

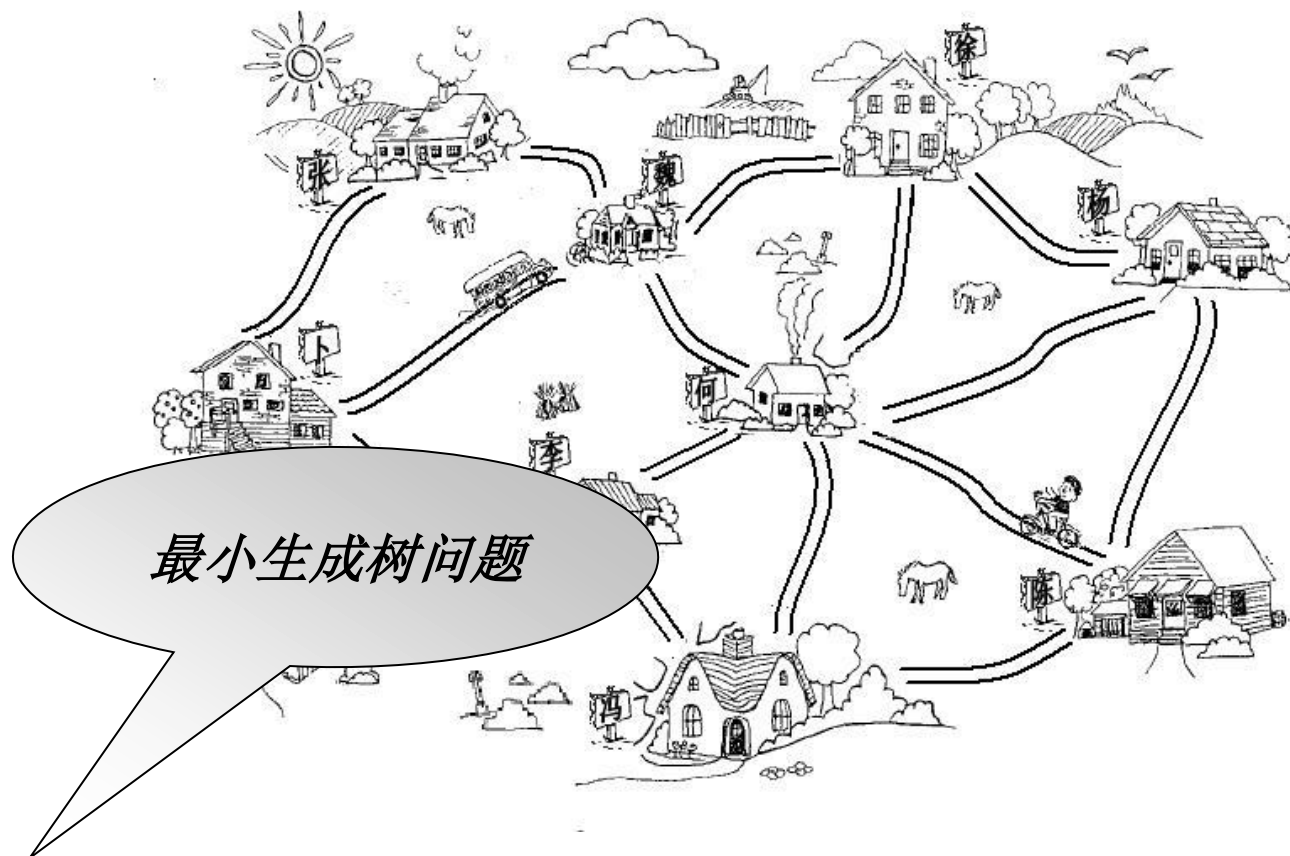
数据结构

深圳技术大学
大数据与互联网学院

第七章 图

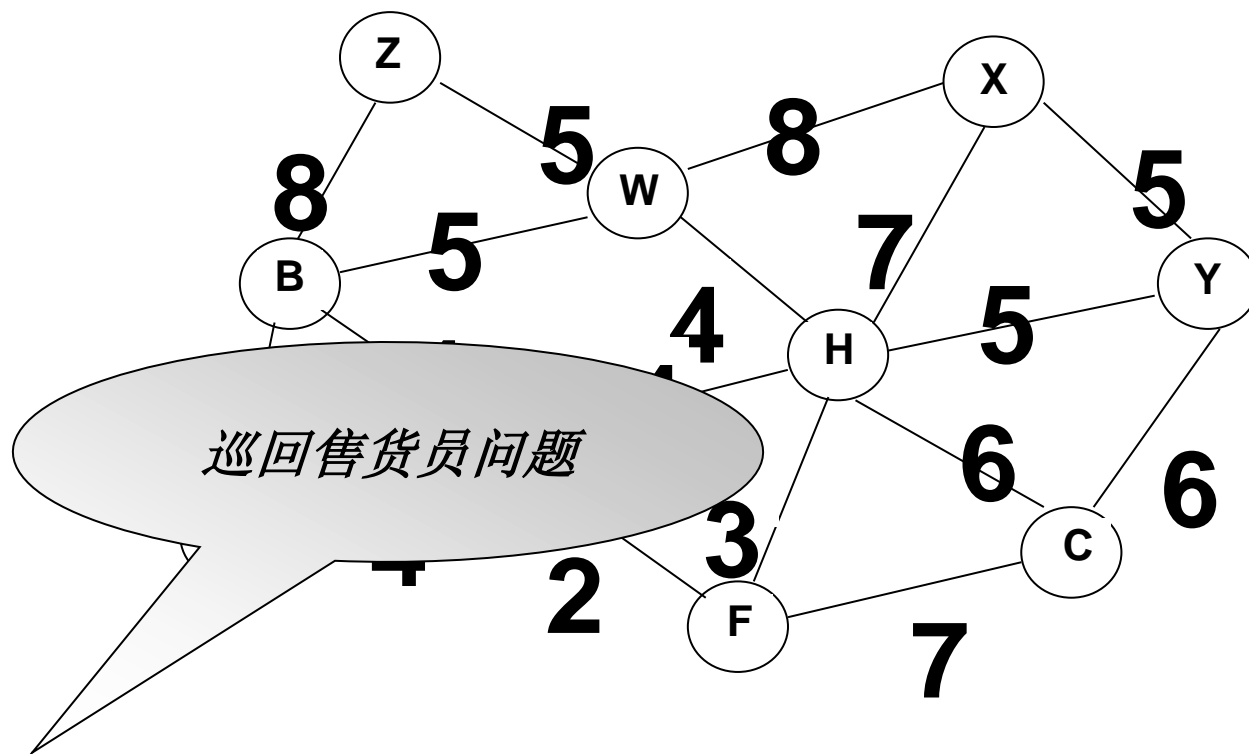
- 7.1 图的定义和术语**
- 7.2 图的存储结构**
- 7.3 图的遍历**
- 7.4 图的连通**
- 7.5 有向无环图及其应用**
- 7.6 最短路径**

【例】图中村与村之间的道路是一个较长远的规划目标。



【问题1】公路村村通项目要求用最小的投入实现每个村都能够有公路通达。那么应该选择建设哪些道路可以使这个投资最小呢？（假设每条道路的建设成本已知）

【例】下图为公路规划抽象及造价预算示例图。



【问题2】在同样的抽象图中，假设把“造价”的含义修改成“距离”，那么我们就可以问：要走遍每个村庄，并回到起点，该如何走才能够使得总的路程最短？

7.1 图的定义和术语

一. 图的定义

- 图(Graph)是一种比线性表和树更为复杂的数据结构。
 - 线性结构：是研究数据元素之间的一对一关系，数据元素之间有明显顺序管理
 - 树结构：是研究数据元素之间的一对多的关系，数据元素之间有明显的层次关系
 - 图结构：是研究数据元素之间的多对多的关系。任意两个元素之间可能存在关系，即结点之间的关系可以是任意的，图中任意元素之间都可能相关。
- 图的应用极为广泛，已渗入到诸如语言学、逻辑学、物理、化学、电讯、计算机科学以及数学的其它分支。

7.1 图的定义和术语

一. 图的定义

- 图是由顶点集合(vertex)及顶点间的关系集合组成的一种数据结构:

$$\text{Graph} = (V, E)$$

其中 $V = \{x \mid x \in \text{数据对象}\}$, 顶点集合为空的图称为空图

E 是顶点之间关系的有穷集合, 包括

$$E1 = \{(x, y) \mid x, y \in V\} \text{ 边的集合}$$

或 $E2 = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in V\} \text{ 弧的集合}$

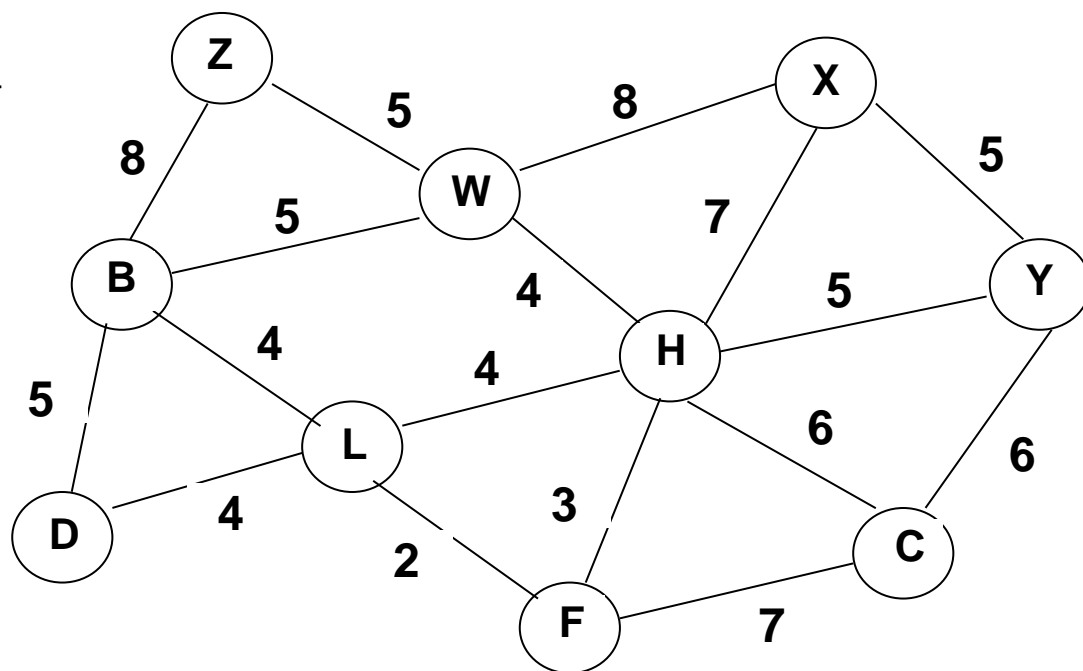
7.1 图的定义和术语

一. 图的定义

■ 图的概念:

- 顶点(Vertex), 图中的数据元素称为顶点
- 弧, 两顶点之间的连线, 或两元素之间存在着关系, 而且连线是不对称的, 分头尾
- 边, 连线是对称的, 不分头尾, 称为边
- 元素之间是连线是边, 则该图称为无向图
- 元素之间连线是不对称的, 则该图是有向图
- 只有很少边或弧 ($e < n \log n$) 的图称为稀疏图, 反之称为稠密图

❖ 图的定义



[例] 上例图给出了一个图的示例，在该图中：

集合 $V = \{ B, C, D, F, H, L, W, X, Y, Z \}$,

$|V| = 10$;

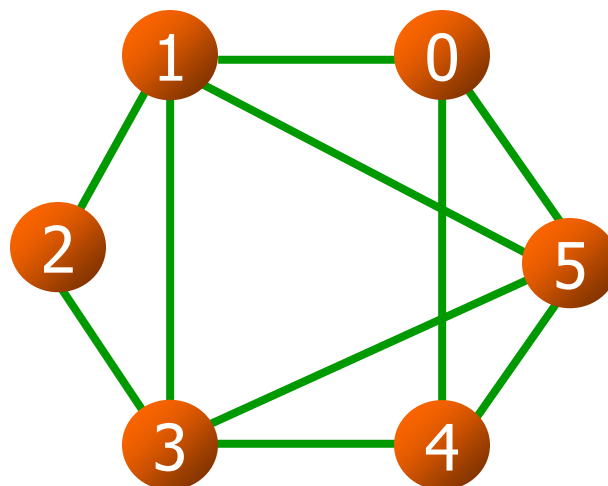
集合 $E = \{ (Z,B), (Z,W), (B,W), (B,L), (B,D), (D,L), (W,X), (W,L), (L,H), (L,F), (X,H), (X,Y), (H,Y), (H,F), (H,C), (F,C), (Y,C) \}$,

$|E| = 17$ 。

7.1 图的定义和术语

二. 图的分类

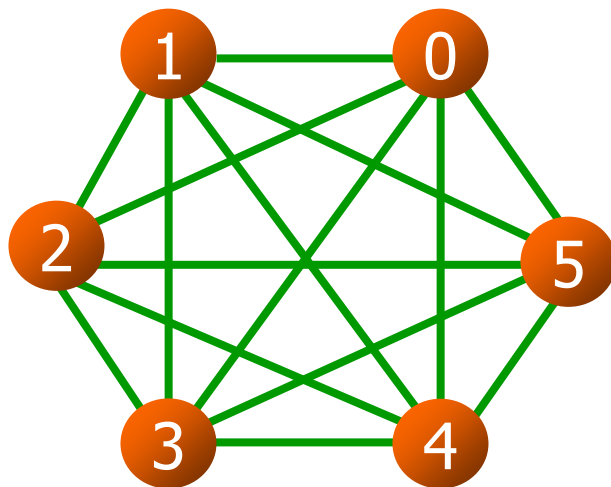
- 无向图：用 (x, y) 表示两个顶点 x, y 之间的一条边 (edge)，边是无序的
- $N = \{V, E\}$, $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $E = \{(0, 1), (0, 4), (0, 5), (1, 2), (1, 3), (1, 5), (2, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 5)\}$



7.1 图的定义和术语

二. 图的分类

- 无向完全图：如果无向图有 $n(n-1)/2$ 条边，则称为无向完全图

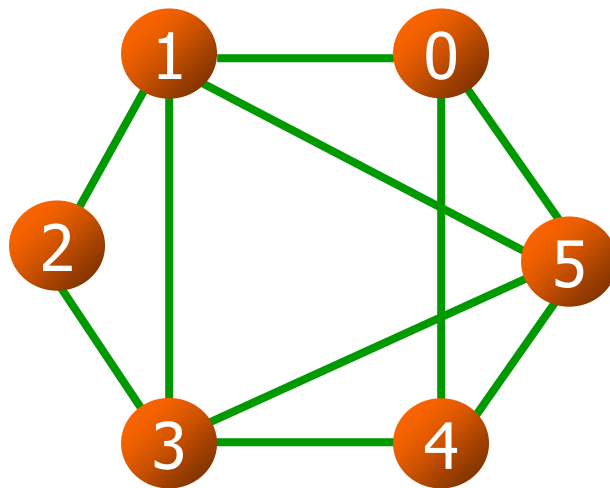


7.1 图的定义和术语

二. 图的分类

■ 无向图的术语

- 邻接点：如果 $(x, y) \in E$, 称 x, y 互为邻接点, 即 x, y 相邻接
- 依附：边 (x, y) 依附于顶点 x, y
- 相关联：边 (x, y) 与 x, y 相关联
- 顶点的度：和顶点相关联的边的数目, 记为 $TD(x)$

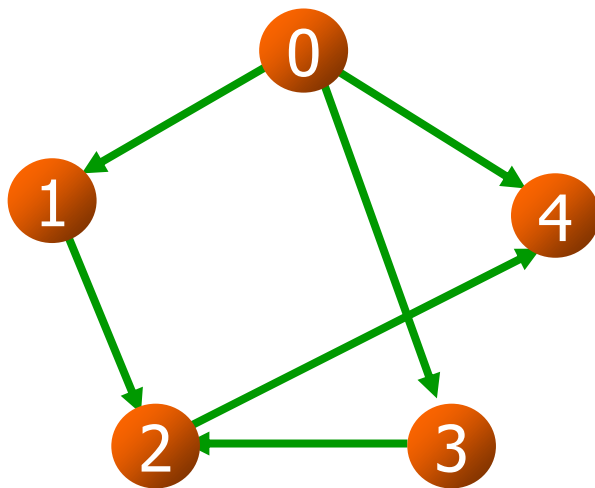


7.1 图的定义和术语

二. 图的分类

- 有向图：用 $\langle x, y \rangle$ 表示从 x 到 y 的一条弧 (Arc)，且称 x 为弧尾， y 为弧头， $\langle x, y \rangle$ 是有序的

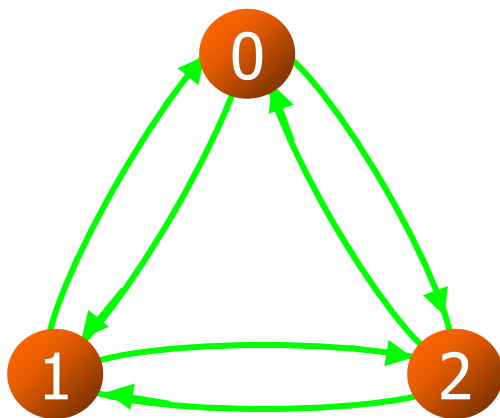
$N = \{V, E\}$, $V = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $E = \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 3 \rangle, \langle 0, 4 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 2 \rangle\}$



7.1 图的定义和术语

二. 图的分类

- 有向图：如果有向图有 $n(n-1)$ 条边，则称为有向完全图

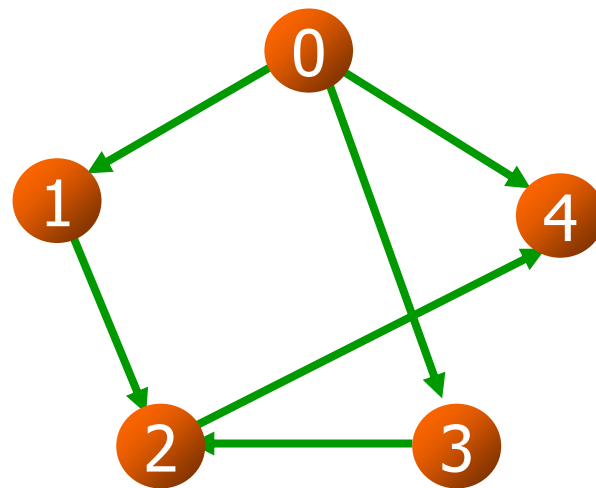


7.1 图的定义和术语

二. 图的分类

■ 有向图的术语

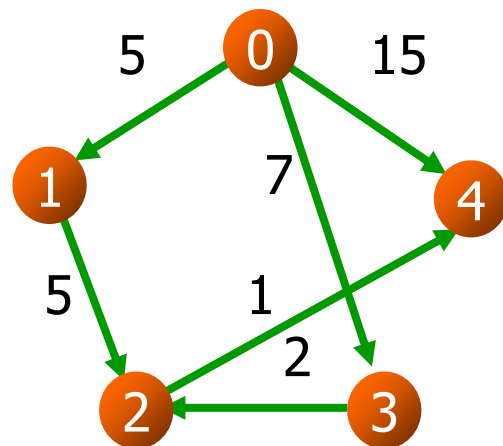
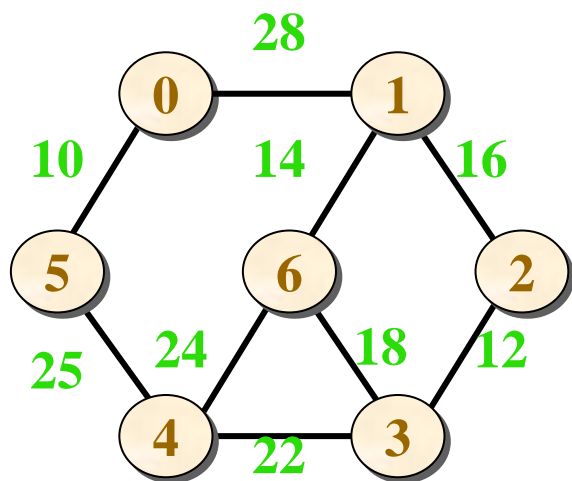
- 邻接：如果 $\langle x, y \rangle \in E$, 称 x 邻接到 y , 或 y 邻接自 x
- 相关联：弧 $\langle x, y \rangle$ 与 x, y 相关联
- 入度：以顶点为头的弧的数目, 记为 $ID(x)$
- 出度：以顶点为尾的弧的数目, 记为 $OD(x)$
- 度： $TD(x) = ID(x) + OD(x)$



7.1 图的定义和术语

二. 图的分类

- 带权的图称为网
- 权：与图的边或弧相关的数值



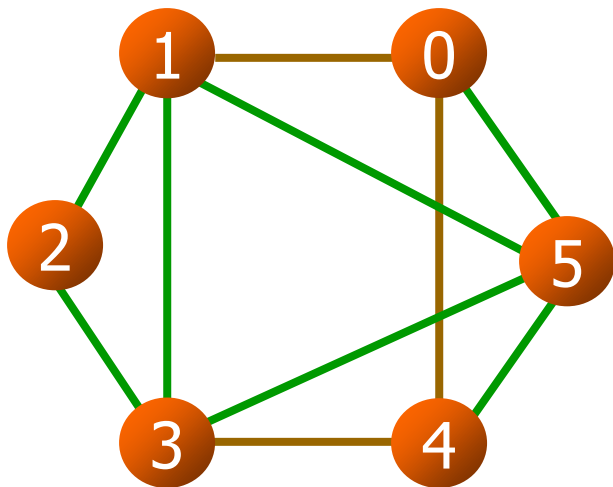
练习

- 设无向图 $G=(V, E)$ ，其中 $V=\{a, b, c, d, e\}$ ，
 $E=\{(a, b), (a, d), (b, c), (c, d), (d, e), (e, b), (e, c)\}$
 - 请画出该图
 - 求各顶点的度
- 设一有向图 $G=(V, E)$ ，其中 $V=\{a, b, c, d, e\}$ ， $E=\{\langle a, b \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, a \rangle, \langle c, b \rangle, \langle c, d \rangle, \langle d, e \rangle, \langle e, a \rangle, \langle e, b \rangle, \langle e, c \rangle\}$
 - 请画出该有向图
 - 求各顶点的入度和出度

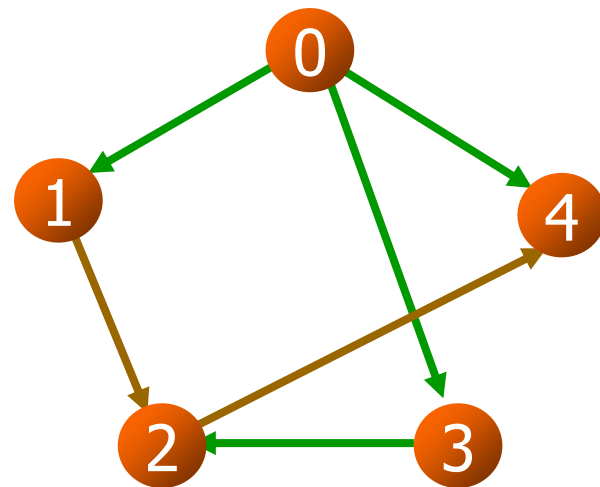
7.1 图的定义和术语

三. 图的连通

- 路径：是一个从顶点 x 到 y 的顶点序列 $(x, v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{im}, y)$ ，其中， $(x, v_{i1}), \dots (v_{ij-1}, v_{ij}), \dots (v_{im}, y)$ 皆属于 E
- 路径上边或弧的数目称为该路径的长度



1到3有路径
(1,0,4,3)

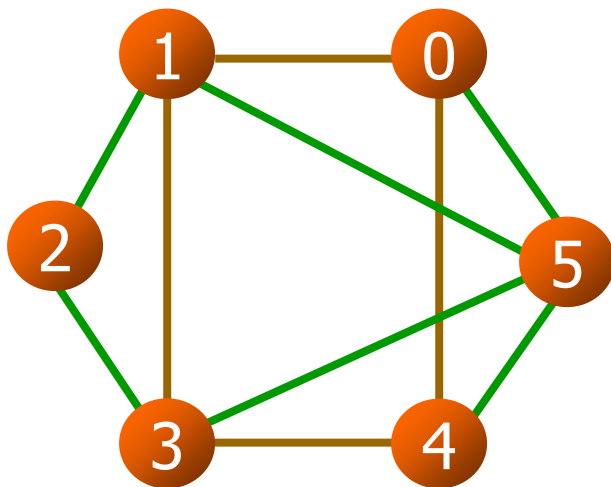


1到4有路径
(1,2,4)

7.1 图的定义和术语

三. 图的连通

- 回路或环：路径的开始顶点与最后一个顶点相同，即路径中 $(x, v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{im}, y)$, $x=y$
- 简单路径：路径的顶点序列中，顶点不重复出现



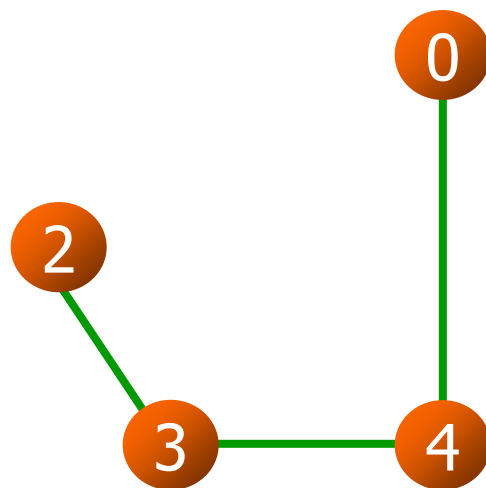
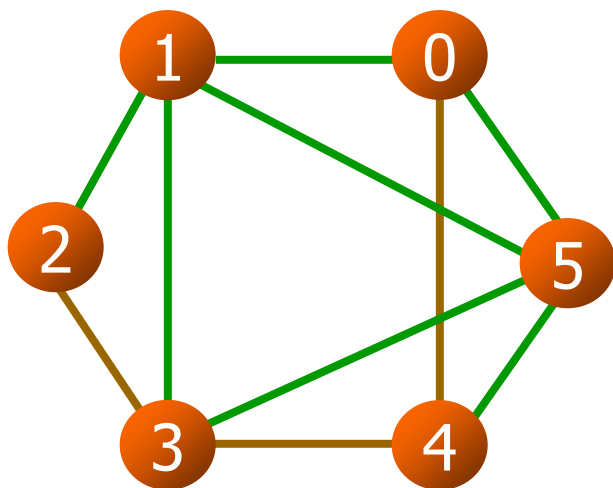
1到3是简单路径
(1,0,4,3)

1到1构成环
(1,0,4,3,1)

7.1 图的定义和术语

三. 图的连通

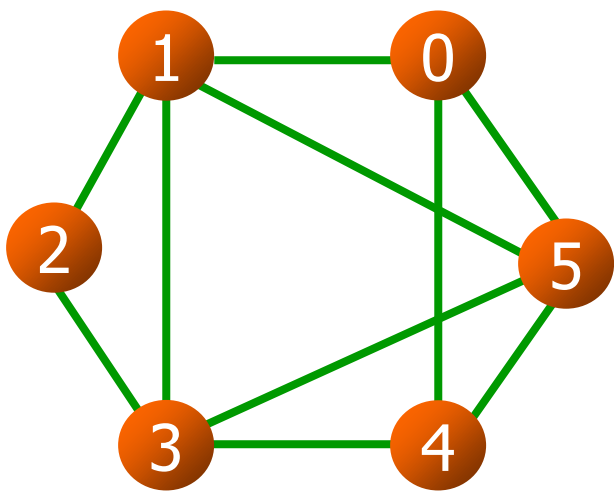
- 子图：设有两个图 $G=(V, E)$ 和 $G'=(V', E')$ 。若 $V' \subseteq V$ 且 $E' \subseteq E$ ，称图 G' 是图 G 的子图



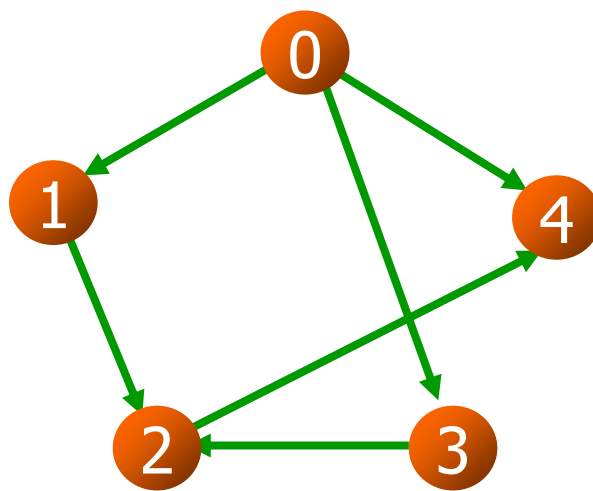
7.1 图的定义和术语

三. 图的连通

- 连通：如果顶点 x 到 y 有路径，称 x 和 y 是连通的
- 极大连通子图：指的是对子图再增加图 G 中的其它顶点，子图就不再连通



连通图



非连通图

7.1 图的定义和术语

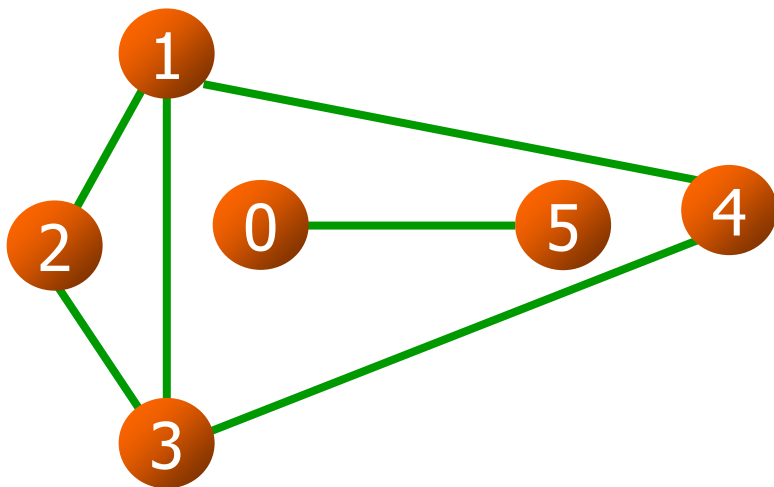
三. 图的连通

■ 无向图的连通分量

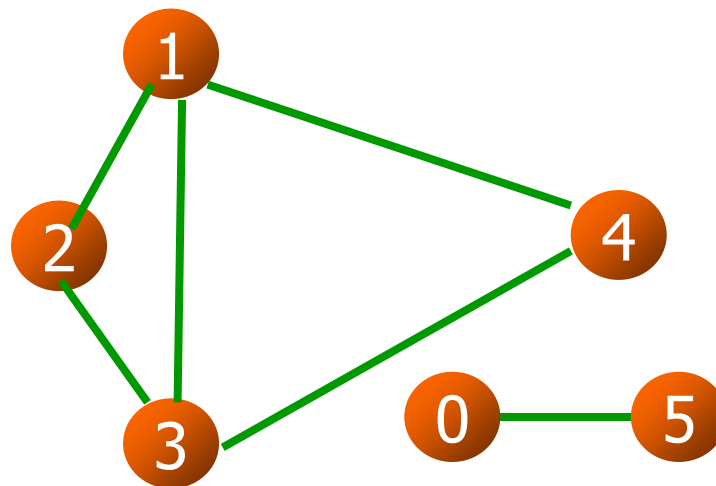
□ 是指无向图中的**极大连通分量**

□ 连通分量是用于无向图中

■ 连通图：无向图中**任意**两个顶点都连通



无向非连通图



无向图的两个连通分量

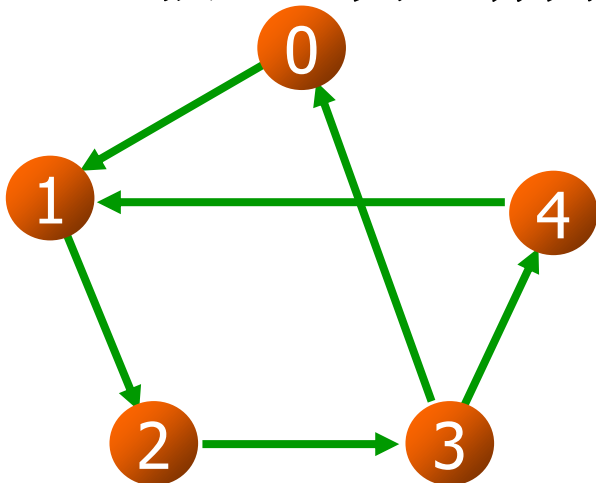
7.1 图的定义和术语

三. 图的连通

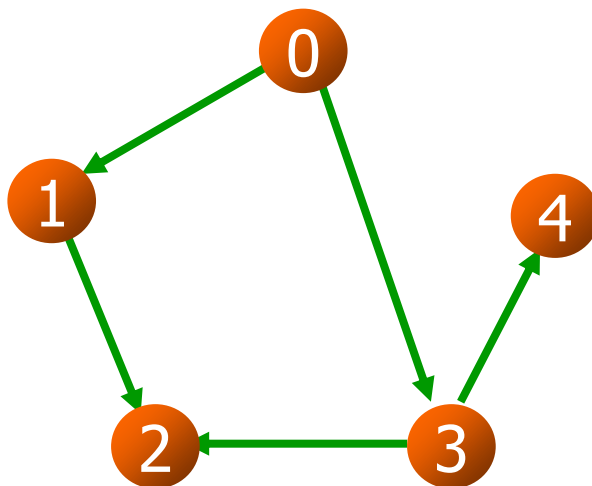
■ 有向图的强连通分量

- 强连通：两个顶点，能够相互到达，称其强连通。
- 强连通分量：有向图中极大强连通子图
- 强连通分量是用在有向图中

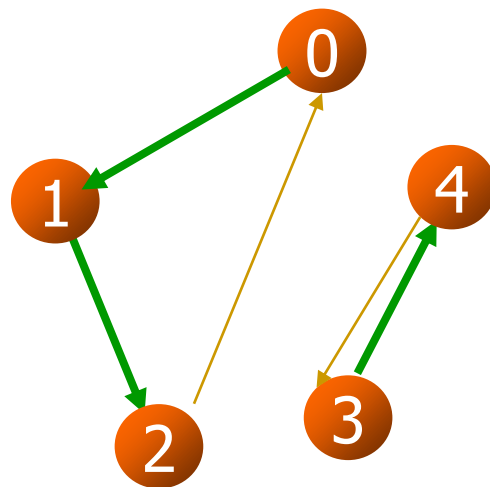
■ 强连通图：有向图中任意两结点都存在路径



强连通图



非连通图

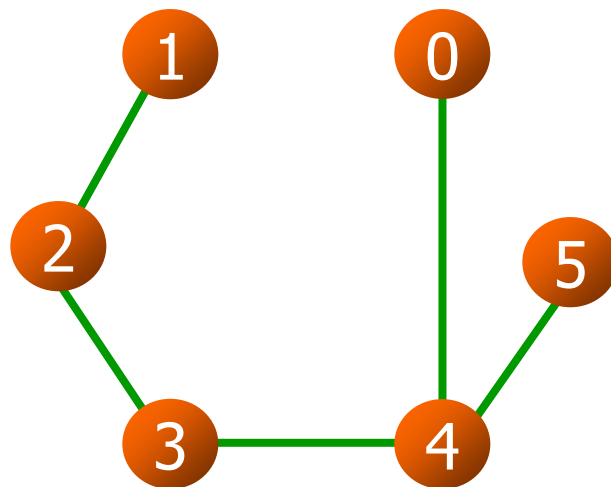
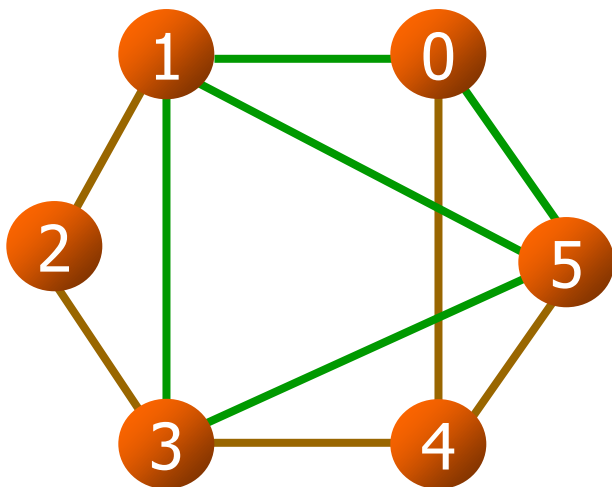


强连通分量

7.1 图的定义和术语

四. 图的生成树

- 生成树：一个连通图的生成树是一个极小连通子图，它含有图中全部 n 个顶点，但只有足以构成一棵树的 $n-1$ 条边
- 一颗 n 个结点的生成树有且仅有 $n-1$ 条边



7.1 图的定义和术语

四. 图的生成树

■ 无向图生成树的结论

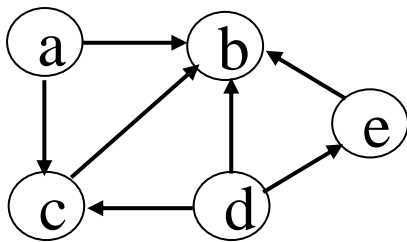
- 一棵有 n 个顶点的生成树有且仅有 $n-1$ 条边
- 如果一个图有 n 个顶点和小于 $n-1$ 条边，则是非连通图
- 如果多于 $n-1$ 条边，则一定有环
- 有 $n-1$ 条边的图不一定是生成树

7.1 图的定义和术语

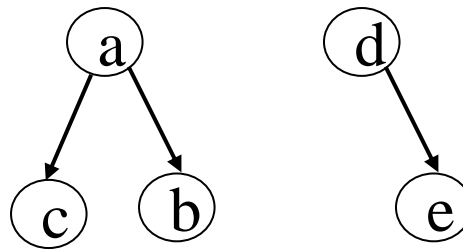
四. 图的生成树

■ 有向图生成树是一个生成森林，

- 有向图的生成森林是这样个子图，由若干棵有向树组成，含有图中**全部**顶点
- 有向树是**只有一个顶点的入度为0**，其余顶点的入度均为**1**的有向图



(a) 有向图



(b) 生成森林

练习

- 已知无向图 $G=(V, E)$ ，其中 $V=\{a, b, c, d, e, f, g\}$ ， $E=\{(a, b), (a, c), (c, d), (d, e), (d, f), (b, f), (e, f), (f, g), (g, c)\}$
 - 请画出该图的连通分量
 - 请画出该图的生成树
- 设有向图如图所示，
 - 请画出该图的生成森林

