선형대수

2012년 1학기

중간고사

서울시립대학교
컴퓨터과학부

주의사항

- **시험지는 앞/뒤로 인쇄되어 있으니 유의하시기 바랍니다.**
- 만점은 100점입니다.
- 부정행위가 발각되면 즉시 시험지가 압수되고 0점 처리 됩니다.
- "$M \in \mathbb{R}^{m\times n}$"은, M이 실수(real number)들로 구성된 $m \times n$ 크기의 matrix라는 의미입니다.
- 교재에 있는 theorem을 이용할 경우, 해당 theorem을 증명할 필요 없이 어떤 theorem인지를 밝히고 이용하여도 좋습니다.

1. $\boxed{40\text{점}}$ 두 개의 3차원 vector

$$\boldsymbol{x} := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ 와 } \boldsymbol{y} := \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

에 대해 cross product는 다음과 같이 정의된다.

$$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{bmatrix}.$$

또다른 3차원 vector

$$\boldsymbol{z} := \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

가 있다고 하자.

(a) $\boxed{10\text{점}}$ $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$는 두 vector $\boldsymbol{x}$와 $\boldsymbol{y}$에 모두 orthogonal함을 보여라. 즉, 다음을 보여라.

$$\boxed{(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) \perp \boldsymbol{x} \text{ 그리고 } (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) \perp \boldsymbol{y}.}$$

(b) $\boxed{10\text{점}}$ 다음이 성립함을 보여라.

$$\boxed{\boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{z} \cdot (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y})}$$

(c) $\boxed{10\text{점}}$ 다음이 성립함을 보여라.

$$\boxed{\boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z}) - \boldsymbol{z}(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})}$$

(d) $\boxed{10\text{점}}$ 다음이 성립함을 보여라.

$$\boxed{(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) \times (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z}))\boldsymbol{x}}$$

(Hint: 앞의 문제들의 성질을 이용하라.)

Solution:

(a)

$$(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{x} = (x_2y_3 - x_3y_2)x_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)x_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)x_3 = 0$$

and

$$(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{y} = (x_2y_3 - x_3y_2)y_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)y_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)y_3 = 0$$

(b)

$$\boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{x} \cdot \begin{bmatrix} y_2z_3 - y_3z_2 \\ y_3z_1 - y_1z_3 \\ y_1z_2 - y_2z_1 \end{bmatrix}$$
$$= x_1y_2z_3 - x_1y_3z_2 + x_2y_3z_1 - x_2y_1z_3 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1$$

On the other hand,

$$\boldsymbol{z} \cdot (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{z}$$
$$= x_2y_3z_1 - x_3y_2z_1 + x_3y_1z_2 - x_1y_3z_2 + x_1y_2z_3 - x_2y_1z_3$$

(c)

$$\boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_2z_3 - y_3z_2 \\ y_3z_1 - y_1z_3 \\ y_1z_2 - y_2z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(y_1z_2 - y_2z_1) - x_3(y_3z_1 - y_1z_3) \\ x_3(y_2z_3 - y_3z_2) - x_1(y_1z_2 - y_2z_1) \\ x_1(y_3z_1 - y_1z_3) - x_2(y_2z_3 - y_3z_2) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} y_1(x_2z_2 + x_3z_3) - z_1(x_2y_2 + x_3y_3) \\ y_2(x_1z_1 + x_3z_3) - z_2(x_1y_1 + x_3y_3) \\ y_3(x_1z_1 + x_2z_2) - z_3(x_1y_1 + x_2y_2) \end{bmatrix}$$

On the other hand,

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z}) - \boldsymbol{z}(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) = (x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} y_1(\cancel{x_1z_1} + x_2z_2 + x_3z_3) - z_1(\cancel{x_1y_1} + x_2y_2 + x_3y_3) \\ y_2(x_1z_1 + \cancel{x_2z_2} + x_3z_3) - z_2(x_1y_1 + \cancel{x_2y_2} + x_3y_3) \\ y_3(x_1z_1 + x_2z_2 + \cancel{x_3z_3}) - z_3(x_1y_1 + x_2y_2 + \cancel{x_3y_3}) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} y_1(x_2z_2 + x_3z_3) - z_1(x_2y_2 + x_3y_3) \\ y_2(x_1z_1 + x_3z_3) - z_2(x_1y_1 + x_3y_3) \\ y_3(x_1z_1 + x_2z_2) - z_3(x_1y_1 + x_2y_2) \end{bmatrix}$$

(d)

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) \times (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{z}) &= \boldsymbol{x}((\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{z}) - \boldsymbol{z}((\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{x}) && \text{(By (c))} \\ &= \boldsymbol{x}((\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{z}) && \text{(Since } (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{x} = 0 \text{ by (a))} \\ &= (\boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z}))\boldsymbol{x} && \text{(By (b))} \end{aligned}$$

2. $\boxed{40\text{점}}$ (a) $\boxed{15\text{점}}$ Matrix A_2가 다음과 같다.

$$A_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

A_2의 column vector $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$와 $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$가 linearly dependent하다면 A_2의 row vector $\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$와 $\begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix}$도 linearly dependent함을 보여라.

(b) $\boxed{25\text{점}}$ 위 성질을 일반화시켜보자.
$n \times n$ 크기의 square matrix A_n이 있다고 하자.

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

이 때, 다음 두 성질은 서로 "필요충분" 조건임을 보여라. 다시 말해, (i)이 성립하면 (ii)가 성립하고, (ii)가 성립하면 (i)이 성립함을 보여라.

(i) A_n의 column vector들인

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}$$

가 linearly dependent하다.

(ii) A_n의 row vector들인

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

가 linearly dependent하다.

(Hint: A_n에 Gaussian elimination을 적용하여 row echelon form인 R로 변형하자. 이 때, matrix R은 어떻게 생겼는가? R의 모양과 교재의 theorem들로부터 위 성질들을 유추해보라.)

Solution:

(a) Since (a, c) and (b, d) are linearly dependent,

$$c_1 \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

where $c_1 \neq 0$ or $c_2 \neq 0$. (Since at least one of c_1 and c_2 should be non-zero.) Therefore,

$$c_1 a + c_2 b = 0$$
$$c_1 c + c_2 d = 0.$$

Without loss of generality, let $c_1 \neq 0$. Then

$$A = \begin{bmatrix} -(c_2/c_1)b & b \\ -(c_2/c_1)d & d \end{bmatrix}$$

Therefore,

$$dR_1 + bR_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

where R_1 and R_2 are the first and second rows of A, respectively. This verifies that the rows of A are linearly dependent.

(b)
- (i)→(ii)
  A의 column들이 linearly dependent하다면, Theorem 2.6에 의해 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$가 nontrivial solution을 갖고 있다는 말이고, 이는 solution이 무수히 많다는 뜻이므로 하나 이상의 free variable이 존재한다는 뜻이다. 따라서 Theorem 2.2에 의해 $\text{rank}(A) < n$이고, Theorem 2.7에 의해 A의 row들은 linearly dependent하다.
- (ii)→(i)
  Theorem 2.7에 의해 $\text{rank}(A) < n$이고 이는 homogeneous linear system $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$에 free variable이 존재하고 (Theorem 2.2), homogeneous linear system은 항상 consistent하므로 solution이 무한히 많다는 뜻이다. 이 말은 nontrivial solution이 있다는 뜻이므로 Theorem 2.6에 의해 A의 column들은 linearly dependent하다.

3. $\boxed{20점}$ 2×2 크기의 matrix A가 있다.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

만약 A가 <u>**모든**</u> 2×2 크기의 matrix들과 commute한다면, 즉 <u>**임의의**</u> $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$에 대해 다음이 항상 성립한다면,

$$AB = BA$$

A의 entry들은 어떤 조건을 만족해야 하는가?

Solution: With an arbitrary matrix

$$B := \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix},$$

$$AB = \begin{bmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{bmatrix} = BA = \begin{bmatrix} ax+cy & bx+dy \\ az+cw & bz+dw \end{bmatrix}$$

Therefore

1. $ax + bz = ax + cy \to (b-c)y = 0$
   Since y is arbitrary, $b = c$.
2. $ay + bw = bx + dy \to b(x-w) = y(a-d)$
   Since y, x, and w are arbitrary, $b = 0$ and $a = d$.
3. $cx + dz = az + cw \to c(x-w) = z(a-d)$
   Since y, x, and w are arbitrary, $c = 0$ and $a = d$.
4. $cy + dw = bz + dw \to cy = bz$
   Since y and z are arbitrary, $b = c = 0$.

Threrefore, A should be of the form

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

for an arbitrary $k \in \mathbb{R}$.