MINIMUM DEGREE CONDITION FOR PROPER CONNECTION NUMBER 2

FEI HUANG, XUELIANG LI, ZHONGMEI QIN, COLTON MAGNANT

Trình bày kết quả của bài báo: Nguyễn Minh Quân, KSTN Toán Tin K61.
Môn học: Seminar II- Tin ứng dụng

TÓM TẮT NỘI DUNG

Một đường đi (path) trong đồ thị được tô màu cạnh (edge -colored) được gọi là một đường đi proper (proper path) nếu hai cạnh liên tiếp trong đường đi đó không có màu giống nhau. Đối với đồ thị liên thông G, số proper connection ($pc(G)$) của G được định nghĩa là số màu nhỏ nhất để tô màu tập cạnh sao cho giữa hai đỉnh bất kì của đồ thị G luôn tồn tại một đường đi proper trong G. The proper connection là một vấn đề quan trọng trong lĩnh vực lý thuyết đồ thị và có nhiều ứng dụng thực tế trong an toàn thông tin mạng. Hiện tại, chưa có thuật toán tổng quát để kiểm tra số the proper connection của một đồ thị G bất kì. Vì vậy cách tiếp cận hiện nay là dựa trên lý thuyết về đồ thị và lý thuyết toán học để tìm ra số $pc(G)$ hoặc là cận trên của $pc(G)$. Hiện nay các bài báo nghiên cứu về số proper connection tập trung nghiên cứu quan hệ giữa số proper với kích thước của đồ thị, số bậc nhỏ nhất, lớn nhất của đồ thị hay với một số lớp đồ thị đặc biệt như đồ thị k-connected, đồ thị hai phía, cây ... Bài báo cáo này trình bày kết quả của bài báo **Fei Huang, Xueliang Li, Zhongmei Qin, Colton Magnant, Minimum degree condition for proper connection number 2, Theoret. Comput. Sci (2016)**. Bài báo chỉ ra rằng mối quan hệ giữa số bậc nhỏ nhất của một đồ thị với số $pc(G)$. Để làm rõ định lý và kết quả của bài báo, bài báo cáo của em có bổ sung thêm một số các chứng minh chi tiết và lý thuyết cần sử dụng. Bài báo cáo của em gồm 4 phần:

1. **Tổng quan bài toán.**
2. **Cơ sở lý thuyết chứng minh định lý.**
3. **Chứng minh định lý.**
4. **Phụ lục và Tài liệu tham khảo.**

Để hoàn thành bài báo cáo cuối kì cho môn học Seminar tin học này, em xin gửi lời cảm ơn tới thầy giáo TS. Đoàn Duy Trung đã có những nhận xét, góp ý trong phần trình bày của em để bài báo cáo của em được hoàn thiện hơn.

Hà Nội, ngày 20 tháng 12 năm 2019

1. Tổng quan bài toán

Trong bài báo Proper connection of graph, Discrete Math (2012), các tác giả đã đưa ra định lý:

Định lí 1.1. *Nếu G là một đồ thị liên thông (connected) và không đầy đủ (noncomplete) với số đỉnh $n \geq 68$ và $\delta(G) \geq n/4$ thì $pc(G) = 2$.*

Trong bài báo Properly colored notion of connectivity - dynamic survey, hai tác giả cũng đưa ra giả thuyết rằng:

Giả thuyết 1.2. Nếu G là một đồ thị liên thông và không đầy đủ với số đỉnh $n \geq 5$ và $\delta(G) \geq n/4$ thì $pc(G) = 2$.

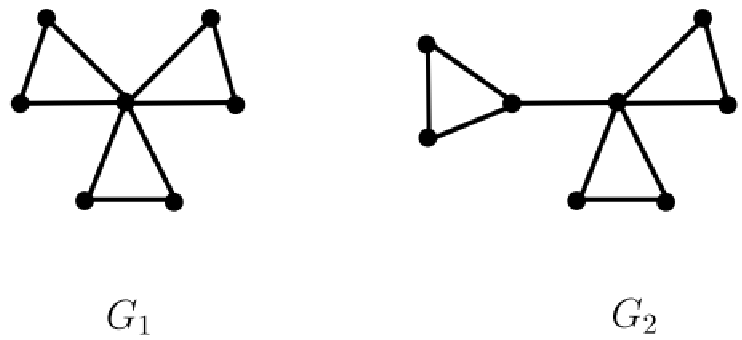
Bài báo Minimum degree condition for proper connection number 2 (2016) mà chúng ta nghiên cứu, các tác giả đã chỉ ra giả thuyết trên là không đầy đủ và phát biểu lại giả thuyết trên dưới định lý sau:

Định lí 1.3. *Cho G là một đồ thị liên thông và không đầy đủ với số đỉnh $n \geq 5$. Nếu $G \notin \{G_1, G_2\}$ và $\delta(G) \geq n/4$, thì $pc(G) = 2$.*

Bài báo đã đưa ra cách chứng minh định lý trên là đúng bằng cách chia định lý lớn trên thành hai định lý nhỏ hơn.

Định lí 1.4. *Cho G là một đồ thị liên thông và không đầy đủ với số đỉnh $n \geq 9$ và $\delta(G) \geq n/4$ thì $pc(G) = 2$.*

Định lí 1.5. *Cho G là một đồ thị liên thông và không đầy đủ với số đỉnh thỏa mãn $5 \leq n \leq 8$. Nếu $G \notin \{G_1, G_2\}$ và $\delta(G) \geq 2$ thì $pc(G) = 2$.*



Hình 1. Hai đồ thị G_1, G_2 của định lý 1.3 và định lý 1.5.

Trong phần phụ lục cuối báo cáo em sẽ chứng minh $pc(G_1) = pc(G_2) = 3$.

Dựa vào chứng minh tính đúng đắn định lý của bài báo, trong bài báo cáo này em sẽ chứng minh **định lý Dirac (1952)** và tập trung chứng minh **định lý 1.5** - là một kết quả chính của bài toán. Để chứng minh định lý 1.5, bài báo cáo của em sử dụng các kết quả, các bổ đề, các định lý sau đây. □

2. Cơ sở lý thuyết chứng minh định lý

1. Các khái niệm cơ bản được sử dụng:

Đường đi Hamilton, Đồ thị Hamilton, Chu trình Hamilton, Đồ thị Hamilton liên thông (Hamilton-connected), đồ thị 2-liên thông (2- connected), đồ thị 3-liên thông (3- connected), đồ thị hai phía (bipartite), đồ thị con bao trùm (spanning subgraph), đồ thị không tầm thường (nontrivial), tai (ear) ,điểm đối cực (antipodal), the strong property, đỉnh cắt (cut vertex),thành phần liên thông(componet), đồ thị đầy đủ, đồ thị $K_{2,3}$, đồ thị $K_{2,4}$, đồ thị K_3, đẳng cấu đồ thị.

Các khái niệm được tham khảo từ cuốn sách **Graph Theory with Application, J. A. Bondy and U. S. R. Murty (1976)**.

2. Các kí hiệu được dùng:

- $|V(G)| = n$ số đỉnh của đồ thị.
- $d_G(v)$ là bậc của đỉnh v trong đồ thị G.
- $\delta(G)$ là bậc của đỉnh có bậc nhỏ nhất trong G.

3.Các hệ quả, bổ đề, Fact được sử dụng:

Hệ quả 2.1. *Cho G là đồ thị 3- connected và không đầy đủ thì $pc(G) = 2$ và tồn tại một cách tô 2 màu để G có strong property under c.*

Bổ đề 2.2. *Cho G là một đồ thị liên thông và v là một đỉnh không thuộc G. Nếu $pc(G) = 2$ thì $pc(G \cup v) = 2$ khi và chỉ khi $d(v) \geq 2$ (tức là ít nhất v có 2 cạnh kề trong G).*

Bổ đề 2.3. *Cho G là đồ thị hai phía và 2- connected thì $pc(G) = 2$ và tồn tại một cách tô 2 màu sao cho G có strong property.*

Bổ đề 2.4. *Cho $H = G \cup \{v_1\} \cup \{v_2\}$.Nếu có một đường đi k- coloring path của G sao cho G có strong property thì $pc(H) \leq k$ với v_1, v_2 không là đỉnh treo trong H.*

Bổ đề 2.5. *Nếu G không là đồ thị tầm thường (đồ thị chỉ có 1 đỉnh) và liên thông và H là đồ thị con bao trùm liên thông của G (spanning subgraph)thì $pc(G) \leq pc(H)$. Cụ thể, $pc(H) \leq pc(T)$ với mọi cây con T của G.*

Fact 1. Mọi đồ thị G 2-connected thì G hoặc là đồ thị Hamilton hoặc là G chứa chu trình C có ít nhất $2\delta(G)$ đỉnh.

4. Các định lý được sử dụng:

Định lí 2.6. *Cho G là đồ thị có n đỉnh.Nếu $\delta(G) \geq n/2$ thì G là đồ thị Hamilton. Nếu $\delta(G) \geq (n-1)/2$ thì G chứa đường đi Hamilton. Nếu $\delta(G) \geq (n+1)/2$ thì G là đồ thị Hamilton liên thông.*

Định lí 2.7. ***(Whitney)*** *Một đồ thị là đồ thị 2- connected khi và chỉ khi nó có một phân rã tai.*

Định lí 2.8. *Mọi đồ thị 3- connected có một đồ thị con hai phía 2- connected.*

Chứng minh định lý 2.7 và định lý 2.8 có thể tham khảo tại quyển sách **Bipartite Graphs and Their Applications, Armen S. Asratian (1998)**.

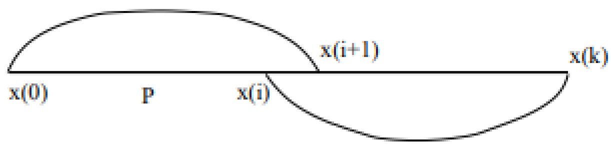
Trong phạm vi của bài báo cáo, em sẽ trình bày cách chứng minh **Định lí 2.6**. Ta sẽ chứng minh phát biểu thứ nhất của định lý, phát biểu này cũng chính là định lý Dirac, 1952. Nếu $\delta(G) \geq n/2$ thì G là đồ thị Hamilton.

Chứng minh. Đầu tiên, ta sẽ chứng minh đồ thị G là đồ thị liên thông bằng phương pháp phản chứng. Giả sử G không liên thông, ta lấy ra thành phần liên thông nhỏ nhất của G.Rõ ràng, thành phần liên thông này chứa tối đa $n/2$ đỉnh. Do đó đỉnh bất kì trong thành phần liên thông này sẽ có bậc tối đa là $n/2 - 1$ đỉnh. Trái với giả thiết đầu bài $\delta(G) \geq n/2$. Vậy G phải liên thông.

Để chứng minh đồ thị liên thông G là đồ thị Hamilton, phương pháp làm ta sẽ lấy đường đi dài nhất của G, ta sẽ chứng tỏ từ đường đi ấy xây dựng được một chu trình Hamilton, nếu chu trình ấy không phải là chu trình Hamilton, ta sẽ chỉ ra được một đường đi dài hơn đường đi vừa xét trong G. Thật vậy, lấy $P = x_0x_1...x_k$ là đường đi dài nhất trong G. Vì P là đường đi dài nhất trong G nên tất cả các đỉnh kề với x_0 và x_k đều thuộc P. Vì $\delta(G) \geq n/2$ nên ít nhất $n/2$ đỉnh $x_0, x_1, ..., x_{k-1}$ kề với x_k và ít nhất $n/2$ đỉnh $x_1, x_2, ..., x_k$ kề với x_0. Nói cách khác:

- Tối thiểu $n/2$ đỉnh $x_i \in \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ để $x_0x_{i+1} \in E(G)$.
- Tối thiểu $n/2$ đỉnh $x_i \in \{x_0, x_1, ..., x_{k-1}\}$ để $x_ix_k \in E(G)$.

Theo nguyên lý Dirchlet $\exists$ một đỉnh $x_i, 0 \leq i \leq k-1$ để $x_ix_k \in E(G)$ và $x_0x_{i+1} \in E(G)$. Như vậy ta sẽ tạo được một chu trình C có độ dài k từ đường đi trên: $x_0 \to x_{i+1} \to x_k \to x_i \to x_0$.



Hình 2. Đường đi P dài nhất của đồ thị G.

Ta sẽ chứng minh C là chu trình Hamilton, thật vậy:

- Nếu $k = n$. Rõ ràng C là chu trình Hamilton.
- Nếu $k < n$, từ P ta sẽ xây dựng được một đường P' có độ dài $k+1$.Thật vậy, gọi u không thuộc C. Do G liên thông nên tồn tại một đỉnh kề x_j trong chu trình C với u. Rõ ràng, ta sẽ xây dựng một đường đi P' có độ dài $k+1$ như sau: $u \to x_j \to x_{i+1} \to x_0 \to x_i \to x_k \to x_{j+1}$. Mâu thuẫn với đường đi dài nhất trong đồ thị có độ dài k.

Vậy định lý trên được chứng minh. □

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh nếu $\delta(G) \geq (n-1)/2$ thì G chứa đường đi Hamilton.

Chứng minh. G có n đỉnh $x_1, x_2, ..., x_n$. Ta thêm một đỉnh x_{n+1} vào đồ thị,rồi nối x_{n+1} với n đỉnh còn lại. Rõ ràng G' có $n+1$ đỉnh, liên thông và $\delta(G) \geq (n-1)/2 + 1 = (n+1)/2$.Theo định lý Dirac, G' sẽ chưá một chu trình Hamilton. Giả sử chu trình đó là: $x_{n+1}x_1x_2...x_nx_{n+1}$. Khi ta lấy x_{n+1} ra khỏi G', rõ ràng ta được đồ thị G chứa một đường đi Hamilton. Vậy định lý được chứng minh. □

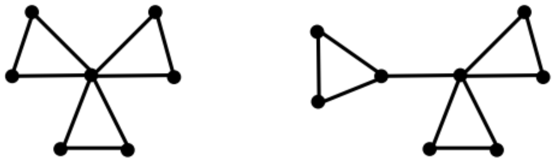
Cuối cùng ta chứng minh nếu $\delta(G) \geq (n+1)/2$ thì G là đồ thị Hamilton liên thông.

Chứng minh. Hệ quả trên được suy ra gián tiếp từ hệ quả của định lý Ore (1960). Cho đồ thị G có n đỉnh sao cho tất cả các đỉnh kề u và v thỏa mãn $d(v)+d(u) \geq (n+1)$, thì G là đồ thị Hamilton-connected. Để chứng minh hệ quả trên phải chứng minh thêm một số hệ quả và định lý trên đó. Lời giải chứng minh mệnh đề trên, có thể tham khảo tại quyển sách: **Graph and Digraph, G.Chartrand, L.LesNiak (2000), từ trang 110-115.** □

Từ các khái niệm cơ bản, hệ quả, bổ đề, các định lý sau đây chúng ta sẽ chứng minh định lý 1.5 - một trong hai định lý chính của bài báo.

3. Chứng minh định lý 1.5

Định lí 1.5. Cho G là một đồ thị liên thông và không đầy đủ với số đỉnh thỏa mãn $5 \leq n \leq 8$. Nếu $G \notin \{G_1, G_2\}$ và $\delta(G) \geq 2$ thì $pc(G) = 2$.



G_1 G_2

Hình 3. Hai đồ thị G_1, G_2 của định lý 1.5

Chứng minh. 1. Dễ dàng kiểm tra $pc(G) = 2$ với $5 \leq n \leq 6$ thì $pc(G) = 2$.
2. Xét $n = 7$, kí hiệu: $k(G)$: số đỉnh mà khi loại đi đồ thị mất tính liên thông (the connectivity). $C(G)$ chu trình dài nhất của G. Nếu $k(G) \geq 3$, theo hệ quả 2.1, ta có $pc(G) = 2$. Vậy ta cần xét hai trường hợp còn lại $k(G) = 1$ hoặc $k(G) = 2$.

TH1. $k(G) = 1$.
Lấy v là đỉnh cắt của G và $C_1, C_2, ..., C_l$ là các thành phần liên thông của $G - v$ thỏa mãn $|C_1| \leq |C_2| \leq ... \leq |C_l|$, do $\delta(G) \geq 2$ nên $|C_1| \geq 2$. Vì vậy l chỉ có thể bằng 2 hoặc bằng 3. Với $l = 3$ thì $G = G_1$, trái với giả thiết $G \notin \{G_1, G_2\}$.Vậy $l = 2$. Với $l = 2$, ta tiếp tục xét hai trường hợp $|C_1| = 2, |C_2| = 4$ hoặc $|C_1| = |C_2| = 3$.

- $|C_1| = 2, |C_2| = 4$.
  Xét $V(C_1) = \{u_1, u_2\}, V(C_2) = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$.Vì $\delta(G) \geq 2$, nên ta có: $G[v \cup C_1]$ là đồ thị K_3.Vì G liên thông, tồn tại ít nhất một cạnh nối từ v đến C_2. Không mất tính tổng quát, giả sử $vw_1 \in E(G)$. Vì $d_G(w_1) \geq 2$ nên w_1 kề với ít nhất một đỉnh trong $\{w_2, w_3, w_4\}$. Giả sử $w_1w_2 \in E(G)$, ta có đường đi $P = u_2u_1vw_1w_2$. Ta có $pc(P) = 2$. Nếu $|E(w_i, P)| \geq 2 (i = 3, 4)$, theo bổ đề 2.2, $pc(G) = 2$. Giả sử $|E(w_3, P)| \leq 1 (i = 3, 4)$. Do $\delta(G) \geq 2$ nên $w_3w_4 \in E(G)$. Nếu $w_iw_2 \in E(G)(i = 3, 4)$, rõ ràng sẽ có một đường đi Hamilton hoặc $u_2u_1vw_1w_2w_3w_4$ hoặc là $u_2u_1vw_1w_2w_4w_3$, suy ra $pc(G) = 2$.Giả sử $w_iw_2 \notin E(G)(i = 3, 4)$. Do vậy $w_iw_2 \notin E(G)(i = 3, 4)$ do C_2 liên thông mà $d_G(w2) \geq 2$ ta có $w_2v \in E(G)$. Ta cũng tìm được đường đi Hamilton $u_2u_1vw_2w_1w_3w_4$ hoặc $u_2u_1vw_2w_1w_4w_3$, do vậy $pc(G) = 2$.

- $|C_1| = |C_2| = 3$.
  Xét $V(C_1) = \{u_1, u_2, u_3\}, V(C_2) = \{w_1, w_2, w_3\}$. Vì C_1 và C_2 là hai thành phần liên thông, C_1 chứa đường đi $P_1 = u_1u_2u_3$ và C_2 chứa đường đi $P_2 = w_1w_2w_3$. Nếu $vu_1 \in E(G)$ hoặc $vu_3 \in E(G)$ thì ta có thể tìm được một đường

đi Hamilton P_1' trong $G[\{v\}\cup C_1]$, với v cuối đường đi của P_1' (endpoint). Ngược lại nếu $vu_3 \in E(G)$, vì $d_G(u_1) \geq 2, d_G(u_3) \geq 2$ nên ta có $u_1u_3 \in E(G)$.Ta cũng có thể tìm được đường đi Hamilton P_1' trong $G[\{v\} \cup C_1]$ với v cuối đường đi của P_1' (endpoint). Tương tự ta có thể tìm thấy đường đi Hamilton P_2' trong $G[\{v\} \cup C_2]$, v cuối đường đi P_2'. Như vậy $P_1' \cup P_2'$ là một đường đi Hamilton trong G vì thế $pc(G) = 2$.

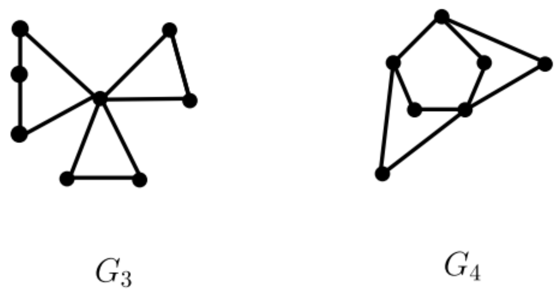
TH2. $k(G) = 2$.
Theo Fact 1, mọi đồ thị G 2-connected thì G hoặc là đồ thị Hamilton hoặc là G chứa chu trình C có ít nhất $2\delta(G)$ đỉnh. Rõ ràng nếu G là đồ thị Hamilton thì $pc(G) = 2$.Ta xét trường hợp còn lại $|C(G)| \geq 4$.

- Xét $|C(G)| = 4$. Theo định lý Whitney, thì $C(G)$ sẽ có một tai (ear) vì G là đồ thị 2- connected. Xét P_1 là tai dài nhất của $C(G)$. Ta thấy rằng P_1 có độ dài là 2 (dễ dàng chứng minh nếu P_1 có độ dài lớn hơn 2 thì chu trình sẽ có độ dài lớn hơn 4) và đỉnh cuối của P_1 là điểm đối cực (antipodal) của $C(G)$. Do vậy G chứa đồ thị con hai phía 2- connected $P_1 \cup C(G) \cong K_{2,3}$. Ta có $G' = P_1 \cup C(G)$ là đồ thị hai phía 2 connected, theo bổ đề 2.3 và bổ đề 2.4, $G = G' \cup \{v_1\} \cup \{v_2\}$ v_1, v_2 không là đỉnh treo trong G, thì $pc(G) \leq pc(G') = 2$. Vậy $pc(G) = 2$.

- Xét $|C(G)| = 5$. Ta thấy hoặc là tồn tại đường đi là Hamilton thì $pc(G) = 2$ hoặc là độ dài đường đi đó là 6. Do tính liên thông của đồ thị và $\delta(G) \geq 2$. Theo bổ đề 2.2 thì $pc(G) = 2$.

- Xét $|C(G) \geq 6$, do $\delta(G) \geq 2$, ta sẽ tìm được đường đi Hamilton trong G nên $pc(G) = 2$.

Như vậy ta đã chứng minh với $n = 7$ thì $pc(G) = 2$. Ta sẽ xét tiếp trường hợp $n = 8$ để hoàn thành định lý trên.
3. Xét $n = 8$ ta cũng chia lời giải thành hai phần tương ứng với giá trị của $k(G)$.



HÌNH 4. Hai đồ thị G_3, G_4 trong trường hợp $n = 8$.

TH1. $k(G) = 1$.
Lấy v là đỉnh cắt của G và $C_1, C_2, ..., C_l$ là các thành phần liên thông của $G - v$ thỏa mãn $|C_1| \leq |C_2| \leq ... \leq |C_l|$, do $\delta(G) \geq 2$ nên $|C_1| \geq 2$. Vì vậy

l chỉ có thể bằng 2 hoặc bằng 3. Với $l = 3$ thì G sẽ chứa một đồ thị con G_3 như hình vẽ dưới đây, dễ dàng kiểm tra $pc(G_3) = 2$ (Cách chứng minh tương tự như chứng minh $pc(G_1) = 3$ trong phần phụ lục). Theo bổ đề 2.5 thì $pc(G) \leq pc(G_3)$, nên ta có $pc(G) = 2$. Với $l = 2$, ta tiếp tục xét hai trường hợp $|C_1| = 2, |C_2| = 5$ hoặc $|C_1| = 3, |C_2| = 4$.

- $|C_1| = 2, |C_2| = 5$.
  Xét $V(C_1) = \{u_1, u_2\}, V(C_2) = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$. Vì $\delta(G) \geq 2$, nên ta có: $G[v \cup C_1]$ là đồ thị K_3. Vì G liên thông, tồn tại ít nhất một cạnh nối từ v đến C_2. Không mất tính tổng quát, giả sử $vw_1 \in E(G)$. Vì $d_G(w_1) \geq 2$ nên w_1 kề với ít nhất một đỉnh trong $\{w_2, w_3, w_4, w_5\}$. Giả sử $w_1w_2 \in E(G)$, ta có đường đi $P = u_2u_1vw_1w_2$. Ta có $pc(P) = 2$. Nếu $|E(w_i, P)| \geq 2 (i = 3, 4, 5)$, theo bổ đề 2.2, $pc(G) = 2$. Nếu tồn tại một đỉnh trong $\{w_3, w_4, w_5\}$ sao cho $|E(w_i, P)| = 0$, không mất tính tổng quát giả sử $|E(w_3, P)| = 0$. Ta có $w_3w_4, w_3w_5 \in E(G)$ vì $d_G(w_3) \geq 2$.Nếu $w_2w_4 \in E(G)$ hoặc $w_2w_5 \in E(G)$, thì có một đường đi Hamilton $u_2u_1v_1w_1w_2w_4w_3w_5$ hoặc $u_2u_1v_1w_1w_2w_5w_3w_4$, suy ra $pc(G) = 2$. Giả sử $w_2w_i \notin E(G)(i = 3, 4, 5)$. Vì $d_G(w_2) \geq 2$, ta có $w_2v \in E(G)$. Vì C_2 liên thông, tồn tại ít nhất một cạnh w_1w_4 hoặc $w_1w_5 \in E(G)$. Ta cũng tìm được đường đi Hamilton $u_2u_1vw_2w_1w_4w_3w_5$ hoặc $u_2u_1vw_2w_1w_5w_3w_4$, do vậy $pc(G) = 2$.
  Giả sử $|E(w_3, P)| = 1$. Vì $d_G(w_3) \geq 2$, giả sử $w_3w_4 \in E(G)$. Nếu $w_2w_3 \in E(G)$ hoặc $w_2w_4 \in E(G)$, theo bổ 2.2, $d_G(w_5) \geq 2$ nên ta có $pc(G) = 2$. Trái lại, $w_2w_3, w_2w_4 \notin E(G)$, ta có $w_2v \in E(G)$ hoặc $w_2w_5 \in E(G)$ vì $d_G(w_2) \geq 2$. Nếu $w_2v \in E(G)$, có một đường đi khác $P' = u_2u_1vw_2w_1$ mà $pc(P') = 2$. Nếu $w_1w_3 \in E(G)$ hoặc $w_1w_4 \in E(G)$, theo bổ đề 2.2, vì $d_G(w_5) \geq 2$ nên $pc(G) = 2$.Do đó ta có $w_3v, w_4v \in E(G)$ vì $E(w_i, P) \geq 1 (i = 3, 4, 5)$. G chứa hoặc là đường đi Hamilton hoặc là đồ thị con G_3 vì $d_G(w_5) \geq 2$. Do đó $pc(G) = 2$. Giả sử $w_2v \notin E(G), w_2w_5 \in E(G)$, ta có $P'' = u_2u_1vw_1w_2w_5$ mà $pc(P'') = 2$.Nếu $w_5w_3 \in E(G)$ hoặc $w_5w_4 \in E(G)$ thì ta tìm được đường đi Hamilton $u_2u_1vw_1w_2w_5w_3w_4$ hoặc $u_2u_1vw_2w_1w_5w_4w_3$, vậy $pc(G) = 2$.Do đó $w_1w_5 \in E(G)$ hoặc $w_5v \in E(G)$ vì $d_G(w_5) \geq 2$. Nếu $w_5v \in E(G)$ thì G chứa một đường đi Hamilton vì C_2 liên thông, $pc(G) = 2$. Giả sử $w_5v \notin E(G)$ và $w_1w_5 \in E(G)$.Vì $G \neq G_2$, ta có G chứa một đường đi Hamilton.Vậy $pc(G) = 2$.

- $|C_1| = 3, |C_2| = 4$.
  Tương tự làm giống với trường hợp $|C_1| = |C_2| = 3$ với $n = 7$. Xét $V(C_1) = \{u_1, u_2, u_3\}, V(C_2) = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$. Vì C_1 và C_2 là hai thành phần liên thông, C_1 chứa đường đi $P_1 = u_1u_2u_3$ và C_2 chứa đường đi $P_2 = w_1w_2w_3$. Nếu $vu_1 \in E(G)$ hoặc $vu_3 \in E(G)$ thì ta có thể tìm được một đường đi Hamilton P_1' trong $G[\{v\} \cup C_1]$, với v cuối đường đi của P_1' (endpoint). Ngược lại nếu $vu_3 \in E(G)$, vì $d_G(u_1) \geq 2, d_G(u_3) \geq 2$ nên ta có $u_1u_3 \in E(G)$. Ta cũng có thể tìm được đường đi Hamilton P_1' trong $G[\{v\} \cup C_1]$ với v cuối đường đi của P_1' (endpoint). Tương tự ta có thể tìm thấy đường đi Hamilton P_2' trong $G[\{v\} \cup \{w_1, w_2, w_3\}]$, v cuối đường đi P_2'. Ta sẽ chứng minh $P_2'' = P_2 \cup \{w_4\}$ là đường đi Hamilton trong $G[\{v\} \cup C_2]$. Thật vậy, vì C_2 liên thông nên w_4 kề với ít nhất một trong các đỉnh $\{w_1, w_2, w_3\}$. Nếu $w_4w_1 \in E(G)$ hoặc $w_4w_3 \in E(G)$ vì $d_G(w_4) \geq 2$ nên w_4 kề với ít nhất một đỉnh $\{w_2, v, w_1\}$ hoặc $\{w_2, v, w_3\}$, ta

có $P_2'' = P_2' \cup \{w_4\}$ là một đường đi Hamilton có v là cuối đường đi. Ngược lại $w_4w_2 \in E(G)$ vì $d_G(w4) \geq 2$ nên $w_4v \in E(G)$, ta tìm được đường đi Hamilton $P_2'' = P_2 \cup \{w_4\}$ trong đó v là cuối đường đi. Như vậy $P_1' \cup P_2''$ là một đường đi Hamilton trong G vì thế $pc(G) = 2$.

TH2. $k(G) = 2$.
Theo Fact 1, mọi đồ thị G 2-connected thì G hoặc là đồ thị Hamilton hoặc là G chứa chu trình C có ít nhất $2\delta(G)$ đỉnh.Rõ ràng nếu G là đồ thị Hamilton thì $pc(G) = 2$.Ta xét trường hợp còn lại $|C(G)| \geq 4$.

- Xét $|C(G)| = 4$. Theo định lý Whitney, thì $C(G)$ sẽ có một tai (ear) vì G là đồ thị 2- connected. Xét P_1 là tai dài nhất của $C(G)$. Ta thấy rằng P_1 có độ dài là 2 (dễ dàng chứng minh nếu P_1 có độ dài lớn hơn 2 thì chu trình sẽ có độ dài lớn hơn 4) và đỉnh cuối của P_1 là điểm đối cực (antipodal) của $C(G)$. Lấy P_2 là tai dài nhất của $C(G) \cup P_1$. Ta có P_2 có độ dài là 2 và đỉnh cuối cùng của P_2 là đỉnh cuối cùng của P_1. Do vậy G sẽ chứa đồ thị con hai phía 2-connected $G' = P_1 \cup P_2 \cup C(G) \cong K_{2,4}$. Theo bổ đề 2.3 và bổ đề 2.4, $G = G' \cup \{v_1\} \cup \{v_2\}$ v_1, v_2 không là đỉnh treo trong G, thì $pc(G) \leq pc(G') = 2$. Vậy $pc(G) = 2$.

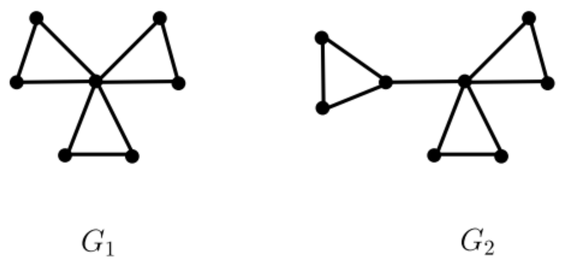
- Xét $|C(G)| = 5$, ta có G sẽ chứa đồ thị con G_4. Theo bổ đề 2.2, $pc(G) = 2$.

- Xét $|C(G) \geq 6$, tồn tại một đường đi Hamilton hoặc tồn tại một đường đi có độ dài là 7. Do $\delta(G) \geq 2$, theo bổ đề 2.2 ta có $pc(G) = 2$.

Vậy định lý 1.5 hoàn toàn được chứng minh. □

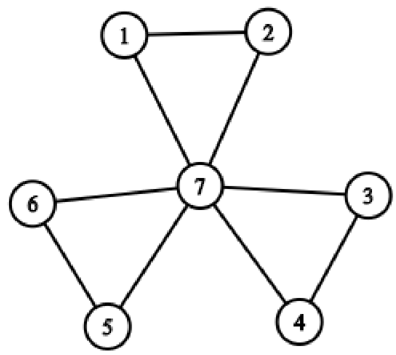
4. Phụ Lục

Trong phần này ta sẽ chứng minh $pc(G_1) = pc(G_2) = 3$.



Hình 5. Hai đồ thị G_1, G_2 của định lý 1.5

Đầu tiên ta sẽ dễ dàng chỉ ra cách tô màu $pc(G_1) = pc(G_2) = 3$. Chúng ta sẽ chứng minh G_1 và G_2 không thể tô được bằng 2 màu. Trong phần này chúng ta sẽ chỉ ra không có cách tô hai màu cho G_1, đối với G_2 là hoàn toàn tương tự. Giả sử chúng ta có hai cách tô màu cho đồ thị G_1 là xanh (X) và đỏ (Đ). Để tiện theo dõi, chúng ta đánh số G_1 như trên hình. Có thể nhận thấy rằng nếu tô màu cạnh $1-7$, $2-7$ sẽ hoàn toàn giống nhau về bản chất vì đồ thị này có tính chất đối xứng.



Hình 6. Đồ thị G_1

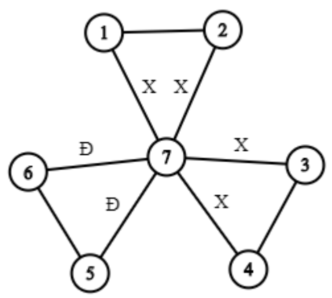
Ta sẽ chứng minh trong cùng một tam giác (1-2-7, 5-6-7, 3-4-7) không thể tồn tại hai cạnh cùng màu.

TH1. Ta nhận thấy rằng không tồn tại cách tô màu để các cặp cạnh (1-7, 2-7), (7-3, 7-4), (7-5, 7-6).Vì từ khu vực (1,2) đến khu vực (3,4). Chẳng hạn được minh họa dưới Hình 7 sau đây.

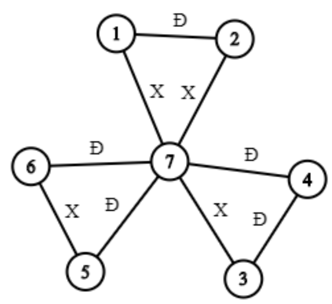
TH2. Tồn tại 2 cạnh khác màu,giả sử 7-6 và 7-5. Ta thấy rằng sẽ không tồn tại đường đi proper path từ 1 đến 3 (Hình 8).

TH3. Tồn tại 2 cặp cạnh đôi một khác màu, giả sử 7-3, 7-4 và 7-6, 7-5. Không tồn tại đường đi proper path từ 4 đến 6. (Hình 9)

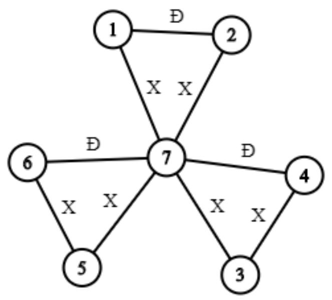
TH4. Cả 3 cặp cạnh đều đôi một khác màu 1-7 và 2-7, 6-7 và 5-7, 4-7 và 3-7. Ta sẽ có 2 trường hợp còn lại để tô màu cho 3 cạnh 1-2, 5-6, 3-4 hoặc là cả 3 cạnh cùng màu, hoặc là 2 cạnh cùng màu và 1 cạnh được tô màu còn lại. Trong cả 2 trường hợp đều xảy ra mâu thuẫn (Hình 10).



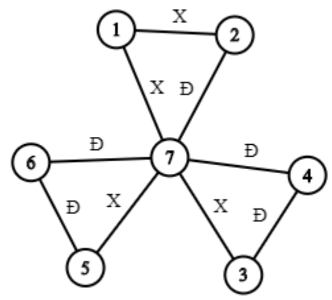
Hình 7. Không tồn tại đường đi proper (1,2) đến (3,4).



Hình 8. Không tồn tại đường đi proper từ đỉnh 1 đến đỉnh 3.



Hình 9. Không tồn tại đường đi proper từ đỉnh 4 đến đỉnh 6.



Hình 10. Không tồn tại đường đi proper từ đỉnh 1 đến đỉnh 4.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] G.Chartrand, L.LesNiak, Graph and Digraph, (2000), trang 110-115.

[2] Armen S. Asratian, Bipartite Graphs and Their Applications (1998), trang 215-217.

[3] J. A. Bondy and U. S. R. Murty,Graph Theory with Application (1976).

[4] Fei Huang, Xueliang Li, Zhongmei Qin, Colton Magnant, Minimum degree condition for proper connection number 2, Theoret. Comput. Sci (2016).

5. Định lý Vizing trong bài toán tô màu đồ thị.

Kí hiệu: $\Delta(G)$: là bậc của đỉnh có bậc lớn nhất trong G, $\chi^{'}(G)$: là số chromatic index của G.

Định lí 5.1. *(Vizing's theorem) Với mọi đơn đồ thị G, $\Delta(G) \leq \chi^{'}(G) \leq \Delta(G) + 1$.*