제 2 교시

수학 영역

5지선다형

$4^{1-\sqrt{3}} \times 2^{2\sqrt{3}-1}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

$4=2^2$

$\therefore 4^{1-\sqrt{3}} = 2^{2(1-\sqrt{3})} = 2^{2-2\sqrt{3}}$

$4^{1-\sqrt{3}} \times 2^{2\sqrt{3}-1} = 2^{2-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-1} = 2^1 = 2$

함수 $f(x)=x^3-7x+5$ 에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ 의

값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = f'(2)$

$f'(x) = 3x^2-7$

$f'(2) = 3 \times 2^2 - 7 = 12-7 = 5$

3. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \frac{3}{5}$ 이고 $\sin\theta\cos\theta < 0$ 일 때, $\sin\theta + 2\cos\theta$ 의 값은? [3점]

① $-\frac{2}{5}$ ② $-\frac{1}{5}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{2}{5}$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos\theta = \frac{3}{5}$

$\sin\theta\cos\theta < 0$

$\therefore \sin\theta < 0$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

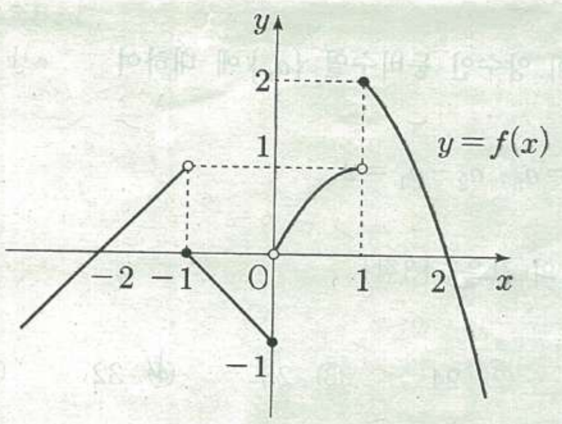
$\sin^2\theta + \frac{9}{25} = 1$

$\sin^2\theta = \frac{16}{25}$

$\sin\theta = -\frac{4}{5}$

$\therefore \sin\theta + 2\cos\theta = -\frac{4}{5} + 2 \times \frac{3}{5} = -\frac{4}{5} + \frac{6}{5} = \frac{2}{5}$

4. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to -1+} f(x) + \lim_{x \to 1-} f(x)$ 의 값은? [3점]

① −1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

$\lim_{x \to -1+} f(x) = 0$ $\lim_{x \to 1-} f(x) = 1$

$\therefore \lim_{x \to -1+} f(x) + \lim_{x \to 1-} f(x) = 0+1 = 1$

5. 함수

$$f(x)=\begin{cases} 3x+a & (x \le 1) \\ 2x^3+bx+1 & (x>1) \end{cases}$$

이 $x=1$에서 미분가능할 때, $a+b$의 값은?
(단, a, b는 상수이다.) [3점]

① -8 ② -6 ③ -4 ④ -2 ⑤ 0

$x=1$ 에서 미분 가능이면
$x=1$ 에서 연속 이므로

$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} (3x+a) = 3+a$

$f(1) = 3+a$

$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} (2x^3+bx+1) = 2+b+1 = 3+b$

$3+a = 3+b$

$\therefore a=b$

$f'(x)=\begin{cases} 3 & (x \le 1) \\ 6x^2+b & (x>1) \end{cases}$

$\lim_{x \to 1-} f'(x) = 3$

$f'(1) = 3$

$\lim_{x \to 1+} f'(x) = 6+b$

$3 = 6+b$

$b=-3=a$

$\therefore a+b=-6$

6. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3{}^2 = a_6,\ a_2 - a_1 = 2$$

일 때, a_5의 값은? [3점]

① 20 ② 24 ③ 28 ④ 32 ⑤ 36

$a_n = ar^{n-1}$ 모든 항이 양수 이므로 $(a>0, r>0)$

$a_3^2 = a_6$ 이므로

$(ar^2)^2 = ar^5$

$a^2r^4 = ar^5$

$\therefore a = r$

$a_2 - a_1 = 2$ 이므로

$ar - a = 2$

$a=r$ 이므로

$a^2 - a = 2$

$a^2 - a - 2 = (a-2)(a+1) = 0$

$a = 2 (\because a>0) = r$

$\therefore a_5 = ar^4 = a^5 = 2^5 = 32$

7. 함수 $f(x)=x^3+ax^2-9x+4$가 $x=1$에서 극값을 갖는다. 함수 $f(x)$의 극댓값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

$f(x)$가 $x=1$ 에서 극값을 가지므로 $f'(1)=0$ 이다.

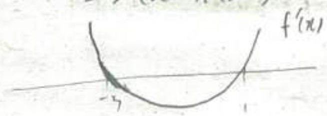
$f'(x) = 3x^2+2ax-9$

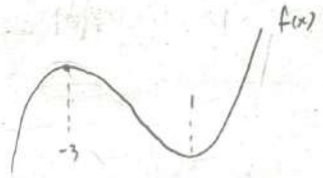
$f'(1) = 3+2a-9 = 2a-6 = 0$

$a=3$

$f'(x) = 3x^2+6x-9 = 3(x^2+2x-3)$

$= 3(x+3)(x-1)$





$\therefore$ $f(x)$는 $x=-3$에서 극댓값을 가짐

$f(-3) = -27 + 9a + 27 + 4$

$= 9a+4$

$a=3$

$\therefore f(-3) = 27+4 = 31$

1. 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(1+x)+f(1-x)=0$ 이다.
>
> (나) $\int_{-1}^{3} f'(x)dx = 12$

$f(4)$ 의 값은? [4점]

① 24 ② 28 ③ 32 ④ 36 ⑤ 40

(가) 해석

$f(1+x)+f(1-x)=0$ 에서 $x=0$ 일 때

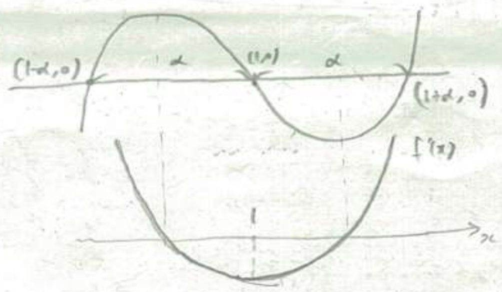
$f(1)+f(1)=0$ 이므로

$f(1)=0$ ...... ①

$f(1+x)=-f(1-x)$ 이므로

$f(x)$는 $(1,0)$ 에 대하여 대칭인 기함수이다.

$\therefore f(x)=(x-1)(x-(1+\alpha))(x-(1-\alpha))$



$f'(x)$는 $x=1$ 에 대하여 대칭 이고

$-1=1-2$ $3=1+2$ 이므로

$\int_{-1}^{3} f'(x)dx = 2\int_{1}^{3} f'(x)dx = 2(f(3)-f(1))$

$=2f(3)=12$

$f(3)=6$

$f(3)=2(3-1-\alpha)(3-1+\alpha)$

$=2(2-\alpha)(2+\alpha)$

$=2(4-\alpha^2)=6$

$4-\alpha^2=3$

$\alpha^2=1$

$\alpha=1$ $(\because \alpha>0)$

$\therefore f(x)=(x-1)(x-2)(x-0)=x(x-1)(x-2)$

$f(4)=4\times3\times2=24$

12. 모든 항이 정수이고 공차가 5 인 등차수열 $\{a_n\}$ 과 자연수 m 이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\sum_{k=1}^{2m+1} a_k < 0$
>
> (나) $|a_m|+|a_{m+1}|+|a_{m+2}| < 13$

$24 < a_{21} < 29$ 일 때, m 의 값은? [4점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

$a_n = a+5(n-1)$ ...... a_n과 공차가 정수 이므로 a도 정수이다.

(가) 해석

$\sum_{k=1}^{2m+1} a_k = \frac{(2m+1)(2a+5\times2m)}{2} < 0$

$2m+1>0$ 이므로 $2a+10m<0$ 즉, $\underbrace{a+5m}_{a_{m+1}}<0$

$a<-5m$ ...... ①

(나) 해석 $24<a_{21}<29$

$a_{21}=25, 26, 27, 28$

a_{21}	25	26	27	28
a_{20}	20	21	22	23
a_{19}	15	16	17	18
a_{18}	10	11	12	13
a_{17}	5	6	7	8
a_{16}	0	1	2	3
a_{15}	-5	-4	-3	-2
a_{14}	-10	-9	-8	-7
⋮				
a	-75	-74	-73	-72

$|a_m|+|a_{m+1}|+|a_{m+2}|<13$

을 만족하는 것은 박스 친 4경우 뿐

ㅁ는 $m=15$일 때 이고 O는 $m=14$ 일때

i) $m=15$
①에 의해 $a<-75$
존재하지 않음

ii) $m=14$
①에 의해 $a<-70$
존재

$\therefore m=14$

8. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=t^2-4t+3$$

이다. 점 P가 시각 $t=1$, $t=a\ (a>1)$에서 운동 방향을 바꿀 때, 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=a$까지 움직인 거리는? [3점]

① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ 3 ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

점 P가 운동 방향을 바꾼다 → $v(t)=0$이다.
$v(t)=(t-3)(t-1)$이므로 $t=3$과 $t=1$일 때 운동 방향 바뀜
$\therefore a=3$
$\int v(t)\,dt$ = 위치 이고 $\int |v(t)|\,dt$ = 움직인 거리 이므로
$\int_0^3 |t^2-4t+3|\,dt = \int_0^1 (t^2-4t+3)\,dt + \int_1^3 -(t^2-4t+3)\,dt$
$= \left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{3}t^3+2t^2-3t\right]_1^3$
$= \frac{1}{3}-2+3+(-9+18-9)-(-\frac{1}{3}+2-3)$
$= \frac{1}{3}-2+3+\frac{1}{3}-2+3 = \frac{2}{3}+2 = \frac{8}{3}$

9. 2 이상의 자연수 n에 대하여 x에 대한 방정식

$$(x^n-8)(x^{2n}-8)=0$$

의 모든 실근의 곱이 -4일 때, n의 값은? [4점]

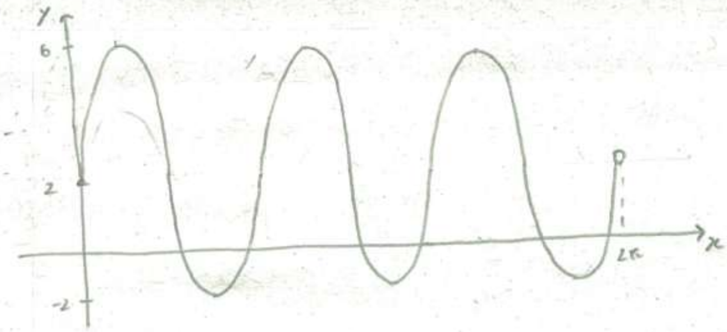
① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

i) $n=2k$ 즉, 짝수
$(x^{2k}-8)(x^{4k}-8)=0$
$x=\pm 8^{\frac{1}{2k}}$ 와 $x=\pm 8^{\frac{1}{4k}}$
(모든실근의곱) $= -8^{\frac{2}{2k}} \times \left(-8^{\frac{2}{4k}}\right) = 8^{\frac{1}{k}} \times 8^{\frac{1}{2k}} = 8^{\frac{1}{k}+\frac{1}{2k}} = 8^{\frac{3}{2k}} = -4$
양수 α의 n제곱이 음수가 될 수 없으므로
n은 홀수
ii) $n=2k-1$ 즉, 홀수
$(x^{2k-1}-8)(x^{2(2k-1)}-8)=0$
$x=8^{\frac{1}{2k-1}}$ 와 $x=\pm 8^{\frac{1}{2(2k-1)}}$
(모든실근의곱) $= 8^{\frac{1}{2k-1}} \times \left(-8^{\frac{1}{(2k-1)}}\right) = -8^{\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{(2k-1)}} = -8^{\frac{2}{2k-1}} = -4$
$2^{\frac{6}{2k-1}} = 2^2$
$\frac{6}{2k-1} = 2$ $\therefore n=3$
$6=4k-2$
$8=4k$
$k=2$

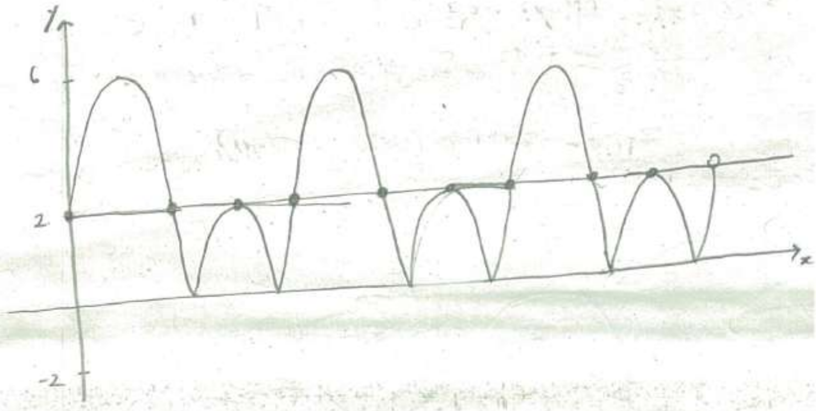
10. $0 \leq x < 2\pi$일 때, 곡선 $y=|4\sin 3x+2|$와 직선 $y=2$가 만나는 서로 다른 점의 개수는? [4점]

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

$y=4\sin 3x+2$
$0 \leq x < 2\pi$ 까지 $\sin x$ 그래프가 3개 있다.

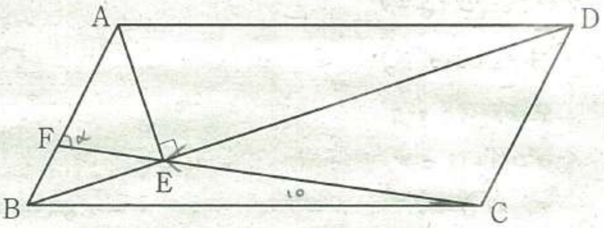


$y=|4\sin 3x+2|$



$\therefore 2=|4\sin 3x+2|$의 실근은 9개

13. 그림과 같이 평행사변형 ABCD가 있다. 점 A에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 E라 하고, 직선 CE가 선분 AB와 만나는 점을 F라 하자.
$\cos(\angle AFC)=\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\overline{EC}=10$이고 삼각형 CDE의 외접원의 반지름의 길이가 $5\sqrt{2}$일 때, 삼각형 AFE의 넓이는? [4점]



① $\frac{20}{3}$ ② 7 ③ $\frac{22}{3}$ ④ $\frac{23}{3}$ ⑤ 8

△DCE의 외접원의 반지름의 길이가 $5\sqrt{2}$이므로
$\overline{EC}$를 이용하여 사인법칙을 사용해 ∠EDC를 구한다.

$\frac{\overline{EC}}{\sin\angle EDC}=\frac{10}{\sin\angle EDC}=2\times5\sqrt{2}=10\sqrt{2}$

$\therefore \sin\angle EDC=\frac{1}{\sqrt{2}}$

즉 $\angle EDC=45^\circ$이고

$\overline{DC}\,//\,\overline{AB}$이므로 $\angle ABE=45^\circ$이다.
또한, $\overline{AE}\perp\overline{BE}$이므로 $\angle BAE=45^\circ$이다.
$\therefore$ △AEB는 직각이등변 삼각형 ··· ①

$\angle AFE=\alpha$라고 하면 $\angle BFE=\pi-\alpha$이고
$\overline{DC}\,//\,\overline{AB}$이므로 $\angle BFE=\angle ECD=\pi-\alpha$이다.

$\cos\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$ $\therefore \sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$

$\frac{\overline{DE}}{\sin\angle EDC}=\frac{\overline{DE}}{\sin(\pi-\alpha)}=\frac{\overline{DE}}{\sin\alpha}=\frac{\sqrt{10}}{3}\overline{DE}=10\sqrt{2}$

$\overline{DE}=10\sqrt{2}\times\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{30}{\sqrt{5}}=6\sqrt{5}$

△DEC에서 코사인법칙 사용(∵ 두변과 각 하나를 앎)

$180=\overline{CD}^2+100-2\,\overline{CD}\times10\times\cos(\pi-\alpha)$
$=\overline{CD}^2+100+20\,\overline{CD}\times\frac{\sqrt{10}}{10}$
$=\overline{CD}^2+2\sqrt{10}\,\overline{CD}+100$
$\overline{CD}^2+2\sqrt{10}\,\overline{CD}-80=0$
$\overline{CD}=-\sqrt{10}\pm\sqrt{10+80}=-\sqrt{10}+\sqrt{90}=-\sqrt{10}+3\sqrt{10}=2\sqrt{10}$ ($\because \overline{CD}>0$)

△AEB는 직각이등변 삼각형이므로 $\overline{BE}=\overline{AE}=x$이고 $\overline{CD}=\overline{AB}$이므로
$x^2+x^2=40$
$x^2=20$
$x=2\sqrt{5}$

△BFE ∽ △DCE (AA닮음)
$\overline{BE}:\overline{DE}=\overline{FE}:\overline{EC}=2\sqrt{5}:6\sqrt{5}=1:3$

$\overline{FE}:10=1:3$ $\overline{FB}:\overline{CD}=\overline{FB}:2\sqrt{10}=1:3$
$\overline{FE}=\frac{10}{3}$ $\overline{FB}=\frac{2}{3}\sqrt{10}$
$\therefore \overline{AF}=2\sqrt{10}-\frac{2}{3}\sqrt{10}=\frac{4}{3}\sqrt{10}$

$\therefore$ △AFE $=\frac{1}{2}\times\frac{10}{3}\times\frac{4}{3}\sqrt{10}\times\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{20}{3}$

14. 최고차항의 계수가 1이고 $f(-3)=f(0)$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-3 \text{ 또는 } x\geq 0) \\ -f(x) & (-3\leq x<0) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $g(x)g(x-3)$이 $x=k$에서 불연속인 실수 k의 값이 한 개일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 함수 $g(x)g(x-3)$은 $x=0$에서 연속이다.
ㄴ. $f(-6)\times f(3)=0$
ㄷ. 함수 $g(x)g(x-3)$이 $x=k$에서 불연속인 실수 k가 음수일 때 집합 $\{x\,|\,f(x)=0,\ x\text{는 실수}\}$의 모든 원소의 합이 -1이면 $g(-1)=-48$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$g(x)g(x-3)$이 끊길 수 있는 k값은 0, 3, -3뿐이다.

$\lim_{x\to0-}g(x)=-f(0)$	$g(0)=f(0)$	$\lim_{x\to0+}g(x)=f(0)$
$\lim_{x\to-3-}g(x)=f(-3)$	$g(-3)=-f(-3)$	$\lim_{x\to-3+}g(x)=-f(-3)$

ㄱ. $x=0-\ \to\ g(x)g(x-3)=-f(0)f(-3)$
$x=0\ \to\ g(x)g(x-3)=-f(0)f(-3)$ (참)
$x=0+\ \to\ g(x)g(x-3)=-f(0)f(-3)$

$\boxed{k=3 \text{ or } k=-3}$

ㄴ. i) $k=3$
$x=3-\ \to\ g(x)g(x-3)\ \to\ -f(3)f(0)$
$x=3\ \to\ g(x)g(x-3)\ \to\ f(3)f(0)$
$x=3+\ \to\ g(x)g(x-3)\ \to\ f(3)f(0)$
$f(0)\neq0,\ f(3)\neq0$
$x=-3-\ \to\ g(x)g(x-3)\ \to\ f(-3)f(-6)$
$x=-3\ \to\ g(x)g(x-3)\ \to\ -f(-3)f(-6)$
$x=-3+\ \to\ g(x)g(x-3)\ \to\ -f(-3)f(-6)$
$f(-6)=0$ ($\because f(0)=f(-3)\neq0$)

ii) $k=-3$
$f(0)=0$ or $f(3)=0$
$f(-6)\neq0$, $f(-3)\neq0$
$\therefore f(3)=0$ ($\because f(0)$

$\therefore f(-6)\times f(3)=0$

ㄷ. $k=-3$

$\therefore f(3)=0$

$f(x)=(x-3)(x^2+ax+b)$

$f(-3)=f(0)$ 이므로

$f(-3)=-6(9-3a+b)$

$f(0)=-3b$

$-6(9-3a+b)=-3b$

$2(9-3a+b)=b$

$18-6a=-b$

$b=6a-18$

$f(x)=(x-3)(x^2+ax+6a-18)$

근의 합도 근과 계수의 관계로 구할 수 있으므로 이를 활용해 풀다.

i) 서로 다른 세 실근

(세 실근의 합) $=3-a=-1$

$a=4$

$x^2+4x+6=0$ 은 근을 갖지 않으므로 $f(x)$는 서로 다른 세 실근을 갖지 않는다.

ii) $x^2+ax+6a-18=0$ 이 중근

$x^2+ax+6a-18=(x-\alpha)^2$

$-a=2\alpha$

$\therefore \alpha=-\frac{a}{2}$

$\therefore 3-\frac{a}{2}=-1$

$\frac{a}{2}=4$

$a=8$

$x^2+8x+30=0$ 은 중근을 갖지 않으므로 모순이다.

iii) $f(x)=(x-3)^2(x-\alpha)$

$h(x)=x^2+ax+6a-18$ 라 할 때

$h(3)=9+3a+6a-18=9a-9=0$

$a=1$ (참)

$f(x)=(x-3)(x^2+x-12)=(x-3)^2(x+4)$

$3-4=-1$

$g(-1)=-f(-1)=-(-4)^2\times 3=-16\times 3=-48$

15. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_1 < 300$
> (나) 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1}=\begin{cases} \frac{1}{3}a_n & (\log_3 a_n \text{이 자연수인 경우}) \\ a_n+6 & (\log_3 a_n \text{이 자연수가 아닌 경우}) \end{cases}$$
> 이다.

$\sum_{k=4}^{7} a_k = 40$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 315 ② 321 ③ 327 ④ 333 ⑤ 339

i) $\log_3(a_4 \sim a_7) \neq$ 자연수

$\sum_{k=4}^{7} a_k = a_4 + 6 + a_4 + 12 + a_4 + 18 + a_4$

$= 4a_4 + 36 = 40$

$a_4 = 1$

$a_4 = 1$
- $a_3 = 3$
  - $a_2 = 9$
    - $a_1 = 27$
    - $\underbrace{a_1 = 3}_{\times}$ $a_1 = 3$이면 $a_2 = 1$
  - $\underbrace{a_2 = -3}_{\times}$ $a_n > 0$
- $\underbrace{a_3 = -5}_{\times}$ $a_n > 0$

ii) $\log_3(a_4 \sim a_7)$ 중 자연수 존재

$a_4 = 3^m$이라 할 때

	$m=4$	$m=3$	$m=2$	$m=1$
a_4	81	27	9	3
a_5	27	9	3	1
a_6	9	3	1	7
a_7	3	1	7	13

$\sum_{k=4}^{7} a_k = 40$ 인 m은 3뿐이다.

$\therefore a_4 = 27$

$a_4 = 27$
- $a_3 = 81$
  - $a_2 = 243$
    - $\underbrace{a_1 = 243 \times 3}_{\times\ a_1 < 300}$
    - $a_1 = 237$
  - $a_2 = 75$
    - $\underbrace{a_1 = 75 \times 3}_{\times\ \log_3 75\times3 \neq \text{자연수}}$
    - $a_1 = 69$
- $a_3 = 21$
  - $\underbrace{a_2 = 63}_{\times\ \log_3 63 \neq \text{자연수}}$
  - $a_2 = 15$
    - $\underbrace{a_1 = 45}_{\times\ \log_3 45 \neq \text{자연수}}$
    - $\underbrace{a_1 = 9}_{\times}$ a_1이 9이면 $a_2 = 3$

$\therefore a_1 = 69, 237, 27$

$69 + 237 + 27 = 333$

단답형

16. 방정식 $\log_2(x-5) = \log_4(x+7)$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$\log_2(x-5) = \log_4(x+7) = \frac{1}{2}\log_2(x+7) = \log_2\sqrt{x+7}$

↳ $x > 5$ (∵ 진수 조건)

$x - 5 = \sqrt{x+7}$

$x^2 - 10x + 25 = x + 7$

$x^2 - 11x + 18 = 0$

$(x-9)(x-2) = 0$

$x = 9$ (∵ $x > 5$)

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 9x^2 - 8x + 1$이고 $f(1) = 10$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

$f(x) = \int f'(x) = 3x^3 - 4x^2 + x + C$

$f(1) = 3 - 4 + 1 + C = C = 10$

$f(x) = 3x^3 - 4x^2 + x + 10$

$f(2) = 24 - 16 + 2 + 10$

$= 20$

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(2a_k+3)=40,\ \sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=-10$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}(b_k+5)$의 값을 구하시오. [3점]

$2\sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} 3 = 2\sum_{k=1}^{10} a_k + 30 = 40$

$\sum_{k=1}^{10} a_k = 5$

$\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{10} b_k = 5 - \sum_{k=1}^{10} b_k = -10$

$\sum_{k=1}^{10} b_k = 15$

$\therefore \sum_{k=1}^{10} b_k+5 = 15+50 = 65$

19. 곡선 $y=x^3-10$ 위의 점 $\mathrm{P}(-2,\ -18)$에서의 접선과 곡선 $y=x^3+k$ 위의 점 Q에서의 접선이 일치할 때, 양수 k의 값을 구하시오. [3점]

$y'=3x^2$

($y=x^3-10$ 위의 점 $P(-2,-18)$에서의 접선) : $y=12(x+2)-18$
$=12x+6$

$Q(a,\ a^3+k)$ 라 하면

($y=x^3+k$ 위의 점 Q에서의 접선) : $y=3a^2(x-a)+a^3+k$
$=3a^2x-2a^3+k$

$3a^2x-2a^3+k=12x+6$

$3a^2=12$

$a=\pm2$

i) $a=2$
$-16+k=6$
$k=22$

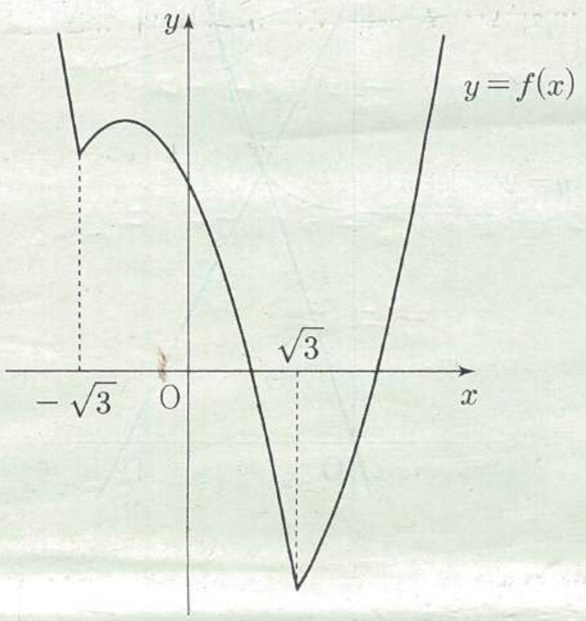
ii) $a=-2$
$16+k=6$
$k=-10$

$\boxed{\therefore k=22}$

20. 실수 $t\left(\sqrt{3}<t<\dfrac{13}{4}\right)$에 대하여 두 함수

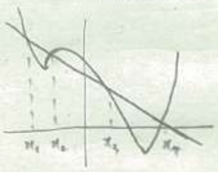
$$f(x)=|x^2-3|-2x,\ g(x)=-x+t$$

의 그래프가 만나는 서로 다른 네 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 x_1, x_2, x_3, x_4라 하자. $x_4-x_1=5$일 때, 닫힌구간 $[x_3,\ x_4]$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는 $p-q\sqrt{3}$이다. $p\times q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.) [4점]



$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x-3 & (x<-\sqrt{3} \text{ 이나 } x\ge\sqrt{3}) \\ -x^2-2x+3 & (-\sqrt{3}\le x<\sqrt{3}) \end{cases}$$

$g(x)=f(x)$ 가 네개의 실근을 가지기 위해서는



이런 식으로 지나야 한다.

x_1과 x_4는 $g(x)=x^2-2x-3$ 의 실근이므로

$-x+t=x^2-2x-3$

$x^2-x-3-t=0$

근과 계수와의 관계를 통해

$x_1+x_4=1$ 임을 알 수 있고 $x_4-x_1=5$ 에 연립하면

$+\begin{array}{|l} x_4+x_1=1 \\ x_4-x_1=5 \end{array}$

$2x_4=6$

$x_4=3,\ x_1=-2$

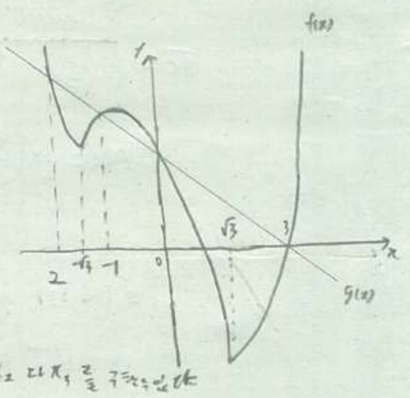
$f(3)=9-6-3=0$

$\therefore\ g(3)=-3+t=0$

$t=3$

$\therefore g(x)=-x+3$

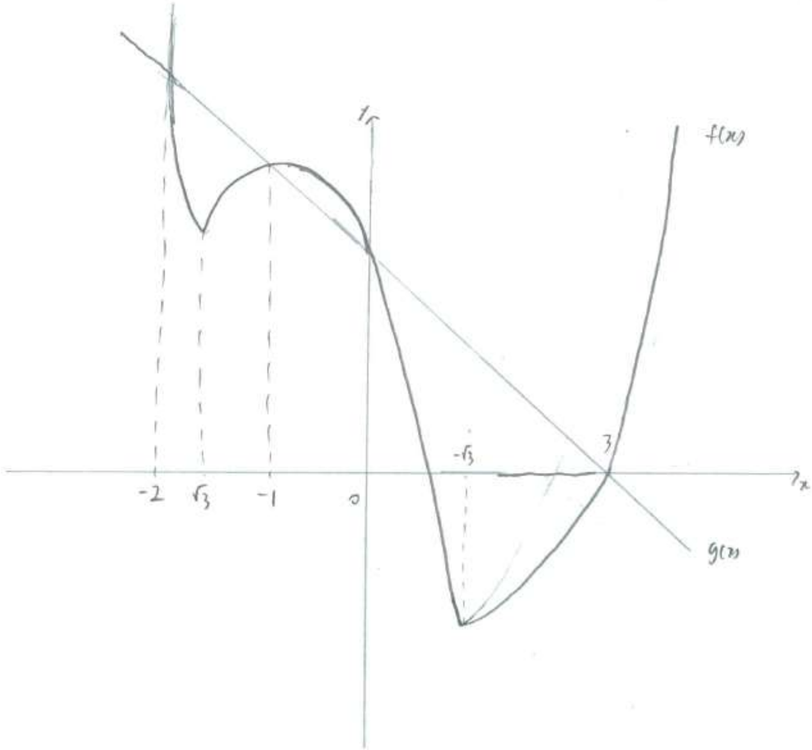
$\Rightarrow$



$-x+3=-x^2-2x+3$ 를 통해 x_2 와 x_3 를 구할 수 있다

$x^2+x=x(x+1)$

$\therefore x_2=-1,\ x_3=0$



∴ $[x_3, x_4]$ 즉, $[0, 3]$ 에서의 넓이 를 구하기 위해서는

$\int_0^3 |g(x) - f(x)|dx$를 구해 야 한다.

$$\int_0^3 |g(x) - f(x)|dx = \int_0^{\sqrt{3}} \{(-x+3) - (-x^2-2x+3)dx\} + \int_{\sqrt{3}}^3 \{(-x+3) - (x^2-2x-3)\}dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} (x^2 + x)dx + \int_{\sqrt{3}}^3 (-x^2 + x + 6)dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{3}} + \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x\right]_{\sqrt{3}}^3$$

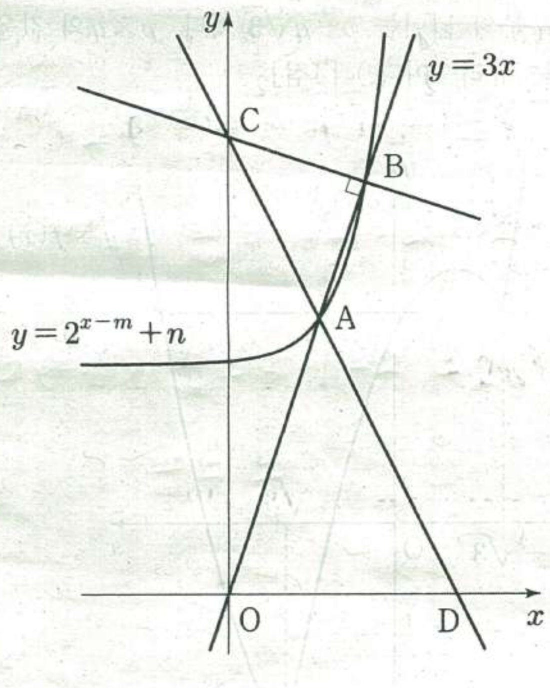
$$= \sqrt{3} + \frac{3}{2} - 9 + \frac{9}{2} + 18 + \sqrt{3} - \frac{3}{2} - 6\sqrt{3}$$

$$= \frac{27}{2} - 4\sqrt{3}$$

$\therefore p = \frac{27}{2}, q = 4$

$p \times q = \frac{27}{2} \times 4 = 54$

21. 그림과 같이 곡선 $y=2^{x-m}+n\ (m>0,\ n>0)$ 과 직선 $y=3x$ 가 서로 다른 두 점 A, B 에서 만날 때, 점 B를 지나며 직선 $y=3x$ 에 수직인 직선이 y축과 만나는 점을 C라 하자. 직선 CA가 x축과 만나는 점을 D라 하면 점 D는 선분 CA를 5:3으로 외분하는 점이다. 삼각형 ABC의 넓이가 20일 때, $m+n$ 의 값을 구하시오. (단, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작다.) [4점]



$\overline{CD} : \overline{AD} = 5:3$ 이므로

$\overline{CA} : \overline{AD} = 2:3$ 이다.

$D(a, 0)$으로 하면

$A\left(\frac{2}{5}a, \frac{6}{5}a\right)$ ($\because$ A는 $y=3x$ 위의 점)

$C(0, 2a)$

점 C와 점 B를 지나는 직선을 $f(x)$라 하면

$f(x) = -\frac{1}{3}x + 2a$ ($\because$ $f(x)$와 $y=3x$는 수직)

$-\frac{1}{3}x + 2a = 3x$

$-x + 6a = 9x$

$10x = 6a$

$x = \frac{3}{5}a$

$B\left(\frac{3}{5}a, \frac{9}{5}a\right)$

$\overline{AB} = \sqrt{\left(\frac{3}{5}a - \frac{2}{5}a\right)^2 + \left(\frac{9}{5}a - \frac{6}{5}a\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{25}a^2 + \frac{9}{25}a^2} = \frac{\sqrt{10}}{25}a$

$\overline{BC} = \sqrt{\left(\frac{3}{5}a - 0\right)^2 + \left(\frac{9}{5}a - 2a\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25}a^2 + \frac{1}{25}a^2} = \frac{\sqrt{10}}{5}a$

$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{10}}{5}a\right)^2 = \frac{1}{2} \times \frac{10}{25}a^2 = \frac{1}{5}a^2 = 20$

$a^2 = 100$

$\therefore a = 10$

$A(4, 12),\ B(6, 18)$

$\therefore$ $y = 2^{x-m} + n$ 에 대입

$18 = 2^{6-m} + n \qquad 12 = 2^{4-m} + n$ 서로 연립

$2^{6-m} - 2^{4-m} = 18 - 12 = 6$

$2^{4-m}(2^2 - 1) = 6 \qquad 2^{4-m} = 2 \qquad 2^{4-3} + n = 12$

$4 - m = 1 \qquad 2 + n = 12$

$2^{4-m} \times 3 = 6 \qquad m = 3 \qquad n = 10$

$\therefore m + n = 13$

22. 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$ 가 있다. 실수 t 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = f(x) - x - f(t) + t$$

라 할 때, 방정식 $g(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$ 라 하자. 두 함수 $f(x)$ 와 $h(t)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\displaystyle\lim_{t\to -1}\{h(t)-h(-1)\} = \lim_{t\to 1}\{h(t)-h(1)\} = 2$
>
> (나) $\displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)\,dx = \int_0^{\alpha} |f(x)|\,dx$ 를 만족시키는 실수 α 의 최솟값은 -1 이다.
>
> (다) 모든 실수 x 에 대하여 $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^{x}\{f(u)-ku\}\,du \geq 0$ 이 되도록 하는 실수 k 의 최댓값은 $f'(\sqrt{2})$ 이다.

$f(6)$ 의 값을 구하시오. [4점]

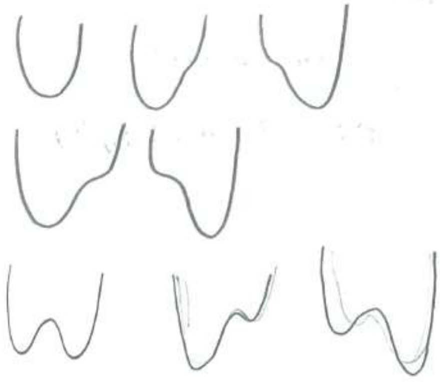
182

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

22.

f(x)의 개형



$g(x)=0$

$f(x)-x-f(t)+t=0$

$f(x)=x+f(t)-t=(x-t)+f(t)$ → $(t, f(t))$에서 그은 기울기가 1인 직선

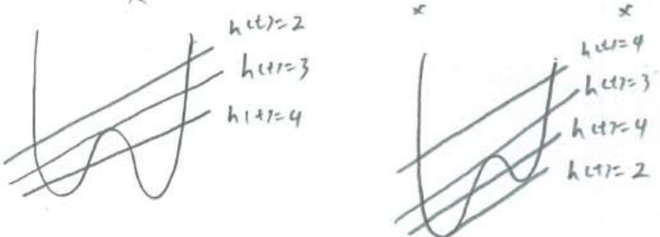
(가) $\lim_{t\to -1}\{h(t)-h(-1)\}=2$　　$\lim_{t\to 1}\{h(t)-h(1)\}=2$

$\lim_{t\to -1} h(t)=2+h(-1)$　　$\lim_{t\to 1} h(t)=2+h(1)$

$h(t)$는 $y=f(x)$와 $y=(x-t)+f(t)$의 교점의 개수

극한값과 함숫값의 차이가 1　　=　　=

x　　x　　x



극한값과 함숫값의 차이가 1　　극한값과 함숫값의 차이가 2

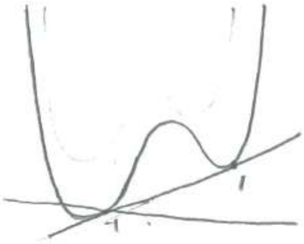
x

∴ $f(x)=$

22.

(나) $\int_0^\alpha f(x)\,dx = \int_0^\alpha |f(x)|\,dx$ 임으로

$0 \le x \le \alpha$ 에서 $f(x) > 0$



$f(-1) = 0$ (∵ α의 최솟값이 -1
만약 -2 와 같이 -1 보다
작은 수에서 0이 된다면
최솟값은 그 수가 된다)

$b = t - f(t)$

$f(x) - (x+b) = a(x-1)^2(x+1)^2$

$f(-1) - (-1+b) = 0$

$1 - b = 0$

$b = 1$

$f(x) - (x+1) = a(x^2-1)^2$

$f(x) = a(x^2-1)^2 + x + 1 = a(x^4 - 2x^2 + 1) + x + 1$

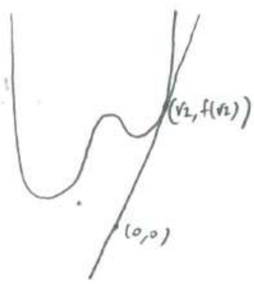
$= ax^4 - 2ax^2 + x + a + 1$

(다) $\dfrac{d}{dx}\int_0^x \{f(u) - ku\}\,du \ge 0$

$f(x) - kx \ge 0$

$f(x) \ge kx$ 를 만족하는 k값의

최댓값이 $f'(\sqrt{2})$



$f'(x) = 4ax^3 - 4ax + 1$

$f'(\sqrt{2}) = 8\sqrt{2}a - 4\sqrt{2}a + 1$

$= 4\sqrt{2}a + 1 = \dfrac{f(\sqrt{2}) - 0}{\sqrt{2} - 0} = \dfrac{a(4-4+1) + \sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}}$

$8a + \sqrt{2} = a + \sqrt{2} + 1$

$7a = 1$

$a = \frac{1}{7}$

∴ $f(x) = \frac{1}{7}(x+1)^2(x-1)^2 + x + 1$

$f(6) = \frac{1}{7} \times 49 \times 25 + 6 + 1$

$= 7 \times 25 + 7 = 7 \times 26 = 182$

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. 다항식 $(x^2+2)^6$의 전개식에서 x^8의 계수는? [2점]

① 30 ② 45 ③ 60 ④ 75 ⑤ 90

$${}_6C_4 \cdot (x^2)^4 \cdot (2)^2$$

$$= 60x^8$$

24. 한 개의 주사위를 네 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b, c, d라 하자. 네 수 a, b, c, d의 곱 $a \times b \times c \times d$가 27의 배수일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{4}{27}$ ③ $\frac{5}{27}$ ④ $\frac{2}{9}$ ⑤ $\frac{7}{27}$

27의 배수 → 3이 3번 이상

→ 1) 3의 배수가 3번

$${}_4C_3 \left(\frac{2}{6}\right)^3 \left(\frac{4}{6}\right)^1$$

2) 3의 배수가 4번

$${}_4C_4 \left(\frac{2}{6}\right)^4 \left(\frac{4}{6}\right)^0$$

$1+2 = \frac{1}{9}$

25. 이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	$a+b$	b	1

$\mathrm{E}(X^2)=a+5$일 때, $b-a$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

$$\begin{cases} a+(a+b)+b=1 \\ 1^2\times a+2^2(a+b)+3^2\times b=a+5 \end{cases}$$

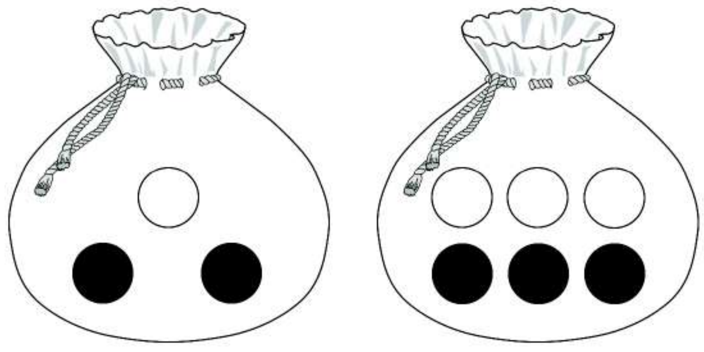
$$\rightarrow \begin{cases} 2a+2b=1 \\ 4a+13b=5 \end{cases}$$

$\rightarrow a=\frac{1}{6},\ b=\frac{1}{3}$

$\therefore b-a=\frac{1}{6}$

26. 주머니 A에는 흰 공 1개, 검은 공 2개가 들어 있고, 주머니 B에는 흰 공 3개, 검은 공 3개가 들어 있다. 주머니 A에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 주머니 B에 넣은 후 주머니 B에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 주머니 B에서 꺼낸 3개의 공 중에서 적어도 한 개가 흰 공일 확률은? [3점]

① $\frac{6}{7}$ ② $\frac{92}{105}$ ③ $\frac{94}{105}$ ④ $\frac{32}{35}$ ⑤ $\frac{14}{15}$



A B

i) A 흰, b 흰 X

$\frac{1}{3}\times\frac{{}_3C_3\times{}_4C_0}{{}_7C_3}=\frac{1}{105}$

ii) A 검, b 흰 X

$\frac{2}{3}\times\frac{{}_4C_3\times{}_3C_0}{{}_7C_3}=\frac{8}{105}$

→ 적어도 하나가 흰공일 확률

$\therefore 1-\left(\frac{1}{105}+\frac{8}{105}\right)=\frac{32}{35}$

27. 숫자 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2가 하나씩 적힌 7장의 카드가 있다. 이 7장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열할 때, 이웃하는 두 장의 카드에 적힌 수의 곱이 모두 1 이하가 되도록 나열하는 경우의 수는? (단, 같은 숫자가 적힌 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.) [3점]

① 14 ② 15 ③ 16 ④ 17 ⑤ 18

2와 1, 2와 2가 이웃 X

_0_0_0_

i) 1끼리 이웃하는 경우

$\underbrace{{}_4C_2}_{\text{2 배열}} \times \underbrace{{}_2C_1}_{\text{(1,1) 배열}} = 12$

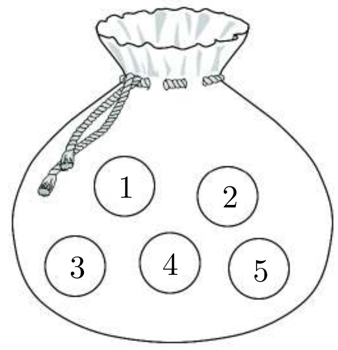
ii) 1끼리 이웃 X 경우

$\underbrace{{}_4C_2}_{\text{2 배열}} = 6$ (2를 배열하면 1위치 고정)

i + ii = 18

28. 1부터 5까지의 자연수가 하나씩 적힌 5개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 공을 임의로 한 개씩 5번 꺼내어 $n\,(1 \le n \le 5)$번째 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 a_n이라 하자. $a_k \le k$를 만족시키는 자연수 $k\,(1 \le k \le 5)$의 최솟값이 3일 때, $a_1 + a_2 = a_4 + a_5$일 확률은? (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.) [4점]

① $\frac{4}{19}$ ② $\frac{5}{19}$ ③ $\frac{6}{19}$ ④ $\frac{7}{19}$ ⑤ $\frac{8}{19}$



$a_3 \le 3$ $a_1 > 1$ $a_2 > 2$

i) $a_3 = 1$, $a_1 > 1$, $a_2 > 2$ 확률

$\frac{3 \times 3 \times 2 \times 1}{5!} = \frac{3}{20}$

ii) $a_3 = 2$, $a_1 > 1$, $a_2 > 2$ 확률

$\frac{3 \times 2 \times 2!}{5!} = \frac{1}{10}$

iii) $a_3 = 3$, $a_1 > 1$, $a_2 > 2$ 확률

$\frac{2 \times 2 \times 2 \times 1}{5!} = \frac{1}{15}$

→ 전체 확률 : $\frac{19}{60}$

(최솟값 3일 때 확률)

$a_1 + a_2 = a_4 + a_5$를 만족시키는 순서쌍 $(a_1$

→ $a_3 = 1$ 일 때, (2, 5), (3, 4), (4, 3)

$a_3 = 2$ 일 때, 없음 X

$a_3 = 3$ 일 때, (2, 4)

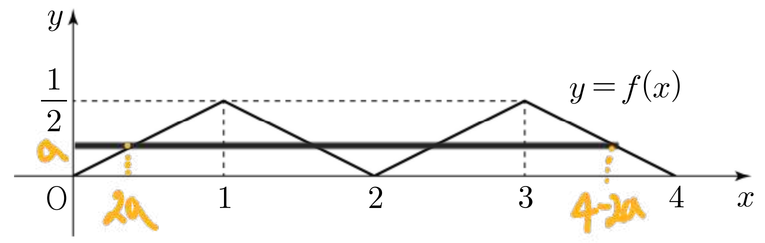
→ 최솟값이 3이면서 $a_1 + a_2 = a_4 + a_5$일 경우

$\frac{(3+1) \times \underbrace{2!}_{a_4, a_5 \text{의 배열 경우}}}{5!} = \frac{1}{15}$

→ $\frac{\frac{1}{15}}{\frac{19}{60}} = \frac{4}{19}$

단답형

29. 두 연속확률변수 X와 Y가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le 4$, $0 \le Y \le 4$이고, X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$, $g(x)$이다. 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



확률변수 Y의 확률밀도함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[0,\ 4]$에서 연속이고 $0 \le x \le 4$인 모든 실수 x에 대하여

$$\{g(x)-f(x)\}\{g(x)-a\}=0 \ (a\text{는 상수})$$

$\rightarrow g(x)=f(x)$ or $g(x)=a$

를 만족시킨다. 두 확률변수 X와 Y가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\mathrm{P}(0 \le Y \le 1) < \mathrm{P}(0 \le X \le 1)$
(나) $\mathrm{P}(3 \le Y \le 4) < \mathrm{P}(3 \le X \le 4)$

$\mathrm{P}(0 \le Y \le 5a) = p - q\sqrt{2}$일 때, $p \times q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 자연수이다.) [4점]

$P(0 \le X \le 4)=1$

$\rightarrow \frac{1}{2}\times 2a \times a + (4-4a)\times a + \frac{1}{2}\times 2a \times a = 1$

$a = \frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$

$0<a<\frac{1}{2}$이므로 $a=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$, $1<5a<2$

$P(0 \le Y \le 2a) + P(2a \le Y \le 5a)$

$= \frac{1}{2}\times 2a \times a + 3a \times a = 4a^2$

a를 대입하면 $6-4\sqrt{2}$

$\therefore pq = 24$

30. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \rightarrow X$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $f(7)-f(1)=3$
(나) 5 이하의 모든 자연수 n에 대하여 $f(n) \le f(n+2)$이다.
(다) $\frac{1}{3}\lvert f(2)-f(1) \rvert$과 $\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{4} f(2k-1)$의 값은 모두 자연수이다.

$f(1) \le f(3)$
$f(2) \le f(4)$
$f(3) \le f(5)$
$f(4) \le f(6)$
$f(5) \le f(7)$

$\left[\begin{array}{l} f(1) \le f(3) \le f(5) \le f(7) \\ f(2) \le f(4) \le f(6) \end{array}\right.$

$\underbrace{\lvert f(2)-f(1) \rvert \quad f(1)+f(3)+f(5)+f(7)}_{3\text{의 양의 배수}}$

f(1)	f(7)	f(3)	f(5)	f(2)
1	4	1, 2, 3	3, 2, 4	$4 \rightarrow {}_4H_2$, $7 \rightarrow {}_1H_2$) $11\times 3 = 33$
2	5	2, 3, 4	3, 5, 4	$5 \rightarrow {}_3H_2$) $6\times 3 = 18$
3	6	3, 3, 4, 6	3, 6, 5, 6	$6 \rightarrow {}_2H_2 = 3 \rightarrow 3\times 4 = 12$
4	7	4, 5, 6	6, 6, 7	$1 \rightarrow {}_7H_2$, $7 \rightarrow {}_1H_2$) $29\times 3 = 87$

$\rightarrow 33+18+12+87=151$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

3. $\lim\limits_{n\to\infty} 2n\left(\sqrt{n^2+4}-\sqrt{n^2+1}\right)$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$\lim_{n\to\infty} 2n\left(\underbrace{\sqrt{n^2+4}-\sqrt{n^2+1}}\right)$$

↳ $\infty-\infty$ 꼴이므로 유리화 진행

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n(n^2+4-n^2-1)}{\sqrt{n^2+4}+\sqrt{n^2+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6n}{\sqrt{n^2+4}+\sqrt{n^2+1}}=\frac{6}{2}=3$$

24. 함수 $f(x)=\ln(x^2-x+2)$ 와 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$ 가 있다. 실수 전체의 집합에서 정의된 합성함수 $h(x)$ 를 $h(x)=f(g(x))$ 라 하자.
$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x)-4}{x-2}=12$ 일 때, $h'(2)$ 의 값은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

$h(x)=f(g(x))$

$h'(x)=f'(g(x))\,g'(x)$

$h'(2)=f'(g(2))\,g'(2)$

$$\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-4}{x-2}=g'(2)=12$$

분모가 0으로 가므로
분자도 0으로 가야한다.

$\therefore g(2)=4$

$h'(2)=f'(g(2))\,g'(2)=12f'(4)$

$$f'(x)=\frac{2x-1}{x^2-x+2}$$

$$\therefore 12f'(4)=12\times\frac{8-1}{16-4+2}=12\times\frac{7}{14}=12\times\frac{1}{2}=6$$

25. 곡선 $2e^{x+y-1}=3e^{x}+x-y$ 위의 점 $(0,\ 1)$에서의 접선의 기울기는? [3점]

① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 2

$$2e^{x+y-1}+2e^{x+y-1}\frac{dy}{dx}=3e^{x}+1-\frac{dy}{dx}$$

$$(2e^{x+y-1}+1)\frac{dy}{dx}=3e^{x}+1-2e^{x+y-1}$$

$$(2+1)\frac{dy}{dx}=3+1-2=2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{3}$$

26. 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속이고

$$\int_{1}^{2}(x-1)f'\left(\frac{x}{2}\right)dx=2$$

를 만족시킨다. $f(1)=4$일 때, $\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)dx$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{4}$ ② 1 ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

$$\int_{1}^{2}(x-1)f'\left(\frac{x}{2}\right)dx=\left[2(x-1)f\left(\frac{x}{2}\right)\right]_{1}^{2}-2\int_{1}^{2}f\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

$$=2f(1)-2\int_{1}^{2}f\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

$$=2\times4-2\int_{1}^{2}f\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

$$=8-2\int_{1}^{2}f\left(\frac{x}{2}\right)dx=2$$

$$2\int_{1}^{2}f\left(\frac{x}{2}\right)dx=6$$

$$\int_{1}^{2}f\left(\frac{x}{2}\right)dx=3$$

$\frac{x}{2}=t$ $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2}$ $2dt=dx$

$$\int_{1}^{2}f\left(\frac{x}{2}\right)dx=2\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(t)dt=3$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(t)dt=\frac{3}{2}$$

7. 그림과 같이 $\overline{AB_1} = \overline{AC_1} = \sqrt{17}$, $\overline{B_1C_1} = 2$인 삼각형 AB_1C_1이 있다. 선분 AB_1 위의 점 B_2, 선분 AC_1 위의 점 C_2, 삼각형 AB_1C_1의 내부의 점 D_1을

$$\overline{B_1D_1} = \overline{B_2D_1} = \overline{C_1D_1} = \overline{C_2D_1},\ \angle B_1D_1B_2 = \angle C_1D_1C_2 = \frac{\pi}{2}$$

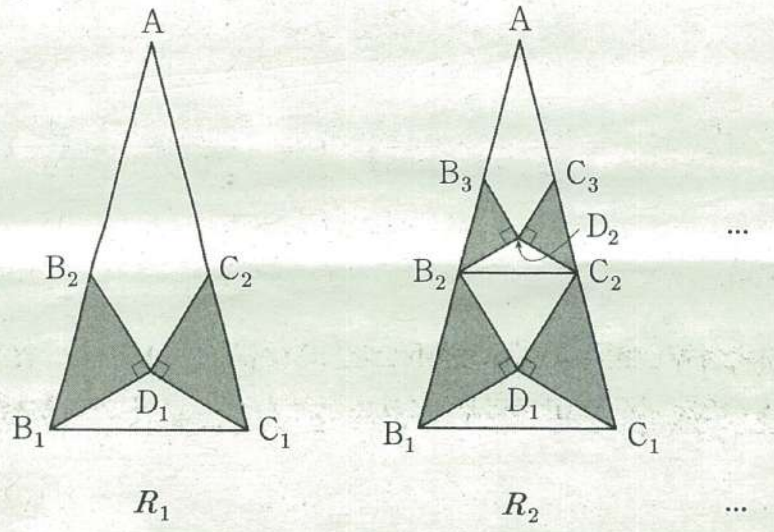
가 되도록 잡고, 두 삼각형 $B_1D_1B_2$, $C_1D_1C_2$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 선분 AB_2 위의 점 B_3, 선분 AC_2 위의 점 C_3, 삼각형 AB_2C_2의 내부의 점 D_2를

$$\overline{B_2D_2} = \overline{B_3D_2} = \overline{C_2D_2} = \overline{C_3D_2},\ \angle B_2D_2B_3 = \angle C_2D_2C_3 = \frac{\pi}{2}$$

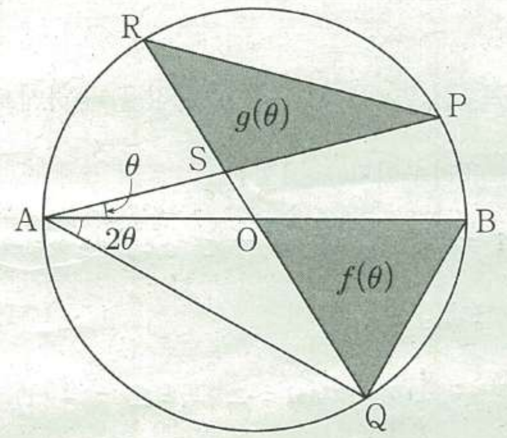
가 되도록 잡고, 두 삼각형 $B_2D_2B_3$, $C_2D_2C_3$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]

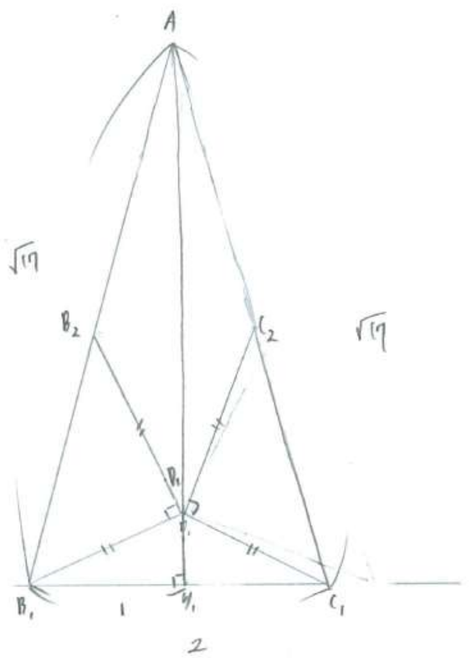


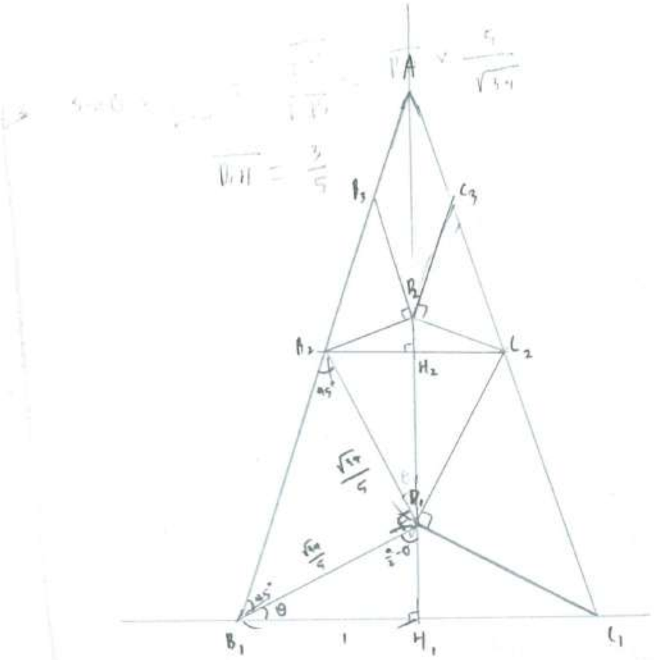
① 2 ② $\frac{33}{16}$ ③ $\frac{17}{8}$ ④ $\frac{35}{16}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

28. 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원이 있다. 원 위에 점 P를 $\angle PAB = \theta$가 되도록 잡고, 점 P를 포함하지 않는 호 AB 위에 점 Q를 $\angle QAB = 2\theta$가 되도록 잡는다. 직선 OQ가 원과 만나는 점 중 Q가 아닌 점을 R, 두 선분 PA와 QR가 만나는 점을 S라 하자. 삼각형 BOQ의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PRS의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to 0+} \frac{g(\theta)}{f(\theta)}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$) [4점]



① $\frac{11}{10}$ ② $\frac{6}{5}$ ③ $\frac{13}{10}$ ④ $\frac{7}{5}$ ⑤ $\frac{3}{2}$





$\angle B_2B_1H_1 = \alpha$ 라하면

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$\frac{1}{17} + \sin^2\alpha = 1$

$\sin^2\alpha = \frac{16}{17}$

$\sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\triangle B_2B_1D_1$ 이 직각이등변 삼각형이므로

$\angle D_1B_2B_1 = \angle D_1B_1B_2 = 45°$

$\angle D_1B_1C_1 = \theta$라 하면

$\cos\theta = \cos(\alpha - \angle B_2B_1D_1)$

$= \cos\alpha\cos\angle B_2B_1D_1 + \sin\alpha\sin\angle B_2B_1D_1$

$= \cos\alpha\cos 45° + \sin\alpha\sin 45°$

$= \frac{1}{\sqrt{17}}\times\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{17}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{\overline{B_1H_1}}{\overline{B_1D_1}} = \frac{1}{\overline{B_1D_1}}$

$\overline{B_1D_1} = \frac{\sqrt{34}}{5}$

$\therefore \triangle B_1B_2D_1 = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{34}}{5}\times\frac{\sqrt{34}}{5} = \frac{17}{25}$

$R_1 = 2\triangle B_1B_2D_1 = \frac{34}{25}$

$\angle B_2D_1H_2 = \pi - \angle B_2D_1B_1 - \angle B_1D_1H_1$

$= \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \theta = \theta$ 이고

$\angle D_1B_2H_2 = \pi - \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - \theta$

$\therefore \triangle B_2H_2D_1 \equiv \triangle D_1H_1B_1$ (ASA 합동)

$\overline{B_2H_2} = \overline{D_1H_1} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{34}}{5}\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{34-25}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$

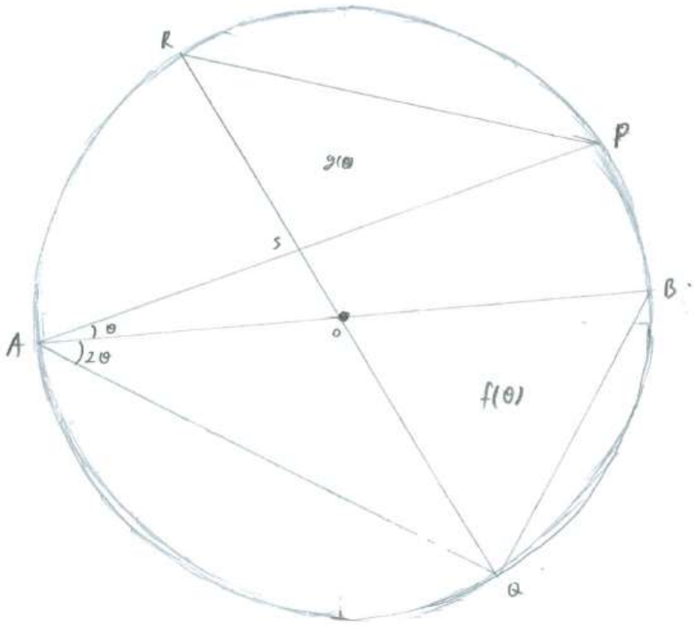
⋈ 을 T_n 이라할 때

$T_n : T_{n+1} = T_1 : T_2 = \overline{B_1C_1}^2 : \overline{B_2C_2}^2$

$= 2^2 : \left(\frac{6}{5}\right)^2 = 4 : \frac{36}{25} = 1 : \frac{9}{25}$

공비 $r = \frac{9}{25}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{R_1}{r-1} = \frac{\frac{34}{25}}{\frac{16}{25}} = \frac{34}{16} = \frac{17}{8}$



$\overline{AB} = 2 = \overline{RQ}$

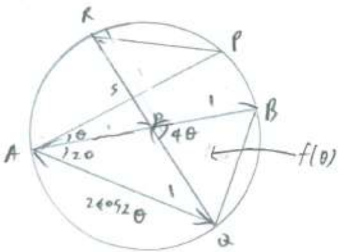
$\overline{AO} = \overline{BO} = 1 = \overline{OQ} = \overline{RO}$

$\angle AQB = 90^\circ$ (∵ 지름의 원주각)

$\therefore \overline{AQ} = 2\cos 2\theta,\ \overline{BQ} = 2\sin 2\theta$

$\angle BOQ$ 는 $\angle BAQ$ 의 중심각

$\therefore \angle BOQ = 4\theta$

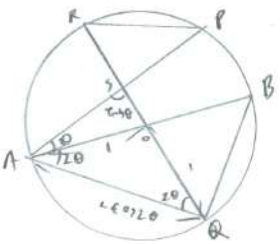


$\therefore f(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{OB} \times \overline{OQ} \times \sin \angle BOQ$

$= \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin 4\theta = \frac{1}{2}\sin 4\theta$

△AOQ 에서 $\overline{AO} = \overline{OQ}$ 이므로 △AOQ는 이등변삼각형

$\therefore \angle OQA = 2\theta$ → △SAQ에서 $\angle ASQ = \pi - 3\theta - 2\theta = \pi - 5\theta$

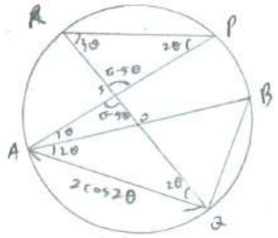


$\angle PRQ = \angle PAQ = 3\theta$ (∵ $\widehat{PQ}$의 원주각)

$\angle RPA = \angle RQA = 2\theta$ (∵ $\widehat{RA}$의 원주각)

$\angle ASQ = \angle RSP = \pi - 5\theta$ (∵ 맞꼭지각)

$\triangle ASQ \sim \triangle RSP$ (AA 닮음)



△AAQ에서 사인법칙 사용

$\frac{\overline{AQ}}{\sin \angle ASQ} = \frac{2\cos 2\theta}{\sin(\pi - 5\theta)} = \frac{2\cos 2\theta}{\sin 5\theta}$

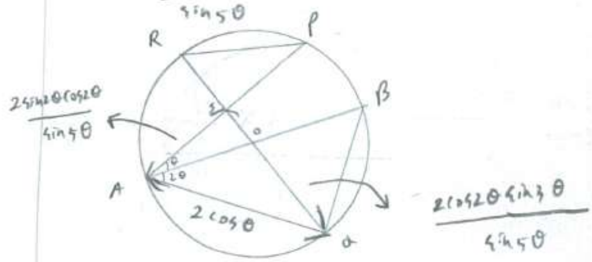
$= \frac{\overline{AS}}{\sin 2\theta} = \frac{\overline{SQ}}{\sin 3\theta}$

$\overline{AS} = \frac{2\sin 2\theta \cos 2\theta}{\sin 5\theta}$

$\overline{SQ} = \frac{2\cos 2\theta \sin 3\theta}{\sin 5\theta}$

$\therefore \overline{RS} = \overline{RQ} - \overline{SQ}$

$= 2 - \frac{2\cos 2\theta \sin 3\theta}{\sin 5\theta}$



△AQS 와 △RPS 의 닮음비

$\overline{RS} : \overline{AS} = \overline{PS} : \overline{SQ}$

$\rightarrow 2 - \frac{2\cos 2\theta \sin 3\theta}{\sin 5\theta} : \frac{2\cos 2\theta \sin 2\theta}{\sin 5\theta} = \overline{PS} : \frac{2\cos 2\theta \sin 3\theta}{\sin 5\theta}$

$\frac{2\cos 2\theta \sin 2\theta}{\sin 5\theta}\ \overline{PS} = \frac{2\cos 2\theta \sin 3\theta}{\sin 5\theta} \times \frac{2\sin 5\theta - 2\cos\theta \sin 3\theta}{\sin 5\theta}$

$\overline{PS} = \frac{\sin 5\theta}{2\cos 2\theta \sin 2\theta} \times \frac{2\cos 2\theta \sin 2\theta}{\sin 5\theta} \times \frac{2\sin 5\theta - 2\cos\theta \sin 3\theta}{\sin 5\theta}$

$= \frac{\sin 3\theta (2\sin 5\theta - 2\cos 2\theta \sin 3\theta)}{\sin 2\theta \sin 5\theta}$

$$\overline{PS} = \frac{\sin 3\theta\,(2\sin 5\theta - 2\cos 2\theta \sin 3\theta)}{\sin 2\theta \sin 5\theta}$$

$$\therefore g(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{PS} \times \overline{RS} \times \sin\angle RSP$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sin 3\theta\,(2\sin 5\theta - 2\cos 2\theta \sin 3\theta)}{\sin 2\theta \sin 5\theta} \times \frac{2\sin 5\theta - 2\cos 2\theta \sin 3\theta}{\sin 5\theta} \times \sin(\pi - 5\theta)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sin 3\theta\,(2\sin 5\theta - 2\cos 2\theta \sin 3\theta)^2}{\sin 2\theta \quad \sin 5\theta}$$

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(x)}{f(\theta)} = \lim_{\theta \to 0+} \frac{\frac{1}{2} \times \frac{\sin 3\theta\,(2\sin 5\theta - 2\cos 2\theta \sin 3\theta)^2}{\sin 2\theta \sin 5\theta}}{\frac{1}{2} \sin 4\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{\sin 3\theta}{\sin 4\theta} \times \frac{4(\sin^2 5\theta - 2\cos 2\theta \sin 3\theta \sin 5\theta + 4\cos^2 2\theta \sin^2 3\theta)}{\sin 2\theta \sin 5\theta}$$

$$= 3 \lim_{\theta \to 0+} \frac{(\sin^2 5\theta - 2\cos\theta \sin 3\theta \sin 5\theta + 4\cos^2 2\theta \sin^2 3\theta)}{\sin 2\theta \sin 5\theta}$$

$$= 3 \lim_{\theta \to 0+} \frac{25\theta^2 - 30\theta^2 + 9\theta^2}{10\theta^2}$$

$$= 3 \lim_{\theta \to 0+} \frac{25 - 30 + 36}{10} = 3 \times \frac{4}{10} = \frac{6}{5}$$

단답형

29. 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $x<1$일 때, $f'(x)=-2x+4$이다.
> (나) $x\geq 0$인 모든 실수 x에 대하여
> $f(x^2+1)=ae^{2x}+bx$이다. (단, a, b는 상수이다.)

$\int_0^5 f(x)dx = pe^4-q$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 유리수이다.) [4점]

도함수가 연속 → 도함수가 존재 → 원 함수 미분가능 → 원함수 연속

(가) $x<1$ $f'(x)=-2x+4$

$\lim_{x\to1-} f'(x) = \lim_{x\to1-}(-2x+4) = -2+4 = 2 = f'(1)$ (∵ 도함수가 연속)

$f(x) = \int f'(x)\,dx = -x^2+4x+C \quad (x<1)$

$f(1) = -1+4+C = 3+C$

(나) $x\geq0$ $f(x^2+1) = ae^{2x}+bx$

$f'(x^2+1)\times 2x = 2ae^{2x}+b$

$f'(x^2+1) = \dfrac{2ae^{2x}+b}{2x}$

$\lim_{x\to0+} f'(x^2+1) = \lim_{x\to0+}\dfrac{2ae^{2x}+b}{2x}$

분모가 0으로 가므로 분자도 0으로 감

$\therefore 2a+b=0$
$b=-2a$

$\lim_{x\to0+} f'(x^2+1) = \lim_{x\to0+}\dfrac{2ae^{2x}-2a}{2x} = \lim_{x\to0+}\dfrac{2a(e^{2x}-1)}{2x}$

$=2a=2$
$a=1$

$\therefore f(x^2+1) = e^{2x}-2x$

$f(1)=1=3+C$ $\quad\therefore f(x) = -x^2+4x-2 \ (x<1)$

$C=-2$

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\sin|\pi f(x)|$$

라 하자. 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표 중 양수인 것을 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때 n번째 수를 a_n이라 하자. 함수 $g(x)$와 자연수 m이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 $x=a_4$와 $x=a_8$에서 극대이다.
> (나) $f(a_m)=f(0)$

$f(a_k)\leq f(m)$을 만족시키는 자연수 k의 최댓값을 구하시오. [4점]

> * 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
> ○ 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

29.

$$\int_0^5 f(x)\,dx = \int_0^1 (-x^2+4x-2)\,dx + \int_1^5 f(t)\,dt$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-2x\right]_0^1 + \int_1^5 f(t)\,dt$$

$$= -\frac{1}{3}+2-2 + \int_1^5 f(t)\,dt$$

$$= -\frac{1}{3} + \int_1^5 f(t)\,dt$$

$$\int_1^5 f(t)\,dt = \int_0^2 2x\,f(x^2+1)\,dx = \int_0^2 2x\,(e^{2x}-2x)\,dx = \left[2x\times\left(\frac{1}{2}e^{2x}-x^2\right)\right]_0^2 - \int_0^2 2\left(\frac{1}{2}e^{2x}-x^2\right)dx$$

$t = x^2+1$ 로 치환 ($\because f(x^2+1) = e^{2x}-2x$)

$\frac{dt}{dx} = 2x$

$dt = 2x\,dt$

$$= 4\left(\frac{e^4}{2}-4\right) - 2\int_0^2\left(\frac{1}{2}e^{2x}-x^2\right)dx$$

$$= 2e^4-16-2\left[\frac{1}{4}e^{2x}-\frac{1}{3}x^3\right]_0^2$$

$$= 2e^4-16-2\left(\frac{e^4}{4}-\frac{8}{3}-\frac{1}{4}\right)$$

$$= 2e^4-16-\frac{1}{2}e^4+\frac{16}{3}+\frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{2}e^4-\frac{32}{3}+\frac{1}{2}$$

$$\therefore \int_0^5 f(x)\,dx = -\frac{1}{3}+\frac{3}{2}e^4-\frac{32}{3}+\frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{2}e^4-\frac{21}{2} = pe^4-q$$

$$p = \frac{3}{2},\quad q = \frac{21}{2}$$

$$\therefore p+q = \frac{3}{2}+\frac{21}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

30.

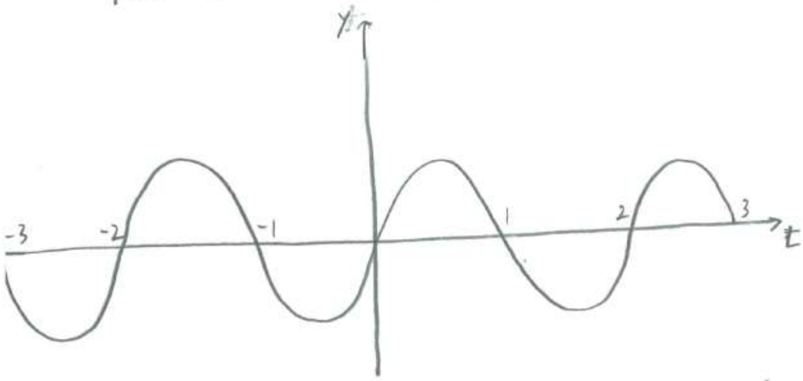
$g(x) = \sin|\pi f(x)|$

a_n의 가정의에 의해

$g(a_n) = \sin|\pi f(a_n)| = 0$

$\therefore f(a_n) =$ 정수

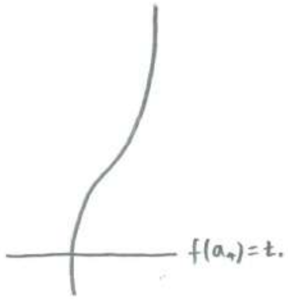
$f(x) = t$ 로 치환 하면 $g(x)$의 그래프는



이다.

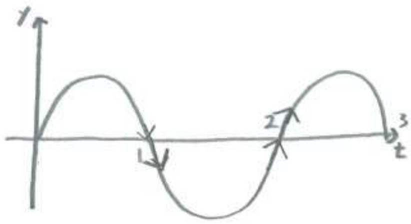
i) $t = f(x)$ 는 계속 증가 하는 함수

이고,



이라하면

i-i) $t_1 > 0$



t_1이 홀수이면 계속 감소 하고

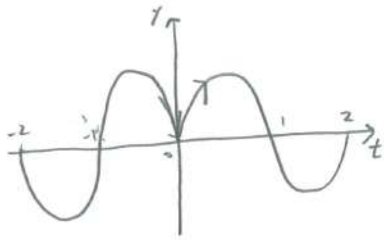
t_1이 짝수이면 계속 증가 하므로

극값 존재 X

$\therefore$ (가)의 조건인 $g(x)$는 $x = a_4$에서 극댓값이다 에 위배

$\therefore t_1 \leq 0$

i-ii) $t_1 = 0$



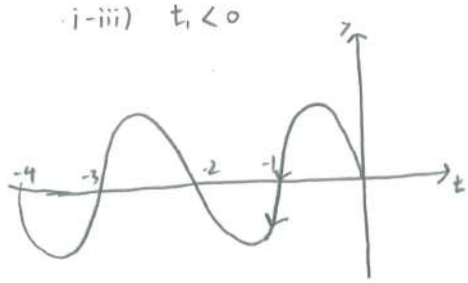
t_1이 0이면 감소 하다 증가 하 므 로

t_1 에서 극솟값

$\therefore$ (가)의 조건인 $g(x)$ 는 $x = a_4$에서 극댓값이다 에 위배

$\therefore t_1 < 0$

i-iii) $t_1 < 0$



t_1이 홀수 이면 계속 감소 하고

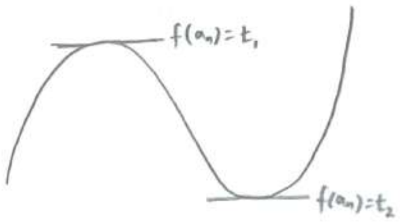
t_1이 짝수 이면 계속 증가 하므로

극 값 존재 X

$\therefore$ (가)의 조건인 $g(x)$는 $x = a_4$에서 극댓 값이다 에 위배

$\therefore t = f(x)$는 계속 증가 하는 함수가 아니다.

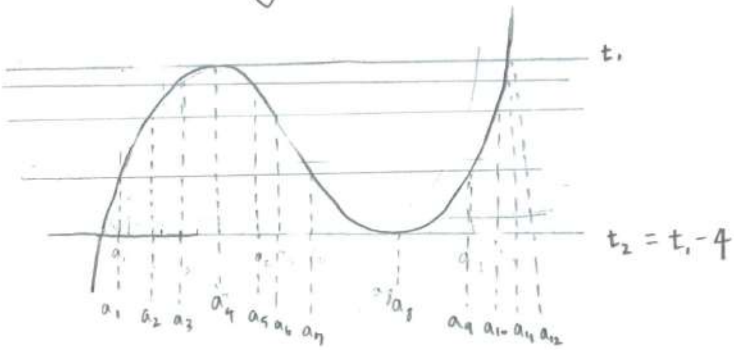
ii) $f(x)$ 는 두 극값을 가지는 함수



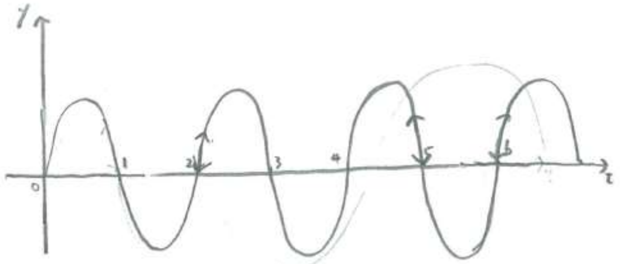
인데, 만약 t_1이 극값에 없다면 (i)에서 했던 방식과 같이 극값이 없거나 극솟값이 존재하게 된다.

$\therefore$ t_1과 t_2는 극값에 있다.

⇓



ii-i) t_1과 t_2 모두 양수



t_1 = 홀수 이면,

이런 모양이므로 t_1에서 극솟값을 가짐

$\therefore$ 조건 (가)에 의해

$t_1 \neq$ 홀수

t_1 = 짝수 이면,

이런 모양이므로 t_1에서 극댓값을 가짐

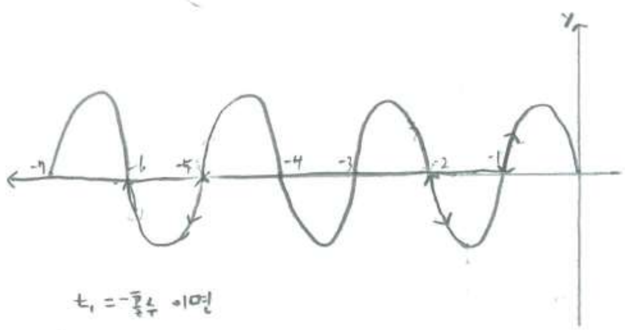
t_2에선 이런 모양이므로 t_2에선 극솟값을 가짐

$\therefore$ 조건 (가)에 의해

$t_1 \neq$ 짝수

$\therefore$ t_1과 t_2는 모두 양수 X

ii-ii) t_1과 t_2 모두 음수



t_1 = -홀수 이면

이런 모양이므로 t_1에서 극댓값을 가짐

t_2에선 이런 모양이므로 t_2에선 극솟값을 가짐

$\therefore$ 조건 (나)에 의해

$t_1 \neq$ ~~-~~홀수

t_1 = -짝수 이면

이런 모양이므로 t_1에서 극솟값을 가짐

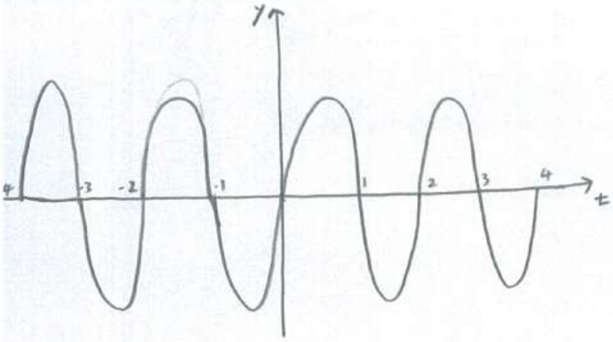
$\therefore$ 조건 (나)에 의해

$t_1 \neq$ -짝수

$\therefore$ t_1과 t_2 모두 음수 X

30.

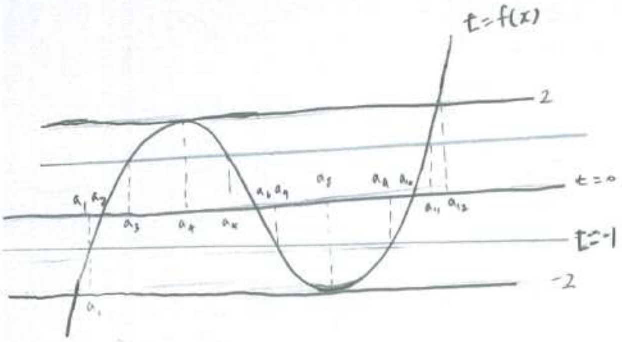
ii-iii) t_1은 양수 t_2는 음수



∴ $t_1 =$ 짝수 $t_2 = -$짝수 일 때 되었고

$t_2 = t_1 - 4$ 이므로

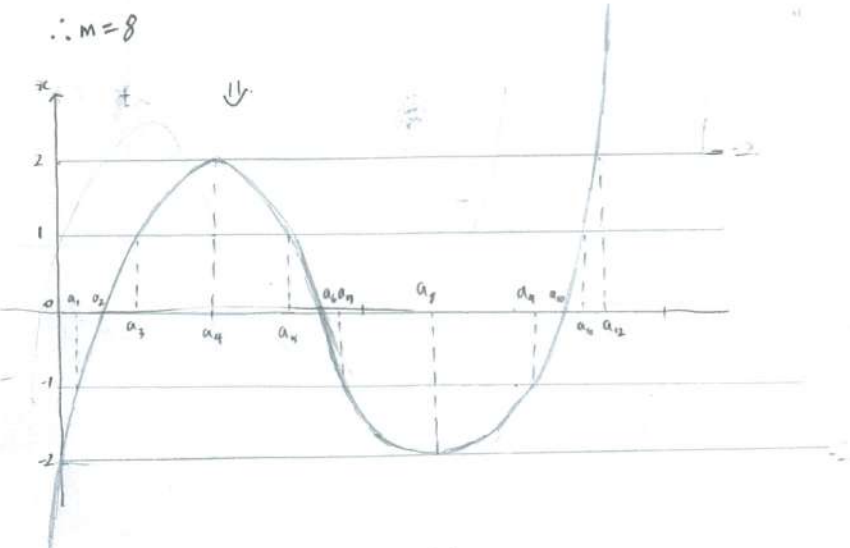
$t_1 = 2, t_2 = -2$



(나) 조건 해석

$f(a_m) = f(0)$ 인데 a_m은 양수 이므로

$\therefore m = 8$



$a_4 ; a_6 - a_4 ; a_8 - a_6 = 1:1:1$ 이므로

$a_8 = 3a_4$

$\therefore f(x) = x(x-3a_4)^2 - 2$

$f(a_4) = a_4 \times 4a_4^2 - 2 = 4a_4^3 - 2 = 2$

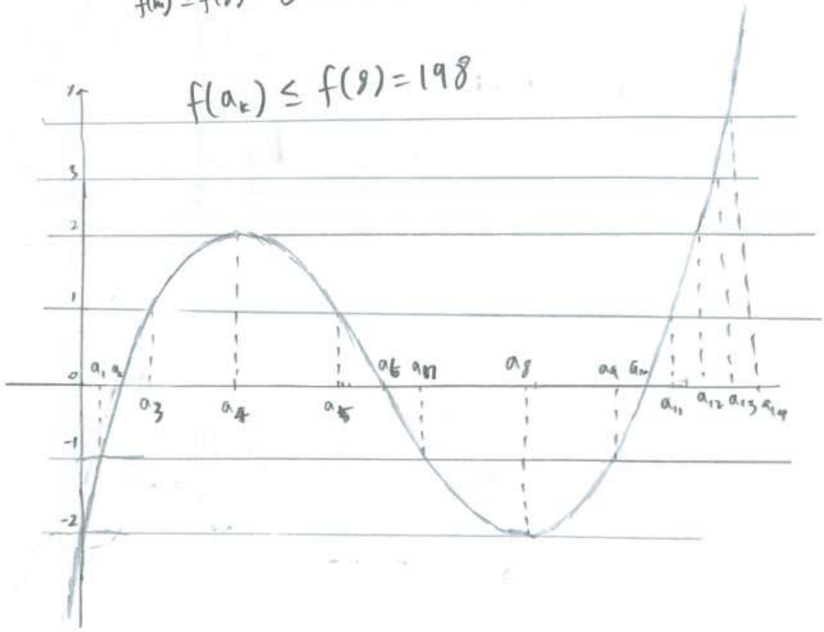
$a_4^3 = 1$

$a_4 = 1$

$\therefore f(x) = x(x-3)^2 - 2$

$f(m) = f(8) = 8 \times 25 - 2 = 198$

$f(a_k) \le f(8) = 198$



$\therefore \alpha = f(a_{10+\alpha})$ ($\alpha \ge 3$인 자연수)

$\therefore 198 = f(a_{208})$

$\therefore a_k = a_{208}$

$\therefore k = 208$

제 2 교시 수학 영역(기하)

5지선다형

23. 두 벡터 $\vec{a}=(2,\ 3)$, $\vec{b}=(4,\ -2)$에 대하여 벡터 $2\vec{a}+\vec{b}$의 모든 성분의 합은? [2점]

②

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

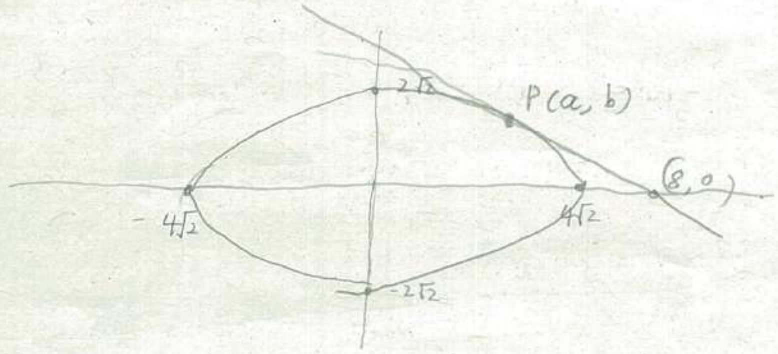
$2\vec{a} = (4, 6)$

$\vec{b} = (4, -2)$

$2\vec{a}+\vec{b} = (8, 4)$ 12

24. 타원 $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{8}=1$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 $(a,\ b)$에서의 접선이 점 $(8,\ 0)$을 지날 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 5 ② $\frac{11}{2}$ ③ 6 ④ $\frac{13}{2}$ ⑤ 7



① 점(a, b) 에서 접선은 $\frac{ax}{32}+\frac{by}{8}=1$

(8, 0) 을 지나므로 $\frac{a}{4}=1$ $a=4$

② (a, b)는 $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{8}=1$ 위의 점이므로

$\frac{a^2}{32}+\frac{b^2}{8}=1$, $\frac{16}{32}+\frac{b^2}{8}=1$, $\frac{1}{2}+\frac{b^2}{8}=1$

$b^2=4$ $(b>0)$ $\therefore b=2$

③ $\therefore a+b = 4+2 = 6$

25. 좌표평면에서 벡터 $\vec{u}=(3,\ -1)$에 평행한 직선 l과 직선 $m:\dfrac{x-1}{7}=y-1$이 있다. 두 직선 l, m이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

5

① $\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$ ② $\dfrac{\sqrt{14}}{5}$ ③ $\dfrac{4}{5}$

④ $\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$ ⑤ $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

m을 나타내는 벡터 = $\vec{v}$

$\vec{v}=(7,1)$

$|\vec{u}|=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$, $|\vec{v}|=\sqrt{49+1}=\sqrt{50}$

∴ $\cos\theta=\dfrac{3\times7+(-1)\times1}{\sqrt{10}\times5\sqrt{2}}=\dfrac{20}{10\sqrt5}=\dfrac{2}{\sqrt5}=\dfrac{2\sqrt5}{5}$

$\vec{a}=(a_1,a_2)$, $\vec{b}=(b_1,b_2)$

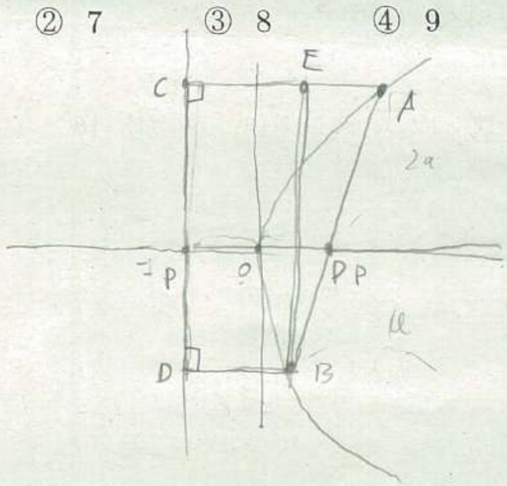
두 벡터가 이루는 각 (직선이 이루는 각)

$\cos\theta=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\times\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$

26. 포물선 $y^2=4px\ (p>0)$의 초점 F를 지나는 직선이 포물선과 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 두 점 A, B에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{AC}:\overline{BD}=2:1$이고 사각형 ACDB의 넓이가 $12\sqrt{2}$일 때, 선분 AB의 길이는? (단, 점 A는 제1사분면에 있다.) [3점]

1

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10



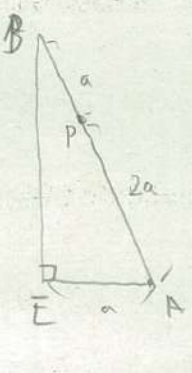
① 점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발 E

이때 $\overline{AC}:\overline{BD}=2:1$ $2\overline{BD}=\overline{AC}$

$\overline{BD}=a$라 하면 $(a>0)$ $\overline{BD}=\overline{BP}=a$, $\overline{AC}=\overline{AP}=2a$ (포물선정의)

즉 $\overline{AE}=\overline{CE}=a$

②



$\overline{AB}=3a$, $\overline{EA}=a$

$\overline{BE}=\sqrt{9a^2-a^2}=2\sqrt2 a$

③ 사각형 ABCD의 넓이 $=2\sqrt2 a\times(a+2a)\times\frac12=3\sqrt2 a^2=12\sqrt2$

$a^2=4$ $(a>0)$, $a=2$

∴ $\overline{AB}=3a \Rightarrow 6$

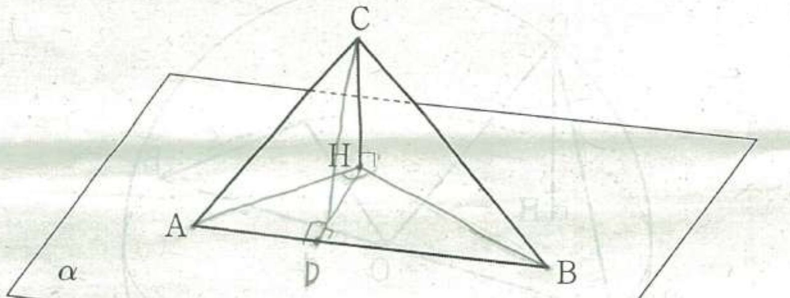
27. 공간에 선분 AB를 포함하는 평면 α가 있다. 평면 α 위에 있지 않은 점 C에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 점 H가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\angle AHB = \frac{\pi}{2}$
>
> (나) $\sin(\angle CAH) = \sin(\angle ABH) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

평면 ABC와 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? (단, 점 H는 선분 AB 위에 있지 않다.) [3점]

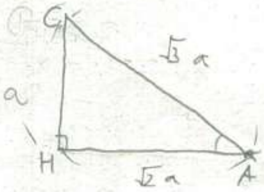
4

① $\frac{\sqrt{7}}{14}$ ② $\frac{\sqrt{7}}{7}$ ③ $\frac{3\sqrt{7}}{14}$ ④ $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{7}}{14}$



① 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발 D
이때 $\overline{CH} \perp \alpha$, $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ 이므로 "삼수선" 정리에 의해 $\overline{AB} \perp \overline{DH}$

②

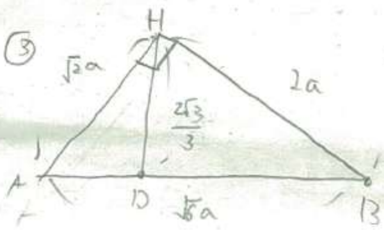


$\sin(\angle CAH) = \frac{\overline{CH}}{\overline{CA}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\overline{CH} = a\ (a>0)$ 이라 하면 $\overline{CA} = \sqrt{3}a$

$\overline{AH} = \sqrt{3a^2 - a^2} = \sqrt{2}a$

③



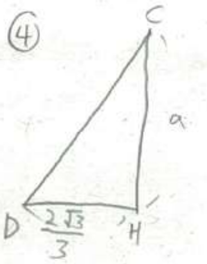
$\sin(\angle ABH) = \frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{2}a}{\overline{AB}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\overline{AB} = \sqrt{6}a$, $\overline{HB} = \sqrt{6a^2 - 2a^2} = 2a$

$\sin(\angle HBD) = \sin(\angle ABH) = \frac{\overline{HD}}{\overline{HB}} = \frac{\overline{HD}}{2a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\overline{HD} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$

④



$\overline{CD} = \sqrt{a^2 + \frac{4}{3}a^2} = \frac{\sqrt{21}}{3}a$

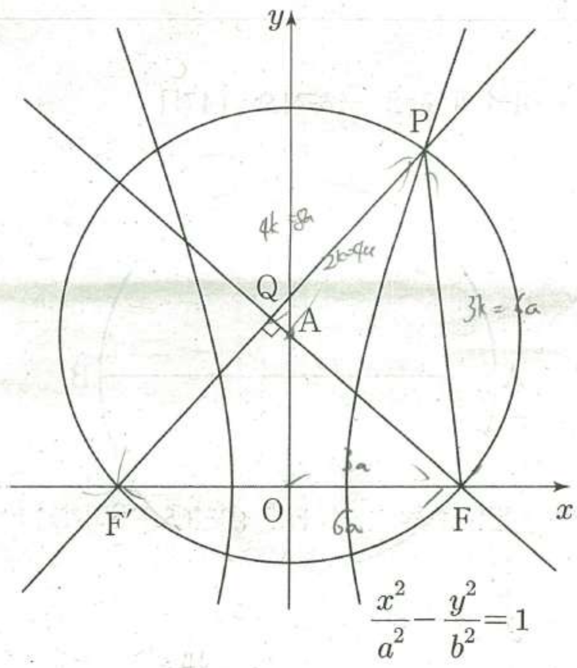
$\cos\theta = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$ ④

28. 두 초점이 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)\ (c>0)$인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$과 점 $A(0, 6)$을 중심으로 하고 두 초점을 지나는 원이 있다. 원과 쌍곡선이 만나는 점 중 제1사분면에 있는 점 P와 두 직선 PF', AF가 만나는 점 Q가

$$\overline{PF} : \overline{PF'} = 3:4,\ \angle F'QF = \frac{\pi}{2}$$

를 만족시킬 때, $b^2 - a^2$의 값은? (단, a, b는 양수이고, 점 Q는 제2사분면에 있다.) [4점]

① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50



① $\overline{PF} = 3k$, $\overline{PF'} = 4k\ (k>0)$
쌍곡선의 정의에 의해 $4k - 3k = 2a$ $k = 2a$

② $\overline{QP} = \overline{QF'} = 2k = 4a$
$\overline{PF} = \overline{FF'} = 3k = 6a$ $\overline{FO} = \overline{F'O} = 3a = c$

③ $\overline{AF} = \sqrt{36a^2 - 16a^2} = 2\sqrt{5}a$

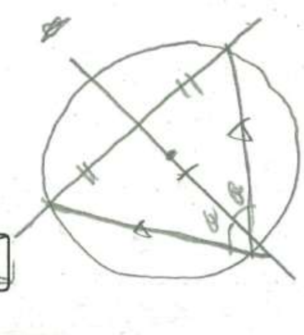
$\tan(\angle F'FA) = \frac{4a}{2\sqrt{5}a} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$= \tan(\angle OFA) = \frac{6}{3a} = \frac{2}{a}$ $\frac{2}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$a = \sqrt{5}$, $c = 3\sqrt{5}$

$a^2 + b^2 = c^2 = 5 + b^2 = 45$ $b^2 = 40$

$b^2 - a^2 = 40 - 5 = 35$ ∴ 35



원의 성질을 적극 이용

단답형

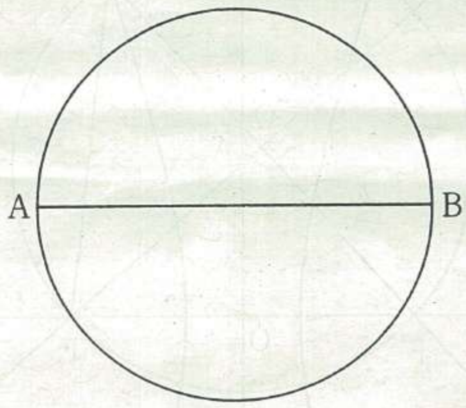
29. 좌표평면 위에 길이가 6인 선분 AB를 지름으로 하는 원이 있다. 원 위의 서로 다른 두 점 C, D가

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 27,\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 9,\ \overline{CD} > 3$$

을 만족시킨다. 선분 AC 위의 서로 다른 두 점 P, Q와 상수 k가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\frac{3}{2}\overrightarrow{DP} - \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}$
(나) $\overrightarrow{QB} \cdot \overrightarrow{QD} = 3$

$k \times (\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{DP})$의 값을 구하시오. [4점]



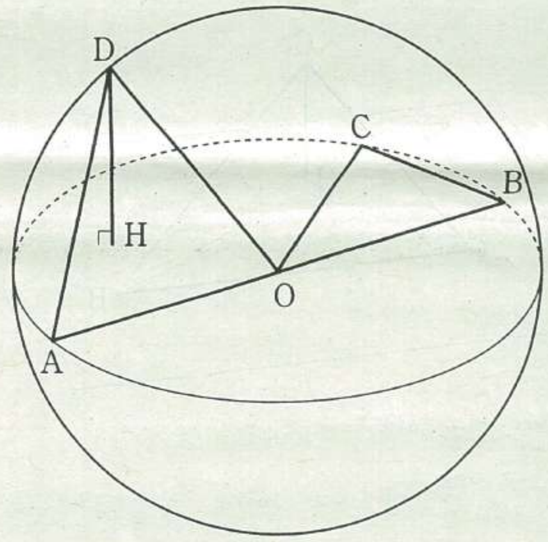
30. 공간에 중심이 O이고 반지름의 길이가 4인 구가 있다. 구 위의 서로 다른 세 점 A, B, C가

$$\overline{AB} = 8,\ \overline{BC} = 2\sqrt{2}$$

를 만족시킨다. 평면 ABC 위에 있지 않은 구 위의 점 D에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 점 D가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 직선 OC, OD가 서로 수직이다.
(나) 두 직선 AD, OH가 서로 수직이다.

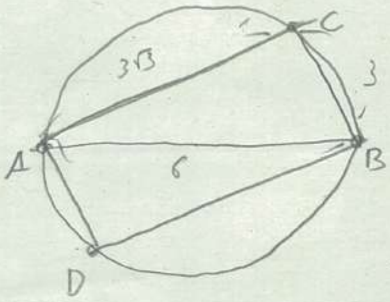
삼각형 DAH의 평면 DOC 위로의 정사영의 넓이를 S라 할 때, $8S$의 값을 구하시오. (단, 점 H는 점 O가 아니다.) [4점]



* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인 하시오.

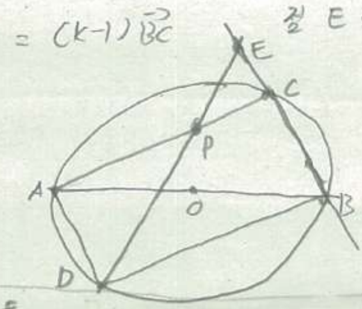
$\overline{AC}=\overline{DB}=3\sqrt{3}$, $\overline{AD}=\overline{CB}=3$, $\angle ACB=\angle ADB=\frac{\pi}{2}$

$\vec{AC}=\vec{DB}$, $\vec{DA}=\vec{BC}$

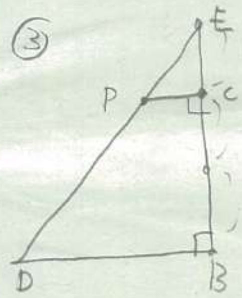


$\vec{PE}=\frac{3}{2}\vec{DP}$ 를 만족시키는 점을 E 라 하면

$\vec{DE}-\vec{DB}=\vec{BE}=(k-1)\vec{BC}$ 점 E 는 $\overline{BC}$ 위에 있...



③



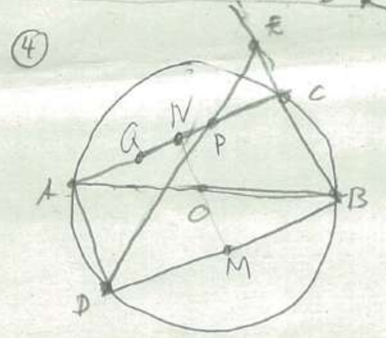
$\triangle EPC$와 $\triangle EDB$는 시로 1 : 3 닮음이다

($\angle E$공통, $\angle ECD=\angle EBD=\frac{\pi}{2}$, $\vec{BE}=\frac{3}{2}\vec{BC}$ ⇒ $\overline{BE}=3\overline{EC}$)

$\vec{BE}=\frac{3}{2}\vec{BC}$ ⇒ $k-1=\frac{3}{2}$ (②) $k=\frac{5}{2}$

$\overline{PC}=\frac{1}{3}\overline{DB}=\frac{1}{3}\times3\sqrt{3}$ (①) $=\sqrt{3}$, $\overline{AP}=2\sqrt{3}$

④



선분 BD의 중점을 M 이라하면

조건 (나)에 의해 $\vec{QB}\cdot\vec{QD}=3$

$\vec{QB}\cdot\vec{QD}=(\vec{QM}+\vec{MB})\cdot(\vec{QM}+\vec{MD})=|\vec{QM}|^2+\vec{QM}\cdot(\vec{MB}+\vec{MD})+\vec{MB}\cdot\vec{MD}$

$=|\vec{QM}|^2+\vec{QM}\cdot\vec{0}-|\vec{MB}|^2$ ($\vec{MD}=-\vec{MB}$)

$=|\vec{QM}|^2-\frac{27}{4}$ ($\overline{MB}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$) $=3$, $|\vec{QM}|^2=\frac{39}{4}$

선분 AC의 중점을 N 이라 하면 $\overline{MN}=\overline{BC}=3$

$|\vec{QM}|^2=|\vec{QN}|^2+|\vec{MN}|^2=|\vec{QN}|^2+9$

$|\vec{QN}|^2=|\vec{QM}|^2-9=\frac{3}{4}$, $\overline{QN}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

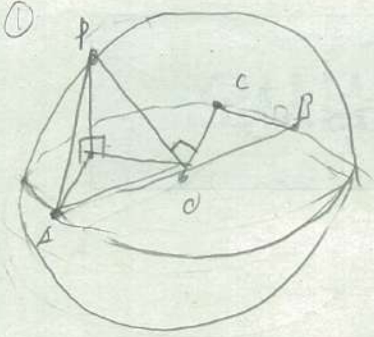
$\overline{AQ}=\overline{AC}-\overline{QC}$ 이므로 $|\vec{AQ}|=\sqrt{3}$ or $2\sqrt{3}$

$|\vec{AQ}|=2\sqrt{3}$ 이면 ③ 에 의해 P = Q 이기 때문에 성립 X

$\vec{AQ}\cdot\vec{DP}=|\vec{AQ}|\times|\vec{DP}|\times\cos\angle DPA=\vec{AQ}\times\vec{AP}=\sqrt{3}\times2\sqrt{3}=6$

30

①



조건 (가)에 의해 $\overline{OC}\perp\overline{OD}$, $\overline{DH}\perp$ (평면 COH)

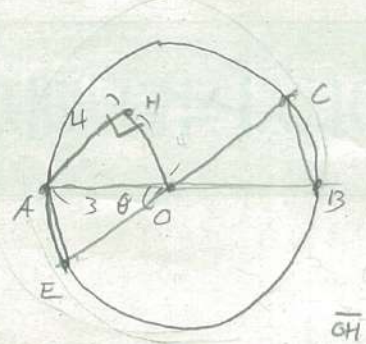
⇒ 삼수선의정리 ⇒ $\overline{OH}\perp\overline{OC}$

$\overline{DH}\perp\overline{OH}$

조건 (나)에 의해 $\overline{AD}\perp\overline{OH}$, $\overline{OH}\perp\overline{DH}$ 이므로

$\overline{OH}\perp$ (평면 DAH) ⇒ $\overline{OH}\perp\overline{AH}$

②



직선 OC와 구가 만나는 또다른점 E

$\overline{AE}=\overline{BC}=2\sqrt{2}$

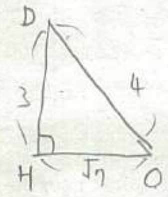
$\angle AOE=\theta_1$ 이라 하면

$\angle OAH=\angle AOE$ (엇각)

$\triangle AOE$에서 $\cos\theta_1=\frac{4^2+4^2-(2\sqrt{2})^2}{2\times4\times4}=$

$\overline{AH}=\overline{OA}\times\cos\theta_1=\frac{3}{4}\times4=3$

$\overline{OH}=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$

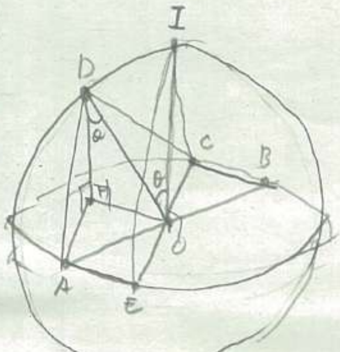


$\overline{DH}=\sqrt{16-7}=3$

$\triangle ADH$의 ...

$=3\times3\times\frac{1}{2}$

③



점 O를 지나고 평면 ABC 에 수직인 직선과

구가 만나는 점중 D와 가까운 점 I

$\overline{DH}\parallel\overline{OI}$ ⇒ $\overline{DH}\parallel$ (평면 IEC)

$\overline{AH}\parallel\overline{EC}$ ⇒ $\overline{AH}\parallel$ (평면 IEC)

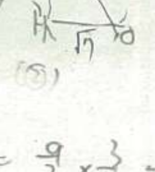
⇒ (평면 DAH) $\parallel$ (평면 IEC)

$\overline{CE}$는 평면 IEC와 평면 DOC의 교선

$\overline{CE}\perp\overline{OI}$, $\overline{CE}\perp\overline{OD}$

평면 IEC, DOC 가 이루는 예각의 크기를 θ 라 하면 $\angle DOI=\theta$

$\angle ODH=\angle DOI=\theta$ (엇각) 이므로



② 확인

$\cos\theta=\cos(\angle ODH)=\frac{\overline{DH}}{\overline{OD}}=\frac{3}{4}$

DAH의 넓이 T. $S=T\times\cos\theta=\frac{9}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{27}{8}$

$8S=27$