제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $3^{2\sqrt{2}} \times 9^{1-\sqrt{2}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

$3^{2\sqrt2} \times 9^{1-\sqrt2} = 3^{2\sqrt2} \times 3^{2(1-\sqrt2)} = 3^{2\sqrt2+2-2\sqrt2} = 3^2 = 9$

2. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = 1$ 일 때, a_5의 값은? [2점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$a_n = ar^{n-1}$

i) $a_1 = a$

$a_2 = ar = \frac{1}{2}$

$a_3 = ar^2 = 1$

$\frac{1}{2}r = 1$

$r = 2$

$a = \frac{1}{4}$

$a_5 = ar^4 = \frac{1}{4}\times 2^4 = 2^2 = 4$

ii) a_2를 초항으로 생각

$b_1 = a_2 = \frac{1}{2}$

$b_2 = a_3 = 1$

$r = 2$

$b_n = \frac{1}{2}\times 2^{(n-1)}$

$a_5 = b_4 = \frac{1}{2}\times 2^3 = 2^2 = 4$

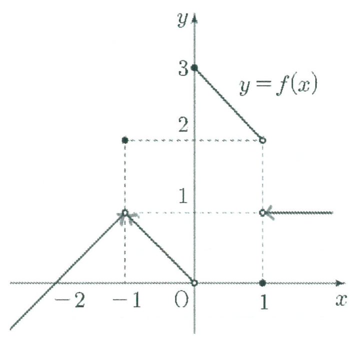
3. 함수 $f(x) = x^3 + 2x + 7$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

$f'(x) = 3x^2 + 2$

$f'(1) = 3 + 2 = 5$

4. 함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to -1} f(x) + \lim_{x\to 1+} f(x)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\lim_{x\to -1} f(x) = 1$ $\lim_{x\to 1+} f(x) = 1$

$\lim_{x\to -1} f(x) + \lim_{x\to 1+} f(x) = 1+1 = 2$

5. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & (x<2) \\ x^2-ax+3 & (x\geq 2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-}(x-1) = 2-1=1$

$\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+}(x^2-ax+3) = 4-2a+3=7-2a$

$f(2) = 4-2a+3 = 7-2a$

$7-2a=1$

$2a=6$

$a=3$

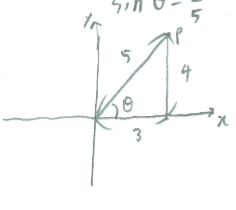
6. $0<\theta<\frac{\pi}{2}$인 θ에 대하여 $\sin\theta=\frac{4}{5}$일 때, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\cos(\pi+\theta)$의 값은? [3점]

① $\frac{9}{10}$ ② 1 ③ $\frac{11}{10}$ ④ $\frac{6}{5}$ ⑤ $\frac{13}{10}$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$

$\sin\theta>0,\ \cos\theta>0$

$\sin\theta=\frac{4}{5}$ $\cos\theta=\frac{3}{5}$



$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\cos(\pi+\theta)$

$=\cos\theta+\cos\theta=2\cos\theta$

$=2\times\frac{3}{5}=\frac{6}{5}$

7. 첫째항이 $\frac{1}{2}$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+1 & (a_n<0) \\ -2a_n+1 & (a_n\geq 0) \end{cases}$$

일 때, $a_{10}+a_{20}$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$a_1=\frac{1}{2}\geq 0$

$a_2=-2\times\frac{1}{2}+1=-1+1=0\geq 0$

$a_3=-2\times 0+1=1\geq 0$

$a_4=-2\times 1+1=-2+1=-1<0$

$a_5=-1+1=0\geq 0$

$a_6=-2\times 0+1=1\geq 0$

$a_7=-2\times 1+1=-2+1=-1<0$

→ a_2부터 0, 1, -1 순으로 순환한다는 규칙 발견

⋮

$a_{10}=-1$

⋮

$a_{20}=0$

$\therefore a_{10}+a_{20}=-1+0=-1$

8. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=2,\ \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=3$$

을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은? [3점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=2$ $f(x)=2x^2+bx+c$ ($\because \frac{\infty}{\infty}=\alpha$ 이면 분모와 분자는 최고 차항이 같고 α는 분모,분자의 최고차항의 계수비)

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=3$

$f(x)=2(x-1)(x-\alpha)$ ($\because \frac{0}{0}=\alpha$ 에서 분모, 분자 에 같은 인자 존재)

$\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)(x-\alpha)}{x-1}=\lim_{x\to 1}2(x-\alpha)=2(1-\alpha)=3$

$1-\alpha=\frac{3}{2}$

$\alpha=-\frac{1}{2}$

$f(x)=2(x-1)(x+\frac{1}{2})$ $f(3)=2\times 2\times\frac{7}{2}=14$

9. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가

$$\int_0^1 f'(x)dx=\int_0^2 f'(x)dx=0$$

을 만족시킬 때, $f'(1)$의 값은? [4점]

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

$\int_0^1 f'(x)dx=\int_0^2 f'(x)dx=0$

$f(1)-f(0)=f(2)-f(0)=0$

$f(1)=f(2)=f(0)$

$f(x)=x(x-1)(x-2)+c$

$=x(x^2-3x+2)+c$

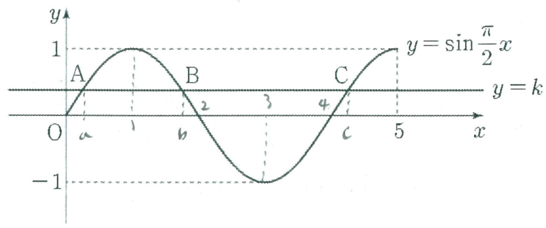
$=x^3-3x^2+2x+c$

$f'(x)=3x^2-6x+2$

$f'(1)=3-6+2=-1$

10. 곡선 $y=\sin\frac{\pi}{2}x\,(0\le x\le 5)$가 직선 $y=k\,(0<k<1)$과 만나는 서로 다른 세 점을 y축에서 가까운 순서대로 A, B, C라 하자. 세 점 A, B, C의 x좌표의 합이 $\frac{25}{4}$일 때, 선분 AB의 길이는? [4점]

① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{11}{8}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{13}{8}$ ⑤ $\frac{7}{4}$



$\frac{a+b}{2}=1$

$a+b=2$

$\frac{b+c}{2}=3$

$b+c=6$

$a+b+b+c=a+2b+c=8$

$-\ \ a+b+c=\frac{25}{4}$

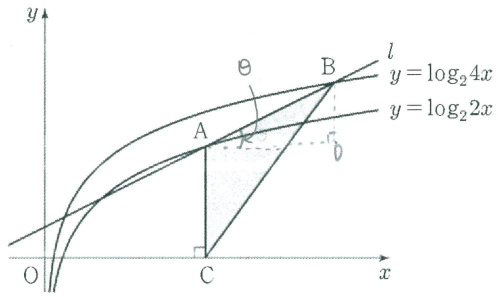
$b=8-\frac{25}{4}=\frac{32-25}{4}=\frac{7}{4}$

$a=\frac{1}{4}$

$\overline{AB}=b-a=\frac{7}{4}-\frac{1}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

11. 기울기가 $\frac{1}{2}$ 인 직선 l 이 곡선 $y=\log_2 2x$ 와 서로 다른 두 점에서 만날 때, 만나는 두 점 중 x 좌표가 큰 점을 A 라 하고, 직선 l 이 곡선 $y=\log_2 4x$ 와 만나는 두 점 중 x 좌표가 큰 점을 B 라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{5}$ 일 때, 점 A 에서 x 축에 내린 수선의 발 C 에 대하여 삼각형 ACB 의 넓이는? [4점]

① 5 ② $\frac{21}{4}$ ③ $\frac{11}{2}$ ④ $\frac{23}{4}$ ⑤ 6



A$(a, \log_2 2a)$ B$(b, \log_2 4b)$ C$(a, 0)$ D$(b, \log_2 2a)$

(l의 기울기) $= \tan\theta = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{1}{2}$

$2\overline{BD} = \overline{AD}$

$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = 4\overline{BD}^2 + \overline{BD}^2 = 5\overline{BD}^2 = 4\times 5$

$\overline{BD} = 2$, $\overline{AD} = 4$

$\overline{BD} = \log_2 4b - \log_2 2a = \log_2 2\frac{b}{a} = 1 + \log_2 \frac{b}{a} = 2$

$\log_2 \frac{b}{a} = 1$ $\frac{b}{a} = 2$

$b = 2a$

$\overline{AD} = b - a = 4$

$2a - a = 4$

$a = 4, b = 8$

$\triangle ACB = \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{AD} = \frac{1}{2} \times \log_2 2a \times 4$

$= 2\log_2 8 = 2\times 3 = 6$

12. 첫째항이 2 인 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{3S_k}{k+2} = S_n$$

이 성립할 때, a_{10} 의 값을 구하는 과정이다.

> $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여
> $$a_n = S_n - S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{3S_k}{k+2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{3S_k}{k+2} = \frac{3S_n}{n+2}$$
> 이므로 $3S_n = (n+2)\times a_n \ (n \geq 2)$
> 이다.
> $S_1 = a_1$ 에서 $3S_1 = 3a_1$ 이므로
> $3S_n = (n+2)\times a_n \ (n \geq 1)$
> 이다.
> $$3a_n = 3(S_n - S_{n-1}) = (n+2)\times a_n - (\boxed{(가)})\times a_{n-1} \ (n \geq 2)$$
> $$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \boxed{(나)} \ (n \geq 2)$$
> 따라서
> $$a_{10} = a_1 \times \frac{a_2}{a_1} \times \frac{a_3}{a_2} \times \frac{a_4}{a_3} \times \cdots \times \frac{a_9}{a_8} \times \frac{a_{10}}{a_9} = \boxed{(다)}$$

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$ 이라 하고, (다)에 알맞은 수를 p 라 할 때, $\frac{f(p)}{g(p)}$ 의 값은? [4점]

① 109 ② 112 ③ 115 ④ 118 ⑤ 121

$3S_n = (n+2)\times a_n$ $3S_{n-1} = (n-1+2)\times a_{n-1} = (n+1)a_{n-1}$

$\therefore$ (가) $= n+1$

$3a_n = (n+2)a_n - (n+1)a_{n-1}$

$(n+1)a_{n-1} = (n+2)a_n - 3a_n = (n-1)a_n$

$\frac{n+1}{n-1} = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ $\therefore$ (나) $= \frac{n+1}{n-1}$

$a_{10} = a_1 \times \frac{a_2}{a_1} \times \frac{a_3}{a_2} \times \cdots \times \frac{a_{10}}{a_9}$

$= 2\times\frac{3}{1}\times\frac{4}{2}\times\frac{5}{3}\times\frac{6}{4}\times\frac{7}{5}\times\frac{8}{6}\times\frac{9}{7}\times\frac{10}{9}\times\frac{11}{9}$

$= 110$ $\therefore$ (다) $= 110$

$\therefore f(n) = n+1$, $g(n) = \frac{n+1}{n-1}$ $p = 110$

$\frac{f(n)}{g(n)} = \frac{n+1}{\frac{n+1}{n-1}} = n-1$ $\therefore \frac{f(p)}{g(p)} = 110-1 = 109$

13. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=\frac{1}{2}$ 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-2) \\ f(x)+8 & (x\geq -2) \end{cases}$$

라 하자. 방정식 $g(x)=f(-2)$ 의 실근이 2뿐일 때, 함수 $f(x)$ 의 극댓값은? [4점]

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

$f(x)=x^3+ax^2+bx+\frac{1}{2}$

$g(x)=\begin{cases} x^3+ax^2+bx+\frac{1}{2} & (x<-2) \\ x^3+ax^2+bx+\frac{17}{2} & (x\geq -2) \end{cases}$

$g(2)=8+4a+2b+\frac{17}{2}=f(-2)=-8+4a-2b+\frac{1}{2}$

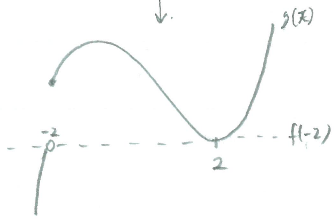
$16+4b+\frac{16}{2}=0$

$4+b+\frac{4}{2}=6+a=0$

$b=-6$

$f(x)=x^3+ax^2-6x+\frac{1}{2}$

$g(x)=\begin{cases} x^3+ax^2-6x+\frac{1}{2} & (x<-2) \\ x^3+ax^2-6x+\frac{17}{2} & (x\geq -2) \end{cases}$

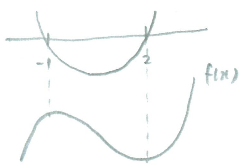


$f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-6x+\frac{1}{2}$

$f'(x)=3x^2-3x-6$

$=3(x^2-x-2)$

$=3(x-2)(x+1)$



$g'(x)=\begin{cases} 3x^2+2ax-6 & (x<-2) \\ 3x^2+2ax-6 & (x\geq 2) \end{cases}$

$g'(2)=12+4a-6=6+4a=0$

$a=-\frac{3}{2}$

$f(-1)=-1-\frac{3}{2}+6+\frac{1}{2}$

$=-2+6=4$

$\therefore$ ($f(x)$의 극댓값) $=4$

14. 길이가 14인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 C를 $\overline{BC}=6$이 되도록 잡는다. 점 D가 호 AC 위의 점일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, 점 D는 점 A와 점 C가 아닌 점이다.) [4점]

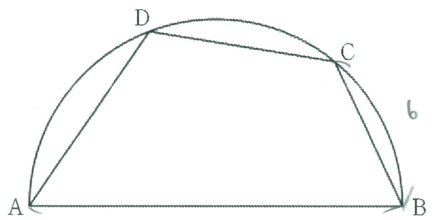
<보 기>

ㄱ. $\sin(\angle CBA)=\frac{2\sqrt{10}}{7}$

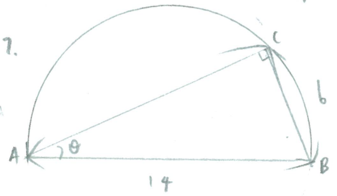
ㄴ. $\overline{CD}=7$일 때, $\overline{AD}=-3+2\sqrt{30}$

ㄷ. 사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은 $20\sqrt{10}$ 이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



ㄱ.



$\cos\theta=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$

$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

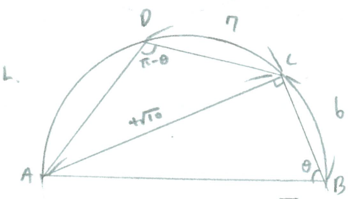
$\frac{9}{49}+\sin^2\theta=1$

$\sin^2\theta=\frac{40}{49}$

$\sin\theta=\frac{2\sqrt{10}}{7}$

$\therefore$ ㄱ. 참

ㄴ.



$\sin\theta=\sin(\pi-\theta)=\frac{2\sqrt{10}}{7}$

$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta=-\frac{3}{7}$

$\overline{AC}^2=\overline{CD}^2+\overline{AD}^2-2\,\overline{CD}\,\overline{AD}\times\cos(\pi-\theta)$

$160=49+\overline{AD}^2-14\overline{AD}\times\left(-\frac{3}{7}\right)=49+\overline{AD}^2+6\overline{AD}$

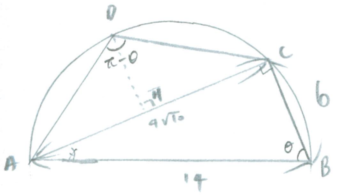
$\overline{AD}^2+6\overline{AD}-111=0$

$\overline{AD}=-3+\sqrt{9+111}=-3+\sqrt{120}=-3+2\sqrt{30}$ ($\because \overline{AD}>0$)

$\therefore$ ㄴ. 참

14.

ㄷ.



$\square ABCD = \underbrace{\triangle ABC}_{\text{고정값}} + \underbrace{\triangle ADC}_{\text{변함}}$

$\triangle ADC$가 최댓값 $\rightarrow$ $\square ABCD$가 최댓값

$\triangle ADC$가 최댓값 이려면 밑변이 고정이므로

높이가 최대 $\rightarrow$ $\triangle ADC$가 최댓값

높이가 최대 이려면 (높이) $= \overline{HD}$

$\therefore \overline{CD} = \overline{AD}$

$160 = \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 - 2\overline{CD}\,\overline{AD} \times \cos(\pi-\theta)$

$= 2\overline{AD}^2 - 2\overline{AD}^2 \times \left(-\frac{3}{7}\right)$

$= 2\overline{AD}^2\left(1+\frac{6}{7}\right) = 2\overline{AD}^2 \times \frac{13}{7} = \frac{20}{7}\overline{AD}^2$

$\overline{AD}^2 = 160 \times \frac{7}{20} = 8\times 7 = 56$

$\overline{AD} = 2\sqrt{14}$

$\overline{DH}^2 = \overline{AD}^2 - \left(\frac{\overline{AC}}{2}\right)^2 = 56 - 40 = 16$

$\overline{DH} = 4$

$\triangle ADC = \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{DH} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{10} \times 4 = 8\sqrt{10}$

$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BC} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{10} \times 6 = 12\sqrt{10}$

$\therefore$ ($\square ABCD$의 최댓값) $= 8\sqrt{10} + 12\sqrt{10} = 20\sqrt{10}$

$\therefore$ ㄷ 참

15. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x+2) & (x<0) \\ \int_0^x tf(t)dt & (x \ge 0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. 실수 a에 대하여 함수 $h(x)$를

$$h(x)=|g(x)-g(a)|$$

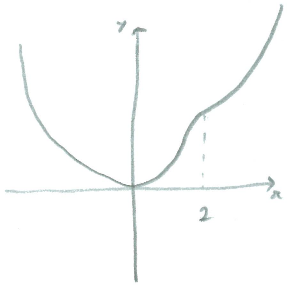
라 할 때, 함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 모든 a의 값의 곱은? [4점]

① $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ② $-\frac{7\sqrt{3}}{6}$ ③ $-\sqrt{3}$ ④ $-\frac{5\sqrt{3}}{6}$ ⑤ $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$f(x)$, $f'(x)$ 모두 2에서 0 이므로

$f(x)=(x-2)^2$

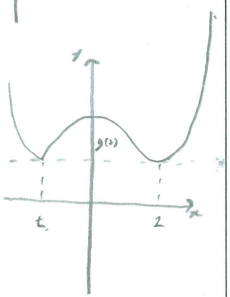
$$g(x)=\begin{cases} x^2 & (x<0) \\ \int_0^x t(t-2)^2 dt & (x \ge 0) \end{cases} \Rightarrow$$



$$g'(x)=\begin{cases} 2x & (x<0) \\ x(x-2)^2 & (x \ge 0) \end{cases}$$

$h(x)=|g(x)-g(a)|$

$h(x)$가 $x=k$ 에서만 미분불가능 $\Rightarrow$



$\therefore g(k)=g(2)$

($\because$ $x=2$에서 $g'(x)$가 0이므로 반대쪽에서만 미분불가능)

$\therefore a=t$ 와 $a=2$

$g(2)=\int_0^2 t(t-2)^2 dt = \int_0^2 (t^3-4t^2+4t)dt = \left[\frac{1}{4}t^4-\frac{4}{3}t^3+2t^2\right]_0^2$

$=\frac{1}{4}\times 2^4-\frac{4}{3}\times 2^3+2\times 2^2 = 4-\frac{32}{3}+8 = 12-\frac{32}{3}=\frac{4}{3}$

$g(t)=\frac{4}{3}$

$t^2=\frac{4}{3}$ ($\because t<0$)

$t=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ($\because t<0$)

$\therefore a=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 와 $a=2$

$\therefore$ (모든 a 값의 곱) $=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\times 2=-\frac{4\sqrt{3}}{3}$

단답형

16. $\log_3 7 \times \log_7 9$의 값을 구하시오. [3점]

$\log_3 7 \times \log_7 9 = \frac{\log 7}{\log 3} \times \frac{\log 9}{\log 7} = \log_3 9 = 2$

답: 2

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=6x^2-2x-1$이고 $f(1)=3$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

$f(x)=\int f'(x)dx = 2x^3-x^2-x+C$

$f(1)=2-1-1+C=3$

$C=3$

$f(x)=2x^3-x^2-x+3$

$f(2)=16-4-2+3=13$

답: 13

18. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3t^2+6t-a$$

이다. 시각 $t=3$에서의 점 P의 위치가 6일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

(점P의 위치)$=p(t)=\int v(t)\,dt = t^3+3t^2-at+C$

$p(0)=C=0$

$p(t)=t^3+3t^2-at$

$p(3)=27+27-3a=54-3a=6$

$18-a=2$

$a=16$

답: 16

19. $n \geq 2$인 자연수 n에 대하여 $2n^2-9n$의 n제곱근 중에서 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $f(3)+f(4)+f(5)+f(6)$의 값을 구하시오. [3점]

i) $n=2k-1$ (즉, 홀수)(단, k는 자연수)

α의 홀수 제곱근 중
실수인 것은 항상
1개가 존재한다.

$\therefore f(3)=f(5)=1$

ii) $n=2k$ (즉, 짝수) (단, k는 자연수)

$2(2k)^2-9\times 2k$

$=2k(4k-9)$

α의 짝수 제곱근 중 실수인 것은
$\alpha<0$ 이면 없고
$\alpha>0$ 이면 2개 존재한다.

$\therefore$ $k\leq 2$ 이면 $f(n)=0$
$k>2$ 이면 $f(n)=2$

$\therefore f(4)=0$
$f(6)=2$

$\therefore f(3)+f(4)+f(5)+f(6)$

$=1+0+1+2=4$

답: 4

20. 최고차항의 계수가 3인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=x^2\int_0^x f(t)dt-\int_0^x t^2 f(t)dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 극값을 갖지 않는다.
> (나) 방정식 $g'(x)=0$의 모든 실근은 0, 3이다.

$\int_0^3 |f(x)|dx$의 값을 구하시오. [4점]

$f(x)=3x^2+ax+b$

$g'(x)=2x\int_0^x f(t)dt+x^2f(x)-x^2f(x)$

$=2x\int_0^x f(t)dt=2x\left[t^3+\frac{a}{2}t^2+bt\right]_0^x$

$=2x\left(x^3+\frac{a}{2}x^2+bx\right)$

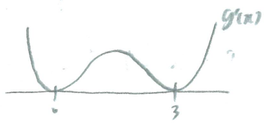
$=2x^2\left(x^2+\frac{a}{2}x+b\right)$

$=2x^2(x-3)(x-\alpha)=2x^2\left(x^2-(3+\alpha)x+3\alpha\right)$

$\alpha=3$ or $\alpha=0$

i) $\alpha=3$

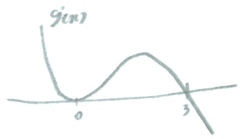
$g'(x)=2x^2(x-3)^2$



$g(x)$는 극값을 갖지 않으므로
$\alpha=3$ 가능

ii) $\alpha=0$

$g'(x)=2x^3(x-3)$



$g(x)$가 3에서 극값을
가지므로 $\alpha\neq 0$

$\therefore \alpha=3$

$\int f(x)=x(x^2-(3+\alpha)x+3\alpha)+C$

$=x^3-(3+\alpha)x^2+3\alpha x+C$

$f(x)=3x^2-2(3+\alpha)x+3\alpha$

$=3x^2-12x+9$

$=3(x^2-4x+3)$

$=3(x-1)(x-3)$

$\therefore \int_0^3|f(x)|dx=\int_0^1 f(x)dx-\int_1^3 f(x)dx$

$=\left[x^3-6x^2+9x\right]_0^1-\left[x^3-6x^2+9x\right]_1^3$

$=1-6+9-0-27+54-27+1-6+9$

$=4+4=8$

답: 8

21. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\sum_{k=1}^{2n} a_k = 17n$
(나) $\lvert a_{n+1} - a_n \rvert = 2n-1$

$a_2 = 9$일 때, $\sum_{n=1}^{10} a_{2n}$의 값을 구하시오. [4점]

$\sum_{k=1}^{2} a_k = a_1 + a_2 = a_1 + 9 = 17$

$a_1 = 8$

$\sum_{k=1}^{4} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 17 + a_3 + a_4 = 17 \times 2$

$a_3 + a_4 = 17$

$\vdots$

$a_{n+1} + a_n = 17$

i) $a_{n+1} > a_n$

$a_{n+1} + a_n = 17$
$+\ a_{n+1} - a_n = 2n-1$

$2a_{n+1} = 2n + 16$

$a_{n+1} = n + 8$

$a_2 = 9$

$a_4 = 11$

$a_6 = 13$

$\vdots$

$a_{2n} = 9 + 2(n-1)$

ii) $a_{n+1} < a_n$

$a_{n+1} + a_n = 17$
$-\ -a_{n+1} + a_n = -2n+1$

$2a_{n+1} = 2n + 16$

$a_{n+1} = n + 8$

$a_2 = 9$

$a_4 = 11$

$a_6 = 13$

$\vdots$

$a_{2n} = 9 + 2(n-1)$

$\therefore a_{2n} = 9 + 2(n-1) = 7 + 2n$

$\sum_{n=1}^{10} a_{2n} = \sum_{n=1}^{10} (7+2n) = 70 + 2\sum_{n=1}^{10} n$

$= 70 + 2 \times \frac{10 \times (10+1)}{2} = 70 + 110 = 180$

답 : 180

22. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 할 때, 함수 $h(x)$를

$$h(x) = |f(x)| + g(x)$$

라 하자. 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y=h(x)$ 위의 점 $(k,\ 0)$ $(k \neq 0)$에서의 접선의 방정식은 $y=0$이다.
(나) 방정식 $h(x)=0$의 실근 중에서 가장 큰 값은 12이다.

$h(3) = -\frac{9}{2}$일 때, $k \times \{h(6) - h(11)\}$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [4점]

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f'(0) = c$

$\therefore g(x) = cx$

$h(x) = |ax^3 + bx^2 + cx| + cx$

$h(x) = \begin{cases} ax^3 + bx^2 + 2cx & (f(x) \geq 0) \\ -ax^3 - bx^2 & (f(x) < 0) \end{cases}$

$= \begin{cases} x(ax^2 + bx + 2c) & (f(x) \geq 0) \\ -x^2(ax + b) & (f(x) < 0) \end{cases}$

$h'(x) = \begin{cases} 3ax^2 + 2bx + 2c & (f(x) \geq 0) \\ -3ax^2 - 2bx & (f(x) < 0) \end{cases}$

i) $f(k) < 0$

$h(k) = -k^2(ak + b) = 0$

$k = 0$ or $k = -\frac{b}{a}$

$h'(k) = -k(3ak + 2b)$

$k = 0$ or $k = -\frac{2b}{3a}$

$-\frac{2b}{3a} \neq -\frac{b}{a}$

$\therefore k = 0$

$\therefore f(k) \geq 0$ $(\because k \neq 0)$

ii) $f(k) \geq 0$

$h(x) = a(x-k)^2(x-\alpha)$ $(\because h(k),\ h'(k)$ 모두 $0)$

$= a(x^2 - 2kx + k^2)(x - \alpha)$

$= a(x^3 - (2k+\alpha)x^2 + (k^2 + 2\alpha k)x - \alpha k^2)$

$= ax^3 + bx^2 + 2cx$

$\alpha k^2 = 0$ $\quad \alpha = 0$ $(\because k \neq 0)$

$b = -2ak$ $\quad c = \frac{ak^2}{2}$

$h(x) = \begin{cases} x(ax^2 - 2akx + ak^2) & (f(x) \geq 0) \\ -x^2(ax - 2ak) & (f(x) < 0) \end{cases}$

$= \begin{cases} ax(x-k)^2 & (f(x) \geq 0) \\ -ax^2(x-2k) & (f(x) < 0) \end{cases}$

$h(x)=0$의 근이 $0,\ k,\ 2k$

가장 큰 값이 12 이므로

$2k = 12$

$k = 6$

$h(x) = \begin{cases} ax(x-6)^2 & (f(x) \geq 0) \\ -ax^2(x-12) & (f(x) < 0) \end{cases}$

$h(3) = 3a \times 9 = 27a = -\frac{9}{2}$

$a = -\frac{1}{6}$

$f(x) = -\frac{1}{6}x(x^2 - 12x + 18)$

$f(6) = -(36 - 72 + 18) > 0$

$\therefore h(6) = 0$

$f(11) = -\frac{11}{6}(121 - 12 \times 11 + 18) < 0$

$\therefore h(11) = \frac{11^2}{6} \times (-1) = -\frac{121}{6}$

$k\{h(6) - h(11)\} = 6 \times (0 - (-\frac{121}{6})) = 121$

답 : 121

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, **「선택과목(확률과 통계)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+5n^2+5}-n^2\right)$의 값은? [2점]

① $\frac{7}{4}$ ② 2 ③ $\frac{9}{4}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ $\frac{11}{4}$

$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+5n^2+5}-n^2\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+5n^2+5-n^4}{\sqrt{n^4+5n^2+5}+n^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+5}{\sqrt{n^4+5n^2+5}+n^2}$

$=\frac{5}{2}$

24. $\int_1^e\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\ln x\,dx-\int_1^e\frac{2}{x^2}\ln x\,dx$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

$\int_1^e\left\{\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\ln x-\frac{2}{x^2}\ln x\right\}dx$

$=\int_1^e\frac{3}{x}\ln x\,dx=3\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx$

$\ln x=t$라 하면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$

$\therefore 3\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx=3\int_0^1 t\,dt$

$=3\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

25. 매개변수 $t\,(t>0)$으로 나타내어진 곡선

$$x=t^2\ln t+3t,\ y=6te^{t-1}$$

에서 $t=1$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\frac{dx}{dt}=2t\ln t+t^2\times\frac{1}{t}+3=2t\ln t+t+3$

$\frac{dy}{dt}=6e^{t-1}+6te^{t-1}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{6e^{t-1}(1+t)}{t(2\ln t+1)+3}$

$t=1$

$\frac{6\times2}{1+3}=\frac{12}{4}=3$

26. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)$가 함수 $g(x)$의 역함수이고, $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-2}{x-2}=\frac{1}{3}$이다. 함수 $h(x)=\frac{g(x)}{f(x)}$라 할 때, $h'(2)$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

$f^{-1}(x)=g(x)$

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-2}{x-2}=f'(2)=\frac{1}{3}$

$f(2)=2$

$g(2)=2$

$h'(x)=\frac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{\{f(x)\}^2}$

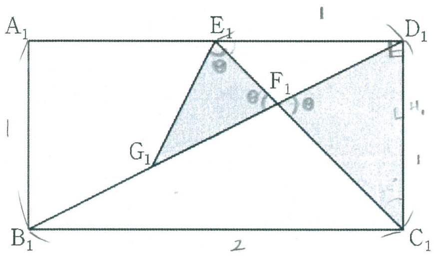
$g'(2)=\frac{1}{f'(g(2))}=\frac{1}{f'(2)}=3$

$h'(2)=\frac{3\times2-2\times\frac{1}{3}}{4}$

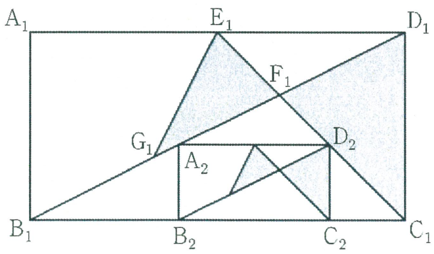
$=\frac{3-\frac{1}{3}}{2}=\frac{\frac{8}{3}}{2}=\frac{8}{3\times2}=\frac{4}{3}$

27. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=1$, $\overline{B_1C_1}=2$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 선분 A_1D_1의 중점 E_1에 대하여 두 선분 B_1D_1, C_1E_1이 만나는 점을 F_1이라 하자. $\overline{G_1E_1}=\overline{G_1F_1}$이 되도록 선분 B_1D_1 위에 점 G_1을 잡아 삼각형 $G_1F_1E_1$을 그린다. 두 삼각형 $C_1D_1F_1$, $G_1F_1E_1$로 만들어진 ⋈ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 B_1F_1 위의 점 A_2, 선분 B_1C_1 위의 두 점 B_2, C_2, 선분 C_1F_1 위의 점 D_2를 꼭짓점으로 하고 $\overline{A_2B_2}:\overline{B_2C_2}=1:2$인 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린다. 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 ⋈ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]

R_1



R_2



⋮ ⋮

① $\frac{23}{42}$ ② $\frac{25}{42}$ ③ $\frac{9}{14}$ ④ $\frac{29}{42}$ ⑤ $\frac{31}{42}$

△ $E_1D_1C_1$ 이 이등변 삼각형
$\therefore \angle D_1C_1E_1 = \angle D_1E_1C_1 = 45°$
$\therefore \overline{E_1C_1} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

△ $E_1F_1D_1$ ∽ △ $C_1F_1B_1$ (AA 닮음)
$\therefore \overline{E_1F_1} : \overline{F_1C_1} = 1:2$

$\overline{E_1F_1} = \sqrt{2}\times\frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ $\quad \overline{F_1C_1} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$

$\overline{D_1F_1}^2 = \overline{D_1C_1}^2 + \overline{F_1C_1}^2 - 2\,\overline{D_1C_1}\,\overline{F_1C_1}\times\cos\angle D_1C_1F_1$
$= 1 + \frac{8}{9} - 2\times1\times\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$
$= \frac{17}{9} - \frac{4}{3} = \frac{17-12}{9} = \frac{5}{9}$ $\quad \therefore \overline{D_1F_1} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

28. 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(-x)=f(x)$ => f(x)는 우함수
> (나) $f(x+2)=f(x)$

$\int_{-1}^{5} f(x)(x+\cos 2\pi x)dx = \frac{47}{2}$, $\int_{0}^{1} f(x)dx = 2$일 때, $\int_{0}^{1} f'(x)\sin 2\pi x\,dx$의 값은? [4점]

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{3}$ ④ $\frac{5}{12}\pi$ ⑤ $\frac{\pi}{2}$

$\int_{-1}^{5} f(x)(x+\cos2\pi x)\,dx = \int_{-1}^{5} x f(x)dx + \int_{-1}^{5} \cos2\pi x \times f(x)\,dx$

$\int_{-1}^{5} x f(x)dx = \int_{-1}^{1} x f(x)dx + \int_{1}^{3} x f(x)dx + \int_{3}^{5} x f(x)\,dx$
(∵ f(x)의 주기가 2 이므로 2로 구간을 나눠줌)

$= \int_{-1}^{1} x f(x)\,dx + \int_{-1}^{1} (x+2) f(x+2)\,dx + \int_{-1}^{1} (x+4) f(x+4)\,dx$

$= \int_{-1}^{1} x f(x)dx + \int_{-1}^{1} x f(x)dx + 2\int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{-1}^{1} x f(x)dx + 4\int_{-1}^{1} f(x)dx$

$= 3\int_{-1}^{1} x f(x)dx + 6\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 12\int_{0}^{1} f(x)dx = 24$
기함수×우함수
= 기함수

$\therefore 3\int_{-1}^{1} x f(x)dx = 0$

$\int_{-1}^{5} \cos2\pi x f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \cos2\pi x f(x)\,dx + \int_{1}^{3} \cos2\pi x f(x)dx + \int_{3}^{5} \cos2\pi x f(x)dx$

$= \int_{-1}^{1} \cos2\pi x f(x)dx + \int_{-1}^{1} \underbrace{\cos 2\pi(x+2)}_{} f(x+2)dx + \int_{-1}^{1} \cos2\pi(x+4) f(x+4)\,dx$
$\cos 2\pi(x+n) = 1$
$\therefore \int_{-1}^{1} \cos2\pi(x+n) f(x+n)\,dx$
$= \int_{-1}^{1} \cos2\pi x f(x)\,dx$

$= 3\int_{-1}^{1} \cos2\pi x f(x)\,dx = 6\int_{0}^{1} \cos2\pi x f(x)\,dx = \frac{47}{2} - 24 = -\frac{1}{2}$

$\int_{0}^{1} \cos2\pi x f(x)\,dx = -\frac{1}{12}$

$\therefore \int_{0}^{1} f'(x)\sin2\pi x\,dx = \left[\sin2\pi x f(x)\right]_{0}^{1} - 2\pi\int_{0}^{1} \cos2\pi x f(x)\,dx$
$= -2\pi \times -\frac{1}{12} = \frac{\pi}{6}$

답: $\frac{\pi}{6}$

27.

$\angle D_1F_1C_1 = \angle E_1F_1G_1 = \angle G_1E_1F_1 = \theta$

$$\frac{\overline{C_1D_1}}{\sin\theta} = \frac{\overline{D_1F_1}}{\sin\angle D_1C_1F_1} = \sqrt{2}\times\frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{\sqrt{10}}{3} = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\sin\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\overline{G_1F_1} = \overline{G_1E_1} = a$$

$$\overline{G_1F_1}^2 = \overline{G_1E_1}^2 + \overline{E_1F_1}^2 - 2\,\overline{G_1E_1}\,\overline{E_1F_1}\times\cos\theta$$

$$a^2 = a^2 + \frac{2}{9} - 2\times a\times\frac{\sqrt{2}}{3}\times\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$a^2 = a^2 + \frac{2}{9} - \frac{2a}{3\sqrt{5}}$$

$$\frac{2a}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{9}$$

$$a = \frac{2}{9}\times\frac{3\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\triangle G_1E_1F_1 = \frac{1}{2}\times\overline{G_1E_1}\times\overline{E_1F_1}\times\sin\theta$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{3}\times\frac{3}{\sqrt{10}}$$

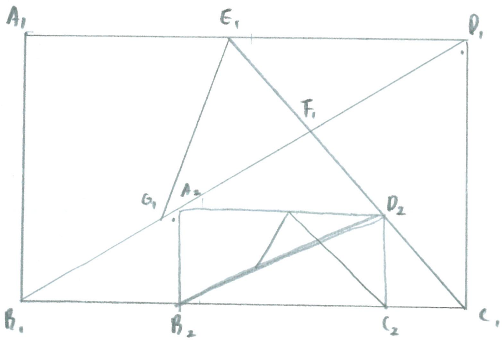
$$= \frac{1}{6}$$

$$\triangle F_1D_1C_1 = \frac{1}{2}\times\overline{D_1F_1}\times\overline{F_1C_1}\times\sin\theta$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{3}\times\frac{2}{3}\sqrt{2}\times\frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$R_1 = \frac{1}{6}+\frac{1}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$



$\overline{A_2B_2} = k \qquad \overline{B_2C_2} = 2k$

$\triangle A_2B_2B_1 \backsim \triangle D_1C_1B_2$ (AA 닮음)

$\overline{A_2B_2} : \overline{B_1B_2} = \overline{D_1C_1} : \overline{B_1C_1} = 1 : 2$

$\overline{B_1B_2} = 2k$

$\angle D_1C_1E_1 = 45^\circ \therefore \angle E_1C_1B_1 = 45^\circ$

$\therefore \overline{D_2C_2} = \overline{C_2C_1} = \overline{A_2B_2} = k$

$\therefore \overline{B_1B_2} + \overline{B_2C_2} + \overline{C_2C_1} = \overline{B_1C_1} = 5k = 2$

$k = \frac{2}{5}$

$k : \overline{A_1B_1} = \frac{2}{5} : 1$

$r = k^2 = \frac{4}{25}$

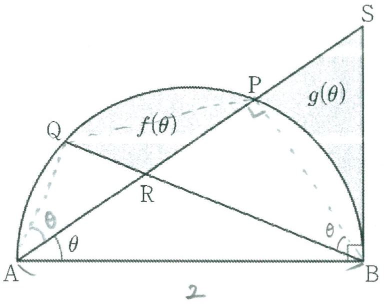
$R_n = \frac{1}{2}\times\left(\frac{4}{25}\right)^{n-1}$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{4}{25}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{21}{25}} = \frac{25}{42}$$

단답형

29. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 P가 있다. 호 AP 위에 점 Q를 호 PB와 호 PQ의 길이가 같도록 잡을 때, 두 선분 AP, BQ가 만나는 점을 R라 하고 점 B를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 직선 AP와 만나는 점을 S라 하자. $\angle BAP=\theta$라 할 때, 두 선분 PR, QR와 호 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$, 두 선분 PS, BS와 호 BP로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)+g(\theta)}{\theta^3}$의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



$\overline{BS}=2\tan\theta$, $\overline{AP}=2\cos\theta$, $\overline{PB}=2\sin\theta$

$\overset{\frown}{QP}=\overset{\frown}{PB}$ 이므로

$\angle QAP = \angle PBQ = \theta$

$\frac{\overline{PB}}{\overline{BR}}=\cos\theta$

$\overline{BR}=\frac{2\sin\theta}{\cos\theta}=2\tan\theta$

$\triangle PBR \equiv \triangle PBS$ (RHA 합동)

⌓QP = ⌓PB

$\therefore f(\theta)+g(\theta)=\triangle QPB$

$\overset{\frown}{QP}=\overset{\frown}{PB}$ 이므로 $\overline{QP}=\overline{PB}=2\sin\theta$

□QABP는 원에 내접하는 사각형이므로

$\angle QPB=\pi-2\theta$

$\therefore \triangle QPB=\frac{1}{2}\times 2\sin\theta\times 2\sin\theta\times\sin(\pi-2\theta)$

$=2\sin^2\theta\times\sin 2\theta$

$\lim_{\theta\to 0+}\frac{2\sin^2\theta\times\sin 2\theta}{\theta^3}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{2\sin 2\theta}{2\theta}\times 2=4$

답: 4

30. 최고차항의 계수가 3보다 크고 실수 전체의 집합에서 최솟값이 양수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=e^x f(x)$$

이다. 양수 k에 대하여 집합 $\{x\,|\,g(x)=k,\ x\text{는 실수}\}$의 모든 원소의 합을 $h(k)$라 할 때, 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $h(k)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $h(k)$가 $k=t$에서 불연속인 t의 개수는 1이다.
(나) $\lim_{k\to 3e+}h(k)-\lim_{k\to 3e-}h(k)=2$

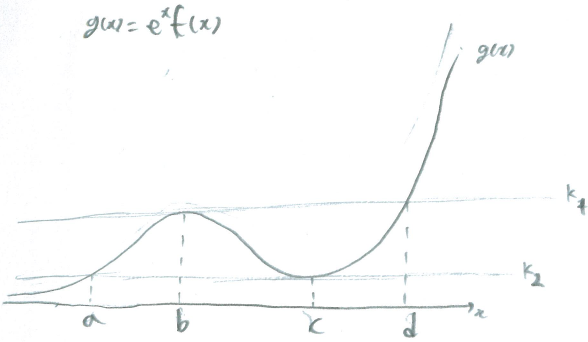
$g(-6)\times g(2)$의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x\to -\infty}x^2e^x=0$) [4점]

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

30.

$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

$g(x) = e^x f(x)$



$k = k_1$ 와 $k = k_2$ 에서 불연속

i) $\lim_{k \to 3e+} h(k) - \lim_{k \to 3e-} h(k) = 2$

$g'(x) = e^x(\alpha x^2 + (2\alpha + \beta)x + \beta + \gamma)$
$= \alpha e^x (x-b)(x-c)$

$\therefore \lim_{k \to 3e+} h(k) \neq \lim_{k \to 3e-} h(k)$

$\therefore$ $k = 3e$ 에서 불연속

i) $k_1 = 3e$, k_2 에서 연속

$\lim_{k \to k_2+} h(k) = \lim_{k \to k_2-} h(k)$

$a + 2c = a$

$2c = 0$

$c = 0$

$\lim_{k \to 3e+} h(k) - \lim_{k \to 3e-} h(k) = 2$

$d - (2b + d) = -2b = 2$

$b = -1$

$g'(x) = \alpha e^x (x+1) \times x$
$= \alpha e^x \times x(x+1) = \alpha e^x (x^2 + x)$

원함수의 최고차항 (미분된 원함수의 최고차항) + (원함수의 두번째고차항)

$g(x) = \alpha e^x (x^2 - x + 1)$

$g(-1) = \frac{\alpha}{e}(1+1+1) = \frac{3}{e}\alpha = 3e$

$\alpha = e^2$

ii) $k_2 = 3e$, k_1 에서 연속

$\lim_{k \to k_1+} h(x) = \lim_{k \to k_1-} h(k)$

$d = 2b + d$

$2b = 0$

$b = 0$

$\lim_{k \to 3e+} h(k) - \lim_{k \to 3e+} h(x) = a + 2c - a = 2c = 2$

$c = 1$

$g'(x) = \alpha e^x x(x-1) = \alpha e^x (x^2 - x)$

$g(x) = \alpha e^x (x^2 + x - 1)$

$g(1) = \alpha e(1+1-1) = \alpha e = 3e$

$\alpha = 3$

$\therefore k_1 = 3e$ ($\because \alpha \neq 3$)

$\alpha = e^2$

$g(x) = e^2 e^x (x^2 - x + 1)$

$g(-6) = e^2 \times e^{-6}(36 + 6 + 1) = 43e^{-4}$

$g(2) = e^4(4 - 2 + 1) = 3e^4$

$g(-6) \times g(2) = 43e^{-4} \times 3e^4 = 43 \times 3 = 129$

답: 129

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 두 벡터 $\vec{a}=(2m-1,\ 3m+1)$, $\vec{b}=(3,\ 12)$가 서로 평행할 때, 실수 m의 값은? [2점] 1

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$2m-1 : 3m+1 = 1:4$

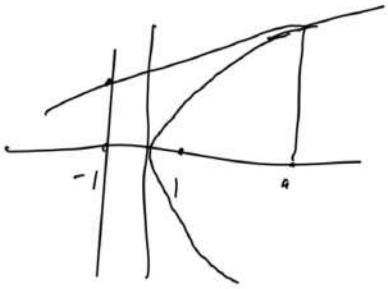
$8m-4 = 3m+1$

$5m=5$

$m=1$

24. 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $(9,\ 6)$에서의 접선과 포물선의 준선이 만나는 점이 $(a,\ b)$일 때, $a+b$의 값은? [3점] 4

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$



접선: $6y = 2(x+9)$

$x=-1$ $6y=14$ $y=\frac{7}{3}$

$a=-1$, $b=\frac{7}{3}$ $\therefore \frac{5}{3}$

25. 좌표평면에서 두 점 A$(-2,\ 0)$, B$(3,\ 3)$에 대하여

$$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-2\overrightarrow{\mathrm{OB}})=0$$

을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형의 길이는? (단, O는 원점이다.) [3점]

5

① 6π ② 7π ③ 8π ④ 9π ⑤ 10π

$\overrightarrow{OP}=(x,y)$

$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=(x+2,y)$

$\overrightarrow{OP}-2\overrightarrow{OB}=(x-6,y-6)$

$(x+2,y)\cdot(x-6,y-6)=0$

$(x+2)(x-6)+y(y-6)=0$

$x^2-4x-12+y^2-6y=0$

$(x-2)^2+(y-3)^2=12+9+4$

$=25$

$=(x-2)^2+(y-3)^2=5^2$

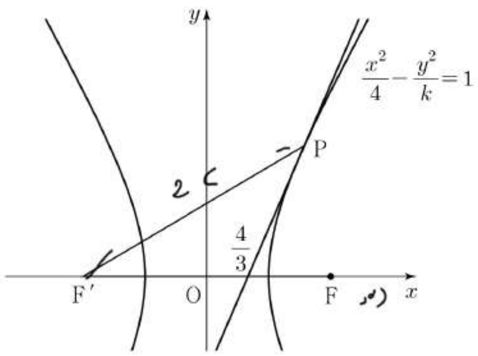
반지름이 5인 원 즉

$2\times5\times\pi$ 10π

26. 두 초점이 F$(c,\ 0)$, F$'(-c,\ 0)$ $(c>0)$인 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{k}=1$ 위의 제1사분면에 있는 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점의 x좌표가 $\dfrac{4}{3}$이다. $\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{FF'}}$일 때, 양수 k의 값은? [3점]

4

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13



$\overline{FF'}=\overline{F'P}=2c$,

$P(x_1,y_1)$ P에서 그은 접선 $\dfrac{x_1x}{4}-\dfrac{y_1y}{k}=1$

x절편이 $(\frac{4}{3},0)$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\frac{4}{3}x_1}{4}-0=1$ $x_1=3$

x_1은 아니 y_1을 거리 비교와 좌표 이용으로 구하자

$(-c,0)\sim(3,y)$

$\sqrt{(3+c)^2+y_1^2}=2c$ $4c^2=y_1^2+c^2+6c+9$

$y_1^2=3c^2-6c-9$ … ①

$4+k=c^2$ $\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{에서 } c^2=a^2+b^2\right)$

$\dfrac{9}{4}-\dfrac{y_1^2}{c^2-4}=1$ $y_1^2=\frac{5}{4}(c^2-4)$ … ②

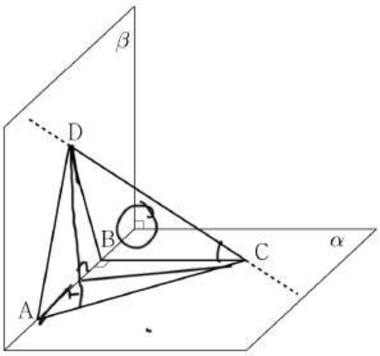
①, ② 연립

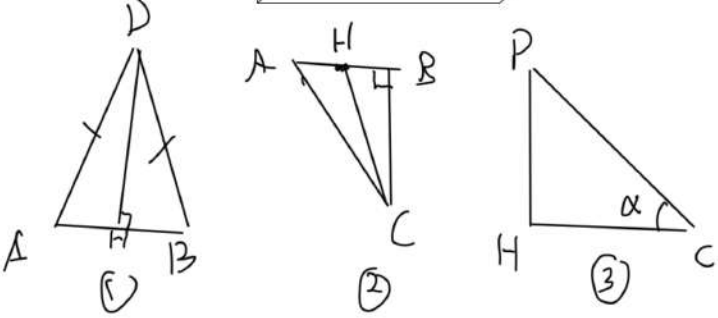
$3c^2-6c-9=\dfrac{5}{4}c^2-5$, $7c^2-24c-16=(7c+4)(c-4)=0$

$c=4 \Rightarrow k=12$ $(c^2-4=k)$

27. 공간에서 수직으로 만나는 두 평면 α, β의 교선 위에 두 점 A, B가 있다. 평면 α 위에 $\overline{AC}=2\sqrt{29}$, $\overline{BC}=6$인 점 C와 평면 β 위에 $\overline{AD}=\overline{BD}=6$인 점 D가 있다. $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$일 때, 직선 CD와 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ라 하자. $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{7}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{29}}{6}$ ④ $\frac{\sqrt{30}}{6}$ ⑤ $\frac{\sqrt{31}}{6}$





② 에서

$\overline{AC}=2\sqrt{29}$, $\overline{BC}=6 \Rightarrow \overline{AB}^2=116-36=80$

$\Rightarrow \overline{AB}=4\sqrt{5}$

① 에서 D에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발 H라고 하면

$2\overline{AH}=\overline{AB}$ $(2\sqrt{5})^2+\overline{DH}^2=36$ $\overline{DH}=4$

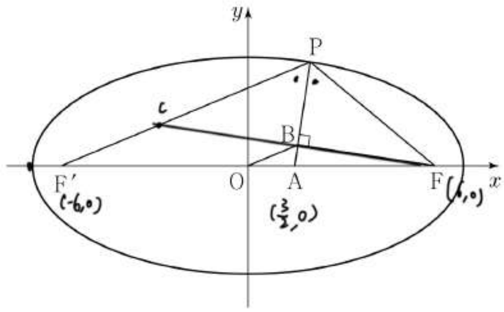
추가로 ②에서 $\overline{CH}^2=(2\sqrt{5})^2+36=56$ $\overline{CH}=2\sqrt{14}$

③에서

$\overline{CD}^2=16+56=72$, $\overline{CD}=6\sqrt{2}$

$\cos\alpha=\frac{\overline{CH}}{\overline{CD}}=\frac{2\sqrt{14}}{6\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{7}}{3}$ ②

28. 그림과 같이 F(6, 0), F′(−6, 0)을 두 초점으로 하는 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이 있다. 점 $A\left(\frac{3}{2}, 0\right)$에 대하여 $\angle FPA=\angle F'PA$를 만족시키는 타원의 제1사분면 위의 점을 P라 할 때, 점 F에서 직선 AP에 내린 수선의 발을 B라 하자. $\overline{OB}=\sqrt{3}$일 때, $a\times b$의 값은? (단, $a>0$, $b>0$이고 O는 원점이다.) [4점]



① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

① $\overline{AF}=6-\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$, $\overline{AF'}=\frac{3}{2}-(-6)=\frac{15}{2}$

$\angle F'PA=\angle FPA$ 즉 $\overline{AP}$는 $\triangle F'FP$에서 $\angle A$의 이등분선

$\overline{F'A}:\overline{FA}=\overline{PF'}:\overline{PF}$ $\frac{15}{2}:\frac{9}{2}=5:3=\overline{PF'}:\overline{PF}$ $\overline{PF}=3k$, $\overline{PF'}=5k$

$\overline{PF'}+\overline{PF}=$ 장축 길이 $=2a=8k$ $a=4k$

② 직선 $\overline{FB}$에서 $\overline{PF'}$와 만나는 점을 C라고 하면

$\triangle CPB$와 $\triangle FPB$는 합동, 즉 FB

삼각형 FBO 와 FCF′ 에서 $\overline{FB}:\overline{FC}=\overline{FO}:\overline{FF'}=1:2$

FBO, FCF′는 닮음 $\Rightarrow \overline{OB}:\overline{F'C}=1:2$

③ $\overline{F'C}=\overline{PF'}-\overline{PC}=\overline{PF'}-\overline{PF}=5k-3k=2k$

$\overline{F'C}=2\overline{OB}=2\sqrt{3}=2k$ $k=\sqrt{3}$

$8k=2a=8\sqrt{3}$ $a=4\sqrt{3}$

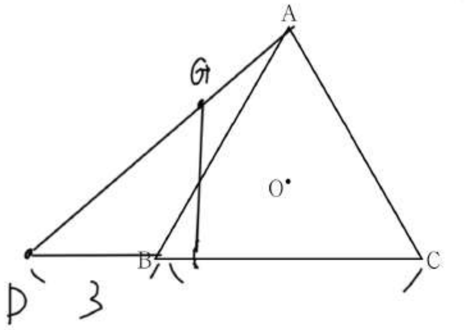
$a^2=b^2+c^2$, $48=b^2+36$ $b^2=12$ $b=2\sqrt{3}$

$a\times b=4\sqrt{3}\times2\sqrt{3}=24$

단답형

29. 평면 위에 한 변의 길이가 6인 정삼각형 ABC의 무게중심 O에 대하여 $\overrightarrow{OD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$를 만족시키는 점을 D라 하자. 선분 CD 위의 점 P에 대하여 $|2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PD}|$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P를 Q라 하자. $|\overrightarrow{OR}|=|\overrightarrow{OA}|$를 만족시키는 점 R에 대하여 $\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QR}$의 최댓값이 $p+q\sqrt{93}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.) [4점]

15

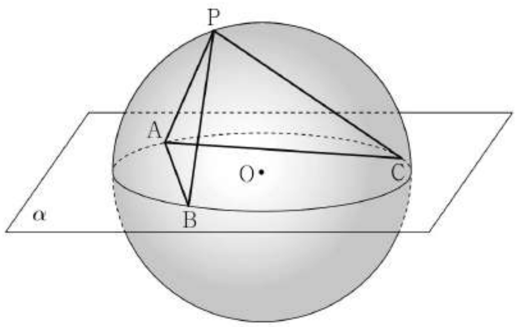


30. 공간에서 중심이 O이고 반지름의 길이가 4인 구와 점 O를 지나는 평면 α가 있다. 평면 α와 구가 만나서 생기는 원 위의 서로 다른 세 점 A, B, C에 대하여 두 직선 OA, BC가 서로 수직일 때, 구 위의 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\angle PAO=\frac{\pi}{3}$
(나) 점 P의 평면 α 위로의 정사영은 선분 OA 위에 있다.

$\cos(\angle PAB)=\frac{\sqrt{10}}{8}$일 때, 삼각형 PAB의 평면 PAC 위로의 정사영의 넓이를 S라 하자. $30\times S^2$의 값을 구하시오. (단, $0<\angle BAC<\frac{\pi}{2}$) [4점]

50



* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

29

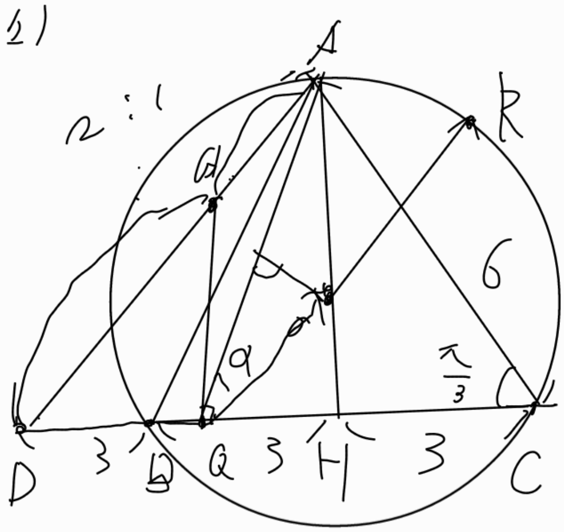
시점같음

① $\overrightarrow{OD}$ 에서 $\dfrac{3\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}}{3-1}$ ⇒ 즉 D는 선분 CB를 3:1로 외분

선분 DA를 2:1로 내분하는 점 G라하면

$|2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PD}|=3|\overrightarrow{PG}|$ ⇒ $|\overrightarrow{PG}|$의 최소 $=|2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PD}|$의 최소

Q는 G에서 내린 수선의 발 (이때 P가 최소)



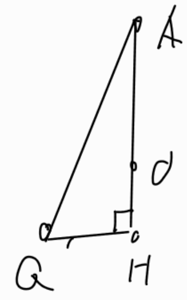
② 점 A에서 BC에 내린 수선의 발 H

$\overline{DB}=\overline{BH}=\overline{CH}=3$

$\overline{DG}:\overline{DA}=\overline{DQ}:\overline{QH}=2:1$

$\overline{DH}=6$, $\overline{QH}=2$

$\overline{AH}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AC}=3\sqrt{3}$ ⇒ $\overline{QA}=\sqrt{27+4}=\sqrt{31}$



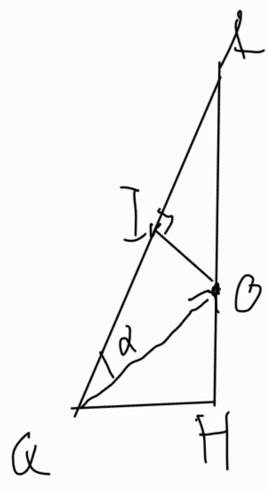
③ O는 △ABC의 무게중심 ⇒ △ABC의 외심

$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{QA}\cdot(\overrightarrow{QO}+\overrightarrow{OR})=(\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QO})+\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{OR})$

3-1 $\overrightarrow{QA}$와 $\overrightarrow{QO}$가 이루는 각을 α라 하면

$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QO}=|\overrightarrow{QA}||\overrightarrow{QO}|\cos\alpha$

점 O에서 선분 QA에 내린수선의 발을 I라 하면



AIO, AHQ 는 닮음 $\overline{AI} : \overline{AH} : \overline{OA} : \overline{QA} = 2\sqrt{3} : \sqrt{31}$

$$\overline{AI} = \frac{2\sqrt{3} \times 3\sqrt{3}}{\sqrt{31}} = \frac{18}{\sqrt{31}}$$

$$\overline{QI} = \overline{QA} - \overline{AI} = \sqrt{31} - \frac{18}{\sqrt{31}} = \frac{13}{\sqrt{13}}$$

$$\vec{QA} \cdot \vec{QO} = \overline{QA} \times \overline{QI} = \frac{13}{\sqrt{31}} \times \sqrt{31} = 13$$

3-2 $\vec{QA}$와 $\vec{OR}$이 이루는 각을 β라 하면

$$\vec{QA} \cdot \vec{OR} = |\vec{QA}|\,|\vec{OR}|\cos\beta = \sqrt{31} \times 2\sqrt{3} \times \cos\beta$$

이때 $\vec{QA}$와 $\vec{OR}$이 방향일치 ⇒ $\vec{QA} \cdot \vec{OR}$의 최대

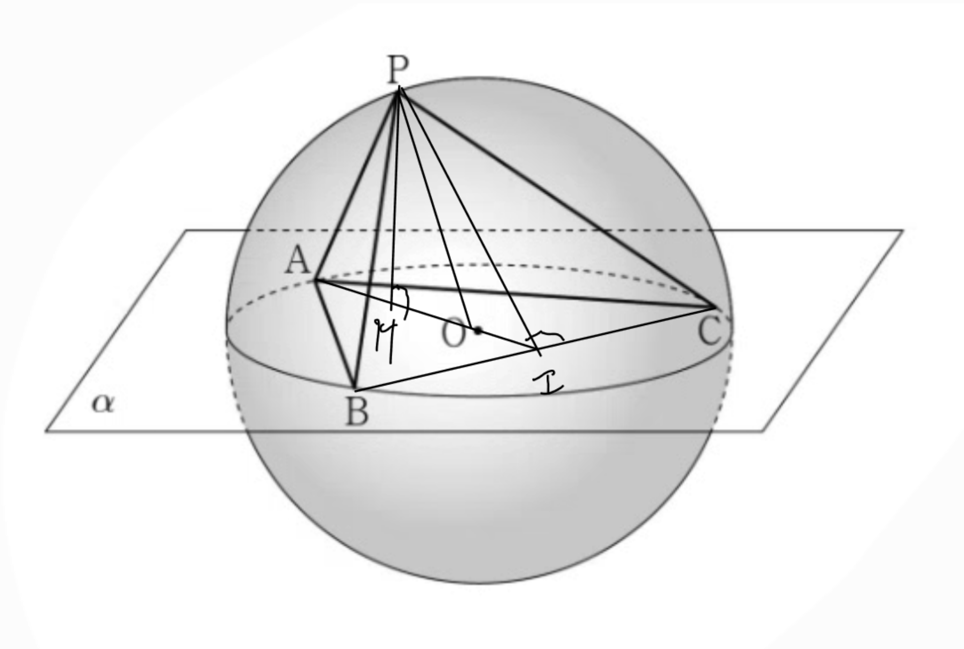
즉 $\beta = 0$ $\sqrt{31} \times 2\sqrt{3}\cos 0 = 2\sqrt{93}$

3-3

$$\vec{QA} \cdot \vec{QR} = 13 + 2\sqrt{93} \qquad p=13,\ q=2$$

15

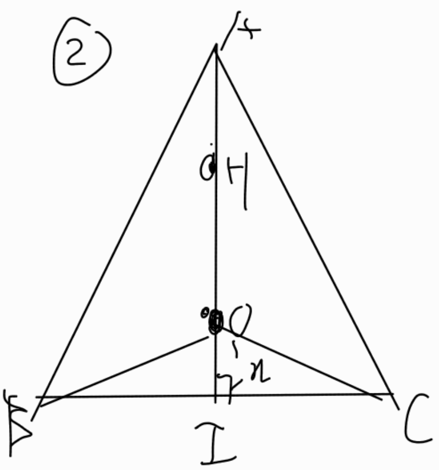
30



① 주어진 조건 ((가), $\overline{OA}=\overline{OP}$) 에 의해 △AOP ⇒ 정삼각형

⇒ $\overline{PA}=4$, $\overline{PH}=2\sqrt{3}$, $\overline{AH}=\overline{OH}=2$

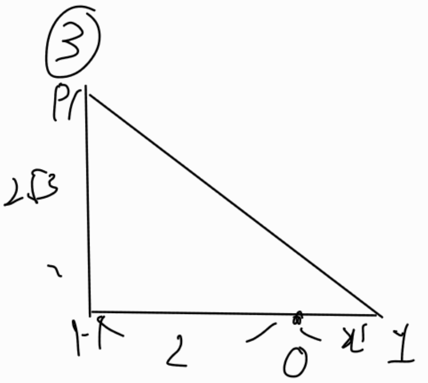
②



$\overline{OI}=x$ 라 하면 $\overline{IB}=\sqrt{16-x^2}$

$\overline{AB}=\sqrt{(x+4)^2+16-x^2}=\sqrt{x^2+8x+16+16-x^2}=\sqrt{8x+32}$

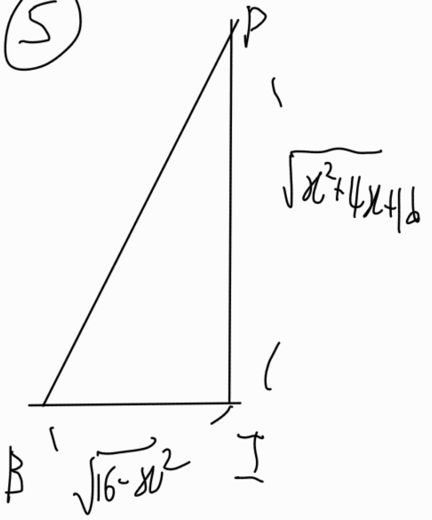
③



$\overline{PI}=\sqrt{12+(2+x)^2}=\sqrt{x^2+4x+16}$

④ $\overline{PH} \perp \alpha$, $\overline{HI} \perp \overline{BC} \Rightarrow \overline{PI} \perp \overline{BC}$ (삼수선)

⑤



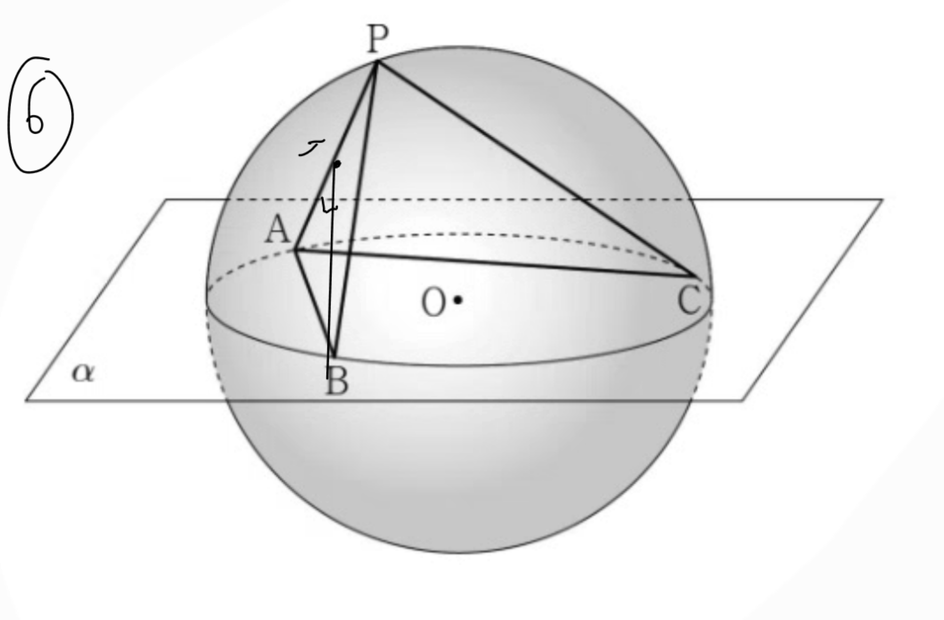
$$\overline{PB} = \sqrt{x^2+4x+16+16-x^2} = \sqrt{4x+32}$$

$$\cos\angle PAB = \frac{\overline{AP}^2 + \overline{AB}^2 - \overline{PB}^2}{2\,\overline{AD} \times \overline{AB}}$$

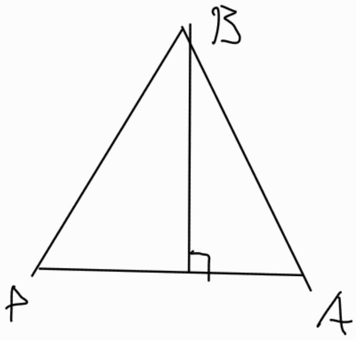
$$= \frac{16 + (8a+32) - (4a+32)}{2 \times 4 \times \sqrt{8a+32}} = \frac{a+4}{4\sqrt{2a+8}}$$

$$\frac{a+4}{4\sqrt{2a+8}} = \frac{\sqrt{10}}{8} \Rightarrow (a+4)^2 = 5(a+4) \quad a=1 \ (a>0)$$

⑥



점 B에서 선분 PA에 내린 수선의 발 J

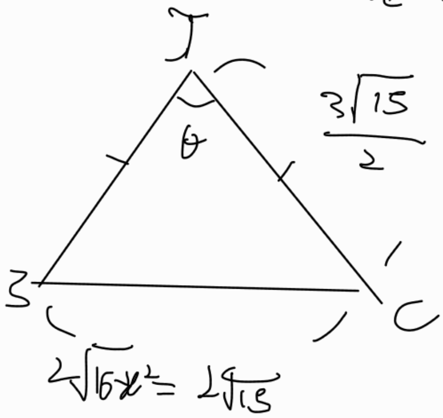


$\sin\angle PAB = \frac{\overline{BJ}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BJ}}{2\sqrt{10}} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{10}}{8}\right)^2} = \frac{3\sqrt{6}}{8} \Rightarrow \overline{BJ} = \frac{3\sqrt{6}}{8}$

$\triangle PAB$의 넓이 $= S' = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{3\sqrt{15}}{2} = 3\sqrt{15}$

ㄱ) $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\overline{PB} = \overline{PC}$, $\overline{BJ} = \overline{CJ}$ $\Rightarrow \triangle PAB$ 와 $\triangle PAC$ 합동 (SSS)

PAB 와 PAC가 이룬 각을 θ라 하면 $\theta = \angle BJC$



$\cos\theta = \frac{\overline{JB}^2 + \overline{JC}^2 - \overline{BC}^2}{2 \times \overline{JB} \times \overline{JC}} = \frac{2 \times \left(\frac{3\sqrt{15}}{2}\right)^2 - 60}{2 \times \left(\frac{3\sqrt{15}}{2}\right)^2} = \frac{1}{9}$

Final $S = S'\cos\theta = 3\sqrt{15} \times \frac{1}{9} = \frac{\sqrt{15}}{3}$

$30 \times S^2 = 30 \times \frac{15}{9} = 50$ $\therefore 50$

확률과 통계

~~1번~~ (23번)

$(4x+1)^6$의 x의 계수

${}_6C_n \times (4x)^n \times 1^{6-n}$

$n=1$ 이므로

${}_6C_1 \times (4x)^1 = 24x$

∴ x의 계수는 24

~~2번~~ (24번)

$X \sim B(n, \frac{1}{3})$, $E(X) = \frac{n}{3}$

$E(3X-1) = 3E(X) - 1$

$= n-1 = 17$

$n=18$

$X \sim B(18, \frac{1}{3})$, $V(X) = 18 \times \frac{1}{3} \times (1-\frac{1}{3})$

$= 4$

25번

전체 경우의 수 : ${}_8C_4 =$

i) 검은 공을 0개 뽑는 경우의 수

$\frac{{}_4C_0 \times {}_4C_4}{{}_8C_4} = \frac{1}{70}$

ii) 검은 공을 1개 뽑는 경우의 수

$\frac{{}_4C_1 \times {}_4C_3}{{}_8C_4} = \frac{16}{70}$

∴ 검은 공이 2개 이상일 확률은

$1 - (\frac{16}{70} + \frac{1}{70}) = \frac{53}{70}$

26번

i) a를 2번 뽑는 경우 , b나 c를 2번 뽑는 경우 고려

$\rightarrow a\ a\ b\ c\ \underset{b \text{ or } c}{\underset{\uparrow}{\_}} \rightarrow \frac{5!}{2! \times 2!} \rightarrow 3 \times \frac{5!}{2! \times 2!} = 90$

ii) a를 3번 뽑는 경우, b나 c를 3번 뽑는 경우 고려.

$\rightarrow a\ a\ a\ b\ c \rightarrow \frac{5!}{3!} \rightarrow 3 \times \frac{5!}{3!} = 60$

∴ $60 + 90 = 150$ (가지)

27번

A 주머니를 뽑을 확률 : $\frac{1}{8}$

A 주머니에서 ~~소수를~~ 둘의 합이 소수인 경우 : $\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ $\rightarrow \frac{1}{8} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{40}$

A주머니에서 둘의 합이 소수일 확률

i) 1을 2번 뽑는 경우

$$\frac{{}_2C_2}{{}_6C_2} = \frac{1}{15}$$

ii) 1과 2를 뽑는 경우

$$\frac{{}_2C_1 \times {}_2C_1}{{}_6C_2} = \frac{4}{15}$$

iii) 2와 3을 뽑는 경우

$$\frac{{}_2C_1 \times {}_2C_1}{{}_6C_2} = \frac{4}{15}$$

B 주머니를 뽑을 확률 : $\frac{7}{8}$

B 주머니에서 둘의 합이 소수인 경우 : $\frac{4}{15}$ $\rightarrow \frac{7}{8} \times \frac{4}{15} = \frac{7}{30}$

B 주머니에서 둘의 합이 소수일 확률

i) 3과 4를 뽑는 경우

$$\frac{{}_2C_1 \times {}_2C_1}{{}_6C_2} = \frac{4}{15}$$

$$\therefore \frac{3}{40} + \frac{7}{30} = \frac{37}{120}$$

20번

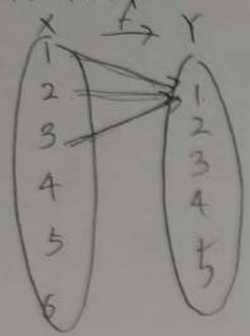
조건(가)

→ $f(1), f(2), f(3)$ 중 하나는 1 or 4, 두 수는 무조건 같아야 한다

~~조건(나)~~

조건 (나)

i) $f(3)=1$



$f(4), f(5), f(6)$은 1~5 중 중복순열

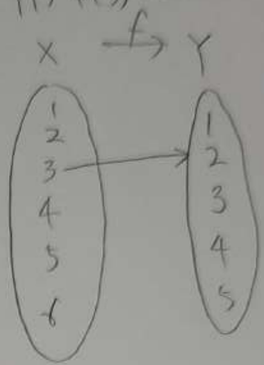
→ ${}_5H_3$

$f(1), f(2), f(3)$은 $(1,1,1)$

→ 1가지

→ ${}_5H_3 \times 1 = 35$

ii) $f(3)=2$



조건(가)에 의하여

$f(1)=1$, $f(2)=2$.

$f(4), f(5), f(6)$은 2~5 중 중복순열

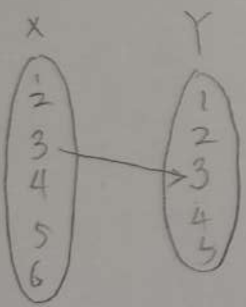
→ ${}_4H_3$

$f(1), f(2), f(3)$은 $(1,2,2)$

→ 1가지

→ ${}_4H_3 \times 1 = 20$.

iii) $f(3)=3$



조건(가)에 의하여

$f(1)=1$, $f(2)=3$

$f(4), f(5), f(6)$은 3~5 중 중복순열

→ ${}_3H_3$

$f(1), f(2), f(3)$은 $(1,3,3)$

→ 1가지

→ ${}_3H_3 \times 1 = 10$

iv) $f(3)=4$.

$f(4), f(5), f(6)$은 4~5 중 중복순열

→ ${}_2H_3$

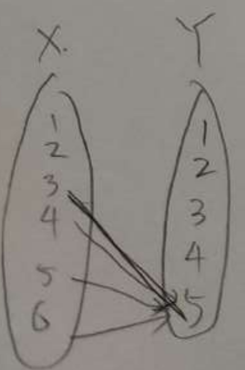
$f(1), f(2), f(3)$은

$(1,1,4)$, $(1,4,4)$, $(2,2,4)$

$(3,3,4)$, $(4,4,4)$ → 5가지

→ ${}_2H_3 \times 5 = 20$

v) $f(3)=5$.



$f(4), f(5), f(6)$은 5 고정.

→ 1가지

$f(1), f(2), f(3)$은

$(1,5,5)$, $(4,5,5)$

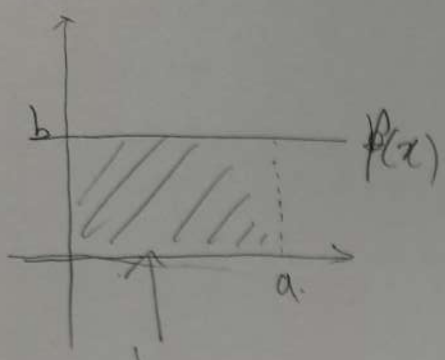
→ 2가지

→ $1 \times 2 = 2$.

∴ 모든 함수의 개수는

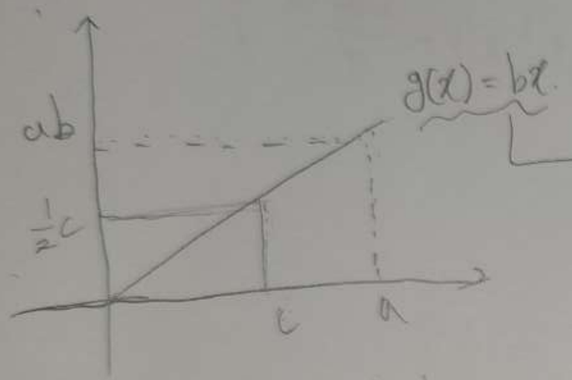
$35+20+10+20+2=87$

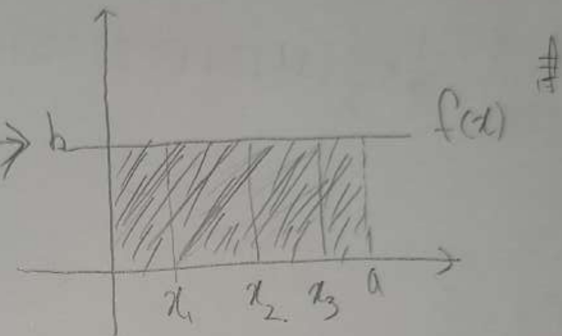
29번



ab.

확률밀도함수 이므로 $ab=1 \cdots\cdots$ ①





$x=1 \cdots \; P(0 \le X \le 1) = b$

$x=2 \cdots \; P(0 \le X \le 2) = 2b$

$x=x_1 \cdots \; P(0 \le X \le x_1) = x_1 b$

$x=x_2 \cdots \; P(0 \le X \le x_2) = x_2 b$

$\therefore \; P(0 \le X \le x) = bx$

확률분포함수 이므로 $a \times ab \times \frac{1}{2} = 1 \cdots$ ②

①, ②를 연립하면 $a=2,\ b=\frac{1}{2}$

$\therefore \; g(x) = \frac{1}{2}x$

$P(0 \le Y \le c) = \frac{1}{2}$ 이므로,

$c \times \frac{1}{2}c \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $c^2 = 2$

$\therefore \; (a+b) \times c^2 = 5$

30번

1이 나올 확률 : $\frac{1}{3}$

2가 나올 확률 : $\frac{2}{3}$

$\underbrace{a_1+a_2+a_3}_{A} > \underbrace{a_4+a_5+a_6}_{B}$

$3 \to 111 \to \frac{1}{27}$

$4 \to 112 \to \frac{6}{27}$

$5 \to 122 \to \frac{12}{27}$

$6 \to 222 \to \frac{8}{27}$

~~경우의 수:~~

~~전체 확률:~~

전체 경우의 수 : $\frac{1}{2}\left(1-(\text{A와 B가 같을 확률})\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1^2+6^2+12^2+8^2}{27^2}\right)$

(A가 더 클 확률)

$a_1=a_4=1$ 일 때,

$2 \to 11 \to \frac{1}{9}$

$3 \to 12 \to \frac{4}{9}$

$4 \to 22 \to \frac{4}{9}$

경우의 수 : $\frac{1}{9}\times\frac{1}{2}\left(1-(\text{A와 B가 같을 확률})\right) = \frac{1}{9}\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1^2+4^2+4^2}{9^2}\right)$

(A가 더 클 확률)

$\therefore$ 확률은 $\dfrac{\frac{1}{9}\times\frac{1}{2}\left(1-\frac{1^2+4^2+4^2}{9^2}\right)}{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1^2+6^2+12^2+8^2}{27^2}\right)} = \frac{12}{121}$, $p+q=133$