선형대수

2010년 1학기

중간고사

서울시립대학교
컴퓨터과학부

주의사항

- 부정행위가 발각되면 즉시 시험지가 압수되고 0점처리 됩니다.
- 각 문제를 해결하는 방법은 간단하고 빠른 방법부터 복잡하고 시간이 오래 걸리는 방법까지, 여러 가지 방법이 있을 수 있습니다. 문제를 잘 이해해서 효율적인 방법으로 문제를 해결하시기 바랍니다.
- 수식이 아닌 서술형으로 답할 수 있는 경우, 서술형으로 답하여도 상관 없습니다.
- "$M \in \mathbb{R}^{m \times n}$"은, M이 실수(real number)들로 구성된 $m \times n$ matrix라는 의미입니다.

1. $\boxed{110점}$ 다음과 같은 형태의 $n \times n$ square matrix를 unit lower triangular matrix라고 한다. ($*$는 임의의 값을 표시한다.)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & \cdots & 1 & 0 \\ * & * & \cdots & * & 1 \end{bmatrix}$$

다시 말해, unit lower triangular matrix는 다음과 같은 특성을 갖는다.

1. 모든 diagonal (대각선에 있는) entry가 1이다.
2. Diagonal entry들보다 위에 있는 모든 entry들은 0이다.
3. Diagonal entry들보다 아래에 있는 entry는 임의의 값을 갖는다.

또다른 두가지 정의는 다음과 같다:

- i번째 행(row)에서, $(1 \leq i \leq n)$
  1. 처음 $i-1$개의 entry는 임의의 값을 갖고,
  2. i번째 entry는 1이고,
  3. 마지막 $n-i$개의 entry는 0이다.

혹은

- j번째 열(column)에서, $(1 \leq j \leq n)$
  1. 처음 $j-1$개의 entry는 0이고,
  2. j번째 entry는 1이고,
  3. 마지막 $n-j$개의 entry는 임의의 값을 갖는다

(a) $\boxed{5점}$ Gauss-Jordan method를 사용하여 다음과 같이 정의된 unit lower triangular matrix A_2의 inverse matrix를 구하라.

$$A_2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{21} & 1 \end{bmatrix}$$

(b) $\boxed{10점}$ Gauss-Jordan method를 사용하여 다음과 같이 정의된 unit lower triangular matrix A_3의 inverse matrix를 구하라.

$$A_3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

(c) $\boxed{30점}$ Unit lower triangular matrix는 항상 invertible함을 증명하라.

(d) $\boxed{30점}$ Unit lower triangular matrix의 inverse matrix는 항상 unit lower triangular matrix임을 증명하라.

(e) $\boxed{15점}$ 위 문제 (b)의 A_3는 문제 (a)의 A_2를 이용해 다음과 같은 partitioned matrix (block matrix)로 정의할 수 있다.

$$A_3 := \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} A_2 & \mathbf{0}_2 \\ \hdashline \mathbf{a}_2 & 1 \end{array}\right]$$

위에서 $\mathbf{0}_2$와 $\mathbf{a}_2$는 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{0}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 := \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

문제 (d)에 의해 A_3^{-1} 역시 unit lower triangular matrix이므로, 다음과 같은 block matrix로 나타낼 수 있다.

$$A_3^{-1} = \left[\begin{array}{c:c} B_2 & \mathbf{0}_2 \\ \hdashline \mathbf{b}_2 & 1 \end{array}\right]$$

(위에서 B_2는 2×2 unit lower triangular matrix이고 $\mathbf{b}_2 \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ 이다.)
이 때 B_2와 $\mathbf{b}_2$를 각각 A_2, A_2^{-1}, $\mathbf{a}_2$를 이용해서 나타내고, 앞의 (a)와 (b)의 결과를 대입해서 검증해 보라.

(f) $\boxed{20점}$ 위의 문제 (e)를 임의의 크기 n으로 일반화시켜 보자.
A_n을 $n \times n$ unit lower triangular matrix라고 하자. 이 때 $\mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^{1\times n}$과 $\mathbf{0}_n \in \mathbb{R}^{n\times 1}$을 이용하면, $(n+1)\times(n+1)$ unit lower triangular matrix를 다음과 같은 block matrix (partitioned matrix)로 정의할 수 있다.

$$A_{n+1} := \left[\begin{array}{c:c} A_n & \mathbf{0}_n \\ \hdashline \mathbf{a}_n & 0 \end{array}\right]$$

이 때 A_{n+1}^{-1}를 A_n, A_n^{-1}, $\mathbf{a}_n$, $\mathbf{0}_n$ 등을 이용한 block matrix로 나타내라.

Solution:

(a)

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - a_{21}R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -a_{21} & 1 \end{array}\right]$$

Therefore,

$$A_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a_{21} & 1 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{R_2 - a_{21}R_1 \\ R_3 - a_{31}R_1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a_{21} & 1 & 0 \\ 0 & a_{32} & 1 & -a_{31} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 - a_{32}R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a_{21} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a_{31}+a_{21}a_{32} & -a_{32} & 1 \end{array}\right]$$

Therefore,

$$A_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a_{21} & 1 & 0 \\ -a_{31} + a_{21}a_{32} & -a_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

(c) 다음과 같이 unit lower triangular matrix M의 각 column의 linear combination을 고려해 보자.

$$\mathbf{y} = x_1 M(:,1) + x_2 M(:,2) + \cdots + x_n M(:,n)$$

$\mathbf{y}$의 첫번째 entry의 값은 $M(1,1)$이고, 따라서 $\mathbf{y} = \mathbf{0}$가 성립하기 위해서는 $x_1 = 0$이어야 한다. 마찬가지로, $x_2 = 0$이므로 $\mathbf{y}$의 두번째 entry의 값이 0이 되기 위해서는 $x_2 = 0$이어야 한다. 이러한 과정을 거치면 결국 $\mathbf{y} = \mathbf{0}$가 되기 위한 조건은 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$이고, 따라서 M의 각 column은 linearly independent하다. Fundamental theorem에 의해, M은 invertible하다.

(d) 편의를 위해, matrix M의 i번째 행(row), j번째 열(column)의 entry를 $M(i,j)$라고 표기하자.

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$가 unit lower triangular matrix라고 할 때, 같은 크기의 임의의 matrix B와의 곱을 C라고 하자. Matrix multiplication의 정의에 의해,

$$C(i,j) = \sum_{k=1}^{n} A(i,k)B(k,j) = \sum_{k=1}^{i-1} A(i,k)B(k,j) + A(i,i)B(i,i) + \sum_{k=i+1}^{n} A(i,k)B(k,j)$$

이다. 이 때 C의 diagonal entry인 $C(i,i)$의 값을 살펴보자 A가 unit lower triangular matrix이므로 $A(i,i) = 1$이고 $A(i,i+1) = A(i,i+2) = \cdots = A(i,n) = 0$이다. 따라서 다음과 같은 방정식(equation)을 얻을 수 있다.

$$C(i,i) = B(i,i) + \sum_{k=1}^{i-1} A(i,k)B(k,i) = 1$$

위 방정식이 임의의 값 $A(i,1), A(i,2), \cdots, A(i,i-1)$에 대해 성립하려면, 다음과 같은 solution을 가져야 한다

$$B(i,i) = 1 \quad \text{그리고} \quad B(1,i) = B(2,i) = \cdots = B(i-1,i) = 0.$$

문제의 정의에 의해, 이러한 성질을 만족하는 matrix는 unit lower triangular matrix이다.

(e) $A_3 A_3^{-1} = I_3$이므로,

$$A_3 A_3^{-1} = \left[\begin{array}{c:c} A_2 & \mathbf{0}_2 \\ \hdashline \mathbf{a}_2 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c:c} B_2 & \mathbf{0}_2 \\ \hdashline \mathbf{b}_2 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} A_2 B_2 + \mathbf{0}_2 \mathbf{b}_2 & A_2 \mathbf{0}_2 + \mathbf{0}_2 \cdot 1 \\ \hdashline \mathbf{a}_2 B_2 + 1 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_2 \mathbf{0}_2 + 1 \cdot 1 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c:c} A_2 B_2 & \mathbf{0}_2 \\ \hdashline \mathbf{a}_2 B_2 + \mathbf{b}_2 & 1 \end{array}\right] = I_3 = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} I_2 & 0 \\ \hdashline 0 & 1 \end{array}\right]$$

따라서

$$A_2B_2 = I_2 \to B_2 = A_2^{-1}$$
$$\mathbf{a}_2B_2 + \mathbf{b}_2 = 0 \to \mathbf{b}_2 = -\mathbf{a}_2B_2 = -\mathbf{a}_2A_2^{-1}$$

이다.

(f)

$$A_{n+1}^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} A_n^{-1} & \mathbf{0}_n \\ \hline -\mathbf{a}_nA_n^{-1} & 1 \end{array}\right]$$

2. $\boxed{70점}$ $\mathbf{n} := \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$에 orthogonal하고 원점(origin)을 지나는 평면(plane)을 $\mathscr{P}_{\mathbf{n}}$라고 하자. ($\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$) $\mathbb{R}^3$의 임의의 vector를 $\mathscr{P}_{\mathbf{n}}$으로 projection하는 transformation

$$P_{\mathbf{n}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

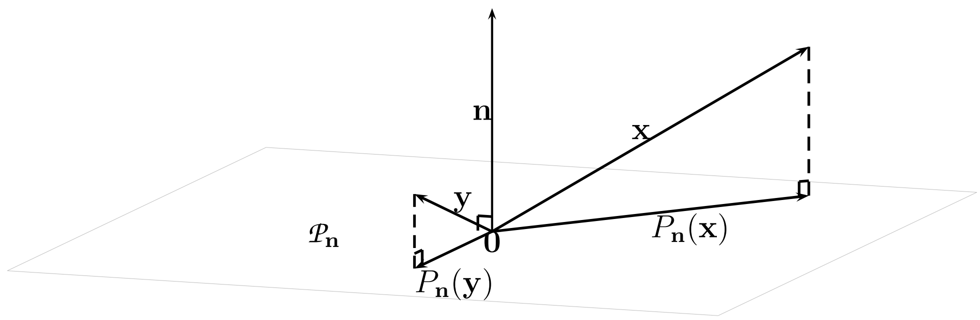
를 고려해 보자. (아래 그림 참조) 이 때, $P_{\mathbf{n}}$의 standard matrix를 $M_{\mathbf{n}}$라고 하자. (즉, $M_{\mathbf{n}} := [P_{\mathbf{n}}]$)

(a) $\boxed{10점}$ $M_{\mathbf{n}}$은 invertible matrix인가? 본인의 답의 근거를 제시하라.

(b) $\boxed{15점}$ $\text{rank}(M_{\mathbf{n}})$을 구하라.

(c) $\boxed{15점}$ $\text{col}(M_{\mathbf{n}})$의 모든 vector들은 $\text{null}(M_{\mathbf{n}}^T)$의 모든 vector들과 orthogonal함을 보여라.

(d) $\boxed{30점}$ $\text{null}(M_{\mathbf{n}}^T)$의 basis를 구하라.



Solution:

Method #1

(a)

(b) $P_{\mathbf{n}}$에 의해 모든 vector들이 $\mathscr{P}_{\mathbf{n}}$으로 projection되므로, $\mathscr{P}_{\mathbf{n}}$는 $P_{\mathbf{n}}$의 range이다. $P_{\mathbf{n}}$의 range는 $\text{col}(M_{\mathbf{n}})$와 같고, $\text{rank}(M_{\mathbf{n}}) = \dim \text{col}(M_{\mathbf{n}})$이므로,

$$\text{rank}(M_{\mathbf{n}}) = 2$$

(c) $\text{col}(M_{\mathbf{n}})$에 속한 임의의 column vector는 $M_{\mathbf{n}}\mathbf{x}$ ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$) 로 표현된다. 또한 $\text{null}(M_{\mathbf{n}}^T)$에 속한 임의의 column vector를 $\mathbf{y}$라고 할 때, $M_{\mathbf{n}}^T\mathbf{y} = \mathbf{0}$가 성립한다. 따라서 $M_{\mathbf{n}}\mathbf{x} \in \text{col}(M_{\mathbf{n}})$와 $\mathbf{y} \in \text{null}(M_{\mathbf{n}}^T)$의 dot product는 다음과 같이 계산된다.

$$\mathbf{y} \cdot (M_{\mathbf{n}}\mathbf{x}) = \mathbf{y}^T(M_{\mathbf{n}}\mathbf{x}) = (\mathbf{y}^T M_{\mathbf{n}})\mathbf{x} = (M_{\mathbf{n}}^T\mathbf{y})^T\mathbf{x} = \mathbf{0}^T\mathbf{x} = 0$$

따라서 $M_{\mathbf{n}}\mathbf{x}$와 $\mathbf{y}$는 orthogonal하다.

(d) 문제 (c)에 의해, $\text{col}(M_{\mathbf{n}})$의 모든 vector, 즉 $\mathscr{P}_{\mathbf{n}}$의 모든 vector는 $\text{null}(M_{\mathbf{n}}^T)$의 벡터들과 orthogonal하다. 그런데 정의에 의해 $\mathscr{P}_{\mathbf{n}}$는 $\mathbf{n}$에 orthogonal하므로,

$$\text{null}(M_{\mathbf{n}}) = \text{span}\,\{\mathbf{n}\}$$

Method #2

$M_{\mathbf{n}}$은 다음과 같이 계산할 수 있다.

그림에 의하면, $\mathbf{x} - P_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$와 $\mathbf{n}$이 평행하므로, $P_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + c\mathbf{n}$이다. ($c$는 상수) 그런데 $P_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$와 $\mathbf{n}$이 orthogonal하므로, 이를 standard unit vector인 $\mathbf{e}_1$에 적용하면

$$(\mathbf{e}_1 + c\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1 + c_1 n_1 \\ c_1 n_2 \\ c_1 n_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = n_1 + c_1(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) = n_1 + c_1\|\mathbf{n}\|^2 = 0$$

따라서

$$c_1 = -\frac{n_1}{\|\mathbf{n}\|^2} \quad \text{이고} \quad P_{\mathbf{n}}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 - \frac{n_1}{\|\mathbf{n}\|^2}\mathbf{n}$$

이다. 같은 방법을 나머지 standard unit vector들에 적용하면,

$$P_{\mathbf{n}}(\mathbf{e}_k) = \mathbf{e}_k - \frac{n_k}{\|\mathbf{n}\|^2}\mathbf{n}, \quad 1 \le k \le 3$$

이고 따라서

$$M_{\mathbf{n}} = \left[\, P_{\mathbf{n}}(\mathbf{e}_1) \,\vdots\, P_{\mathbf{n}}(\mathbf{e}_2) \,\vdots\, P_{\mathbf{n}}(\mathbf{e}_3) \,\right] = \frac{-1}{\|\mathbf{n}\|^2} \begin{bmatrix} n_1^2 - \|\mathbf{n}\|^2 & n_1 n_2 & n_3 n_1 \\ n_1 n_2 & n_2^2 - \|\mathbf{n}\|^2 & n_2 n_3 \\ n_3 n_1 & n_2 n_3 & n_3^2 - \|\mathbf{n}\|^2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{-1}{\|\mathbf{n}\|^2} \begin{bmatrix} -(n_2^2 + n_3^2) & n_1 n_2 & n_3 n_1 \\ n_1 n_2 & -(n_1^2 + n_3^2) & n_2 n_3 \\ n_3 n_1 & n_2 n_3 & -(n_1^2 + n_2^2) \end{bmatrix}$$

이다. Gauss-Jordan elimination을 적용하면,

$$\begin{bmatrix} -(n_2^2 + n_3^2) & n_1 n_2 & n_3 n_1 \\ n_1 n_2 & -(n_1^2 + n_3^2) & n_2 n_3 \\ n_3 n_1 & n_2 n_3 & -(n_1^2 + n_2^2) \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1/(-n_2^2 - n_3^2) \\ R_2 - n_1 n_2 R_1 \\ R_3 - n_3 n_1 R_1}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{n_1 n_2}{n_2^2 + n_3^2} & -\frac{n_3 n_1}{n_2^2 + n_3^2} \\ 0 & -\frac{n_3^2\|\mathbf{n}\|^2}{n_2^2 + n_3^2} & \frac{n_2 n_3\|\mathbf{n}\|^2}{n_2^2 + n_3^2} \\ 0 & \frac{n_2 n_3\|\mathbf{n}\|^2}{n_2^2 + n_3^2} & -\frac{n_2^2\|\mathbf{n}\|^2}{n_2^2 + n_3^2} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_2/(-\frac{n_3^2\|\mathbf{n}\|^2}{n_2^2+n_3^2}) \\ R_1 + \frac{n_1 n_2}{n_2^2+n_3^2} R_2 \\ R_3 - \frac{n_2 n_3\|\mathbf{n}\|^2}{n_2^2+n_3^2}}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -n_1/n_3 \\ 0 & 1 & -n_2/n_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

따라서

(a) $M_{\mathbf{n}}$ is not invertible.

(b) $\text{rank}(M_{\mathbf{n}}) = 2$

(d) By the reduced row echelon form, we can find the solution of the homogeneous system $M_{\mathbf{n}}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ as follows:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{n_1}{n_3}x_3 \\ x_2 &= \frac{n_2}{n_3}x_3 \\ x_3 &= x_3 \end{aligned}$$

With the free parameter $x_3 = t$,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{n_1}{n_3}t \\ \frac{n_2}{n_3}t \\ t \end{bmatrix} = \frac{1}{n_3}\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} t$$

therefore

$$\text{null}(M_{\mathbf{n}}) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \right\}.$$

(This can be vertified since $M_{\mathbf{n}} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ and $\text{nullity}(M_{\mathbf{n}}) = 3 - \text{rank}(M_{\mathbf{n}}) = 1$.)