

Homework #2

Mathematical Models for Engineering Problems and Differential Equations
School of Computer Science
University of Seoul

- Exercise 15A, #10. (p.125)

두 탱크 A,B에 각각 5000갤런의 물이 들어 있다. 각각의 탱크에 150갤런씩의 화학약품을 넣어야 하는데, 실수로 300갤런을 A에 모두 넣어버렸다. 그래서 펌프를 설치하여 두 탱크 간에 100갤런/분의 속도로 액체가 순환되도록 하였다. (그림 15.14)

- (a) 얼마의 시간이 흐른 후에 탱크 A에 200갤런, 탱크 B에 100갤런의 화학약품이 들어 있겠는가?
- (b) (펌프를 계속 작동시켰을 때) 이론적으로 각각의 탱크에 150갤런씩의 화학약품이 들어있는 상태가 되는 것이 가능한가?

- Exercise 15D, #10. (p.133)

개체수가 N_0 인 박테리아 배양균이 있다. 자연적인 상태에서, 이 배양균은 $4 \log 2$ 일(days)이 지난 후 개체수가 두 배가 된다. (자연적인 상태로 두지 않고) 일정한 비율(R /일)로 이 배양균으로부터 박테리아를 추출할 때, 박테리아 개체수를 시간에 대한 함수로 나타내라. 또한, $R < N_0/4$ 일 때는 개체수가 증가하고, $R = N_0/4$ 일 때는 개체수에 변화가 없고, $R > N_0/4$ 일 때는 개체수가 감소함을 보여라.

- Exercise 15E, #9. (p.137)

10파운드의 습기(moisture)가 포함된 물질이 밀폐된 방 안에 있다. 이 방의 부피는 2000입방피트($2000 ft^3$)이고, 포화상태에서의 습도는 입방피트 당 0.015 파운드이다. 맨 처음 공기의 상대적인 습도는 30 퍼센트였다. 만약 한 시간 후에 이 물질로부터 4 파운드의 습기가 빠져나간다면, 이 물질이 갖고 있는 습기의 80 퍼센트가 빠져나가려면 얼마의 시간이 지나야 하겠는가? 이 물질로부터 습기가 빠져나가는 비율이, 현재 이 물질에 포함된 습기의 양과 공기에 포함된 습기의 양의 차이에 비례한다고 가정하라.

- Exercise 16A, #39. (p.156)

- (a) 다음을 증명하라.: 만약 한 입자(particle)가 지구의 중심과 달의 중심을 이은 직선의 $1/9$ 쯤 되는 거리에 놓여졌다면 (그림 16.392) 이 입자는 움직이지 않는다. 즉, 이 지점에서 달이 끌어당기는 힘과 지구가 끌어당기는 힘은 서로 같다. 달의 질량은 지구의 질량의 $1/81$

이라고 가정하라. 힌트: 식 (16.32)를 달과 지구에 모두 적용하고, 두 힘이 같을 때의 식을 고려하라.

- (b) 지구와 달의 인력(gravitational attraction)을 모두 고려하여, 지구로부터 (정지해 있는) 달을 향해 하나의 입자(particle)를 쏘았을 때 이 입자가 움직이는 경로의 미분방정식을 만들어라. 시간이 $t = 0$ 이고 속도가 $v = v_0$ 인 조건에 대해 이 미분방정식을 풀어라. 이 때, 지구로부터 달로의 방향을 양(positive)의 방향으로 잡고, 지구의 중심을 원점(origin)으로 잡아라.
- (c) 위의 (a)에서 고려한 중립지점(neutral point)에 도달하려면 입자를 어떤 초기속도로 쏘아야 하겠는가? (힌트: (b)에서 구한 속도방정식에서 거리가 $r = \frac{9}{10}D$ 일 때 속도가 $v = 0$ 이 되는 경우를 고려하라.) 이 때, $R_m^2 = 6R^2/81$ (R_m 은 달의 반지름), $D = 61R + R/4$, 그리고 $g_m = g/6$ (g_m 은 달의 인력으로 인한 가속도) 라고 가정한다. 달의 인력이 미치는 미묘한 영향에 주의하라.
- (d) 입자가 달에 도달하려면 얼마의 초기속도로 쏘아야 하겠는가?

• Exercise 17B, #6. (p.176)

한 소년이 그림 17.34의 A지점에 서 있다. 소년은 호수에 떠있는 B지점에 있는 보트와 연결된 길이가 l 피트인 밧줄을 잡고 있다. 소년은 밧줄을 팽팽하게 유지한 채로 직선 AB와 수직인 방향으로 (X를 향해) 걷기 시작했다. 이 때 보트의 경로를 나타내는 수식을 찾아라. 이 때, 지표면 위에서 소년의 키는 무시하고, 밧줄은 항상 보트의 경로에 접한다(tangent)고 가정하라. 참고로, 이러한 곡선을 tractrix라고 한다. (힌트: tractrix의 기울기는 $\tan \theta = dy/dx$ 이다.)