선형대수

2014년 1학기

기말고사

서울시립대학교
컴퓨터과학부

주의사항

- **시험지는 앞/뒤로 인쇄되어 있으니 유의하시기 바랍니다.**
- 만점은 100점입니다.
- 부정행위가 발각되면 즉시 시험지가 압수되고 0점 처리 됩니다.
- 처음부터 모든 문제를 풀지 말고, 문제를 모두 훑어본 후 풀 수 있다고 생각되는 문제부터 풀 것을 권장합니다.
- 교재에 있는 theorem을 이용할 경우, 해당 theorem을 증명할 필요 없이 어떤 theorem 인지를 밝히고 이용하여도 좋습니다.
- 강의시간에 배운 범위안의 내용에만 근거해서 답변해야 합니다. 예를 들어, 아직 배우지 않은 내용을 근거로 답하는 경우, 맞더라도 감점이 됩니다.

1. $\boxed{10\text{점}}$ $n \times n$ matrix A의 eigenvalue가 (중복을 고려하였을 때) 다음과 같다고 하자.

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n.$$

Real number c에 대해, 다음 matrix의 eigenvalue를 모두 구하라. (I는 identity matrix 이다.)

$$A + cI$$

Solution: The characteristic equation of $A + cI$ is

$$\det A + cI - \mu I = \det A - (\mu - c)I = 0.$$

Since $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ are the roots of the characteristic polynomial

$$\det A - \lambda I = 0,$$

the eigenvalues of $A + cI$ are

$$\mu_i = \lambda_i + c, \quad i = 1, \ldots, n.$$

2. $\boxed{20점}$ 다음과 같이 column vector $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$가 정의되어 있다.

$$\mathbf{u} := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} := \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

또한 3×3 matrix A가 다음과 같이 정의되어 있다.

$$A := \mathbf{u}\mathbf{v}^T$$

Hint
3번 문제가 본 문제를 generalization한 것이다. 3번 문제의 Hint도 도움이 될 수 있다.

(a) $\boxed{10점}$ A의 eigenvalue를 (중복 회수를 포함하여) 모두 구하고, 각 eigenvalue의 eigenspace를 각각 구하라.

Hint 이 문제는 복잡한 계산을 거쳐서 풀 수도 있지만, 다음을 근거로 하여 eigenvector와 eigenvalue를 쉽게 찾을 수 있다.
Nonzero vector $\mathbf{x}$가 A의 eigenvector이면, 다음 중 하나가 성립한다.

- $A\mathbf{x}$와 $\mathbf{x}$가 parallel하다. (방향이 바뀌지 않는다.)
- $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$이다. 이 때 eigenvalue는 0이다.

(b) $\boxed{10점}$ A의 singular value를 모두 구하라. (중복되는 경우 중복된 회수도 명시하라.)

Hint A^TA가 어떤 matrix인가 (혹은 어떤 matrix와 비슷한가) 살펴보라. 위 Hint를 근거로 A^TA의 eigenvalue 및 eigenvector를 쉽게 구할 수 있을 것이다.

Solution:

(a) 모든 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$에 대해,

$$A\mathbf{x} = \mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{x} = \mathbf{u}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{x})$$

이다. 따라서

(i) $\mathbf{x} = \mathbf{u}$이면 $A\mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}$이므로 eigenvalue $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$를 갖고,

(ii) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = 0$이면 eigenvalue 0을 갖는다.

각각을 고려해 보자.

(i) Eigenvalue $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$의 경우, 위 관계에 의해

$$E_{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}} = \operatorname{span}(\mathbf{u}).$$

(ii) Eigenvalue 0의 경우, $\mathbf{v}$에 orthogonal한 모든 vector가 eigenvector가 된다. 따라서

$$E_0 = (\operatorname{span}(\mathbf{v}))^{\perp}.$$

E_0의 basis를 구하려면 아래 homogeneous linear system을 풀면 된다.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

좀 더 간단하게 구하기 위해서는, $\mathbf{v}$에 orthogonal하고 서로 parallel하지 않은 두 vector를 구하면 된다. 예를 들면 아래 두 vector가 이에 해당된다.

$$E_0 = \text{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

(b)

$$A^T A = \mathbf{v}\mathbf{u}^T\mathbf{u}\mathbf{v}^T = \mathbf{v}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})\mathbf{v}^T = \|\mathbf{u}\|^2(\mathbf{v}\mathbf{v}^T)$$

이때 $\mathbf{y} := \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$라고 하면 (즉, $\mathbf{v}$를 normalization한 vector를 $\mathbf{y}$라고 하면)

$$A^T A = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2(\mathbf{y}\mathbf{y}^T)$$

위에서 $P := \mathbf{y}\mathbf{y}^T$라고 하자. 이 때 P는 임의의 vector를 $\mathbf{y}$에 projection하는 matrix를 나타낸다. 따라서 P의 eigenvalue는 1과 0이고, 따라서 $A^T A$의 eigenvalue는 $\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2$ 과 0이다. 따라서 A의 singular value는

$$\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| = \sqrt{14}\sqrt{6} = 2\sqrt{21}, 0, 0$$

이다.

3. $\boxed{30점}$ 위 문제를 임의의 dimension으로 generalization하여 보자. 즉, 서로 parallel하지 않은 두 vector

$$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$$

에 의해 $n \times n$ matrix A가 다음과 같이 정의되었다.

$$A := \mathbf{u}\mathbf{v}^T.$$

이 때 다음을 각각 구하라.

(a) $\boxed{10점}$ A의 eigenvalue를 (중복 회수를 포함하여) 모두 구하고, 각 eigenvalue의 eigenspace를 각각 구하라. (Eigenspace의 basis를 구하기 힘든 경우, basis를 구할 필요는 없고 구체적으로 어떠한 subspace인지를 기술하라.)

Hint Orthogonal complement의 개념을 활용하라.

(b) $\boxed{10점}$ A는 diagonalizable한가? 구체적인 이유를 기술하라.

Hint Orthogonal complement의 dimension 성질을 활용하라.

(c) $\boxed{10점}$ A의 singular value를 모두 구하라. (중복되는 경우 중복된 회수도 명시하라.)

Solution:

(a) By the discussion of the previous question, we have two eigenvalues $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ (multiplicity 1) and 0 (multiplicity $n-1$). The eigenspaces are

$$E_{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}} = \operatorname{span}(\mathbf{u})$$

and

$$E_0 = (\operatorname{span}(\mathbf{v}))^{\perp}.$$

(b) In the previous part, the geometric multiplicity of the eigenvalue $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ is 1. Let

$$W := \operatorname{span}(\mathbf{v}).$$

then, since

$$\dim W + \dim W^{\perp} = n,$$

the geometric multiplicity of the eigenvalue $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, $\dim W^{\perp}$, is $n-1$. Since the geometric multiplicities of all the eigenvalues are the same with their algebraic multiplicities, A is diagonalizable.

(c) By the discussion of the previous question, the singular values of A are $\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$ (multiplicity 1) and 0 (multiplicity $n-1$).

4. $\boxed{20\text{점}}$ 다음 문장이 맞는지 틀린지 답하고, 본인의 답을 증명하라. (답이 맞더라도 증명을 하지 않거나 틀리면 많은 감점이 됨)

"임의의 square matrix A에 대해, $\text{rank}(A)$는 A의 nonzero eigenvalue의 수와 같다."

> **Hint** $\text{rank}(A^T A)$와 $\text{rank}(A)$의 관계 및 similar한 두 matrices의 rank 관계를 활용하라.

Solution: No. Here's a counter example:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A의 eigenvalues는 0 (multiplicity 2)이므로 nonzero eigenvalue의 수는 0이다. 하지만 $\text{rank}(A) = 1$이다. (A는 이미 row echelon form이므로 $\text{rank}(A)$는 A의 nonzero row의 수와 같다.)

5. $\boxed{20\text{점}}$ Real symmetric matrix의 경우, SVD (singular value decomposition)한 결과가 diagonalization한 결과와 같음을 보여라. 즉, Real symmetric matrix A의 경우 다음과 같이 SVD하였을때와

$$A = U\Sigma V^T$$

다음과 같이 diagonalization하였을 때,

$$A = PDP^{-1}$$

다음이 성립함을 보여라.

$$U = P, \quad \Sigma = D, \quad \text{그리고} \quad V^T = P^{-1}.$$

Solution: Since A is real symmetric, it is orthogonally diagonalized as follows.

$$A = PDP^{-1} = PDP^T.$$

Let $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ are the eigenvalues of A with corresponding eigenvectors $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$.

(i) Since $A^TA = A^2$, the eigenvalues of A^TA are $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$ with the same eigenvectors. Therefore the singular values of A are

$$\sigma_i = \lambda_i$$

and $D = \Sigma$.

(ii) The columns of V are the eigenvectors of A^TA. Since A and A^TA share the same eigenvectors, $V = P$.

(iii) Let $U = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_n \end{bmatrix}$. Since

$$\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sigma_i} A\mathbf{v}_i = \frac{1}{\lambda_i}\lambda_i \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i,$$

$U = P$.