

선형대수

2014년 1학기

중간고사

서울시립대학교
컴퓨터과학부

주의사항

- 시험지는 앞/뒤로 인쇄되어 있으니 유의하시기 바랍니다.
- 만점은 100 점입니다.
- 부정행위가 발각되면 즉시 시험지가 압수되고 0점 처리 됩니다.
- 처음부터 모든 문제를 풀지 말고, 문제를 모두 훑어본 후 풀 수 있다고 생각되는 문제부터 풀 것을 권장합니다.
- 교재에 있는 theorem을 이용할 경우, 해당 theorem을 증명할 필요 없이 어떤 theorem 인지를 밝히고 이용하여도 좋습니다.
- 강의시간에 배운 범위안의 내용에만 근거해서 답변해야 합니다. 예를 들어, 아직 배우지 않은 내용을 근거로 답하는 경우, 맞더라도 감점이 됩니다.

1. 80점 3차원 공간상의 unit vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ 가 다음과 같이 정의되어 있다.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

(주의: \mathbf{u} 는 unit vector이므로 a, b, c 가 모두 0이 될 수는 없다. 하지만 셋 중 하나 혹은 둘은 0이 될 수 있음을 명심하라.)

3×3 matrix A 는 다음과 같이 정의되어 있다.

$$A = \mathbf{u}\mathbf{u}^T.$$

또한, A 의 세 column을 각각 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 라고 하자. 즉,

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & & \\ \hline \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \\ \hline & & \end{array} \right]$$

- (a) 10점 임의의 vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ 를 \mathbf{u} 에 projection하는 transformation인 $\text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ 를 생각해 보자. 이러한 transformation은 위 matrix A 에 의해 표현될 수 있음을 보여라. 즉, \mathbf{x} 를 column vector로 표현할 경우, 다음 equality가 성립함을 보여라.

$$\text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

- (b) 15점 A 는 invertible한가? invertible한 경우 inverse matrix를 구하고, 그렇지 않을 경우 invertible하지 않음을 증명하라.
- (c) 15점 $\text{rank}(A)$ 를 구하라.
- (d) 10점 $\text{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ 를 구체적으로 구하라.
- (e) 10점 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 는 linearly independent한가? 본인의 답변을 증명하라.
- (f) 20점 A 의 $P^T LU$ factorization을 구하라.

Solution:

(a)

$$A\mathbf{x} = \mathbf{u}\mathbf{u}^T\mathbf{x} = \mathbf{u}(\mathbf{u}^T\mathbf{x}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{x})\mathbf{u}$$

$$\text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \right) \mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{x})\mathbf{u}$$

(b) 다음과 같은 linear system을 생각해 보자. ($\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$)

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$A\mathbf{x}$ 는 \mathbf{x} 를 \mathbf{u} 에 projection하여 얻은 vector이므로 항상 \mathbf{u} 와 평행하다. 따라서 \mathbf{b} 가 \mathbf{u} 와 평행하지 않을 경우 위 linear system은 solution을 가질 수 없다. 그러므로 fundamental theorem에 의해 A 는 invertible하지 않다.

(c) 아래 (f)에 의해 $\text{rank}(A) = 1$.

(d) 임의의 vector $\mathbf{x} = (x, y, z)$ 에 대해,

$$x\mathbf{a}_1 + y\mathbf{a}_2 + z\mathbf{a}_3 = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{u}(\mathbf{u}^T \mathbf{x})$$

따라서

$$\text{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = k\mathbf{u}, \quad k \in \mathbb{R}$$

(e) (f)에 의해, homogeneous linear system

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

는 nontrivial solution을 갖는다. 따라서 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 는 linearly dependent하다.

(f)

$$A = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{bmatrix}$$

• $a \neq 0$ 일 경우

$$A \xrightarrow{R_2 - (b/a)R_1} \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ ac & bc & c^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - (c/a)R_1} \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

따라서

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b/a & 1 & 0 \\ c/a & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

• $b \neq 0$ 일 경우

$$A \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} ab & b^2 & bc \\ a^2 & ab & ac \\ ac & bc & c^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - (a/b)R_1} \begin{bmatrix} ab & b^2 & bc \\ 0 & 0 & 0 \\ ac & bc & c^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - (c/b)R_1} \begin{bmatrix} ab & b^2 & bc \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

따라서

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a/b & 1 & 0 \\ c/b & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ab & b^2 & bc \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

• $c \neq 0$ 일 경우

$$A \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} ac & bc & c^2 \\ ab & b^2 & bc \\ a^2 & ab & ac \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - (b/c)R_1} \begin{bmatrix} ac & bc & c^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ a^2 & ab & ac \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - (a/c)R_1} \begin{bmatrix} ac & bc & c^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

따라서,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b/c & 1 & 0 \\ a/c & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ac & bc & c^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. 20점 n 개의 n -dimensional unit vector가 있다.

$$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \in \mathbb{R}^n.$$

모든 vector들은 서로 orthogonal하다. 즉, 임의의 서로 다른 두 vector \mathbf{u}_i 와 $\mathbf{u}_j (i \neq j)$ 는 서로 orthogonal하다.

위 vector들을 column으로 하여 만들어진 matrix를 A 라고 하자.

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{u}_{n-1} & \mathbf{u}_n \end{array} \right]$$

이 때, 아래 관계가 성립함을 보여라.

$$A^{-1} = A^T$$

Solution: 주어진 성질에 의해,

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

이다.

$$A^T A = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^T \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{u}_1 & \dots & \mathbf{u}_n \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_1 & \dots & \mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{u}_n^T \mathbf{u}_1 & \dots & \mathbf{u}_n^T \mathbf{u}_n \end{bmatrix} = I$$

따라서 $A^{-1} = A^T$.