선형대수

2010년 1학기

기말고사

서울시립대학교
컴퓨터과학부

주의사항

- 만점은 190점입니다.
- 부정행위가 발각되면 즉시 시험지가 압수되고 0점처리 됩니다.
- 각 문제를 해결하는 방법은 간단하고 빠른 방법부터 복잡하고 시간이 오래 걸리는 방법까지, 여러 가지 방법이 있을 수 있습니다. 문제를 잘 이해해서 효율적인 방법으로 문제를 해결하시기 바랍니다.
- 수식이 아닌 서술형으로 답할 수 있는 경우, 서술형으로 답하여도 상관 없습니다.
- “$M \in \mathbb{R}^{m \times n}$”은, M이 실수(real number)들로 구성된 $m \times n$ matrix라는 의미입니다.

1. $\boxed{30\text{점}}$ $\mathbb{R}^2$ 공간의 모든 vector들을 $\mathbf{d} := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 방향의 line으로 (orthogonal하게) projection하는 2×2 matrix를 A라고 하자.
   (a) $\boxed{10\text{점}}$ A를 구하시오.
   (b) $\boxed{20\text{점}}$ A가 diagonalizable한지 보이고, 만약 그렇다면 diagonalize하시오. 즉, $A = PDP^{-1}$에서 P와 D를 구하시오.

Solution:

(a) $(\mathbf{d}/\|\mathbf{d}\|)(\mathbf{d}/\|\mathbf{d}\|)^T = \dfrac{1}{\|\mathbf{d}\|^2}\mathbf{d}\mathbf{d}^T = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

(b) Characteristric polynomial은 다음과 같다.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4/5 - \lambda & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 - \lambda \end{vmatrix} = \frac{4}{25} - \lambda + \lambda^2 - \frac{4}{25} = \lambda(\lambda - 1)$$

따라서 두 eigenvalue는 $\lambda_1 := 0$과 $\lambda_2 := 1$이다.

i) $\lambda_1 := 0$

$$A - \lambda_1 I = A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 - 2R_1]{R_1/4} \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

따라서, Homogeneous equation

$$(A - \lambda_1 I)\mathbf{x} = A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

의 solution, 즉 $A - \lambda_1 I$의 nullspace는 $\text{null}(A - \lambda_1 I) = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right\}$ 이므로, $\lambda_1 = 0$의 eigenvector는 $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$이다.

ii) $\lambda_2 = 1$

$$A - \lambda_2 I = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 - 2R_1]{-R_1} \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

따라서, $\text{null}(A - \lambda_2 I) = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ 이므로, $\lambda_2 = 1$의 eigenvector는 $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$이다.

두 eigenvector, $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$와 $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$는 linearly independent하므로, A는 diagonalizable하다.

$$\begin{aligned} A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = PDP^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2. $\boxed{20점}$ 임의의 2×2 matrix A의 두 eigenvalue를 λ_1과 λ_2라 하고, 각 eigenvalue의 eivenvector를 각각 $\mathbf{x}_1$와 $\mathbf{x}_2$라고 하자. 즉, 다음이 성립한다고 하자.

$$A\mathbf{x}_1 = \lambda_1 \mathbf{x}_1, \quad A\mathbf{x}_2 = \lambda_2 \mathbf{x}_2, \quad \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^2.$$

이 때, 항상 다음이 성립함을 보여라.

$$(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) = (A - \lambda_2 I)(A - \lambda_1 I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hint:

1. 임의의 matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$에 대해, A의 trace는 다음과 같이 A의 diagonal entry들의 합으로 정의된다:

$$\operatorname{tr}(A) := a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

2. 임의의 matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$의 모든 eigenvalue를 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$이라고 할 때, (값이 중첩되는 경우도 서로 다른 eigenvalue로 간주하자.) 다음이 성립한다. (교재 p.298의 40번 문제 참조)

$$\det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$
$$\operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

Solution:

(a) $A := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$로 정의하자. $\det A = ad - bc = \lambda_1 \lambda_2$이고 $\operatorname{tr}(A) = a + d = \lambda_1 + \lambda_2$ 인 성질을 이용하면,

$$\begin{aligned}
(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) &= \begin{bmatrix} a - \lambda_1 & b \\ c & d - \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a - \lambda_2 & b \\ c & d - \lambda_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)a + \lambda_1 \lambda_2 + bc & b(a + d - (\lambda_1 + \lambda_2)) \\ c(a + d - (\lambda_1 + \lambda_2)) & d^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)d + \lambda_1 \lambda_2 + bc \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a^2 - (a + d)a + (ad - bc) + bc & b(a + d - (a + d)) \\ c(a + d - (a + d)) & d^2 - (a + d)d + (ad - bc) + bc \end{bmatrix} \\
&= O
\end{aligned}$$

(b) 임의의 vector $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$에 대해, $(A - \lambda_2 I)(A - \lambda_1 I)\mathbf{y} = O\mathbf{y} = \mathbf{0}$ 따라서,

$$(A - \lambda_1 I)\mathbf{y} \in \operatorname{null}(A - \lambda_2 I)$$

이고, 이는 결국 $(A - \lambda_1 I)\mathbf{y} \in E_{\lambda_2}$ 임을 뜻한다. 즉, $(A - \lambda_1 I)\mathbf{y}$는 λ_2에 대한 A의 eigenvector이고, 이는 $\mathbf{x}_2$에 scalar 값을 곱한 형태라는 의미가 된다.

3. $\boxed{90점}$ $\mathbf{n}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 그리고 $\mathbf{n}_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 이라고 할 때, 다음 두 식을 동시에 만족시키는 $\mathbb{R}^4$의 vector들로 이루어진 subspace를 W라고 하자.

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{x} = 0$$
$$\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{x} = 0$$

(a) $\boxed{20점}$ W의 orthonormal basis를 구하시오.

(b) $\boxed{15점}$ $\mathbb{R}^4$의 vector를 W로 orthogonal하게 projection하는 linear transformation의 standard matrix P를 구하시오.

(c) $\boxed{30점}$ 위에서 구한 P의 eigenvalue와 각 eigenvalue의 eigenvector를 모두 구하시오.

> Hint:
> 임의의 matrix의 eigenvalue 및 eigenvector를 구할 경우에는 characteristic polynomial로부터 시작하여 그 값들을 구해야 하지만, 만약 이미 "eigenvector로 의심되는" vector를 알고 있다면, 이러한 vector가 실제 eigenvector인지 확인하여 역으로 해당하는 eigenvalue 값을 구할 수도 있다. 또한, 크기가 $n \times n$인 matrix는 최대 n개의 서로 다른 eigenvalue를 갖고, linearly independent한 eigenvector의 개수도 최대 n임을 명심하라.

(d) $\boxed{25점}$ 위에서 구한 matrix P는 orthogonally diagonalizable한가? 가능하다면 orthogonally diagonalize하고, 그렇지 않다면 왜 불가능한지 보이시오.

Solution:

(a) 1. 연립방정식

$$\begin{bmatrix} \mathbf{n}_1^T \\ \mathbf{n}_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

을 풀면,

$$\begin{bmatrix} -x_3 - 2x_4 \\ x_3 + x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_4$$

따라서,

$$W = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

2. Vector를 하나 고른 후, 이 vector를 normalization한다. (이를 $\mathbf{q}_1$이라 하자.)

$$\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\0\end{bmatrix} \to \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\0\end{bmatrix} =: \mathbf{q}_1$$

3. $\mathbf{q}_1$에 orthogonal한 vector를 구한다. 이를 $\mathbf{q}_2'$라고 하자.

$$\mathbf{q}_2' = \begin{bmatrix}-2\\1\\0\\1\end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\1\end{bmatrix}\cdot\mathbf{q}_1\right)\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix}-2\\1\\0\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-1\\1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\0\\-1\\1\end{bmatrix}$$

4. $\mathbf{q}_2 := \mathbf{q}_2'/\|\mathbf{q}_2'\| = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\\1\end{bmatrix}$

5. Orthonormal basis는

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\0\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

(b)

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_1\mathbf{q}_1^T + \mathbf{q}_2\mathbf{q}_2^T &= \frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\0\\-1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 0\\-1 & 1 & 1 & 0\\-1 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & -1\\0 & 0 & 0 & 0\\1 & 0 & 1 & -1\\-1 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\right)\\ &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & -1 & 0 & -1\\-1 & 1 & 1 & 0\\0 & 1 & 2 & -1\\-1 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

(c) $P\mathbf{q}_1 = (\mathbf{q}_1\mathbf{q}_1^T + \mathbf{q}_2\mathbf{q}_2^T)\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_1$이고, 마찬가지로 $P\mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_2$이다. 따라서 $\mathbf{q}_1$과 $\mathbf{q}_2$는 P의 eigenvalue 1과 연관된 eigenvector들이다.

또한 $P\mathbf{n}_1 = (\mathbf{q}_1\mathbf{q}_1^T + \mathbf{q}_2\mathbf{q}_2^T)\mathbf{n}_1 = \mathbf{q}_1(\mathbf{q}_1\cdot\mathbf{n}_1) + \mathbf{q}_2(\mathbf{q}_2\cdot\mathbf{n}_1) = \mathbf{0} = 0\mathbf{n}_1$ 이고, 마찬가지로 $P\mathbf{n}_2 = \mathbf{0} = 0\mathbf{n}_2$이므로, $\mathbf{n}_1$과 $\mathbf{n}_2$는 P의 eigenvalue 0과 연관된 eigenvector들이다.

P의 최대 eigenvector의 수는 4이므로, 모든 eigenvalue 및 eigenvector들을 구하였다.

(d) 우선, $W = \text{span}\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\}$이고 $W^\perp = \text{span}\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2\}$이므로, $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\}$의 vector들과 $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2\}$의 vector들은 서로 orthogonal하다. 또한 이미 $\mathbf{q}_1$과 $\mathbf{q}_2$는 orthonormal하므로, $\mathbf{n}_1$과 $\mathbf{n}_2$를 서로 orthonormal하게 하면 모든 eigenvector들을 orthonormal하게 만들게 된다.

1. $\mathbf{q}_1$,$\mathbf{q}_2$와 일관성 있게 하기 위해 $\mathbf{n}_2$를 우선 unit vector로 만들면, $\mathbf{n}_2' := \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}$이 된다.

2. $\mathbf{n}_2$과 orthonormal하도록 Gram-Schmidt process를 $\mathbf{n}_1$에 적용하면,

$$\mathbf{n}_1 - \frac{1}{3}(\mathbf{n}_1 \cdot \begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix})\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\-1\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}$$

   이를 normalize하면 $\mathbf{n}_1' := \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}$이 된다.

따라서 orthornormal한 네 개의 eigenvector의 column들로 이루어진 matrix

$$Q := \begin{bmatrix}\mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \mathbf{n}_1' & \mathbf{n}_2'\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1 & -1 & 0 & 1\\1 & 0 & 1 & 1\\1 & -1 & -1 & 0\\0 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

와 eigenalue들로 만들어진 diagonal matrix

$$D := \begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0\end{bmatrix}$$

를 이용하면 다음과 같이 orthogonalli diagonalize할 수 있다.

$$P = QDQ^T$$

4. $\boxed{50\text{점}}$ $\mathbb{R}^n$의 k-dimensional subspace W가 있다. $\mathbb{R}^n$의 vector를 W로 orthogonally projection하는 matrix를 P라고 할 때, P의 모든 eigenvalue를 구하시오. Eigenvalue가 중첩될 경우, 중첩되는 개수도 함께 구하시오.

Hint: 앞의 1,3번 문제를 참고하시오.