

# 1 The Power SAT CNF

$$\left\{ \begin{array}{l}
 2c_0 + q_0 - (v_{(0-k_0)\%n}) - (v_{(0-k_1)\%n}) = 0 \longrightarrow \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 (\neg c_0 \vee v_{(0-k_0)\%n}) \wedge (\neg c_0 \vee v_{(0-k_1)\%n}) \\
 \wedge (\neg q_0 \vee v_{(0-k_0)\%n} \vee v_{(0-k_1)\%n}) \\
 \wedge (\neg q_0 \vee \neg v_{(0-k_0)\%n} \vee \neg v_{(0-k_1)\%n}) \\
 \wedge (q_0 \vee v_{(0-k_0)\%n} \vee \neg v_{(0-k_1)\%n}) \\
 \wedge (c_0 \vee q_0 \vee \neg v_{(0-k_0)\%n}),
 \end{array} \right. \\
 \\
 2c_i + q_i - (v_{(i-k_0)\%n}) - (v_{(i-k_1)\%n}) - c_{i-1} = 0 \longrightarrow \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 (q_i \vee \neg v_{(i-k_0)\%n} \vee \neg v_{(i-k_1)\%n} \vee \neg c_{i-1}) \\
 \wedge (\neg q_i \vee v_{(i-k_0)\%n} \vee v_{(i-k_1)\%n} \vee c_{i-1}) \\
 \wedge (c_i \vee q_i \vee \neg v_{(i-k_0)\%n}) \wedge (\neg c_i \vee \neg q_i \vee v_{(i-k_0)\%n}) \\
 \wedge (c_i \vee \neg v_{(i-k_1)\%n} \vee \neg c_{i-1}) \wedge (\neg c_i \vee v_{(i-k_1)\%n} \vee c_{i-1}) \\
 \wedge (\neg q_i \vee \neg v_{(i-k_0)\%n} \vee v_{(i-k_1)\%n} \vee \neg c_{i-1}) \\
 \wedge (q_i \vee v_{(i-k_0)\%n} \vee v_{(i-k_1)\%n} \vee \neg c_{i-1}) \\
 \wedge (\neg q_i \vee \neg v_{(i-k_0)\%n} \vee \neg v_{(i-k_1)\%n} \vee c_{i-1}) \\
 \wedge (q_i \vee v_{(i-k_0)\%n} \vee \neg v_{(i-k_0)\%n} \vee c_{i-1}) \\
 \text{for } 1 \leq i \leq n-1,
 \end{array} \right. \\
 \\
 c'_0 - c_{n-1} = 0 \longrightarrow (c_{n-1} \vee \neg c'_0) \wedge (\neg c_{n-1} \vee c'_0), \\
 \\
 2c'_{i+1} + u_i - q_i - c'_i = 0 \longrightarrow \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 (\neg u_i \vee q_i \vee c'_i) \wedge (\neg c'_{i+1} \vee c'_i) \wedge (\neg u_i \vee \neg q_i \vee \neg c'_i) \\
 \wedge (u_i \vee q_i \vee \neg c'_i) \wedge (c'_{i+1} \vee u_i \vee \neg q_i) \wedge (\neg c'_{i+1} \vee q_i) \\
 \text{for } 0 \leq i \leq n.
 \end{array} \right.
 \end{array} \right.$$

## 2 The Copy SAT CNF

$$\left\{ \begin{array}{l} 2g_0 + q_0 - (v_{0,0}) - (v_{1,0}) = 0 \longrightarrow \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} (\neg g_0 \vee v_{0,0}) \wedge (\neg g_0 \vee v_{1,0}) \\ \wedge (\neg q_0 \vee v_{0,0} \vee v_{1,0}) \\ \wedge (\neg q_0 \vee \neg v_{0,0} \vee \neg v_{1,0}) \\ \wedge (q_0 \vee v_{0,0} \vee \neg v_{1,0}) \\ \wedge (g_0 \vee q_0 \vee \neg v_{0,0}), \end{array} \right. \\ \\ 2g_i + q_i - (v_{0,i}) - (v_{1,i}) - g_{i-1} = 0 \longrightarrow \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} (q_i \vee \neg v_{0,i} \vee \neg v_{1,i} \vee \neg g_{i-1}) \\ \wedge (\neg q_i \vee v_{0,i} \vee v_{1,i} \vee g_{i-1}) \\ \wedge (g_i \vee q_i \vee \neg v_{0,i}) \wedge (\neg g_i \vee \neg q_i \vee v_{0,i}) \\ \wedge (g_i \vee \neg v_{1,i} \vee \neg g_{i-1}) \wedge (\neg g_i \vee v_{1,i} \vee g_{i-1}) \\ \wedge (\neg q_i \vee \neg v_{0,i} \vee v_{1,i} \vee \neg g_{i-1}) \\ \wedge (q_i \vee v_{0,i} \vee v_{1,i} \vee \neg g_{i-1}) \\ \wedge (\neg q_i \vee \neg v_{0,i} \vee \neg v_{1,i} \vee g_{i-1}) \\ \wedge (q_i \vee v_{0,i} \vee \neg v_{0,i} \vee g_{i-1}) \quad \text{for } 1 \leq i \leq n-1, \end{array} \right. \\ \\ g'_0 - g_{n-1} = 0 \longrightarrow (g_{n-1} \vee \neg g'_0) \wedge (\neg g_{n-1} \vee g'_0), \\ \\ 2g'_{i+1} + u_i - q_i - g'_i = 0 \longrightarrow \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} (\neg u_i \vee q_i \vee g'_i) \wedge (\neg g'_{i+1} \vee g'_i) \wedge (\neg u_i \vee \neg q_i \vee \neg g'_i) \\ \wedge (u_i \vee q_i \vee \neg g'_i) \wedge (g'_{i+1} \vee u_i \vee \neg q_i) \wedge (\neg g'_{i+1} \vee q_i) \\ \quad \text{for } 0 \leq i \leq n. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

where  $g_i, q_i$  for  $0 \leq i \leq n-1$  and  $g'_i$  for  $0 \leq i \leq n$  are intermediate variables.

## 3 The 3-Copy SAT CNF

The 3-COPY CNF in the SAT model is shown as follows:

$$w'_0 - w_{n-1} = 0 \longrightarrow (w'_0 \vee \neg w_{n-1}) \wedge (\neg w'_0 \vee w_{n-1}). \quad (1)$$

$$w''' - w' = 0 \longrightarrow (w''' \vee \neg w'_{n-1}) \wedge (\neg w''' \vee w'_{n-1}). \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
2w'_1 + p_0 - q_0 - w'_0 = 0 \longrightarrow \\
\begin{cases} (\neg p_0 \vee q_0 \vee w'_0) \wedge (\neg w'_1 \vee w'_0) \wedge \\ (\neg p_0 \vee \neg q_0 \vee \neg w'_0) \wedge (p_0 \vee q_0 \vee \neg w'_0) \wedge \\ (w'_1 \vee p_0 \vee \neg q_0) \wedge (\neg w'_1 \vee q_0). \end{cases} \quad (3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2w'_{i+1} + p_i - q_i - c'_i = 0 \longrightarrow \\
\begin{cases} (\neg p_i \vee q_i \vee w'_i) \wedge (\neg w'_{i+1} \vee w'_i) \wedge \\ (\neg p_i \vee \neg q_i \vee \neg w'_i) \wedge (p_i \vee q_i \vee \neg w'_i) \wedge \\ (w'_{i+1} \vee p_i \vee \neg q_i) \wedge (\neg w'_{i+1} \vee q_i) \quad \text{for } 2 \leq i \leq n-1. \end{cases} \quad (4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2w'''_{i+1} + u_i - p_i + w'''_i = 0 \longrightarrow \\
\begin{cases} (\neg u_i \vee p_i \vee w'''_i) \wedge (\neg w'''_{i+1} \vee w'''_i) \wedge \\ (\neg u_i \vee \neg p_i \vee \neg w'''_i) \wedge (u_i \vee p_i \vee \neg w'''_i) \wedge \\ (w'''_{i+1} \vee u_i \vee \neg p_i) \wedge (\neg w'''_{i+1} \vee p_i) \quad \text{for } 0 \leq i \leq n-1. \end{cases} \quad (5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2w_0 + q_0 - v_{0,0} - v_{1,0} - v_{2,0} \longrightarrow \\
\begin{cases} (q_0 \vee \neg v_{0,0} \vee \neg v_{1,0} \vee \neg v_{2,0}) \wedge (\neg q_0 \vee v_{0,0} \vee v_{1,0} \vee v_{2,0}) \wedge \\ (w_0 \vee q \vee \neg v_{0,0}) \wedge (\neg w_0 \vee \neg q_0 \vee v_{0,0}) \wedge (w_0 \vee \neg v_{1,0} \vee \neg v_{2,0}) \wedge \\ (\neg w_0 \vee v_{1,0} \vee v_{2,0}) \wedge (\neg q_0 \vee \neg v_{0,0} \vee v_{1,0} \vee \neg v_{2,0}) \wedge \\ (q_0 \vee v_{0,0} \vee v_{1,0} \vee \neg v_{2,0}) \wedge (\neg q_0 \vee \neg v_{0,0} \vee \neg v_{1,0} \vee v_{2,0}) \wedge \\ (q_0 \vee v_{0,0} \vee \neg v_{1,0} \vee v_{2,0}). \end{cases} \quad (6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2w'_2 + p_1 - q - 1 - w'_1 - w''_{n-2} = 0 \longrightarrow \\
\begin{cases} (p_1 \vee \neg q_1 \vee \neg w'_1 \vee \neg w''_{n-2}) \wedge (\neg p_1 \vee q_1 \vee w'_1 w''_{n-2}) \wedge \\ (w'_2 \vee p_1 \vee \neg q_1) \wedge (\neg w'_2 \vee \neg p_1 \vee q_1) \wedge \\ (w'_2 \vee \neg w'_1 \vee \neg w''_{n-2}) \wedge (\neg w'_2 \vee w'_1 \vee w''_{n-2}) \wedge \\ (\neg p_1 \vee \neg q_1 \vee w'_1 \vee \neg w''_{n-2}) \wedge (p_1 \vee q_1 \vee w'_1 \vee \neg w''_{n-2}) \wedge \\ (\neg p_1 \vee \neg q_1 \vee \neg w'_1 \vee w''_{n-2}) \wedge (p_1 \vee q_1 \vee \neg w'_1 \vee w''_{n-2}). \end{cases} \quad (7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 4w_0'' + 2w_1 + q_1 - v_{0,1} - v_{1,1} - v_{2,1} - w_0 = 0 \longrightarrow \\
& \left\{ \begin{aligned}
& (\neg q_1 \vee v_{0,1} \vee v_{1,1} \vee v_{2,1} \vee w_0) \wedge (\neg w_0'' \vee w_0) \wedge \\
& (\neg w_0'' \vee v_{2,1}) \wedge (w_1 \vee \neg q_1 \vee \neg v_{2,1} \vee \neg w_0) \wedge \\
& (\neg w_0'' \vee \neg w_1) \wedge (w_1 \vee q_1 \vee v_{1,1} \vee \neg v_{2,1}) \wedge \\
& (w_1 \vee q_1 \vee v_{0,1} \vee \neg v_{1,1}) \wedge (w_0'' \vee q_1 \vee \neg v_{0,1} \vee \neg v_{1,1} \vee \neg v_{2,1}) \wedge \\
& (\neg w_1 \vee v_{1,1} \vee v_{2,1} \vee w_0) \wedge (w_1 \vee q_1 \vee v_{2,1} \vee \neg w_0) \wedge \\
& (w_1 \vee \neg q_1 \vee \neg v_{0,1} \vee \neg v_{1,1}) \wedge (\neg q_1 \vee v_{0,1} \vee \neg v_{1,1} \vee v_{2,1} \vee \neg w_0) \wedge \\
& (\neg w_1 \vee v_{0,1} \vee v_{1,1} \vee v_{2,1}) \wedge (\neg q_1 \vee \neg v_{0,1} \vee v_{1,1} \vee v_{2,1} \vee \neg w_0) \wedge \\
& (\neg w_1 \vee v_{0,1} \vee v_{2,1} \vee w_0) \wedge (\neg q_1 \vee v_{0,1} \vee \neg v_{1,1} \vee \neg v_{2,1} \vee w_0) \wedge \\
& (\neg w_1 \vee v_{0,1} \vee v_{1,1} \vee w_0) \wedge \\
& (\neg q_1 \vee \neg v_{0,1} \vee v_{1,1} \vee \neg v_{2,1} \vee w_0) \wedge (w_1 \vee q_1 \vee \neg v_{0,1} \vee w_0) \wedge \\
& (\neg q_1 \vee \neg v_{0,1} \vee \neg v_{1,1} \vee \neg v_{2,1} \vee \neg w_0) \wedge \\
& (q_1 \vee v_{0,1} \vee \neg v_{1,1} \vee \neg v_{2,1} \vee \neg w_0) \wedge (q_1 \vee \neg v_{0,1} \vee \neg v_{1,1} \vee v_{2,1} \vee \neg w_0) \wedge \\
& (\neg v_{0,1} \vee v_{1,1} \vee \neg v_{2,1} \vee \neg w_0) \wedge (\neg w_1 \vee \neg q_1 \vee v_{0,1} \vee v_{1,1}) \wedge \\
& (\neg w_1 \vee \neg q_1 \vee v_{2,1} \vee w_0).
\end{aligned} \right. \tag{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 4w_1'' + 2w_2 + q_2 - v_{0,2} - v_{1,2} - v_{2,2} - w_1 = 0 \longrightarrow \\
& \left\{ \begin{aligned}
& (\neg q_2 \vee v_{0,2} \vee v_{1,2} \vee v_{2,2} \vee w_1) \wedge (\neg w_1'' \vee w_1) \wedge \\
& (\neg w_1'' \vee v_{2,2}) \wedge (w_2 \vee \neg q_2 \vee \neg v_{2,2} \vee \neg w_1) \wedge \\
& (\neg w_1'' \vee \neg w_2) \wedge (w_2 \vee q_2 \vee v_{1,2} \vee \neg v_{2,2}) \wedge \\
& (w_2 \vee q_2 \vee v_{0,2} \vee \neg v_{1,2}) \wedge (w_1'' \vee q_2 \vee \neg v_{0,2} \vee \neg v_{1,2} \vee \neg v_{2,2}) \wedge \\
& (\neg w_2 \vee v_{1,2} \vee v_{2,2} \vee w_1) \wedge (w_2 \vee q_2 \vee v_{2,2} \vee \neg w_1) \wedge \\
& (w_2 \vee \neg q_2 \vee \neg v_{0,2} \vee \neg v_{1,2}) \wedge (\neg q_2 \vee v_{0,2} \vee \neg v_{1,2} \vee v_{2,2} \vee \neg w_1) \wedge \\
& (\neg w_2 \vee v_{0,2} \vee v_{1,2} \vee v_{2,2}) \wedge (\neg q_2 \vee \neg v_{0,2} \vee v_{1,2} \vee v_{2,2} \vee \neg w_1) \wedge \\
& (\neg w_2 \vee v_{0,2} \vee v_{2,2} \vee w_1) \wedge (\neg q_2 \vee v_{0,2} \vee \neg v_{1,2} \vee \neg v_{2,2} \vee w_1) \wedge \\
& (\neg w_2 \vee v_{0,2} \vee v_{1,2} \vee w_1) \wedge (\neg q_2 \vee \neg v_{0,2} \vee v_{1,2} \vee \neg v_{2,2} \vee w_1) \wedge \\
& (w_2 \vee q_2 \vee \neg v_{0,2} \vee w_1) \wedge (\neg q_2 \vee \neg v_{0,2} \vee \neg v_{1,2} \vee \neg v_{2,2} \vee \neg w_1) \wedge \\
& (q_2 \vee v_{0,2} \vee \neg v_{1,2} \vee \neg v_{2,2} \vee \neg w_1) \wedge (q_2 \vee \neg v_{0,2} \vee \neg v_{1,2} \vee v_{2,2} \vee \neg w_1) \wedge \\
& (q_2 \vee \neg v_{0,2} \vee v_{1,2} \vee \neg v_{2,2} \vee \neg w_1) \wedge (\neg w_2 \vee \neg q_2 \vee v_{0,2} \vee v_{1,2}) \wedge \\
& (\neg w_2 \vee \neg q_2 \vee v_{2,2} \vee w_1).
\end{aligned} \right. \tag{9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 4w''_{i-1} + 2w_i + q_i - v_{0,i} - v_{1,i} - v_{2,i} - w_{i-1} - w''_{i-3} = 0 \longrightarrow \\
& \left\{ \begin{aligned}
& (q_i \vee \neg v_{0,i} \vee \neg v_{1,i} \vee \neg v_{2,i} \vee \neg w_i \vee \neg w''_{i-1}) \wedge (\neg q_i \vee v_{0,i} \vee v_{1,i} \vee v_{2,i} \vee w_i \vee w''_{i-1}) \wedge \\
& (\neg w''_{i-3} \vee \neg w_{i-1}) \wedge (w''_{i-3} \vee w_{i-1} \vee q_i \vee \neg v_{0,i}) \wedge (w''_{i-3} \vee \neg v_{0,i} \vee \neg v_{1,i} \vee \neg v_{2,i} \vee \neg w_i) \wedge \\
& (\neg w''_{i-3} \vee w_i \vee w''_{i-1}) \wedge (w_{i-1} \vee v_{0,i} \vee v_{1,i} \vee \neg v_{2,i} \vee \neg w_i) \wedge \\
& (w_{i-1} \vee \neg q_i \vee v_{2,i} \vee \neg w_i \vee \neg w''_{i-1}) \wedge (w_{i-1} \vee \neg q_i \vee v_{0,i} \vee \neg v_{1,i} \vee \neg v_{2,i}) \wedge \\
& (w_{i-1} \vee \neg q_i \vee \neg v_{0,i} \vee w_i \vee \neg w''_{i-1}) \wedge (w_{i-1} \vee q_i \vee v_{1,i} \vee v_{2,i} \vee \neg w_i) \wedge \\
& (w_{i-1} \vee q_i \vee v_{2,i} \vee w_i \vee \neg w''_{i-1}) \wedge (w_{i-1} \vee \neg v_{0,i} \vee v_{1,i} \vee \neg v_{2,i} \vee w''_{i-1}) \wedge \\
& (w_{i-1} \vee \neg q_i \vee \neg v_{0,i} \vee \neg v_{1,i} \vee w''_{i-1}) \wedge (w_{i-1} \vee q_i \vee v_{0,i} \vee \neg v_{1,i} \vee w''_{i-1}) \wedge \\
& (\neg w_{i-1} \vee v_{1,i} \vee v_{2,i} \vee w_i \vee w''_{i-1}) \wedge (\neg q_i \vee v_{0,i} \vee v_{1,i} \vee \neg v_{2,i} \vee w_i \vee \neg w''_{i-1}) \wedge \\
& (\neg w''_{i-3} \vee v_{2,i} \vee w''_{i-1}) \wedge (w''_{i-3} \vee q_i \vee \neg v_{1,i} \vee \neg v_{2,i} \vee \neg w_i) \wedge \\
& (\neg q_i \vee v_{0,i} \vee \neg v_{1,i} \vee v_{2,i} \vee w_i \vee \neg w''_{i-1}) \wedge (\neg q_i \vee \neg v_{0,i} \vee v_{1,i} \vee \neg v_{2,i} \vee \neg w_i \vee \neg w''_{i-1}) \wedge \\
& (q_i \vee v_{0,i} \vee \neg v_{1,i} \vee v_{2,i} \vee \neg w_i \vee \neg w''_{i-1}) \wedge (q_i \vee v_{0,i} \vee \neg v_{1,i} \vee \neg v_{2,i} \vee w_i \vee \neg w''_{i-1}) \wedge \\
& (q_i \vee \neg v_{0,i} \vee v_{1,i} \vee \neg v_{2,i} \vee w_i \vee \neg w''_{i-1}) \wedge (w_{i-1} \vee q_i \vee v_{0,i} \vee \neg v_{2,i} \vee w_i) \wedge \\
& (\neg w_{i-1} \vee v_{0,i} \vee v_{1,i} \vee v_{2,i} \vee w_i) \wedge (\neg w_{i-1} \vee v_{0,i} \vee v_{1,i} \vee v_{2,i} \vee w''_{i-1}) \wedge \\
& (\neg w_{i-1} \vee v_{0,i} \vee v_{1,i} \vee w_i \vee w''_{i-1}) \wedge (\neg w_{i-1} \vee v_{0,i} \vee v_{2,i} \vee w_i \vee w''_{i-1}) \wedge \\
& (\neg w_{i-1} \vee q_i \vee \neg v_{0,i} \vee \neg v_{2,i} \vee \neg w_i) \wedge (\neg w_{i-1} \vee q_i \vee \neg v_{0,i} \vee \neg v_{1,i} \vee \neg w_i) \wedge \\
& (\neg w_{i-1} \vee q_i \vee \neg v_{0,i} \vee \neg v_{1,i} \vee \neg v_{2,i}) \wedge (\neg q_i \vee v_{0,i} \vee \neg v_{1,i} \vee v_{2,i} \vee \neg w_i \vee w''_{i-1}) \wedge \\
& (\neg q_i \vee \neg v_{0,i} \vee v_{1,i} \vee v_{2,i} \vee \neg w_i \vee w''_{i-1}) \wedge (\neg w_{i-1} \vee \neg q_i \vee v_{0,i} \vee v_{1,i} \vee v_{2,i}) \wedge \\
& (\neg w_{i-1} \vee \neg q_i \vee v_{1,i} \vee v_{2,i} \vee w_i) \wedge (\neg w_{i-1} \vee \neg v_{1,i} \vee \neg v_{2,i} \vee \neg w_i \vee \neg w''_{i-1}) \wedge \\
& (\neg w_{i-1} \vee \neg v_{0,i} \vee \neg v_{1,i} \vee \neg w_i \vee \neg w''_{i-1}) \wedge (\neg w_{i-1} \vee \neg v_{0,i} \vee \neg v_{1,i} \vee \neg v_{2,i} \vee \neg w''_{i-1}) \wedge \\
& (\neg w_{i-1} \vee q_i \vee \neg v_{2,i} \vee \neg w_i \vee \neg w''_{i-1}) \wedge (\neg w_{i-1} \vee \neg q_i \vee v_{0,i} \vee v_{1,i} \vee w''_{i-1}) \wedge \\
& (\neg w_{i-1} \vee q_i \vee \neg v_{0,i} \vee \neg w_i \vee \neg w''_{i-1}) \wedge (\neg w_{i-1} \vee \neg q_i \vee v_{0,i} \vee w_i \vee w''_{i-1}) \wedge \\
& (\neg w_{i-1} \vee \neg q_i \vee v_{1,i} \vee w_i \vee w''_{i-1}) \wedge (\neg w_{i-1} \vee q_i \vee \neg v_{0,i} \vee \neg v_{1,i} \vee \neg w''_{i-1}) \wedge \\
& (\neg w_{i-1} \vee \neg q_i \vee v_{2,i} \vee w_i \vee w''_{i-1}) \wedge (\neg w''_{i-3} \vee v_{2,i} \vee w_i) \quad \text{for } 3 \leq i \leq n-1.
\end{aligned} \right.
\end{aligned}
\tag{10}$$