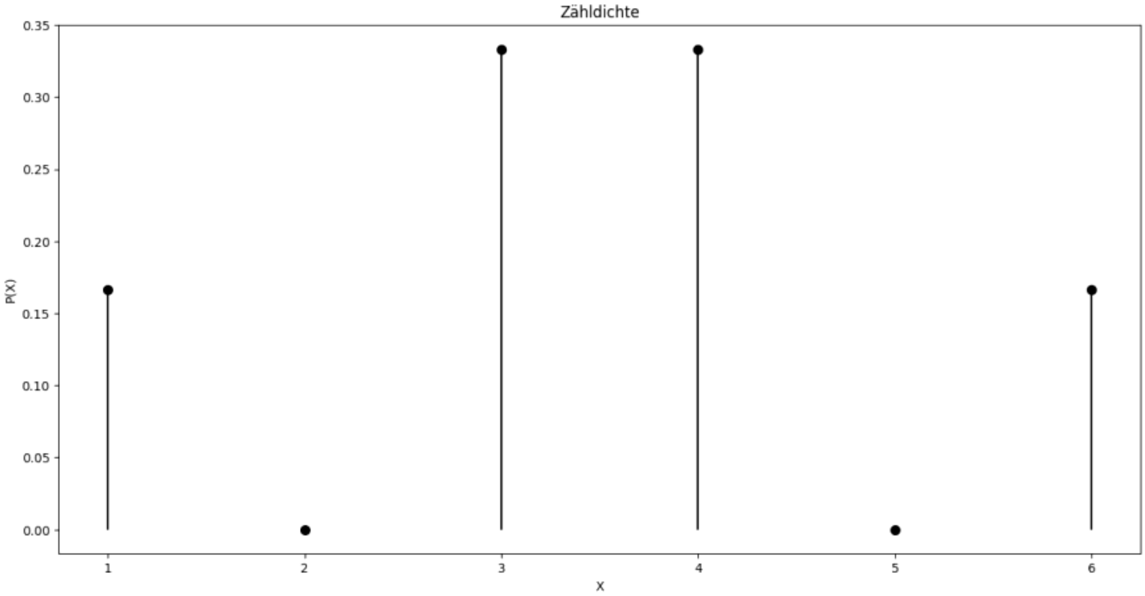
Aufgabe 1 **(7 Punkte)**

Bei einem klassischen Würfel mit sechs Seiten und den Augenzahlen 1 bis 6 werden folgende Änderungen vorgenommen:

- Die Zahl 2 wird ersetzt durch die Zahl 3.
- Die Zahl 5 wird ersetzt durch die Zahl 4.

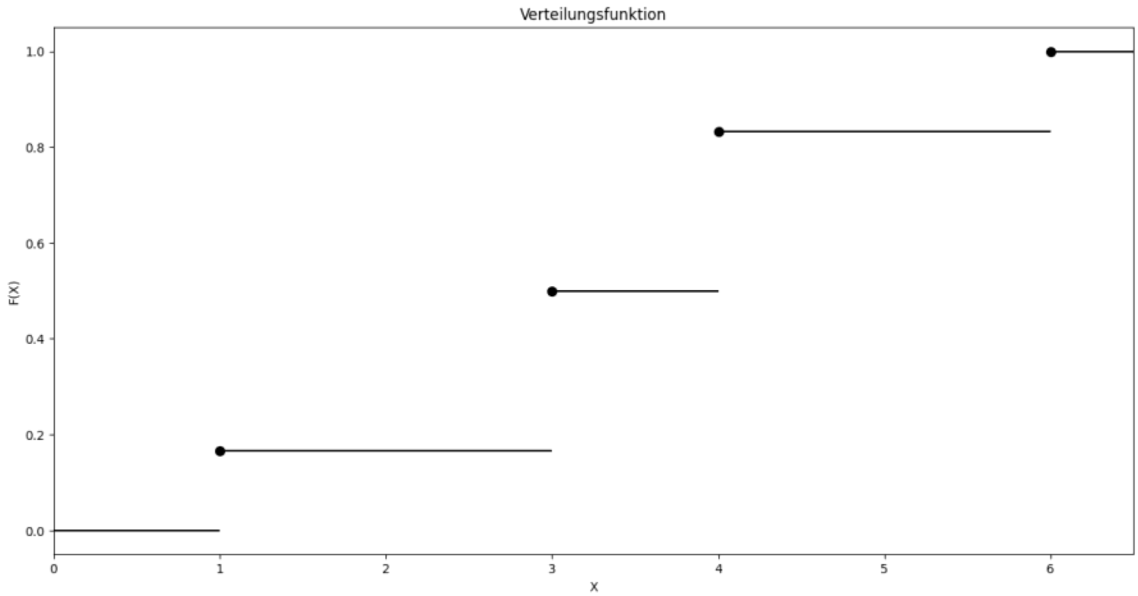
a) (1 Punkt) Bestimmen Sie die Zähldichte der Zufallsvariablen X, die das Würfelergebnis bezeichnet. Stellen Sie die Zähldichte grafisch dar.

$$P(X) = \begin{cases} \frac{1}{6} & , X = 1 \\ \frac{1}{3} & , X = 3 \\ \frac{1}{3} & , X = 4 \\ \frac{1}{6} & , X = 6 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



b) (2 Punkte) Bestimmen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion von X.

$$F(X) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 1) \\ \frac{1}{6}, & x \in [1, 3) \\ \frac{1}{2}, & x \in [3, 4) \\ \frac{5}{6}, & x \in [4, 6) \\ 1, & x \in [6, \infty) \end{cases}$$



c) (2 Punkte) Bestimmen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$P(X \leq 4), \quad P(2 \cdot X < 10), \quad P(1 < X < 6), \quad P(|X-3| \geq 2)$$

$$P(X \leq 4) = F(4) = \frac{5}{6}$$

$$P(2 \cdot X < 10) = P(X < 5) = P(X \leq 4) = F(4) = \frac{5}{6}$$

$$P(1 < X < 6) = P(1 < X \leq 5) = F(5) - F(1) = \frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$|X-3| \geq 2 \rightarrow \left[\begin{array}{l} X-3 \geq 2 \\ X-3 \leq -2 \end{array} \right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} X \geq 5 \\ X \leq 1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow P(|X-3| \geq 2) = P(X \geq 5) + P(X \leq 1) = P(X=6) + P(X=1)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

d) (2 Punkte) Bestimmen Sie den Erwartungswert von X. (Definition vermutlich erst in der Vorlesung am 15.12., daher hier vorweg:)

$$E(X) = \sum_{j=1}^{J} p(x_j) \cdot x_j$$

$$E(X) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 6 = \frac{1}{6} + 1 + \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

e) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Varianz von X. (Ebenfalls geplant für 15.12., daher hier vorweg:) Das Ergebnis von Aufgabe d) ist $E(X) = 3.5$.

$$\mathrm{Var}(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_{j=1}^{J} p(x_j) \cdot (x_j - E(X))^2$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{6} \cdot (1 - 3{,}5)^2 + \frac{1}{3}(3 - 3{,}5)^2 + \frac{1}{3}(4 - 3{,}5)^2 + \frac{1}{6}(6 - 3{,}5)^2$$

$$= \frac{1}{6} \cdot (-2{,}5)^2 + \frac{1}{3}(-0{,}5)^2 + \frac{1}{3}(0{,}5)^2 + \frac{1}{6}(2{,}5)^2$$

$$= 2{,}25$$

Aufgabe 2 **(8+2 Punkte)**

Die Verteilung einer Zufallsvariablen X mit Werten im Intervall $[\frac{1}{2}\pi, \pi]$ mit $c > 0$, $c \in \mathbb{R}$ habe die folgende Dichte:

$$f(x) = \sin(x) \cdot c$$

[*Hinweis:*] Es gelten: $\frac{\partial \sin(x)}{\partial x} = cos(x)$, $\frac{\partial \cos(x)}{\partial x} = -sin(x)$, $\frac{\partial(-\sin(x))}{\partial x} = -cos(x)$ und $\frac{\partial(-\cos(x))}{\partial x} = sin(x)$.

a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Konstante c, sodass f eine gültige Dichte im gegebenen Intervall ist. (Zur Kontrolle und für weitere Aufgaben: $c = 1$.)

$$\int_{\pi/2}^{\pi} f(x) = 1 \rightarrow \int_{\pi/2}^{\pi} \sin(x) \cdot c = 1 \rightarrow c \cdot \int_{\pi/2}^{\pi} \sin(x) = 1$$

$$\rightarrow c \cdot \left[-\cos(x)\right]_{\pi/2}^{\pi} = 1 \rightarrow c \cdot \left[-\cos(\pi) - \cos(\tfrac{\pi}{2})\right] = 1$$

$$\rightarrow c \cdot [1 - 0] = 1 \rightarrow c = 1$$

b) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von X und zeigen Sie, dass sie die Kerneigenschaften $F(x) = 0$ am linken Rand sowie $F(x) = 1$ am rechten Rand erfüllt.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{\pi/2}^{x} \sin(t)\,dt = \left[-\cos(t)\right]_{\pi/2}^{x}$$

$$= -\cos(x) - \cos(\tfrac{\pi}{2}) = -\cos(x)$$

$$F(\tfrac{\pi}{2}) = -\cos(\tfrac{\pi}{2}) = 0 \qquad F(\pi) = -\cos(\pi) = 1$$

c) (2 Punkte) Bestimmen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$P(X \leq 0.75\pi) \qquad P(X = 0.8\pi) \qquad P(X \geq 0.7\pi) \qquad P(0.6\pi \leq X \leq 0.8\pi) \qquad P(X \leq 1.5\pi)$$

$$P(X \leq 0{,}75\pi) = F(0{,}75\pi) = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$$

$$P(X = 0{,}8\pi) = f(0{,}8\pi) \approx 0{,}588$$

$$P(X \geq 0{,}7\pi) = 1 - F(0{,}7\pi) \approx 0{,}412$$

$$P(0{,}6\pi \leq X \leq 0{,}8\pi) = F(0{,}8\pi) - F(0{,}6\pi) = 0{,}5$$

$$P(X \leq 1{,}5\pi) = P(X \leq \pi) = 1$$

d) (2 Punkte) Bestimmen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen X. (Definition vermutlich am 15.12. oder noch später, daher hier vorweg:)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t)\, dt$$

Hinweis: Hier wird das mathematische Werkzeug einer partiellen Integration benötigt:

$$\int_a^b \underline{f'(x)} \cdot \underline{g(x)}\, dx = [\underline{f(x)} \cdot \underline{g(x)}]_a^b - \int_a^b \underline{f(x)} \cdot \underline{g'(x)}\, dx$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t)dt = \int_{\pi/2}^{\pi} \underline{t} \cdot \underline{\sin(t)}dt$$

$$= \left[\underline{t} \cdot (\underline{-\cos(t)}) \right]_{\pi/2}^{\pi} - \int_{\pi/2}^{\pi} (\underline{-\cos(t)}) \cdot \underline{1}\, dt$$

$$= \left[-\pi \cdot \cos(\pi) - \left(-\tfrac{\pi}{2} \cdot \cos(\tfrac{\pi}{2})\right)\right] + \left[\sin(t)\right]_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= (\pi - 0) + [\sin(\pi) - \sin(\tfrac{\pi}{2})]$$

$$= \pi + (-1) = \pi - 1$$

e) (2 **Bonus**punkte) Bestimmen Sie die Varianz der Zufallsvariablen X. (Definition und Verschiebungssatz hier vorweg:). Der benötigte Erwartungswert lautet $E(X) = \pi - 1$.

$$\mathrm{Var}(X) = E((X - E(X))^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (t - E(X))^2 \cdot f(t)\, dt \;=\; E(X^2) - E(X)^2$$

$$E(X^2) = \int_{\pi/2}^{\pi} t^2 \sin(t)\, dt = \left[t^2 \cdot (-\cos(t)) \right]_{\pi/2}^{\pi} - \int_{\pi/2}^{\pi} 2t\,(-\cos(t))\, dt$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} 2t\,(-\cos(t))\, dt = -2 \int_{\pi/2}^{\pi} t \cos(t)\, dt$$

$$= -2 \left(\left[t \cdot \sin(t) \right]_{\pi/2}^{\pi} - \int_{\pi/2}^{\pi} \sin(t) \cdot 1\, dt \right)$$

$$= -2 \left(\left[t \sin(t) \right]_{\pi/2}^{\pi} - \left[-\cos(t) \right]_{\pi/2}^{\pi} \right)$$

$$= -2 \left[t \sin(t) + \cos(t) \right]_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= -2 \left(-1 - \frac{\pi}{2} \right) = 2 + \pi$$

$$\Rightarrow E(X^2) = \left[t^2 \cdot (-\cos(t)) \right]_{\pi/2}^{\pi} - \int_{\pi/2}^{\pi} 2t\,(-\cos(t))\, dt$$

$$= (\pi^2 - 0) - (2 + \pi)$$

$$= \pi^2 - \pi - 2$$

$$\Rightarrow \mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$= \pi^2 - \pi - 2 - (\pi - 1)^2$$

$$= \pi^2 - \pi - 2 - (\pi^2 - 2\pi + 1)$$

$$= \cancel{\pi^2} - \pi - 2 - \cancel{\pi^2} + 2\pi - 1$$

$$= \pi - 3 \approx 0{,}141$$