선형대수

2011년 1학기

중간고사

서울시립대학교
컴퓨터과학부

주의사항

- 만점은 100점입니다.
- 부정행위가 발각되면 즉시 시험지가 압수되고 0점 처리 됩니다.
- "$M \in \mathbb{R}^{m \times n}$"은, M이 실수 (real number)들로 구성된 $m \times n$ 크기의 matrix라는 의미입니다.

1. 20점 다음과 같은 2×2 matrix가 있다. $(u_1 u_2 \neq 0)$

$$A = \frac{1}{u_1^2 + u_2^2} \begin{bmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 \\ u_1 u_2 & u_2^2 \end{bmatrix}.$$

(a) 10점 A는 항상 invertible하지 않음을 보여라.

(b) 10점 임의의 vector $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$에 대해, 다음을 보여라.

$$A\mathbf{v} = \operatorname{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}).$$

위에서 $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ 이다.

Solution:

(a)

$$\begin{bmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 \\ u_1 u_2 & u_2^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - (u_2/u_1)R_1} \begin{bmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

or

$$\det A = \frac{1}{(u_1^2 + u_2^2)^2} \left(u_1^2 u_2^2 - (u_1 u_2)(u_1 u_2) \right) = 0$$

(b)

$$\operatorname{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}} \right) \mathbf{u} = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{u_1^2 + u_2^2} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

and

$$\begin{aligned} A\mathbf{v} &= \frac{1}{u_1^2 + u_2^2} \begin{bmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 \\ u_1 u_2 & u_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{u_1^2 + u_2^2} \begin{bmatrix} u_1^2 v_1 + u_1 u_2 v_2 \\ u_1 u_2 v_1 + u_2^2 v_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{u_1^2 + u_2^2} \begin{bmatrix} (u_1 v_1 + u_2 v_2) u_1 \\ (u_1 v_1 + u_2 v_2) u_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{u_1^2 + u_2^2} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2. 20점 $\mathbb{R}^3$의 평면 $\mathcal{P}$가 점 $\mathbf{p}$를 포함하고, 두 vector $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$는 $\mathcal{P}$의 direction vector이다. ($\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$는 서로 linearly independent하다.) 이 때 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$를 column으로 하는 3×2 matrix를 A라고 하자. $\mathcal{P}$의 normal vector를 $\mathbf{n}$이라고 할 때, $\mathbf{n}$은 항상 homogeneous system of linear equations

$$A^T \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

의 solution임을 보여라.

Solution: $\mathbf{n}$ is a solution of the linear system if $A^T\mathbf{n} = \mathbf{0}$. By the definition of *normal vector*, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}^T\mathbf{n} = 0$ and $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}^T\mathbf{n} = 0$. Therefore,

$$A^T\mathbf{n} = \begin{bmatrix}\mathbf{u} & \mathbf{v}\end{bmatrix}^T \mathbf{n} = \begin{bmatrix}\mathbf{u}^T \\ \mathbf{v}^T\end{bmatrix} \mathbf{n} = \begin{bmatrix}\mathbf{u}^T\mathbf{n} \\ \mathbf{v}^T\mathbf{n}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 \\ 0\end{bmatrix}$$

3. $\boxed{\text{20점}}$ (하나도, 셋 이상도 아닌) 단 두 개의 서로 다른 solution을 갖는 system of linear equations가 존재하는가? 존재한다면 그러한 예를 들고, 그렇지 않다면 이를 증명하라.

Solution: Let $\mathbf{x}_1$ and $\mathbf{x}_2$ are two different solutions of the linear system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Now let $\mathbf{x}_3 := (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)/2$. Then $\mathbf{x}_3 \neq \mathbf{x}_1$ and $\mathbf{x}_3 \neq \mathbf{x}_2$ since $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$. But $\mathbf{x}_3$ is also a solution since

$$A\mathbf{x}_3 = A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)/2 = (A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2)/2 = (\mathbf{b} + \mathbf{b})/2 = \mathbf{b}$$

This means that there is the third solution and contradicts the assumption.

4. $\boxed{\text{20점}}$ 두 개의 unit lower triangular matrix(이하 ULTM) $A_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$과 $B_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$을 곱한 결과인 A_nB_n은 또다른 ULTM가 된다는 것을 귀납법(mathematical induction)으로 증명하고자 한다. 아래의 가이드라인을 참고하여 이를 귀납법으로 증명해보라.

(i) 1×1 크기의 두 ULTM $A_1 \in \mathbb{R}^{1\times 1}$과 $B_1 \in \mathbb{R}^{1\times 1}$의 곱 A_1B_1은 ULTM임을 보인다.

(ii) $k \times k$ 크기의 두 ULTM $A_k \in \mathbb{R}^{k\times k}$와 $B_k \in \mathbb{R}^{k\times k}$의 곱 A_kB_k가 ULTM임을 가정한다.

(iii) $(k+1) \times (k+1)$ 크기의 두 ULTM $A_{k+1} \in \mathbb{R}^{(k+1)\times(k+1)}$과 $B_{k+1} \in \mathbb{R}^{(k+1)\times(k+1)}$의 곱 $A_{k+1}B_{k+1}$이 ULTM임을 보인다. 이를 위해 A_{k+1}과 B_{k+1}을 다음과 같은 partitioned matrix의 형태로 나타낸다.

$$A_{k+1} = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \quad \text{그리고} \quad B_{k+1} = \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right]$$

여기서 각 submatrix의 크기는 다음과 같다.

$$A_{11}, B_{11} \in \mathbb{R}^{k\times k}$$
$$A_{12}, B_{12} \in \mathbb{R}^{k\times 1}$$
$$A_{21}, B_{21} \in \mathbb{R}^{1\times k}$$
$$A_{22}, B_{22} \in \mathbb{R}^{1\times 1}$$

Solution: Note that

- A_{11} and B_{11} are ULTM,
- A_{12} and B_{12} are zero matrices, and
- $A_{22} = B_{22} = [1]$.

Therefore,

$$A_{k+1}B_{k+1} = \left[\begin{array}{c|c} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ \hline A_{21}B_{11} + A_{22}B_{12} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{array}\right]$$
$$= \left[\begin{array}{c|c} A_{11}B_{11} & O \\ \hline A_{21}B_{11} & 1 \end{array}\right]$$

Since $A_{11}B_{11}$ is a ULTM by assumption in (ii), $A_{k+1}B_{k+1}$ is also a ULTM.

5. $\boxed{20\text{점}}$ 4×4 matrix A가 다음과 같다고 하자.

$$A = \begin{bmatrix} a & r & r & r \\ a & b & s & s \\ a & b & c & t \\ a & b & c & d \end{bmatrix}$$

(a) $\boxed{10\text{점}}$ A의 LU factorization이 존재하는가? 존재한다면 어느 조건에서 존재하는지 보이고, 그 때의 L과 U를 각각 구하라.

(b) $\boxed{10\text{점}}$ A의 inverse가 존재하기 위한 조건은 무엇인가?

Solution:

(a)

$$\begin{bmatrix} a & r & r & r \\ a & b & s & s \\ a & b & c & t \\ a & b & c & d \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \leftarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - R_1 \\ R_4 \leftarrow R_4 - R_1}} \begin{bmatrix} a & r & r & r \\ 0 & b-r & s-r & s-r \\ 0 & b-r & c-r & t-r \\ 0 & b-r & c-r & d-r \end{bmatrix} \quad \left(L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\xrightarrow{\substack{R_3 \leftarrow R_3 - R_2 \\ R_4 \leftarrow R_4 - R_2}} \begin{bmatrix} a & r & r & r \\ 0 & b-r & s-r & s-r \\ 0 & 0 & c-s & t-s \\ 0 & 0 & c-s & d-s \end{bmatrix} \quad \left(L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 - R_3} \begin{bmatrix} a & r & r & r \\ 0 & b-r & s-r & s-r \\ 0 & 0 & c-s & t-s \\ 0 & 0 & 0 & d-t \end{bmatrix} \quad \left(L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

Therefore, LU factroization of A always exists:

$$\begin{bmatrix} a & r & r & r \\ a & b & s & s \\ a & b & c & t \\ a & b & c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & r & r & r \\ 0 & b-r & s-r & s-r \\ 0 & 0 & c-s & t-s \\ 0 & 0 & 0 & d-t \end{bmatrix}.$$

(b) A is invertible if and only if there is no zero row in its row echelon form. Therefore, A is invertible if $a \neq 0$, $b \neq r$, $c \neq s$, and $d \neq t$.