

1.3.7	Các định lý tách tập lồi . . . . .	24
1.3.8	Tập lồi đa diện . . . . .	25
1.3.9	Đơn hình . . . . .	28
1.4	Hàm lồi . . . . .	29
1.4.1	Định nghĩa . . . . .	29
1.4.2	Các phép toán về hàm lồi . . . . .	32
1.4.3	Tính liên tục của hàm lồi . . . . .	32
1.4.4	Đạo hàm theo hướng của hàm lồi . . . . .	33
1.4.5	Tiêu chuẩn nhận biết hàm lồi khả vi . . . . .	34
<b>2</b>	<b>Bài toán tối ưu</b>	<b>39</b>
2.1	Một số ví dụ . . . . .	39
2.2	Bài toán tối ưu và các khái niệm cơ bản . . . . .	51
2.3	Các loại bài toán tối ưu . . . . .	57
2.4	Điều kiện tồn tại nghiệm . . . . .	58
<b>3</b>	<b>Quy hoạch tuyến tính</b>	<b>63</b>
3.1	Định nghĩa quy hoạch tuyến tính . . . . .	64
3.1.1	Dạng chuẩn tắc . . . . .	65
3.1.2	Dạng chính tắc . . . . .	65
3.1.3	Chuyển bài toán quy hoạch tuyến tính bất kỳ về dạng chuẩn tắc hay chính tắc . . . . .	66
3.2	Sự tồn tại nghiệm và tính chất tập nghiệm của quy hoạch tuyến tính . . . . .	68
3.2.1	Sự tồn tại nghiệm . . . . .	68
3.2.2	Tính chất tập nghiệm . . . . .	70
3.3	Giải bài toán quy hoạch tuyến tính hai biến bằng phương pháp hình học . . . . .	71
3.4	Phương pháp đơn hình giải quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc . . . . .	75
3.4.1	Mô tả hình học của phương pháp đơn hình . . . . .	77
3.4.2	Cơ sở lý thuyết của phương pháp đơn hình . . . . .	77
3.4.3	Thuật toán đơn hình giải bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc . . . . .	89
3.4.4	Công thức đối cơ sở và thuật toán đơn hình dạng bảng . . . . .	90
3.5	Tìm phương án cực biên xuất phát và cơ sở xuất phát . . . . .	103
3.5.1	Trường hợp bài toán có dạng chuẩn tắc . . . . .	103
3.5.2	Trường hợp bài toán có dạng chính tắc . . . . .	104
3.5.3	Phương pháp đánh thuế hay phương pháp bài toán (M) . . . . .	112
3.6	Tính hữu hạn của thuật toán đơn hình . . . . .	115
3.7	Hiện tượng xoay vòng . . . . .	116
3.8	Đối ngẫu . . . . .	117
3.8.1	Cặp bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu . . . . .	117
3.8.2	Các định lý về đối ngẫu . . . . .	120
3.8.3	Định lý về độ lệch bù . . . . .	123
3.8.4	Một số ứng dụng của lý thuyết đối ngẫu . . . . .	126

<b>4 Bài toán vận tải</b>	<b>135</b>
4.1 Bài toán vận tải . . . . .	135
4.1.1 Mô hình toán học . . . . .	135
4.1.2 Sự tồn tại phương án tối ưu . . . . .	140
4.2 Bảng vận tải, chu trình . . . . .	141
4.2.1 Bảng vận tải . . . . .	141
4.2.2 Chu trình . . . . .	142
4.3 Phương pháp thế vị giải bài toán vận tải . . . . .	146
4.3.1 Cơ sở lý thuyết . . . . .	147
4.3.2 Thuật toán thế vị . . . . .	151
4.4 Tìm phương án xuất phát cho bài toán vận tải . . . . .	157
4.4.1 Phương pháp góc tây bắc (northwest - conner rule) . . . . .	157
4.4.2 Phương pháp cực tiểu chi phí (The least-cost method) . . . . .	159
4.5 Các bài toán vận tải mở rộng . . . . .	163
4.5.1 Bài toán không cân bằng thu phát . . . . .	163
4.5.2 Bài toán vận tải với ràng buộc bất đẳng thức . . . . .	168
4.5.3 Bài toán lập kho nhận hàng . . . . .	170
4.5.4 Bài toán vận tải có ô cấm . . . . .	173
4.5.5 Bài toán vận tải dạng max . . . . .	176
4.5.6 Bài toán phân việc (The personnel-assignment problem) . . . . .	178
<b>5 Quy hoạch nguyên</b>	<b>183</b>
5.1 Mô hình toán học . . . . .	183
5.2 Một số ví dụ . . . . .	185
5.3 Ý tưởng của phương pháp nhánh cận . . . . .	189
5.3.1 Một số khái niệm cơ bản . . . . .	189
5.3.2 Ý tưởng của phương pháp nhánh cận . . . . .	190
5.4 Thuật toán nhánh cận Land - Doig giải bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên hoàn toàn . . . . .	191
5.4.1 Tính cận trên . . . . .	191
5.4.2 Chia nhánh . . . . .	192
5.4.3 Thuật toán . . . . .	192
5.4.4 Ví dụ . . . . .	194
5.5 Thuật toán nhánh cận giải bài toán ba lô 0 – 1 . . . . .	204
5.5.1 Công thức tính cận trên của bài toán ba lô (KP) . . . . .	204
5.5.2 Tính cận trên của bài toán con . . . . .	207
5.5.3 Thuật toán . . . . .	209
5.5.4 Ví dụ . . . . .	213
<b>6 Quy hoạch phi tuyến</b>	<b>221</b>
6.1 Bài toán quy hoạch phi tuyến không ràng buộc . . . . .	221
6.1.1 Điều kiện tối ưu . . . . .	221

6.1.2	Phương pháp hướng giảm . . . . .	225
6.1.3	Phương pháp gradient . . . . .	231
6.1.4	Phương pháp Newton . . . . .	236
6.1.5	Cực tiểu hàm một biến . . . . .	248
6.1.6	Phương pháp tìm kiếm trực tiếp . . . . .	252
6.2	Bài toán quy hoạch phi tuyến có ràng buộc . . . . .	256
6.2.1	Điều kiện tối ưu . . . . .	257
6.2.2	Phương pháp nhân tử Lagrange . . . . .	266
6.2.3	Phương pháp tuyến tính hóa giải quy hoạch lồi . . . . .	273
6.2.4	Phương pháp hướng có thể giải bài toán cực tiểu hàm trơn với ràng buộc tuyến tính . . . . .	278
6.2.5	Phương pháp Frank-Wolfe giải bài toán quy hoạch lồi với ràng buộc tuyến tính . . . . .	281
6.2.6	Phương pháp hàm phạt . . . . .	284

## Một số ký hiệu và chữ viết tắt

$\mathbb{R}$	tập số thực
$\mathbb{R}^n$	không gian Euclid $n$ chiều
$x \in D$	$x$ thuộc tập $D$
$x \notin D$	$x$ không thuộc tập $D$
$\emptyset$	tập rỗng
$C \setminus D$	hiệu của tập $C$ và $D$
$C \cup D$	hợp của tập $C$ và tập $D$
$C \cap D$	giao của tập $C$ và tập $D$
$\langle x, y \rangle$	tích vô hướng của $x$ và $y$
$\ x\ $	chuẩn Euclid của $x$
$ x $	giá trị tuyệt đối của $x$
$\text{aff } E$	bao afin của tập $E$
$\text{conv } E$	bao lồi của tập $E$
$\dim E$	thứ nguyên (hoặc số chiều) của tập $E$
$ X $	số phần tử của tập $X$
$[x^1, x^2]$	đoạn nối hai điểm $x^1$ và $x^2$
$\text{int } X$	phần trong của tập $X$
$\text{ri } X$	phần trong tương đối của tập $X$
$\text{rec } X$	nón lồi xa của tập $X$
$\text{cone}\{v^1, \dots, v^k\}$	nón sinh bởi các véc tơ $v^1, \dots, v^k$
$T(X, x^*)$	nón tiếp xúc với tập $X$ tại điểm $x^*$
$F(X, x^*)$	tập các hướng chấp nhận được của tập $X$ tại $x^*$
$\text{dom } f$	miền xác định hữu hiệu của $f$
$\text{epi}(f)$	epigraph của hàm $f$
$\text{hypo}(f)$	hypograph của hàm $f$
$f'(x^0, d)$	đạo hàm theo hướng của hàm $f$ theo hướng $d$ tại $x^0$
$\nabla f(x)$	véc tơ gradient của hàm $f$ tại điểm $x$
$\nabla^2 f(x)$	ma trận Hesse của hàm $f$ tại điểm $x$
$f'_{x_i}$	đạo hàm riêng của $f$ theo biến $x_i$