선형대수

2011년 1학기

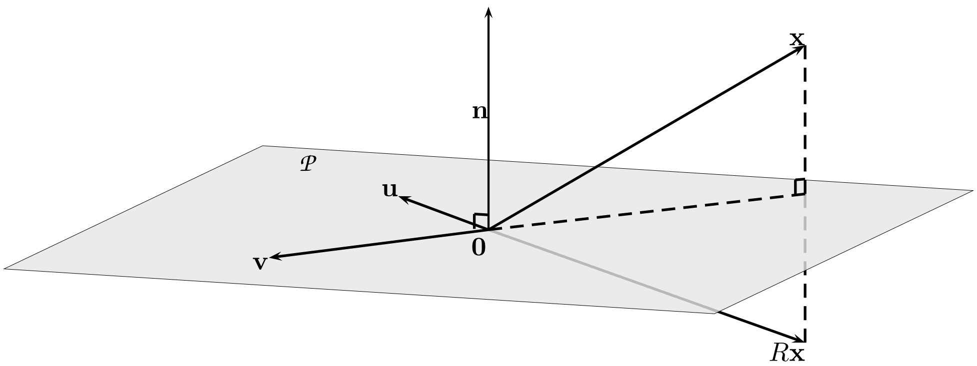
기말고사

서울시립대학교
컴퓨터과학부

주의사항

- 만점은 100점입니다.
- 부정행위가 발각되면 즉시 시험지가 압수되고 0점 처리 됩니다.

1. $\boxed{40점}$ 원점을 지나는 평면 $\mathcal{P}$가 아래 그림과 같다고 하자. 그림에서 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$는 linearly independent한 $\mathcal{P}$의 direction vector들이고, $\mathbf{n}$은 $\mathcal{P}$의 normal vector이다. 이 때, 평면 $\mathcal{P}$에 대한 reflection transformation이 3×3 matrix R에 의해 정의된다고 하자. 예를 들어 아래 그림에서와 같이 벡터 $\mathbf{x}$가 $R\mathbf{x}$로 변환된다.



(a) $\boxed{15점}$ R의 모든 eigenvalue및 eigenvector들을 구하라.

> Hint:
> 기하학적인 관점에서 봤을 때, 어떠한 벡터(eigenvector)들이 eigenvalue equation "$R\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$"를 만족시킬 지 생각해 보고, 그 때의 λ값(eigenvalue)은 무엇인지 생각해 보라.

(b) $\boxed{10점}$ R은 diagonalizable함을 보여라.

(c) $\boxed{15점}$ $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n}$이 모두 orthonormal하다고 가정하자. 이 때 3×3 matrix R을 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n}$으로 나타내라.

> Hint:
> 위에서 구한 eigenvalue 및 eigenvector를 이용해 diagonalization을 한 후 역으로 R을 구하라.

Solution:

(a) Reflection의 정의에 의해 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$R\mathbf{u} = \mathbf{u}, \quad R\mathbf{v} = \mathbf{v}, \quad R\mathbf{n} = -\mathbf{n}$$

따라서 eigenvalue는 1과 -1이고,

$$E_1 = \mathrm{span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}, \quad E_{-1} = \mathrm{span}\{\mathbf{n}\}$$

이다.

(b) 위에서 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n}$이 liearly independent하므로 R은 diagonalizable하다.

(c) $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$가 orthonormal하므로

$$\begin{aligned} R &= \begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{n} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{n} \end{bmatrix}^{T} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^T \\ \mathbf{v}^T \\ \mathbf{n}^T \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{u}\mathbf{u}^T + \mathbf{v}\mathbf{v}^T - \mathbf{n}\mathbf{n}^T. \end{aligned}$$

2. $\boxed{25점}$ 2×2 matrix인 A의 두 eigenvalue를 λ_1과 λ_2라고 하고, $\mathbf{x}_1$과 $\mathbf{x}_2$를 각 eigenvalue의 eigenvector 라고 하자. 즉, 아래 식이 성립한다.

$$A\mathbf{x}_1 = \lambda_1 \mathbf{x}_1 \quad \text{그리고} \quad A\mathbf{x}_2 = \lambda_2 \mathbf{x}_2.$$

(a) $\boxed{10점}$ 아래 식이 성립함을 보여라.

$$(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) $\boxed{15점}$ 2×2 matrix인 $A - \lambda_2 I$의 각 column은 $\mathbf{x}_1$와 평행함을 보여라.

Hint:
- (a)의 결과에서 column을 각각 비교해 보라.
- $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$이고 $E_{\lambda_i} = \text{span}\{\mathbf{x}_i\}$일 때, 다음은 모두 equivalent하다.
  - $\mathbf{y}$가 $\mathbf{x}_i$와 평행하다.
  - $\mathbf{y} \in E_{\lambda_i}$
  - $\mathbf{y} \in \text{null}(A - \lambda_i I)$

Solution: First, notice that

$$E_{\lambda_1} = \text{span}\{\mathbf{x}_1\} \quad \text{and} \quad E_{\lambda_2} = \text{span}\{\mathbf{x}_2\}.$$

(i) Show what $(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) = O$.

Let

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Notice that

$$\det(A - \lambda I) = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$$

therefore

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a + d \quad \text{and} \quad \lambda_1 \lambda_2 = ad - bc.$$

Then

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) &= A^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)A + \lambda_1 \lambda_2 I \\ &= A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I \\ &= \begin{bmatrix} a^2 + bc - (a + d)a + (ad - bc) & (a + d)b - (a + d)b \\ (a + d)c - (a + d)c & d^2 + bc - (a + d)d + (ad - bc) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(ii) Let

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 \end{bmatrix}$$

then

$$\begin{aligned} &(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) = (A - \lambda_1 I)\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow &(A - \lambda_1)\mathbf{y}_1 = \mathbf{0} \quad \text{and} \quad (A - \lambda_2)\mathbf{y}_2 = \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow &\mathbf{y}_1 \in \text{null}(A - \lambda_1 I) \quad \text{and} \quad \mathbf{y}_2 \in \text{null}(A - \lambda_1 I) \\ \Leftrightarrow &\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in E_{\lambda_1}. \end{aligned}$$

Therefore $\mathbf{y}_1$ and $\mathbf{y}_2$ are multiples of $\mathbf{x}_1$.

3. $\boxed{15점}$ 3×3 matrix A의 eigenvalue가 λ_1, λ_2, λ_3라고 하고, $A + I$가 invertible하다고 하자. 만약 $\underline{A\text{가 diagonalizable하다면}}$, $(A+I)^{-1}$의 eigenvalue는 $\frac{1}{\lambda_1+1}$, $\frac{1}{\lambda_2+1}$, $\frac{1}{\lambda_3+1}$ 임을 보여라.

보너스 문제:
위 관계는 A가 diagonalizable하지 않을 때에도 성립하지만, 이 경우 증명하는 게 약간 더 복잡하다. 이를 증명하라. (보너스 점수는 10점이지만, 전체 점수는 100점을 넘을 수 없다.)

Solution:

(i) Regardless of the diagonaliability of A

First of all, note that $\lambda = 0$ cannot be an eigenvalue since

$$\det\left((A+I)^{-1} - 0I\right) = \det\left((A+I)^{-1}\right) \neq 0.$$

Now, with $\lambda \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\det\left((A+I)^{-1} - \lambda I\right) &= \det\left((A+I)^{-1} - \lambda(A+I)^{-1}(A+I)\right) \\
&= \det\left((A+I)^{-1}(I - \lambda(A+I))\right) \\
&= \det\left((A+I)^{-1}\right)\det\left(I - \lambda(A+I)\right) \\
&= \frac{\det\left((1-\lambda)I - \lambda A\right)}{\det(A+I)} \\
&= (-\lambda)^3 \frac{\det\left(A - \frac{1-\lambda}{\lambda} I\right)}{\det(A+I)}
\end{aligned}$$

Therefore,

$$\det\left((A+I)^{-1} - \lambda I\right) = 0 \quad \text{if and only if } \det\left(A - \frac{1-\lambda}{\lambda} I\right) = 0.$$

Since λ_i, $i = 1, 2, 3$, are the eigenvalues of A,

$$\det\left(A - \frac{1-\lambda}{\lambda} I\right) = 0 \text{ if and only if } \frac{1-\lambda}{\lambda} = \lambda_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

hence

$$\det\left((A+I)^{-1} - \lambda I\right) = 0 \quad \text{if and only if } \lambda = \frac{1}{\lambda_i + 1}.$$

example: (p.301 textbook)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

has eigenvalues $1, 1, 2$ and eigenvectors as

$$E_1 = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{and} \quad E_2 = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$

and is NOT diagonalizable.

Now

$$(A+I)^{-1} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 10 & -5 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ -2 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

has eigenvalues $1/2, 1/2, 1/3$ and eigenvectors as

$$E_{1/2} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{and} \quad E_{1/3} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$

(ii) Assuming A is diagonalizable.
If A is diagonalizable, let $A = PDP^{-1}$. Then

$$\begin{aligned}(A+I)^{-1} &= (PDP^{-1} + PP^{-1})^{-1} = (P(D+I)P^{-1})^{-1} = P(D+I)^{-1}P^{-1} \\ &= P \begin{bmatrix} 1/(\lambda_1+1) & & \\ & 1/(\lambda_2+1) & \\ & & 1/(\lambda_3+1) \end{bmatrix} P^{-1}.\end{aligned}$$

Therefore, the eigenvalues of $(A+I)^{-1}$ are

$$1/(0+1) = 1, \quad 1/(1+1) = 1/2, \quad \text{and} \quad 1/(2+1) = 1/3.$$

4. $\boxed{\text{20점}}$ $m \times n$ matrix A와 $n \times k$ matrix B가 다음을 만족한다고 하자. (O는 모든 entry가 0인 matrix를 나타낸다.)

$$AB = O.$$

이 때 항상 다음 부등식이 성립함을 증명하라.

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \le n.$$

Hint:
(1) $AB = O$가 성립할 경우, A의 row들과 B의 column들이 어떠한 관계를 갖는지 생각해 보라.
(2) Matrix의 각 fundamental subspace들의 orthogonal complement들을 고려해 보라.
(3) 두 subspace S_1과 S_2가 $S_1 \subset S_2$의 관계를 가질 경우 다음이 성립한다.

$$\dim(S_1) \le \dim(S_2)$$

Solution:
Since $AB = O$, all the columns of B are orthogonal to all the rows of A. Since row $(A)^{\perp} = \text{null}(A)$, $\text{col}(B) \subset \text{null}(A)$ therefore $\dim(\text{col}(B)) = \text{rank}(B) \le \text{nullity}(A)$. By the rank theorem,

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \le \text{rank}(A) + \text{nullity}(A) = n.$$