Duc Huy Nguyen 231611
Khoa Linh Nguyen 232798
Tuan Minh Phan 235483
Ha Phuong Ta 230655

Wir schauen erneut auf Aufgabe 3 von Übungsblatt 2. Die Rohdaten dort waren:

	Pizzatyp				
	Margherita	Salami	Hawaii	Tonno	Funghi
Deutschland	42	20	16	18	14
Italien	30	25	0	22	23
Frankreich	35	40	12	10	33

Die erwarteten Häufigkeiten v_{jk} wurden berechnet als:

erwartete Häufigkeiten	Pizzatyp Margherita	Salami	Hawaii	Tonno	Funghi	Σ
Deutschland	$\frac{110 \cdot 107}{340} = 34.62$	27.5	9.06	16.18	22.65	110
Italien	31.47	25.0	8.24	14.71	20.59	100
Frankreich	40.91	32.5	10.71	19.12	26.76	130
Σ	107	85	28	50	70	340

a) (2 Punkte) Berechnen Sie den χ^2-Kontingenzkoeffizienten.

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} \frac{(N_{jk} - v_{jk})^2}{v_{jk}} = \frac{(42-34{,}62)^2}{34{,}62} + \frac{(20-27{,}5)^2}{27{,}5} + \dots$$

$$= 33{,}19$$

jeder Term:				
1.57	2.05	5.32	0.21	3.30
0.07	0.00	8.24	3.62	0.28
0.85	1.73	0.16	4.35	1.45

b) (2 Punkte) Berechnen Sie den korrigierten Kontingenzkoeffizienten nach Pearson. Interpretieren Sie das Ergebnis.

$$\min\{J, K\} = 3$$

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + N} \cdot \frac{3}{3-1}} = \sqrt{\frac{33{,}19}{33{,}19 + 340} \cdot \frac{3}{2}} = 0{,}365$$

$\rightarrow$ mittlere schwache Abhängigkeit zwischen Pizzatypen und Staaten

Aufgabe 2 **(8 Punkte)**

Die Hobbystatistikerin B. Rechnen übt ihre Statistikkenntnisse gerne an selbsterhobenen Datensätzen. Erst gestern hat sie die Körpergrößen und Alter der Kinder in der Nachbarschaft erhoben. Die Daten lauten:

Alter in Jahren	9	6	12	10	8	9
Körpergröße in cm	130	125	145	140	130	140

$N = 6$

Sie ist daran interessiert, die Körpergröße anhand des Alters vorherzusagen.

a) (1 Punkt) Erstellen Sie anhand der Rohdaten ein Streudiagramm. Achten Sie auf

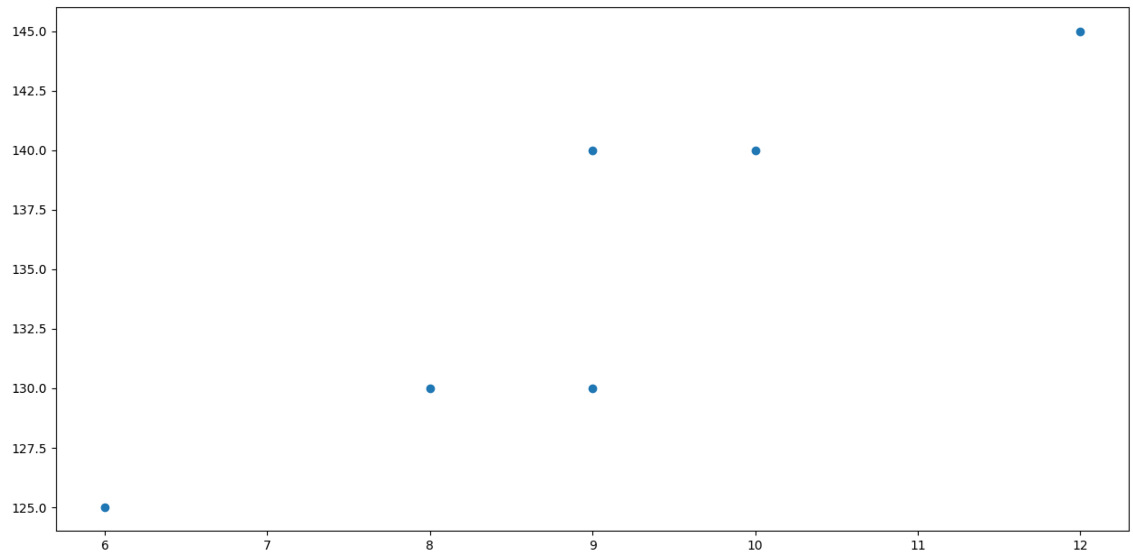
Alter in Jahren	9	6	12	10	8	9
Körpergröße in cm	130	125	145	140	130	140

$N = 6$

Sie ist daran interessiert, die Körpergröße anhand des Alters vorherzusagen.

a) (1 Punkt) Erstellen Sie anhand der Rohdaten ein Streudiagramm. Achten Sie auf die Wahl der richtigen Achsen für die Regression.

Anforderung für die ganze Aufgabe 2: matplotlib, numpy, scipy
Gezeichnet mit https://github.com/minhperry/wrums-tudo/blob/main/blatt3/blatt3.2.py



b) (1 Punkt) Berechnen Sie die Kovarianz zwischen Alter und Körpergröße.

$$\bar{x} = \frac{1}{6}(9+6+12+10+8+9) = 9$$

$$\bar{y} = \frac{1}{6}(130+125+145+140+130+140) = 135$$

$$s_{xy} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{6}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 14$$

c) (2 Punkte) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten nach Bravais-Pearson zwischen Alter und Körpergröße.

$$\mathrm{Var}_x = \frac{1}{5}(0^2 + (-3)^2 + 3^2 + 1^2 + (-1)^2 + 0^2) = \frac{1}{5}(20) = 4 \rightarrow s_x = 2$$

$$\mathrm{Var}_y = \frac{1}{5}((-5)^2 + (-10)^2 + 10^2 + 5^2 + (-5)^2 + 5^2) = \frac{1}{5}(300) = 60 \rightarrow s_y = 7{,}74$$

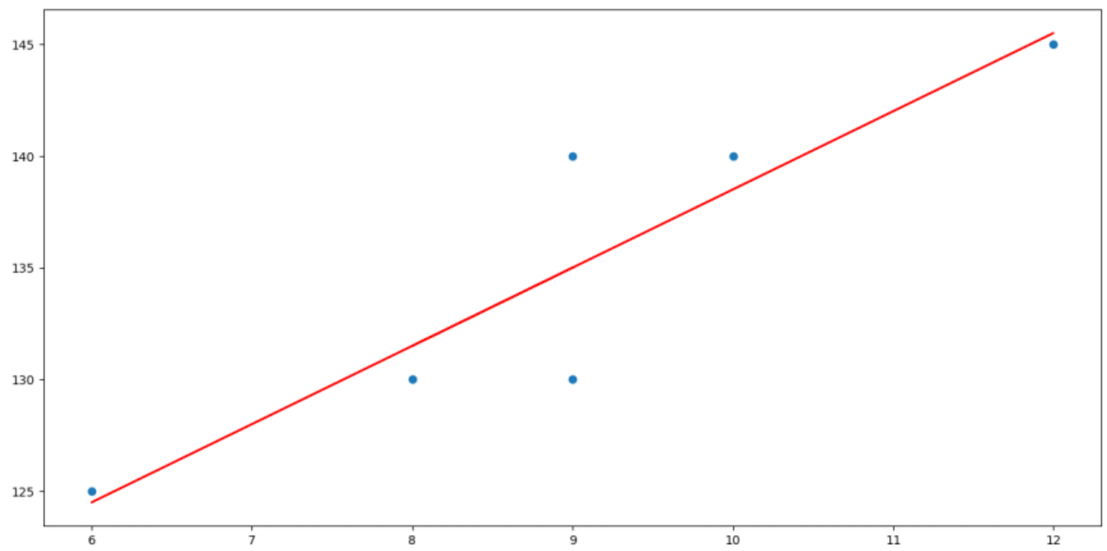
$$\rightarrow r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{14}{2 \cdot 7{,}74} = 0{,}904$$

d) (2 Punkte) Führen Sie eine lineare Regression durch, d.h. berechnen Sie d und c und geben Sie die vollständige Regressionsgleichung an. Zeichnen Sie die Regressionsgerade in Ihr Streudiagramm aus a) ein.

$$d = \frac{S_{xy}}{s_x^2} = \frac{S_{xy}}{var_x} = \frac{14}{4} = 3{,}5$$

$$c = \overline{y} - d\overline{x} = 135 - 3{,}5 \cdot 9 = 103{,}5$$

$$\Rightarrow \quad y = 3{,}5x + 103{,}5$$



e) (2 Punkte) Bestimmen Sie den Rangkorrelationskoeffizienten nach Spearman für die Variablen Alter und Körpergröße. Vergeben Sie bei geteilten Rängen den jeweils mittleren Rang. Beispiel: (5, 4, 5, 6) hat die Ränge (2.5, 1, 2.5, 4).

Alter	9	6	12	10	8	9
Alter gerankt	**3.5**	**1**	**6**	**5**	**2**	**3.5**
Körpergröße	130	125	145	140	130	140
Körpergröße gerankt	**2.5**	**1**	**6**	**4.5**	**2.5**	**4.5**

$$r_{xy}^{Sp} = r_{R(X)R(Y)} = \frac{s_{R(X)R(Y)}}{s_{R(X)}s_{R(Y)}} = \frac{\sum_{n=1}^{N}\left(R(x_n) - \overline{R(x)}\right)\left(R(y_n) - \overline{R(y)}\right)}{\sqrt{\sum_{n=1}^{N}\left(R(x_n) - \overline{R(x)}\right)^2 \sum_{n=1}^{N}\left(R(y_n) - \overline{R(y)}\right)^2}}$$

$$\overline{R(x)} = \frac{1}{6}(3{,}5 + 1 + 6 + 5 + 2 + 3{,}5) = 3{,}5 = \overline{R(y)}$$

$$s_{R(x)R(y)} = \frac{1}{5}\left(0 \cdot (-1) + (-2{,}5)^2 + 2{,}5^2 + 1{,}5 \cdot 1 + (-1{,}5)(-1) + 0 \cdot 1\right) = 3{,}1$$

$$s^2_{R(x)} = \frac{1}{5}\left(0^2 + (-2{,}5)^2 + 2{,}5^2 + 1{,}5^2 + (-1{,}5)^2 + 0^2\right) = 3{,}4$$

$$S^2_{R(y)} = \frac{1}{5}\left((-1)^2 + (-2{,}5)^2 + 2{,}5^2 + 1^2 + (-1)^2 + 1^2 \right) = 3{,}3$$

$$\Rightarrow r^{Sp.}_{xy} = \frac{3{,}1}{\sqrt{3{,}4 \cdot 3{,}3}} = 0{,}925$$

Aufgabe 3 **(3 Punkte)**

Beweisen Sie die Gleichung der χ^2-Größe der Vorlesung:

$$\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\frac{(N_{jk}-v_{jk})^2}{v_{jk}} = N\left(\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\frac{N_{jk}^2}{N_{j\cdot}N_{\cdot k}} - 1\right)$$

Sei $p_{jk} = N_{j\cdot} \cdot N_{\cdot k} \rightarrow v_{jk} = \frac{p_{jk}}{N}$

Abgekürzt $\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} f(j,k) = S(f(j,k))$

$$\text{Rechte Seite} = N \cdot \left(S\left(\frac{N_{jk}^2}{p_{jk}}\right) - 1 \right) = N \cdot S\left(\frac{N_{jk}^2}{p_{jk}}\right) - N$$

$$\boxed{= S\left(\frac{N \cdot N_{jk}^2}{p_{jk}}\right) - N}$$

$$\frac{(N_{jk}-v_{jk})^2}{v_{jk}} = \frac{N_{jk}^2 - 2 \cdot N_{jk} \cdot v_{jk} + v_{jk}^2}{v_{jk}} = \frac{N_{jk}^2}{v_{jk}} - 2N_{jk} + v_{jk}$$

$$= \frac{N_{jk}^2}{\frac{p_{jk}}{N}} - 2N_{jk} + v_{jk} = \frac{N \cdot N_{jk}^2}{p_{jk}} - 2N_{jk} + v_{jk}$$

$$\Rightarrow \text{Linke Seite} = S\left(\frac{(N_{jk}-v_{jk})^2}{v_{jk}}\right) = S\left(\frac{N \cdot N_{jk}^2}{p_{jk}} - 2N_{jk} + v_{jk}\right)$$

$$= S\left(\frac{N \cdot N_{jk}^2}{p_{jk}}\right) - 2 \cdot S(N_{jk}) + S(v_{jk})$$

Summe ganzen Tabelle $= N$

$$= S\left(\frac{N \cdot N_{jk}^2}{p_{jk}}\right) - 2N + N$$

$$\text{Linke Seite} \quad \boxed{= S\left(\frac{N \cdot N_{jk}^2}{p_{jk}}\right) - N} \qquad \square$$