TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN TOÁN TIN - ỨNG DỤNG

BÁO CÁO ĐỒ ÁN II

MỘT SỐ ĐỊNH LÍ VỀ SỐ PROPER TRONG ĐỒ THỊ LIÊN THÔNG

Giảng viên hướng dẫn: **TS. Đoàn Duy Trung**

Sinh viên thực hiện: **Nguyễn Minh Quân**

Lớp: **KSTN Toán - Tin K61**

HÀ NỘI, 4/2020

Mục lục

Lời mở đầu

Một đường đi trong đồ thị được tô màu cạnh được gọi là một đường đi proper nếu hai cạnh liên tiếp trong đường đi đó không có màu giống nhau. Đối với đồ thị liên thông G, số proper connection, kí hiệu là $pc(G)$, được định nghĩa là số màu nhỏ nhất để tô màu tập cạnh sao cho giữa hai đỉnh bất kì của đồ thị G luôn tồn tại một đường đi proper trong G. Số proper connection là một vấn đề quan trọng trong lĩnh vực lý thuyết đồ thị và có nhiều ứng dụng thực tế trong an toàn thông tin mạng. Hiện tại, chưa có thuật toán tổng quát để kiểm tra số the proper connection của một đồ thị G bất kì. Vì vậy cách tiếp cận hiện nay là dựa trên lý thuyết về đồ thị và lý thuyết toán học để tìm ra số $pc(G)$ hoặc là cận trên của $pc(G)$. Hiện nay các bài báo nghiên cứu về số proper connection tập trung nghiên cứu quan hệ giữa số proper với kích thước của đồ thị, số bậc nhỏ nhất, lớn nhất của đồ thị hay với một số lớp đồ thị đặc biệt như đồ thị k-connected, đồ thị hai phía, cây ... Bài báo cáo tóm tắt các kết quả, phần chứng minh của 3 bài báo [1] Borozan, [2] Brause, [3] Fei Huang, nội dung bài báo cáo gồm 3 phần.

1. **Chương 1 :** Kiến thức cơ sở, các khái niệm liên quan đến số proper và tổng quan vấn đề nghiên cứu. Đó là định nghĩa và các kết quả được sử dụng trong chương 2 và chương 3.

2. **Chương 2 :** Đưa ra những định lý có mối liên hệ mật thiết với giả thuyết và hai phần chứng minh của giả thuyết được nêu ra chương 1.

3. **Chương 3 :** Nêu đánh giá và nhận xét về hai phần chứng minh.

Để hoàn thành bài báo cáo đồ án II tin học này, em xin gửi lời cảm ơn tới thầy giáo TS. Đoàn Duy Trung đã có những nhận xét, góp ý trong phần trình bày của em để bài báo cáo của em được hoàn thiện hơn. Trong quá trình thực hiện do kiến thức còn nhiều hạn chế và thời gian có giới hạn, nên bài báo cáo chắc chắn vẫn còn những thiếu xót, em rất mong những nhận xét và góp ý của thầy cô và các bạn sinh viên để bài báo cáo được hoàn thiện hơn.

Hà Nội, ngày 15 tháng 4 năm 2020

Danh mục kí hiệu

$pc(G)$	số proper của đồ thị G
K_n	đồ thị đầy đủ n đỉnh
$K_{3,3}$	đồ thị hai phía đầy đủ $K_{3,3}$
$[k]$	tập hợp $\{1, 2, ..., k\}$
$d(v)$	bậc của đỉnh v
$\delta(G)$	bậc nhỏ nhất của đồ thị G
$\Delta(G)$	bậc lớn nhất của đồ thị G

Chương 1

Cở sở lý thuyết

Phần này trình bày cơ bản một số kiến thức về đồ thị, các kiến thức này được tham khảo từ [5], đó là kiến thức cơ sở được sử dụng trong các phần tiếp theo của bài báo cáo.

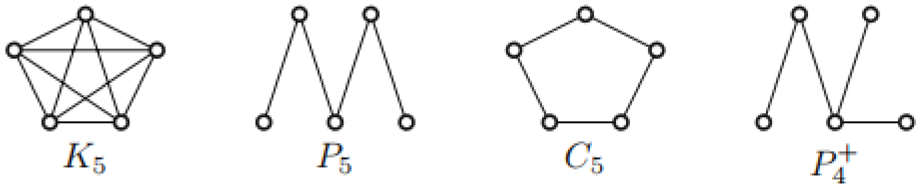
1.1 Một số định nghĩa cơ bản trong lý thuyết đồ thị

Định nghĩa 1.1.1. *(Đồ thị vô hướng)*
Một đồ thị vô hướng G là một cặp có thứ tự $G = (V, E)$, với V là một tập, còn E là tập với các phần tử là các đa tập lực lượng hai trên V. Các phần tử của V được gọi là đỉnh, còn các phần tử của E được gọi là các cạnh của đồ thị vô hướng G. Nếu $e = \{a, b\}$ là một cạnh của G thì a, b được gọi là các đỉnh liên thuộc với e. Cạnh có dạng $\{a, a\}$ với $a \in V$ được gọi là khuyên.

Định nghĩa 1.1.2. *(Bậc đỉnh của đồ thị)*
Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng. Với đỉnh $v \in V$, đặt $N_G(v) = \{\{v, u\} \in E : u \in V\}$. Lực lượng của $N_G(v)$ được gọi là bậc của đỉnh v trong G, được kí hiệu là $d_G(v)$.

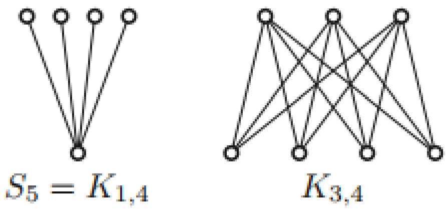
Số bậc nhỏ nhất trong tất cả các đỉnh của đồ thị, được gọi là bậc nhỏ nhất của đồ thị, kí hiệu $\delta(G)$. Tương tự số bậc lớn nhất trong tất cả các đỉnh của đồ thị, được gọi là bậc lớn nhất của đồ thị, kí hiệu $\Delta(G)$.

Đồ thị duy nhất có số đỉnh là n và số cạnh là $\binom{n}{2}$ được gọi là đồ thị đầy đủ kí hiệu là K_n. Một đường đi (path) qua n đỉnh, kí hiệu là P_n, là đồ thị gồm n đỉnh $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ và tất cả các cạnh có dạng v_iv_{i+1} với $1 \leq i \leq n - 1$. Khi đó, ta thường gọi đường đi đó là (v_1, v_n)- path. Với một đường đi P và hai đỉnh $x_1, x_2 \in V(P)$, ta kí hiệu x_1Px_2 là đường đi con của P từ x_1 đến x_2. Một chu kì đi qua n đỉnh, kí hiệu là C_n bao gồm đường đi n đỉnh định nghĩa như trên và thêm cạnh v_1v_n. Một cây là một đồ thị liên thông không có chu kì.



Hình 1.1: Các đồ thị đầy đủ, đường đi, chu kì và cây.

Một đồ thị G là hai phía nếu có một phân hoạch của $V(G)$ thành hai tập A và B sao cho mọi đỉnh $e \in E(G)$, một đỉnh của e thuộc vào A và đỉnh còn lại thuộc vào B. Cho hai số nguyên dương a và b, đồ thị hai phía $G = A \cup B$ được gọi là đồ thị hai phía đầy đủ, kí hiệu là $K_{a,b}$, nếu $|A| = a$ và $|B| = b$, một đỉnh thuộc tập A kết nối với mọi đỉnh thuộc tập B.



Hình 1.2: Các đồ thị hai phía đầy đủ $K_{1,4}$ và $K_{3,4}$.

Định nghĩa 1.1.3. *(Đồ thị con)*
Đồ thị vô hướng $H = (V', E')$ được gọi là đồ thị con của đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ nếu $V' \subseteq V$ và $E \subseteq E'$.
Đồ thị con $H = (V', E')$ của đồ thị $G = (V, E)$ được gọi là đồ thị con bao trùm của G nếu $V' = V$.
Đồ thị con cảm sinh bởi tập đỉnh $V' \subseteq V$ của G kí hiệu là $G[V']$, là một đồ thị con của G có tập đỉnh là V' và tất cả các cạnh của G có hai đầu mút thuộc V'.

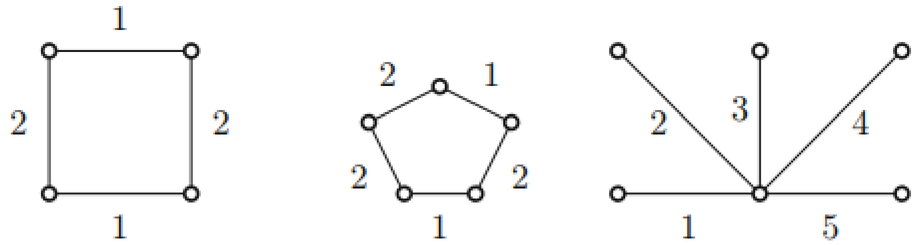
Đồ thị G được gọi là liên thông, nếu giữa hai đỉnh bất kì thuộc G luôn có một đường đi kết nối chúng. Với mọi số nguyên dương k, một đồ thị được gọi là k-liên thông nếu xóa đi $k - 1$ đỉnh bất kì của $V(G)$, ta được đồ thị mới vẫn liên thông. Một đỉnh của một đồ thị 1-liên thông được gọi là đỉnh cắt nếu loại bỏ đỉnh đó đồ thị mới sẽ không liên thông hay số thành phần liên thông sẽ tăng lên.

1.2 Một số định nghĩa cụ thể về số proper

Xét đồ thị G liên thông và được tô màu tập cạnh. Một đường đi trong G được gọi là một đường đi proper nếu hai cạnh kề của đường đi đó được tô màu khác nhau. Một đồ thị tô màu cạnh G được gọi là proper connected nếu hai đỉnh bất kì của đồ thị đó luôn được kết nối bởi một đường đi proper.

Định nghĩa 1.2.1. *Số proper connection của đồ thị liên thông G, kí hiệu là $pc(G)$, là số màu nhỏ nhất của cách tô màu c, sao cho với cách tô màu c thì G là đồ thị proper connected.*

Hình 1.3 xét một số đồ thị proper connected. Với hai đồ thị đầu tiên chỉ sử dụng hai màu, nên $pc(C_4) \leq 2$ và $pc(C_5) \leq 2$. Không khó để nhận ra rằng $pc(C_n) = 2$ với $\forall n \geq 4$. Đồ thị thứ ba S_5 là đồ thị hình sao gồm 5 cạnh, dễ dàng $pc(S_5) = 5$.



Hình 1.3: Các đồ thị proper connected C_4, C_5 và S_5

Xét một đường đi được tô màu $P = v_1v_2...v_{s-1}v_s$ kết nối giữa hai đỉnh v_1 và v_s, ta kí hiệu $start(P)$ là màu tô cho cạnh đầu tiên của đường đi $c(v_1v_2)$ và $end(P)$ là màu tô cho cạnh cuối cùng của đường đi. Nếu P chỉ là một cạnh thì $start(P) = end(P) = c(v_1v_s)$.

Định nghĩa 1.2.2. *Xét một cách tô màu cạnh c của G để G là đồ thị proper connected. Ta nói G có tính strong property bởi c nếu giữa hai đỉnh bất kì $u, v \in V(G)$, tồn tại hai đường đi proper P_1, P_2 từ u tới v (không nhất thiết phải rời rạc) sao cho $start(P_1) \neq start(P_2)$ và $end(P_1) \neq end(P_2)$.*

Xét hai đỉnh bất kỳ của đồ thị C_4 trong hình 1.3, luôn tồn tại hai đường đi proper P_1 và P_2 sao cho $start(P_1) = 2 \neq start(P_2) = 1$ và $end(P_1) = 1 \neq end(P_2) = 2$. Như vậy C_4 có tính strong property. Rõ ràng đồ thị C_5 trong hình 1.3 không có tính strong property do tồn tại hai đỉnh u, v của đồ thị không thỏa mãn định nghĩa trên.

1.3 Tổng quan về giả thuyết của Borozan

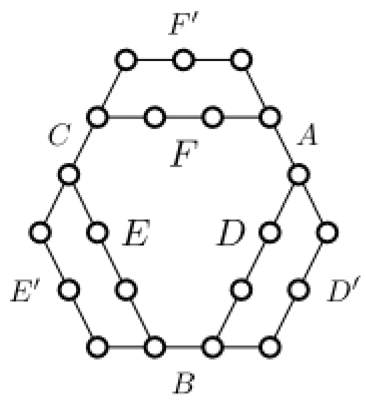
Trong bài báo [1] Borozan, các tác giả đã giới thiệu các khái niệm, bổ đề và định lí quan trọng về các lớp đồ đầy đủ, đồ thị hai phía đầy đủ, các lớp đồ thị k-liên thông,... Trong đó có các tác giả đã chứng minh được rằng.

Định lí 1.3.1. (Borozan et al. [1]) *Nếu G là đồ thị 2-liên thông, tồn tại một cách tô 3 màu cho tập cạnh để đồ thị có tính strong property.*

Như vậy đối với lớp đồ thị 2-liên thông, số $pc(G)$ của đồ thị sẽ thỏa mãn $2 \leq pc(G) \leq 3$. Việc kiểm tra $pc(G) = 2$ hay $pc(G) = 3$ là một bài toán khó và cho đến nay chưa có thuật toán để kiểm tra. Cũng trong bài báo này, các tác giả đã chỉ ra được một đồ thị 2-liên thông, cũng đã được chứng minh là nhỏ nhất, có số $pc(B) = 3$, đồ thị trong hình 1.4. Ta cũng thấy với mọi đỉnh $u \in V(B)$ thì $2 \leq d_B(u) \leq 3$. Từ đó, bài báo [1] Borozan đã đưa ra giả thuyết.

Giả thuyết 1.3.2. (Borozan et al. [1]) *Nếu G là đồ thị 2-liên thông và $\delta(G) \geq 3$ thì $pc(G) = 2$.*

Hình 1.4 biểu diễn đồ thị G là 2-liên thông với $\delta(G) = 2$ và $pc(G) = 3$, như vậy $\delta(G) \geq 3$ sẽ là sắc nét nếu giả thuyết 1.3.2 là chính xác. Nếu giả thuyết trên là chính xác và được chứng minh trở thành định lý, thì giả thuyết trên sẽ là một kết quả rất tổng quát về số $pc(G) = 2$ của đồ thị 2-liên thông.

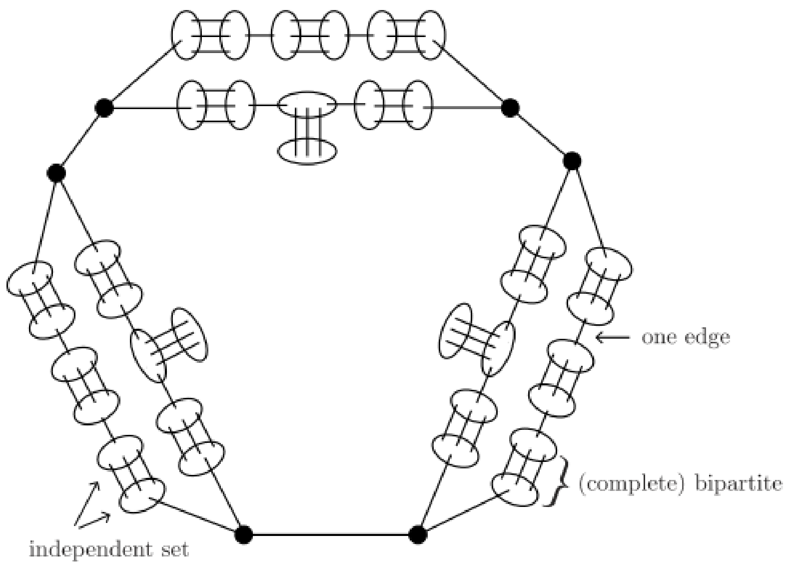


Hình 1.4: Đồ thị 2-liên thông nhỏ nhất với số $pc(B) = 3$.

Trong bài báo [2] Brause et al. và bài báo [3] Fei Huang et al. , các tác giả đã độc lập đưa ra hai lời giải khác nhau để phủ định giả thuyết trên.

Định lí 1.3.3. (Brause et al. [2]) *Với số nguyên $d \geq 3$, tồn tại đồ thị G là 2-liên thông có bậc nhỏ nhất là d và kích thước $n = 42d$ sao cho $pc(G) \geq 3$.*

Định lí 1.3.4. (Fei Huang al. [3]) *Xét G là đồ thị liên thông như hình 1.5 sao cho mọi đồ thị hai phía đầy đủ chứa ít nhất một đỉnh. Khi đó, $pc(G) = 3$.Khi mọi đồ thị hai phía đầy đủ chứa một bản sao của $K_{3,3}$, ta phủ định giả thuyết 1.3.2 .*



Hình 1.5: Phản ví dụ của giả thuyết 1.3.2.

Các định lý trên đều được chứng minh là đúng đắn. Trong cách chứng minh, các tác giả của hai bài báo đều đưa ra được hai phản ví dụ khác nhau để bác bỏ giả thuyết 1.3.2. Cách cách chứng minh của hai bài báo và các cách xây dựng hai đồ thị sẽ được trình bày cụ thể ở nội dung chương 2.

Chương 2

Hai phương pháp xây dựng đồ thị phản ví dụ

Chương này sẽ trình bày kết quả và phần chứng minh của hai bài báo, bài báo số [2] Brause et al. và bài báo số [3] Fei Huang et al., để phủ định giả thuyết được nêu ra ở bài báo số [1] Borozan et al.

2.1 Một số kết quả quan trọng trong bài báo thứ nhất

Sau đây, chúng ta sẽ đưa ra các kết quả của số $pc(G)$ đối với các lớp đồ thị thông thường, các kết quả này được chủ yếu lấy từ bài báo [1] Borozan.

Kết quả 2.1.1. *Đồ thị G có số $pc(G) = 1$ khi và chỉ khi G là đồ thị đầy đủ.*

Kết quả 2.1.2. *Với $n \geq 3$, $pc(P_n) = 2$ và nếu $n \geq 4, pc(C_n) = 2$.*

Các kết quả này hết sức hiển nhiên, trong đồ thị đầy đủ một đỉnh bất kì sẽ nối với tất cả các đỉnh khác. Đối với đồ thị P_n, C_n ta dễ dàng chỉ ra một cách tô 2 màu để nó trở thành proper connected.

Định lí 2.1.3. (Borozan et al. [1]) *Nếu G là đồ thị 2-liên thông, tồn tại một cách tô 3 màu cho tập cạnh để đồ thị có tính strong property.*

Như vậy định lý trên đã chỉ rằng đối với đồ thị 2-liên thông thì số $pc(G) \leq 3$.

Định lí 2.1.4. (Borozan et al. [1]) *Nếu G là đồ thị 2-liên thông và hai phía, tồn tại một cách tô 2 màu cho tập cạnh để đồ thị có tính strong property.*

Do mỗi đồ thị 3-liên thông luôn chứa một đồ thị con bao trùm hai phía 2- liên thông nên ta có định lí sau.

Định lí 2.1.5. (Borozan et al. [1]) *Nếu G là đồ thị 3-liên thông, tồn tại một cách tô 2 màu cho tập cạnh để đồ thị có tính strong property.*

2.2 Phương pháp xây dựng đồ thị trong bài báo thứ hai

Trước khi chứng minh định lý, ta xét bổ đề sau:

Bổ đề 2.2.1. (Brause et al. [2]) *Với số nguyên $k \geq 3$, $K_{k,k}$ là đồ thị hai phía đầy đủ với $2k$ đỉnh, G là đồ thị 2- liên thông với số $pc(G) \geq 3$ sao cho $V(G) \cap V(K_{k,k}) = \emptyset$, $v \in V(G)$ sao cho $d_G(v) \leq 3$ với $\{v_i, i \in [d_G(v)]\}$ là các đỉnh kề với nó, u_1, u_2, u_3 là các đỉnh thuộc cùng một phía của đồ thị $K_{k,k}$ và G' là đồ thị thu được từ G loại bỏ đỉnh v, kết nối với đồ thị $K_{k,k}$ và các cạnh u_iv_i với $i \in [d_G(v)]$. Khi đó, $pc(G') \geq 3$ và G' là đồ thị 2-liên thông.*

Chứng minh. Đầu tiên ta sẽ chứng minh $pc(G') \geq 3$ bằng phương pháp phản chứng. Giả sử $pc(G') \leq 2$. Dễ thấy rằng G' không là đồ thị đầy đủ nên $pc(G') \geq 2$, ta xét $pc(G') = 2$. Xét cách tô màu c' sử dụng 2 màu để G' là đồ thị properly liên thông. Ta định nghĩa cách tô màu c cho đồ thị G như sau: $c(e) = c'(e)$ với $e \in E(G) \cap E(G')$ và $c(vv_i) = c'(u_iv_i)$ với $i \in [d_G(v)]$.
Xét hai đỉnh phân biệt $w_1, w_2 \in V(G)$, ta sẽ chỉ ra rằng luôn tồn tại đường đi proper trong G bởi cách tô màu c.

TH1. $w_1, w_2 \in V(G)\backslash\{v\}$. Xét hai đỉnh $x_1, x_2 \in V(G')$ sao cho $x_1 = w_1, x_2 = w_2$. Vì G' là đồ thị properly theo cách tô màu c' nên tồn tại đường đi proper giữa hai đỉnh x_1, x_2, gọi là P. Có hai trường hợp xảy ra: P không chứa cạnh nào $\{u_iv_i, i \in [d_G(v)]\}$và P chứa hai cạnh $\{u_iv_i, i \in [d_G(v)]\}$.

- P không chứa cạnh nào $\{u_iv_i, i \in [d_G(v)]\}$. Dễ thấy P sẽ là đường đi proper giữa hai đỉnh w_1, w_2 trong G bởi cách tô màu c.
- P chứa đúng hai cạnh $\{u_iv_i, i \in [d_G(v)]\}$, không mất tính tổng quát giả sử hai cạnh đó là u_1v_1, u_2v_2 và x_1 đến u_1 trước u_2. Ta có tất cả các đỉnh trong của v_1Pv_2 đều thuộc đồ thị $K_{k,k}$ và $K_{k,k}$ là đồ thị hai phía nên v_1Pv_2 có độ dài chẵn, từ đó $c'(v_1u_1) \neq c'(v_2u_2)$ hay $c(v_1v) \neq c(v_2v)$. Đường đi $w_1 = x_1Pv_1vv_2Px_2 = w_2$ là đường đi proper trong G bởi cách tô màu c.

TH2. $w_1, w_2 \in V(G)$. Xét hai đỉnh $x_1, x_2 \in V(G')$, không mất tính tổng quát, giả sử $w_1 = v$ và $x_1 = u_1$, $x_2 = w_2$. Với cách tô màu c' cho đồ thị G' nên giữa hai đỉnh x_1, x_2 tồn tại đường đi proper gọi là P. Có hai trường hợp xảy ra, P chứa một cạnh $\{u_iv_i, i \in [d_G(v)]\}$ và P chứa cả 3 cạnh $\{u_iv_i, i \in [d_G(v)]\}$.

- P chứa đúng 1 cạnh $\{u_iv_i, i \in [d_G(v)]\}$. Có hai trường hợp xảy ra. Trường hợp 1, P có dạng $x_1 = u_1v_1Px_2 = w_2$ vì $c(u_1v_1) = c(vv_1)$ nên ta có $w_1 = vv_1Px_2 = w_2$ là đường đi proper trong G bởi cách tô màu c. Trường hợp 2, P có dạng $x_1 = u_1Pu_2v_2Pw_2 = x_2$, tất cả các đỉnh trong u_1Pu_2 đều thuộc đồ thị $K_{k,k}$ nên ta có $w_1 = vv_2Px_2 = w_1$ là đường đi proper trong G bởi cách tô màu c.

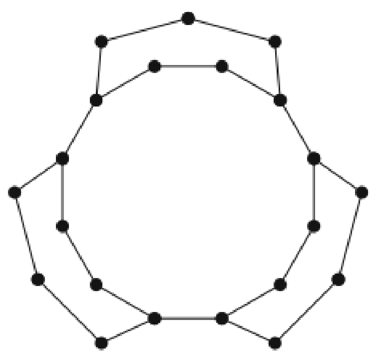
- P chứa cả 3 cạnh là u_1v_1, u_2v_2, u_3v_3 trong đó, không mất tính tổng quát giả sử v_3 là đỉnh khoảng cách ngắn nhất đến x_2. Khi đó P có dạng là $x_1 = u_1v_1Pv_2u_2Pu_3v_3Px_2$, trong đó các đỉnh trong của $u_1v_1Pv_2, u_3v_3Px_2 \in V(G)\backslash\{v\}$, các đỉnh u_2Pu_3 thuộc $K_{k,k}$ nên ta có: $w_1 = vv_3Px_2 = w_2$ là đường đi proper trong G bởi c.

Như vậy với cách tô màu c, luôn tồn tại đường đi proper giữa hai đỉnh w_1, w_2 trong G. Mặt khác cách tô màu c luôn có số màu nhỏ hơn hoặc bằng cách tô màu c', tức là $pc(G) \leq pc(G') = 2$. Trái với giả thiết $pc(G) \geq 3$. Mâu thuẫn, vậy ta được điều phải chứng minh $pc(G') \geq 3$.

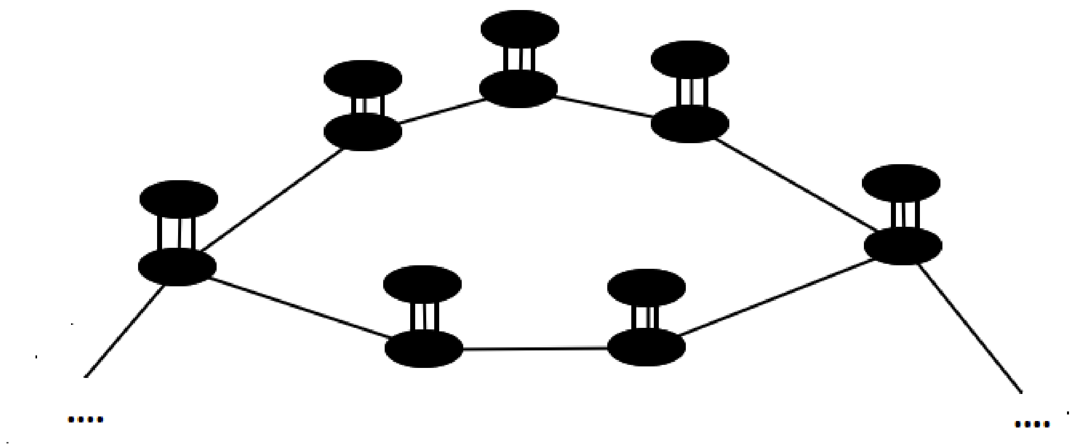
Cuối cùng ta sẽ chứng minh G' là đồ thị 2- liên thông bằng phương pháp phản chứng.Ta thấy rằng vì G là đồ thị 2-liên thông nên $2 \leq d_G(v) \leq 3$. Giả sử G' không là đồ thị 2-liên thông, tức là G' có một đỉnh cắt là x. Nếu $x \in V(G)\backslash\{v\}$ thì $G' - x$ sẽ liên thông. Nếu $x \in V(G')\backslash V(G)$ thì $G' - x$ vẫn liên thông. Mâu thuẫn với x là đỉnh cắt. Vậy G' là 2-liên thông. □

Dựa vào bổ đề trên, ta đi đến chứng minh định lí.

Định lí 1.3.3 (Brause et al. [2]) *Với số nguyên $d \geq 3$, tồn tại đồ thị G là 2-liên thông có bậc nhỏ nhất là d và kích thước $n = 42d$ sao cho $pc(G) \geq 3$.*



Hình 2.1: Đồ thị B với số $pc(B) = 3$

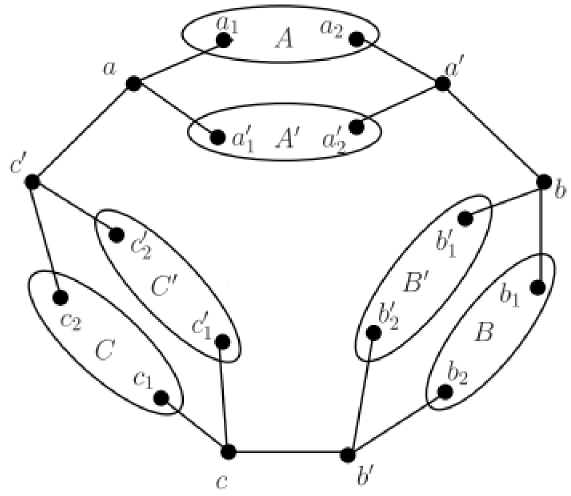


Hình 2.2: Đồ thị của định lý 1.3.3

Chứng minh. Xét đồ thị B trong hình 1, B là đồ thị 2-liên thông với số $pc(B) = 3$, các đỉnh trong đồ thị này có bậc lớn nhất là 3. Thay mỗi đỉnh của đồ thị B bằng một đồ thị hai phía $K_{d,d}$ với $d \geq 3$ theo bổ để 3.1, với thứ tự các đỉnh tùy ý. Từ đó ta được đồ thị G' là 2-liên thông có $pc(G') \geq 3$, có số đỉnh là $n(G') = 21(2d) = 42d$ và rõ ràng bậc nhỏ nhất của đồ thị G' luôn lớn hơn hoặc bằng 3, hình 2.2 . Như vậy ta đã phủ định được giả thuyết 1.3.2 bằng cách chứng minh tính đúng đắn của định lý . □

2.3 Phương pháp xây dựng đồ thị trong bài báo thứ ba

Ta sẽ phủ định giả thuyết 1.3.2 bằng phản ví dụ được trình bày trong định lí 1.3.4.
Định lí 1.3.4. (Fei Huang al. [3]) *Xét G là đồ thị liên thông như hình 1.5 sao cho mọi đồ thị hai phía đầy đủ chứa ít nhất một đỉnh. Khi đó, $pc(G) = 3$.Khi mọi đồ thị hai phía đầy đủ chứa một bản sao của $K_{3,3}$, ta phủ định giả thuyết 1.3.2 .*

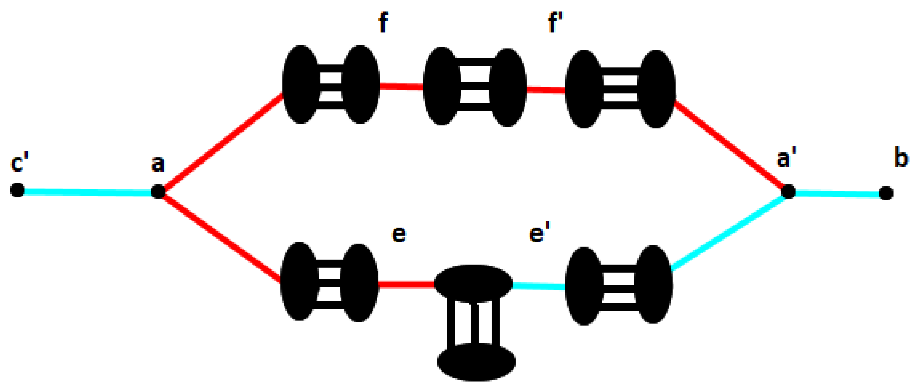


Hình 2.3: Gán nhãn cho đồ thị G.

Chứng minh. Đầu tiên để đơn giản ta sẽ gán nhãn đồ thị G như trong hình 2.3, trong đó các đồ thị con sẽ tương ứng với đồ thị con trong hình 1.5. Theo định lí 2.1.3, G là đồ thị 2-liên thông nên $pc(G) \leq 3$. Ta sẽ chứng minh đầy đủ $pc(G) \neq 2$. Bằng phương pháp phản chứng, giả sử có một cách tô 2 màu c để G là đồ thị proper. Nghĩa là với hai đỉnh bất kì của G luôn có một đường đi proper kết nối chúng.

Kết quả 2.3.1. (Fei Huang et al. [3]) *Với mỗi cặp $(A, A'), (B, B')$ và (C, C'), xét (A, A'), tồn tại một đỉnh $v \in A \cup A'$ sao cho hoặc là tất cả các đường đi proper từ v đến $G\backslash(A \cup A')$ chỉ đi qua cạnh ac' và không đi qua cạnh $a'b$ hoặc là tất cả các đường đi proper từ v đến $G\backslash(A \cup A')$ chỉ đi qua cạnh $a'b$ và không đi cạnh ac'.*

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh khẳng định trên bằng phương pháp phản chứng. Giả sử mọi đỉnh thuộc $A \cup A'$ có đường đi proper đến $G\backslash(A \cup A')$ thông qua cạnh $a'c$ và cũng có đường đi proper đến $G\backslash(A \cup A')$ thông qua $a'b$. Xét $f = v_1v_2, f' = v_3v_4$ là hai cạnh cắt trong $G[A]$, trong đó f là cạnh gần với đỉnh a và f' là cạnh gần với a'. Xét $e = u_1u_2, e' = u_3u_4$ là hai cạnh cắt trong $G[A']$, trong đó e là cạnh gần với đỉnh a và e' là cạnh gần với a'. Và cũng giả sử các đỉnh v_1, u_1 gần với đỉnh a và v_4, u_4 gần với đỉnh a'.



Hình 2.4: Không tồn tại đường đi proper từ đỉnh thuộc thành phần A' đến đỉnh $G\backslash(A \cup A')$ thông qua $a'b$.

Nếu cạnh aa_1 và cạnh f có màu khác nhau, mọi đường đi proper từ v_2 đến $G\backslash A$ phải đi qua cạnh a_2a'. Đỉnh v_2 đến A' bằng $a'a'_2$, đi đến $G\backslash(A\cup A')$ qua cạnh $a'b$. Do đó $a'a'_2$ và $a'b$ phải cùng màu. Do vậy a'_2 sẽ không có đường đi proper tới $G\backslash(A\cup A')$ thông qua cạnh $a'b$, mâu thuẫn. Do đó, aa_1, f phải cùng màu. Lập luận tương tự ta có f', a_2a' phải cùng màu, mặt khác f, f' cùng màu bởi $K_{3,3}$ đường đi từ một đỉnh thuộc thành phần bên này sang đỉnh thuộc thành phần bên kia có độ dài lẻ. Như vậy ta được các cạnh a_1a, f, f' và a_2a' cùng được tô một màu.

Ta có đường đi từ đỉnh a và a' thông qua A sẽ có độ dài lẻ. Ta có đường đi từ đỉnh a và a' thông qua A' sẽ có độ dài chẵn. Nếu $a'a_2$ và $a'b$ được tô màu giống nhau, sẽ không tồn tại đường đi proper từ a_2 đến $G\backslash(A \cup A')$ thông qua cạnh $a'b$, bởi nếu a_2 đi từ A đến A' và tới đỉnh a', tiếp đến b đường đi sẽ có độ dài lẻ, tức là $a'a_2, a'b$ khác màu, mâu thuẫn. Vậy $a'a_2, a'b$ phải khác màu. Lập luận tương tương tự aa_1 và ac' phải khác màu.

Nếu e được tô màu khác với cạnh aa'_1, khi đó u_2 sẽ không có đường đi proper từ A' thông qua cạnh a'_1a. Vì $a_2a', a'b$ khác màu, nên a'_2a' phải mang một trong hai màu. Điều đó có nghĩa là u_2 sẽ có đường đi proper đến $G\backslash(A \cup A')$ thông qua chỉ một trong hai cạnh ac' hoặc $a'b$, mâu thuẫn. Do đó e và aa'_1 được tô cùng màu. Lập luận tương tự e' và $a'a'_2$ được tô cùng màu.

Nếu cạnh e và cạnh e' được tô cùng màu, u_1 sẽ không có đường đi proper từ A' qua cạnh a'_2a'. Do đó u_1 không có đường đi proper thông qua $a'b$ hoặc ac', mâu thuẫn. Như vậy cạnh e và cạnh e' phải khác màu. Từ đó ta cũng được các cạnh aa_1 và $a'a'_2$ khác màu.

Do tính chất đối xứng của đồ thị, không mất tính tổng quát, giả sử cạnh aa'_1 và cạnh aa_1 cùng màu, $a'a'_2$ cùng màu với $a'b$. Từ đó mọi đỉnh trong A' sẽ không có đường đi proper đến$G\backslash(A \cup A')$ thông qua cạnh $a'b$, mâu thuẫn. Chúng ta có thể quan sát hình 2.4, như là một ví dụ.

Như vậy, tồn tại một đỉnh $v \in A \cup A'$ sao cho hoặc là tất cả các đường đi proper từ v đến $G\backslash(A \cup A')$ đi qua cạnh ac' thay vì cạnh $a'b$ hoặc là tất cả các đường đi proper từ v đến $G\backslash(A \cup A')$ đi qua cạnh $a'b$ thay vì cạnh ac'. Lập luận tương tự đối với $B \cup B'$ và $C \cup C'$, ta chứng minh được khẳng định trên. □

Xét đỉnh a^* thuộc $A \cup A'$ từ khẳng định trên và tương tự với b^* và c^*. Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại một cặp đường đi để các bộ của chúng cùng theo một hướng. Không mất tính tổng quát giả sử tất cả đường đi proper từ đỉnh a^* đến $G\backslash(A \cup A')$ chỉ thông qua cạnh ac' (không qua $a'b$) và tất cả các đường đi proper từ đỉnh b^* đến $G\backslash(B \cup B')$ chỉ thông qua cạnh ba' (không qua $b'c$). Như vậy không tồn tại đường đi proper giữa hai đỉnh a^* đến b^*. Như vậy $pc(G) \neq 2$ hay $pc(G) = 3$, ta phủ định được giả thuyết 1.3.2. □

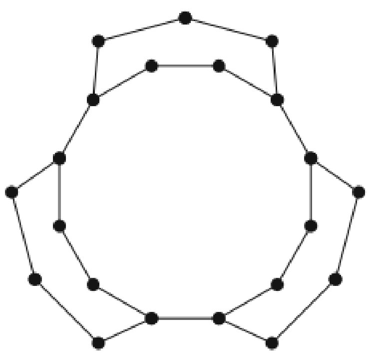
Chương 3

Nhận xét và so sánh về hai phương pháp chứng minh

Trong cả hai phương pháp xây dựng đồ thị trong bài báo [2] Brause và bài báo [3] Huang, có thể những thấy những điểm tương đồng và những điểm khác nhau trong việc thay thế các đỉnh của đồ thị gốc Borozan.

3.1 Sự tương đồng của hai phương pháp chứng minh

Bằng đánh giá trực quan, chúng ta có thể thấy rằng cả hai phương pháp chứng minh đều xây dựng từ đồ thị cơ sở là đồ thị B là 2- liên thông, $\delta(B) = 2$ và $pc(B) = 3$.



Hình 3.1: Đồ thị B với số $pc(B) = 3$.

Trong cả hai phương pháp xây dựng,việc cách thay thế một số đỉnh của đồ thị cơ sở B bằng một số đồ thị hai phía đầy đủ $K_{3,3}$, giúp đảm bảo đồ thị mới G có $\delta(G) \geq 3$ và cũng đảm bảo đồ thị mới là 2-liên thông.

Bằng cách thay thể đồ thị $K_{3,3}$ bằng các đồ thị $K_{k,k}, k \geq 3$ trong các đồ thị của từng bài, ta sẽ được các đồ thị có số đỉnh lớn hơn vẫn thỏa mãn điều kiện của từng phương pháp. Như vậy, cả hai phương pháp đều xây dựng được một lớp đồ thị tổng quát để phản ví dụ của giả thuyết 1.3.2.

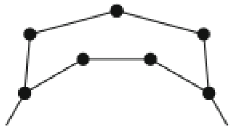
3.2 So sánh hai phương pháp xây dựng đồ thị

Phương pháp xây dựng đồ thị thứ nhất trong bài báo Brause [2].

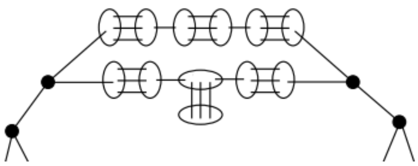
Đối với phương pháp xây dựng đồ thị trong phương pháp chứng minh thứ nhất, đầu tiên với cách thay thế đỉnh v của một đồ thị 2-liên thông có bậc ($2 \leq d_G(v) \leq 3$) bằng cách sử dụng đồ thị $K_{3,3}$, điều này giúp thay thế và loại bỏ những đỉnh có bậc bằng 2, để phù hợp với điều kiện của giả thuyết là $\delta(G) = 3$, hơn nữa với cách xây dựng này đồ thị mới tạo ra vẫn là đồ thị 2-liên thông. Với cách xây dựng này, số đỉnh nhỏ nhất để tạo ra đồ thị mới là phản ví dụ của giả thuyết là đồ thị có 126 đỉnh.

Phương pháp xây dựng đồ thị thứ hai trong bài báo Fei Huang [3].

Đối với phương pháp xây dựng đồ thị trong phương pháp chứng minh thứ hai. Tác giả đã thay thế tất cả các đỉnh có bậc là 2 trong đồ thị cơ sở B là các đồ thị $K_{3,3}$ và kết nối chúng một cách hợp lý, hình 3.2, hình 3.3. Tác giả đã đưa ra một cách kết nối tương ứng hoàn toàn với đồ thị nguyên gốc. Với cách xây dựng này, ta nhận thấy rằng đường đi từ đỉnh bậc 3 phía bên tay trái đến đỉnh bậc ba ở phía bên tay phải vẫn có thể đi bằng hai con đường, con đường phía trên độ dài chẵn và con đường phía dưới độ dài lẻ, tức là so với đồ thị nguyên gốc không thay đổi. Nói tóm lại, từ một chu kì lẻ của đồ thị con ban đầu, việc thay thế vẫn tạo ra được một chu kì lẻ tương ứng. Với cách xây dựng như vậy, không thể giảm bớt được số đỉnh trong cách xây dựng của tác giả. Số đỉnh lúc này sẽ là 38 của đồ thị con và tổng số đỉnh của toàn bộ đồ thị là 114.



Hình 3.2: Đồ thị con của đồ thị 3.1.



Hình 3.3: Đồ thị con của đồ thị 1.5.

Có thể thấy rằng hai phương pháp xây dựng khác nhau ở số đỉnh nhỏ nhất của mỗi đồ thị, đồ thị thứ nhất là 126 đỉnh và đồ thị thứ hai là 114 đỉnh. Đồ thị thứ nhất thay thế toàn bộ các đỉnh của đồ thị cơ sở có bậc bằng hai và cả các đỉnh có bậc bằng 3. Đồ thị thứ hai thì xây dựng bằng cách chỉ thay các đỉnh bậc có bậc là 2. Đồ thị thứ nhất bao gồm 21 đồ thị $K_{3,3}$, đồ thị thứ hai bao gồm 18 đồ thị $K_{3,3}$ và 6 đỉnh có bậc là 3.

3.3 Phương pháp xây dựng một đồ thị khác

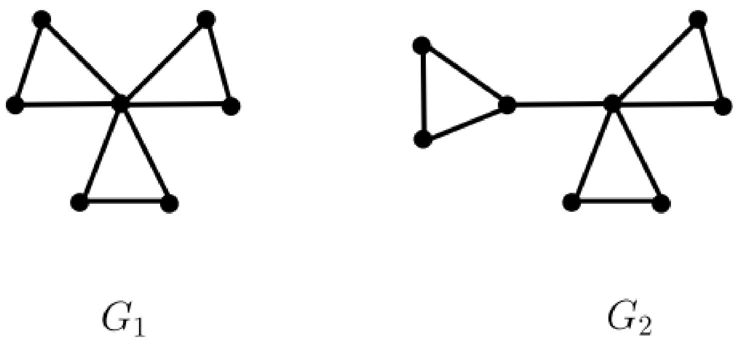
Từ kết quả của ba bài báo và từ phương pháp xây dựng đồ thị của hai bài báo [2] và [3], chúng ta có hai câu hỏi mở.

Câu hỏi thứ nhất: *Tồn tại G là đồ thị 2- liên thông và $\delta(G) \geq 3$ có $pc(G) = 3$ và có số đỉnh ít hơn số đỉnh của hai đồ thị ở hai phương pháp chứng minh ở mục 2.2 và mục 2.3?*

Câu hỏi thứ hai: *Nếu xây dựng được đồ thị G trong câu hỏi thứ nhất, liệu đồ thị G như vậy có số đỉnh nhỏ nhất chưa?*

Việc xây dựng lớp đồ thị mới, sẽ không xây dựng từ đồ thị cơ sở trong bài báo [1] của Borozan, bởi trong từng bài báo, các tác giả đã chứng minh các đồ thị đều đã có số đỉnh nhỏ nhất. Như vậy không thể tối ưu số đỉnh trong từng đồ thị trong hai bài báo. Có thể thấy rằng giả thuyết của Borozan đã bị bác bỏ, chúng ta cũng có thể tự đặt câu hỏi rằng, liệu $\delta(G)$ sẽ như thế nào để đồ thị G là $2-$ liên thông có số $pc(G) = 2$. Trong một bài báo gần đây [4] F.Huang, nhóm tác giả đã đưa ra định lý.

Định lí 3.3.1. *Cho G là một đồ thị liên thông và không đầy đủ với số đỉnh $n \geq 5$. Nếu $G \notin \{G_1, G_2\}$ và $\delta(G) \geq n/4$, thì $pc(G) = 2$.*



Hình 3.4: Hai đồ thị G_1, G_2 của định lý.

Đồ thị 2-liên thông cũng là đồ thị liên thông, như vậy định lý trên cũng đúng với đồ thị 2-liên thông. Đối với đồ thị 2-liên thông, theo cảm nhận chúng ta sẽ thấy bậc nhỏ nhất sẽ thỏa mãn $4 \leq x \leq \delta(G) \leq n/4$ với $x \in N$ thì $pc(G) = 2$?

Kết luận

Như vậy, bài báo cáo đã giới thiệu một số các khái niệm và một số định lý quan trọng về số $pc(G)$ đối với lớp đồ thị 2- connected. Bài báo cáo đã trình bày về giả thuyết của Borozan và đưa ra hai phương pháp xây dựng đồ thị khác nhau, để phủ định giả thuyết của Borozan. Bài báo cáo đã so sánh hai phương pháp chứng minh nhưng vẫn chưa đưa ra được cách xây dựng một lớp đồ thị khác để phủ định lại giả thuyết của Borozan, đây cũng là vấn đề khó và mở, cần thời gian và sự nỗ lực trong tích lũy kiến thức của cá nhân em. Ngoài cách tiếp cận điều kiện bậc đỉnh của G, một số cách tiếp cận khác hiện nay như các toán tử giữa các đồ thị, đồ thị randoms, các điều kiện về tập thống trị, các điều kiện về liên thông,...để tìm số $pc(G)$. Trong các bài báo cáo tiếp theo, em hi vọng sẽ được trình bày các cách tiếp cận khác nhau về số $pc(G)$ để bổ sung kỹ năng đọc tài liệu và hiểu sâu sắc về các phương pháp chứng minh. Một lần nữa, em xin cảm ơn thầy giáo đã có những nhận xét sâu sắc để bài báo cáo của em được hoàn thiện hơn.

Tài liệu tham khảo

[1] Borozan, V., Fujita, S., Gerek, A., Magnant, C., Manoussakis, Y., Montero, L., Tuza, Z.: Proper connection of graphs. Discrete Math. 312(17), 2550–2560 (2012).

[2] Brause, C., Doan, T.D., Schiermeyer, I.: Minimum degree conditions for the proper connection number of graphs. Electron. Notes Discrete Math. 55, 109–112 (2016).

[3] Huang, F., Li, X., Qin, Z., Magnant, C., Ozeki, K.: On two conjectures about the proper connection number of graphs. Discrete Math. 340(9), 2217–2222 (2017).

[4] F.Huang, X.Li, Z.Qin, C.Magnant, Minimum degree condition for proper connection number 2, Theoret. Comput. Sci. (2017).

[5] Douglas West, Introduction to Graph Theory (2nd Edition).

[6] Properly Colored Connectivity of Graphs- Springer (2018).