선형대수

2016년 1학기

기말고사

서울시립대학교
컴퓨터과학부

주의사항

- **시험지는 앞/뒤로 인쇄되어 있으니 유의하시기 바랍니다.**
- 만점은 100점입니다.
- 부정행위가 발각되면 즉시 시험지가 압수되고 0점 처리 됩니다.
- 처음부터 모든 문제를 풀지 말고, 문제를 모두 훑어본 후 풀 수 있다고 생각되는 문제부터 풀 것을 권장합니다.
- 교재에 있는 lemma, theorem 등을 이용할 경우, 해당 lemma/theorem을 증명할 필요 없이 어떤 것인지를 밝히고 이용하여도 좋습니다.
- 강의시간에 배운 범위안의 내용에만 근거해서 답변해야 합니다. 예를 들어, 아직 배우지 않은 내용을 근거로 답하는 경우, 맞더라도 감점이 됩니다.

1. $\boxed{60\text{점}}$ 다음과 같이 네개의 vectors와 matrix A를 정의하자.

$$\mathbf{v}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 := \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 := \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{b} := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, A := \left[\begin{array}{c:c:c} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{array} \right].$$

이 때 다음 질문들에 답하라.

(a) $\boxed{10\text{점}}$ $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$에 Gram-Schmidt orthogonalization 방법을 적용하여 mutually orthogonalize한 vector들인 $\{\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*, \mathbf{v}_3^*\}$를 구하라. 이 때, 반드시 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 순서대로 적용하라.

(b) $\boxed{10\text{점}}$ 다음과 같이 정의된 matrix A에 QR factorization을 적용하여 얻게 되는 Q와 R을 각각 구하라.

$$A = QR.$$

(c) $\boxed{10\text{점}}$ 위 결과를 이용하여 다음 linear system의 least-square solution을 구하라.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

(d) $\boxed{10\text{점}}$ $A^T A$와 $A^T\mathbf{b}$를 계산하여 다음 linear system을 만든 후, Gaussian elimination 방법을 사용하여 solution을 구하라.

$$A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$$

(e) $\boxed{20\text{점}}$ (c)와 (d)에서 구한 solution을 비교해서 같은지 확인해 보라. 이러한 성질은 항상 성립하는가? 즉, A가 아래 두 조건을 만족할 때,

- A는 $m \times n$ $(m \geqslant n)$ matrix이고
- $\operatorname{rank}(A) = n$이다.

다음 두 변형된 linear system의 solution은 항상 같은가? 만약 그렇다면 이를 증명하고, 그렇지 않다면 반례(counterexample)를 제시하라.

$$R\mathbf{x} = Q^T\mathbf{b} \text{ 와 } A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$$

Hint:
- linear system의 양변에 invertible matrix를 곱하면 solution을 그대로 유지하면서 다른 linear system으로 변형된다.
- R은 어떤 종류의 matrix인가?

Solution:

(a) 1. $\mathbf{v}_1^* := \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ and $\mathcal{V}_1 := \operatorname{Span}(\mathbf{v}_1^*)$

2. $\mathbf{v}_2^* := \mathbf{v}_2^{\perp \mathcal{V}_1} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_2^{\parallel \mathcal{V}_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{4}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

and $\mathcal{V}_2 := \mathrm{Span}\,(\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*)$

3. $\mathbf{v}_3^* = \mathbf{v}_3^{\perp \mathcal{V}_2} = \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_3^{\parallel \mathbf{v}_1^*} - \mathbf{v}_3^{\parallel \mathbf{v}_2^*} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} - \frac{4}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{0}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

(b) (a)로부터

$$\left[\begin{array}{c:c:c} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c:c} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

Therefore

$$A = QR$$

where

$$Q = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/2 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ & \sqrt{2} & 0 \\ & & 2\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

(c)

$$R\mathbf{x} = Q^T\mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ & \sqrt{2} & 0 \\ & & 2\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Therefore

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

is the least-square solution.

(d)

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 28 \end{bmatrix}$$

$$A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 4 & 4 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 28 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc:c} 4 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 24 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 4 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(e)

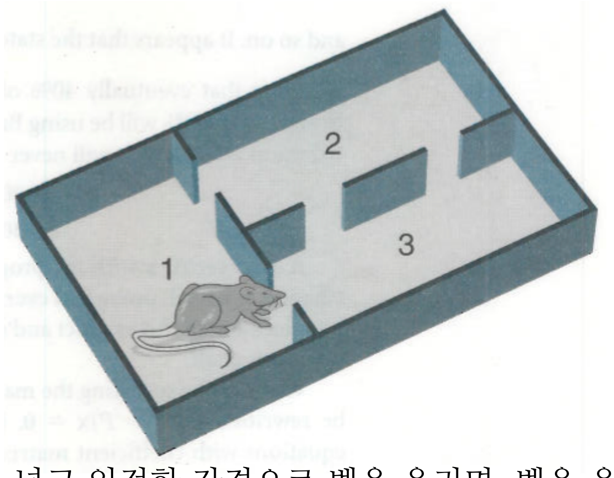
$$A^T A = R^T Q^T Q R = R^T R$$

therefore

$$A^T A\mathbf{x} = A^T \mathbf{b} \rightarrow R^T R\mathbf{x} = R^T Q^T \mathbf{b}$$

since R is an upper-triangular matrix with nonzero diagonal entries, it is invertible hence R^T is invertible. Therefore we can left-multiply R^{-T} on both sides to keep solution.

2. $\boxed{40점}$ 아래 그림과 같은 미로가 있다.



위 미로에 실험쥐를 넣고 일정한 간격으로 벨을 울리면, 벨을 울릴때마다 실험쥐는 현재 머무르고 방에 있는 여러개의 문들 중 하나를 **임의로** 골라 다른 방으로 이동한다. 이 때, 아래와 같이 가정한다.

- 벨이 울리면 실험쥐는 반드시 다른 방으로 이동하고, **현재 있는 방에 머무르지 않는다**.
- 벨이 울려서 문을 선택할 때에는 (어느 특정 문에 대한 선호 없이) **모든 문들을 동일한 확률로 선택**한다.

p_1^t, p_2^t, p_3^t를 각각 벨이 t번 울린 후 실험쥐가 1, 2, 3번 방에 있을 확률이라고 하면, 다음과 같이 3×3 matrix A를 사용하여 위 실험을 모델링할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} p_1^{t+1} \\ p_2^{t+1} \\ p_3^{t+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} p_1^t \\ p_2^t \\ p_3^t \end{bmatrix}$$

(a) $\boxed{10점}$ 3×3 matrix A를 구하라.

(b) $\boxed{10점}$ 1이 A의 eigenvalue임을 보이고, 이에 해당하는 eigenspace의 basis를 구하라.

(c) $\boxed{20점}$ 여러마리의 실험쥐를 이용하여 실험을 수행한다고 가정하자. 이 때, 위에 제시된 가정에 아래와 같은 가정을 추가하자.

- 각 방에 머물 수 있는 실험쥐의 수는 제한이 없다.
- 문은 충분이 넓어 많은 수의 쥐들이 한 번에 드나드는 데 아무런 문제가 없다.

만약 처음에 아래와 같이 각방에 실험쥐들을 넣고 벨을 계속해서 무한히 많은 회수만큼 울린다면 각 방에 머무는 실험쥐들의 수는 각각 얼마로 수렴하겠는가?

방번호	실험쥐의 수
1번	4마리
2번	6마리
3번	6마리

Hint: 일반적으로 이러한 문제는 A를 diagonalization해서 답을 구하지만, **특수한 경우**에는 훨씬 쉽게 답을 구할 수 있다. 문제 (b)를 참조하라.

Solution:

(a) j 번방을 R_j 이라 하자. R_i 에서 R_j 번방으로 이동하는 확률은 두 방 사이에 있는 문의 개수에 비례한다. 따라서

- $R_1 \to R_2$: 1/2
- $R_1 \to R_3$: 1/2
- $R_2 \to R_1$: 1/3
- $R_2 \to R_3$: 2/3
- $R_3 \to R_1$: 1/3
- $R_3 \to R_2$: 2/3

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 2/3 \\ 1/2 & 2/3 & 0 \end{bmatrix}$$

(b)

$$A - 1 \cdot \mathbb{1} = \begin{bmatrix} -1 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & -1 & 2/3 \\ 1/2 & 2/3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 + (1/2)R_1]{R_2 \leftarrow R_2 + (1/2)R_1} \begin{bmatrix} -1 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & -5/6 & 5/6 \\ 0 & 5/6 & -5/6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + R_2} \begin{bmatrix} -1 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & -5/6 & 5/6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Therefore $A - \mathbb{1}$ is not invertible hence 1 is an eigenvalue.

With $x_3 = t$, the solution is

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3t \\ t \\ t \end{bmatrix} = \frac{t}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

and the corresponding eigenspace is

$$\text{Span}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right).$$

(c) Since

$$A \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 2/3 \\ 1/2 & 2/3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

the number of rats in each room never change (while they keep moving)!