Algoritmos en la teoría de invariantes. Proyecto final

Felipe Gonzalez, Daniel de Roux

May 13, 2017

El objetivo de este documento es dar un breve resumen del proyecto final del curso de algoritmos en la teoría de invariantes. El proyecto fue programado en *Macaulay2* y anexamos a este documento el código completo.

El proyecto consiste en programar una rutina en *Macaulay2* que, dada una representación de la acción de un grupo finito G actuando en espacio vectorial de dimensión finita V, devuelva una presentación del anillo de invariantes $R^G \subseteq \mathbb{C}[V^*]$.

Varias cosas se pueden mejorar en esta implementación. Para empezar, la estrategia de calcular el operador de Reynolds en la base de monomios de grado d es costoso. Podemos, por ejemplo, resolver las ecuaciones lineales dadas por los generadores del grupo para encontrar más rápidamente los invariantes.

Otra opción para mejorar es la de restar la serie de Hilbert $HS(\mathbb{Q}[f_1, .., f_m])$ a la serie de Molien para saber directamente el grado de los polinomios que nos faltan por generar. Esto permitiría pasar de grado d a grado $d + k$ para algún k y no necesariamente a $d + 1$.

Respecto a la complejidad computacional, lo más probable es que el algoritmo presentado sea al menos NP. Aunque no usamos explícitamente bases de Groebner, es probable que *Macaulay2* use estas para procesos internos al calcular kernel u otras operaciones. Queda la pregunta de si es fácil revisar que un conjunto de polinomios invariantes genere efectivamente el álgebra de invariantes.

El código completo con documentación estructurada se encuentra público en la dirección:

https://github.com/minigonche/invariant_theory

Outline del algoritmo

Presentamos un outline del algoritmo usado en el proyecto.

1. Calculamos la serie de Molien usando las matrices de la representación.
2. Para un grado dado d, construimos una base de monomios de los polinomios de grado d.
3. Aplicamos el operador de Reynolds a esta base para obtener el conjunto de polinomios invariantes de grado de d.
4. Si los polinomios están en las variables $x_1, .., x_n$ y los polinomios invariantes encontrados en el paso anterior son $f_1^d, .., f_{m_d}^d$, construimos el mapa

$$\begin{aligned} &\Phi : \mathbb{Q}[y_1, y_2, .., y_k] \Rightarrow \mathbb{Q}[x_1, .., x_n] \\ &y_i \Rightarrow f_i \end{aligned} \tag{1}$$

5. Comparamos la serie de Molien calculada en (1) con $HS(\mathbb{Q}[y_1, .., y_{m_d}]/Ker\ \phi)$
6. Si las series son distintas iteramos tomando $d = d + 1$.