Phép chia hết và phép chia có dư

I. Phép chia hết

1. Định nghĩa

- "Chia hết": chia mà không dư
- Xét $a, b \in \mathbb{Z}$ và $b \neq 0$
- Khi $b \mid a$ $\rightarrow$ $\begin{cases} b \text{ là ước của } a \\ a \text{ là bội của } b \end{cases}$ $\leftrightarrow$ $\exists q \in \mathbb{Z}$ sao cho $a = b.q$

2. Ký hiệu

$b \mid a$ (b: ước, a: bội) $\quad \exists q \in \mathbb{Z}$ sao cho $a = b.q \leftrightarrow a \vdots b$

- Cách đọc: "b chia hết a" "a chia hết cho b"

  "b là ước của a" "a là bội của b"

Ví dụ: 3 chia hết 6 không?

$3 \mid 6 \rightarrow \exists 2 \in \mathbb{Z}, 6 = 3.2$

3. Nhận xét

- Với mọi $b \neq 0$ thì:

+ 0 chia hết cho $\forall b$ vì $0 = b.0 \Rightarrow$ 0 là bội của mọi số nguyên $b \neq 0$

- Với mọi a thì

+ $1 \mid a$ vì $a \in \mathbb{Z}$, $a = 1.a \Rightarrow$ 1 là ước của mọi số nguyên a

4. Tính chất của phép chia hết

1. $b \mid a \leftrightarrow \pm b \mid \pm a$
2. $\forall a \neq 0$ thì $a \mid a$
3. $\forall a$ thì $\pm 1 \mid a$
4. $\forall a \neq 0$ thì $a \mid 0$
5. ($\forall a \neq 0, \forall b \neq 0$, $a \mid b$ và $b \mid a$) $\leftrightarrow a = \pm b$
6. Nếu ($a \mid b$ và $b \mid c$) thì $a \mid c$ < tính chất bắc cầu >
7. Nếu $b \mid a$ thì $b \mid ax$
8. Nếu $a \mid x$ và $b \mid y$ thì $ab \mid xy$
9. Nếu $c \mid a$ và $c \mid b$ thì $c \mid (a+b)$ và $c \mid (a-b)$
10. Nếu $c \mid a$ và $c \mid b$ thì $c \mid (ax + by)$ $\quad \forall x, y \in \mathbb{Z}$
11. Nếu $b \mid a_1, a_2, a_3, \ldots$ thì $b \mid (x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + \ldots)$ $\quad \forall x_i \in \mathbb{Z}$

II. Phép chia có dư

1. Định lý:

- Cho $a, b \in \mathbb{Z}$ với $b \neq 0$
- $\exists$ duy nhất cặp số nguyên q và r sao cho:

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \le r < b \end{cases}$$

Trong đó: q được gọi là thương (quotient)

r được gọi là số dư (remainder)

- Khi $r = 0$ $\longrightarrow$ ta có phép chia hết

Ví dụ: Hãy tìm q và r?

$a = 7$, $b = 2$ $\longrightarrow$ $7 = 2q + r$ => $q = 3$, $r = 1$

$a = 10$, $b = 5$ $\longrightarrow$ $10 = 5q + r$ => $q = 2$, $r = 0$