

BÀI TẬP PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

3.1 Giải các phương trình tách biến sau

- 1) $y' = \sin^3(x)$.
- 2) $xydx + (x+1)dy = 0$.
- 3) $y' = \sqrt{1-x^2}$.
- 4) $y' = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$.
- 5) $y' = \sin x \cdot \cos 3x$.
- 6) $y' = \frac{1}{x^2-1}$.
- 7) $y' = \frac{\ln x}{x}$.
- 8) $y' = \frac{x}{1+x^2+\sqrt{1+x^2}}$.
- 9) $y' = 2e^x \sin x$.
- 10) $y' + \sin(x+y) = \sin(x-y)$.
- 11) $y' = x^2 + 2xy - 1 + y^2$.
- 12) $y' = \sqrt{4x+2y+1}$.
- 13) $y' = e^y$.
- 14) $y' = \cot gy$.
- 15) $y' = y^2(1+y^2)^2$.
- 16) $y' = 1 + \frac{1}{y^2}$.
- 17) $(x+2x^3)dx + (y+2y^3)dy = 0$.
- 18) $(y^2+xy^2)dx + (x^2-yx^2)dy = 0$.
- 19) $(1+y^2)(e^{2x}dx - e^y dy) = (1+y)dy$.
- 20) $2x\sqrt{1-y^2}dx + ydy = 0$.

3.2 Giải các bài toán Cauchy sau

- 1) $\begin{cases} y' \cot gx + y = 2; \\ y(0) = -1. \end{cases}$
 - 2) $\begin{cases} y' \sin x - y \ln y = 0; \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1. \end{cases}$
 - 3) $\begin{cases} (1+e^{2x})y^2 dy - e^x dx = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$
 - 4) $\begin{cases} xy' + y = y^2; \\ y(1) = \frac{1}{2}. \end{cases}$
 - 5) $\begin{cases} (x^2+1)y' = y^2+4; \\ y(1) = 2. \end{cases}$
 - 6) $\begin{cases} y' = -\frac{3x+3y-1}{2x+2y}; \\ y(0) = 2. \end{cases}$
 - 7) $\begin{cases} y' \tan x = y; \\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1. \end{cases}$
 - 8) $\begin{cases} y' = \frac{1}{\cos^2 x}; \\ y(0) = 0. \end{cases}$
 - 9) $\begin{cases} y' = -2xe^{-x^2}; \\ y(0) = 1. \end{cases}$
 - 10) $\begin{cases} y' = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}; \\ y(1) = 0. \end{cases}$
 - 11) $\begin{cases} (x^2-1)y' + 2xy^2 = 0; \\ y(0) = 1. \end{cases}$
 - 12) $\begin{cases} x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0; \\ y(1) = 0. \end{cases}$
 - 13) $\begin{cases} (x+2y)y' = 1; \\ y(0) = -1. \end{cases}$
 - 14) $\begin{cases} dx - \sqrt{1-x^2}dy = 0; \\ y(1) = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$
-

3.4 Giải các phương trình đẳng cấp sau

- 1) $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$.
- 2) $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$.
- 3) $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$
- 4) $x^3y' = y(x^2 + y^2)$
- 5) $y' = e^{y/x} + \frac{y}{x}$.
- 6) $xy' = y + (x + y)\ln \frac{x+y}{x}$.
- 7) $(y + \sqrt{xy})dx = xdy$.
- 8) $xy' \ln \left(\frac{y}{x}\right) = y \ln \left(\frac{y}{x}\right) + x$.
- 9) $\left(x - y \cos \frac{y}{x}\right) dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0$.
- 10) $y' = \frac{2y-x-5}{2x-y+4}$.
- 11) $(x - y - 1) + (y - x + 2)y' = 0$.
- 12) $\frac{dx}{y+x} = \frac{dy}{y-x}$.
- 13) $\frac{dx}{2x^2-2xy+2y^2} = \frac{dy}{y^2-4xy}$.
- 14) $(y + \sqrt{xy})dx = xdy$.
- 15) $y' = \frac{y+\sqrt{y^2-4x^2}}{x}$.
- 16) $\begin{cases} (x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0; \\ y(2) = 0. \end{cases}$
- 17) $\begin{cases} y' = 4 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2; \\ y(1) = 2. \end{cases}$
- 18) $\begin{cases} xy' = y \ln \left|\frac{y}{x}\right|; \\ y(1) = 1. \end{cases}$
- 19) $\begin{cases} xdy - (x + y)dx = 0; \\ y(0) = 0. \end{cases}$
- 20) $\begin{cases} (y + \sqrt{x^2 + y^2})dx = xdy; \\ y(0) = 1. \end{cases}$

3.4 Giải các phương trình vi phân tuyến tính sau

- 1) $xy' - 2y = 2x^4$.
- 2) $(2x + 1)y' = 4x + 2y$.
- 3) $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$.
- 4) $(xy' - 1)\ln x = 2y$.
- 5) $(2e^y - x)y' = 1$.
- 6) $(x - 2xy - y^2)y' + y^2 = 0$.
- 7) $y' + \operatorname{tg} y = \frac{x}{\cos y}$.
- 8) $x^2y' + xy + 1 = 0$.
- 9) $(xy + e^x)dx - xdy = 0$.
- 10) $2x(x^2 + y)dx = dy$.
- 11) $y = x(y' - x \cos x)$.
- 12) $xy' + (x + 1)y = 3x^2 e^x$.
- 13) $(\sin^2 y + x \cot gy)y' = 1$.
- 14) $y' - \frac{1+2x}{x+x^2}y = \frac{1+2x}{x+x^2}$.
- 15) $\begin{cases} y' + \frac{3}{x}y = \frac{2}{x^3}; \\ y(1) = 1. \end{cases}$

$$16) \begin{cases} xy' = x + 2y; \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$$17) \begin{cases} y' - \frac{y}{x \ln x} = x \ln x; \\ y(e) = \frac{e^2}{2}. \end{cases}$$

$$18) \begin{cases} y' \sin x - y \cos x = 1; \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \end{cases}$$

$$19) \begin{cases} y' \sqrt{1-x^2} + y = \arcsin x; \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

3.5 Chứng minh rằng các phương trình vi phân sau là phương trình vi phân toàn phần và giải các phương trình vi phân sau

$$1) \frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy = 0.$$

$$2) \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} = 0.$$

$$3) 2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0.$$

$$4) (2 - 9xy^2)xdx + (4y^2 - 6x^3)ydy = 0.$$

$$5) e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0.$$

$$6) \frac{y}{x} dx + (y^3 + \ln x)dy = 0.$$

$$7) \frac{3x^2+y^2}{y^2} dx - \frac{2x^3+5y}{y^3} dy = 0.$$

$$8) 2x(1 + \sqrt{x^2 - y})dx - \sqrt{x^2 - y}dy = 0.$$

$$9) \frac{xdx+ydy}{\sqrt{1+x^2+y^2}} + \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} = 0.$$

$$10) 3x^2(1 + \ln y)dx = \left(2y - \frac{y^3}{x}\right)dy.$$

$$11) \left(\frac{x}{\sin y} + 2\right)dx + \frac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y-1}dy = 0.$$

$$12) \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2} dx + \frac{e^y}{1+x^2} dy = 0.$$

$$13) \frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2-3x^2}{y^4} dy = 0.$$

$$14) \left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right)dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0.$$

3.6 Giải các phương trình vi phân cấp 2 có thể giảm cấp được sau

$$1) (y'')^3 - 1 = 0.$$

$$2) x^2 y'' = (y')^2.$$

$$3) 2xy'y'' = (y')^2 - 1.$$

$$4) y^3 y'' - 1 = 0.$$

$$5) y'' = 2yy'.$$

$$6) yy'' + 1 = (y')^2.$$

$$7) y''(e^x + 1) + y' = 0.$$

$$8) xy'' - y' = 0.$$

$$9) y'[1 + (y')^2] = y''.$$

$$10) x \ln x \cdot y'' - y' = 0.$$

$$11) 2yy'' = y + (y')^2.$$

$$12) (y'')^2 + y' = xy''.$$

$$13) (y'')^3 + xy'' = 2y'.$$

$$14) y'' + (y')^2 = 2e^{-y}.$$

$$15) y'' = e^y.$$

$$16) xy'' = y' + x \sin \frac{y'}{x}.$$

3.7 Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng sau

- | | |
|--|---|
| 1) $y'' - y' = x^2 e^x$. | 11) $y'' - 2y' + 2y = e^x(2\cos x - 4x\sin x)$. |
| 2) $y'' + 4y = x + \cos 2x$. | |
| 3) $y'' + 4y = x + \cos^2 x$. | 12) $y'' + y = \sin x \cos 3x$. |
| 4) $y'' - y' = x^3$. | 13) $y'' - y = \frac{1}{x}$. |
| 5) $y'' + y = \tan x$. | 14) $y'' - y' = \frac{2-x}{x^3} e^x$. |
| 6) $y'' - 3y' + 2y = 3(x+1)e^{2x} + x^2$. | 15) $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$. |
| 7) $y'' - 6y' + 9y = 4xe^{3x}$. | 16) $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$. |
| 8) $y''' + y'' - 2y' = xe^x - x$. | 17) $y''' + y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$. |
| 9) $y'' - 5y' = 3x^2 + \sin 5x$. | 18) $y'' - y = 4\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}$. |
| 10) $y'' - 4y = e^x[(-4x+4)\cos x - (2x+6)\sin x]$. | |

3.8 Tìm nghiệm các bài toán sau

- 1) $y'' - 2y' + y = 0$; $y = 1$; $y' = 2$ khi $x = 2$.
- 2) $y'' + y = 0$; $y = 0$ khi $x = 0$; $y = 1$ khi $x = \frac{\pi}{2}$.
- 3) $y'' - 2y' + y = 0$; $y = 1$; $y' = 2$ khi $x = 2$.
- 4) $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}$; $y = 0$; $y' = 0$ khi $x = 0$.
- 5) $y'' + 4y = \sin 2x$; $y = 0$; $y' = 0$ khi $x = 0$.