Wnioskowanie Boolowskie w obliczaniu reduktów i reguł decyzyjnych

2 czerwca 2011

Outline

Algebra Boola

Jest to struktura algebraiczna

$$\mathcal{B} = (B, +, \cdot, 0, 1)$$

spełniająca następujące aksjomaty

- **Przemienność:**

$(a + b) = (b + a)$ oraz $(a \cdot b) = (b \cdot a)$

- **Rozdzielność:**

$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c),$ oraz

$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$

- **Elementy neutralne:**

$a + 0 = a$ oraz $a \cdot 1 = a$

- **Istnienie elementu komplementarnego:**

$a + \overline{a} = 1$ and $a \cdot \overline{a} = 0$

*) Czasem negacja jest dodana do sygnatury algebry Boola.

Przykłady Algebry Boola

1. Algebra zbiorów: $\mathbb{P}(X) = (2^X, \cup, \cap, -, \emptyset, X)$;

Przykłady Algebry Boola

1. Algebra zbiorów: $\mathbb{P}(X) = (2^X, \cup, \cap, -, \emptyset, X)$;
2. Rachunek zdań

$$(\{zdania\ logiczne\}, \vee, \wedge, \neg, \bot, \top)$$

Przykłady Algebry Boola

1. Algebra zbiorów: $\mathbb{P}(X) = (2^X, \cup, \cap, -, \emptyset, X)$;
2. Rachunek zdań

$$(\{zdania\ logiczne\}, \vee, \wedge, \neg, \bot, \top)$$

3. Binarna algebra Boola $\mathcal{B}_2 = (\{0,1\}, +, \cdot, 0, 1)$ to jest najmniejsza, ale najważniejsza algebra Boola w zastosowaniu.

x	y	$x+y$	$x \cdot y$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

x	$\neg x$
0	1
1	0

Przykłady zastosowań:

- projektowanie układów scalonych;
- rachunek zdań.

Łączność (ang. Associative law):

$$(x+y)+z = x+(y+z) \text{ oraz } (x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$$

Idempotence: $x + x = x \quad oraz \quad x\cdot x = x(dual)$

Działania z 0 i 1: $x+1=1 \quad oraz \quad x\cdot 0 = 0(dual)$

Pochłanienie (ang. Absorption laws):

$$(y\cdot x)+x = x \quad oraz \quad (y+x)\cdot x = x(dual)$$

Inwolocja (ang. Involution laws): $\overline{(\overline{x})} = x$

Prawa DeMorgana (ang. DeMorgan's laws):

$$\neg(x+y) = \neg x\cdot\neg y \quad oraz \quad \neg(x\cdot y) = \neg x + \neg y(dual)$$

Prawa konsensusu (ang. Consensus laws):

$$(x+y)\cdot(\overline{x}+z)\cdot(y+z) = (x+y)\cdot(\overline{x}+z) \text{ oraz}$$
$$(x\cdot y)+(\overline{x}\cdot z)+(y\cdot z) = (x\cdot b)+(\overline{x}\cdot z)$$

Zasada dualności: Każda algebraiczna równość pozostaje prawdziwa jeśli zamieniamy operatory $+$ na $\cdot$, $\cdot$ na $+$, 0 na 1 oraz 1 na 0.

- Każde odwzorowanie $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ nazywamy **(zupełną) funkcją Boolowską**.

Funkcje Boolowskie

- Każde odwzorowanie $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ nazywamy **(zupełną) funkcją Boolowską**.
- Funkcje Boolowskie $\equiv$ **formuły Boolowskie**:
  - Stałe, zmienne, operatory $\bar{}$, $+$ oraz $\cdot$.
  - Literały, mintermy (jednomiany), maxtermy, ...
  - Kanoniczna postać dyzjunkcyjna (DNF), np. $f = xy\bar{z} + x\bar{y}z + \bar{x}yz + xyz$;
  - Kanoniczna postać koniunkcyjna (CNF), np. $f = (x + y + z)(\bar{x} + y)$

- Każde odwzorowanie $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ nazywamy **(zupełną) funkcją Boolowską**.
- Funkcje Boolowskie $\equiv$ **formuły Boolowskie**:
  - Stałe, zmienne, operatory $\bar{}$, $+$ oraz $\cdot$.
  - Literały, mintermy (jednomiany), maxtermy, ...
  - Kanoniczna postać dyzjunkcyjna (DNF), np. $f = xy\bar{z} + x\bar{y}z + \bar{x}yz + xyz$;
  - Kanoniczna postać koniunkcyjna (CNF), np. $f = (x + y + z)(\bar{x} + y)$
- Term $t = x_{i_1}...x_{i_m}\overline{x_{j_1}}...\overline{x_{j_k}}$ nazywamy **implikantem** funkcji f jeśli

$$\boxed{\forall_{\mathbf{a}\in\{0,1\}^n} \quad t(\mathbf{a}) = 1 \Rightarrow f(\mathbf{a}) = 1}$$

Funkcje Boolowskie

- Każde odwzorowanie $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ nazywamy **(zupełną) funkcją Boolowską**.
- Funkcje Boolowskie $\equiv$ **formuły Boolowskie**:
  - Stałe, zmienne, operatory -, $+$ oraz .
  - Literały, mintermy (jednomiany), maxtermy, ...
  - Kanoniczna postać dyzjunkcyjna (DNF), np. $f = xy\bar{z} + x\bar{y}z + \bar{x}yz + xyz$;
  - Kanoniczna postać koniunkcyjna (CNF), np. $f = (x+y+z)(\bar{x}+y)$
- Term $t = x_{i_1}...x_{i_m}\overline{x_{j_1}}...\overline{x_{j_k}}$ nazywamy **implikantem** funkcji f jeśli

$$\boxed{\forall_{\mathbf{a}\in\{0,1\}^n} \quad t(\mathbf{a}) = 1 \Rightarrow f(\mathbf{a}) = 1}$$

- **Implikant pierwszy:** jest to implikant, który przestaje nim być po usunięciu dowolnego literału.

- Każde odwzorowanie $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ nazywamy **(zupełną) funkcją Boolowską**.
- Funkcje Boolowskie $\equiv$ **formuły Boolowskie**:
  - Stałe, zmienne, operatory $\neg$, $+$ oraz $\cdot$.
  - Literały, mintermy (jednomiany), maxtermy, ...
  - Kanoniczna postać dyzjunkcyjna (DNF), np. $f = xy\overline{z} + x\overline{y}z + \overline{x}yz + xyz$;
  - Kanoniczna postać koniunkcyjna (CNF), np. $f = (x + y + z)(\overline{x} + y)$
- Term $t = x_{i_1}...x_{i_m}\overline{x_{j_1}}...\overline{x_{j_k}}$ nazywamy **implikantem** funkcji f jeśli

$$\boxed{\forall_{\mathbf{a}\in\{0,1\}^n} \quad t(\mathbf{a}) = 1 \Rightarrow f(\mathbf{a}) = 1}$$

- **Implikant pierwszy:** jest to implikant, który przestaje nim być po usunięciu dowolnego literału.
- **Kanoniczna postać Blake'a**: każdą funkcję Boolowską można przedstawić jako sumę wszystkich jej imlikantów pierwszych:

$$f = t_1 + t_2 + ... + t_k$$

Przykład

Wiele formuł reprezentuje tę samą funkcję;

$\phi_1 = xy\bar{z} + x\bar{y}z + \bar{x}yz + xyz$

$\phi_2 = (x + y + z)(\bar{x} + y + z)(x + \bar{y} + z)(x + y + \bar{z})$

$\phi_3 = xy + xz + yz$

- $xy\bar{z}$ jest implikantem
- xy jest implikantem pierwszym

x	y	z	f
0	0	0	0
1	0	0	0
0	1	0	0
1	1	0	1
0	0	1	0
1	0	1	1
0	1	1	1
1	1	1	1

- Niech $\prec$ oznacza relację częściowego porządku w $\{0, 1\}^n$

Funkcje monotoniczne

- Niech $\prec$ oznacza relację częściowego porządku w $\{0,1\}^n$
- Funkcja f jest monotoniczna (niemalejąca) wtw, gdy dla każdych $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \{0,1\}^n$ jeśli $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$ to $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{y})$

Funkcje monotoniczne

- Niech $\prec$ oznacza relację częściowego porządku w $\{0,1\}^n$
- Funkcja f jest monotoniczna (niemalejąca) wtw, gdy dla każdych $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \{0,1\}^n$ jeśli $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$ to $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{y})$
- monotoniczne funkcje Boolowskie można zapisać bez użycia negacji.

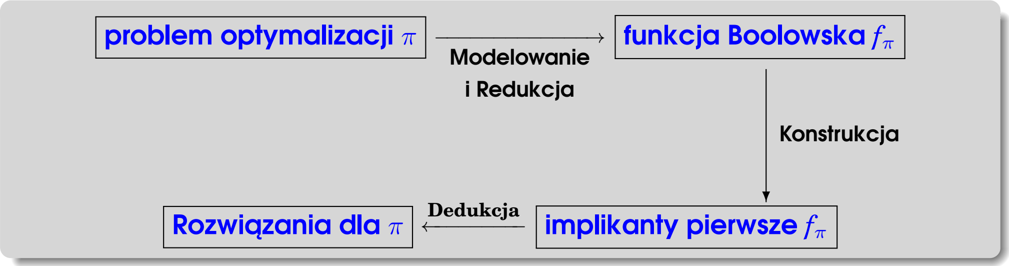
Funkcje monotoniczne

- Niech $\prec$ oznacza relację częściowego porządku w $\{0,1\}^n$
- Funkcja f jest monotoniczna (niemalejąca) wtw, gdy dla każdych $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \{0,1\}^n$ jeśli $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$ to $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{y})$
- monotoniczne funkcje Boolowskie można zapisać bez użycia negacji.
- term $\boxed{f' = x_{i_1} \cdot x_{i_2} \ldots \cdot x_{i_k}}$ nazywamy implikantem pierwszym funkcji monotonicznej f jeśli
  - $f'(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{x})$ dla każdego wektora $\mathbf{x}$ (jest implikantem)
  - każda funkcja większa od f' nie jest implikantem

Funkcje monotoniczne

- Niech $\prec$ oznacza relację częściowego porządku w $\{0, 1\}^n$
- Funkcja f jest monotoniczna (niemalejąca) wtw, gdy dla każdych $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \{0, 1\}^n$ jeśli $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$ to $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{y})$
- monotoniczne funkcje Boolowskie można zapisać bez użycia negacji.
- term $\boxed{f' = x_{i_1} \cdot x_{i_2} \ldots \cdot x_{i_k}}$ nazywamy implikantem pierwszym funkcji monotonicznej f jeśli
  - $f'(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{x})$ dla każdego wektora $\mathbf{x}$ (jest implikantem)
  - każda funkcja większa od f' nie jest implikantem
- Np. funkcja
$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)(x_2 + x3)$$
posiada 2 implikanty pierwsze: $f_1 = x_2$ i $f_2 = x_1 \wedge x_3$

Wnioskowanie Boolowskie



1. **Modelowanie:** Kodowanie problemu za pomocą układu równań Boolowskich;
2. **Redukcja:** Sprowadzenie układu równań do pojedynczego równania postaci $f = 0$ lub $f = 1$
3. **Konstrukcja:** Znalezienie wszystkich implikantów pierwszych funkcji f (konstrukcja kanonicznej postaci Blake'a);
4. **Dedukcja:** Zastosowanie pewnej sekwencji wnioskowań transformujących implikanty pierwsze do rozwiązań problemu.

Problem:

A, B, C, D are considering going to a party. Social constrains:

- If A goes than B won't go and C will;
- If B and D go, then either A or C (but not both) will go
- If C goes and B does not, then D will go but A will not.

Problem:

A, B, C, D are considering going to a party. Social constrains:

- If A goes than B won't go and C will;
- If B and D go, then either A or C (but not both) will go
- If C goes and B does not, then D will go but A will not.

Problem modeling:

$$
\begin{aligned}
A \to \overline{B} \wedge C \leadsto A(B+\overline{C}) &= 0 \\
\ldots \leadsto BD(AC+\overline{AC}) &= 0 \\
\ldots \leadsto \overline{B}C(A+\overline{D}) &= 0
\end{aligned}
$$

Problem:

A, B, C, D are considering going to a party. Social constrains:

- If A goes than B won't go and C will;
- If B and D go, then either A or C (but not both) will go
- If C goes and B does not, then D will go but A will not.

Problem modeling:

$$
\begin{aligned}
A \to \overline{B} \wedge C \leadsto A(B + \overline{C}) &= 0 \\
\ldots \leadsto BD(AC + \overline{AC}) &= 0 \\
\ldots \leadsto \overline{B}C(A + \overline{D}) &= 0
\end{aligned}
$$

- **After reduction:**
  $f = A(B + \overline{C}) + BD(AC + \overline{AC}) + \overline{B}C(A + \overline{D}) = 0$

Problem:

A, B, C, D are considering going to a party. Social constrains:

- If A goes than B won't go and C will;
- If B and D go, then either A or C (but not both) will go
- If C goes and B does not, then D will go but A will not.

Problem modeling:

$$\begin{aligned} A \rightarrow \overline{B} \wedge C \leadsto A(B+\overline{C}) &= 0 \\ \ldots \leadsto BD(AC+\overline{AC}) &= 0 \\ \ldots \leadsto \overline{B}C(A+\overline{D}) &= 0 \end{aligned}$$

- **After reduction:** $f = A(B+\overline{C}) + BD(AC+\overline{AC}) + \overline{B}C(A+\overline{D}) = 0$
- **Blake Canonical form:** $f = B\overline{C}D + \overline{B}C\overline{D} + A = 0$

Boolean Reasoning – Example

Problem:

A, B, C, D are considering going to a party. Social constrains:

- If A goes than B won't go and C will;
- If B and D go, then either A or C (but not both) will go
- If C goes and B does not, then D will go but A will not.

Problem modeling:

$$A \rightarrow \overline{B} \wedge C \leadsto A(B + \overline{C}) = 0$$
$$\ldots \leadsto BD(AC + \overline{A}\overline{C}) = 0$$
$$\ldots \leadsto \overline{B}C(A + \overline{D}) = 0$$

- **After reduction:** $f = A(B + \overline{C}) + BD(AC + \overline{A}\overline{C}) + \overline{B}C(A + \overline{D}) = 0$
- **Blake Canonical form:** $f = B\overline{C}D + \overline{B}C\overline{D} + A = 0$
- **Facts:**

$$BD \longrightarrow C$$
$$C \longrightarrow B \vee D$$
$$A \longrightarrow 0$$

Problem:

A, B, C, D are considering going to a party. Social constrains:

- If A goes than B won't go and C will;
- If B and D go, then either A or C (but not both) will go
- If C goes and B does not, then D will go but A will not.

Problem modeling:

$$\begin{aligned} A \to \overline{B} \wedge C \rightsquigarrow A(B+\overline{C}) &= 0 \\ \ldots \rightsquigarrow BD(AC+\overline{AC}) &= 0 \\ \ldots \rightsquigarrow \overline{B}C(A+\overline{D}) &= 0 \end{aligned}$$

- **After reduction:** $f = A(B+\overline{C}) + BD(AC+\overline{AC}) + \overline{B}C(A+\overline{D}) = 0$
- **Blake Canonical form:** $f = B\overline{C}D + \overline{B}C\overline{D} + A = 0$
- **Facts:**

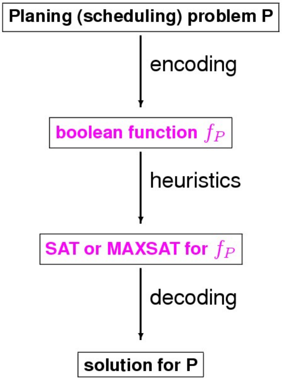
$$\begin{aligned} BD &\longrightarrow C \\ C &\longrightarrow B \vee D \\ A &\longrightarrow 0 \end{aligned}$$

- **Reasoning:** (theorem proving)
  e.g., show that
  "nobody can go alone."

- **Problem SAT**: czy równanie
  $$f(x_1, ..., x_n) = 1$$
  posiada rozwiązanie?

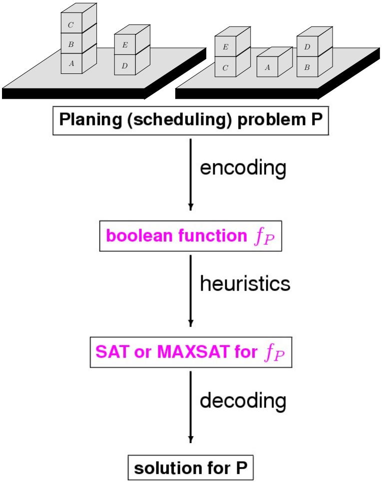
- **Problem SAT**: czy równanie
  $$f(x_1, ..., x_n) = 1$$
  posiada rozwiązanie?
- SAT odgrywa ważną rolę w teorii złożoności (twierdzenie Cooka, dowodzenie NP-zupełności ...)

- **Problem SAT**: czy równanie
  $$f(x_1, ..., x_n) = 1$$
  posiada rozwiązanie?
- SAT odgrywa ważną rolę w teorii złożoności (twierdzenie Cooka, dowodzenie NP-zupełności ...)
- Każdy SAT-solver może być używany do rozwiązywania problemu planowania.

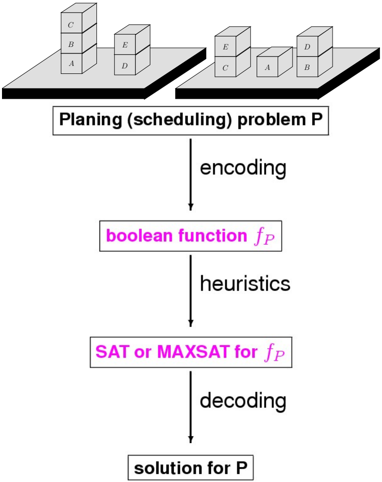


Metoda BR w Sztucznej Inteligencji

- **Problem SAT**: czy równanie
  $$f(x_1, \ldots, x_n) = 1$$
  posiada rozwiązanie?
- SAT odgrywa ważną rolę w teorii złożoności (twierdzenie Cooka, dowodzenie NP-zupełności ...)
- Każdy SAT-solver może być używany do rozwiązywania problemu planowania.
- *Blocks world problem*: Po redukcji formuła boolowska nadal zawiera $O(tk^2)$ zmiennych i $O(tk^3)$ klauzuli (k, t - liczby bloków i kroków).



- **Problem SAT**: czy równanie
  $$f(x_1, ..., x_n) = 1$$
  posiada rozwiązanie?
- SAT odgrywa ważną rolę w teorii złożoności (twierdzenie Cooka, dowodzenie NP-zupełności ...)
- Każdy SAT-solver może być używany do rozwiązywania problemu planowania.
- *Blocks world problem*: Po redukcji formuła boolowska nadal zawiera $O(tk^2)$ zmiennych i $O(tk^3)$ klauzuli (k, t - liczby bloków i kroków).
- Np. Dla $k = 15, t = 14$, mamy 3016 zmiennych i 50457 klausuli



Outline

Wnioskowanie Boolowskie

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\text{problem optymalizacji } \pi} \arrow[r, "\text{Modelowanie i Redukcja}"'] & \boxed{\text{funkcja Boolowska } f_\pi} \arrow[d, "\text{Konstrukcja}"] \\
\boxed{\text{Rozwiązania dla } \pi} & \boxed{\text{implikanty pierwsze } f_\pi} \arrow[l, "\text{Dedukcja}"']
\end{tikzcd}
$$

1. **Modelowanie:** Kodowanie problemu za pomocą układu równań Boolowskich;
2. **Redukcja:** Sprowadzenie układu równań do pojedynczego równania postaci $f = 0$ lub $f = 1$
3. **Konstrukcja:** Znalezienie wszystkich implikantów pierwszych funkcji f (konstrukcja kanonicznej postaci Blake'a);
4. **Dedukcja:** Zastosowanie pewnej sekwencji wnioskowań transformujących implikanty pierwsze do rozwiązań problemu.

Szukanie reduktów: szkic metody

1. Konstrukcja funkcji odróżnialności:
   - Zmienne boolowskie: atrybuty $a_1, ..., a_k$;
   - Klauzula:

$$\phi_{u,v} = \bigvee \{a \in A : a(u) \neq a(v)\}$$

   - Funkcja rozróżnialności:

$$\mathcal{F}_{\mathbb{S}}(a_1, ..., a_k) = \bigwedge_{x,y \in U : dec(x) \neq dec(y)} \phi_{x,y}(a_1, ..., a_k)$$

Szukanie reduktów: szkic metody

1. Konstrukcja funkcji odróżnialności:
   - Zmienne boolowskie: atrybuty $a_1, ..., a_k$;
   - Klauzula:
   $$\phi_{u,v} = \bigvee \{a \in A : a(u) \neq a(v)\}$$
   - Funkcja rozróżnialności:
   $$\mathcal{F}_{\mathbb{S}}(a_1, ..., a_k) = \bigwedge_{x,y \in U : dec(x) \neq dec(y)} \phi_{x,y}(a_1, ..., a_k)$$
2. przekształcenie funkcji rozróżnialności do postaci DNF

Szukanie reduktów: szkic metody

1. Konstrukcja funkcji odróżnialności:
   - Zmienne boolowskie: atrybuty $a_1, ..., a_k$;
   - Klauzula:
     $$\phi_{u,v} = \bigvee \{a \in A : a(u) \neq a(v)\}$$
   - Funkcja rozróżnialności:
     $$\mathcal{F}_{\mathbb{S}}(a_1, ..., a_k) = \bigwedge_{x,y \in U : dec(x) \neq dec(y)} \phi_{x,y}(a_1, ..., a_k)$$
2. przekształcenie funkcji rozróżnialności do postaci DNF
3. każdy implikant pierwszy odpowiada jednemu reduktowi;

Przykład tablicy decyzyjnej

Hurt.	Jakość obsługi	Jakość towaru	Obok autostrady?	Centrum?	decyzja
ID	a_1	a_2	a_3	a_4	dec
1	dobra	dobra	nie	nie	strata
2	dobra	dobra	nie	tak	strata
3	bdb	dobra	nie	nie	zysk
4	slaba	super	nie	nie	zysk
5	slaba	niska	tak	nie	zysk
6	slaba	niska	tak	tak	strata
7	bdb	niska	tak	tak	zysk
8	dobra	super	nie	nie	strata
9	dobra	niska	tak	nie	zysk
10	slaba	super	tak	nie	zysk
11	dobra	super	tak	tak	zysk
12	bdb	super	nie	tak	zysk
13	bdb	dobra	tak	nie	?
14	slaba	super	nie	tak	?

$\mathbb{M}$	1	2	6	8
3	a_1	a_1, a_4	a_1, a_2, a_3, a_4	a_1, a_2
4	a_1, a_2	a_1, a_2, a_4	a_2, a_3, a_4	a_1
5	a_1, a_2, a_3	a_1, a_2, a_3, a_4	a_4	a_1, a_2, a_3
7	a_1, a_2, a_3, a_4	a_1, a_2, a_3	a_1	a_1, a_2, a_3, a_4
9	a_2, a_3	a_2, a_3, a_4	a_1, a_4	a_2, a_3
10	a_1, a_2, a_3	a_1, a_2, a_3, a_4	a_2, a_4	a_1, a_3
11	a_2, a_3, a_4	a_2, a_3	a_1, a_2	a_3, a_4
12	a_1, a_2, a_4	a_1, a_2	a_1, a_2, a_3	a_1, a_4

$$\begin{aligned} f \quad = \quad & (\alpha_1)(\alpha_1 \vee \alpha_4)(\alpha_1 \vee \alpha_2)(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_3 \vee \alpha_4)(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_4) \\ & (\alpha_2 \vee \alpha_3 \vee \alpha_4)(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_3)(\alpha_4)(\alpha_2 \vee \alpha_3)(\alpha_2 \vee \alpha_4) \\ & (\alpha_1 \vee \alpha_3)(\alpha_3 \vee \alpha_4)(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_4) \end{aligned}$$

Szukanie reduktów

$$
\begin{aligned}
f \quad = \quad & (\alpha_1)(\alpha_1 \vee \alpha_4)(\alpha_1 \vee \alpha_2)(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_3 \vee \alpha_4)(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_4) \\
& (\alpha_2 \vee \alpha_3 \vee \alpha_4)(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_3)(\alpha_4)(\alpha_2 \vee \alpha_3)(\alpha_2 \vee \alpha_4) \\
& (\alpha_1 \vee \alpha_3)(\alpha_3 \vee \alpha_4)(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_4)
\end{aligned}
$$

- usuwanie alternatyw regułą *pochłaniania* (t.j. $p \wedge (p \vee q) \equiv p$):

$$
f \quad = \quad (\alpha_1)(\alpha_4)(\alpha_2 \vee \alpha_3)
$$

$$
\begin{aligned}
f \quad = \quad & (\alpha_1)(\alpha_1 \vee \alpha_4)(\alpha_1 \vee \alpha_2)(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_3 \vee \alpha_4)(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_4) \\
& (\alpha_2 \vee \alpha_3 \vee \alpha_4)(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_3)(\alpha_4)(\alpha_2 \vee \alpha_3)(\alpha_2 \vee \alpha_4) \\
& (\alpha_1 \vee \alpha_3)(\alpha_3 \vee \alpha_4)(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_4)
\end{aligned}
$$

- usuwanie alternatyw regułą *pochłaniania* (t.j. $p \wedge (p \vee q) \equiv p$):

$$f \quad = \quad (\alpha_1)(\alpha_4)(\alpha_2 \vee \alpha_3)$$

- sprowadzanie funkcji f z postaci CNF (koniunkcja alternatyw) do postaci DNF (alternatywa koniunkcji)

$$f \quad = \quad \alpha_1\alpha_4\alpha_2 \vee \alpha_1\alpha_4\alpha_3$$

Szukanie reduktów

$$
\begin{aligned}
f \quad = \quad & (\alpha_1)(\alpha_1 \vee \alpha_4)(\alpha_1 \vee \alpha_2)(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_3 \vee \alpha_4)(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_4) \\
& (\alpha_2 \vee \alpha_3 \vee \alpha_4)(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_3)(\alpha_4)(\alpha_2 \vee \alpha_3)(\alpha_2 \vee \alpha_4) \\
& (\alpha_1 \vee \alpha_3)(\alpha_3 \vee \alpha_4)(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_4)
\end{aligned}
$$

- usuwanie alternatyw regułą *pochłaniania* (t.j. $p \wedge (p \vee q) \equiv p$):

$$f \quad = \quad (\alpha_1)(\alpha_4)(\alpha_2 \vee \alpha_3)$$

- sprowadzanie funkcji f z postaci CNF (koniunkcja alternatyw) do postaci DNF (alternatywa koniunkcji)

$$f \quad = \quad \alpha_1\alpha_4\alpha_2 \vee \alpha_1\alpha_4\alpha_3$$

- Każdy składnik jest reduktem! Zatem mamy 2 redukty: $R_1 = \{A_1, A_2, A_4\}$ i $R_2 = \{A_1, A_3, A_4\}$

Heurystyka Johnsona: algorytm zachłanny

- Atrybut jest ważniejszy jeśli częściej występuje w klauzulach;

Heurystyka Johnsona: algorytm zachłanny

- Atrybut jest ważniejszy jeśli częściej występuje w klauzulach;
- **Selekcja:** W każdym kroku wybierzmy atrybut, który najczęściej występuje w funkcji rozróżnialności;

- Atrybut jest ważniejszy jeśli częściej występuje w klauzulach;
- **Selekcja:** W każdym kroku wybierzmy atrybut, który najczęściej występuje w funkcji rozróżnialności;
- **Usuwanie:** Usuwamy z tej funkcji te klauzule, które zawierają wybrany atrybut;

Heurystyka Johnsona: algorytm zachłanny

- Atrybut jest ważniejszy jeśli częściej występuje w klauzulach;
- **Selekcja:** W każdym kroku wybierzmy atrybut, który najczęściej występuje w funkcji rozróżnialności;
- **Usuwanie:** Usuwamy z tej funkcji te klauzule, które zawierają wybrany atrybut;
- Powtarzamy **Selekcja** i **Usuwanie** dopóty, póki funkcja rozróżnialności zawiera jeszcze jakąś klazulę.

Heurystyka Johnsona

1. Znaleźć atrybut, który występuje najczęściej w macierzy rozróżnialności;
2. Usunąć wszystkie pola zawierające wybrany atrybut;
3. Powtarzamy kroki 1 i 2 dopóki wszystkie pola macierzy są puste.

Przykład działania

$\mathbb{M}$	1	2	6	8
3	a_1	a_1, a_4	a_1, a_2, a_3, a_4	a_1, a_2
4	a_1, a_2	a_1, a_2, a_4	a_2, a_3, a_4	a_1
5	a_1, a_2, a_3	a_1, a_2, a_3, a_4	a_4	a_1, a_2, a_3
7	a_1, a_2, a_3, a_4	a_1, a_2, a_3	a_1	a_1, a_2, a_3, a_4
9	a_2, a_3	a_2, a_3, a_4	a_1, a_4	a_2, a_3
10	a_1, a_2, a_3	a_1, a_2, a_3, a_4	a_2, a_4	a_1, a_3
11	a_2, a_3, a_4	a_2, a_3	a_1, a_2	a_3, a_4
12	a_1, a_2, a_4	a_1, a_2	a_1, a_2, a_3	a_1, a_4

- *W macierzy nierozróznialności z poprzedniego przykładu*
  a_1 *- występuje 23 razy* a_2 *- występuje 23 razy*
  a_3 *- występuje 18 razy* a_4 *- występuje 16 razy*
- *Jeśli wybieramy* a_1*, to po usunięciu pól zawierających* a_1 *zostało 9 niepustych pól macierzy nierozróżnialności. Wśród nich:*
  a_2 *- występuje 7 razy* a_3 *- występuje 7 razy* a_4 *- występuje 6 razy*
- *Jeśli wybieramy tym razem* a_2 *to zostały 2 niepuste pola i wśród nich* a_4 *jest zdecydowanym faworytem.*
- *Możemy dostać w ten sposób redukt:* $R_1 = \{a_1, a_2, a_4\}$.

Jak dobra jest heurystyka Johnsona?

- Niech $X = \{(u, v) \in U^2 : dec(u) \neq dec(v)\}$;
- Niech $S_{a_i} = \{(u, v) \in X : a_i(u) \neq a_i(v)\}$;
- Niech $C^* \subset A$ będzie minimalnym reduktem, lecz $C = \{a_1, ..., a_k\}$ będzie reduktem znalezionym przez heurystykę Johnsona;
- Załóżmy, że HEURYSTYKA JOHNSONA musi płacić 1zł za każdym razem, gdy dodała a_i do C.
- Rozłóżmy ten koszt tym elementom, które zostały po raz pierwszy pokryte przez zbiór S_{a_i}
- Niech c_x = koszt ponoszony przez x. Jeśli x jest pokryty po raz pierwszy przez a_i, to

$$c_x = \frac{1}{|S_{a_i} - (S_{a_1} \cup ... \cup S_{a_{i-1}})|}$$

Jak dobra jest heurystyka Johnsona?

- HEURYSTYKA JOHNSONA ponosi łączny koszt $= |C|$. Mamy

$$|C| = \sum_{x \in X} c_x \leq \sum_{a \in C^*} \sum_{x \in S_a} c_x$$

- Gdybyśmy pokazali, że dla dowolnego altrybutu $a \in A$

$$\sum_{x \in S_a} c_x \leq H(|S_a|)$$

gdzie $H(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$, wówczas możemy oszacować dalej:

$$\begin{aligned} |C| &\leq \sum_{a \in C*} \sum_{x \in S_a} c_x \leq |C^*| \cdot H(\max\{|S_a : a \in A|\}) \\ &\leq |C^*| \cdot H(|X|) \leq |C^*| \cdot \ln(|X| + 1) \end{aligned}$$

Lemat

Dla dowolnego altrybutu $a \in A$

$$\sum_{x \in S_a} c_x \leq H(|S_a|)$$

DOWÓD:

- Niech $u_i = |S_a - (S_{a_1} \cup \ldots \cup S_{a_{i-1}})|$, mamy:

$$u_0 = |S_a| \geq \ldots \geq u_{i-1} \geq u_i \geq \ldots \geq u_k = 0;$$

  gdzie k jest najmniejszym indeksem t., że $S_a = S_{a_1} \cup \ldots \cup S_{a_k}$
- Zatem

$$\begin{aligned}\sum_{x \in S_a} c_x &= \sum_{i=0}^{k} (u_{i-1} - u_i) \cdot \frac{1}{|S_{a_i} - (S_{a_1} \cup \ldots \cup S_{a_{i-1}})|} \\ &\leq \sum_{i=0}^{k} (u_{i-1} - u_i) \cdot \frac{1}{u_{i-1}} \leq \sum_{i=0}^{k} (H(u_{i-1}) - H(u_i)) = H(|S_a|)\end{aligned}$$

Inne heurystyki do szukania implikantów pierwszych

- ILP (Integer Linear Program)
- Symulowane wyżarzanie (simulated annealing)
- Algorytmy genetyczne
- SAT solver
- ???

Dana jest funkcja $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ zapisana w postaci CNF za pomocą zmiennych $x_1, ..., x_n$

1. Utwórz nowe zmienne $\{y_1, ..., y_{2n}\}$ odpowiadające literałom $x_1, \overline{x_1}, ..., x_n, \overline{x_n}$;
2. Dla każdej zmiennej x_i, utwórzmy nierówność $y_{2i-1} + y_{2i} \leq 1$
3. Zamień każdą klausulę $\omega_i = (l_{i_1} \vee ... \vee l_{i_{n_i}})$ na nierówność $y_{i_1} + ... + y_{i_{n_i}} \geq 1$;
4. Utwórzmy układ nierówności z poprzednich punktów:

$$\mathbf{Ay} \geq \mathbf{b}$$

5. Zagadnienie programowania liniowego liczb całkowitych (ILP) jest definiowane jako problem szukania

$$\min \sum_{i=1}^{n} y_i \quad \text{przy ograniczeniu: } \mathbf{Ay} \geq \mathbf{b}.$$

Outline

Język deskryptorów (ang. description language)

Dla danego zbioru atrybutów A definiujemy język deskryptorów jako trójkę

$$\mathcal{L}(A) = (\mathbf{D}, \{\vee, \wedge, \neg\}, \mathbf{F})$$

gdzie

- $\mathbf{D}$ jest zbiorem *deskryptorów*

$$\mathbf{D} = \{(a = v) : a \in A \text{ and } v \in Val_a\};$$

- $\{\vee, \wedge, \neg\}$ jest zbiorem standardowych operatorów logicznych;
- $\mathbf{F}$ jest zbiorem formuł logicznych zbudowanych na deskryptorach z $\mathbf{D}$.
- Dla każdego zbioru atrybutów $B \subseteq A$ oznaczamy:
  $\mathbf{D}|_B = \{(a = v) : a \in B \text{ and } v \in Val_a\}$, czyli zbiór deskryptorów obciętych do B.
  $\mathbf{F}|_B$ zbiór formuł zbudowanych na $\mathbf{D}|_B$.

Semantyka

Niech $\mathbb{S} = (U, A)$ będzie tablicą informacyjną. Każda formuła $\phi \in \mathbf{F}$, jest (semantycznie) skojarzona ze zbiorem $[[\phi]]_{\mathbb{S}}$ zawierającym obiekty spełniające ϕ.
Formalnie możemy indukcyjnie definiować semantykę jak następująco:

$$[[(a = v)]]_{\mathbb{S}} = \{x \in U : a(x) = v\} \tag{1}$$

$$[[\phi_1 \vee \phi_2]]_{\mathbb{S}} = [[\phi_1]]_{\mathbb{S}} \cup [[\phi_2]]_{\mathbb{S}} \tag{2}$$

$$[[\phi_1 \wedge \phi_2]]_{\mathbb{S}} = [[\phi_1]]_{\mathbb{S}} \cap [[\phi_2]]_{\mathbb{S}} \tag{3}$$

$$[[\neg\phi]]_{\mathbb{S}} = U \setminus [[\phi]]_{\mathbb{S}} \tag{4}$$

Każda formuła ϕ może być charakteryzowana przez:

- $length(\phi) =$ liczba deskryptorów w ϕ;
- $support(\phi) = |[[\phi]]_{\mathbb{S}}| =$ liczba obiektów spełniających formułę

Definicja reguł decyzyjnych

Niech $\mathbb{S} = \{U, A \cup \{dec\}\}$ będzie tablicą decyzyjną. Regułą decyzyjną dla $\mathbb{S}$ nazywamy formuły postaci:

$$\phi \Rightarrow \delta$$

gdzie $\phi \in \mathbf{F}_A$ i $\delta \in \mathbf{F}_{dec}$.
Formułę ϕ nazywamy *poprzednikiem* (lub założeniem) reguły $\mathbf{r}$, a δ nazywamy *następnikiem* (lub tezą) reguły $\mathbf{r}$.
Oznaczamy poprzednik i następnik reguły $\mathbf{r}$ przez $prev(\mathbf{r})$ oraz $cons(\mathbf{r})$.

Reguły atomowa:

Są to reguły postaci:

$$\mathbf{r} \equiv (a_{i_1} = v_1) \wedge \ldots \wedge (a_{i_m} = v_m) \Rightarrow (dec = k) \tag{5}$$

Każda reguła decyzyjna $\mathbf{r}$ postaci (5) może być charakteryzowana następującymi cechami:

$length(\mathbf{r})$ = liczba deskryptorów występujących w założeniu reguły $\mathbf{r}$

$[\mathbf{r}]$ = nośnik reguły $\mathbf{r}$, czyli zbiór obiektów z U spełniających założenie reguły $\mathbf{r}$

$support(\mathbf{r})$ = liczba obiektów z U spełniających założenie regułyr: $support(\mathbf{r}) = card([\mathbf{r}])$

$confidence(\mathbf{r})$ = wiarygodność reguły $\mathbf{r}$: $confidence(\mathbf{r}) = \frac{|[\mathbf{r}] \cap DEC_k|}{|[\mathbf{r}]|}$

Mówimy, że reguła $\mathbf{r}$ jest *niesprzeczna* z $\mathbb{A}$ jeśli

$$confidence(\mathbf{r}) = 1$$

Minimalne niesprzeczne reguły:

Niech $\mathbb{S} = (U, A \cup \{dec\})$ będzie daną tablicą decyzyjną. Niesprzeczną regułę

$$(a_{i_1} = v_1) \wedge \ldots \wedge (a_{i_m} = v_m) \Rightarrow (dec = k)$$

nazywamy *minimalną niesprzeczną regułą decyzyjną* jeśli usunięcie któregokolwiek z deskryptorów spowoduje, że reguła przestaje być niesprzezcna z $\mathbb{S}$.

Klasyfikatory regułowe dzialają w trzech fazach:

1. Faza treningu: Generuje pewien zbiór reguł $RULES(\mathbb{A})$ z danej tablicy decyzyjnej $\mathbb{A}$.
2. Faza selekcji reguł: Szuka w $RULES(\mathbb{A})$ tych reguł, które są wspierane przez obiekt x. Oznaczamy zbiór tych reguł przez $MatchRules(\mathbb{A}, x)$.
3. Faza klasyfikacji: wyznacza klasędecyzyjną dla x za pomocą reguł z $MatchRules(\mathbb{A}, x)$ według następującego schematu:
    1. Jeśli $MatchRules(\mathbb{A}, x)$ jest pusty: odpowiedź dla x jest "$NIEWIEM$", tzn. nie mamy podstaw, aby klasyfikować obiekt x do którejkolwiek z klas;
    2. Jeśli $MatchRules(\mathbb{A}, x)$ zawiera tylko obiekty z k-tej klasy: wówczas $dec(x) = k$;
    3. Jeśli $MatchRules(\mathbb{A}, x)$ zawiera reguły dla różnych klas decyzyjnych: wówczas decyzja dla x określimy za pomocą pewnego, ustalonego schematu głosowania między regułami z $MatchRules(\mathbb{A}, x)$.

Metoda Oparta o Wnioskowanie Boolowskie

- Każda reguła powstaje poprzez skracanie opisu jakiegoś obiektu.
- Redukty lokalne
- Te same heurystyki dla reduktów decyzyjnych.

Przykład tablicy decyzyjnej

Hurt.	Jakość obsługi	Jakość towaru	Obok autostrady?	Centrum?	decyzja
ID	a_1	a_2	a_3	a_4	dec
1	dobra	dobra	nie	nie	strata
2	dobra	dobra	nie	tak	strata
3	bdb	dobra	nie	nie	zysk
4	slaba	super	nie	nie	zysk
5	slaba	niska	tak	nie	zysk
6	slaba	niska	tak	tak	strata
7	bdb	niska	tak	tak	zysk
8	dobra	super	nie	nie	strata
9	dobra	niska	tak	nie	zysk
10	slaba	super	tak	nie	zysk
11	dobra	super	tak	tak	zysk
12	bdb	super	nie	tak	zysk
13	bdb	dobra	tak	nie	?
14	slaba	super	nie	tak	?

$\mathbb{M}$	1	2	6	8
3	a_1	a_1, a_4	a_1, a_2, a_3, a_4	a_1, a_2
4	a_1, a_2	a_1, a_2, a_4	a_2, a_3, a_4	a_1
5	a_1, a_2, a_3	a_1, a_2, a_3, a_4	a_4	a_1, a_2, a_3
7	a_1, a_2, a_3, a_4	a_1, a_2, a_3	a_1	a_1, a_2, a_3, a_4
9	a_2, a_3	a_2, a_3, a_4	a_1, a_4	a_2, a_3
10	a_1, a_2, a_3	a_1, a_2, a_3, a_4	a_2, a_4	a_1, a_3
11	a_2, a_3, a_4	a_2, a_3	a_1, a_2	a_3, a_4
12	a_1, a_2, a_4	a_1, a_2	a_1, a_2, a_3	a_1, a_4

$$f_{u_3} = (\alpha_1)(\alpha_1 \vee \alpha_4)(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_3 \vee \alpha_4)(\alpha_1 \vee \alpha_2) = \alpha_1$$

Reguły:

$$(a_1 = \text{bdb}) \implies dec = \text{zysk}$$

Macierz i funkcja lokalnych odróżnialności

$\mathbb{M}$	1	2	6	8
3	a_1	a_1, a_4	a_1, a_2, a_3, a_4	a_1, a_2
4	a_1, a_2	a_1, a_2, a_4	a_2, a_3, a_4	a_1
5	a_1, a_2, a_3	a_1, a_2, a_3, a_4	a_4	a_1, a_2, a_3
7	a_1, a_2, a_3, a_4	a_1, a_2, a_3	a_1	a_1, a_2, a_3, a_4
9	a_2, a_3	a_2, a_3, a_4	a_1, a_4	a_2, a_3
10	a_1, a_2, a_3	a_1, a_2, a_3, a_4	a_2, a_4	a_1, a_3
11	a_2, a_3, a_4	a_2, a_3	a_1, a_2	a_3, a_4
12	a_1, a_2, a_4	a_1, a_2	a_1, a_2, a_3	a_1, a_4

$$\begin{aligned} f_{u_8} &= (\alpha_1 \vee \alpha_2)(\alpha_1)(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_3)(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_3 \vee \alpha_4)(\alpha_2 \vee \alpha_3) \\ &\quad (\alpha_1 \vee \alpha_3)(\alpha_3 \vee \alpha_4)(\alpha_1 \vee \alpha_4) \\ &= \alpha_1(\alpha_2 \vee \alpha_3)(\alpha_3 \vee \alpha_4) = \alpha_1\alpha_3 \vee \alpha_1\alpha_2\alpha_4 \end{aligned}$$

Reguły:

- $(a_1 = \text{dobra}) \wedge (a_3 = \text{nie}) \implies dec = \text{strata}$
- $(a_1 = \text{dobra}) \wedge (a_2 = \text{super}) \wedge (a_4 = nie) \implies dec = \text{strata}$