Bài 2 : MA TRẬN VÀ ĐỊNH THỨC

Mục tiêu

- Nắm được khái niệm về ma trận, các phép toán về ma trận; khái niệm về hạng của ma trận và số dạng độc lập tuyến tính; biết cách tìm hạng của ma trận.
- Hiểu về định thức, các tính chất và cách tính định thức.
- Giải được các bài toán về định thức và ma trận, theo cách tự luận và theo trắc nghiệm.

Thời lượng

Bạn đọc nên để 10 giờ để nghiên cứu LT + 6 giờ làm bài tập.

Nội dung

Ma trận, định thức, là những công cụ quan trọng để nghiên cứu đại số hữu hạn. Chúng được sử dụng trong việc giải hệ phương trình đại số tuyến tính và nghiên cứu các ngành khoa học khác.

Bài 2 gồm các nội dung sau :

- Ma trận
- Định thức
- Ma trận nghịch đảo
- Hạng của ma trận nghịch đảo và số dạng độc lập tuyến tính.

Bài toán mở đầu: Bài toán xác định chi phí sản phẩm

Xét n ngành trong nền kinh tế quốc dân; mỗi ngành đó vừa đóng vai trò là ngành sản xuất vừa đóng vai trò là ngành tiêu thụ. Ký hiệu x_i là tổng sản phẩm ngành i, và x_j là tổng sản phẩm ngành j. Giả sử để sản xuất một đơn vị sản phẩm ngành j cần chi phí một số lượng xác định a_{ij} của sản phẩm ngành i. Để sản xuất x_j sản phẩm ngành j cần phải sử dụng $a_{ij}\ x_j$ sản phẩm ngành i. Mô hình như vậy gọi là Mô hình " Chi phí – sản phẩm" , hệ số a_{ij} gọi là hệ số chi phí, ma trận $[\mathbf{a_{ij}}]_{n \times n}$ gọi là ma trận chi phí.

2.1. Ma trận

2.1.1. Mở đầu

Các ma trận được dùng suốt trong toán học để biểu diễn mối quan hệ giữa các phần tử trong một tập hợp và trong một số rất lớn các mô hình. Ví dụ, các ma trận sẽ được dùng trong việc giải hệ phương trình đại số tuyến tính, trong ánh xạ tuyến tính, ...và trong các vấn đề thực tiễn như các mạng thông tin và các hệ thống giao thông vận tải, trong đồ thị. Nhiều thuật toán sẽ được phát triển để dùng các mô hình ma trận đó.

Định nghĩa 2.1 : Ma trận là một bảng số hình chữ nhật. Một ma trận có m hàng và n cột được gọi là ma trận $m \times n$.

Ví dụ 1: Ma trận

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

là ma trận 3 x 2.

Bây giờ chúng ta sẽ đưa ra một số thuật ngữ về ma trận. Các chữ cái hoa và đậm sẽ được dùng để ký hiệu các ma trận.

Định nghĩa 2.2 : Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Hàng thứ i của A là ma trận $1 \times n$ $[a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}]$

Cột thứ j của A là ma trận $m \times 1$

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

Phần tử thứ (i, j) của A là phần tử a_{ij}, tức là số nằm ở hàng thứ i và cột thứ j của A. Một ký hiệu ngắn gọn và thuận tiện của ma trận A là viết $A = [a_{ij}]_{mxw}$, ký hiệu đó cho biết A là một ma trận có kích thước mxn; phần tử thứ (i, j) là a_{ij}.

Ma trận mà các cột của nó là các hàng tương ứng của A được gọi là ma trận chuyển vị của A, ký hiệu là A', có kích thước $n \times m$

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ma trận mà tất cả các phần tử của nó đều là số 0 gọi là ma trận không, cũng viết là 0.

Ma trận chỉ có một cột được gọi là vectơ cột, còn ma trận chỉ có một hàng gọi là vectơ hàng.

Ma trận có số hàng bằng số cột (m = n) được gọi là ma trận vuông. Lúc đó người ta nói rằng ma trận có cấp n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Một ma trận vuông được gọi là ma trận tam giác trên (dưới) nếu có dạng $a_{ij} = 0, \forall i > j(\forall i < j)$.

Ma trận trên $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ma trận dưới $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ma trận vuông có dạng: $$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & 0 \\ & \alpha_2 & & \\ & & . & \\ & & & . \\ 0 & & & \alpha_n \end{bmatrix}$$

được gọi là ma trận đường chéo.

Một ma trận chéo được gọi là ma trận đơn vị E nếu các phần tử trên đường chéo chính bằng 1 ($\alpha_i = 1, \forall i = \overline{1,n}$) và các phần tử còn lại bằng 0.

Hai ma trận được gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng kích thước và các phần tử tương ứng bằng nhau.

2.1.2. Số học ma trận

Bây giờ chúng ta sẽ xét các phép toán cơ bản của số học ma trận.

- **Phép cộng các ma trận.**
  - **Định nghĩa 2.3:** Cho $A = [a_{ij}]$ và $B = [b_{ij}]$ là các ma trận $m \times n$. Tổng của A và B được ký hiệu là A + B là ma trận $m \times n$ có phần tử thứ (i, j) là $a_{ij} + b_{ij}$. Nói cách khác, $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$.

Tổng của hai ma trận có cùng kích thước nhận được bằng cách cộng các phần tử ở những vị trí tương ứng. Các ma trận có kích thước khác nhau không thể cộng được với nhau, vì tổng của hai ma trận chỉ được xác định khi cả hai ma trận có cùng số hàng và cùng số cột.

Ví dụ 2: Ta có:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

- Tính chất

$A + B = B + A$

$A + 0 = 0 + A$

Nếu gọi $-A = [-a_{ij}]_{mxn}$ thì còn có

$A + (-A) = 0.$

- **Nhân ma trận với một hằng số α**
  - **Định nghĩa 2.4:** Cho $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Khi đó tích $\alpha.A$ là ma trận kích thước $m \times n$ xác định bởi $\alpha.A = (\alpha.a_{ij})_{m \times n}$

Như vậy muốn nhân ma trận với một số ta nhân mỗi phần tử của ma trận với số đó.

Ví dụ 3:

$$5\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -30 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}$$

Tính chất

$\alpha.(A+B) = \alpha.A + \alpha.B$

$(\alpha+\beta) A = \alpha.A + \beta A$

$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta) A$

$1.A = A$

$0.A = 0$ (ma trận gồm toàn số 0).

- **Phép nhân các ma trận.**
  - **Định nghĩa 2.5:** Xét hai ma trận $A = (a_{ik})_{m \times p}$; $B = (b_{kj})_{p \times n}$

trong đó số cột của ma trận A bằng số hàng của ma trận B. Người ta gọi tích AB là ma trận $C = (c_{ij})_{mxn}$ có m hàng, n cột mà phần tử c_{ij} được tính bởi công thức

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} .$$

Như vậy: Ma trận A nhân được với ma trận B chỉ trong trường hợp số cột của ma trận A bằng số hàng của ma trận B.

Ví dụ 4: Cho

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Tìm AB.

Giải: Vì A là ma trận 4×3 và B là ma trận 3×2 nên tích AB là xác định và là ma trận 4×2. Để có phần tử c_{11} ta lấy hàng thứ nhất của ma trận A nhân với cột thứ nhất của ma trận B (theo kiểu tích vô hướng của hai vectơ).

$$C = AB = \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 8 & 9 \\ 7 & 13 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$$

- **Tính chất**

$$A(B+C) = AB + AC$$

$$(B + C)\,A = BA + CA$$

$$A(BC) = (AB)C$$

$$\alpha\,(BC) = (\alpha B)C = B(\alpha C)$$

Chú ý: Phép nhân ma trận không có tính chất giao hoán. Tức là, nếu A và B là hai ma trận, thì không nhất thiết AB phải bằng BA, như ví dụ dưới đây:

Ví dụ 5: Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Hỏi AB có bằng BA không ?

Giải: Ta tìm được $AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ $BA = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

Vậy $AB \neq BA$.

2.2. Định thức

2.2.1 Định thức của ma trận vuông cấp n

Định nghĩa 2.6: Định thức của ma trận vuông $[a_{ij}]_{n \times n}$ cấp n được định nghĩa như sau:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & . & a_{2n} \\ . & . & \dots & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & . & a_{in} \\ . & . & \dots & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & . & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Nhiều khi người ta ký hiệu định thức của ma trận A là det(A). Để dễ hiểu ta định nghĩa dần dần như sau:

A là ma trận cấp 1: $A = [a_{11}]$ thì $\det(A) = |a_{11}| = a_{11}$, gọi là định thức cấp 1.

A là ma trận cấp hai :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

thì $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ là một số được định nghĩa như sau:

$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}\,a_{21}$ (2.1) gọi là định thức cấp 2.

Các số a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} gọi là các phần tử của định thức.

Ví dụ:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2.5 - 3.4 = -2.$$

A là ma trận cấp ba :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

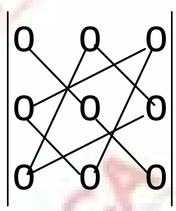
thì $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ là một số được định nghĩa như sau :

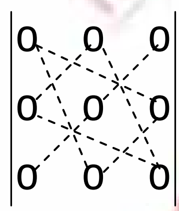
$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} \qquad (2.2)$$

gọi là định thức cấp 3

Có thể nhớ cách lập biểu thức của Δ theo quy tắc Sarrus





3 số mang dấu (+) theo đường chéo chính

3 số mang dấu – theo đường chéo phụ

Ví dụ:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2.0.3 + 2.3.4 + 5.(-1).(-1) - 2.0.(-1) - 2.4.(-1) - 5.3.3 = -8$$

2.2.2. Các tính chất của định thức

Để dễ hiểu ta xét chứng minh cho các định thức cấp 3 và ta viết một chỉ số cho các phần tử để đơn giản hơn.

Tính chất 2.1: Khi ta đổi hàng thành cột, đổi cột thành hàng thì định thức không đổi.

Chứng minh:

Theo định nghĩa ta có

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3 . \qquad (2.2)$$

Bây giờ, ta đổi hàng thành cột, đổi cột thành hàng, ta được

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3 . \qquad (2.3)$$

So sánh hai biểu thức (2.2) và (2.3), ta thấy $\Delta = \Delta'$.

Chú thích: Do tính chất 1, từ nay về sau ta phát biểu các tính chất cho cột và cần phải hiểu nó cũng đúng đối với hàng.

Tính chất 2.2: Khi ta đổi vị trí hai cột cho nhau thì định thức đổi dấu.

Chứng minh:

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$= c_1b_2a_3 + b_1a_2c_3 + a_1c_2b_3 - a_1b_2c_3 - b_1c_2a_3 - c_1a_2b_3$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

Tính chất 2.3: Một định thức có hai cột giống nhau thì bằng 0.

Chứng minh:

Thật vậy, gọi Δ là định thức trên. Nếu đổi hai cột giống nhau ấy cho nhau thì định thức đổi dấu theo tính chất 2.2. Mặt khác, vì hai cột ấy giống nhau nên khi đổi chúng cho nhau thì định thức không đổi. Vậy $\Delta = -\Delta$, do đó $2\Delta = 0 \Rightarrow \Delta = 0$.

Tính chất 2.4: Thừa số chung của các phần tử của cùng một cột có thể đưa ra ngoài dấu định thức.

Chẳng hạn:

$$\begin{vmatrix} ka_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Chứng minh:

Thật vậy, mỗi số hạng đều chứa một phần tử của cột 1, vậy k là thừa số chung có thể đưa ra ngoài dấu tổng.

Tính chất 2.5:

$$\begin{vmatrix} a_1' + a_1'' & b_1 & c_1 \\ a_2' + a_2'' & b_2 & c_2 \\ a_3' + a_3'' & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1' & b_1 & c_1 \\ a_2' & b_2 & c_2 \\ a_3' & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1'' & b_1 & c_1 \\ a_2'' & b_2 & c_2 \\ a_3'' & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Tính chất 2.6: Nếu cộng các phần tử của một cột nào đó với những phần tử của một cột khác nhân với cùng một số k thì định thức không đổi.

Chẳng hạn

$$\begin{vmatrix} a_1 + kc_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + kc_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + kc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} kc_1 & b_1 & c_1 \\ kc_2 & b_2 & c_2 \\ kc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\left(\text{do} \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ theo tính chất } 2.3 \right)$$

Tính chất 2.7: A, B là ma trận cùng cấp. Khi đó

$$|A|.|B| = |AB|$$

2.2.3. Khai triển định thức theo các phần tử của cùng một cột (hay một hàng). Định thức con. Phần phụ đại số.

Biểu thức (2.2) trong định nghĩa định thức cấp ba Δ có thể sắp xếp lại

$$\Delta = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

Hay

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad (2.4)$$

Ta gọi định thức con ứng với mỗi phần tử nào đó của định thức cấp ba Δ là định thức cấp hai suy từ Δ bằng cách bỏ đi hàng và cột chứa phần tử ấy.

Ta ký hiệu các định thức con ứng với các phần tử a_1, a_2, a_3 lần lượt là D_1, D_2, D_3.

Khi đó $$\Delta = a_1D_1 - a_2D_2 + a_3D_3 \qquad (2.5)$$

Có thể viết lại (2.5) như sau

$$\Delta = a_1(-1)^{1+1}D_1 + a_2(-1)^{2+1}D_2 + a_3(-1)^{3+1}D_3 \qquad (2.6)$$

Trong đó lũy thừa của (–1) là tổng các chỉ số hàng và cột của các phần tử a_1, a_2, a_3 tương ứng.

Ta ký hiệu $$A_1 = (-1)^{1+1}D_1, A_2 = (-1)^{2+1}D_2, A_3 = (-1)^{3+1}D_3$$

và gọi chung là phần phụ đại số ứng với các phần tử a_1, a_2, a_3 tương ứng.

Công thức (2.6) trở thành

$$\Delta = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 \qquad (2.7)$$

Công thức (2.7) được gọi là công thức khai triển định thức cấp ba Δ theo các phần tử của cột thứ nhất. Tương tự, ta có thể khai triển định thức theo các phần tử của cột thứ hai, cột thứ ba hay hàng thứ nhất, hàng thứ hai, hàng thứ ba.

Ta có thể phát biểu tổng quát: Định thức bằng tổng các tích các phần tử của một cột (hay một hàng) với các phần phụ đại số tương ứng với chúng.

Chú thích: Trong công thức (2.7) giả sử $a_1 = a_2 = 0$ thì $\Delta = a_3A_3$.

Vì vậy, ta có thể áp dụng tính chất 2.6 để đưa một định thức cấp ba về dạng trong đó có hai phần tử của cùng một hàng hay một cột bằng 0, sau đó áp dụng tính chất trên, ta có thể tính định thức cấp ba khá nhanh.

Ví dụ: Tính định thức cấp ba

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 7 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3+C_2\to C_3} \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 7 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_2+C_1\to C_2} \begin{vmatrix} 5 & 8 & 2 \\ 7 & 8 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= 1(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 8.$$

Định thức cấp 4:

Định thức

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

được gọi là định thức cấp 4.

Ta có thể tính định thức này bằng cách khai triển nó, chẳng hạn theo cột thứ nhất

$$\Delta = a_1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + a_2(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$+ a_3(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + a_4(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Ví dụ: Tính định thức cấp 4

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

(lấy các hàng 2,3,4 trừ đi hàng 1)

$$= (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

Định thức cấp n :

Khai triển định thức theo các phần tử của hàng i.

Ký hiệu D_{ij} là định thức con ứng với phần tử a_{ij} có được Δ bằng cách bỏ đi hàng i và cột j. Ký hiệu A_{ij} là phần phụ đại số ứng với phần tử a_{ij}

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$$

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

Định lý 2.1: Gọi d là định thức của ma trận $A\left(d = |A|\right)$; i, j là hai số tự nhiên, $1 \le i, j \le n$, ta có:

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} d \text{ nÕu } i = j \\ 0 \text{ nÕu } i \ne j \end{cases} \quad (2.8)$$

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \ldots + a_{ni}A_{nj} = \begin{cases} d \text{ nÕu } i = j \\ 0 \text{ nÕu } i \ne j \end{cases} \quad (2.9)$$

Chứng minh:

Ta chứng minh công thức (2.8), công thức (2.9) được chứng minh tương tự. Với i = j, công thức chính là công thức khai triển định thức d theo hàng thứ i. Với $i \ne j$, ta xét định thức

$$\overline{d}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ . & . & \dots & . \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ (\text{hàng } i) \\ \\ (\text{hàng } j) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Định thức $\overline{d}$ nhận được từ định thức d bằng cách thay các phần tử của hàng thứ j bằng các phần tử tương ứng của hàng thứ i (các hàng khác giữ nguyên). Khai triển định thức $\overline{d}$ theo dòng thứ j, ta được vế trái của đẳng thức (2.8). Mặt khác, $\overline{d}=0$ vì định thức có hai hàng giống nhau. Vậy công thức (2.8) đúng khi $i \neq j$.

2.3. Ma trận nghịch đảo

2.3.1. Định nghĩa 2.7

Một ma trận vuông X cùng cấp với ma trận vuông A được gọi là ma trận nghịch đảo của ma trận A nếu AX = XA = E.

Từ định nghĩa, ta suy ra rằng nếu một ma trận vuông có ma trận nghịch đảo thì nó chỉ có một ma trận nghịch đảo duy nhất. Thật vậy, nếu X và Y cùng là ma trận nghịch đảo của ma trận A thì

$$(XA)Y = EY = Y$$
$$X(AY) = XE = X.$$

Vì phép nhân ma trận có tính chất kết hợp nên từ đây suy ra X = Y.

Ta ký hiệu ma trận nghịch đảo của ma trận A là A^{-1}.

Theo định nghĩa $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

2.3.2. Điều kiện tồn tại ma trận nghịch đảo

Xét một ma trận vuông cấp n bất kỳ

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ứng với ma trận A ta lập ma trận

$$A^{*}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ . & . & \dots & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Trong đó A_{ij} là phần phụ đại số của phần tử a_{ij} trong định thức $|A|$. Ma trận A* được gọi là ma trận phụ hợp của ma trận A.

Định nghĩa 2.8: Ma trận vuông A được gọi là ma trận không suy biến nếu $d = |A| \neq 0$.

Định lý 2.2: Điều kiện cần và đủ để một ma trận vuông A có ma trận nghịch đảo là $d = |A| \neq 0,$ tức là ma trận A không suy biến.

Chứng minh:

Cần: Giả sử ma trận A có ma trận nghịch đảo A^{-1}. Theo định nghĩa, ta có:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E\,.$$

Từ đây suy ra

$$|A|.|A^{-1}| = |AA^{-1}| = |E|$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Do đó $d = |A| \neq 0$ (vì nếu $|A| = 0$ thì $|A| = |A^{-1}| = 0$).

Đủ: Giả sử $d = |A| \neq 0,$ ta chứng minh rằng ma trận vuông A có ma trận nghịch đảo.

Đặt $AA^{*} = \left(u_{ij}\right)_{n\times n}, A^{*}A = \left(v_{ij}\right)_{n\times n}$, ta có:

$$\begin{aligned} u_{ij} &= a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} \\ v_{ij} &= a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \ldots + a_{ni}A_{nj}\left(i, j = 1, 2, \ldots n\right) \end{aligned}$$

Theo định lý khai triển định thức, ta được

$$u_{ij} = v_{ij} = \begin{cases} d \text{ nÕu } i = j \\ 0 \text{ nÕu } i \neq j. \end{cases}$$

Như vậy

$$AA^{*} = A^{*}A = \begin{vmatrix} d & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & d \end{vmatrix} = dE$$

Từ đây suy ra

$$\left(\frac{1}{d}A^{*}\right)A = A\left(\frac{1}{d}A^{*}\right) = E$$

Điều này chứng tỏ ma trận A có ma trận nghịch đảo là

$$A^{-1} = \frac{1}{d}A^{*} \qquad (2.10)$$

Định lý vừa chứng minh không những cho ta tiêu chuẩn để nhận biết một ma trận vuông có ma trận nghịch đảo hay không mà còn cho ta công thức để tìm ma trận nghịch đảo (công thức (2.10)).

Ví dụ 1: Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ma trận này không có ma trận nghịch đảo vì $|A| = 0$.

Ví dụ 2: Tìm nghịch đảo của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Đối với ma trận này ta có

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

do đó, nó có ma trận nghịch đảo. Để tìm ma trận nghịch đảo, trước hết, ta tìm ma trận phụ hợp A^*. Ta có

$$A_{11} = 5; A_{12} = 0, A_{13} = 0$$
$$A_{21} = -4, A_{22} = 2, A_{23} = -1$$
$$A_{31} = 2, A_{32} = -1, A_{33} = 3$$
$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ma trận nghịch đảo của ma trận đã cho là

$$A^{-1} = \frac{1}{d}A^* = \frac{1}{5}A^* = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Nhận xét: Cho A và B là hai ma trận vuông cấp n, trong đó A là ma trận không suy biến. Xét các phương trình ma trận

$$AX = B \text{ và } YA = B$$

Dễ thấy rằng các phương trình này có nghiệm duy nhất tương ứng

$$\begin{aligned} X &= A^{-1}B \\ Y &= BA^{-1} \end{aligned} \qquad (2.11)$$

Ví dụ: Cho hai ma trận

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 1 & 6\end{pmatrix}$$

Ma trận A là ma trận không suy biến $\left(|A|=1\right)$ và do đó, nó có ma trận nghịch đảo

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$$

Nghiệm của các phương trình $AX=B$ và $YA=B$ là:

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 1 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -7\\ 4 & 13\end{pmatrix}$$

$$Y=BA^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 1 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 17\\ -5 & 16\end{pmatrix}$$

2.3.3. Các tính chất của ma trận nghịch đảo

- Nếu ma trận A không suy biến thì

$$\left(A^{-1}\right)^{-1}=A \text{ và } \left|A^{-1}\right|=\frac{1}{|A|}$$

- Nếu A và B là các ma trận vuông cùng cấp và không suy biến thì AB có ma trận nghịch đảo là:

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

Thật vậy

$$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right)=A\left(BB^{-1}\right)A^{-1}=AEA^{-1}=AA^{-1}=E$$
$$\left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB)=B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B=B^{-1}EB=B^{-1}B=E.$$

Ma trận nghịch đảo của ma trận đơn vị cũng là ma trận đơn vị. Điều này suy từ

$$EA=A.$$

Vậy thay A bằng E^{-1}, ta có:

$$E=EE^{-1}=E^{-1}.$$

2.4. Hạng của ma trận và số dạng độc lập tuyến tính

Xét ma trận $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$. Từ ma trận A lấy k hàng và k cột bất kỳ $\left(k\le \min\{m,n\}\right)$ thì những phần tử chung của k hàng và k cột đó tạo thành một ma trận vuông. Định thức ứng với ma trận vuông đó gọi là định thức con cấp k của ma trận A.

Định nghĩa 2.9: Cấp cao nhất của định thức con khác 0 của ma trận A gọi là hạng của ma trận A, ký hiệu là $r(A)$.

Dễ thấy $0<r(A)\le \min\{m,n\}$.

Ta gọi biểu thức $f = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n$ trong ®ó $a_1, a_2, ..., a_n$ là các hằng số, còn $x_1, x_2, ..., x_n$ là các biến số là một dạng tuyến tính.

Hệ m dạng tuyến tính của n biến $x_1, x_2, ..., x_n$

$$\begin{aligned} f_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ f_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \end{aligned} \qquad (2.12)$$

là phụ thuộc tuyến tính nếu tìm được các hằng số $c_1, c_2, ..., c_m$ không đồng thời bằng 0 sao cho

$$c_1f_1 + c_2f_2 + ... + c_mf_m = 0 \text{ với mọi } x_1, x_2, ..., x_n \qquad (2.13)$$

Nếu không tìm được các hằng số như vậy thì ta nói m dạng tuyến tính $f_2, ..., f_m$ là độc lập tuyến tính.

Dạng tuyến tính f được gọi là tổ hợp tuyến tính của m dạng tuyến tính $f_1, ..., f_m$ nếu

$$f = \alpha_1f_1 + \alpha_2f_2 + ... + \alpha_mf_m \text{ víi mäi } x_1, x_2, ..., x_n \qquad (2.14)$$

trong đó $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ là các hằng số.

Muốn tính hạng của ma trận, người ta dựa vào các tính chất sau:

- **Tính chất 1:** Hạng của ma trận không thay đổi nếu ta thực hiện các phép biến đổi sau:
  - Đổi cột thành hàng, hàng thành cột.
  - Đổi chỗ 2 hàng (cột) cho nhau.
  - Nhân các phần tử của cùng một hàng (cột) với cùng một số khác 0.
  - Cộng vào một hàng (cột) các phần tử tương ứng của hàng (cột) khác đã được nhân với một số.
  - Thêm hoặc bớt đi một hàng (cột) là tổ hợp tuyến tính của các hàng (cột) khác. Trường hợp riêng là thêm hoặc bớt đi một hàng (cột) gồm toàn số 0.

  Các tính chất này dễ dàng suy ra từ các tính chất của định thức, bởi vì các phép toán trên phép toán 1 đến phép toán 4 không làm thay đổi tính chất khác 0 hay bằng 0 của định thức còn định thức thu được sau phép toán 5 sẽ bằng 0.
- **Tính chất 2:** Nếu một định thức cấp k nào đó của ma trận A khác 0 mà các định thức cấp k + 1 chứa nó đều bằng 0 thì $r(A) = k$.
- **Ý nghĩa của tính chất 1:** Cho phép ta biến đổi ma trận để tính các định thức con dễ hơn khi tìm hạng của ma trận.
- **Ý nghĩa của tính chất 2:** Nếu đã tìm được một định thức D cấp k khác 0 rồi, ta không cần tính tất cả các định thức cấp k + 1 của ma trận A mà chỉ cần tính các định thức cấp k + 1 chứa định thức D. Nếu các định thức này bằng 0 cả thì ta kết luận $r(A) = k$. Nếu có một định thức cấp k + 1 khác 0 thì ta lặp lại như cũ.

Ví dụ: Tính hạng của ma trận

$$A = \begin{Vmatrix} 3 & 5 & 9 \\ 6 & 10 & 18 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 12 \end{Vmatrix} \to \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 6 & 10 & 18 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 12 \end{Vmatrix} \to \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 12 \end{Vmatrix}$$

$$\to \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \to \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix} \to \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\to \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix} \to \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

Ta có $r(A) \le 2$. Xét định thức cấp 2

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

Vậy $r(A) = 2$.

Bây giờ áp dụng tính chất 2, ta thấy có một định thức cấp 2 khác 0

$$D = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \ne 0.$$

Ta hãy tính hai định thức cấp 3 chứa nó

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 9 \\ 6 & 10 & 18 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 10 & 18 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 12 \end{vmatrix} = 0.$$

Vậy $r(A) = 2$.

Xét hệ m dạng tuyến tính (2.12). Gọi ma trận lập từ các hệ số của hệ dạng này là:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

Định lý 2.3: Nếu $r(A) = k$ thì tồn tại k dạng độc lập tuyến tính, còn các dạng khác đều biểu diễn được qua k dạng đó.

Chứng minh: Vì $r(A) = k$ nên có ít nhất một định thức D cấp k khác 0. Không giảm tính tổng quát nếu giả thiết D nằm ở góc trái phía trên của ma trận.

Ta sẽ chứng minh k dạng đầu tiên là độc lập tuyến tính. Thật vậy, nếu các dạng đó là phụ thuộc tuyến tính thì phải có một dạng biểu diễn được qua các dạng còn lại. Chẳng hạn, dạng thứ k biểu diễn qua k – 1 dạng đầu

$$f_k = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_{k-1} f_{k-1}.$$

Viết dưới dạng đầy đủ rồi lấy các $x_1, x_2, \dots, x_n$ làm các thừa số chung ở vế phải ta có:

$$\begin{aligned} a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n &= (\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{21} + \dots + \alpha_{k-1}a_{k-1,1})x_1 + \\ &+ (\alpha_1 a_{12} + \alpha_2 a_{22} + \dots + \alpha_{k-1}a_{k-1,2})x_2 + \dots + \\ &+ (\alpha_1 a_{1n} + \alpha_2 a_{2n} + \dots + \alpha_{k-1}a_{k-1,n})x_n. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Vì (2.15) đúng với mọi $x_1, x_2, \dots, x_n$ tức là một đồng nhất thức nên các hệ số tương ứng phải bằng nhau

$$\begin{aligned} a_{k1} &= \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{21} + \dots + \alpha_{k-1}a_{k-1,1} \\ a_{k2} &= \alpha_1 a_{12} + \alpha_2 a_{22} + \dots + \alpha_{k-1}a_{k-1,2} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{kn} &= \alpha_1 a_{1n} + \alpha_2 a_{2n} + \dots + \alpha_{k-1}a_{k-1,n} \end{aligned} \tag{2.16}$$

Hệ thức (2.16) chứng tỏ rằng hàng thứ k của ma trận A $A_{(k)} = (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn})$ là tổ hợp tuyến tính của k – 1 hàng trên.

$$A_{(1)} = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), \dots, A_{(k-1)} = (a_{k-1,1}, a_{k-1,2}, \dots, a_{k-1,n})$$

Trong trường hợp riêng, hàng thứ k của định thức D là tổ hợp tuyến tính của k – 1 hàng trên. Theo các tính chất của định thức, ta suy ra $D = 0$ vô lý. Vậy k dạng đầu tiên phải là độc lập tuyến tính.

Bây giờ, ta phải chứng minh các dạng còn lại $f_i\ (i > k)$ biểu diễn được theo k dạng đầu, tức là chứng minh hàng thứ i của ma trận A biểu diễn được theo k hàng đầu.

Xét định thức cấp k + 1 lập từ D thêm vào hàng i $(i \geq k+1)$ còn cột j là bất kỳ.

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1j} \\ \vdots & D & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{kj} \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & a_{ij} \end{vmatrix}$$

Ta có $\Delta_j = 0$. Thật vậy, nếu $j \leq k$ thì Δ_j có 2 cột giống nhau, do đó, $\Delta_j = 0$, còn nếu j > k thì vì Δ_j là định thức cấp k + 1 mà $r(A) = k$ nên $\Delta_j = 0$.

Khai triển Δ_j theo cột cuối cùng, ta được:

$$\Delta_j = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{kj}A_{kj} + a_{ij}A_{ij} = 0$$

Vì $A_{ij} = D \neq 0$ nên sau khi chia cho D ta có:

$$a_{ij} = -\frac{A_{1j}}{D}a_{1j} - \frac{A_{2j}}{D}a_{2j} - ... - \frac{A_{kj}}{D}a_{kj}$$

Đặt $c_1 = -\frac{A_{1j}}{D}, c_2 = -\frac{A_{2j}}{D}, ..., c_k = -\frac{A_{kj}}{D}$.

Ta có: $a_{ij} = c_1a_{1j} + c_2a_{2j} + ... + c_ka_{kj}$

Nghĩa là phần tử ở hàng i cột j của ma trận là tổ hợp tuyến tính của k phần tử trên cùng của cột j.

Cho j = 1, 2, …, n, ta suy ra hàng i là tổ hợp tuyến tính của k hàng đầu. Vì i là bất kỳ nên ta có điều phải chứng minh.

TÓM LƯỢC CUỐI BÀI

Các bạn đã được học về Ma trận và Định thức.

Các bạn cần ghi nhớ các vấn đề sau:

- Nắm được khái niệm về ma trận, các phép toán về ma trận;
- Khái niệm về hạng của ma trận và số dạng độc lập tuyến tính; biết cách tìm hạng của ma trận;
- Hiểu về định thức, các tính chất và cách tính định thức;
- Giải được các bài toán về định thức và ma trận cách tự luận và theo trắc nghiệm.

BÀI TẬP

1. Tính định thức cấp 3

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & a+3 & b+4 \\ 2 & c+3 & d+4 \end{vmatrix}$$

2. Với điều kiện nào của α, β và γ thì

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 0 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 0 \end{vmatrix}$$

3. Giải và biện luận phương trình

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ a & 1 & x \\ b & c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

4. Tính định thức của ma trận sau:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{bmatrix}$$

5. Cho hai ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Tìm (2A) (5B)

6. Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}$ và $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$. H·y tÝnh $f(A)$.

7. Cho hai ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Chứng tỏ A là khả nghịch và

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 9 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

b) Tìm ma trận $A^{-1}BA$

8. Tính hạng của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1.......m.......-1.......2 \\ 2.....-1.........m.......5 \\ 1......10......-6........1 \end{bmatrix} \quad \text{theo tham số m.}$$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Xét các định thức

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}, \quad \Delta' = \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a & b & c \end{vmatrix}, \quad \Delta'' = \begin{vmatrix} a'' & b'' & c'' \\ a' & b' & c' \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

Khi đó

A. $\Delta = -\Delta'$; B. $\Delta = \Delta'$;

C. $\Delta = \Delta''$; D. $\Delta > \Delta''$.

2. Cho các định thức

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$$

Khi đó

A. $(A+B)+C \neq A+(B+C)$ B. $(A+B)+C = A+(B+C)$

C. $(B+A)+C \neq (A+B)+C$ D. $C+(A+B) \neq (A+B)+C$.

3. Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

Kết quả nào sau đây là đúng

A. $A^2 = \begin{bmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{bmatrix}$ B. $A^2 = \begin{bmatrix} \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{bmatrix}$

C. $A^2 = \begin{bmatrix} -\cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{bmatrix}$ D. $A^2 = \begin{bmatrix} \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \\ -\sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{bmatrix}$

4. Cho ma trận

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$. Tìm ma trận $X = \begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix}$

giao hoán với ma trận A, nghĩa là $AX = XA$.

A. $X=\begin{bmatrix} x & 2y \\ y & x+2y \end{bmatrix}$;   B. $X=\begin{bmatrix} x & -2y \\ y & x+2y \end{bmatrix}$;

C. $X=\begin{bmatrix} x & x+2y \\ y & -2y \end{bmatrix}$;   D. $X=\begin{bmatrix} x & x+2y \\ x & 2y \end{bmatrix}$

5. Cho ma trận

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ Khi đó:}$$

A. Ma trận A không có ma trận nghịch đảo.

B. $A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 6 & 4 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

C. $A^{-1}=\begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 6 & 4 & -6 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$;

D. $A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 4 & -6 & 2 \end{bmatrix}$.