Một số định lý về số (k, l)-rainbow trong đồ thị

Nguyễn Minh Quân

Trường Đại học Bách khoa Hà Nội

nguyenminhquan20163374@gmail.com

Ngày 5 tháng 4 năm 2021

Nội dung

1. Tổng quan về bài báo
    - Giới thiệu về bài báo
    - Cơ sở lý thuyết
    - Các kí hiệu và quy ước
2. Các kết quả trong bài báo
    - Các định lý cơ bản
    - Các kết quả trong bài báo
    - Ý tưởng chứng minh các định lý

Giới thiệu về bài báo

- Bài báo cơ sở: Xualiang Li et al., 21 Jun 2016. "Distance proper connection of graphs".
- Bài báo chính: Xualiang Li et al., September 2017. "Generalized Rainbow Connection of Graphs and Their Complements".
- Nội dung chính: mối liên hệ $rc_{1,2}(G)$ với đồ thị $\overline{G}$, số $rc_{1,2}(G)$ với một số lớp đồ thị đặc biệt.

Định nghĩa số $rc(G)$

Định nghĩa

Một đường đi P trong đồ thị G là đường đi rainbow nếu trên đường đi đó hai cạnh bất kỳ phải có màu khác nhau. Đồ thị G với cách tô màu c được gọi là rainbow liên thông nếu giữa hai đỉnh bất kỳ của G tồn tại một đường đi rainbow. Số rainbow connection của đồ thị liên thông G, kí hiệu là $rc(G)$, là số màu nhỏ nhất của cách tô màu c, sao cho với cách tô màu c thì G là đồ thị rainbow liên thông.

Định nghĩa số $rc_{k,l}(G)$

Định nghĩa

Một đường đi P trong đồ thị G là đường đi l-rainbow nếu mỗi đường đi con có độ dài tối đa $l+1$ là rainbow. Đồ thị G với cách tô màu c được gọi là (k,l)-rainbow liên thông nếu giữa hai đỉnh bất kỳ của G tồn tại k đường đi khác nhau là đường đi l-rainbow. Số (k,l)-rainbow connection của đồ thị liên thông G, kí hiệu là $rc_{k,l}(G)$, là số màu nhỏ nhất của cách tô màu c, sao cho với cách tô màu c thì G là đồ thị (k,l)-rainbow liên thông.

Các kí hiệu và quy ước

- Đồ thị $G = (V, E)$ là đơn đồ thị, vô hướng và hữu hạn trong đó $|V| = n, |E| = m$. G_i là các thành phần liên thông và n_i là số đỉnh tương ứng.
- Đồ thị bù $\overline{G}$, đồ thị hai phía đầy đủ $K_{m,n}$, đồ thị liên thông, đồ thị 2-connected, đồ thị con bao trùm, cây bao trùm, chu trình C_n, đồ thị hình sao S_n và đồ thị hình sao kép $T(n_1, n_2)$.
- $\Delta(G)$: bậc nhỏ nhất của đồ thị G, $\sigma_2'(G)$: tổng lớn nhất của hai đỉnh kề nhau x, y trong G.
- Độ lệch tâm của đỉnh v, kí hiệu $ecc(v) := \max_{x \in V(G)} d(v, x)$. Bán kính của G, kí hiệu $rad(G) := \min_{x \in V(G)} ecc(x)$. Đường kính của G, kí hiệu $diam(G) =: \max_{u \in V(G)} \max_{v \in V(G)} d(u, v)$.

Các kết quả cơ bản

Kết quả 1. *Nếu G là đồ thị liên thông và H là đồ thị con liên thông bao trùm của G, với số nguyên $l \geq 1$, thì $rc_{1,l}(G) \leq rc_{1,l}(H)$. Đặc biệt, $rc_{1,l}(G) \leq rc_{1,l}(T)$ với mọi T là cây bao trùm của G.*
Định lý 2. *Nếu T là một cây, ta có $rc_{1,2}(T) = \sigma_2'(T) - 1$.*
Định lý 3. *Nếu G là đồ thị 2-liên thông ta có $rc_{1,2}(G) \leq 5$.*

Định lý 4. *Xét số nguyên* $l \geq 2$ *và* $m \leq n$

$$rc_{1,l}(K_{m,n}) = \begin{cases} n \text{ nếu } m = 1, \\ 2 \text{ nếu } m \geq 2 \text{ và } m \leq n \leq 2^m, \\ 3 \text{ nếu } l = 2, m \geq 2 \text{ và } n > 2^m, \\ \quad \text{hoặc } l \geq 3, m \geq 2 \text{ và } 2^m < n \leq 3^m, \\ 4 \text{ nếu } l \geq 3, m \geq 2 \text{ và } n > 3^m. \end{cases}$$

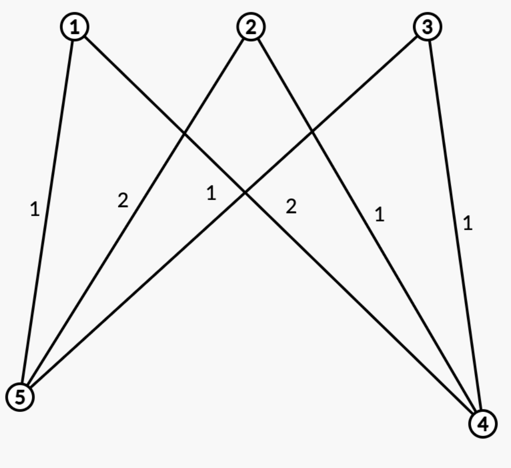
Chứng minh

$$\text{ii) } rc_{1,l}(K_{m,n}) = 2 \text{ nếu } m \geq 2 \text{ và } m \leq n \leq 2^m$$

Xét $|U| = m$ và $|V| = n$.
Ta sẽ định nghĩa một cách tô 2 màu cho đồ thị $K_{m,n}$ với $l \geq 2$. Với mỗi đỉnh $v \in V$, ta định nghĩa vectơ $v' = (v'_1, v'_2, ..., v'_m)$ tương ứng, sao cho $v'_i \in \{1, 2\}, i = 1, 2, ..., m$ và các vectơ $(2, 1, ..., 1), (1, 2, ..., 1), ..., (1, 1, ..., 2)$ đều xuất hiện. Ngoài ra vì số đỉnh $n \leq 2^m$, điều đó đảm bảo rằng $v' \neq u'$ với các đỉnh phân biệt $v, u \in V$. Tô màu cạnh vu_i bằng màu v'_i.

- Với $u \in U, v \in V$, cạnh uv chính là đường đi l-rainbow.
- Với bất kỳ $x, y \in V$, tồn tại $1 \leq i \leq m$ sao cho $x'_i \neq y'_i$, do đó xu_iy là đường đi l- rainbow.
- Với $u_i, u_j \in U$, ta có u_iwu_j là đường đi l-rainbow trong đó $w \in V$ có $w' = (w'_1, ..., w'_{i-1}, w'_i, w'_{i+1}, ..., w'_m) = (1, ..., 1, 2, 1, ..., 1)$.

Chứng minh



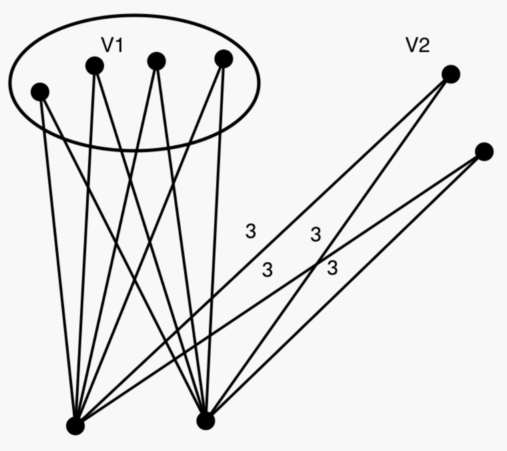
Hình: Đồ thị $K_{3,2}$ được minh hoạ.

Chứng minh

iii) $rc_{1,l}(K_{m,n}) = 3$ nếu l$= 2$, $m \geq 2$ và $n > 2^m$

1. Định nghĩa một cách tô 3 màu cho $K_{m,n}$, tức là $rc_{1,2}(K_{m,n}) \geq 3$.
   - $V = V_1 \cup V_2, |V_1| = 2^m$.
   - $v \in V_1$, định nghĩa vectơ v' tương ứng giống trong ii).
   - $t \in V_2$, định nghĩa vectơ $t' = (t'_1, t'_2, ..., t'_m) = (3, 3, ..., 3)$.
2. Chứng minh $rc_{1,2}(K_{m,n}) > 2$.
   - Phép chứng minh phản chứng. Giả sử tồn tại một cách tô 2 màu.
   - Tồn tại $x, y \in V$, sao cho $c(xu_i) = c(yu_i)$. Không tồn tại đường đi 2-rainbow có độ dài 2.

Chứng minh



Hình: Đồ thị $K_{6,2}$ được minh hoạ.

I. Số $(1,2)$-rainbow đối với đồ thị bù

Định lý 5. *Nếu G là đồ thị với $diam(\overline{G}) \geq 4$ thì $rc_{1,2}(G) \leq 3$.*
Định lý 6. *Nếu G là đồ thị mà $\overline{G}$ là triangle-free và $diam(\overline{G}) = 3$ thì $rc_{1,2}(G) \leq 3$.*
Định lý 7. *Xét G là đồ thị liên thông. Nếu $\overline{G}$ là đồ thị triangle-free và $diam(\overline{G}) = 2$ thì $rc_{1,2}(G) \leq 3$.*

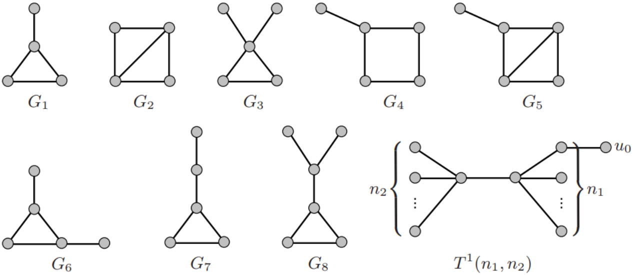
II. Định lý Nordhaus-Gaddum-Type đối với số $(1,2)$-rainbow connection

Định lý 8. *Xét G là đồ thị liên thông không tầm thường với số đỉnh $n \geq 2$. Ta có*

1. $rc_{1,2}(G) = n - 1$ *khi và chỉ khi* $G \in \mathcal{G}_1 = \{S_n(n \geq 2), T(n_1, n_2)(n_1, n_2 \geq 1)\}$;
2. $rc_{1,2}(G) = n - 2$ *khi và chỉ khi* $G \in \mathcal{G}_2 = \{C_3, C_4, C_5, G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6, G_7, G_8, T^1(n_1, n_2)\}$.

Định lý 9.
Xét G và $\overline{G}$ là các đồ thị có n đỉnh. Khi đó $rc_{1,2}(G) + rc_{1,2}(\overline{G}) \leq n + 2$, xảy ra dấu bằng khi và chỉ khi G hoặc $\overline{G}$ đẳng cấu với đồ thị hình sao kép hay $G \cong T(n_1, n_2)(n_1, n_2 \geq 1)$ hoặc $\overline{G} \cong T(n_1, n_2)(n_1, n_2 \geq 1)$.

Các kết quả trong bài báo



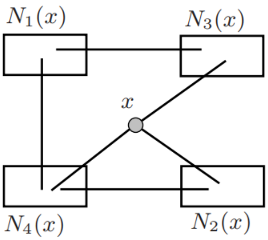
Hình: Các đồ thị $G_i (1 \leq i \leq 8)$ và đồ thị $T^1(n_1, n_2)$ trong $\mathcal{G}_2$.

Ý tưởng chứng minh

Định lý 5. *Nếu G là đồ thị với $diam(\overline{G}) \geq 4$ thì $rc_{1,2}(G) \leq 3$.*

- Chứng minh G liên thông. Phản chứng, G không liên thông, $\overline{G}$ chứa đồ thị bao trùm hai phía đầy đủ, $diam(\overline{G}) \leq 2$.
- Chọn đỉnh x sao cho $ecc_{\overline{G}}(x) = diam(\overline{G})$. Kí hiệu
  $N_i(x) = \{v : dist_{\overline{G}}(x, v) = i\}$ với $0 \leq i \leq 3$ và
  $N_4(x) = \{v : dist_{\overline{G}}(x, v) \geq 4\}$.
  $N_{i,j}(0 \leq i \neq j \leq 4)$ là tập cạnh giữa N_i và N_j trong G.
- Xét 4 trường hợp, trong mỗi trường hợp chỉ ra một cách tô 3 màu để đồ thị là $(1, 2)$-rainbow liên thông. Như vậy, $rc_{1,2}(G) \leq 3$.

Ý tưởng chứng minh

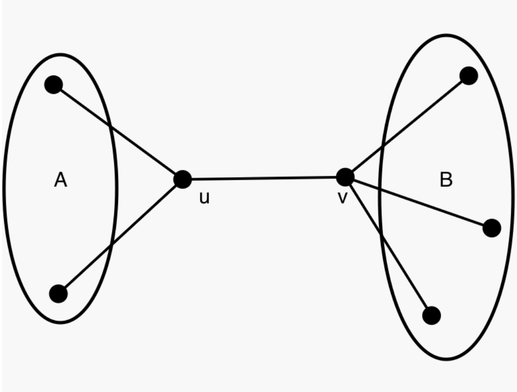


Hình: Đồ thị G được biểu diễn trong định lý.

Ý tưởng chứng minh

Định lý 9.
Xét G và $\overline{G}$ là các đồ thị có n đỉnh. Khi đó $rc_{1,2}(G) + rc_{1,2}(\overline{G}) \leq n + 2$, *xảy ra dấu bằng khi và chỉ khi G hoặc $\overline{G}$ đẳng cấu với đồ thị hình sao kép hay* $G \cong T(n_1, n_2)(n_1, n_2 \geq 1)$ *hoặc* $\overline{G} \cong T(n_1, n_2)(n_1, n_2 \geq 1)$.

Ý tưởng chứng minh

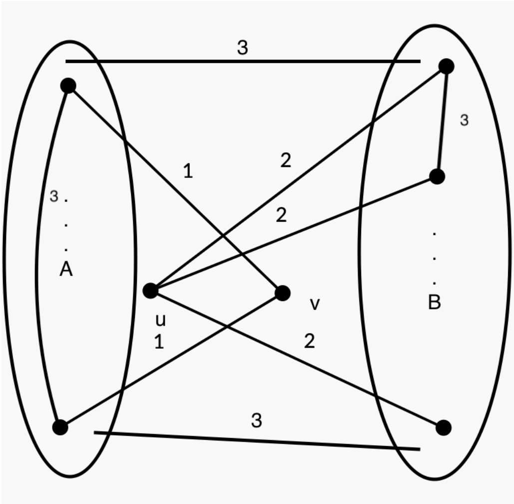


Hình: Đồ thị hình sao kép $T(n_1, n_2)$ có n đỉnh, $rc_{1,2}(T(n_1, n_2)) = n - 1$.

Ý tưởng chứng minh

1. G là đồ thị hình sao kép thì $rc_{1,2}(G) + rc_{1,2}(\overline{G}) = n + 2$.
    - $rc_{1,2}(G) = n - 1$.
    - Với u, v là hai đỉnh trung tâm.$N_G(u) - v = A$ và $N_G(v) - u = B$. $\overline{G}[A \cup B]$ là một clique và $N_{\overline{G}}(u) = B, N_{\overline{G}}(v) = A$.
    - Tô màu cho $\overline{G}$: tô tất cả các cạnh kề với v là màu 1, các cạnh kề với u là màu 2, các cạnh trong thành phần $\overline{G}[A \cup B]$ là màu 3. Như vậy $rc_{1,2}(\overline{G}) \leq 3$. Mặt khác $d(u, v) = 3$. Như vậy, $rc_{1,2}(\overline{G}) = 3$.
    - Kết luận, $rc_{1,2}(G) + rc_{1,2}(\overline{G}) = n - 1 + 3 = n + 2$.

Ý tưởng chứng minh



Hình: Đồ thị bù của $\overline{G}$ của $T(n_1, n_2)$ với $rc_{1,2}(\overline{G}) = 3$.

Ý tưởng chứng minh (tt)

1. G là đồ thị hình sao kép thì $rc_{1,2}(G) + rc_{1,2}(\overline{G}) = n + 2$.
2. Nếu $rc_{1,2}(G) + rc_{1,2}(\overline{G}) = n + 2$ thì G hoặc $\overline{G}$ đẳng cấu với đồ thị hình sao kép. Phản chứng, G và $\overline{G}$ không là đồ thị hình sao kép, ta sẽ chứng minh $rc_{1,2}(G) + rc_{1,2}(\overline{G}) < n + 2(*)$.
   - Điều (*) đúng với số đỉnh là $n = 4, n = 5$. Xét $n \geq 6$.
   - Nếu G hoặc $\overline{G}$ có số $(1, 2)$-rainbow connection là $n - 1$ hoặc $n - 2$. Theo định lý 8, ta kiểm tra hữu hạn các đồ thị và điều (*) là đúng. Như vậy ,xét $2 \leq rc_{1,2}(G) \leq n - 3$ và $2 \leq rc_{1,2}(\overline{G}) \leq n - 3$.
   - Xét G và $\overline{G}$ là các đồ thị 2-connected. Với $n \geq 9$, theo định lý 3, $rc_{1,2}(G) + rc_{1,2}(\overline{G}) \leq 5 + 5 = 10 < 11 = n + 2$. Kiểm tra với trường hợp với $n = 6, 7, 8$. (Sử dụng định lý Whitney cho đồ thị 2-connected, đường đi Hamilton và chu trình $C(G)$ để lập luận).

Ý tưởng chứng minh (tt)

Xét G và $\overline{G}$, một trong hai đồ thị, một đồ thị chứa ít nhất một đỉnh cắt. Không mất tính tổng quát giả sử G chứa ít nhất một đỉnh cắt.

1. Trường hợp 1. G có đỉnh cắt là u sao cho $G - u$ có ít nhất 3 thành phần liên thông.
   - Các thành phần liên thông $G_1, G_2, ..., G_k (k \geq 3)$ của $G - u$ và $n_1 \leq n_2 .... \leq n_k$. Vì $\Delta(G) \leq n - 2$ nên $n_k \geq 2$.
   - Đồ thị $\overline{G} - u$ chứa đồ thị hai phía đầy đủ $K_{n_k, n-n_k-1}$, theo định lý 4, $rc_{1,2}(K_{n_k,n-n_k-1}) = 3$. Tô màu các đỉnh kề của u trong $\overline{G}$ bằng màu 4. Như vậy, $rc_{1,2}(\overline{G}) = 4$.
   - Vậy $rc_{1,2}(G) + rc_{1,2}(\overline{G}) = n - 3 + 4 = n + 1 < n + 2$.

Ý tưởng chứng minh (tt)

1. Trường hợp 1. G có đỉnh cắt là u sao cho $G - u$ có ít nhất 3 thành phần liên thông.
2. Trường hợp 2. Mỗi đỉnh cắt của u thoả mãn $G - u$ có hai thành phần liên thông G_1, G_2 và $n_1 \leq n_2, n_2 \geq 2$.
    - Trường hợp 2.1 $n_1 \geq 2$. Khi đó $\overline{G} - u$ chứa đồ thị K_{n_1,n_2}. Khi đó, $rc_{1,2}(G) + rc_{1,2}(\overline{G}) = n - 3 + 4 = n + 1 < n + 2$.
    - Trường hợp 2.2 $n_1 = 1$ (tt).

Vậy định lý 9 được chứng minh.

Tài liệu tham khảo

- Xualiang Li et al., September 2017. "Generalized Rainbow Connection of Graphs and Their Complements".
- Xualiang Li et al., 21 Jun 2016. "Distance proper connection of graphs".
- D.B. West, Introduction to Graph Theory (Prentice Hall, Upper Saddle River, 2001).

Cảm ơn thầy và các bạn đã lắng nghe!