2.1 设某邮件为垃圾邮件是事件A，判为垃圾邮件为事件B

则 $P(B|A)=a$ $P(\bar{B}|A)=1-a$ $P(B|\bar{A})=b$ $P(\bar{B}|\bar{A})=1-b$

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|\bar{A})P(\bar{A})}$$

$$=\frac{ac}{ac+b(1-c)}$$

2.2 样本集合均值 $\mu=[1,2]^T$ 样本协方差矩阵为C 且 $CU=U\lambda$

$$U=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{2}{5}\\ \frac{1}{2} & \frac{2}{5}\end{bmatrix} \quad \lambda=\begin{bmatrix}10.7 & 0\\ 0 & 0.4\end{bmatrix}$$ 用PCA将 $x=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$ 变至一维

解：取最大特征值10.7 其对应的归一化特征向量为 $\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}=W$

$$\hat{x}=W^T(x-\mu)$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2.3 设有两类正态分布的样本集，第一类均值为 $\mu_1=[1,0]^T$ 第二类均值为 $\mu_2=[0,-1]^T$ 两类样本集的协方差矩阵和出现的先验概率都相等：$\Sigma_1=\Sigma_2=\Sigma=\begin{bmatrix}0.7 & 0.2\\ 0.2 & 1.2\end{bmatrix}$ $P(w_1)=P(w_2)$ 试计算分类界面，并对特征向量 $x=[0.2\ 0.5]^T$ 分类

解：采用最小马氏距离分类器：

$$g_i(x)=-\frac{1}{2}(x-\mu_i)^T\Sigma_i^{-1}(x-\mu_i)-\frac{d}{2}\ln 2\pi-\frac{1}{2}\ln|\Sigma_i|+\ln|P(w_i)|$$

$$g(x)=g_1(x)-g_2(x)=-\frac{1}{2}(x-\mu_1)^T\Sigma^{-1}(x-\mu_1)+\frac{1}{2}(x-\mu_2)^T\Sigma^{-1}(x-\mu_2)$$

$$=(\mu_1-\mu_2)^T\Sigma^{-1}x-\frac{1}{2}(\mu_1^T\Sigma^{-1}\mu_1-\mu_2^T\Sigma^{-1}\mu_2)$$

$$\Sigma^{-1}=\frac{1}{0.8}\begin{bmatrix}1.2 & -0.2\\ -0.2 & 0.7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.5 & -0.25\\ -0.25 & 0.875\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & \frac{7}{8}\end{bmatrix}$$

$$(\mu_1-\mu_2)^T\Sigma^{-1}=[1\ 1]\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & \frac{7}{8}\end{bmatrix}=[\frac{5}{4}\ \frac{5}{8}]$$

$$\mu_1^T\Sigma^{-1}\mu_1=[\frac{3}{2}\ -\frac{1}{4}]\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\frac{3}{2}$$

$$\mu_2^T\Sigma^{-1}\mu_2=[\frac{1}{4}\ -\frac{7}{8}]\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}=\frac{7}{8}$$

∴ 分类界面 $g(x)=[\frac{5}{4},\frac{5}{8}]x-\frac{5}{16}=\frac{5}{4}x_1+\frac{5}{8}x_2-\frac{5}{16}=0$

代入 $x=[0.2\ \ 0.5]^T$ 得：

$$g(x)=[\frac{5}{4},\frac{5}{8}]\begin{bmatrix}\frac{1}{5}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}-\frac{5}{16}=\frac{1}{4}>0$$ 为第一类.