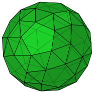
Phương pháp điểm trong

Nguyễn Trần Hà Phương
Bảo Quý Định Tân
Phạm Quốc Bình
Lê Minh Quý

PiMA 2024



Mentor: Trần Phan Anh Danh, Nguyễn Hoàng Khang

Ngày 28 tháng 7 năm 2024

Phương pháp điểm trong

Bài toán quy hoạch tuyến tính

Bài toán gốc	Bài toán đối ngẫu
$\begin{aligned} \text{Maximize } & c^\intercal x \\ \text{Subject to } & Ax + w = b \\ & x, w \geq 0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{Minimize } & b^\intercal y \\ \text{Subject to } & A^\intercal y - z = c \\ & y, z \geq 0 \end{aligned}$

- Phương pháp điểm trong: xấp xỉ nghiệm tối ưu bằng cách di chuyển qua các điểm nằm "bên trong" miền nghiệm.
- Cách tiếp cận khác so với phương pháp đơn hình phổ biến.

Bài toán chắn

Hàm chắn logarithm

Hàm chắn logarithm

- Bài toán chắn:

$$\begin{aligned} &\text{maximize } c^T x + \mu \sum_j \log(x_j) + \mu \sum_i \log(w_i) \\ &\text{subject to } Ax + w = b. \end{aligned}$$

Bài toán chắn

Hàm chắn logarithm

Hàm chắn logarithm

- Bài toán chắn:

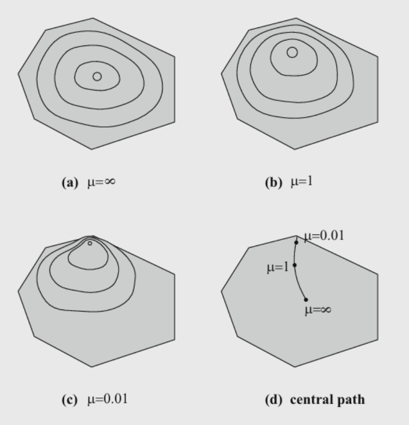
  maximize $c^T x + \mu \sum_j \log(x_j) + \mu \sum_i \log(w_i)$
  subject to $Ax + w = b$.

Đặc điểm

- Bỏ qua ràng buộc về dấu bất đẳng thức
- Có thể áp dụng được giải tích để nghiên cứu

Bài toán chắn

Hình ảnh minh họa - Đường trung tâm



Hình: Lời giải bài toán chắn tương ứng với mỗi μ khác nhau

Đường trung tâm

- Đường trung tâm là tập hợp các nghiệm tối ưu của các bài toán chắn

Phương trình đường trung tâm

$$x^*(\mu) = \arg \max_{x:\ Ax+w=b} \left(c^T x + \mu \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) + \mu \sum_{j=1}^{m} \ln(w_j) \right)$$

Đường trung tâm

- Đường trung tâm là tập hợp các nghiệm tối ưu của các bài toán chắn

Phương trình đường trung tâm

$$x^*(\mu) = \arg \max_{x:\ Ax+w=b} \left(c^T x + \mu \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) + \mu \sum_{j=1}^{m} \ln(w_j) \right)$$

- Trong đó
  - $c^T x$: Hàm tối ưu của bài toán gốc.
  - $Ax + w = b$: Ràng buộc của bài toán gốc.
  - $\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)$ và $\sum_{j=1}^{m} \ln(w_j)$: Hàm chắn
  - μ: Trọng số của hàm chắn, $\mu > 0$

Phương pháp nhân tử Lagrange giải bài toán chắn

Phương pháp nhân tử Lagrange

- Maximize $f(x)$
  Subject to $g_i(x) = 0, i = 1, 2, \ldots, m.$
- Hệ điều kiện của nghiệm tối ưu:

$$\begin{aligned} \nabla f &= \lambda \nabla g \\ g_i(x) &= 0,\ i = 1, 2, \ldots, m \end{aligned} \tag{1}$$

Phương pháp nhân tử Lagrange giải bài toán chắn

Phương pháp nhân tử Lagrange

- Bài toán chắn:

  maximize $c^T x + \mu \sum_j \log(x_j) + \mu \sum_i \log(w_i)$
  subject to $Ax + w = b$.

- Áp dụng phương pháp nhân tử Lagrange, cực trị của hàm chắn thỏa mãn

$$
\begin{aligned}
Ax + w &= b \\
A^T y - z &= c \\
XZe &= \mu e \\
YWe &= \mu e
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Ý tưởng thuật toán

Ý tưởng

1. Bắt đầu với bộ (x, w, y, z).
2. Ở mỗi vòng lặp, đi đến điểm mới $(x + \Delta x, w + \Delta w, y + \Delta y, z + \Delta z)$ nằm trên đường trung tâm đến nghiệm tối ưu.
3. Thuật toán gồm 2 pha: Tìm điểm bắt đầu và đi theo đường trung tâm

Thuật toán

Đi theo đường trung tâm

1. Gán $\mu = 1$ và chọn bộ $(x, w, y, z) > 0$ thoả hệ (1) (Pha I)
2. (Pha II) Trong khi $\mu \geq \epsilon$, lặp lại bước 3 và 4. Nếu $\mu < \epsilon$, trả x là một nghiệm tối ưu và dừng vòng lặp
3. Thay μ bằng $\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{n}}\right)\mu$
4. (Bước Newton) Tìm $(\Delta x, \Delta w, \Delta y, \Delta z)$ là nghiệm của hệ (2).

$$
\begin{aligned}
Ax + w &= b \qquad & A^T y - z &= c \\
XZe &= \mu e \qquad & YWe &= \mu e
\end{aligned}
$$

5. Thay (x, w, y, z) bằng $(x + \Delta x, w + \Delta w, y + \Delta y, z + \Delta z)$. Lặp lại vòng lặp

Phương pháp Newton để giải hệ phương trình

Phương pháp Newton

- Phương pháp Newton dùng để xấp xỉ nghiệm của hệ phương trình phi tuyến tính $F(\xi) = 0$ bằng cách cập nhật ξ
- Ta tìm được nghiệm $\Delta\xi$ của phương trình $F'(\xi)\Delta\xi = -F(\xi)$

$$\Delta\xi = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta w \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}$$

$$F(\xi) = \begin{bmatrix} Ax + w - b \\ A^T y - z - c \\ XZe - \mu e \\ YWe - \mu e \end{bmatrix}, \qquad F'(\xi) = \begin{bmatrix} A & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A^T & -I \\ Z & 0 & 0 & X \\ 0 & Y & W & 0 \end{bmatrix}$$

Pha I

Cách tính nghiệm bắt đầu

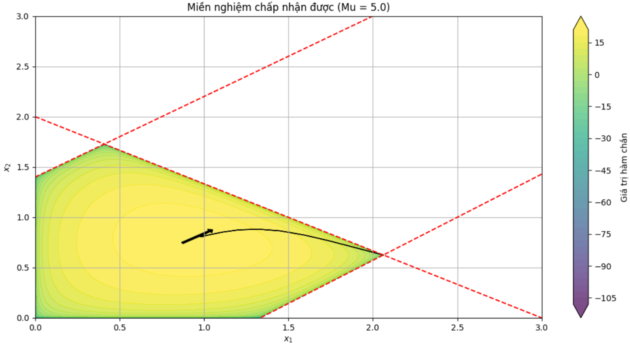
- Một bộ x bắt đầu sẽ phải thỏa mãn điều kiện:

$$Ax \leq b$$

- Giải bài toán quy hoạch tuyến tính để tìm điểm bắt đầu

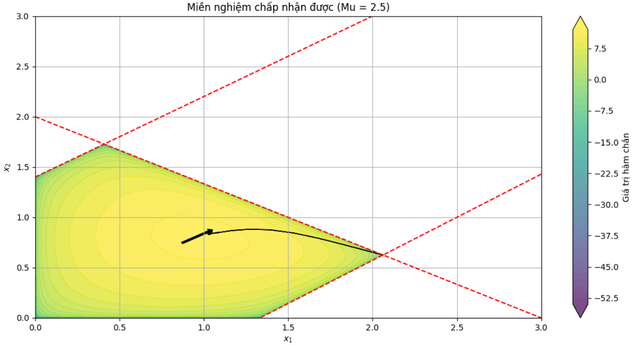
$$\begin{aligned} \text{Minimize } & s \\ \text{Subject to } & Ax - b \leq s \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Kết quả



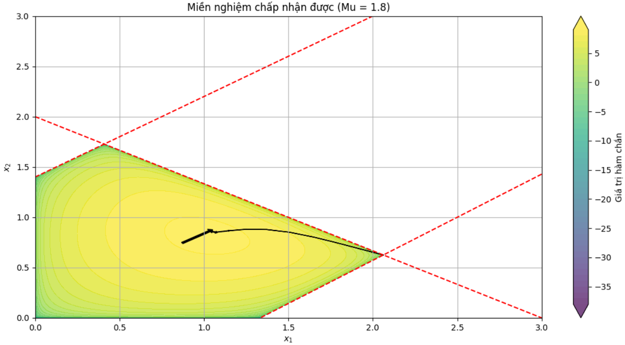
Hình: $\mu = 5$

Kết quả



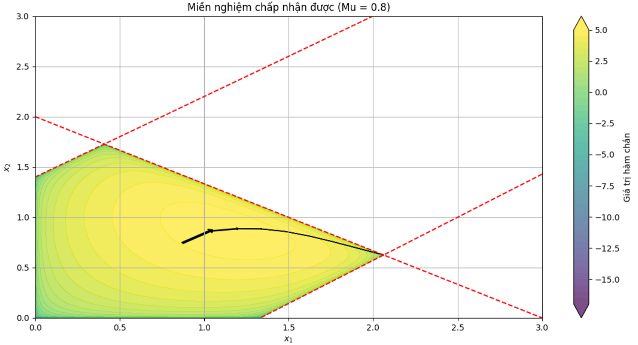
Hình: $\mu = 2.5$

Kết quả



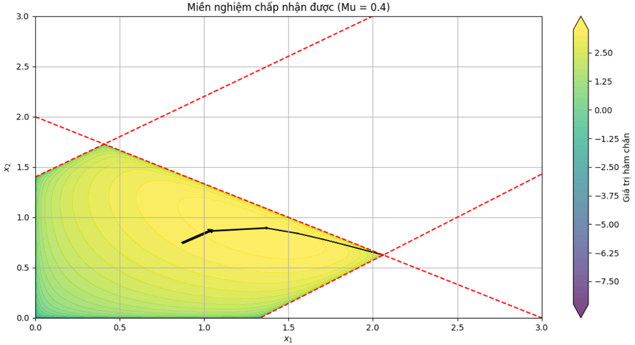
Hình: $\mu = 1.8$

Kết quả



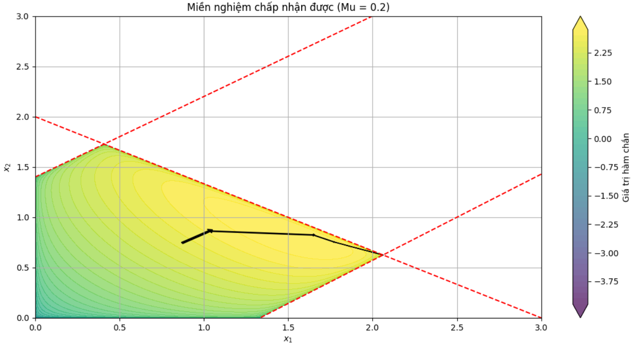
Hình: $\mu = 0.8$

Kết quả



Hình: $\mu = 0.4$

Kết quả



Hình: $\mu = 0.2$

Cảm ơn mọi người đã lắng nghe và theo dõi.