách đều hai đầu đoạn thẳng *DE* nên *O* nằm trên đường trung trực của *DE*. Nói cách khác, đường trung trực của *DE* luôn đi qua một điểm cố định là điểm *O*.

20.3. (h.20.9)

Tam giác ABC vuông tại A, tam giác OBC vuông ở O có AM, OM là các đường trung tuyến ứng với cạnh huyền nên

$$MA = MO = \frac{1}{2}BC.$$

Điểm M cách đều hai đầu đoạn thẳng OA cố định nên M nằm trên đường trung trực của OA. Do đó M nằm trên một đường thẳng cố định.



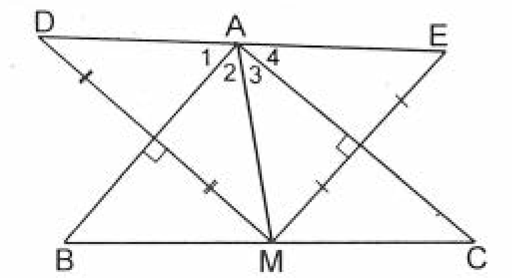
Hình 20.9

20.4. (h.20.10)

Vì AB, AC là đường trung trực của MD, ME nên $AD = AM$ và $AE = AM$.

ΔAMD và ΔAME cân tại A, suy ra

$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2,\ \widehat{A}_3 = \widehat{A}_4.$



Hình 20.10

Do đó $\widehat{MAD} = 2\widehat{A}_2; \widehat{MAE} = 2\widehat{A}_3$

Ta có $\widehat{DAE} = \widehat{MAD} + \widehat{MAE}$

$= 2\left(\widehat{A}_2 + \widehat{A}_3\right) = 2\widehat{BAC} = 2.90^\circ = 180^\circ.$

Suy ra ba điểm D, A, E thẳng hàng và $DE = AD + AE = 2AM$.

DE ngắn nhất $\Leftrightarrow AM$ ngắn nhất $\Leftrightarrow AM \perp BC$.

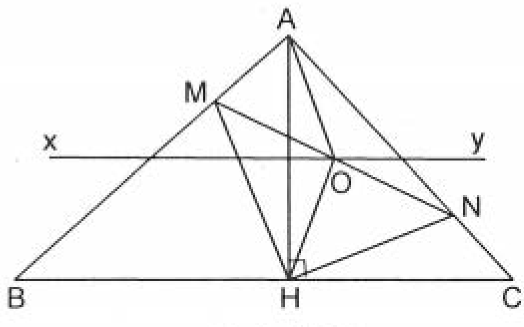
Vậy khi M là hình chiếu của A trên BC thì DE ngắn nhất hay khi AM là đường cao xuất phát từ đỉnh A của ΔABC thì DE ngắn nhất.

20.5. (h.20.11)

a) Theo tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông ta có

$$OA = \frac{1}{2}MN; OH = \frac{1}{2}MN.$$

Vậy $OA = OH$.

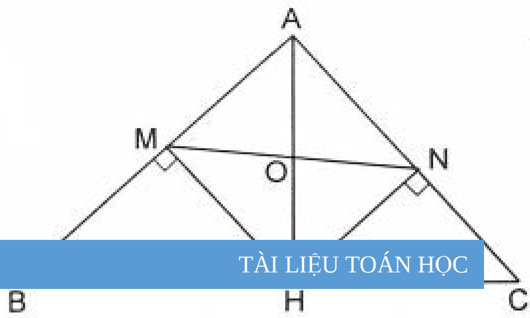


Hình 20.11

Điểm O cách đều hai đầu đoạn thẳng AH nên O di động trên đường trung trực xy của AH. Vì AH cố định nên xy cố định.

b) Ta có $MN = OM + ON = OA + OH$

$\geq AH$ (bất đẳng thức tam giác mở rộng) Dấu $"="$ xảy ra



Hình 20.12

$\Leftrightarrow O$ nằm giữa A và H và $OA = OH \Leftrightarrow O$ là trung điểm của AH

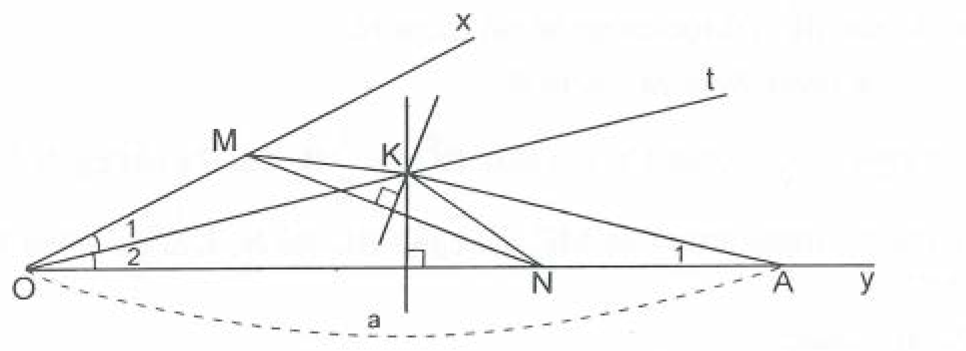
MO là đường trung tuyến ứng

với AH của ΔAMH và $MO = \frac{1}{2}AH$.

$\Leftrightarrow HM \perp AB; HN \perp AC$.

Vậy MN có độ dài nhỏ nhất là bằng AH khi M và N lần lượt là hình chiếu của H trên AB, AC (hình 20.12).

20.6. (h.20.13)



Hình 20.13

Trên tia Oy lấy điểm A sao cho $OA = a$. Vì $OM + ON = a$ nên $OM = NA$. Vẽ đường phân giác Ot của góc xOy và vẽ đường trung trực của OA chúng cắt nhau tại K. Ta phải chứng minh K là một điểm cố định và đường trung trực của MN đi qua K.

Ta có OA trên tia Oy mà $OA = a$ không đổi nên A là một điểm cố định, do đó đường trung trực của OA cũng cố định. Tia Ot là tia phân giác của góc xOy nên Ot cũng cố định. Điểm K là giao điểm của hai đường thẳng cố định nên K cố định.

Điểm K nằm trên đường trung trực của OA nên $KO = KA$, do đó ΔKOA cân $\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{O_2}$. Mặt khác, $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ nên $\widehat{A_1} = \widehat{O_1}$

ΔKMO và ΔKNA có: $OM = NA$; $\widehat{O_1} = \widehat{A_1}$ và $KO = KA$. Do đó $\Delta KMO = \Delta KNA$

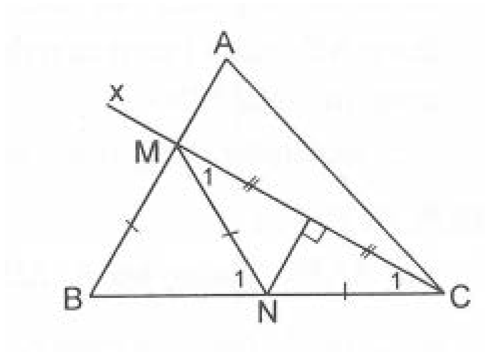
$\Rightarrow KM = KN$.

Vậy K nằm trên đường trung trực của MN, nói cách khác, đường trung trực của MN đi qua điểm cố định là điểm K.

20.7. (h.20.14)

• *Tìm cách giải*

Giả sử đã xác định được điểm $M \in AB$, điểm $N \in BC$ sao cho $BM = MN = NC$.



Hình 20.14

Ta có ΔMBN cân tại M nên $\widehat{B} = \widehat{N_1}$.

ΔMNC cân tại N nên $\widehat{M_1} = \widehat{C_1}$.

Xét ΔMNC có $\widehat{N_1}$ là góc ngoài nên $\widehat{N_1} = \widehat{C_1} + \widehat{M_1} = 2\widehat{C_1}$.

Suy ra $\widehat{C_1} = \frac{1}{2}\widehat{N_1} = \frac{1}{2}\widehat{B}$.

Do đó xác định được điểm M rồi điểm N.

• *Cách xác định điểm M, điểm N*

- Ở trong góc C, vẽ tia Cx sao cho $\widehat{BCx} = \frac{1}{2}\widehat{B}$. Tia Cx cắt cạnh AB tại M.

- Vẽ đường trung trực của MC cắt cạnh BC tại N. Khi đó ta có $BM = MN = NC$.

• *Chứng minh*

Điểm N nằm trên đường trung trực của MC nên $NM = NC$. (1)

ΔMNC cân tại $N \Rightarrow \widehat{M_1} = \widehat{C_1}$. Do đó $\widehat{N_1} = 2\widehat{C_1} = 2.\frac{1}{2}.\widehat{B} = \widehat{B}$.

Suy ra ΔMBN là tam giác cân $\Rightarrow$MB=MN. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $MB = MN = NC$.

20.8. (h.20.15)

Vẽ các đường trung trực của AD và BC, chúng cắt nhau tại O. Điểm O nằm trên đường trung trực của AD nên $OA = OD$.

Điểm O nằm trên đường trung trực của BC nên $OB = OC$.

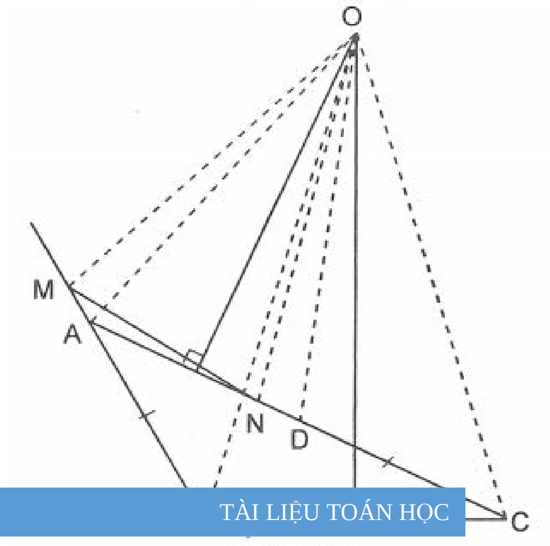
Ta có $\Delta OBA = \Delta OCD$ (c.c.c).

Suy ra $\widehat{OBA} = \widehat{OCD}$.

Do đó $\Delta OBM = \Delta OCN$ (c.g.c)

$\Rightarrow OM = ON$. Điểm O cách đều hai đầu đoạn thẳng MN nên O nằm trên đường trung trực của MN.

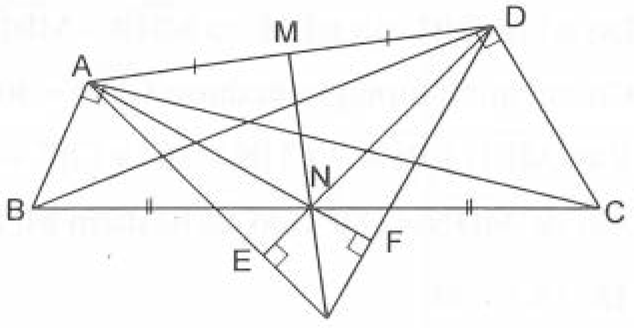
Vậy ba đường trung trực của AD, BC và MN cùng đi qua điểm O.



Hình 20.15

20.9. (h.20.16)

Xét ΔABC vuông tại $A, \Delta DBC$ vuông tại D có AN và DN là các đường trung tuyến ứng với cạnh huyền BC nên $AN = DN = \frac{1}{2}BC$.

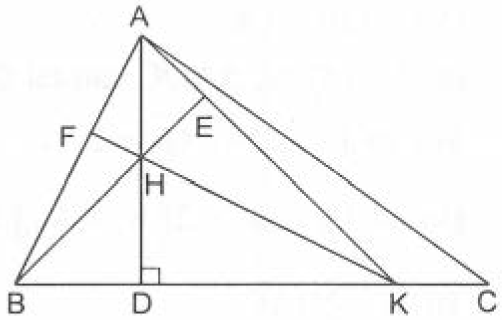


Hình 20.16

Suy ra ΔNAD cân tại N, do đó đường trung tuyến NM cũng là đường cao.

Ba đường thẳng AE, DF, MN là ba đường cao của ΔNAD nên chúng cùng đi qua một điểm.

20.10. (h.20.17)



Hình 20.17

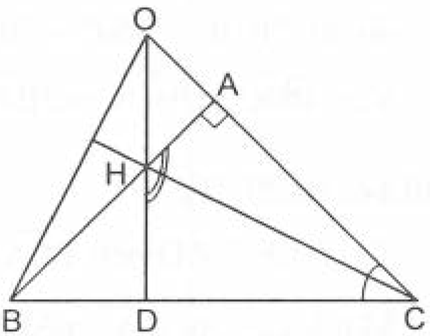
Gọi E là giao điểm của BH và AK. ΔDBH vuông cân tại D nên $\widehat{DBH} = 45°$. ΔDKA vuông cân tại D nên $\widehat{DAK} = 45°$. Xét ΔEBK có $\widehat{DBE} + \widehat{BKE} = 45° + 45° = 90°$

suy ra $\widehat{BEK} = 90°$, do đó $BE \perp AK$.

Xét ΔABK có AD và BE là hai đường cao cắt nhau tại H

Suy ra HK là đường cao thứ ba, do đó $KH \perp AB$

20.11. (h.20.18)



Hình 20.18

Ta có $\widehat{AHD} + \widehat{ACD} = 180°$ (giả thiết) (1)

và $\widehat{AHD} + \widehat{BHD} = 180°$ (kề bù). (2)

Từ (1) và (2), suy ra $\widehat{ACD} = \widehat{BHD}$.

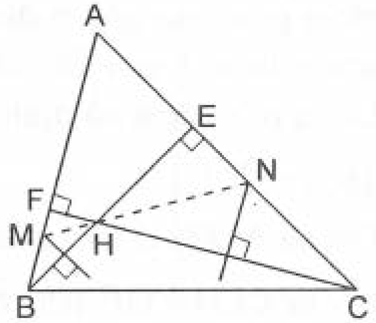
Xét ΔABC vuông tại A có $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90°$.

Do đó $\widehat{ABC} + \widehat{BHD} = 90°$. Suy ra $\widehat{BDH} = 90°$. Vậy $HD \perp BC$.

Xét ΔOBC có OD và BA là hai đường cao cắt nhau tại H, suy ra CH là đường cao thứ ba. Do đó $CH \perp OB$.

20.12. (h.20.19)

Hai góc *BAC* và *BHC* là hai góc có cạnh tương ứng vuông góc, một góc nhọn, một góc tù nên chúng bù nhau:



Hình 20.19

$\widehat{A}+\widehat{BHC}=180^\circ \Rightarrow \widehat{BHC}=180^\circ-60^\circ=120^\circ.$

Điểm *M* nằm trên đường trung trực của *HB* nên $MH=MB.$

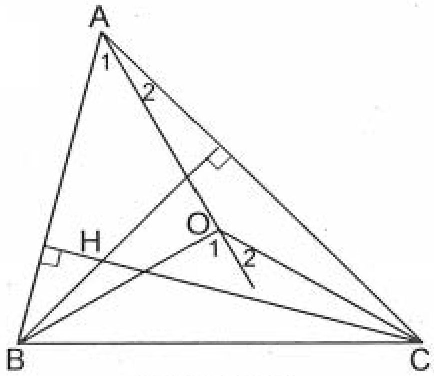
Do đó ΔMHB cân tại $M \Rightarrow \widehat{MHB}=\widehat{MBH}=30^\circ.$

Chứng minh tương tự ta được $\widehat{CHN}=30^\circ.$

Vậy $\widehat{MHB}+\widehat{BHC}+\widehat{CHN}=30^\circ\ +120^\circ+30^\circ=180^\circ.$

Suy ra $\widehat{MHN}=180^\circ,$ do đó ba điểm *M, H, N* thẳng hàng.

20.13. (h.20.20)



Hình 20.20

Vì ΔABC nhọn nên *O* và *H* nằm trong tam giác.

Điểm *O* cách đều ba đỉnh của ΔABC nên

$OA=OB=OC,$

do đó $\Delta AOB,\ \Delta AOC$ cân tại *O*.

Suy ra $\widehat{O}_1=2\widehat{A}_1;\widehat{O}_2=2\widehat{A}_2.$

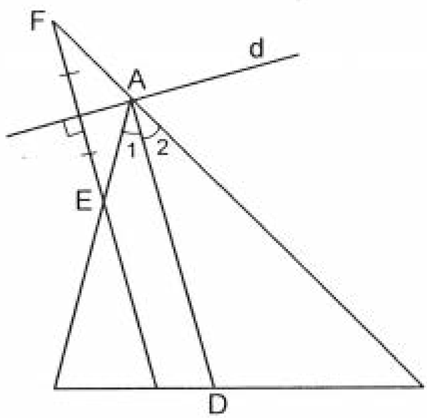
Do đó $\widehat{O}_1+\widehat{O}_2=2\left(\widehat{A}_1+\widehat{A}_2\right)$ hay $\widehat{BOC}=2\widehat{BAC}.$

Điểm *H* là trực tâm của ΔABC nên $BH\perp AC,\ CH\perp AB.$

Hai góc *BAC* và *BHC* là hai góc có cạnh tương ứng vuông góc, một góc nhọn, một góc tù nên $\widehat{BHC}+\widehat{BAC}=180^\circ \Rightarrow \widehat{BHC}=180^\circ-\widehat{BAC},$ do đó $2\widehat{BHC}=360^\circ-2\widehat{BAC}.$

Vậy $\widehat{BOC}+2\widehat{BHC}=2\widehat{BAC}+\left(360^\circ-2\widehat{BAC}\right)=360^\circ$

20.14. (h.20.21)



Hình 20.21

Ta có $EF//AD$ nên $\widehat{FEA}=\widehat{A}_1;\widehat{F}=\widehat{A}_2.$

Mặt khác, $\widehat{A}_1=\widehat{A}_2$ nên $\widehat{FEA}=\widehat{F}.$

Suy ra ΔAEF cân tại *A*.

Trong tam giác cân, đường trung trực của cạnh đáy đồng thời là đường phân giác của góc ở đỉnh nên đường trung trực *d* của *EF* đi qua đỉnh *A*. Đó là một điểm cố định.

20.15. (h.20.22)

Giả sử ΔEFG là tam giác đều, suy ra $\widehat{CEH} = 60°$ nên $\widehat{C_1} = 30°, \widehat{C_2} = 30°$.

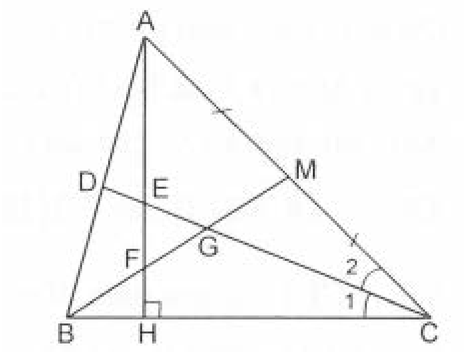
Ta còn có $\widehat{CGM} = \widehat{EGF} = 60°$.

Do đó $\widehat{CMG} = 180° - (30° + 60°) = 90°$. Suy ra $BM \perp AC$.

Xét ΔABC có đường trung tuyến BM đồng thời là đường cao nên ΔABC cân.

Mặt khác, $\widehat{ACB} = 30° + 30° = 60°$ nên ΔABC là tam giác đều.

Do đó ba đường *AH*, *BM*, *CD* phải đồng quy, tức là ba điểm *E*, *F*, *G* trùng nhau, trái giả thiết. Vậy ΔEFG không thể là tam giác đều.



Hình 20.22

Chuyên đề 21. CHỨNG MINH BA ĐƯỜNG THẲNG CÙNG ĐI QUA MỘT ĐIỂM (ĐỒNG QUY)

A. Kiến thức cần nhớ

Trong các chuyên đề trước ta gặp một số bài toán về chứng minh ba đường thẳng *a*, *b*, *c* đồng quy.

Phương pháp giải các bài toán này là vận dụng định lí về các đường đồng quy của tam giác:

- Ba đường trung tuyến của một tam giác đồng quy;
- Ba đường phân giác của một tam giác đồng quy;
- Ba đường trung trực của một tam giác đồng quy;
- Ba đường cao của một tam giác đồng quy.

Nếu ba đường thẳng *a*, *b*, *c* đã cho không phải là các đường chủ yếu của tam giác thì để chứng minh *a*, *b*, *c* đồng quy, ta có thể gọi giao điểm của *a* và *b* là *O* rồi chứng minh đường thẳng *c* đi qua *O* hay chứng minh *O* nằm trên đường thẳng *c*.

Một số trường hợp có thể đưa bài toán chứng minh ba đường đồng quy về chứng minh ba điểm thẳng hàng.

B. Một số ví dụ

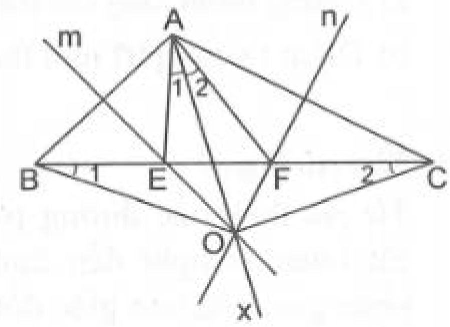
Ví dụ 1: Cho tam giác *ABC*, góc *A* tù. Vẽ các đường thẳng *m* và *n* lần lượt là đường trung trực của *AB* và *AC*, cắt *BC* theo thứ tự tại *E* và *F*. Vẽ tia phân giác *Ax* của góc *EAF*. Chứng minh rằng các đường thẳng *m*, *n* và *Ax* đồng quy

Giải (h.21.1)

**** Tìm cách giải.***

Gọi O là giao điểm của m và n. Ta phải chứng minh tia Ax đi qua O. Muốn vậy phải chứng minh $\widehat{OAE} = \widehat{OAF}$.

*** Trình bày lời giải.**



Hình 21.1

Gọi O là giao điểm của hai đường thẳng m và n.

Ta có: $OB = OC = OA$.

$\Delta AOE = \Delta BOE$ (c.c.c). Suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$.

$\Delta AOF = \Delta COF$ (c.c.c). Suy ra $\widehat{A_2} = \widehat{C_2}$.

Mặt khác, $\widehat{B_1} = \widehat{C_2}$ (vì ΔBOC cân tại O) nên $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$

Do đó tia AO là tia phân giác của góc EAF.

Suy ra ba đường thẳng m, n và Ax đồng quy tại O.

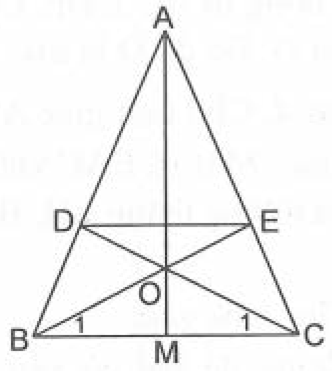
Ví dụ 2: Cho tam giác ABC cân tại A. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm D và E sao cho $AD = AE$. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng ba đường thẳng AM, BE và CD đồng quy

Giải (h.21.2)

**** Tìm cách giải.***

Gọi O là giao điểm của BE và CD. Ta phải chứng minh AM đi qua O tức là phải chứng minh ba điểm A, O, M thẳng hàng.

*** Trình bày lời giải.**



Hình 21.2

Ta có $AB = AC,\ AD = AE,$ suy ra $BD = CE$.

$\Delta EBC = \Delta DCB$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{C_1}$.

Gọi O là giao điểm của BE và CD.

Vì ΔOBC cân tại O nên $OB = OC$. (1)

Mặt khác, $AB = AC$ (giả thiết) (2) và $MB = MC$ (giả thiết) (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra ba điểm A, O, M thẳng hàng (vì cùng nằm trên đường trung trực của BC). Do đó ba đường thẳng AM, BE, CD đồng quy.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC. Các đường phân giác các góc ngoài của tam giác cắt nhau tại D, E, F (D nằm trong góc A, E nằm trong góc B, F nằm trong góc C).

a) Chứng minh rằng các đường thẳng *AD, BE, CF* đồng quy tại một điểm *O*.

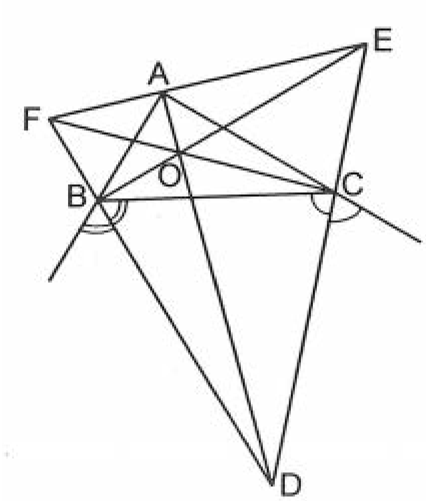
b) Điểm *O* có vị trí như thế nào đối với tam giác *DEF?*

Giải (h.21.3)

**** Tìm cách giải.***

Từ giả thiết các đường phân giác ngoài cắt nhau ta nghĩ đến định lí ba đường phân giác của tam giác đồng quy. Vì vậy để chứng minh *AD, BE, CF* đồng quy ta chỉ cần chứng minh *AD, BE, CF* là ba đường phân giác của tam giác *ABC*.

*** Trình bày lời giải.**



Hình 21.3

a) Xét tam giác *ABC*, các đường phân giác ngoài tại đỉnh *B* và đỉnh *C* cắt nhau tại *D*. Suy ra *AD* là đường phân giác trong tại đỉnh *A*.

Chứng minh tương tự ta được *BE, CF* lần lượt là các đường phân giác trong tại đỉnh *B*, đỉnh *C* của tam giác *ABC*.

Do đó ba đường thẳng *AD, BE, CF* đồng quy tại *O*.

b) Ba điểm *F, B, D* thẳng hàng; ba điểm *E, C, D* thẳng hàng; ba điểm *F, A, E* thẳng hàng.

Xét ΔDEF có $AD \perp EF$ (hai đường phân giác của hai góc kề bù).

Tương tự $BE \perp DF$, $CF \perp DE$ nên *AD, BE, CF* là ba đường cao gặp nhau tại *O*. Do đó *O* là trực tâm của tam giác *DEF*.

Ví dụ 4. Cho tam giác *ABC* có $\widehat{A} = 135°$. Vẽ ra ngoài tam giác này các tam giác *DAB* và *EAC* vuông cân tại *D* và *E*. Vẽ $AH \perp BC$. Chứng minh rằng ba đường thẳng *AH, BD, CE* đồng quy.

Giải (h.21.4)

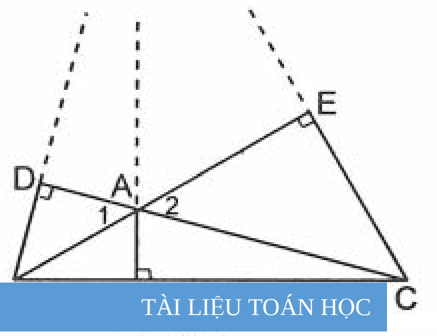
**** Tìm cách giải.***

Trong đề bài có yếu tố góc vuông, có yếu tố đường cao nên ta có thể dùng định lí ba đường cao của tam giác đồng quy.

*** Trình bày lời giải.**

Tam giác *DAB* vuông cân tại $D \Rightarrow \widehat{A}_1 = 45°$.

Tam giác *EAC* vuông cân tại $E \Rightarrow \widehat{A}_2 = 45°$.



Hình 21.4

Ta có $\widehat{BAD}+\widehat{BAC}=45°+135°=180°,$ suy ra ba điểm *D, A, C* thẳng hàng. Chứng minh tương tự ta được ba điểm *B, A, E* thẳng hàng.

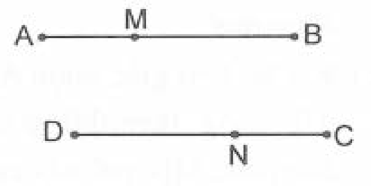
Xét ΔABC có *AH, BD, CE* là ba đường cao nên chúng đồng quy.

* **Lưu ý:** Trực tâm của tam giác tù nằm ngoài tam giác.

C. Bài tập vận dụng

• Đưa chứng minh đồng quy về chứng minh thẳng hàng

21.1. Trong hình 21.5 có: $AB//CD,\ AB=CD,\ AM=CN$. Chứng minh rằng ba đường thẳng *AC, BD* và *MN* đồng quy.



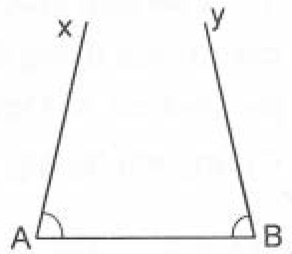
Hình 21.5

21.2. Cho tam giác *ABC* vuông tại $A,\ \widehat{B}=60°$. Gọi *M* là một điểm ở trong tam giác sao cho $\widehat{MBC}=40°,\widehat{MCB}=20°.$ Vẽ điểm *D* và *E* sao cho đường thẳng *BC* là đường trung trực của *MD* và đường thẳng *AC* là đường trung trực của *ME.* Chứng minh rằng ba đường thẳng *BM, AC* và *DE* đồng quy.

21.3. Cho tam giác nhọn *ABC* và điểm *M* nằm trong tam giác sao cho $\widehat{AMB}=\widehat{AMC}=120°.$ Trên nửa mặt phẳng bờ *BC* không chứa *A* vẽ các tia *Bx* và *Cy* sao cho $\widehat{CBx}=\widehat{BCy}=60°.$

Chứng minh rằng ba đường thẳng *AM, Bx, Cy* đồng quy.

21.4. Hình 21.6 có $\widehat{BAx}=\widehat{ABy}<90°$. Gọi *d* là đường trung trực của *AB*. Chứng minh rằng các đường thẳng *Ax, By* và *d* đồng quy.



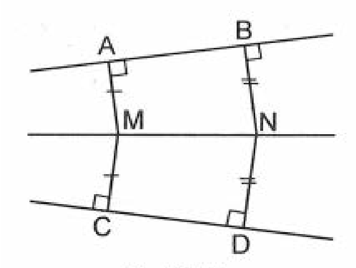
Hình 21.6

21.5. Cho tam giác *ABC* và một điểm *O* ở trong tam giác.

21.6. Gọi *F* và *G* lần lượt là trọng tâm của các tam giác *AOB* và *AOC.*

Chứng minh rằng ba đường thẳng *AO, BF, CG* đồng quy.

• Ba đường phân giác đồng quy



Hình 21.7

21.7. Trong hình 21.7, hai đường thẳng AB và CD không song song. Chứng minh rằng ba đường thẳng AB, CD, MN đồng quy.

21.8. Cho tam giác ABC, $\widehat{A} = 120°$. Vẽ các đường phân giác AD và CE cắt nhau tại O. Từ B vẽ đường thẳng $xy \perp BO$. Chứng minh rằng ba đường thẳng xy, DE và AC đồng quy.

21.9. Cho tam giác nhọn ABC, đường cao AD. Vẽ các điểm M và N sao cho AB và AC theo thứ tự là các đường trung trực của DM và DN. Gọi giao điểm của MN với AB và AC theo thứ tự là F và E.

Chứng minh rằng ba đường thẳng AD, BE, CF đồng quy.

• Ba đường cao đồng quy

21.10. Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Gọi O và K lần lượt là giao điểm các đường phân giác của tam giác ABH và tam giác ACH. Vẽ $AD \perp OK$.

Chứng minh rằng các đường thẳng AD, BO, CK đồng quy.

21.11. Cho tam giác ABC, đường cao AD. Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa C vẽ đoạn thẳng $BF \perp BA$ và $BF = BA$. Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa B vẽ đoạn thẳng CE sao cho $CE \perp CA$ và $CE = CA$. Chứng minh rằng ba đường thẳng AD, BE, CF đồng quy.

21.12. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường phân giác AD. Từ A, B, C vẽ các đường thẳng d_1, d_2, d_3 vuông góc với AD. Các đường thẳng d_2 và d_3 lần lượt cắt AD tại E và F.

Chứng minh rằng các đường thẳng d_1, BF, CE đồng quy.

• (Ba đường trung trực đồng quy, ba đường trung tuyến đồng quy

21.13. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Vẽ các đường phân giác của góc BAH và góc CAH cắt BC tại E và F. Gọi M là trung điểm của EF. Qua M vẽ đường thẳng $d // AH$. Chứng minh rằng các đường phân giác của góc B, góc C và đường thẳng d đồng quy.

21.14. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = 4cm$; $AC = 6cm$. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $\widehat{CAD} = \widehat{ACD}$. Trên cạnh AC lấy điểm E, trên cạnh AB lấy điểm F sao cho $BE = 5cm$ và $CF = \sqrt{40}cm$.

Chứng minh rằng ba đường thẳng AD, BE, CF đồng quy.

21.15. Cho tam giác nhọn *ABC*, đường cao *AH*, đường phân giác *BD* và đường trung tuyến *CM*. Cho biết tam giác *HDM* là tam giác đều, chứng minh rằng ba đường thẳng *AH, BD, CM* đồng quy.

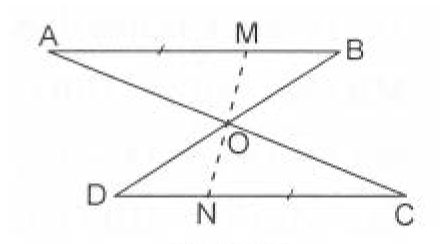
Hướng dẫn giải

21.1. (h.21.8)

Gọi *O* là giao điểm của *AC* và *BD*, ta phải chứng minh *MN* đi qua *O*, tức là phải chứng minh ba điểm *M, O, N* thẳng hàng.

Ta có $\Delta AOB = \Delta COD$ (g.c.g) $\Rightarrow OA = OC$ và $\widehat{A} = \widehat{C}$.

$\Delta MOA = \Delta NOC\ \left(c.g.c\right) \Rightarrow \widehat{MOA} = \widehat{NOC}$.



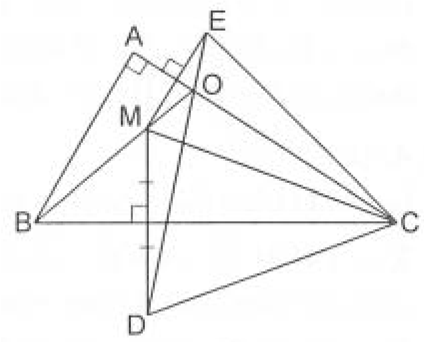
Hình 21.8

Ta có $\widehat{MOA} + \widehat{MOC} = 180°$ (kề bù)

$\Rightarrow \widehat{NOC} + \widehat{MOC} = 180° \Rightarrow \widehat{MON}$ là góc bẹt.

Do đó ba điểm *M, O, N* thẳng hàng, dẫn tới ba đường thẳng AC, *BD* và *MN* đồng quy.

21.2. (h.21.9)



Hình 21.9

Gọi *O* là giao điểm của hai đường thẳng *BM* và *AC*.

Ta phải chứng minh *DE* đi qua *O*.

Xét ΔABC vuông tại A, $\widehat{B} = 60° \Rightarrow \widehat{C} = 30°$

Ta có $\widehat{BOC} = 180° - \left(40° + 30°\right) = 110°$.

Do đó $\widehat{CMO} = 180° - \left(110° + 10°\right) = 60°$.

Điểm C nằm trên đường trung trực của *MD* và *ME* nên $CD = CM = CE$.

Ta có $\Delta CEO = \Delta CMO$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{CEO} = \widehat{CMO} = 60°$.

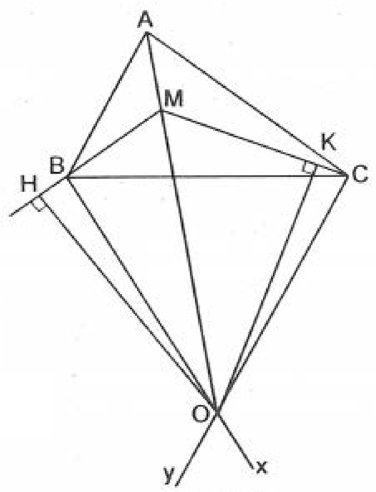
Xét tam giác *CDE* cân tại *C* có

$\widehat{DCE}=\widehat{DCM}+\widehat{ECM}=2\left(\widehat{BCM}+\widehat{ACM}\right)=2.\widehat{ACB}=60°.$

Vậy ΔCDE là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{CED}=60°.$

Vậy $\widehat{CED}=\widehat{CEO}\left(=60°\right)$, hai tia ED và EO trùng nhau dẫn tới ba điểm D, O, E thẳng hàng. Do đó ba đường thẳng BM, AC và DE đồng quy.

21.3. (h.21.10)



Hình 21.10

Gọi O là giao điểm của các tia Bx và Cy.

Ta phải chứng minh đường thẳng AM đi qua O. Vẽ $OH\perp MB$; $OK\perp MC$.

Tam giác BOC là tam giác đều nên $\widehat{BOC}=60°$. (1)

Ta có tổng $\widehat{AMB}+\widehat{AMC}+\widehat{BMC}=360°$

$\Rightarrow \widehat{BMC}=360°-\left(120°\ +120°\right)=120°.$ (2)

Từ (1) và (2), ta tính được $\widehat{MBO}+\widehat{MCO}=180°.$

Mặt khác, $\widehat{MBO}+\widehat{HBO}=180°$ nên $\widehat{MCO}=\widehat{HBO}$ (cùng bù với $\widehat{MBO}$).

Ta có $\Delta KCO=\Delta HBO$ (cạnh huyền, góc nhọn)

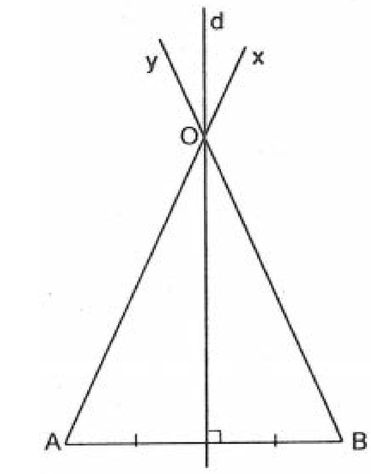
$\Rightarrow OK=OH.$

$\Delta MOK=\Delta MOH$ (cạnh huyền, cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \widehat{KMO}=\widehat{HMO}=120°:2=60°.$

Do đó $\widehat{AMC}+\widehat{KMO}=120°+60°=180°.$

Suy ra ba điểm A, M, O thẳng hàng, dẫn tới ba đường thẳng AM, Bx, Cy đồng quy.



Hình 21.11

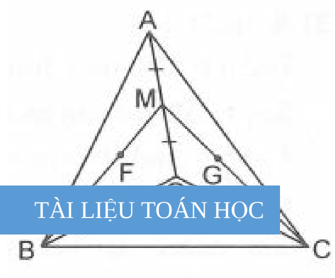
21.4. (h.21.11)

Gọi O là giao điểm của hai tia Ax và By.

Xét ΔAOB có $\widehat{A}=\widehat{B}$ nên $OA=OB$, suy ra điểm O nằm trên đường trung trực d của AB. Vậy các đường thẳng Ax, By và d đồng quy.

21.5. (h.21.12)

Gọi M là trung điểm của OA.



Hình 21.12

Xét ΔAOB có F là trọng tâm nên đường thẳng BF đi qua trung điểm M của AO.

Xét ΔAOC có G là trọng tâm nên đường thẳng CG đi qua trung điểm M của AO.

Do đó ba đường thẳng AO, BF, CG đồng quy tại trung điểm M của AO.

21.6. (h.21.7)

Hai đường thẳng AB và CD không song song nên chúng cắt nhau tạo thành một góc. Hai điểm M và N nằm trong góc đó, cùng cách đều hai đường thẳng này nên chúng nằm trên tia phân giác của góc này. Suy ra ba đường thẳng AB, CD và MN đồng quy tại đỉnh của góc.

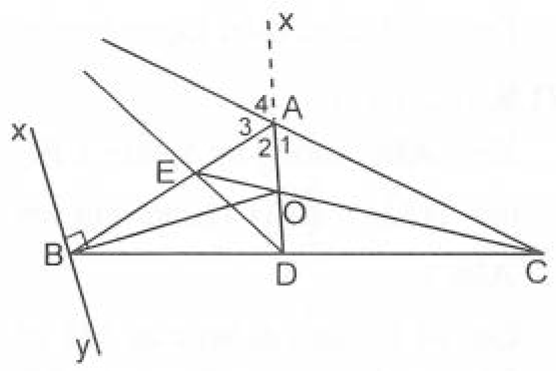
21.7. (h.21.13)

Xét tam giác ABC có hai đường phân giác AD, CE cắt nhau tại O nên BO là đường phân giác của góc ABC.

Đường thẳng xy đi qua B và vuông góc với BO nên xy là đường phân giác ngoài tại đỉnh B của góc ABD.

Gọi Ax là tia đối của tia AD.

Vì $\widehat{BAC} = 120°$ nên dễ thấy
$\widehat{A_1} = \widehat{A_2} = \widehat{A_3} = \widehat{A_4} = 60^0$.



Hình 21.13

Xét ΔADC có AE là đường phân giác ngoài tại đỉnh A, CE là đường phân giác trong tại đỉnh C nên DE là đường phân giác ngoài tại đỉnh D.

Xét ΔABD có đường thẳng AC là đường phân giác ngoài tại đỉnh A, đường thẳng xy là đường phân giác ngoài tại đỉnh B, đường thẳng DE là đường phân giác trong tại đỉnh D. Do đó ba đường thẳng xy, DE và AC đồng quy.

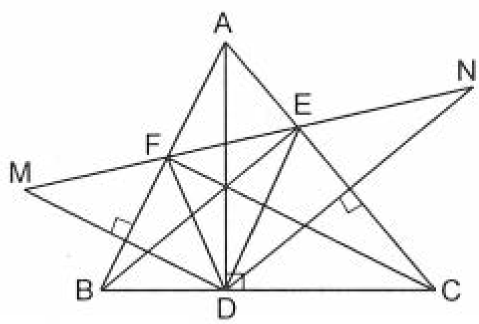
21.8. (h.21.14)

Điểm F nằm trên đường trung trực của DM nên $FD = FM$.

Suy ra ΔFDM cân tại F do đó FB là đường phân giác tại đỉnh F của ΔDEF. Chứng minh tương tự ta được EC là đường phân giác ngoài tại đỉnh E của ΔDEF.

Xét ΔDEF có hai đường phân giác ngoài cắt nhau tại A nên DA là đường phân giác của góc EDF. (1)

Mặt khác, $DB \perp DA$ nên DB là đường phân giác ngoài tại D.



Hình 21.14

Điểm B là giao điểm của hai đường phân giác ngoài tại đỉnh F và D của ΔDEF nên EB là đường phân giác của góc DEF. (2)

Chứng minh tương tự ta được FC là đường phân giác của góc DFE. (3)

Từ (1), (2), (3), suy ra AD, BE, CF đồng quy.

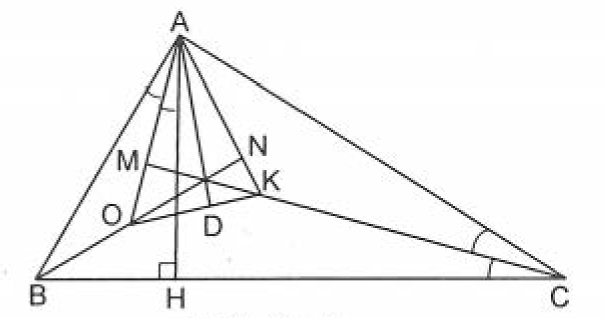
* *Lưu ý:* Nếu bỏ điều kiện nhọn của tam giác ABC thì bài toán vẫn đúng.

21.9. (h.21.15)

Xét ΔABC vuông tại $A, AH \perp BC$ nên $\widehat{BAH} = \widehat{ACB}$ (cùng phụ với $\widehat{ABC}$).

Gọi M là giao điểm của AO và CK, gọi N là giao điểm của AK và BO.

Vì O là giao điểm của các đường phân giác của ΔABH nên $\widehat{BAO} = \widehat{HAO}$.



Hình 21.15

Vì K là giao điểm của các đường phân giác của ΔACH nên $\widehat{ACK} = \widehat{BCK}$

Xét ΔAMC có $\widehat{MAC} + \widehat{MCA} = \widehat{MAC} + \dfrac{\widehat{ACB}}{2} = \widehat{MAC} + \dfrac{\widehat{BAH}}{2} = \widehat{MAC} + \widehat{MAB} = \widehat{BAC} = 90^0$.

Suy ra $\widehat{AMC} = 90^0 \Rightarrow CM \perp AO$.

Chứng minh tương tự ta được $BN \perp AK$.

Xét ΔAOK có AD, BO và CK là ba đường cao nên đồng quy.

21.10. (h.21.16)

Trên tia đối của tia AD lấy điểm K sao cho $AK = BC$.

Xét ΔADC có góc KAC là góc ngoài nên $\widehat{KAC} = \widehat{D} + \widehat{ACB} = 90° + \widehat{ACB}$.

Mặt khác, $\widehat{BCE} = 90° + \widehat{ACB}$ nên $\widehat{KAC} = \widehat{BCE}$.

Ta có $\Delta KAC = \Delta BCE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{E}$.

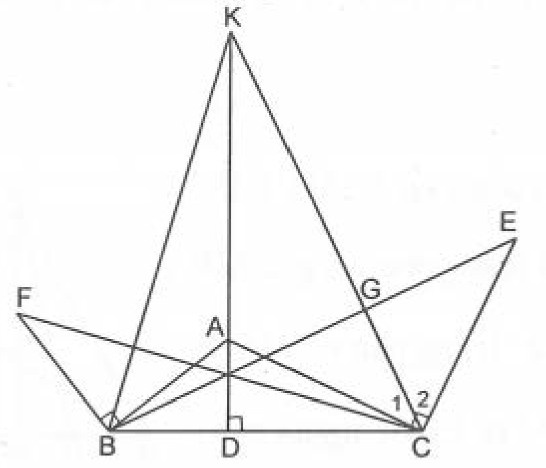
Vì $\widehat{C_1} + \widehat{C_2} = 90°$ nên $\widehat{E} + \widehat{C_2} = 90°$.

Gọi G là giao điểm của BE với KC.

Xét ΔGCE có $\widehat{E} + \widehat{C_2} = 90°$ nên $\widehat{G} = 90° \Rightarrow BE \perp KC$.

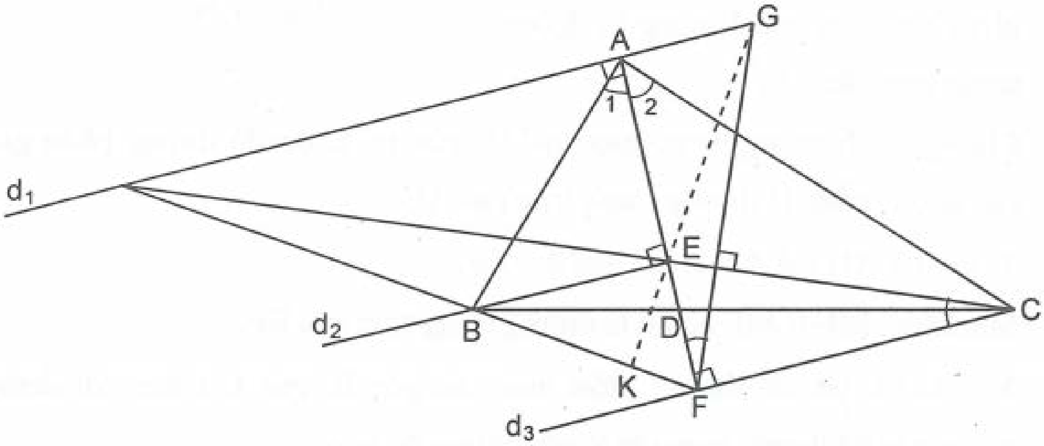
Chứng minh tương tự, ta có $CF \perp AB$.

Xét ΔKBC có AD, BE, CF là ba đường cao nên chúng đồng quy.



Hình 21.16

21.11. (h.21.17)



Hình 21.17

Tam giác EAB vuông tại E, $\widehat{A_1} = 45°$ nên là tam giác vuông cân.

Suy ra $EA = EB$. Tương tự, ta có: $FA = FC$.

Từ F vẽ một đường thẳng vuông góc với CE cắt d_1 tại G.

Gọi K là giao điểm của đường thẳng EG với BF.

Ta có $\widehat{AFG} = \widehat{FCE}$ (hai góc có cạnh tương ứng vuông góc).

$\Delta AFG = \Delta FCE$ (g.c.g) $\Rightarrow AG = FE$.

$\Delta AGE = \Delta EFB$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AGE} = \widehat{EFB}$.

Ta có $\widehat{AGE} + \widehat{AEG} = 90° \Rightarrow \widehat{EFB} + \widehat{KEF} = 90° \Rightarrow EK \perp BF$.

Xét ΔEFG có CE, BF và d_1 là ba đường cao do đó ba đường thẳng này đồng quy.

21.12. (h.21.18)

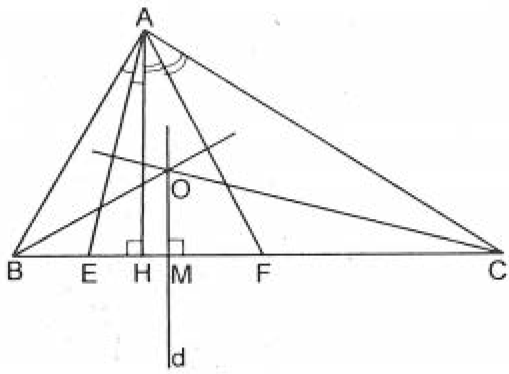
Tam giác ABC vuông tại $A, AH \perp BC$ nên $\widehat{BAH} = \widehat{ACB}$ (cùng phụ với góc ABC)

Ta có $\widehat{CAH} = \widehat{ABC}$ (cùng phụ với $\widehat{ACB}$).

Xét ΔAFC có AFB là góc ngoài nên $\widehat{AFB} = \widehat{FAC} + \widehat{FCA} = \widehat{FAH} + \widehat{BAH} = \widehat{FAB}.$

Suy ra ΔBAF cân tại B do đó đường phân giác của góc B cũng là đường trung trực của AF.

Chứng minh tương tự ta được ΔCAE cân tại C do đó đường phân giác của góc C cũng là đường trung trực của AE.



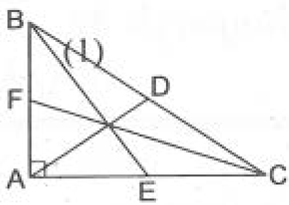
Hình 21.18

Ta có $d // AH$ mà $AH \perp EF$ nên $d \perp EF$.

Mặt khác, $ME = MF$ nên d là đường trung trực của EF.

Xét ΔAEF có các đường phân giác của góc B, góc C cùng với đường thẳng d là ba đường trung trực nên chúng đồng quy.

21.13. (h.21.19)



Hình 21.19

Ta có $\widehat{CAD} = \widehat{ACD} \Rightarrow \Delta DAC$ cân $\Rightarrow DC = DA.$ (1)

Tam giác ABC vuông tại $A \Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90°.$

Mặt khác, $\widehat{BAD} + \widehat{CAD} = 90°$ mà $\widehat{ACB} = \widehat{CAD}$ nên $\widehat{ABC} = \widehat{BAD}.$

Do đó ΔDAB cân $\Rightarrow DB = DA.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $DC = DB.$ Vậy D là trung điểm của BC.

Xét ΔABE vuông tại A có $AE^2 = BE^2 - AB^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow AE = 3(cm) \Rightarrow E$ là trung điểm của AC.

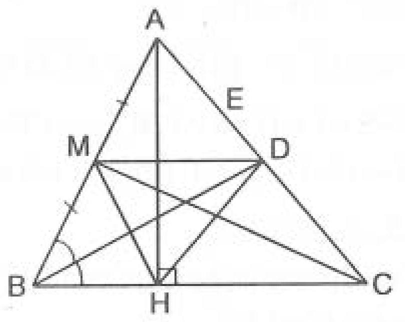
Xét ΔAFC vuông tại A có $AF^2 = CF^2 - AC^2 = \left(\sqrt{40}\right)^2 - 6^2 = 4$

$\Rightarrow AF = 2(cm)$

$\Rightarrow F$ là trung điểm của AB.

Xét ΔABC có AD, BE, CF là ba đường trung tuyến nên chúng đồng quy.

21.14. (h.21.20)



Hình 21.20

Tam giác ABH vuông tại H, có HM là đường trung tuyến nên $HM = \frac{1}{2}AB$

Suy ra $DM = \frac{1}{2}AB$ (vì $HM = DM$).

Do đó ΔDAB vuông tại D.

Tam giác ABC có BD vừa là đường phân giác vừa là đường cao nên là tam giác cân tại B

$\Rightarrow BA = BC$ (1) dẫn tới $DA = DC$.

Xét ΔHAC và ΔHAB vuông tại H có $HD = \frac{1}{2}AC$; $HM = \frac{1}{2}AB$ mà $HD = HM$ nên $AC = AB$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AB = BC = CA$ do đó ΔABC đều.

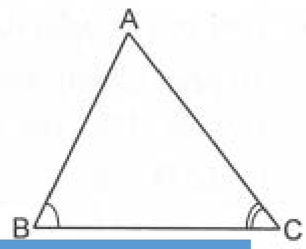
Trong tam giác đều ABC, đường cao AH, đường trung tuyến CM cũng là đường phân giác. Suy ra AH, BD, CM đồng quy.

Chuyên đề 22. BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CỰC TRỊ HÌNH HỌC

A. Kiến thức cần nhớ

• *Để chứng minh hai đoạn thẳng hai góc không bằng nhau ta có thể:*

1. Dùng quan hệ giữa góc và cạnh đối trong một tam giác (h.22.1)



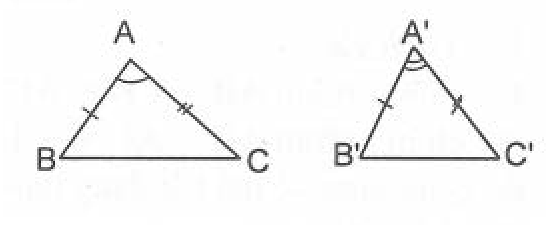
Hình 22.1

ΔABC:
$AC > AB \Leftrightarrow \widehat{B} = \widehat{C}.$

Suy ra trong tam giác tù (hoặc tam giác vuông) thì cạnh đối với góc tù (hoặc góc vuông) là cạnh lớn nhất.

2. Dùng quan hệ giữa góc và cạnh đối trong hai tam giác có hai cặp cạnh bằng nhau (h.22.2)

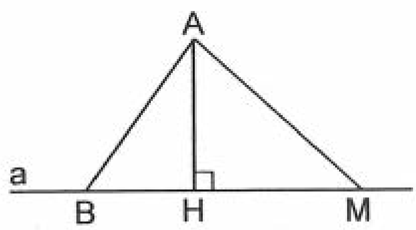
ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có:
$AB = A'B'$; $AC = A'C'$.
Khi đó: $BC > B'C' \Leftrightarrow \widehat{A} > \widehat{A'}$



Hình 22.2

3. Dùng quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên, giữa đường xiên và hình chiếu

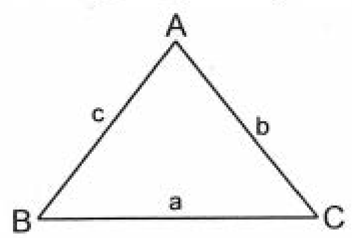
$AH \perp a, B, M \in a$ (h.22.3). Khi đó:
• $AM \geq AH$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv H$)
• $AM \geq AB \Leftrightarrow HM \geq HB$



Hình 22.3

4. Dùng bất đẳng thức tam giác (h.22.4)

ΔABC:
$\lvert b-c \rvert < a < b+c$



Hình 22.4

Mở rộng: Với ba điểm *A, B, C* bất kì bao giờ ta cũng có: $AB \leq AC + CB$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow C$ thuộc đoạn thẳng *AB*).

• *Tìm giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng AB thay đổi*

Ta phải chứng minh $AB \leq a$ (số *a* không đổi) và chỉ rõ khi nào dấu "=" xảy ra. Khi đó giá trị lớn nhất của độ dài *AB* là bằng *a*. Ta viết $maxAB = a$.

• *Tìm giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng AB thay đổi*

Ta phải chứng minh $AB \ge b$ (số b không đổi) và chỉ rõ khi nào dấu $"="$ xảy ra. Khi đó giá trị nhỏ nhất của độ dài AB là bằng b. Ta viết $minAB = b$.

B. Một số ví dụ

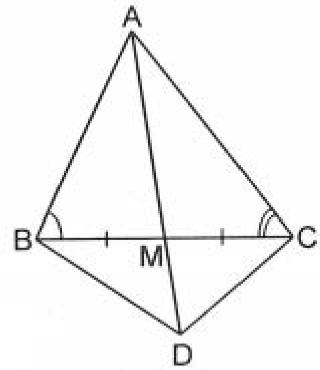
Ví dụ 1. Tam giác ABC có $\widehat{C} < \widehat{B}$. Vẽ đường trung tuyến AM. Trên tia đối của tia MA lấy điểm D. Chứng minh rằng $AB + CD < AC + BD$.

Giải (h.22.5)

*** *Tìm cách giải.***

Để chứng minh $AB + CD < AC + BD$ ta có thể chứng minh $AB < AC$ và $CD < BD$. Sau đó cộng từng vế hai bất đẳng thức.

*** Trình bày lời giải.**



Hình 22.5

Tam giác ABC có $\widehat{ACB} < \widehat{ABC}$ suy ra $AB < AC$. (1)

Xét ΔAMB và ΔAMC có: $MB = MC$;

AM chung; $AB < AC$ nên $\widehat{AMB} < \widehat{AMC}$.

Suy ra $\widehat{CMD} < \widehat{BMD}$.

Xét ΔCMD và ΔBMD có: $MC = MB$; MD chung;

$\widehat{CMD} < \widehat{BMD}$ nên $CD < BD$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $AB + CD < AC + BD$.

*** Nhận xét:** Nếu $a < b$ và $c < d$ thì $a + c < b + d$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} \ge 90°$. Gọi O là trung điểm của BC. Vẽ $BD \perp AO$; $CE \perp AO$ (D, E thuộc đường thẳng AO). Chứng minh rằng $AB < \dfrac{AD + AE}{2}$

Giải (h.22.6)

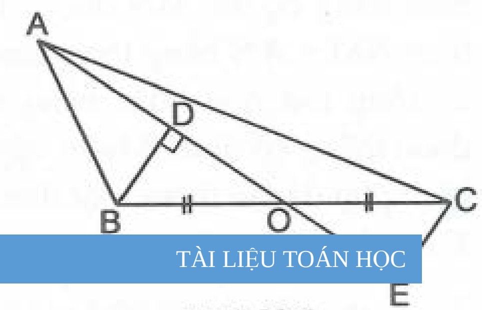
*** *Tìm cách giải.***

Ta có $AB < \dfrac{AD + AE}{2} \Leftrightarrow 2AB < AD + AE$.

Để chứng minh $2AB < AD + AE$ ta biểu diễn AB theo hai cách khác nhau rồi dùng tính chất cộng từng vế của hai bất đẳng thức cùng chiều sẽ có được $2AB$.

*** Trình bày lời giải.**

Ta có $\Delta BOD = \Delta COE$ (cạnh huyền-góc nhọn) $\Rightarrow OD = OE$.



Hình 22.6

Xét ΔAOB có $\widehat{B} \geq 90°$ nên OA là cạnh lớn nhất, do đó $AB < AO.$ (*)

Suy ra $AB < AD + OD.$ (1)

Từ (*) ta được: $AB < AE - OE.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $2AB < AD + OD + AE - OE.$

Do đó $2AB < AD + AE$ (vì $OD = OE$).

Vậy $AB < \dfrac{AD + AE}{2}$

Ví dụ 3. Cho đoạn thẳng AB và trung điểm O của nó. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ các tia Ax và By cùng vuông góc với AB. Lấy điểm $E \in Ax,$ điểm $F \in By$ sao cho $\widehat{EOF} = 90°$. Đặt $\widehat{AOE} = m°$. Xác định giá trị của m để EF có độ dài ngắn nhất.

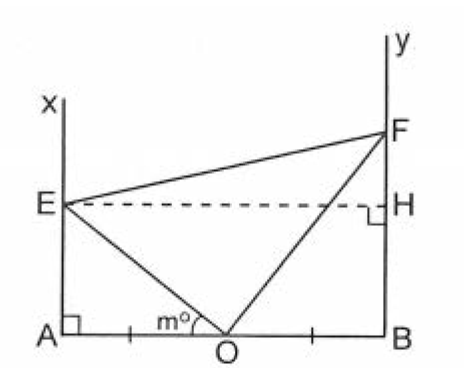
Giải (h.22.7)

**** Tìm cách giải.***

Vẽ $EH \perp By$. Dễ thấy $EF \geq EH = AB$ (không đổi).

Ta cần tìm giá trị của m để dấu "=" xảy ra.

Khi đó $\min EF = AB.$



*** Trình bày lời giải.**

Vẽ $EH \perp By$. Theo tính chất đoạn chắn song song ta được $EH = AB$ và $AE = BH$.

Theo quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên ta có $EF \geq EH$, do đó $EF \geq AB.$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow F \equiv H \Leftrightarrow AE = BF \Leftrightarrow \Delta AOE = \Delta BOF$

$\Leftrightarrow \widehat{AOE} = \widehat{BOF} = 45°$ (vì $\widehat{AOE} + \widehat{BOF} = 90°$).

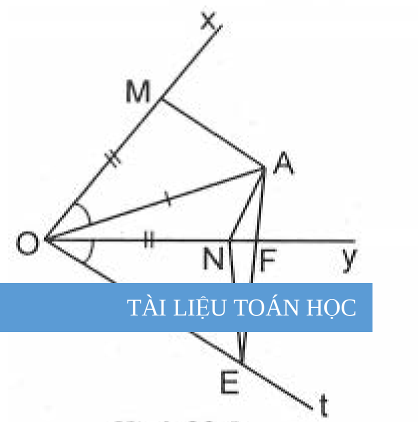
Vậy EF có độ dài ngắn nhất (bằng độ dài AB) khi và chỉ khi $\widehat{AOE} = 45°$, tức là khi và chỉ khi $m = 45$.

Ví dụ 4. Cho góc nhọn xOy và một điểm A ở trong góc đó. Xác định điểm M trên tia Ox, điểm N trên tia Oy sao cho $OM = ON$ và tổng $AM + AN$ nhỏ nhất.

Giải (h.22.8)

**** Tìm cách giải.***

Xét ba điểm A, M, N ta có $AM + AN \geq MN$ nhưng độ dài MN lại thay đổi. Do đó không thể kết luận tổng $AM + AN$ có giá trị nhỏ nhất bằng độ dài MN được. Ta phải thay thế tổng $AM + AN$ bằng tổng của hai đoạn thẳng có tổng lớn hơn hoặc bằng độ dài



Hình 22.8

của một đoạn thẳng cố định. Muốn vậy ta cần vẽ thêm hình phụ để tạo thêm một điểm E cố định.

*** Trình bày lời giải.**

Trên nửa mặt phẳng bờ Oy không chứa A vẽ tia Ot sao cho $\widehat{yOt} = \widehat{AOx}$.

Trên tia Ot lấy điểm E sao cho $OE = OA$. Như vậy hai điểm A và E cố định, đoạn thẳng AE có độ dài không đổi.

Ta có $\Delta AOM = \Delta EON$ (c.g.c) $\Rightarrow AM = EN$. Do đó $AM + AN = EN + AN$. Gọi F là giao điểm của AE với tia Oy.

Xét ba điểm N, A, E ta có: $EN + AN \geq AE$ (dấu "$=$" xảy ra $\Leftrightarrow N \equiv F$).

Vậy min $AM + AN = AE$ khi $N \equiv F$. Điểm $M \in Ox$ sao cho $OM = ON$.

C. Bài tập vận dụng

• Quan hệ giữa cạnh và góc đối trong tam giác

22.1. Cho tam giác ABC, $\widehat{A} = 60°$. Chứng minh rằng $BC^3 < AB^3 + AC^3$.

22.2. Cho tam giác $ABC, AB < AC$. Vẽ ra ngoài tam giác này các tam giác vuông cân tại A là ABE và ACF. Gọi D là trung điểm của BC.

Chứng minh rằng $DE < DF$.

22.3. Cho tam giác ABC, $\widehat{A} > 90°$ và $AB = \frac{1}{2}BC$. Chứng minh rằng $\widehat{C} > \frac{\widehat{B}}{2}$

22.4. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM.

Chứng minh rằng $AM > \frac{BC}{2}$ khi và chỉ khi góc A nhọn.

22.5. Cho tam giác ABC và một điểm D nằm trong tam giác. Chứng minh rằng trong bốn điểm A, B, C, D tồn tại ba điểm là ba đỉnh của một tam giác có một góc lớn hơn $29°$.

• Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên

22.6. Cho điểm A nằm ngoài đường thẳng a. Lấy điểm $B \in a$. Qua A vẽ một đường thẳng vuông góc với AB cắt đường thẳng a tại C.

Xác định vị trí của điểm B để BC có độ dài nhỏ nhất.

22.7. Cho tam giác ABC cân tại $A, BC = a$. Gọi O là một điểm trên đáy BC. Qua O vẽ các đường thẳng song song với hai cạnh bên, cắt AB và AC lần lượt tại M và N. Tìm độ dài nhỏ nhất của MN.

22.8. Cho tam giác đều ABC cạnh dài $4cm$. Trên các cạnh AB và AC lần lượt lấy các điểm D và E sao cho $AD = CE.$ Tính độ dài nhỏ nhất của DE.

22.9. Cho tam giác $ABC,$ $\widehat{B} = 45°; \widehat{C} = 30°$ và $AC = 52cm$. Điểm M nằm giữa B và C. Tính giá trị lớn nhất của tổng các khoảng cách từ B và C đến đường thẳng AM.

22.10. Chứng minh rằng trong các tam giác có một góc bằng α và tổng hai cạnh kề góc ấy bằng 2a thì tam giác cân có góc ở đỉnh bằng α là tam giác có chu vi nhỏ nhất.

• **Bất đẳng thức tam giác**

22.11. Cho tam giác ABC. Gọi xy là đường phân giác góc ngoài tại đỉnh C. Tìm trên xy một điểm M sao cho tổng $MA + MB$ ngắn nhất.

22.12. Cho tam giác ABC có $AB = 12;$ $AC = 16.$ Gọi M là một điểm trong mặt phẳng. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 7MA + 3MB + 4MC$.

22.13. Cho tam giác nhọn ABC, trực tâm H. Chứng minh rằng tổng $HA + HB + HC$ nhỏ hơn $\frac{2}{3}$ chu vi của tam giác ABC.

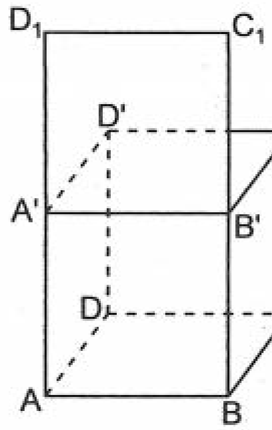
22.14. Cho tam giác ABC vuông cân tại $A, AB = a.$ Tìm một điểm M sao cho tam giác MAC cân tại M, đồng thời tổng $MA + MB$ nhỏ nhất.

Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

22.15. Cho đường thẳng xy và tam giác ABC có cạnh AB nằm trên một nửa mặt phẳng bờ xy còn đỉnh C di động trên xy. Biết $AB = 13cm,$ khoảng cách từ A và B đến xy lần lượt bằng $2cm$ và $7cm$.

Tính giá trị nhỏ nhất của chu vi tam giác ABC.

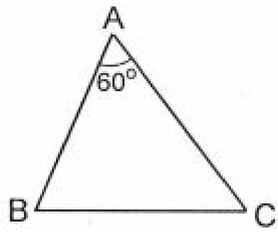
22.16. Một hộp gỗ hình lập phương mỗi cạnh dài $20cm$. Đáy $ABCD$ đặt áp sát mặt bàn. Nắp hộp $A'B'C'D'$ có thể mở dựng đứng lên trên (h.22.9). Một con kiến ở đỉnh A muốn bò tới đỉnh C' bằng cách vượt qua cạnh $A'B'$ thì phải bò một quãng đường ngắn nhất là bao nhiêu?



Hình 22.9

Hướng dẫn giải

22.1. (h.22.10)



Hình 22.10

• Nếu $\widehat{B}=\widehat{C}$ thì ΔABC cân, $\widehat{A}=60°$ nên ΔABC đều.

Do đó $AB=BC=CA$.

Suy ra $AB^3=BC^3=CA^3$. Vậy $BC^3<AB^3+CA^3$.

• Nếu $\widehat{B}>\widehat{C}$ thì $\widehat{B}>60°$ (vì $\widehat{B}+\widehat{C}=120°$).

Do đó $\widehat{A}<\widehat{B}\Rightarrow BC<AC$.

Suy ra $BC^3<AB^3+CA^3$.

• Nếu $\widehat{B}<\widehat{C}$, cũng chứng minh tương tự, ta được: $BC^3<AB^3+CA^3$.

22.2. (h.22.11)

Theo định lí Py-ta-go ta có $BE^2=2AB^2, CF^2=2AC^2$ mà $AB<AC$ nên $BE<CF$.

Dễ thấy $\Delta ABF=\Delta AEC$ (c.g.c).

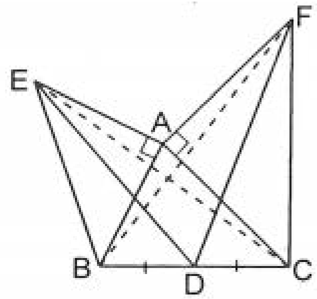
Suy ra $BF=CE$.

Xét ΔCBE và ΔBCF có: BC chung,

$CE=BF, BE<CF$ nên $\widehat{ECB}<\widehat{FBC}$ hay $\widehat{ECD}<\widehat{FBD}$.

Xét ΔECD và ΔFBD có: $CE=BF$, $DC=DB$ và $\widehat{ECD}<\widehat{FBD}$.

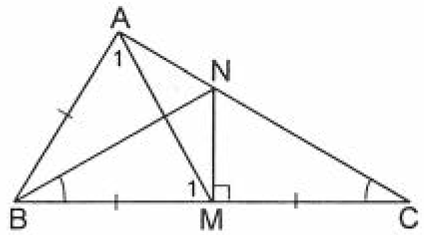
Do đó $DE<DF$ (định lí hai tam giác có hai cặp cạnh bằng nhau).



Hình 22.11

22.3. (h.22.12)

Vẽ đường trung trực của *BC* cắt *BC* tại *M*, cắt *AC* tại *N*.



Hình 22.12

Ta có $NB = NC$; ΔNBC cân $\Rightarrow \widehat{C} = \widehat{NBC}$.

ΔBAM có $BA = BM\left(=\frac{1}{2}BC\right)$ nên là tam giác cân.

Suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{M_1}$, mà $\widehat{BAN} > 90°, \widehat{BMN} = 90°$ nên $\widehat{MAN} > \widehat{AMN}$

$\Rightarrow MN > AN$ (quan hệ giữa cạnh đối trong một tam giác).

ΔMBN và ΔABN có $BM = BA$, BN chung và $MN > AN$.

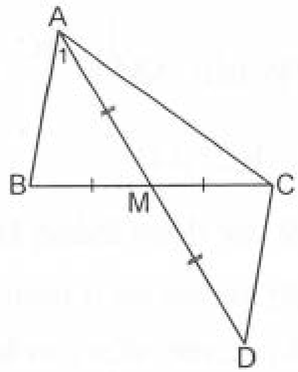
Do đó $\widehat{MBN} > \widehat{ABN}$ (định lí hai tam giác có hai cặp cạnh bằng nhau).

Suy ra $\widehat{MBN} + \widehat{MBN} > \widehat{ABN} + \widehat{MBN}$.

Do đó $2\widehat{MBN} > \widehat{ABC} \Rightarrow 2\widehat{C} > \widehat{B}$ (vì $C = \widehat{MBN}) \Rightarrow \widehat{C} > \frac{\widehat{B}}{2}$

22.4. (h.22.13)

Trên tia đối của tia *MA* lấy điểm *D* sao cho $MD = MA$.



Hình 22.13

$\Delta ABM = \Delta DCM$ (c.g.c) $\Rightarrow AB = CD$ và $\widehat{A_1} = \widehat{D}$.

Do đó $AB // CD$

$\Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{DCA} = 180°$ (cặp góc trong cùng phía). (*)

• Chứng minh mệnh đề: "Nếu góc *A* nhọn thì $AM > \frac{BC}{2}$"

Nếu $AM = \frac{BC}{2}$ thì $2AM = BC$ do đó $AD = BC$.

$\Delta BAC = \Delta DCA$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{DCA} = 180° : 2 = 90°$, trái giả thiết.

Nếu $AM < \frac{BC}{2}$ thì $2AM < BC$ do đó $AD < BC$.

ΔBAC và ΔDCA có: $AB = CD$; AC chung và $BC > AD$.

Do đó $\widehat{BAC} > \widehat{DCA}$

Từ (*) suy ra $\widehat{BAC} > 90°$, trái giả thiết.

Vậy nếu *A* nhọn thì $AM > \frac{BC}{2}$

• Chứng minh mệnh đề: "Nếu $AM > \dfrac{BC}{2}$ thì góc A nhọn."

Nếu $\widehat{A} = 90^\circ$ thì từ (*) suy ra $\widehat{DCA} = 90^\circ$.

$\Delta BAC = \Delta DCA$ (c.g.c) $\Rightarrow BC = AD$ hay $AM = \dfrac{BC}{2}$, trái giả thiết.

Nếu $\widehat{A} > 90^\circ$ thì từ (*) suy ra $\widehat{DCA} < 90^\circ$. Vậy $\widehat{BAC} > \widehat{DCA}$.

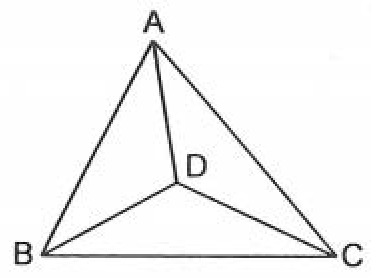
ΔBAC và ΔDCA có: $AB = CD$; AC chung và $\widehat{BAC} > \widehat{DCA}$.

Do đó $BC > AD$ hay $BC > 2AM$ tức là $AM < \dfrac{BC}{2}$, trái giả thiết.

Vậy nếu $AM > \dfrac{BC}{2}$ thì góc A nhọn.

22.5. (h.22.14)

Vẽ các đoạn thẳng *DA, DB, DC*. Ta có $\widehat{ADB} + \widehat{BDC} + \widehat{CDA} = 360^\circ$.



Hình 22.14

Suy ra tồn tại ít nhất một góc có số đo nhỏ hơn hoặc bằng 120° (vì nếu cả ba góc này đều lớn hơn 120° thì tổng của chúng lớn hơn 360°, vô lí).

Giả sử góc đó là góc *BDC.*

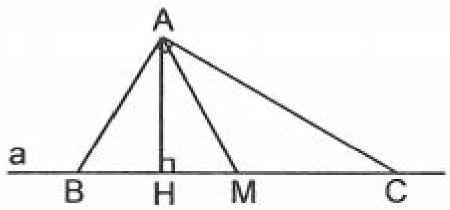
Xét ΔBDC có $\widehat{BDC} \le 120^\circ$, suy ra

$\widehat{DBC} + \widehat{DCB} \ge 60^\circ$.

Do đó tồn tại ít nhất một góc lớn hơn hoặc bằng $30^\circ > 29^\circ$.

Vậy ba điểm cần tìm là *B, C, D.*

22.6. (h.22.15)



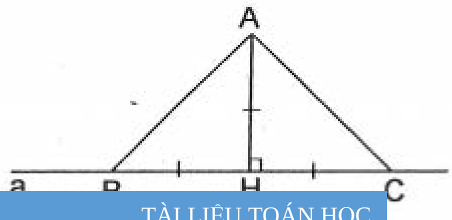
Hình 22.15

Gọi *M* là trung điểm của *BC* và *H* là hình chiếu của *A* trên đường thẳng *a.*

Khi đó *AH* có độ dài không đổi.

Ta có ΔABC vuông tại *A* nên $AM = \dfrac{1}{2}BC$

hay $BC = 2AM \ge 2AH$ (quan hệ giữa đường vuông góc với đường xiên)



Hình 22.16

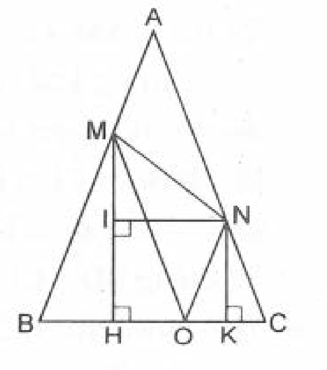
Do đó BC có độ dài nhỏ nhất là $2AH \Leftrightarrow M \equiv H \Leftrightarrow \Delta ABH$ vuông cân.

Ta xác định điểm B như sau:

- Dựng $AH \perp BC$;

- Trên đường thẳng a đặt $HB = HA$ (h.22.16)

22.7. (h.22.17)



Hình 22.17

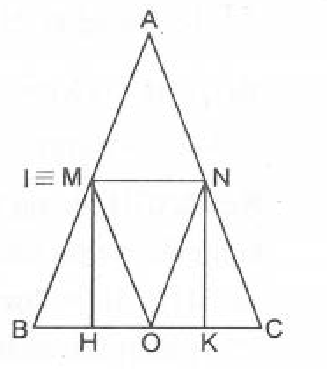
Vẽ $MH \perp BC$, $NK \perp BC$, $NI \perp MH$.

Khi đó $IN = HK$ và $IH = NK$ (tính chất đoạn chắn song song).

Ta có $OM // AC \Rightarrow \widehat{BOM} = \widehat{C} = \widehat{B}$.

Do đó ΔMBO cân tại M, từ đó ta được $HB = HO$.

Tương tự ta có $KC = KO$. Suy ra $HK = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$



Hình 22.18

Theo quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên ta có

$MN \geq IN = HK = \frac{a}{2}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv I$ (h.21.18)

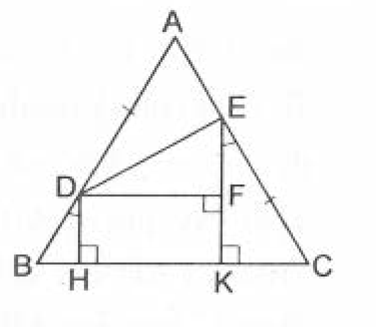
$\Leftrightarrow MH = NK \Leftrightarrow \Delta MHB = \Delta NKC \Leftrightarrow BH = CK$

$\Leftrightarrow OH = OK \Leftrightarrow OB = OC \Leftrightarrow O$ là trung điểm của BC.

Vậy min $MN = \frac{a}{2}$ khi O là trung điểm của BC.

22.8. (h.22.19)

Vẽ $DH \perp BC$, $EK \perp BC$, $DF \perp EK$.



Hình 22.19

Ta có $DF = HK$ (tính chất đoạn chắn song song). Các tam giác vuông HBD và KCE có

$\widehat{D} = \widehat{E} = 30°$ nên $BH = \frac{1}{2}BD; CK = \frac{1}{2}CE$.

Do đó $BH + CK = \frac{1}{2}(BD + CE) = \frac{1}{2}(BD + AD) = \frac{1}{2}AB = 2cm$.

Suy ra $HK = 2cm$.

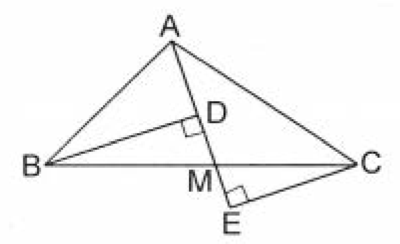
Ta có $DE \geq DF = HK = 2cm$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow E \equiv F \Leftrightarrow DH = EK \Leftrightarrow \Delta HBD = \Delta KCE \Leftrightarrow BD = CE$

$\Leftrightarrow BD = AD \Leftrightarrow D$ là trung điểm của AB (khi đó E là trung điểm của AC).

Vậy độ dài nhỏ nhất của DE là $2cm$ khi D và E lần lượt là trung điểm của AB và AC.

22.9. (h.22.20)



Hình 22.20

Vẽ $BD \perp AM,\ CE \perp AM\ \left(D,\ E \in AM\right)$.

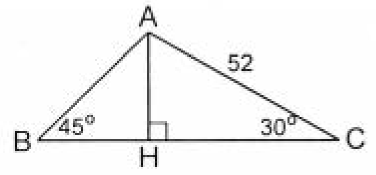
Ta có $BD \le BM,\ CE \le CM$ (quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên).

Do đó $BD + CE \le BM + CM = BC$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow D$ và E trùng với $M \Leftrightarrow AM \perp BC$).

Vậy tổng $BD + CE$ có giá trị lớn nhất là bằng độ dài BC

• *Tính độ dài BC* (h.22.21)

Vẽ $AH \perp BC$.



Hình 22.21

ΔAHC vuông tại H có $\widehat{C} = 30°$ nên

$AH = \dfrac{1}{2}AC = 52:2 = 26\left(cm\right)$.

Ta có $HC^2 = AC^2 - AH^2 = 52^2 - 26^2 = 2028$

$\Rightarrow HC \approx 45\left(cm\right)$.

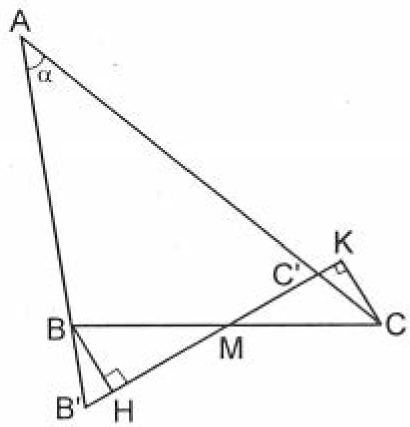
Xét ΔABH vuông tại H, có $\widehat{B} = 45°$ nên là tam giác vuông cân

$\Rightarrow BH = AH = 26cm$. Do đó $BC = 26 + 45 = 71\left(cm\right)$.

Vậy giá trị lớn nhất của tổng $BD + CE$ là $71cm$ khi M là hình chiếu của A trên BC.

22.10. (h.22.22)

Xét ΔABC có $\widehat{A} = \alpha$ và $AB + AC = 2a$.



Hình 22.22

Ta phải chứng minh rằng khi $AB = AC = a$ thì chu vi ΔABC sẽ nhỏ nhất.

Thật vậy, giả sử $AB < AC$.

Trên tia AB lấy điểm B', trên tia AC lấy điểm C' sao cho $AB' = AC' = a$.

Khi đó B' và C' là các điểm cố định và $B'C'$ có độ dài không đổi.

Ta có $AB + AC = AB' + AC' = 2a$.

Do đó $AB + \left(AC' + C'C\right) = \left(AB + BB'\right) + AC' \Rightarrow CC' = BB'$.

Vẽ $BH \perp B'C'$ và $CK \perp B'C'$.

$\Delta BB'H = \Delta CC'H$ (cạnh huyền, góc nhọn) $\Rightarrow HB' = KC'$ do đó $HK = B'C'$. (1)

Gọi M là giao điểm của BC và $B'C'$.

Ta có $MH \le MB$; $MK \le MC \Rightarrow MH + MK \le MB + MC$ hay $HK \le BC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BC \ge B'C'$.

Ta có chu vi $\Delta ABC = AB + BC + CA \ge 2a + B'C'$ (không đổi).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow B' \equiv B$ và $C' \equiv C$.

Vậy chu vi ΔABC nhỏ nhất khi $AB = AC = a$, tức là khi ΔABC cân tại A.

22.11. (h.22.23)

Vẽ $AH \perp xy$, tia AH cắt đường thẳng BC tại D. Khi đó BD không đổi.

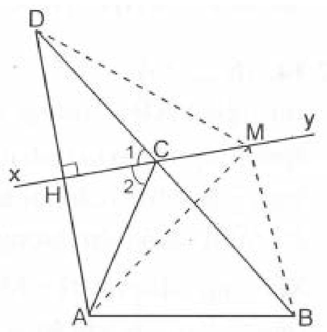
$\Delta CHA = \Delta CHD$ (g.c.g) $\Rightarrow HA = HD \Rightarrow xy$ là đường trung trực của AD.

Gọi M là một điểm bất kì trên xy.

Ta có $MA = MD$ (tính chất điểm nằm trên đường trung trực).

Do đó $MA + MB = MD + MB \ge BD$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv C$).

Vậy tổng $MA + MB$ ngắn nhất là bằng BD khi và chỉ khi $M \equiv C$



Hình 22.23

22.12. (h.22.24)

Ta có $S = 7MA + 3MB + 4MC$

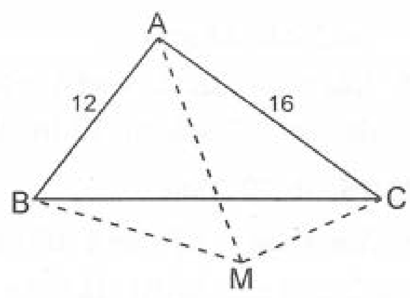
$= 3\left(MA + MB\right) + 4\left(MA + MC\right)$

$\ge 3AB + 4AC = 3.12 + 4.16 = 100.$

Dấu "=" xảy ra

$\Leftrightarrow M$ thuộc đoạn thẳng AB và $AC \Leftrightarrow M \equiv A$.

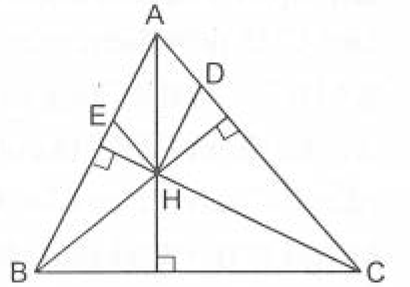
Vậy $minS = 100$ khi $M \equiv A$.



Hình 22.24

22.13. (h.22.25)

Từ H vẽ đường thẳng song song với AB cắt AC tại D; đường thẳng song song với AC cắt AB tại E. Theo tính chất đoạn thẳng song song ta có



Hình 22.25

$AD = HE, AE = HD.$

Vì $HB \perp AC$ nên $HB \perp HE$

$\Rightarrow HB < BE$ (quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên).

Chứng minh tương tự ta được $HC < CD$.

Xét ΔAHD có $HA < AD + DH$ (bất đẳng thức tam giác). Suy ra

$HA + HB + HC < (AD + DH) + BE + CD = (AD + AE) + BE + CD$

$= (AD + CD) + (AE + BE) = AC + AB.$ (1)

Chứng minh tương tự, ta được:

$HA + HB + HC < AB + BC.$ (2)

$HA + HB + HC < BC + CA.$ (3)

Cộng từng vế các bất đẳng thức (1), (2), (3) ta được:

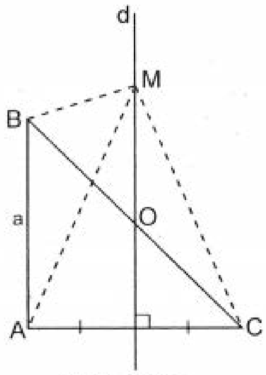
$3(HA + HB + HC) < 2(AB + BC + CA).$

Do đó $HA + HB + HC < \frac{2}{3}(AB + BC + CA).$

22.14. (h.22.26)

Tam giác ABC vuông cân tại A nên theo định lí Py-ta-go ta tính được $BC = a\sqrt{2}$.

Tam giác MAC cân tại $M \Rightarrow MA = MC$ do đó M nằm trên đường trung trực d của AC.



Hình 22.26

Xét tổng $MA + MB = MC + MB \geq BC = a\sqrt{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $M \equiv O$ với O là giao điểm của d với cạnh BC.

Vậy giá trị nhỏ nhất của tổng $MA + MB$ là $a\sqrt{2}$ khi $M \equiv O$

* *Nhận xét:* Ta thấy $MA + MB \geq AB = a$, nhưng không có vị trí nào của M để dấu "=" xảy ra. Vì thế không thể kết luận $min(MA + MB) = a$.

22.15. (h.22.27)

• *Xác định vị trí của C để chu vi tam giác ABC nhỏ nhất*

Chu vi của ΔABC là $CA+CB+AB$. Do AB cố định nên chu vi ΔABC nhỏ nhất $\Leftrightarrow CA+CB$ nhỏ nhất.

Vẽ $AH \perp xy$. Trên tia đối của tia HA lấy điểm D sao cho $HD = HA$.

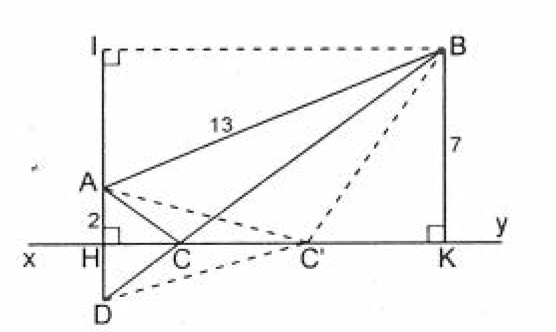
Khi đó BD là một đoạn thẳng cố định. Gọi C' là một điểm trên xy.

$\Delta AHC' = \Delta DHC'$ (c.g.c) $\Rightarrow C'A = C'D$.

Xét ba điểm BDC' ta có $C'B + C'D \geq BD$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow C' \equiv C$ với C là giao điểm của BD với xy).

Do đó $C'B + C'D$ nhỏ nhất là bằng BD khi $C' \equiv C$

Suy ra khi C là giao điểm của BD với xy thì chu vi ΔABC nhỏ nhất.



Hình 22.27

• *Tính giá trị nhỏ nhất của chu vi tam giác ABC*

Vẽ $BK \perp xy$, $BI \perp AH$ ta tính được $IH = 7cm$; $IA = 5cm$ và $ID = 9cm$.

Áp dụng định lí Py-ta-go vào ΔIAB vuông tại I ta có:

$BI^2 = AB^2 - IA^2 = 13^2 - 5^2 = 144$.

Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác vuông IDB, ta được

$BD^2 = IB^2 + ID^2 = 144 + 9^2 = 225 \Rightarrow BD = 15(cm)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của chu vi tam giác ABC là $CA + CB + AB = BD + AB = 15 + 13 = 28(cm)$.

22.16. (h.22.28)

Gọi M là điểm trên cạnh $A'B'$ mà con kiến phải qua khi bò từ A đến C'

Mở nắp hộp $A'B'C'D'$ đứng lên đến vị trí $A'B'C_1D_1$.

Xét ba điểm $A,\ M,\ C_1$ ta có $MA + MC_1 \geq AC_1$.

Dấu "=" xảy ra

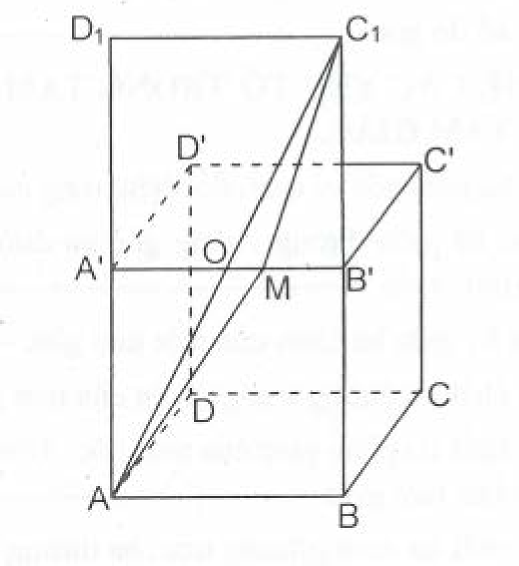
$\Leftrightarrow M$ trùng với giao điểm O của AC_1 với cạnh $A'B'$.

$\Leftrightarrow \Delta A'AM = \Delta B'C_1M$ (g.c.g) $\Leftrightarrow MA' = MB'$

$\Leftrightarrow M$ là trung điểm của $A'B'$.

Ta có $AC_1^2 = AB^2 + BC_1^2 = 20^2 + 40^2 = 2000 \Rightarrow AC_1 = \sqrt{2000} \approx 44,7(cm)$.

Vậy quãng đường ngắn nhất mà kiến phải bò là 44,7cm khi kiến bò qua trung điểm M của cạnh $A'B'$ theo hành trình: đoạn thẳng AM rồi đoạn thẳng MC'.



Hình 22.28