선형대수

2017년 1학기

기말고사

서울시립대학교
컴퓨터과학부

주의사항

- **시험지는 앞/뒤로 인쇄되어 있으니 유의하시기 바랍니다.**
- 만점은 100 점입니다.
- 부정행위가 발각되면 즉시 시험지가 압수되고 0 점 처리 됩니다.
- 처음부터 모든 문제를 풀지 말고, 문제를 모두 훑어본 후 풀 수 있다고 생각되는 문제부터 풀 것을 권장합니다.
- 교재에 있는 theorem을 이용할 경우, 해당 theorem을 증명할 필요 없이 어떤 theorem 인지를 밝히고 이용하여도 좋습니다.
- 강의시간에 배운 범위안의 내용에만 근거해서 답변해야 합니다. 예를 들어, 아직 배우지 않은 내용을 근거로 답하는 경우, 맞더라도 감점이 됩니다.

1. $\boxed{20점}$ $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$는 subspace $W \subset \mathbb{R}^n$의 orthonormal basis이다. 이 때, 임의의 vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$를 W에 orthogonal projection하는 matrix는 다음과 같이 정의된다.

$$\mathrm{proj}_W(\mathbf{x}) = UU^T\mathbf{x}$$

위에서

$$U := \left[\begin{array}{c:c:c} \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_k \end{array} \right]$$

이다.

같은 subspace인 W의 **<u>orthonormal하지 않은 basis인</u>** $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k\}$가 있다. 이 vector들을 column으로 하는 matrix를 다음과 같이 정의하자.

$$A := \left[\begin{array}{c:c:c} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_k \end{array} \right]$$

이 때, 다음이 성립함을 보여라.

$$\mathrm{proj}_W(\mathbf{x}) = A(A^TA)^{-1}A^T\mathbf{x}$$

Solution: Since the columns of A are linearly independent, we can apply the Gramd-Schmidt procedure and obtain the QR factorization as $A = QR$. Note that $Q^TQ = I$ and R is invertible. Then,

$$\begin{aligned} A(A^TA)^{-1}A^T &= QR((QR)^TQR)^{-1}(QR)^T \\ &= QR(R^TQ^TQR)^{-1}R^TQ^T \\ &= QR(R^TR)^{-1}R^TQ^T \\ &= QRR^{-1}(R^T)^{-1}R^TQ^T \\ &= QQ^T \end{aligned}$$

Since the columns of Q are orthonormal and span (columns of Q) $= W$, the claim holds.

2. $\boxed{40\text{점}}$ 다음과 같이 matrix A가 정의되어 있다.

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

반드시 eigenvalue와 eigenvector 혹은 diagonalization을 이용하여 다음을 각각 계산하라. 만약 구할 수 없다면 왜 그런지 보여라. (아래에서 n은 positive integer 이다.)

(a) $\boxed{20\text{점}}$ $\mathbf{u}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 일 때 $A^n\mathbf{u}_1$를 구하라.

(b) $\boxed{20\text{점}}$ $\mathbf{u}_2 := \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ 일 때 $A^n\mathbf{u}_2$를 구하라.

Solution: Let the matrix be A. A is a triangular matrix. The eigenvalues are 1 (algebraic multiplicity 2) and 3 (algebraic multiplicity 1).

(i) For the eigenvalue 1.

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Therefore the solution is

$$\begin{bmatrix} t & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ hence } E_1 = \text{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

(ii) For the eigenvalue 3.

$$A - 3I = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Therefore the solution is

$$\begin{bmatrix} t/2 & t & t \end{bmatrix} = \frac{t}{2}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ hence } E_3 = \text{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$$

Therefore A is not diagonalizable.

(a) To see if $\mathbf{u}_1$ can be represented as a linear combination of the two eigenvectors, $\mathbf{v}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ and $\mathbf{v}_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, we reduce the matrix composed of the three rows.

$$\left[\begin{array}{c:c:c} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{u}_1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Since $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{x}\}$ are linearly independent, $\mathbf{u}_1$ cannot represented as a linear combination of $\mathbf{v}_1$ and $\mathbf{v}_2$. Therefore we cannot compute

$$A^n\mathbf{u}_1$$

in this way.

(b)

$$B := \left[\begin{array}{c:c:c} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{u}_2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Therefore the solution of the homogeneous linear system "$B\mathbf{x} = \mathbf{0}$" has the solution

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2t \\ -t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

and

$$B \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{u}_2 = \mathbf{0} \to \mathbf{u}_2 = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2.$$

Therefore,

$$A^n\mathbf{u}_2 = A^n(2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = 2 \cdot 1^n\mathbf{v}_1 + 3^n\mathbf{v}_2 = 2 \cdot 1^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 3^n \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3^n + 2 \\ 2 \cdot 3^n \\ 2 \cdot 3^n \end{bmatrix}$$

3. $\boxed{20\text{점}}$ 다음 matrix의 SVD(Singular Value Decomposition)를 구하라.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Solution:

$$A^TA = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det A^TA - \lambda I &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (4-\lambda)(1-\lambda)(4-\lambda) - 2\cdot 2(4-\lambda) \\ &= (4-\lambda)(4-5\lambda+\lambda^2-4) \\ &= \lambda(4-\lambda)(\lambda-5) \end{aligned}$$

(i) For the eigenvalue 5,

$$A^TA - 5I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3+2R_1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Therefore the solution of "$A^TA - 5I = \mathbf{0}$" is

$$\begin{bmatrix} 2t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} \text{ hence } E_4 = \text{span}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

(ii) For the eigenvalue 4,

$$A^TA - 4I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Therefore the solution of "$A^TA - 4I = \mathbf{0}$" is

$$\begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} \text{ hence } E_4 = \text{span}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

(iii) For the eigenvalue 0,

$$A^TA - 0I = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[(1/4)R_2]{(1/2)R_1} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3-R_1} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Therefore the solution of "$A^TA - 0I = \mathbf{0}$" is

$$\begin{bmatrix} -1/2t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = -\frac{t}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ hence } E_0 = \text{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right)$$

Now we have

$$\sigma_1 = \sqrt{5}, \sigma_2 = 2$$

and

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

hence

$$V = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 0 & -2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

And

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1} A\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sigma_2} A\mathbf{v}_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

hence

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Summing up,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 0 & -2/\sqrt{5} \end{bmatrix}^T$$

4. $\boxed{20\text{점}}$ $m \times n$ $(m \geqslant n)$ matrix A가 있고, $\mathrm{rank}(A) = n$이다. 또한 A의 SVD는 다음과 같다.

$$A = U\Sigma V^T$$

이 때, A의 left pseudoinverse는 다음과 같다.

$$A_1^+ := (A^T A)^{-1} A^T$$

또한, SVD를 이용한 pseudoinverse는 다음과 같다.

$$A_2^+ := V\Sigma^+ U^T.$$

위에서 Σ와 Σ^+는 다음과 같다. ($O_{\alpha\times\beta}$는 크기가 $\alpha \times \beta$이고 0으로 이루어진 matrix 이고, $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$은 A의 singular values이다.)

$$\Sigma = \left[\begin{array}{ccc} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n \\ \hdashline & O_{(m-n)\times n} & \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

$$\Sigma^+ = \left[\begin{array}{ccc:c} 1/\sigma_1 & & & \\ & \ddots & & O_{n\times(m-n)} \\ & & 1/\sigma_n & \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

이 때 다음을 증명하라.

$$A_1^+ = A_2^+$$

Solution: Let

$$A^T A = QDQ^T$$

be the orthogonal diagonalization of $A^T A$ and let

$$A = U\Sigma V^T$$

be the SVD of A. By definition,

$$D = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \text{ and } V = Q$$

Then,

$$\begin{aligned}
A_1^+ &= (A^TA)^{-1}A^T \\
&= (QDQ^T)^{-1}V\Sigma^TU^T \\
&= QD^{-1}Q^TQ\Sigma^TU^T \\
&= QD^{-1}\Sigma^TU^T \\
&= Q\begin{bmatrix} 1/\sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/\sigma_n^2 \end{bmatrix}\left[\begin{array}{ccc:c} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & O_{n\times(m-n)} \\ & & \sigma_n & \end{array}\right]U^T \\
&= Q\left[\begin{array}{ccc:c} 1/\sigma_1 & & & \\ & \ddots & & O_{n\times(m-n)} \\ & & 1/\sigma_n & \end{array}\right]U^T \\
&= V\Sigma^+U^T \\
&= A_2^+
\end{aligned}$$