

CÁC BÀI TOÁN RÚT GỌN CĂN THỨC

A. CÁC BÀI TOÁN RÚT GỌN CĂN THỨC

🗁 Dạng 1: Biểu thức dưới dấu căn là một số thực dương	3
$ ightharpoonup$ Dạng 2: Áp dụng hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = A $	3
$ riangleq$ Dạng 3: Biểu thức dưới dấu căn đưa được về hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = A $	4
🗁 Dạng 4: Rút gọn tổng hợp (sử dụng trục căn thức, hằng đẳng thức, phân tích thành nhân tử;)	6
🗁 Dạng 5. Bài toán chứa ẩn (ẩn x) dưới dấu căn và những ý toán phụ	10
🗁 Bài tập tự luyện:	25

♦ CÁC CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI CĂN THỨC

1.
$$\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A \text{ neu } A \ge 0 \\ -A \text{ neu } A < 0 \end{cases}$$

2.
$$\sqrt{AB} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$$
 (Với $A \ge 0; B \ge 0$)

3.
$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$$
 (Với $A \ge 0; B > 0$)

4.
$$\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B}$$
 (Với $B \ge 0$)

5.
$$A\sqrt{B} = \sqrt{A^2B}$$
 (Với $A \ge 0; B \ge 0$)

6.
$$A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2B}$$
 (Với $A < 0; B \ge 0$)

7.
$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{1}{|B|} \sqrt{AB}$$
 (Với $A \ge 0; B > 0$)

8.
$$\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$$
 (Với $B > 0$)

$$9 \quad \frac{C}{\sqrt{A} \pm B} = \frac{C(\sqrt{A} \pm B)}{A - B^2}$$

(Với
$$A \ge 0$$
; $A \ne B^2$)

$$10 \quad \frac{C}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \frac{C\left(\sqrt{A} \pm \sqrt{B}\right)}{A - B}$$

(Với
$$A \ge 0; B \ge 0; A \ne B$$
)

$$11 \quad \left(\sqrt[3]{A}\right)^3 = \sqrt[3]{A^3} = A$$

♦ CÁCH TÌM ĐKXĐ CỦA MỘT BIỂU THỨC TRONG BÀI TOÁN RÚT GỌN

BIỂU THỨC - ĐKXĐ:

$$1. \sqrt{A}$$

ĐKXĐ:
$$A ≥ 0$$

Ví dụ:
$$\sqrt{x-2018}$$

ĐKXĐ:
$$x \ge 2018$$

2.
$$\frac{A}{B}$$

ĐKXĐ:
$$B \neq 0$$

Ví dụ:
$$\frac{x+4}{x-7}$$

ĐKXĐ:
$$x \neq 7$$

3.
$$\frac{A}{\sqrt{B}}$$

ĐKXĐ:
$$B > 0$$

Ví dụ:
$$\frac{x+1}{\sqrt{x-3}}$$

ĐKXĐ:
$$x > 3$$

4.
$$\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$$

$$DKXD: A \ge 0; B > 0$$

Ví dụ:
$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}}$$

$$DKXD: \begin{cases} x \ge 0 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3$$

5.
$$\sqrt{\frac{A}{B}}$$

Ví dụ:
$$\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$$

$$\text{DKXD:} \quad \begin{cases}
 | x+1 \le 0 \\
 | x+2 < 0 \\
 | x+1 \ge 0
 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}
 | x < -2 \\
 | x \ge 1
 \end{cases}$$

Cho a > 0 ta có:

6.
$$x^2 > a \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x > \sqrt{a} \\ x < -\sqrt{a} \end{bmatrix}$$

Ví dụ:
$$x^2 > 1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x > \sqrt{a} \\ x < -\sqrt{a} \end{bmatrix}$$

Cho a
$$> 0$$
 ta có:

7.
$$x^2 < a \Leftrightarrow -\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$$

Ví dụ:
$$x^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < x < 2$$

Dạng 1: Biểu thức dưới dấu căn là một số thực dương.

Bài 1: Rút gọn các biểu thức sau:

$$M = \sqrt{45} + \sqrt{245} - \sqrt{80}$$
$$A = \sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48}$$

$$N = 5\sqrt{8} + \sqrt{50} - 2\sqrt{18}$$
$$R = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{27} - \sqrt{300}$$

$$P = \sqrt{125} - 4\sqrt{45} + 3\sqrt{20} - \sqrt{80}$$
$$C = (2\sqrt{3} - 5\sqrt{27} + 4\sqrt{12}) : \sqrt{3}$$

Hướng dẫn giải

$$M = \sqrt{45} + \sqrt{245} - \sqrt{4^2.5}$$
$$= \sqrt{3^2.5} + \sqrt{7^2 \cdot 5} - \sqrt{4^2.5}$$
$$= 3\sqrt{5} + 7\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$

$$N = 5\sqrt{8} + \sqrt{50} - 2\sqrt{18}$$
$$= 5.2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 2.3\sqrt{2}$$
$$= 10\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 6\sqrt{2}$$

$$P = 5\sqrt{5} - 12\sqrt{5} + 6\sqrt{5} - 4\sqrt{5}$$
$$= -5\sqrt{5}$$

$$A = \sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48}$$
$$= 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$$
$$= \sqrt{3}$$

$$= (10+5-6)\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$$

$$B = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{27} - \sqrt{300}$$

$$= 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3^2 \cdot 3} - \sqrt{10^2 \cdot 3}$$

$$= 2\sqrt{3} + 3 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} - 10\sqrt{3}$$

$$= \sqrt{3}$$

$$C = (2\sqrt{3} - 5\sqrt{27} + 4\sqrt{12}) : \sqrt{3}$$
$$= (2\sqrt{3} - 5.3\sqrt{3} + 4.2\sqrt{3}) : \sqrt{3}$$
$$= -5\sqrt{3} : \sqrt{3} = -5$$

Nhận xét: Đây là một dạng toán dễ. Học sinh có thể bấm máy tính để giải, đa phần áp dụng kiến thức đưa thừa số ra ngoài dấu căn để giải toán. $\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B}$ (B≥0)

Tự luyện:

$$A = (3\sqrt{50} - 5\sqrt{18} + 3\sqrt{8}).\sqrt{2}$$

$$A = (3\sqrt{50} - 5\sqrt{18} + 3\sqrt{8}).\sqrt{2} \qquad B = 2\sqrt{32} - 5\sqrt{27} - 4\sqrt{8} + 3\sqrt{75} \qquad C = \sqrt{20} - \sqrt{45} + 2\sqrt{5}$$

$$C = \sqrt{20} - \sqrt{45} + 2\sqrt{5}$$

\Box Dạng 2: Áp dụng hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$

Bài 1: Rút gọn các biểu thức sau:

a)
$$\sqrt{(3-2\sqrt{2})^2} + \sqrt{(3+2\sqrt{2})^2}$$
 b) $\sqrt{(5-2\sqrt{6})^2} - \sqrt{(5+2\sqrt{6})^2}$ c) $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$ d) $\sqrt{(3+\sqrt{2})^2} - \sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$ e) $\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2}$ f) $\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2}-5)^2}$

b)
$$\sqrt{(5-2\sqrt{6})^2} - \sqrt{(5+2\sqrt{6})^2}$$

c)
$$\sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$$

d)
$$\sqrt{(3+\sqrt{2})^2} - \sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$$

e)
$$\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2}$$

f)
$$\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2}-5)^2}$$

a)
$$\sqrt{(3-2\sqrt{2})^2} + \sqrt{(3+2\sqrt{2})^2} = |3-2\sqrt{2}| + |3+2\sqrt{2}| = 3-2\sqrt{2}+3+2\sqrt{2}=6$$

Lưu ý: Điều kiện bỏ dấu giá trị tuyệt đối: $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & neu \ A \ge 0 \\ -A & neu \ A < 0 \end{cases}$

- Kết quả:
- b) $-4\sqrt{6}$
- c) 1
- d) 4
- e) $2\sqrt{5}$ f) $2\sqrt{2}-4$

\square Dạng 3: Biểu thức dưới dấu căn đưa được về hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$

Ví dụ 1: Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} - \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$.

Hướng dẫn giải

$$A = \sqrt{3 - 2\sqrt{3} + 1} - \sqrt{4 + 4\sqrt{3} + 3}$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{3} - 1\right)^2} - \sqrt{\left(2 + \sqrt{3}\right)^2}$$

$$= \left|\sqrt{3} - 1\right| - \left|2 + \sqrt{3}\right|$$

$$= \sqrt{3} - 1 - \left(2 + \sqrt{3}\right) = -3$$

Nhận xét: Các biểu thức $4-2\sqrt{3}$; $7+4\sqrt{3}$ đều có dạng $m \pm p\sqrt{n}$ trong đó với $a^2+b^2=m$ $p\sqrt{n}=2ab$. Những biểu thức như vậy đều viết được dưới dạng bình phương của một biểu thức.

Ví dụ 2: Rút gọn biểu thức $B = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1:

$$B = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^2} - \sqrt{\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2}$$

$$= \left|\sqrt{3} + \sqrt{2}\right| - \left|\sqrt{3} - \sqrt{2}\right|$$

$$= \sqrt{3} + \sqrt{2} - \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}.$$

Cách 2:

$$B = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$$
Ta có:

$$B^2 = 5 + 2\sqrt{6} + 5 - 2\sqrt{6} - 2\sqrt{\left(5 + 2\sqrt{6}\right)\left(5 - 2\sqrt{6}\right)} = 10 - 2\sqrt{1} = 8$$
Vì $B > 0$ nên $B = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Nhận xét: Các biểu thức $5+2\sqrt{6}$ và $5-2\sqrt{6}$ là hai biểu thức liên hợp. Gặp những biểu thức như vậy, để tính B ta có thể tính B^2 trước rồi sau đó suy ra B.

Bài 1: Rút gọn

a)
$$A = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$$

b)
$$B = \sqrt{4 - \sqrt{12}}$$

c)
$$C = \sqrt{19 - 8\sqrt{3}}$$

d)
$$D = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$$

Hướng dẫn giải

a)
$$A = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{\left(\sqrt{5} - 1\right)^2} = \left|\sqrt{5} - 1\right| = \sqrt{5} - 1$$

b)
$$B = \sqrt{4 - \sqrt{12}} = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = |\sqrt{3} - 1|$$

c)
$$C = \sqrt{19 - 8\sqrt{3}} = \sqrt{\left(4 - \sqrt{3}\right)^2} = \left|4 - \sqrt{3}\right| = 4 - \sqrt{3}$$

d)
$$D = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} = |\sqrt{3} - \sqrt{2}| = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

Bài 2: Rút gọn

a)
$$A = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$$

c)
$$C = \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$$

e)
$$E = \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$$

b)
$$B = \sqrt{8 - 2\sqrt{15}}$$

d)
$$D = \sqrt{7 + \sqrt{13}} - \sqrt{7 - \sqrt{13}}$$

f)
$$F = \sqrt{7 - 2\sqrt{10}} + \sqrt{20} + \frac{1}{2}\sqrt{8}$$

a)
$$A = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} = \sqrt{3} + 1$$

b)
$$B = \sqrt{8 - 2\sqrt{15}} = \sqrt{\left(\sqrt{15} - 1\right)^2} = \sqrt{15} - 1$$

c)
$$C = \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = \sqrt{5} - 2$$

d)
$$D = \sqrt{7 + \sqrt{13}} - \sqrt{7 - \sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{14 + 2\sqrt{13}} - \sqrt{14 - 2\sqrt{13}} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{\left(\sqrt{13} + 1\right)^2} - \sqrt{\left(\sqrt{13} - 1\right)^2} \right] = \sqrt{2}$$

e)
$$E = \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{5 + 2\sqrt{5} + 1} - \sqrt{5 - 2\sqrt{5} + 1}$$

= $\sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2} - \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} = |\sqrt{5} + 1| - |\sqrt{5} - 1| = \sqrt{5} + 1 - \sqrt{5} + 1 = 2$

f)
$$F = \sqrt{7 - 2\sqrt{10}} + \sqrt{20} + \frac{1}{2}\sqrt{8} = \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 + 2\sqrt{5} + \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2}}$$

= $|\sqrt{5} - \sqrt{2}| + 2\sqrt{5} + \sqrt{2} = \sqrt{5} - \sqrt{2} + 2\sqrt{5} + \sqrt{2} = 3\sqrt{5}$

Bài 3: Rút gọn (Bài tự luyện)

a)
$$\sqrt{5+2\sqrt{6}} - \sqrt{5-2\sqrt{6}}$$

c)
$$\sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{4+2\sqrt{3}}$$

e)
$$\sqrt{17-12\sqrt{2}} + \sqrt{9+4\sqrt{2}}$$

g)
$$\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}$$

i)
$$\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}$$

k)
$$\sqrt{5-\sqrt{13+4\sqrt{3}}} + \sqrt{3+\sqrt{13+4\sqrt{3}}}$$

b)
$$\sqrt{7-2\sqrt{10}} - \sqrt{7+2\sqrt{10}}$$

d)
$$\sqrt{24+8\sqrt{5}}+\sqrt{9-4\sqrt{5}}$$

f)
$$\sqrt{6-4\sqrt{2}} + \sqrt{22-12\sqrt{2}}$$

h)
$$\sqrt{21-12\sqrt{3}}-\sqrt{3}$$

j)
$$\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$$

1)
$$\sqrt{1+\sqrt{3+\sqrt{13+4\sqrt{3}}}} + \sqrt{1-\sqrt{3-\sqrt{13-4\sqrt{3}}}}$$

Dạng 4: Rút gọn tổng hợp (sử dụng trục căn thức, hằng đẳng thức, phân tích thành nhân tử; ...)

Bài 1: Rút gọn:

$$A = \frac{\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{5} + 1} + \frac{\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$$

$$B = \frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{5}}$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}$$

$$D = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$$

$$E = \sqrt{\frac{3\sqrt{3} - 4}{2\sqrt{3} + 1}} - \sqrt{\frac{\sqrt{3} + 4}{5 - 2\sqrt{3}}}$$

$$F = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} - \frac{2}{3 + \sqrt{3}}$$

a)
$$A = \frac{\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{5} + 1} + \frac{\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} + 1} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = 2$$

b)
$$B = \frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{5}} = \frac{3(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{3} + \frac{4(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4} + (\sqrt{6} - \sqrt{5})$$

$$=\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{5}=2\sqrt{6}$$

c)
$$C = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}$$

$$= \left(\sqrt{2} - 1\right) + \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{4} - \sqrt{3}\right) + \dots + \left(\sqrt{100} - \sqrt{99}\right) = 9$$

d)
$$D = \frac{1}{2-\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} + \sqrt{4-4\sqrt{3}+3} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} + \sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{1}{2-\sqrt{3}} + 2 - \sqrt{3} = \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} + 2 - \sqrt{3} = \frac{2+\sqrt{3}}{1} + 2 - \sqrt{3} = 4$$
e)
$$E = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}+1}} - \sqrt{\frac{\sqrt{3}+4}{5-2\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{(3\sqrt{3}-4)(2\sqrt{3}-1)}{(2\sqrt{3})^2-1}} - \sqrt{\frac{(\sqrt{3}+4)(5+2\sqrt{3})}{5^2-(2\sqrt{3})^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{22-11\sqrt{3}}{11}} - \sqrt{\frac{26+13\sqrt{3}}{13}} = \sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}} - \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} - \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\sqrt{3}-1| - \sqrt{3}-1\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-2) = -\sqrt{2}$$
f)
$$F = \frac{1}{2+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} - \frac{2}{3+\sqrt{3}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1) + (2+\sqrt{3})(\sqrt{3}+1) - 2(2+\sqrt{3})}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)(2+\sqrt{3})}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}+4}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)(2+\sqrt{3})} = \frac{2(\sqrt{3}+2)}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)(2+\sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{3(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{3(3-1)} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{3} = \frac{3-\sqrt{3}}{3} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Bài 2: Rút gọn

$$A = (\sqrt{3} + 4)\sqrt{19 - 8\sqrt{3}}$$

$$B = (\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2) - \frac{\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}}{\sqrt{3} - 2}$$

$$C = \frac{\sqrt{7 + \sqrt{5}} + \sqrt{7 - \sqrt{5}}}{\sqrt{7 + 2\sqrt{11}}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$$

$$D = \sqrt{\frac{4}{(2 - \sqrt{5})^2}} - \sqrt{\frac{4}{(2 + \sqrt{5})^2}}$$

$$E = \frac{\sqrt{8 - \sqrt{15}}}{\sqrt{30} - \sqrt{2}}$$

$$F = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} + \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$$

a)
$$A = (\sqrt{3} + 4)\sqrt{19 - 8\sqrt{3}} = (\sqrt{3} + 4)\sqrt{(4 - \sqrt{3})^2} = (\sqrt{3} + 4)(4 - \sqrt{3}) = 16 - 3 = 13$$

b)
$$B = (\sqrt{5})^2 - 2^2 - \frac{\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}}{\sqrt{3}-2} = 5 - 4 - \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2} = 1 - (-1) = 2$$

c)
$$B = \frac{\sqrt{7 + \sqrt{5}} + \sqrt{7 - \sqrt{5}}}{\sqrt{7 + 2\sqrt{11}}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$$

Ta có
$$\left(\frac{\sqrt{7+\sqrt{5}}+\sqrt{7-\sqrt{5}}}{\sqrt{7+2\sqrt{11}}}\right)^2 = \frac{14+2\sqrt{44}}{7+2\sqrt{11}} = 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{7+\sqrt{5}}+\sqrt{7-\sqrt{5}}}{\sqrt{7+2\sqrt{11}}} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow B = \sqrt{2} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - \sqrt{\left(\sqrt{2} - 1\right)^2} = \sqrt{2} - \sqrt{2} + 1 = 1$$

d)
$$D = \sqrt{\frac{4}{(2-\sqrt{5})^2}} - \sqrt{\frac{4}{(2+\sqrt{5})^2}} = \frac{\sqrt{2^2}}{\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}} - \frac{\sqrt{2^2}}{\sqrt{(2+\sqrt{5})^2}}$$

$$= \frac{2}{\left|2 - \sqrt{5}\right|} - \frac{2}{\left|2 + \sqrt{5}\right|} = \frac{2}{\sqrt{5} - 2} - \frac{2}{\sqrt{5} + 2} = \frac{2\left(\sqrt{5} + 2\right) - 2\left(\sqrt{5} - 2\right)}{\left(\sqrt{5} + 2\right)\left(\sqrt{5} - 2\right)} = \frac{2\sqrt{5} + 4 - 2\sqrt{5} + 4}{5 - 4} = 8$$

e)
$$E = \frac{\sqrt{8 - \sqrt{15}}}{\sqrt{30} - \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{15} - 1} \cdot \sqrt{\frac{16 - 2\sqrt{15}}{4}} = \frac{1}{\sqrt{15} - 1} \cdot \frac{\sqrt{15} - 1}{2} = \frac{1}{2}$$

f)
$$F = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} + \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2 + \left(\sqrt{3}-1\right)^2}{3-1} = \frac{4+2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}}{2} = 4$$

Bài 3: Rút gọn - Bài tập tự luyện

a)
$$\frac{\sqrt{7}-5}{2} - \frac{6-2\sqrt{7}}{4} + \frac{6}{\sqrt{7}-2} - \frac{5}{4+\sqrt{7}}$$

b)
$$\frac{2}{\sqrt{6}-2} + \frac{2}{\sqrt{6}+2} + \frac{5}{\sqrt{6}}$$

c)
$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}}$$

d)
$$\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{1-\sqrt{3}}-\frac{5}{\sqrt{5}}\right)$$
: $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

e)
$$\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{5}{12} - \frac{1}{\sqrt{6}}}$$

$$f) \ \frac{2\sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{13+\sqrt{48}}}}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$

Bài 4: Rút gọn – Bài tập tự luyện

1)
$$A = \frac{1}{5 + 2\sqrt{6}} - \frac{1}{5 - 2\sqrt{6}}$$

3)
$$C = \frac{3}{\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1}$$

5)
$$E = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{3} - \sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$$

7)
$$G = \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

9)
$$I = \frac{\sqrt{10} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} - 1} - \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}$$

11)
$$K = \frac{2}{2 - \sqrt{5}} - \frac{2}{2 + \sqrt{5}}$$

13)
$$M = \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} : \frac{1}{6}$$

15)
$$O = \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} + \frac{2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} - \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$$

17)
$$Q = \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{3}} - \frac{5}{\sqrt{5}}\right) \cdot \left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right)$$

19)
$$S = \left(\frac{1}{2 - \sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}\right) : \frac{1}{\sqrt{21 - 12\sqrt{3}}}$$

21)
$$U = \frac{2}{\sqrt{5} + 1} - \sqrt{\frac{2}{3 - \sqrt{5}}}$$

23) W=
$$\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{3}} - \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3-\sqrt{5}}+\sqrt{3}}$$

2)
$$B = \frac{1}{\sqrt{3} + 2} - \frac{1}{\sqrt{3} - 2}$$

4)
$$D = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{12}}{\sqrt{5} - 2} - \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$$

6)
$$F = \frac{5 + 2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} + \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} - (\sqrt{5} + \sqrt{3})$$

8)
$$H = \sqrt{\frac{4}{\left(2 - \sqrt{5}\right)^2}} - \sqrt{\frac{4}{\left(2 + \sqrt{5}\right)^2}}$$

10)
$$J = \left(1 + \frac{2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}\right) \cdot \left(1 - \frac{2 - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}\right)$$

12)
$$L = \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{3}} - \sqrt{3}\right) : \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$$

14)
$$N = \frac{6}{1 + \sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}}$$

16)
$$P = \frac{2}{1 - \sqrt{2}} - \frac{2}{1 + \sqrt{2}}$$

18)
$$R = \frac{2}{7 + 4\sqrt{3}} + \frac{2}{7 - 4\sqrt{3}}$$

20)
$$T = \frac{4}{1 - \sqrt{3}} - \frac{\sqrt{15} + \sqrt{13}}{1 + \sqrt{5}}$$

22)
$$V = \frac{2}{\sqrt{3} - 1} - \sqrt{\frac{2}{6 - 3\sqrt{3}}}$$

24)
$$Y = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2} + \sqrt{3 + \sqrt{5}}}$$

Kinh nghiệm: Đôi khi một số bài toán rút gọn căn thức sẽ thực hiện dễ dàng hơn nếu chúng ta **trực căn thức** hoặc **rút gọn được một hạng tử** trong đề toán. Nếu quy đồng mẫu số thì việc thực hiện các phép tính rất phức tạp. Vì vậy trước khi làm bài toán rút gọn, học sinh cần quan sát kỹ đề toán từ đó có định hướng giải đúng đắn để lời giải được ngắn gọn, chính xác.

□ Dạng 5. Bài toán chứa ẩn (ẩn x) dưới dấu căn và những ý toán phụ.
 ✓ Rút gọn.

Bước 1: Tìm điều kiện xác định.

Bước 2: Tìm mẫu thức chung, quy đồng mẫu thức, rút gọn tử, phân tích tử thành nhân tử.

Bước 3: Chia cả tử và mẫu cho nhân tử chung của tử và mẫu.

Bước 4: Khi nào phân thức tối giản thì ta hoàn thành việc rút gọn.

Bài 1: Cho biểu thức
$$P = \frac{3\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 1} - \frac{2\sqrt{x} - 3}{3 - \sqrt{x}} - \frac{3(3\sqrt{x} - 5)}{x - 2\sqrt{x} - 3}$$
.

- a) Rút gọn P;
- b) Tìm giá trị của P, biết $x = 4 + 2\sqrt{3}$;
- c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Hướng dẫn giải

ĐKXĐ: $x \ge 0$; $x \ne 9$.

a)
$$P = \frac{3\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 1} + \frac{2\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 3} - \frac{3(3\sqrt{x} - 5)}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 3)}$$

$$= \frac{(3\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 3) + (2\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 1) + 3(3\sqrt{x} - 5)}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 3)}$$

$$= \frac{3x - 9\sqrt{x} + 2\sqrt{x} - 6 + 2x + 2\sqrt{x} - 3\sqrt{x} - 3 - 9\sqrt{x} + 15}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 3)}$$

$$= \frac{5x - 17\sqrt{x} + 6}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 3)}$$

$$= \frac{5x - 15\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + 6}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 3)}$$

$$= \frac{(5\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{5\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 1}.$$

b) Ta có
$$x = 4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{3} + 1$$
;

Do đó:
$$P = \frac{5(\sqrt{3}+1)-2}{(\sqrt{3}+1)+1} = \frac{5\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}+2} = \frac{(5\sqrt{3}+3)(2-\sqrt{3})}{(\sqrt{3}+2)(2-\sqrt{3})} = 7\sqrt{3}-9$$
.

c) Ta có
$$P = \frac{5\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 1} = \frac{5\sqrt{x} + 5 - 7}{\sqrt{x} + 1}$$

$$P = 5 - \frac{7}{\sqrt{x} + 1}$$

Vì $\frac{7}{\sqrt{x}+1} > 0$ nên P có giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow \frac{7}{\sqrt{x}+1}$ lớn nhất

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} + 1$$
 nhỏ nhất $\Leftrightarrow x = 0$.

Khi đó min P = 5 - 7 = -2.

Bài 2: Cho biểu thức
$$Q = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{5\sqrt{x}+2}{4-x}\right) : \frac{3\sqrt{x}-x}{x+4\sqrt{x}+4}$$

- a) Rút gọn Q;
- b) Tìm x để Q = 2;
- c) Tìm các giá trị của x để Q có giá trị âm.

Hướng dẫn giải

ĐKXĐ: x > 0; $x \neq 4$; $x \neq 9$.

a)
$$Q = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{5\sqrt{x}+2}{4-x}\right) : \frac{3\sqrt{x}-x}{x+4\sqrt{x}+4}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+2\right) - 2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right) - \left(5\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)} : \frac{\sqrt{x}\left(3-\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)^{2}}$$

$$= \frac{x+3\sqrt{x}+2-2x+4\sqrt{x}-5\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)} \cdot \frac{\left(\sqrt{x}+2\right)^{2}}{\sqrt{x}\left(3-\sqrt{x}\right)}$$

$$= \frac{-x+2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)} \cdot \frac{\left(\sqrt{x}+2\right)^{2}}{\sqrt{x}\left(3-\sqrt{x}\right)}$$

$$= \frac{-\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)} \cdot \frac{\left(\sqrt{x}+2\right)^{2}}{\sqrt{x}\left(3-\sqrt{x}\right)}$$

$$= \frac{-\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)} \cdot \frac{\left(\sqrt{x}+2\right)^{2}}{\sqrt{x}\left(3-\sqrt{x}\right)}$$

b)
$$Q = 2 \Leftrightarrow = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 3} = 2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x} + 2 = 2\sqrt{x} - 6$$
$$\Leftrightarrow -\sqrt{x} = -8 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 8 \Leftrightarrow x = 64 \text{ (Thỏa mãn ĐKXĐ)}.$$

c)
$$Q < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 3} < 0$$

 $\Leftrightarrow \sqrt{x} - 3 < 0 \text{ (vi } \sqrt{x} + 2 > 0 \text{)} \Leftrightarrow \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow x < 9.$

Kết hợp với điều kiện xác định ta có Q < 0 khi 0 < x < 9 và $x \ne 4$.

Bài 3: Cho biểu thức
$$B = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - 3} - \frac{3}{\sqrt{a} + 3} - \frac{a - 2}{a - 9}$$
 với $a \ge 0; a \ne 9$

- a) Rút gọn B.
- b) Tìm các số nguyên a để B nhận giá trị nguyên

Hướng dẫn giải

a) Với $a \ge 0$; $a \ne 9$ ta có:

$$B = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - 3} - \frac{3}{\sqrt{a} + 3} - \frac{a - 2}{a - 9} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - 3} - \frac{3}{\sqrt{a} + 3} - \frac{a - 2}{(\sqrt{a} - 3)(\sqrt{a} + 3)}$$

$$= \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} + 3)}{(\sqrt{a} - 3)(\sqrt{a} + 3)} - \frac{3(\sqrt{a} - 3)}{(\sqrt{a} - 3)(\sqrt{a} + 3)} - \frac{a - 2}{(\sqrt{a} - 3)(\sqrt{a} + 3)}$$

$$= \frac{a + 3\sqrt{a} - 3\sqrt{a} + 9 - a + 2}{\sqrt{a} - 3)(\sqrt{a} + 3)} = \frac{11}{a - 9}$$

b)
$$D\mathring{e} \ B \in Z \Leftrightarrow \frac{11}{a-9} \in Z \Leftrightarrow 11 \vdots (a-9) \Leftrightarrow (a-9) \in U(11)$$

$$U(11) = \{1; 11; -1; -11\}$$

Khi đó ta có bảng giá trị

a-9	-11	-1	1	11
a	-2	8	10	20
	Không thoả mãn	Thoả mãn	Thoả mãn	Thoả mãn

Vậy $a \in \{8; 10; 20\}$ thì $B \in Z$

Bài 4: Cho biểu thức
$$P = \left(\frac{\sqrt{x} - 3}{2 - \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x} + 2}{3 + \sqrt{x}} - \frac{9 - x}{x + \sqrt{x} - 6}\right) : \left(1 - \frac{3\sqrt{x} - 9}{x - 9}\right)$$

(với
$$x > 0; x \neq 4; x \neq 9$$
)

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị biểu thức P khi
$$x = \frac{\sqrt{4 + 2\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3} - 1)}}{\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{5}}$$

Hướng dẫn giải

a)
$$P = \frac{(x-9)+(4-x)+(9-x)}{(2-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})} : \frac{x-9-3\sqrt{x}+9}{x-9}$$

$$= \frac{4-x}{\left(2-\sqrt{x}\right)\left(3+\sqrt{x}\right)} : \frac{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-3\right)} = \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

b)
$$x = \frac{\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{(1+\sqrt{5})^2-\sqrt{5}}} = \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}{1+\sqrt{5}-\sqrt{5}} = 2$$

Nên P =
$$\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1$$

Bài 5: Với x > 0, cho hai biểu thức
$$A = \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$
 và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}$

- a) Tính giá trị của biểu thức A khi x = 64.
- b) Rút gọn biểu thức B.
- c) Tìm x để $\frac{A}{B} > \frac{3}{2}$

a) Với x = 64 ta có
$$A = \frac{2 + \sqrt{64}}{\sqrt{64}} = \frac{2 + 8}{8} = \frac{5}{4}$$

b)
$$B = \frac{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x}) + (2\sqrt{x} + 1)\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x + \sqrt{x})} = \frac{x\sqrt{x} + 2x}{x\sqrt{x} + x} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 1}$$

c) Với
$$x > 0$$
 ta có: $\frac{A}{B} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{2 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} : \frac{2 + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} > \frac{3}{2}$
 $\Leftrightarrow 2\sqrt{x} + 2 > 3\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 4 \ (Do \ x > 0)$

Bài 6: Cho hai biểu thức
$$A = \frac{\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} - 1}$$
 và $B = \frac{3\sqrt{x} + 1}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{2}{\sqrt{x} + 3}$ với $x \ge 0; x \ne 1$

- a) Tính giá trị biểu thức A khi x = 9
- b) Chứng minh $B = \frac{1}{\sqrt{x} 1}$
- c) Tìm tất cả các giá trị của x để $\frac{A}{B} \ge \frac{x}{4} + 5$

a) Do x = 9 thoả mãn điều kiện nên thay x = 9 vào A ta có

$$A = \frac{\sqrt{9} + 4}{\sqrt{9} - 1} = \frac{3 + 4}{3 - 1} = \frac{7}{2}.$$

b)
$$B = \frac{3\sqrt{x} + 1}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{2}{\sqrt{x} + 3}$$

$$= \frac{3\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} - \frac{2}{\sqrt{x}+3}$$

$$= \frac{3\sqrt{x} + 1 - 2(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)}$$

$$= \frac{\sqrt{x} + 3}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} = \frac{1}{\sqrt{x} - 1}$$

c)
$$\frac{A}{B} \ge \frac{x}{4} + 5 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} - 1} : \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \ge \frac{x}{4} + 5$$

$$\Leftrightarrow 4(\sqrt{x}+4) \ge x+20 \Leftrightarrow x-4\sqrt{x}+4 \le 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-2\right)^2 \le 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-2=0 \Leftrightarrow x=4$$

x = 4 thoả mãn điều kiện. Vậy x = 4 thì $\frac{A}{B} \ge \frac{x}{4} + 5$

Bài 7: Cho biểu thức
$$A = \frac{x - 2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}} + \frac{1 + 2x - 2\sqrt{x}}{x^2 - \sqrt{x}}$$
 (Với $x > 0, x \ne 1$)

- a) Rút gọn biểu thức A.
- b) Tìm x để biểu thức A nhận giá trị là số nguyên.

$$A = \frac{\sqrt{x+2}}{x+\sqrt{x+1}}.$$

b)

Cách 1: Với
$$x > 0, x \ne 1 \Rightarrow x + \sqrt{x} + 1 > \sqrt{x} + 1 > 1$$
.

Vậy
$$0 < A = \frac{\sqrt{x+2}}{x+\sqrt{x+1}} < \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+1}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x+1}} < 2.$$

Vì A nguyên nên A = 1
$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + 2}{x + \sqrt{x} + 1} = 1 \Leftrightarrow x = 1$$
 (Không thỏa mãn).

Vậy không có giá trị nguyên nào của x để giả trị A là một số nguyên.

Cách 2: Dùng miền giá trị

$$A = \frac{\sqrt{x} + 2}{x + \sqrt{x} + 1} \Leftrightarrow Ax + (A-1)\sqrt{x} + A - 2 = 0$$

Trường hợp 1:
$$A = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = -2 \Rightarrow x \in \emptyset$$

Trường hợp 2:
$$A \neq 0 \Rightarrow \Delta = (A-1)^2 - 4A(A-2) = -3A^2 + 6A + 1 \ge 0 \Leftrightarrow A^2 - 2A - \frac{1}{3} \le 0$$

$$\Leftrightarrow A^2 - 2A + 1 \le \frac{4}{3} \Leftrightarrow (A - 1)^2 \le \frac{4}{3} \Rightarrow A \in \{1; 2\} \, doA \in Z, A > 0$$

Với
$$A = 1 \Rightarrow x = 1$$
 (loại)

Với A = 2
$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+2}}{x+\sqrt{x+1}} = 2 \Leftrightarrow x = 0$$
 (loại).

Bài 8: Cho biểu thức
$$P = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) : \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} + \frac{1 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}\right)$$
, (với $x > 0$ và $x \ne 1$).

- a) Rút gọn biểu thức P.
- b) Tính giá trị của biểu thức P tại $x = \sqrt{2022 + 4\sqrt{2018}} \sqrt{2022 4\sqrt{2018}}$.

a) Ta có
$$1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}$$

Và
$$\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}} + \frac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} = \frac{x-1+1-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x}-1)\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$$

nên
$$P = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$$
.

b) Có
$$x = \sqrt{2022 + 4\sqrt{2018}} - \sqrt{2022 - 4\sqrt{2018}}$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{2018} + 2\right)^2} - \sqrt{\left(\sqrt{2018} - 2\right)^2}$$

$$= \left|\sqrt{2018} + 2\right| - \left|\sqrt{2018} - 2\right| = \sqrt{2018} + 2 - \sqrt{2018} + 2 = 4 \text{ thỏa mãn điều kiện } x > 0 \text{ và } x \neq 1.$$

$$+ \text{Vậy giá trị của biểu thức } P \text{ tại } x = 4 \text{ là: } \frac{\sqrt{4} + 1}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}.$$

- **Bài 9:** Cho biểu thức $B = \left(\frac{6}{a-1} + \frac{10 2\sqrt{a}}{a\sqrt{a} a \sqrt{a} + 1}\right) \cdot \frac{(\sqrt{a} 1)^2}{4\sqrt{a}}$ (với a > 0; $a \ne 1$).
 - a) Rút gọn biểu thức B.
 - b) Đặt $C = B.(a \sqrt{a} + 1)$. So sánh C và 1.

a) Với a > 0; $a \ne 1$, ta có:

$$B = \left[\frac{6}{a-1} + \frac{10 - 2\sqrt{a}}{(a-1)(\sqrt{a}-1)} \right] \cdot \frac{(\sqrt{a}-1)^2}{4\sqrt{a}}$$

$$= \frac{4\sqrt{a} + 4}{(a-1)(\sqrt{a}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{a}-1)^2}{4\sqrt{a}} = \frac{4(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{a}-1)^2}{4\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \text{Vây } B = \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

b) Với
$$a > 0$$
; $a \ne 1$, ta có: $C - 1 = \frac{a - \sqrt{a} + 1}{\sqrt{a}} - 1 = \frac{(\sqrt{a} - 1)^2}{\sqrt{a}} > 0$. Vậy $C > 1$.

Bài 10: Cho biểu thức
$$A = \frac{\sqrt{x+1}}{x+4\sqrt{x}+4}$$
: $\left(\frac{x}{x+2\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{x}+2}\right)$, với $x > 0$.

- a. Rút gọn biểu thức A.
- b. Tìm tất cả các giá trị của x để $A \ge \frac{1}{3\sqrt{x}}$.

a) Ta có:
$$A = \frac{\sqrt{x+1}}{x+4\sqrt{x}+4} : \left(\frac{x}{x+2\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{x}+2}\right) = \frac{\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x}+2)^2} : \left(\frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} + \frac{x}{\sqrt{x}+2}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x}+2)^2} : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{x}{\sqrt{x}+2}\right) = \frac{\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x}+2)^2} : \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}$$

b) Với
$$x > 0$$
 ta có $A = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}$ và $\sqrt{x} > 0$; $\sqrt{x} + 2 > 0$.

Khi đó
$$A \ge \frac{1}{3\sqrt{x}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \ge \frac{1}{3\sqrt{x}} \Leftrightarrow \sqrt{x}+2 \le 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} \le 1 \Leftrightarrow x \le 1$$

Suy ra: $0 < x \le 1$.

Bài 11: Cho biểu thức
$$B = \left(\frac{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x} + 3}{1 - \sqrt{x}}\right) \cdot \frac{x - 1}{2x + \sqrt{x} - 1}$$
 (với $x \ge 0$; $x \ne 1$ và $x \ne \frac{1}{4}$).

Tìm tất cả các giá trị của x để B < 0.

Hướng dẫn giải

a) Ta có
$$A = \sqrt{25} + 3\sqrt{4.2} - 2\sqrt{9.2} = 5 + 6\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = 5$$
. Vậy $A = 5$.

b) Ta có
$$B = \left[\frac{\sqrt{x} (x + \sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} + \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 1} \right] \cdot \frac{x - 1}{2x + \sqrt{x} - 1}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 1} \right) \cdot \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(2\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}$$

$$= \frac{2\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 1} \cdot \frac{\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x} - 1} = \frac{2\sqrt{x} + 3}{2\sqrt{x} - 1}.$$

Vì $x \ge 0$ nên $2\sqrt{x} + 3 > 0$, do đó B < 0 khi $2\sqrt{x} - 1 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{4}$.

Mà $x \ge 0; x \ne 1$ và $x \ne \frac{1}{4}$ nên ta được kết quả $0 \le x < \frac{1}{4}$.

Bài 12: Cho biểu thức
$$V = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{1}{\sqrt{x}-2}\right) \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}$$
 với $x > 0, x \neq 0$.

- a) Rút gọn biểu thức V.
- b) Tìm giá trị của x để $V = \frac{1}{3}$.

a)
$$V = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{1}{\sqrt{x}-2}\right) \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-2+\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)} \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}-2}$$

b)
$$V = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x} - 2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sqrt{x} - 2 = 6 \Leftrightarrow x = 64 \text{ (thỏa mãn)}$$

Bài 13: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 5}$ và $B = \frac{3}{\sqrt{x} + 5} + \frac{20 - 2\sqrt{x}}{x - 25}$ với $x \ge 0, x \ne 25$.

- 1) Tính giá trị biểu thức A khi x = 9.
- 2) Chứng minh rằng $B = \frac{1}{\sqrt{x} 5}$.
- 3) Tìm tất cả các giá trị của x để $A = B \cdot |x-4|$.

Hướng dẫn giải

1) Tính giá trị biểu thức A khi x=9.

Khi
$$x = 9$$
 ta có $A = \frac{\sqrt{9} + 2}{\sqrt{9} - 5} = \frac{3 + 2}{3 - 5} = -\frac{5}{2}$

2) Chứng minh rằng $B = \frac{1}{\sqrt{x} - 5}$

Với
$$x \ge 0, x \ne 25$$
 thì $B = \frac{3}{\sqrt{x} + 5} + \frac{20 - 2\sqrt{x}}{x - 15} = \frac{3}{\sqrt{x} + 5} + \frac{20 - 2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x} + 5\right)\left(\sqrt{x} - 5\right)}$

$$= \frac{3(\sqrt{x}-5)+20-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)} = \frac{3\sqrt{x}-15+20-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)} = \frac{\sqrt{x}+5}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)} = \frac{1}{\sqrt{x}-5} (dpcm)$$

3) Tìm tất cả các giá trị của để $A = B \cdot |x-4|$.

Với $x \ge 0, x \ne 25$ Ta có: A = B.|x-4|

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5} = \frac{1}{\sqrt{x}-5}.|x-4| \Leftrightarrow \sqrt{x}+2 = |x-4| \qquad (*)$$

Nếu $x \ge 4, x \ne 25$ thì (*) trở thành : $\sqrt{x} + 2 = x - 4$

$$\Leftrightarrow x - \sqrt{x} - 6 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 2) = 0$$

Do $\sqrt{x} + 2 > 0$ nên $\sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9$ (thỏa mãn)

Nếu $0 \le x < 4$ thì (*) trở thành : $\sqrt{x} + 2 = 4 - x$

$$\Leftrightarrow x + \sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2) = 0$$

Do $\sqrt{x} + 2 > 0$ nên $\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn)

Vậy có hai giá trị x=1 và x=9 thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 14: Cho biểu thức :
$$P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} + \frac{-x + x\sqrt{x} + 6}{x + \sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$$
, với $x \ge 0, x \ne 1$.

- a) Rút gọn biểu thức P.
- b) Cho biểu thức $Q = \frac{(x+27).P}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)}$, với $x \ge 0, x \ne 1, x \ne 4$. Chứng minh $Q \ge 6$.

a) Ta có
$$P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} + \frac{-x + x\sqrt{x} + 6}{x + \sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) - x + x\sqrt{x} + 6 - (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$= \frac{x - \sqrt{x} - x + x\sqrt{x} + 6 - x - 3\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$= \frac{-x + x\sqrt{x} - 4\sqrt{x} + 4}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{(\sqrt{x} - 1)(x - 4)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} = \sqrt{x} - 2.$$

b) Với
$$x \ge 0, x \ne 1, x \ne 4$$
, ta có

$$Q = \frac{(x+27).P}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)} = \frac{x+27}{\sqrt{x}+3} = \frac{x-9+36}{\sqrt{x}+3}$$
$$= \sqrt{x}-3+\frac{36}{\sqrt{x}+3} = -6+(\sqrt{x}+3)+\frac{36}{\sqrt{x}+3} \ge -6+12 = 6 \cdot (\text{co-si})$$

Dấu "=" xẩy ra khi
$$\sqrt{x} + 3 = \frac{36}{\sqrt{x} + 3} \Leftrightarrow (\sqrt{x} + 3)^2 = 36 \Leftrightarrow x = 9$$
.

Bài 15: Cho biểu thức
$$P = \left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}} + \frac{1-a}{\sqrt{1-a^2} - 1+a}\right) \left(\sqrt{\frac{1}{a^2} - 1} - \frac{1}{a}\right) \text{ với } 0 < a < 1.$$

Chứng minh rằng P = -1

Hướng dẫn giải

Với 0 < a < 1 ta có:

$$P = \left[\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}} + \frac{\left(\sqrt{1-a}\right)^2}{\sqrt{(1-a)(1+a)} - \left(\sqrt{1-a}\right)^2} \right] \left(\sqrt{\frac{1-a^2}{a^2}} - \frac{1}{a}\right)$$

$$= \left[\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}} + \frac{\left(\sqrt{1-a}\right)^2}{\sqrt{1-a}\left(\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}\right)} \right] \left[\sqrt{\frac{(1-a)(1+a)}{a^2}} - \frac{1}{a} \right]$$

$$= \left[\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}} + \frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}} \right] \left(\frac{\sqrt{1-a}.\sqrt{1+a}}{a^2} - \frac{1}{a} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{1+a} + \sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}} \cdot \frac{2\sqrt{1-a}.\sqrt{1+a} - (1-a) - (1+a)}{2a}$$

$$= \frac{\sqrt{1+a} + \sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}} \cdot \frac{-\left(\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}\right)^2}{2a}$$

$$= -\frac{\left(\sqrt{1+a} + \sqrt{1-a}\right)\left(\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}\right)}{2a}$$

$$= -\frac{1+a-1+a}{2a} = -\frac{2a}{2a} = -1$$

Bài 16: 1) Tính giá trị biểu thức : $A = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$ khi x = 9.

- 2) Cho biểu thức $P = \left(\frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}\right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ với x > 0; $x \ne 1$.
- a) Chứng minh $P = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$.
- b) Tìm giá trị của x để $2P = 2\sqrt{x} + 5$.

Hướng dẫn giải

1. Với x = 9 thì
$$\sqrt{x} = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow A = \frac{3+1}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$$

- 2) a) Chứng minh $P = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$.
 - Với x > 0; x ≠ 1 ta có

$$P = \left(\frac{x-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}\right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$$

$$P = \frac{x + \sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2)} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$P = \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2)} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$$

- Vậy với x > 0;
$$x \ne 1$$
 ta có $P = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$.

b) - Với
$$x > 0$$
; $x \ne 1$ ta có: $P = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$

- Để 2P =
$$2\sqrt{x} + 5$$
 nên $\frac{2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + 5$

- Đưa về được phương trình $2x+3\sqrt{x}-2=0$

- Tính được
$$\sqrt{x} = -2 \text{ (lo¹i)} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \text{ thỏa mãn điều kiện } x > 0; x \neq 1$$

Vậy với
$$x = \frac{1}{4}$$
 thì $2P = 2\sqrt{x} + 5$

Bài 17: Cho hai biểu thức A =
$$\sqrt{9-4\sqrt{5}} - \sqrt{5}$$
 và B = $\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ (x>0, x \neq 1)

- a) Rút gọn biểu thức A và B.
- b) Tìm giá trị của x để 3A + B = 0.

a) Ta có: A =
$$\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - \sqrt{5} = \sqrt{(\sqrt{5} - 2)^2} - \sqrt{5}$$

= $\left|\sqrt{5} - 2\right| - \sqrt{5} = \sqrt{5} - 2 - \sqrt{5} = -2 \text{ (vì } \sqrt{5} > 2\text{)}$
B = $\frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x}} + \frac{(\sqrt{x} - 1) \cdot (\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} - 1}$
= $\sqrt{x} - 1 + \sqrt{x} + 1 = 2\sqrt{x}$

b)
$$3A + B = 0$$
 $\Leftrightarrow -6 + 2\sqrt{x} = 0$ với $x \ge 0$, $x \ne 1$ $\Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9$ (thỏa mãn ĐKXĐ)

Vậy với x = 9 thì 3A + B = 0

Bài 18: Cho biểu thức
$$A = (2\sqrt{3} - 5\sqrt{27} + 4\sqrt{12}): \sqrt{3}$$

$$B = \frac{(2+\sqrt{3})\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

- a) Rút gọn biểu thức A và B
- b) Tìm x biết B $3\sqrt{2x-7}$ = A

a)
$$A = (2\sqrt{3} - 5\sqrt{27} + 4\sqrt{12}) : \sqrt{3}$$
$$= (2\sqrt{3} - 15\sqrt{3} + 8\sqrt{3}) : \sqrt{3}$$
$$= -5\sqrt{3} : \sqrt{3} = -5$$

$$B = \frac{(2+\sqrt{3})\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{(2+\sqrt{3})}} = \sqrt{2+\sqrt{3}}.\sqrt{2-\sqrt{3}}$$
$$= \sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right).\left(2-\sqrt{3}\right)} = \sqrt{4-3} = 1$$

b) B -
$$3\sqrt{2x-7}$$
 = A (ĐK: $x \ge \frac{7}{2}$)
 $\Leftrightarrow 1 - 3\sqrt{2x-7}$ = -5
 $\Leftrightarrow \sqrt{2x-7}$ = 2 $\Leftrightarrow 2x - 7 = 4 \Leftrightarrow x = 5,5$ (TMĐK)

Bài 19: Cho
$$x = \frac{15}{\sqrt{6} - 1} - \frac{2}{\sqrt{6} + 2}$$
; $A = \frac{x}{\sqrt{x} - 1} - \frac{2x - \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}$. $v \circ i \times 0$, $x \neq 1$

- a) Tính giá trị của x và rút gọn A
- b) Tính giá trị biểu thức B = $(A + 1)(\sqrt{3} \sqrt{2})$ với giá trị của x tính được ở phần a.

a)
$$x = \frac{15(\sqrt{6}+1)}{6-1} - \frac{2(\sqrt{6}-2)}{6-4} = 3(\sqrt{6}+1) - (\sqrt{6}-2) = 5 + 2\sqrt{6}$$

$$A = \frac{x}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \frac{x}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \frac{x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}-1$$

b)
$$B = (\sqrt{x} - 1 + 1)(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = \sqrt{x}(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$
 với $x = 5 + 2\sqrt{6}$ ta có $B = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ $= \sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2}(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ $= (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 3 - 2 = 1$

Bài 20: Cho biểu thức
$$A = \frac{3}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-3}{x-1}$$
 với $x \ge 0$ và $x \ne 1$.

- a) Rút gọn biểu thức A.
- b) Tính giá trị của A khi $x = 3 2\sqrt{2}$.

1.
$$A = \frac{3}{\sqrt{x} + 1} - \frac{1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 1} \quad \text{v\'oi} \quad x \ge 0 \text{ v\'a } x \ne 1$$

$$= \frac{3}{\sqrt{x} + 1} - \frac{1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x} - 3}{\left(\sqrt{x} + 1\right)\left(\sqrt{x} - 1\right)}$$

$$= \frac{3\left(\sqrt{x} - 1\right) - \left(\sqrt{x} + 1\right) - \left(\sqrt{x} - 3\right)}{\left(\sqrt{x} + 1\right)\left(\sqrt{x} - 1\right)}$$

$$= \frac{3\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x} - 1 - \sqrt{x} + 3}{\left(\sqrt{x} + 1\right)\left(\sqrt{x} - 1\right)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$$

2.
$$x = 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2$$
 thoả mãn $x \ge 0$ và $x \ne 1$

+) Thay
$$x = (\sqrt{2} - 1)^2$$
 vào A

$$A = \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} + 1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2} - 1 + 1} \quad \text{(do } \sqrt{2} > 1\text{)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Kết luận
$$x = (\sqrt{2} - 1)^2$$
 thì $A = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Bài 21: Cho biểu thức
$$A = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x-1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-2\sqrt{x}+1}\right) : \frac{4x}{(x-1)^2}$$

- a) Rút gọn A.
- b) Tính giá trị của A biết |x-5|=4.

a) DK: $x \ge 0$; $x \ne 1$

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x-1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-2\sqrt{x}+1}\right) : \frac{4x}{(x-1)^2} = \left(\frac{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right) - \left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)^2}\right) \cdot \frac{(x-1)^2}{4x}$$
$$= \frac{2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)^2} \cdot \frac{(x-1)^2}{4x} = \frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}} \text{ v\'oi ĐKXĐ: } x > 0; x \neq 1.$$

b) Với điều kiện: $x \ge 0$; $x \ne 1$.

Khi
$$|x-5|=4 \Leftrightarrow x-5=4 \Leftrightarrow x=9 \Rightarrow \sqrt{x}=3$$
. Ta có $A=\frac{3+1}{6}=\frac{2}{3}$

🗁 Bài tập tự luyện:

Bài 1: Cho biểu thức
$$P = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} - \frac{4x}{4-x}\right) : \frac{x+5\sqrt{x}+6}{x-4}.$$

- a) Rút gọn P;
- b) Tính giá trị của P khi $x = \sqrt{9 + 4\sqrt{5}} \sqrt{9 4\sqrt{5}}$;
- c) Tìm x để P = 2.

Bài 2: Cho biểu thức
$$P = \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-4} - \frac{\sqrt{x}+1}{x-4\sqrt{x}+4}\right) \cdot \frac{x\sqrt{x}-2x-4\sqrt{x}+8}{6\sqrt{x}-18}$$
.

- a) Rút gọn P;
- b) Tìm các giá trị của x để P > 0;
- c) Tìm các giá trị của x để P < 1.

Bài 3: Cho biểu thức
$$P = \frac{x+2}{x\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$$
.

- a) Rút gọn P;
- b) Tîm x để $|P| = \frac{2}{3}$;
- c) Chứng minh rằng với những giá trị của x làm cho P được xác định thì P < 1

Bài 4: Cho biểu thức
$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{x-\sqrt{x}+6}{x+\sqrt{x}-2}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} + \frac{x-\sqrt{x}-2}{x+\sqrt{x}-2}\right).$$

- a) Rút gọn P;
- b) Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

c) Tim x để
$$P \cdot \frac{x-1}{x^2+8x} < -2$$
.

Bài 5: Cho biểu thức:
$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) : \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$$
, với $x > 0$.

- a) Rút gọn biểu thức P.
- b) Tìm giá trị của P khi x = 4.
- c) Tìm x để P = $\frac{13}{3}$.

Bài 6: Cho biểu thức:
$$A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 5} - \frac{10\sqrt{x}}{x - 25} - \frac{5}{\sqrt{x} + 5}$$
, với $x \ge 0$ và $x \ne 25$.

- a) Rút gọn biểu thức A.
- b) Tìm giá trị của A khi x = 9.
- c) Tìm x để $A < \frac{1}{3}$.

Bài 7: Cho biểu thức:
$$P = \frac{x\sqrt{x} - 8}{x + 2\sqrt{x} + 4} + 3(1 - \sqrt{x})$$
 $(x \ge 0)$.

- a) Rút gọn biểu thức A.
- b) Tìm các giá trị nguyên dương của x để biểu thức $Q = \frac{2P}{1-P}$ nhận giá trị nguyên.

Bài 8: a) Cho biểu thức
$$A = \frac{\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} + 2}$$
. Tính giá trị của A khi $x = 36$.

b) Rút gọn:
$$B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4} + \frac{4}{\sqrt{x}-4}\right) : \frac{x+16}{\sqrt{x}+2}, \text{ với } x \ge 0 \text{ và } x \ne 16$$

c) Với các biểu thức A và B nói trên, hãy tìm các giá trị nguyên của x để giá trị của biểu thức là số nguyên.

Bài 9: Cho biểu thức:
$$A = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}}$$
 và $B = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 3} - \frac{7\sqrt{x} - 9}{x - 9}$ (Với $x > 0, x \ne 9$).

- a) Rút gọn biểu thức B.
- b) Tính giá trị của A khi $x = \frac{1}{\sqrt{2} 1} \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$.
- c) Cho biểu thức $P = \frac{A}{B}$. Hãy tìm các giá trị của m để x thỏa mãn P = m

HD câu d:

d)
$$P = \frac{A}{B} = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}}$$
 Với điều kiện $x > 0, x \ne 4, x \ne 9$.

$$P = m \Leftrightarrow (m-1)\sqrt{x} = 3$$
 (1)

Nếu m = 1 thì phương trình (1) vô ghiệm.

Nếu
$$m \ne 1$$
 thì từ (1) $\Rightarrow \sqrt{x} = \frac{3}{m-1}$.

Do
$$x > 0, x \neq 4, x \neq 9 \Rightarrow \sqrt{x} > 0, \sqrt{x} \neq 2, \sqrt{x} \neq 3.$$

Để có x thỏa mãn P = m
$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{3}{m-1} > 0 \\ \frac{3}{m-1} \neq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \neq \frac{5}{2} \\ m \neq 2 \end{cases}$$

Vậy $m > 1, m \neq \frac{5}{2}, m \neq 2$ (Thỏa mãn yêu cầu bài toán)

Bài 10: Cho biểu thức:
$$A = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}}$$
 và $B = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 3} - \frac{7\sqrt{x} - 9}{x - 9}$ (Với $x > 0, x \neq 9$).

- a) Rút gọn biểu thức A.
- b) Tính giá trị của A khi $x = \sqrt{4 2\sqrt{3}}$.
- c) Tìm x để biểu thực $\frac{A}{B} = 1$.
- d) Tìm các giá trị m để có x thỏa mãn $\frac{A}{B} = m$.

Hết chuyên đề 1 – Dạng bài tập số 01 trong đề tuyển sinh vào 10. Chúc các em học sinh học tập tốt!



CÁC BÀI TOÁN RÚT GỌN CĂN THỨC