선형대수

2017년 1학기

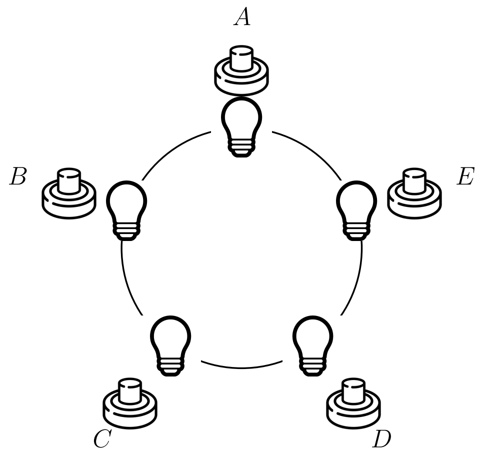
중간고사

서울시립대학교
컴퓨터과학부

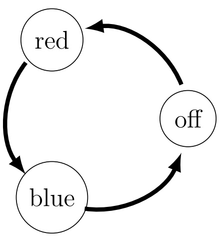
주의사항

- **시험지는 앞/뒤로 인쇄되어 있으니 유의하시기 바랍니다.**
- 만점은 100 점입니다.
- 부정행위가 발각되면 즉시 시험지가 압수되고 0 점 처리 됩니다.
- 처음부터 모든 문제를 풀지 말고, 문제를 모두 훑어본 후 풀 수 있다고 생각되는 문제부터 풀 것을 권장합니다.
- 교재에 있는 theorem을 이용할 경우, 해당 theorem을 증명할 필요 없이 어떤 theorem 인지를 밝히고 이용하여도 좋습니다.
- 강의시간에 배운 범위안의 내용에만 근거해서 답변해야 합니다. 예를 들어, 아직 배우지 않은 내용을 근거로 답하는 경우, 맞더라도 감점이 됩니다.

1. $\boxed{\text{40점}}$ 다음과 같이 전구 5개가 원형으로 배열되어 있고, 각 전구마다 switch가 붙어 있다. 각 siwtch를 누를때마다 <u>해당 전구 및 양 옆의 전구, 총 3개 전구</u>의 상태가 바뀐다.



(a) $\boxed{\text{20점}}$ 각 switch를 누를 때마다 상태가 아래와 같이 바뀐다고 하자.



처음 전구들의 상태가 아래 "초기 상태"와 같을 때, switch들을 눌러서 전구들의 상태를 아래 "마지막 상태"로 바꾸는 것이 가능한가? 만약 가능하다면 <u>어떤 switch들을 어떤 순서로</u> 눌러야 하는지 보이고, 불가능하다면 <u>불가능함을 증명</u>하라.

A	B	C	D	E
red	blue	red	blue	red

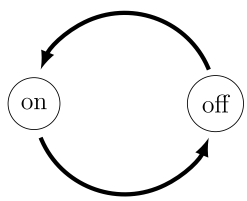
(초기 상태)

→

A	B	C	D	E
off	off	off	off	off

(마지막 상태)

(b) $\boxed{\text{20점}}$ 이번에는, siwtch를 누를때마다 아래와 같이 상태로 바뀐다고 하자.



처음 전구들이 모두 on 상태일 때, switch들을 눌러서 모든 전구들을 off로 바꾸는 것이 가능한가? 만약 가능하다면 <u>어떤 switch들을 어떤 순서로</u> 눌러야 하는지 보이고, 불가능하다면 <u>불가능함을 증명</u>하라.

Solution:

(a) buttom vectors (each row is associated with A E):

$$\mathbf{a} := \begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\\1\end{bmatrix} \mathbf{b} := \begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix} \mathbf{c} := \begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\\0\end{bmatrix} \mathbf{d} := \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\\1\end{bmatrix} \mathbf{e} := \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\\1\end{bmatrix}$$

We need to solve the equation

$$\begin{bmatrix}1\\2\\1\\2\\1\end{bmatrix} + x_1\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\\1\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\\0\end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\\1\end{bmatrix} + x_5\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

which can be reduced to the linear system

$$\begin{bmatrix}1&1&0&0&1\\1&1&1&0&0\\0&1&1&1&0\\0&0&1&1&1\\1&0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\1\\2\\1\\2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&1&0&0&1&2\\1&1&1&0&0&1\\0&1&1&1&0&2\\0&0&1&1&1&1\\1&0&0&1&1&2\end{bmatrix} \xrightarrow[R_5+2R_1]{R_2+2R_1} \begin{bmatrix}1&1&0&0&1&2\\0&0&1&0&2&2\\0&1&1&1&0&2\\0&0&1&1&1&1\\0&2&0&1&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_5+R_2]{R_2\leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix}1&1&0&0&1&2\\0&1&1&1&0&2\\0&0&1&0&2&2\\0&0&1&1&1&1\\0&0&1&2&0&2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_5+2R_3]{R_4+2R_3} \begin{bmatrix}1&1&0&0&1&2\\0&1&1&1&0&2\\0&0&1&0&2&2\\0&0&0&1&2&2\\0&0&0&2&1&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_5+R_4} \begin{bmatrix}1&1&0&0&1&2\\0&1&1&1&0&2\\0&0&1&0&2&2\\0&0&0&1&2&2\\0&0&0&0&0&2\end{bmatrix}$$

Therefore there is no solution.

(b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_5+R_1]{R_2+R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_5+R_2]{R_2\leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_5+R_3]{R_4+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

The solution is

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

therefore, regardless of the order, we need to push every the switch once.

2. $\boxed{20\text{점}}$ $m \times n$ matrix A가 있다. homogeneous linear system

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

의 solution이 무한히 많다고 하자. 만약, vector $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$에 대해 다음 linear system이 consistent하다면, solution이 항상 무한히 많음을 보여라.

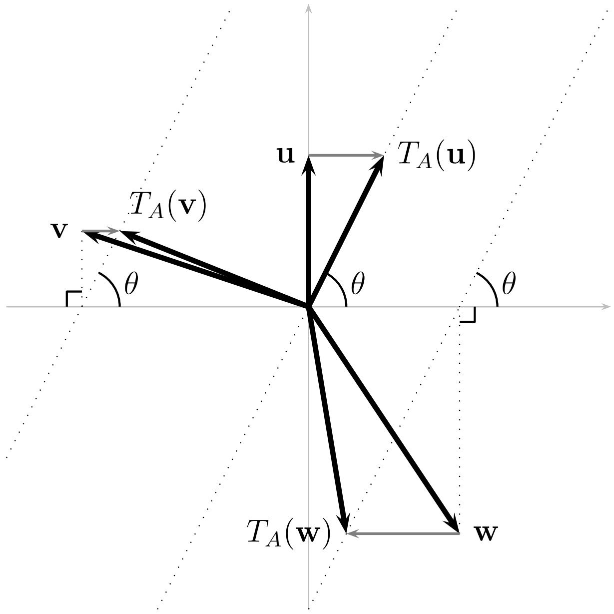
$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Solution: Let $\mathbf{y}$ be a solution of $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. For each $\mathbf{z}$ of the solution of $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\mathbf{y} + \mathbf{z}$ is a solution of $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

3. $\boxed{40점}$ 2차원 평면상에서의 transformation에 대한 문제이다.

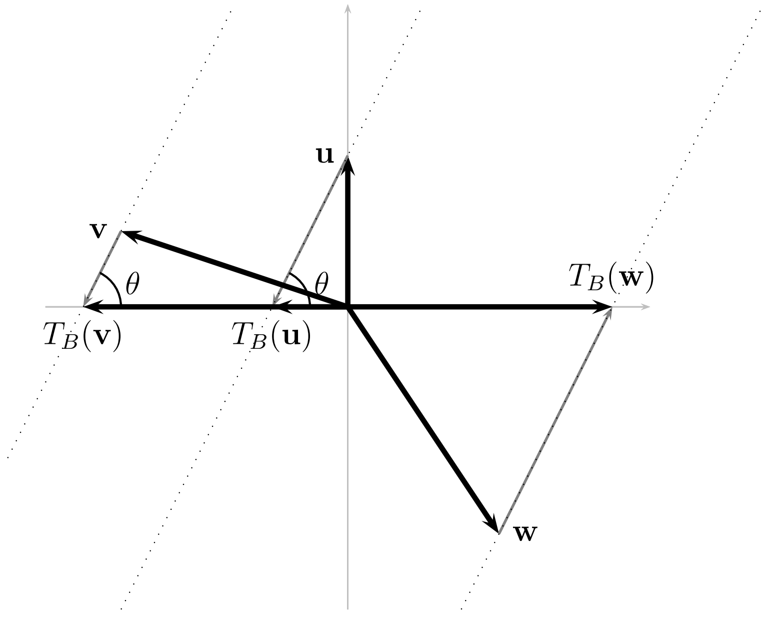
(a) $\boxed{20점}$ 다음과 같은 transformation T_A를 고려해 보자. T_A에 의해 vector는 다음과 같이 변환된다. (아래 그림 참조)

- y좌표는 변하지 않는다.
- y좌표가 positive한 경우 x좌표는 y좌표의 절대값에 비례하여 증가한다.
- y좌표가 negative한 경우 x좌표는 y좌표의 절대값에 비례하여 감소한다.



T_A는 linear transformation이다. 해당 matrix를 A라고 할 때, θ를 이용하여 A를 나타내라.

(b) $\boxed{20점}$ 다음과 같이 θ의 각도로 비스듬하게 x축에 projection하는 transformation을 T_B라고 할 때, 이에 해당하는 matrix B를 θ를 이용하여 나타내라.
(Hint: 위에서 구한 A와 orthogonal projection을 이용하라.)



Solution:

(a) (i) For $\theta \neq 0, \pi$,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x + y/\tan\theta \\ y \end{bmatrix}$$

Therefore,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \cot\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(ii) For $\theta = 0$, we cannot define the transformation.

(b) We can compose two transformations as

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cot(\pi - \theta) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\cot\theta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$