선형대수

2013년 1학기

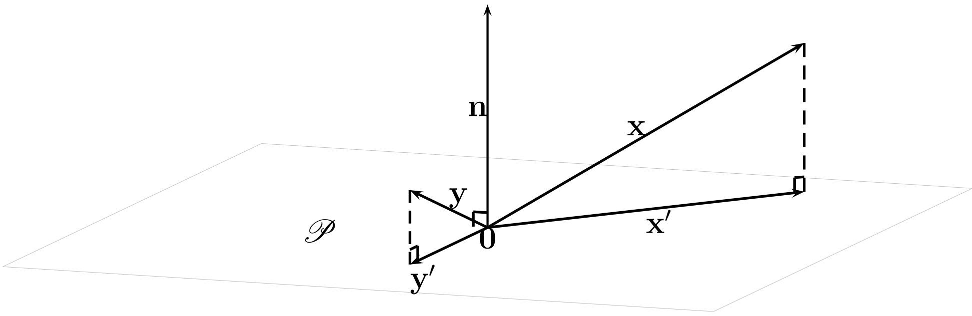
중간고사

서울시립대학교
컴퓨터과학부

주의사항

- **시험지는 앞/뒤로 인쇄되어 있으니 유의하시기 바랍니다.**
- 만점은 100점입니다.
- 부정행위가 발각되면 즉시 시험지가 압수되고 0점 처리 됩니다.
- "$M \in \mathbb{R}^{m\times n}$"은, M이 실수(real number)들로 구성된 $m \times n$ 크기의 matrix라는 의미입니다.
- 교재에 있는 theorem을 이용할 경우, 해당 theorem을 증명할 필요 없이 어떤 theorem인지를 밝히고 이용하여도 좋습니다.

1. $\boxed{30점}$ Unit vector $\mathbf{n} := \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$ 에 orthogonal하고 원점(origin)을 지나는 평면(plane) $\mathscr{P}$가 있다. 임의의 3차원 vector(예를 들어 아래 그림의 $\mathbf{x}$와 $\mathbf{y}$)를 $\mathscr{P}$로 orthogonal 하게 projection하여 얻게 되는 vector(예를 들어 아래 그림의 $\mathbf{x}'$와 $\mathbf{y}'$) 를 생각해 보자.



(a) $\boxed{10점}$ 위 orthogonal projection은 임의의 vector에 아래 matrix를 곱한 것과 같음을 보여라. 즉, "$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$" 임을 보여라.

$$A = I - \mathbf{n}\mathbf{n}^T$$

(Hint) $\mathbf{x}$, $\mathrm{proj}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$, 그리고 $\mathbf{x}'$의 관계를 생각해 보라.

(b) $\boxed{20점}$ **(이 문제는 어려울 수 있으니, 다른 문제를 먼저 풀어볼 것을 권장함)** 평면 $\mathscr{P}$ 위의 nonzero vector $\mathbf{u}$가 있다. 이 때, 다음 system of linear equation의 solution을 구하라. (Solution의 개수가 무한히 많을 경우, free variable을 사용하여 solution의 형태를 구체적으로 기술하라.)

$$A\mathbf{x} = \mathbf{u}.$$

(Hint)
이 문제를 Gauss elimination을 사용하여 풀려면 매우 복잡할 수 있다. 다음과 같은 방법을 고려해 보라.
$\mathbf{u}$와 평행하지 않은 평면위의 또다른 nonzero vector $\mathbf{v}$를 고려해보자. 이 때, 3차원 공간상의 임의의 vector $\mathbf{x}$는 세 vector $\mathbf{n}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$의 linear combination으로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{n} + t_2\mathbf{u} + t_3\mathbf{v}, \quad (t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}).$$

$\mathbf{x}$를 위와 같이 나타내어 equation에 대입한 후, t_1, t_2, t_3가 어떤 값을 가져야 하는지 생각해 보라.

Solution:

(a)

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathrm{proj}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{n}\mathbf{n}^T\mathbf{x} = \mathbf{x} - (\mathbf{n}\cdot\mathbf{x})\mathbf{n}.$$

(b) Let

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{n} + t_2\mathbf{u} + t_3\mathbf{v}.$$

Then, since $A\mathbf{n} = \mathbf{0}$, $A\mathbf{u} = \mathbf{u}$, and $A\mathbf{v} = \mathbf{v}$, we get

$$A\mathbf{x} = A(t_1\mathbf{n}+t_2\mathbf{u}+t_3\mathbf{v}) = t_1A\mathbf{n}+t_2A\mathbf{u}+t_3A\mathbf{v} = \mathbf{0}+t_2A\mathbf{u}+t_3A\mathbf{v} = t_2\mathbf{u}+v_3\mathbf{v} = \mathbf{u}.$$

Since $\mathbf{v}$ is not parallel to $\mathbf{u}$, the equality holds when $t_2 = 1$ and $t_3 = 0$. Therefore, the solution is

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{n} + \mathbf{u}$$

where t_1 is the free variable.

2. $\boxed{10\text{점}}$ Gaussian elimination을 수행할 때, 아래의 두 elementary row operation은 필요하지 않는 이유를 설명하시오.

- kR_i
- $R_i \leftarrow R_i + kR_j \ (i < j)$

Solution:

- "kR_i" is not required since we do not need to set the pivot value to 1.
- "$R_i \leftarrow R_i + kR_j \ (i < j)$" is not required since we only make the values below pivot elements zeros.

3. $\boxed{15점}$ 2×2 matrix A가 있다.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

A에 다음의 각 elementary row operation을 적용했을 때의 determinant는 무엇인가? $\det A$를 사용하여 나타내라.

(a) $\boxed{5점}$ $R_1 \leftrightarrow R_2$

(b) $\boxed{5점}$ kR_1

(c) $\boxed{5점}$ $R_2 \leftarrow R_2 + kR_1$

Solution:

(a)

$$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = bc - ad = -\det A$$

(b)

$$\begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = kad - kbc = k \det A$$

(c)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c - ka & d - kb \end{vmatrix} = a(d - kb) - b(c - ka) = ad - kab - bc + kab = \det A$$

4. $\boxed{25점}$ 다음을 각각 보여라.

(a) $\boxed{10점}$ 3×3 matrix A가 있다. 만약 A의 세번째 row가 A의 첫번째 row와 두번째 row의 합과 같다면, A는 invertible하지 않음을 보여라. (편의상 A의 모든 elements는 0이 아니라고 가정한다.)

(b) $\boxed{15점}$ 위 성질이 $n \times n$ matrix에도 적용됨을 보여라. 즉, $n \times n$ matrix A의 k 번째 row가 A의 i 번째 row와 j 번째 row의 합과 같다면,

$$R_k = R_i + R_j, \quad (i, j, k\text{는서로다르다})$$

A는 invertible하지 않음을 보여라. (편의상 A의 모든 elements는 0이 아니라고 가정한다.)

Solution:

(a)

(b)

5. $\boxed{20\text{점}}$ 4×4 matrix A가 다음과 같다고 하자.

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix}.$$

(a) $\boxed{10\text{점}}$ A를 LU factorization하시오.

(b) $\boxed{10\text{점}}$ 위에서 A가 invertible하기 위한 a, b, c, d의 최소조건은 무엇인가?

Solution:

(a)

$$\begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4-R_1]{\substack{R_2-R_1 \\ R_3-R_1}} \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a & c-a \\ 0 & b-a & c-a & d-a \end{bmatrix} \quad \left(L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & * & 1 & 0 \\ 1 & * & * & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\xrightarrow[R_4-R_2]{R_3-R_2} \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & c-b & d-b \end{bmatrix} \quad \left(L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & * & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\xrightarrow{R_4-R_3} \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{bmatrix} \quad \left(L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

(b) For A to be invertible, the diagonal elements of U should all non-zeros. Therefore, the conditions are

$$a \neq 0, a \neq b, b \neq c, c \neq d$$