Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông
Khoa Công nghệ thông tin 1

Toán rời rạc 2

Đồ thị Euler và Đồ thị Hamilton

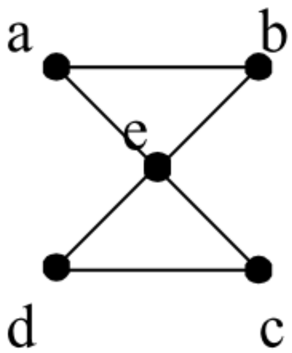
Bộ môn KHMT, Khoa CNTT1

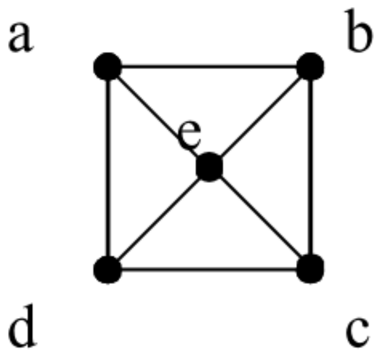
Nội dung

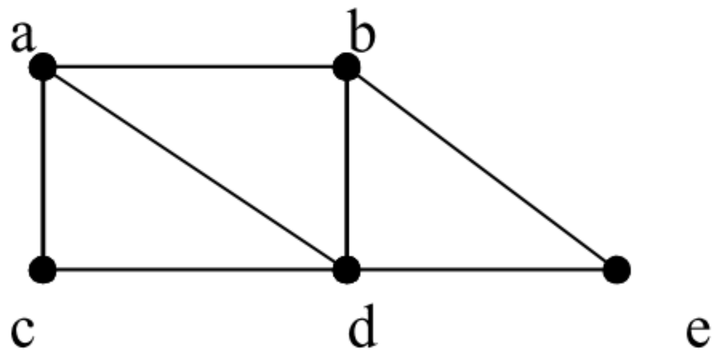
- Đồ thị Euler
- Đồ thị Hamilton

Khái niệm và ví dụ

- Định nghĩa
  - Chu trình đơn trong đồ thị G đi qua tất cả các cạnh của nó được gọi là chu trình Euler
  - Đường đi đơn trong đồ thị G đi qua tất cả các cạnh của nó được gọi là đường đi Euler
  - Đồ thị được gọi là đồ thị Euler nếu nó có chu trình Euler
  - Đồ thị được gọi là đồ thị nửa Euler nếu nó có đường đi Euler
- Ví dụ 1



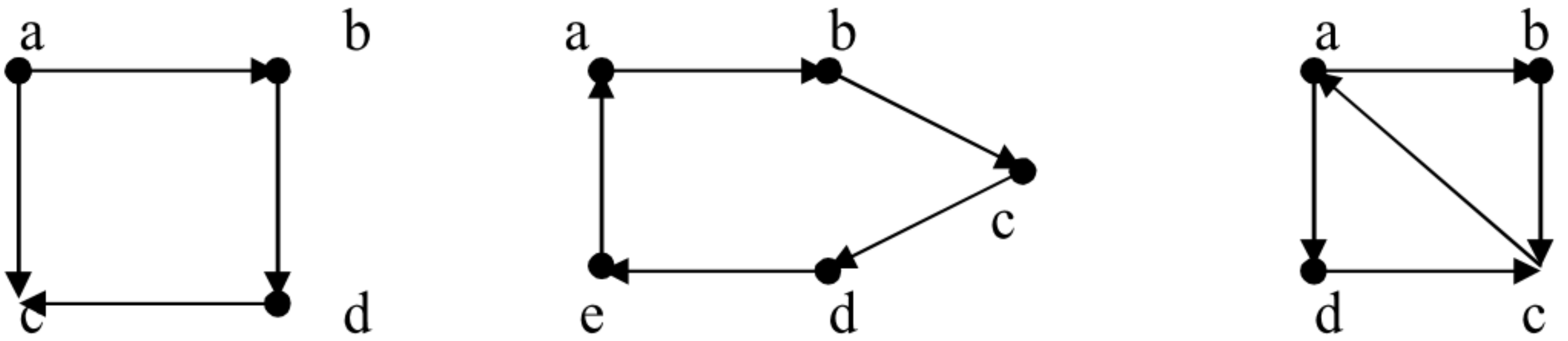




(Phương ND, 2013)

Khái niệm đồ thị Euler, đồ thị nửa Euler

- Ví dụ 2



(Phương ND, 2013)

Điều kiện cần và đủ để đồ thị là Euler

- Với đồ thị vô hướng
  - Đồ thị vô hướng liên thông $G =< V, E >$ là đồ thị Euler khi và chỉ khi mọi đỉnh của G đều có bậc chẵn

- Với đồ thị có hướng
  - Đồ thị có hướng liên thông yếu $G =< V, E >$ là đồ thị Euler khi và chỉ khi tất cả các đỉnh của nó đều có bán bậc ra bằng bán bậc vào (điều này làm cho đồ thị là liên thông mạnh)

Chứng minh đồ thị là Euler

- Với đồ thị vô hướng
  - Kiểm tra đồ thị có liên thông hay không?
    - Kiểm tra $DFS(u) = V$ hoặc $BFS(u) = V$?
  - Kiểm tra bậc của tất cả cả đỉnh có phải số chẵn hay không?
    - Với ma trận kề, tổng các phần tử của hàng u (cột u) là bậc của đỉnh u

- Với đồ thị có hướng
  - Kiểm tra đồ thị có liên thông yếu hay không?
    - Kiểm tra đồ thị vô hướng tương ứng là liên thông, hoặc
    - Kiểm tra nếu tồn tại đỉnh $u \in V$ để $DFS(u) = V$ hoặc $BFS(u) = V$?
  - Kiểm tra tất cả các đỉnh có thỏa mãn bán bậc ra bằng bán bậc vào hay không?
    - Với ma trận kề, bán bậc ra của đỉnh u là $deg^+(u)$ là số các số 1 của hàng u, bán bậc vào của đỉnh u là $deg^-(u)$ là số các số 1 của cột u

Bài tập 1

- Cho đồ thị vô hướng G được biểu diễn dưới dạng ma trận kề như hình bên. Chứng minh G là đồ thị Euler.

$$\begin{vmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{vmatrix}$$

(Phương ND, 2013)

Bài tập 2

- Cho đồ thị có hướng G được biểu diễn dưới dạng ma trận kề như hình bên. Chứng minh G là đồ thị Euler.

$$
\begin{vmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}
$$

(Phương ND, 2013)

Thuật toán tìm chu trình Euler

Euler-Cycle(u){
  Bước 1: Khởi tạo
  $stack = \emptyset$; //khởi tạo $stack$ là $\emptyset$
  $CE = \emptyset$; //khởi tạo mảng CE là $\emptyset$
  $push(stack, u)$; //đưa đỉnh u vào ngăn xếp
  Bước 2: Lặp
  while$(stack \neq \emptyset)\{$
    $s =$ ***get***$(stack)$; //lấy đỉnh ở đầu ngăn xếp
    if$(Ke(s) \neq \emptyset)\{$
      t=<đỉnh đầu tiên trong $Ke(s)$>;
      $push(stack, t)$;//đưa đỉnh t vào ngăn xếp
      $E = E \setminus \{(s, t)\}$; //loại bỏ cạnh (s, t)
    }
    else{
      $s = pop(stack)$; //loại bỏ s khỏi ngăn xếp
      $s \Rightarrow CE$; //đưa s sang CE
    }
  }
  Bước 3: Trả lại kết quả
  <lật ngược lại các đỉnh trong CE ta được chu trình Euler>;
}

Kiểm nghiệm thuật toán (1/3)

- Áp dụng thuật toán tìm chu trình Euler cho đồ thị vô hướng được biểu diễn bằng ma trận kề như hình bên.

$$
\begin{vmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{vmatrix}
$$

Kiểm nghiệm thuật toán (2/3)

#	Trạng thái Stack	CE	#	Trạng thái Stack	CE
1	1	∅	14	1,2,3,4,7,5,2,6,5,3,11,4	1
2	1,2	∅	15	1,2,3,4,7,5,2,6,5,3,11,4,8	1
3	1,2,3	∅	16	1,2,3,4,7,5,2,6,5,3,11,4,8,7	1
4	1,2,3,4	∅	17	1,2,3,4,7,5,2,6,5,3,11,4,8,7,6	1
5	1,2,3,4,7	∅	18	1,2,3,4,7,5,2,6,5,3,11,4,8,7	1,6
6	1,2,3,4,7,5	∅	19	1,2,3,4,7,5,2,6,5,3,11,4,8	1,6,7
7	1,2,3,4,7,5,2	∅	20	1,2,3,4,7,5,2,6,5,3,11,4,8,9	1,6,7
8	1,2,3,4,7,5,2,6	∅	21	1,2,3,4,7,5,2,6,5,3,11,4,8,9,10	1,6,7
9	1,2,3,4,7,5,2,6,1	∅	22	1,2,3,4,7,5,2,6,5,3,11,4,8,9,10,8	1,6,7
10	1,2,3,4,7,5,2,6	1	23	1,2,3,4,7,5,2,6,5,3,11,4,8,9,10	1,6,7,8
11	1,2,3,4,7,5,2,6,5	1	24	1,2,3,4,7,5,2,6,5,3,11,4,8,9,10,11	1,6,7,8
12	1,2,3,4,7,5,2,6,5,3	1	25	1,2,3,4,7,5,2,6,5,3,11,4,8,9,10,11,12	1,6,7,8
13	1,2,3,4,7,5,2,6,5,3,11	1	26	1,2,3,4,7,5,2,6,5,3,11,4,8,9,10,11,12,9	1,6,7,8

Kiểm nghiệm thuật toán (3/3)

Bước	Trạng thái Stack	CE
27	1,2,3,4,7,5,2,6,5,3,11,4,8,9,10,11,12,9,13	1,6,7,8
28	1,2,3,4,7,5,2,6,5,3,11,4,8,9,10,11,12,9,13,12	1,6,7,8
29	1,2,3,4,7,5,2,6,5,3,11,4,8,9,10,11,12,9,13,12,10	1,6,7,8
Đưa lần lượt các đỉnh trong $Stack$ sang CE cho tới khi $Stack = \emptyset$		
30-…	$CE =$ 1,6,7,8,10,12,13,9,12,11,10,9,8,4,11,3,5,6,2,5,7,4,3,2,1	
Lật ngược lại các đỉnh trong CE ta được chu trình Euler		
1-2-3-4-7-5-2-6-5-3-11-4-8-9-10-11-12-9-13-12-10-8-7-6-1		

Điều kiện cần và đủ để đồ thị là nửa Euler

- Với đồ thị vô hướng
  - Đồ thị vô hướng liên thông $G =< V, E >$ là đồ thị nửa Euler khi và chỉ khi G có 0 hoặc 2 đỉnh bậc lẻ
    - G có 2 đỉnh bậc lẻ: đường đi Euler xuất phát tại một đỉnh bậc lẻ và kết thúc tại đỉnh bậc lẻ còn lại
    - G có 0 đỉnh bậc lẻ: G chính là đồ thị Euler

- Với đồ thị có hướng
  - Đồ thị có hướng liên thông yếu $G =< V, E >$ là đồ thị nửa Euler khi và chỉ khi:
    - Tồn tại đúng hai đỉnh $u, v \in V$ sao cho $deg^+(u) - deg^-(u) = deg^-(v) - deg^+(v) = 1$
    - Các đỉnh $s \neq u, s \neq v$ còn lại có $deg^+(s) = deg^-(s)$
    - Đường đi Euler sẽ xuất phát tại đỉnh u và kết thúc tại đỉnh v

Chứng minh đồ thị là nửa Euler

- Với đồ thị vô hướng
  - Chứng tỏ đồ thị đã cho liên thông
    - Sử dụng hai thủ tục $DFS(u)$ hoặc $BFS(u)$
  - Có 0 hoặc 2 đỉnh bậc lẻ
    - Sử dụng tính chất của các phương pháp biểu diễn đồ thị để tìm ra bậc của mỗi đỉnh

- Với đồ thị có hướng
  - Chứng tỏ đồ thị đã cho liên thông yếu
    - Sử dụng hai thủ tục $DFS(u)$ hoặc $BFS(u)$
  - Có hai đỉnh $u, v \in V$ thỏa mãn

$$deg^+(u) - deg^-(u) = deg^-(v) - deg^+(v) = 1$$

  - Các đỉnh $s \neq u, s \neq v$ còn lại có $deg^+(s) = deg^-(s)$

Bài tập 3

- Cho đồ thị vô hướng $G = <V, E>$ được biểu diễn bằng ma trận kề như hình bên. Chứng minh rằng G là đồ thị nửa Euler?

$$
\begin{vmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{vmatrix}
$$

(Phương ND, 2013)

Bài tập 4

- Cho đồ thị có hướng $G = \langle V, E \rangle$ được biểu diễn bằng ma trận kề như hình bên. Chứng minh rằng G là đồ thị nửa Euler?

$$\begin{vmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}$$

(Phương ND, 2013)

Thuật toán tìm đường đi Euler

- Thuật toán tìm đường đi Euler gần giống hệt thuật toán tìm chu trình Euler

- Tìm chu trình Euler
  - Đầu vào thuật toán là đỉnh $u \in V$ bất kỳ
- Tìm đường đi Euler
  - Đồ thị vô hướng
    - Đầu vào thuật toán là đỉnh $u \in V$ có bậc lẻ đầu tiên (trường hợp có 0 bậc lẻ thì dùng đỉnh bất kỳ)
  - Đồ thị có hướng
    - Đầu vào thuật toán là đỉnh $u \in V$ thỏa mãn $deg^{+}(u) - deg^{-}(u) = 1$

Kiểm nghiệm thuật toán

- Áp dụng thuật toán tìm đường đi Euler cho đồ thị vô hướng, nửa Euler sau?

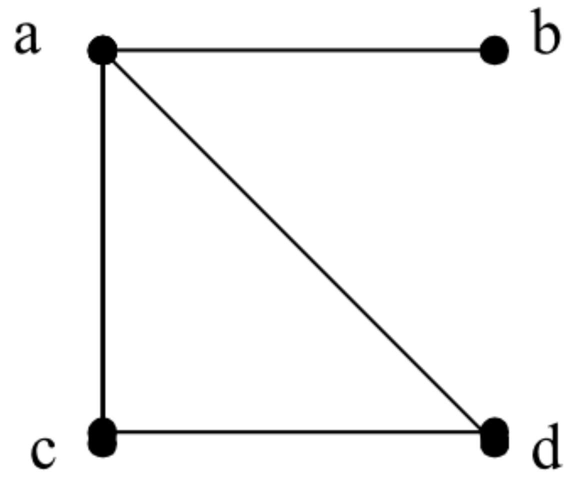
$$\begin{vmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{vmatrix}$$

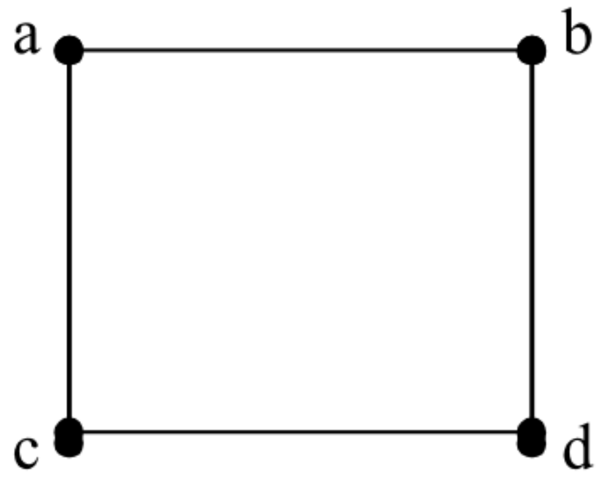
Nội dung

- Đồ thị Euler
- Đồ thị Hamilton

Khái niệm và ví dụ

- Định nghĩa
  - Đường đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị, mỗi đỉnh đúng một lần được gọi là đường đi Hamilton
  - Chu trình bắt đầu tại một đỉnh v nào đó, qua tất cả các đỉnh còn lại mỗi đỉnh đúng một lần, sau đó quay trở lại v, được gọi là chu trình Hamilton
  - Đồ thị được gọi là đồ thị Hamilton nếu có chu trình Hamilton
  - Đồ thị được gọi là đồ thị nửa Hamilton nếu có đường đi Hamilton
- Ví dụ





Tiêu chuẩn nhận biết đồ thị Hamilton?

- Cho đến nay, chưa tìm ra được một tiêu chuẩn để nhận biết một đồ thị có phải là đồ thị Hamilton hay không

- Cho đến nay, cũng vẫn chưa có thuật toán hiệu quả để kiểm tra một đồ thị có phải là đồ thị Hamilton hay không

Thuật toán tìm chu trình Hamilton (1/3)

- Thuật toán liệt kê tất cả các chu trình Hamilton bắt đầu tại đỉnh thứ k

Hamilton(int k){
    for($y \in Ke(X[k-1])$){
        if($(k == n+1)$ && $(y == v_0)$)
            Ghinhan($X[1], X[2], \ldots, X[n], v_0$);
        else if($chuaxet[y] == \boldsymbol{true}$){
            $X[k] = y$;
            $chuaxet[y] = \boldsymbol{false}$;
            Hamilton($k+1$);
            $chuaxet[y] = \boldsymbol{true}$;
        }
    }
}

Thuật toán tìm chu trình Hamilton (2/3)

- Thuật toán liệt kê tất cả các chu trình Hamilton bắt đầu tại đỉnh thứ k

Hamilton(int k){
    for($y \in Ke(X[k-1])$){
        if($(k == n+1)$ && $(y == v_0)$)
            Ghinhan($X[1], X[2], \ldots, X[n], v_0$);
        else if($chuaxet[y] == \boldsymbol{true}$){
            $X[k] = y$;
            $chuaxet[y] = \boldsymbol{false}$;
            Hamilton($k+1$);
            $chuaxet[y] = \boldsymbol{true}$;
        }
    }
}

Bản chất là duyệt toàn bộ dùng Quay lui !!!

Thuật toán tìm chu trình Hamilton (3/3)

- Khi đó, việc liệt kê các chu trình Hamilton được thực hiện như sau

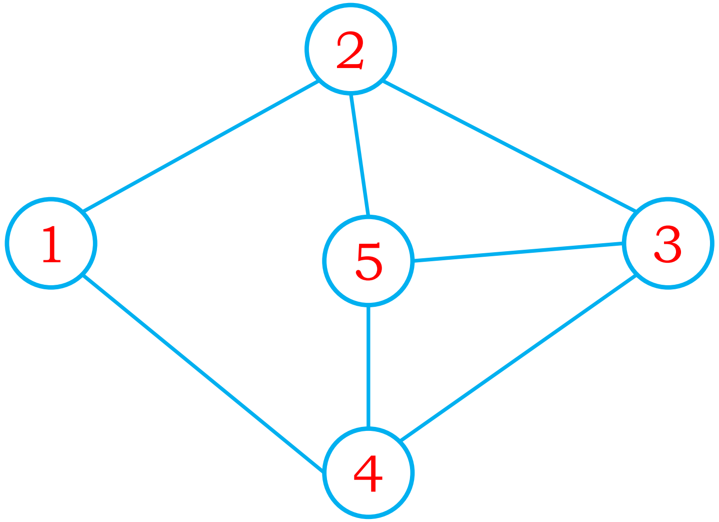
Hamilton-Cycle(v_0){
  //Khởi tạo các đỉnh là chưa xét
  for($v \in V$)
    $chuaxet[v] = \boldsymbol{true}$;

  $X[1] = v_0$; //v_0 là một đỉnh nào đó của đồ thị
  $chuaxet[v_0] = \boldsymbol{false}$; //Đánh dấu v_0 đã xét

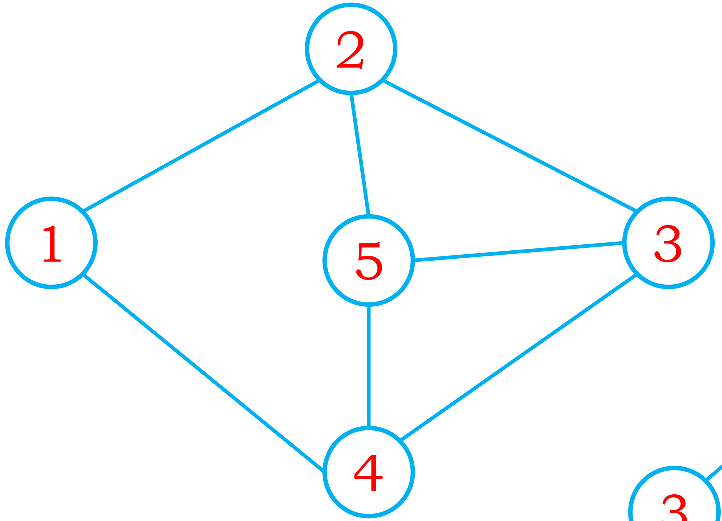
  Hamilton(2); //Gọi thủ tục duyệt
}

Kiểm nghiệm thuật toán (1/2)

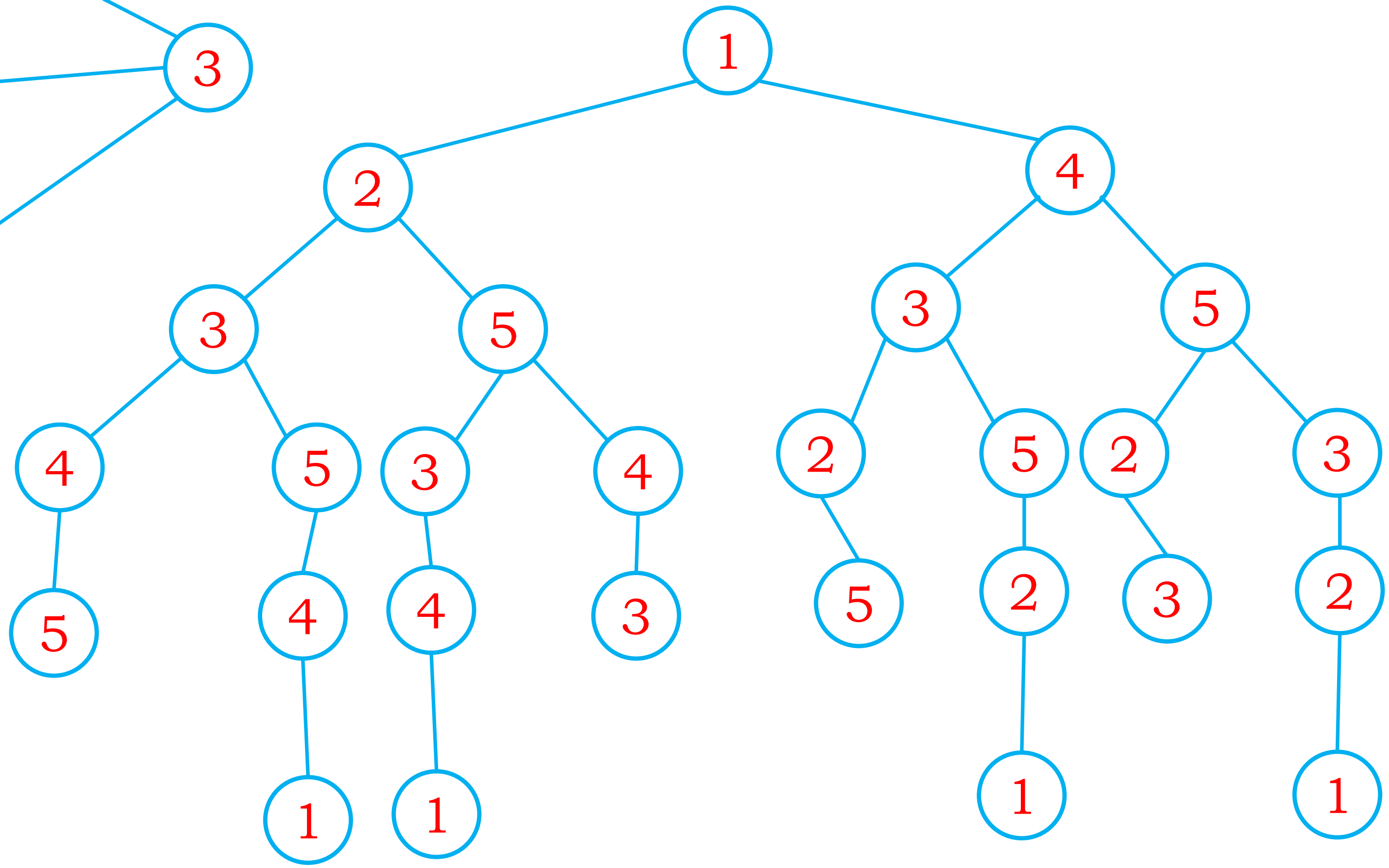
- Áp dụng thuật toán tìm chu trình Hamilton cho đồ thị vô hướng dưới đây



Kiểm nghiệm thuật toán (2/2)



Cây tìm kiếm chu trình Hamilton



Tóm tắt

- Khái niệm đường đi Euler, chu trình Euler, đồ thị nửa Euler, đồ thị Euler
- Điều kiện và cách chứng minh đồ thị là Euler, nửa Euler
- Khái niệm đường đi Hamilton, chu trình Hamilton, đồ thị nửa Hamilton, đồ thị Hamilton
- Nắm được các thuật toán và cách kiểm nghiệm thuật toán
- Viết chương trình cài đặt các thuật toán cho phép thực hiện trên máy tính

Bài tập

- Làm một số bài tập trong giáo trình