선형대수

2012년 1학기

기말고사

서울시립대학교
컴퓨터과학부

주의사항

- **시험지는 앞/뒤로 인쇄되어 있으니 유의하시기 바랍니다.**
- 만점은 100점입니다.
- 부정행위가 발각되면 즉시 시험지가 압수되고 0점 처리 됩니다.
- 교재에 있는 theorem을 이용할 경우, 해당 theorem을 증명할 필요 없이 어떤 theorem인지를 밝히고 이용하여도 좋습니다.
- "Matrix A를 diagonalize하라" 란 말은 "$P^{-1}AP = D$를 만족시키는 invertible matrix P와 diagonal matrix D를 구하라"는 의미입니다.

1. $\boxed{25점}$ 2차원 평면에서 원점을 중심으로 θ만큼 반시계 방향으로 회전하는 linear transformation이 2×2 matrix R에 의해 정의된다. ($\underline{0 \leqslant \theta < 2\pi}$)

   (a) $\boxed{10점}$ R이 실수(real number)인 eigenvalue를 갖기 위한 θ의 조건은 무엇인가?

   (b) $\boxed{15점}$ 위에서 구한 각 θ에 대해, R이 diagonalizable한 지 보이고 diagonalizable하다면 diagonalize하라.

Solution:

(a) Let

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Then

$$\det(R - \lambda I) = (\cos\theta - \lambda)^2 + \sin^2\theta = \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1$$

The above polynomial has a real solution when

$$\cos^2\theta - 1 \geqslant 0$$

thus when

$$\theta = 0 \text{ or } \pi.$$

(b) (i) When $\theta = 0$, $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\det(R - \lambda I) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

Therefore $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

$$R - 1I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \to E_1 = \text{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

$$R = P^{-1}DP$$

where

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ and } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(ii) When $\theta = \pi$, $R = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

$$\det(R - \lambda I) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$$

Therefore $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.

$$R - (-1)I = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$R = P^{-1}DP$$

where

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ and } D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

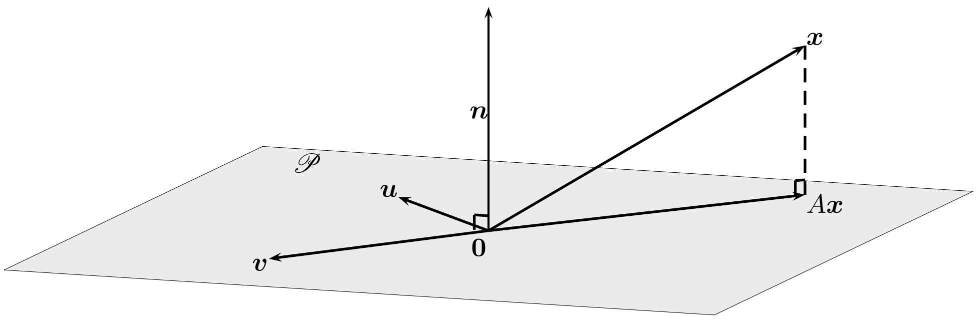
2. $\boxed{60\text{점}}$ 3차원 공간 $\mathbb{R}^3$에 <u>원점을 지나는</u> 평면 $\mathscr{P}$가 (linearly independent한) 두 direction vector

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \text{ 와 } \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

에 의해 정의된다. 또한 vector

$$\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

이 평면 $\mathscr{P}$의 normal vector라고 하자. 이 평면에 orthogonal하게 projection하는 linear transformation이 3×3 matrix A에 의해 정의된다고 하자.



(a) $\boxed{15\text{점}}$ A의 <u>모든</u> eigenvalue와 각 eigenvalue에 해당하는 eigenspace를 구하라.

(b) $\boxed{15\text{점}}$ A가 diagonalizable한지 보이고 만약 diagonalizable하다면 diagonalize하라.

(c) $\boxed{10\text{점}}$ rank(A)와 nullity(A)를 구하라.

(d) $\boxed{10\text{점}}$ col(A)의 basis를 구하라.

(e) $\boxed{10\text{점}}$ null(A)의 basis를 구하라.

Solution:

(a) Since $\boldsymbol{u}$ and $\boldsymbol{v}$ are already in the plane $\mathscr{P}$,

$$A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}, \text{ and } A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}.$$

Also, since $\boldsymbol{n}$ is a normal vector,

$$A\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0} = 0\boldsymbol{n}.$$

Threrefore 1 and 0 are eigenvalues of A. Since $\boldsymbol{u}$ and $\boldsymbol{v}$ are linearly independent,

$$E_1 = \operatorname{span}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}).$$

It is clear that

$$E_0 = \operatorname{span}(\boldsymbol{n}).$$

Now, the sum of geometric multiplicities is $\dim E_1 + \dim E_0 = 2 + 1 = 3$. Since the sum of algebraic multiplicities should be 3, there cannot be any other eigenvalue and hence 1 and 0 are <u>all</u> the eigenvalues of A.

(b) Since the sum of geometric multiplicities is 3, P is diagonalizable as follows

$$P^{-1}AP = D$$

where (with $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{n}$ as column vectors)

$$P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{n} \end{bmatrix} \text{ and } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(c) Since $\text{null}(A) = E_0$, $\text{nullity}(A) = \dim E_0 = 1$.
$\text{rank}(A) = 3 - \text{nullity}(A) = 2$.

(d) For any $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$, $A\boldsymbol{x}$ is on $\mathscr{P}$ and can be represented as a linear combination of $\boldsymbol{u}$ and $\boldsymbol{v}$. Therefore,

$$\text{col}(A) = E_1 = \text{span}\,(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\,.$$

(e) $\text{null}(A) = E_0$. Therefore

$$\text{null}(A) = E_0 = \text{span}\,(\boldsymbol{n})\,.$$

3. $\boxed{15\text{점}}$ $n \times n$ matrix 인 A 가 있다. 이 때 row(A) 의 모든 vector 는 null(A) 의 모든 vector 와 orthogonal 함을 보여라.

Solution: $\boldsymbol{x} \in \text{row}(A) \Leftrightarrow$ There is a row vector $\boldsymbol{y}$ such that $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}A$
$\boldsymbol{z} \in \text{null}(A) \Leftrightarrow A\boldsymbol{z} = 0$
Therefore,
$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{y}A)\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y}(A\boldsymbol{z}) = 0$$