

CHUYÊN ĐỀ I: RÚT GỌN VÀ TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC

Họ tên học sinh: Lớp: 9B1/ Ngày: / ... / 20....

I. Kiến thức cơ bản

Các công thức biến đổi căn thức:

1. $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A \text{ nếu } A \geq 0 \\ -A \text{ nếu } A < 0 \end{cases}$
2. $\sqrt{AB} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$ (Với $A \geq 0; B \geq 0$)
3. $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ (Với $A \geq 0; B > 0$)
4. $\sqrt{A^2 B} = |A| \sqrt{B}$ (Với $B \geq 0$)
5. $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2 B}$ (Với $A \geq 0; B \geq 0$)
6. $A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2 B}$ (Với $A < 0; B \geq 0$)
7. $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{1}{|B|} \sqrt{AB}$ (Với $A \geq 0; B > 0$)
8. $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$ (Với $B > 0$)
9. $\frac{C}{\sqrt{A \pm B}} = \frac{C(\sqrt{A \pm B})}{A - B^2}$ (Với $A \geq 0; A \neq B^2$)
10. $\frac{C}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A} \pm \sqrt{B})}{A - B}$ (Với $A \geq 0; B \geq 0; A \neq B$)
11. $(\sqrt[3]{A})^3 = \sqrt[3]{A^3} = A$

Điều kiện xác định của một số hàm cơ bản:

1. \sqrt{A} ĐKXĐ: $A \geq 0$
2. $\frac{A}{B}$ ĐKXĐ: $B \neq 0$
3. $\frac{A}{\sqrt{B}}$ ĐKXĐ: $B > 0$
4. $\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ ĐKXĐ: $A \geq 0; B > 0$
5. $\sqrt{\frac{A}{B}}$ ĐKXĐ: $\begin{cases} A \leq 0 \\ B < 0 \\ A \geq 0 \\ B > 0 \end{cases}$

Cho $a > 0$ ta có:

6. $x^2 > a \Leftrightarrow \begin{cases} x > \sqrt{a} \\ x < -\sqrt{a} \end{cases}$
7. Cho $a > 0$ ta có:
 $x^2 < a \Leftrightarrow -\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$

II. Bài tập vận dụng

Bài 1. Thực hiện phép tính:

a) $A = \sqrt{3+2\sqrt{2}}$

b) $B = \sqrt{6-4\sqrt{2}}$

c) $C = \sqrt{4-2\sqrt{3}} - \sqrt{7+4\sqrt{3}}$

Đáp án:

a) $A = \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{2+2\sqrt{2}+1} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} + 1^2} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt{2}+1$

b) $B = \sqrt{6-4\sqrt{2}} = \sqrt{2-4\sqrt{2}+4} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 4\sqrt{2} + 2^2} = \sqrt{(\sqrt{2}-2)^2} = 2-\sqrt{2}$

c) $C = \sqrt{4-2\sqrt{3}} - \sqrt{7+4\sqrt{3}} = (\sqrt{3}-1) - (\sqrt{3}+2) = -3$

Bài 2. Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức P nhận giá trị nguyên

a) $P = \frac{5}{\sqrt{x}+1}$

b) $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$

Đáp án:

a) $P = \frac{5}{\sqrt{x}+1}$ (TXD: $D = [0; +\infty)$)

Do x nguyên, nên để P đạt giá trị nguyên thì $\sqrt{x}+1$ là ước của $5 = \{-5; -1; 1; 5\}$

Do $\sqrt{x}+1 > 0 \quad \forall x \in D$ nên:

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x}+1=1 \Leftrightarrow \sqrt{x}=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ (thỏa mãn)} \\ \sqrt{x}+1=5 \Leftrightarrow \sqrt{x}=4 \Leftrightarrow x=16 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$$

Vậy tập các giá trị của x thỏa mãn đề bài là: $T = \{0; 16\}$

b) $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$ (TXD: $D = [0; +\infty) \setminus \{9\}$)

Ta có: $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}-3+4}{\sqrt{x}-3} = 1 + \frac{4}{\sqrt{x}-3}$

Do x nguyên, nên để P đạt giá trị nguyên thì $\sqrt{x}-3$ là ước của $4 = \{-4; -2; -1; 1; 2; 4\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x}-3=-4 \Leftrightarrow \sqrt{x}=-1 \text{ (loại)} \\ \sqrt{x}-3=-2 \Leftrightarrow x=1 \text{ (thỏa mãn)} \\ \sqrt{x}-3=-1 \Leftrightarrow x=4 \text{ (thỏa mãn)} \\ \sqrt{x}-3=1 \Leftrightarrow x=16 \text{ (thỏa mãn)} \\ \sqrt{x}-3=2 \Leftrightarrow x=25 \text{ (thỏa mãn)} \\ \sqrt{x}-3=4 \Leftrightarrow x=49 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$$

Vậy tập các giá trị của x thỏa mãn đề bài là: $T = \{1; 4; 16; 25; 49\}$

Bài 3. Với $x > 0$, cho hai biểu thức $A = \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 3-2\sqrt{2}$.

b) Rút gọn biểu thức B .

c) Tìm x để $\frac{A}{B} > \frac{3}{2}$

Đáp án:

$$A = \frac{2 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$\text{TXD: } D_A = (0; +\infty)$$

$$B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}$$

$$\text{TXD: } D_B = (0; +\infty)$$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 3 - 2\sqrt{2}$.

Ta có: $x = 3 - 2\sqrt{2} \in D_A$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2 - 2\sqrt{2} + 1} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} + 1^2} = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} = \sqrt{2} - 1$$

$$\Rightarrow A = \frac{2 + \sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{(1 + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1) \cdot (\sqrt{2} + 1)} = 3 + 2\sqrt{2}$$

Vậy với $x = 3 - 2\sqrt{2}$ thì $A = 3 + 2\sqrt{2}$

b) Rút gọn biểu thức B .

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-1) \cdot (\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x}+1)} + \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{x-1}{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x}+1)} + \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}$$

c) Tìm x để $\frac{A}{B} > \frac{3}{2}$

$$\text{Vì } B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} > 0 \quad \forall x \in D_B \Rightarrow \text{TXD: } D = (0; +\infty)$$

Ta có:

$$\begin{aligned}\frac{A}{B} > \frac{3}{2} &\Leftrightarrow \frac{\frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}} > \frac{3}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} > \frac{3}{2} \\ &\Leftrightarrow 2(\sqrt{x}+1) > 3\sqrt{x} \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{x}+2 > 3\sqrt{x} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq x < 4\end{aligned}$$

Kết hợp với tập xác định $D_B = (0; +\infty) \Rightarrow x \in (0; 4)$

Vậy tập giá trị x thỏa mãn đề bài là: $T = (0; 4)$

Bài 4. (Trích đề thi vào 10 Hà Nội 2016 – 2017)

Cho hai biểu thức $A = \frac{7}{\sqrt{x}+8}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} + \frac{2\sqrt{x}-24}{x-9}$ với $x \geq 0, x \neq 9$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$.

b) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3}$.

c) Tìm x để biểu thức $P = A.B$ có giá trị là số nguyên

Đáp án:

$$A = \frac{7}{\sqrt{x}+8} \quad \text{TXD: } D_A = [0; +\infty)$$

$$B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} + \frac{2\sqrt{x}-24}{x-9} \quad \text{TXD: } D_B = [0; +\infty) \setminus \{9\}$$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$.

Ta có: $x = 25 \in D_A$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{25} = 5$$

$$\Rightarrow A = \frac{7}{5+8} = \frac{7}{13}$$

Vậy với $x = 25$ thì $A = \frac{7}{13}$

b) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3}$.

$$B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} + \frac{2\sqrt{x}-24}{x-9}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x} + 3)}{(\sqrt{x} - 3) \cdot (\sqrt{x} + 3)} + \frac{2\sqrt{x} - 24}{(\sqrt{x} - 3) \cdot (\sqrt{x} + 3)} \\
 &= \frac{x + 3\sqrt{x} + 2\sqrt{x} - 24}{(\sqrt{x} - 3) \cdot (\sqrt{x} + 3)} \\
 &= \frac{x + 5\sqrt{x} - 24}{(\sqrt{x} - 3) \cdot (\sqrt{x} + 3)} \\
 &= \frac{(\sqrt{x} - 3) \cdot (\sqrt{x} + 8)}{(\sqrt{x} - 3) \cdot (\sqrt{x} + 3)} \\
 &= \frac{\sqrt{x} + 8}{\sqrt{x} + 3}
 \end{aligned}$$

c) Tìm x để biểu thức $P = A.B$ có giá trị là số nguyên

Ta có:

$$P = A.B = \frac{7}{\sqrt{x} + 8} \cdot \frac{\sqrt{x} + 8}{\sqrt{x} + 3} \quad \text{TXD: } D = D_B = [0; +\infty) \setminus \{9\}$$

$$\Rightarrow P = \frac{7}{\sqrt{x} + 3}$$

$$\sqrt{x} + 3 > 0 \Rightarrow P = \frac{7}{\sqrt{x} + 3} > 0$$

$$\sqrt{x} + 3 > 3 \Rightarrow P = \frac{7}{\sqrt{x} + 3} < \frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow 0 < P < \frac{7}{3}$$

Do P nguyên nên $P = \{1; 2\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{7}{\sqrt{x} + 3} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 3 = 7 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16 \text{ (thỏa mãn)} \\ \frac{7}{\sqrt{x} + 3} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 3 = \frac{7}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$$

Vậy tập giá trị của x thỏa mãn đề bài là: $T = \left\{ \frac{1}{4}; 16 \right\}$

d) Tìm x **nguyên** để biểu thức $P = A.B$ có giá trị là số nguyên

Ta có:

$$P = A.B = \frac{7}{\sqrt{x} + 8} \cdot \frac{\sqrt{x} + 8}{\sqrt{x} + 3} \quad \text{TXD: } D = D_B = [0; +\infty) \setminus \{9\}$$

$$\Rightarrow P = \frac{7}{\sqrt{x}+3}$$

Do x nguyên, nên để P đạt giá trị nguyên thì $\sqrt{x}+3$ là ước của $7 = \{-7; -1; 1; 7\}$

Do $\sqrt{x}+3 \geq 3 \quad \forall x \in D$ nên:

$$\sqrt{x}+3=7 \Leftrightarrow \sqrt{x}=4 \Leftrightarrow x=16 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy tập giá trị x thỏa mãn đề bài là: $T = \{16\}$

Bài 5. Cho biểu thức $P = \frac{3\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} - \frac{2\sqrt{x}-3}{3-\sqrt{x}} - \frac{3(3\sqrt{x}-5)}{x-2\sqrt{x}-3}$.

a) Rút gọn P .

b) Tìm giá trị của P , biết $x = 4 + 2\sqrt{3}$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P .

Đáp án:

a) Rút gọn P .

$$P = \frac{3\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} - \frac{2\sqrt{x}-3}{3-\sqrt{x}} - \frac{3(3\sqrt{x}-5)}{x-2\sqrt{x}-3} \quad \text{TXD: } D = [0; +\infty) \setminus \{9\}$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{3\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} + \frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-3} - \frac{3(3\sqrt{x}-5)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{(3\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} + \frac{(2\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} - \frac{3(3\sqrt{x}-5)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{3x-7\sqrt{x}-6}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} + \frac{2x-\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} - \frac{9\sqrt{x}-15}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{3x-7\sqrt{x}-6+2x-\sqrt{x}-3-9\sqrt{x}+15}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{5x-17\sqrt{x}+6}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{(\sqrt{x}-3)(5\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{5\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$$

$$\text{Vậy } P = \frac{5\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$$

b) Tìm giá trị của P , biết $x = 4 + 2\sqrt{3}$.

Ta có: $x = 4 + 2\sqrt{3} \in D$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{3+2\sqrt{3}+1} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3} + 1^2} = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} = \sqrt{3}+1$$

$$\Rightarrow P = \frac{5(\sqrt{3}+1)-2}{\sqrt{3}+1+1} = \frac{5\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}+2} = \frac{(5\sqrt{3}+3) \cdot (2-\sqrt{3})}{(\sqrt{3}+2) \cdot (2-\sqrt{3})} = -9 + \sqrt{3}$$

Vậy với $x = 4 + 2\sqrt{3}$ thì $P = -9 + \sqrt{3}$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P .

Ta có:

$$P = \frac{5\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} = \frac{5(\sqrt{x}+1)-7}{\sqrt{x}+1} = 5 - \frac{7}{\sqrt{x}+1}$$

$$\text{Vì } x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+1 \geq 1$$

$$\Rightarrow \frac{7}{\sqrt{x}+1} \leq 7$$

$$\Rightarrow P = 5 - \frac{7}{\sqrt{x}+1} \leq -2$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là -2 khi $x = 0$

III. Bài tập tự luyện

Bài 1: Thực hiện phép tính

a) $A = \sqrt{5+2\sqrt{6}} - \sqrt{5-2\sqrt{6}}$

b) $B = \sqrt{19-6\sqrt{2}} - \sqrt{19+6\sqrt{2}}$

c) $C = \sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}} + \sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{17-12\sqrt{2}}}$

d) $D = \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \right) \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{3-\sqrt{3}}$

e*) $E = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{47}+\sqrt{49}}$ (Gợi ý: sử dụng trục căn thức ở mẫu)

Bài 2: Cho $M = (1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}) : (\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6})$

a) Rút gọn M

b) Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức M nhận giá trị là số nguyên

Bài 3. (Trích đề thi vào 10 Hà Nội 2017 – 2018)

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5}$ và $B = \frac{3}{\sqrt{x}+5} + \frac{20-2\sqrt{x}}{x-25}$, với $x \geq 0, x \neq 25$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$.

b) Chứng minh $B = \frac{1}{\sqrt{x}-5}$.

c) Tìm tất cả giá trị của x để $A = B|x-4|$.

Bài 4. (Trích đề thi vào 10 Hà Nội 2018 – 2019)

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{3\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{2}{\sqrt{x}+3}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$.

b) Chứng minh $B = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$.

c) Tìm tất cả giá trị của x để $\frac{A}{B} \geq \frac{x}{4} + 5$.

Bài 5. (Trích đề thi vào 10 Hà Nội 2019 – 2020)

Cho hai biểu thức $A = \frac{4(\sqrt{x}+1)}{25-x}$ và $B = \left(\frac{15-\sqrt{x}}{x-25} + \frac{2}{\sqrt{x}+5} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5}$ với $x \geq 0, x \neq 25$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$.

b) Rút gọn biểu thức B .

c) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức $P = A.B$ đạt giá trị nguyên lớn nhất.

---- **Hết** ----