- Seules les calculatrices sont autorisées.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 : **4 points.**

La densité de probabilité d'une v.a. X est donnée par

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda x(x+1) & \text{si} \quad x \in [0,2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer λ pour que f_X soit bien une densité de probabilité (dans toute la suite λ sera supposé égal à cette valeur).
2. Calculer la fonction de répartition de X.
3. Calculer $\mathbb{P}(X < 2)$, $\mathbb{P}(X \geq -1)$ et $\mathbb{P}(-1 \leq X < 1)$.
4. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 2 : **6 points.**

Soit X une variable aléatoire de densité f_X avec

$$f_X = \begin{cases} 1+t & \text{si} \quad t \in [-1,0] \\ \alpha & \text{si} \quad t \in [0,2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{1}$$

- Déterminer α pour que f_X soit bien une densité.
- Calculer et représenter la fonction de répartition de X
- Calculer $\mathbb{P}(X > 1/2)$.
- Calculer $\mathbb{E}(X)$.
- Calculer la fonction de répartition F_Y de la variable aléatoire $Y = X^2$.
- En déduire sa densité f_Y.

Exercice 3 : **4 points.**

Soit X une v.a. qui suit une loi de densité f_X donnée par

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \in]-\infty, 1[\\ \dfrac{\alpha}{t} & \text{si} \quad t \in [1, 2[\\ 0 & \text{si} \quad t \in [2, +\infty[\end{cases}$$

1. Déterminer α pour que f_X soit une densité de probabilité (dans toute la suite α sera supposé égal à cette valeur).
2. Calculer la fonction de répartition de X.
3. Calculer $\mathbb{P}(X < 2)$, $\mathbb{P}(X \geq -1)$ et $\mathbb{P}(-1 \leq X < 1)$.
4. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

<u>Exercice 4</u> : **6 points.**

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et f la fonction définie par :

$$\begin{cases} \alpha x^2 & \text{si } x \in [0,1] \\ \beta & \text{si } x \in [2,3] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

1. Sachant que f est la densité de probabilités d'une variable aléatoire X, donner les conditions vérifiées par α et β.
2. Donner **l'allure** de la courbe représentative de f.
3. On sait de plus que
$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{5}{2}\right) = \frac{5}{8}$$
déterminer alors α et β (on utilisera bien-sûr les résultats de la première question).
4. Calculer $\mathbb{E}(X)$ (vous pouvez la calculer en fonction de α et β si vous n'avez pas réussi les premières questions).
5. Calculer la fonction de répartition F_X de X.
6. Soit $\gamma \in]-\infty, \frac{1}{3}]$, résoudre dans $\mathbb{R}$ (en fonction de γ) l'équation
$$\mathbb{P}(X \leq t) = \gamma$$