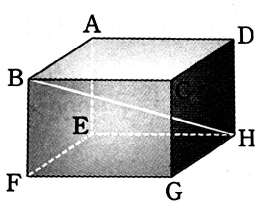
Ⅰ. 다항식 대단원 평가하기

1. 다음 조건을 만족시키는 두 다항식 A, B를 구하시오.

$$A+2B=5x^3-4x^2-4$$
$$A-B=-x^3+5x^2+5$$

$A+2B=5x^3-4x^2-4$ … ①
$A-B=-x^3+5x^2+5$ … ②
①－②를 하면
$3B=6x^3-9x^2-9$
$B=2x^3-3x^2-3$ … ③
③을 ②에 대입하면
$A-(2x^3-3x^2-3)=-x^3+5x^2+5$
$A=x^3+2x^2+2$

2. 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 모든 모서리의 길이의 합은 $24\,\text{cm}$이고 겉넓이가 $20\,\text{cm}^2$일 때, 이 직육면체의 대각선의 길이를 구하시오.



$\overline{FG}=a$, $\overline{GH}=b$, $\overline{HD}=c$라 하자.
모든 모서리의 길이의 합이 24이므로 $4(a+b+c)=24$에서
$a+b+c=6$ … ①
겉넓이가 20이므로 $2(ab+bc+ca)=20$에서
$ab+bc+ca=10$ … ②
$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$이므로 ①, ②에서
$6^2=a^2+b^2+c^2+2\times10$
$a^2+b^2+c^2=16$
따라서 이 직육면체의 대각선의 길이는
$\overline{FD}=\sqrt{\overline{FH}^2+\overline{HD}^2}$
$=\sqrt{(\overline{FG}^2+\overline{GH}^2)+\overline{HD}^2}$
$=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{16}=4$

3. $x+y=3$, $x^2+y^2=5$일 때, x^3+y^3의 값을 구하시오.

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$에서 $3^2=5+2xy$이므로 $xy=2$
따라서 $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=3^3-3\times2\times3=9$

4. 다항식 x^3-3x^2+3x+a가 x^2-x+1로 나누어떨어질 때, 상수 a의 값을 구하시오.

다항식 x^3-3x^2+3x+a를 x^2-x+1로 나누면
$x^3-3x^2+3x+a=(x^2-x+1)(x-2)+a+2$
이때 나머지가 $a+2$이므로 $a+2=0$
따라서 $a=-2$

5. 다음은 조립제법을 이용하여 x^3-4x^2+3x+1을 $x-2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하는 과정이다. 상수 a, b, c, d, e의 값을 구하시오.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & a & 3 & b \\ & & 2 & c & -2 \\ \hline & d & -2 & -1 & \boxed{e} \end{array}$$

x^3-4x^2+3x+1을 $x-2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하는 과정은 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -4 & 3 & 1 \\ & & 2 & -4 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & -1 & \boxed{-1} \end{array}$$

따라서 $a=-4$, $b=1$, $c=-4$, $d=1$, $e=-1$

6. 다항식 $(2x^3-x^2+5x-3)^3(4x-1)^2$을 전개했을 때, 상수항을 포함한 모든 계수들의 합을 구하시오.

상수 a_0, a_1, a_2, …, a_{11}에 대하여
$(2x^3-x^2+5x-3)^3(4x-1)^2=a_{11}x^{11}+a_{10}x^{10}+\cdots+a_1x+a_0$
라고 하자. 이 식은 x에 대한 항등식이므로
$a_0+a_1+\cdots+a_{11}=(2\times1^3-1^2+5\times1-3)^3\times(4\times1-1)=243$
따라서 구하는 모든 계수들의 합은 243이다.

7. 다항식 x^3+ax+b가 다항식 $(x-1)^2$으로 나누어떨어질 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

다항식 x^3+ax+b을 $(x-1)^2=x^2-2x+1$로 나누면
$x^3+ax+b=(x^2-2x+1)(x+2)+(a+3)x+b-2$
이때 나머지가 $(a+3)x+b-2$이므로 $a+3=0$, $b-2=0$
따라서 $a=-3$, $b=2$

8. $x-y=2$를 만족시키는 모든 실수 x, y에 대하여 등식 $ax^2+8x+by^2+c=0$이 성립할 때, 상수 a, b, c의 값을 구하시오.

$x-y=2$에서 $y=x-2$이므로
$ax^2+8x+by^2+c$
$=ax^2+8x+b(x-2)^2+c$
$=ax^2+8x+b(x^2-4x+4)+c$
$=(a+b)x^2+(-4b+8)x+4b+c=0$
이 식이 x에 대한 항등식이므로
$a+b=0$, $-4b+8=0$, $4b+c=0$
따라서 $a=-2$, $b=2$, $c=-8$

9. 다항식 $P(x)$를 x^2+x로 나누었을 때의 몫이 $x+2$이고 나머지가 $2x+3$이다. $P(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

$P(x)=(x^2+x)(x+2)+2x+3$
따라서 $P(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는
$P(-2)=2\times(-2)+3=-1$

10. 다항식 $x^{50}-x^{25}+1$을 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라고 할 때, $Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

다항식 $x^{50}-x^{25}+1$을 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는
$(-1)^{50}-(-1)^{25}+1=3$이므로
$x^{50}-x^{25}+1=(x+1)Q(x)+3$
이 식은 x에 대한 항등식이므로 $x=1$을 대입하면
$1^{50}-1^{25}+1=(1+1)Q(1)+3$
$Q(1)=-1$
따라서 구하는 나머지는 $Q(1)=-1$이다.

11. 다항식 $P(x)$에 대하여 두 다항식 $P(x)+2$, $xP(x)+x+1$이 모두 $x-a$로 나누어떨어질 때, 상수 a의 값을 구하시오

다항식 $P(x)+2$가 $x-a$로 나누어떨어지므로
$P(a)+2=0$
$P(a)=-2$ … ①
다항식 $xP(x)+x+1$가 $x-a$로 나누어떨어지므로
$aP(a)+a+1=0$
①에서 $a\times(-2)+a+1=0$이므로 $a=1$

12. 이차식 $P(x)$에 대하여 다항식 $P(2x+4)$가 $x+2$로 나누어떨어지고, 다항식 $(x-2)^2P(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 나머지가 9이다. $P(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

$P(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$라고 하자.
다항식 $P(2x+4)$가 $x+2$로 나누어떨어지므로
$P(2\times(-2)+4)=P(0)=c=0$
다항식 $(x-2)^2P(x)$를 $x^2-1=(x+1)(x-1)$로 나누었을 때의 나머지가 9이므로
$(-1-2)^2P(-1)=9P(-1)=9$
$P(-1)=1$
에서 $a-b=1$ … ①
$(1-2)^2P(1)=P(1)=9$
에서 $a+b=9$ … ②
①, ②를 연립하며 풀면 $a=5$, $b=4$
따라서 $P(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는
$P(2)=5\times 2^2+4\times 2=28$

13. 다음 다항식을 인수분해하시오.

(1) $(x+1)(x-2)(x-3)(x-6)+36$

(2) $(x-1)^3+3(x-1)^2(x+2y)+3(x-1)(x+2y)^2+(x+2y)^3$

(1) $(x+1)(x-2)(x-3)(x-6)+36$

$=(x^2-5x-6)(x^2-5x+6)+36$

$x^2-5x=X$로 놓으면

$(x^2-5x-6)(x^2-5x+6)+36$

$=(X-6)(X+6)+36$

$=X^2$

$=(x^2-5x)^2$

$=x^2(x-5)^2$

(2) $(x-1)^3+3(x-1)^2(x+2y)+3(x-1)(x+2y)^2+(x+2y)^3$

$=\{(x-1)+(x+2y)\}^3$

$=(2x+2y-1)^3$

14. 인수분해 공식을 이용하여 $\dfrac{999^3+1}{998\times999+1}$의 값을 구하시오.

$\dfrac{999^3+1}{998\times999+1}$

$=\dfrac{(999+1)(999^2-999+1)}{(999-1)\times999+1}$

$=\dfrac{(999+1)(999^2-999+1)}{999^2-999+1}$

$=999+1=1000$

15. 다항식 $3x^3+ax^2-2x+b$가 다항식 x^2-x-2로 나누어떨어질 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

$P(x)=3x^3+ax^2-2x+b$라고 하자.

$P(x)$가 $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$로 나누어떨어지므로

$P(2)=0$에서 $4a+b+20=0$ … ①

$P(-1)=0$에서 $a+b-1=0$ … ②

①, ②를 연립하며 풀면 $a=-7$, $b=8$

16. 다항식 $x^3-4x^2-(k^2-3k-3)x+k^2-3k$가 $(x-a)(x-b)(x-c)$로 인수분해된다. a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형 ABC가 이등변삼각형이 되도록 상수 k의 값을 정하시오.

$P(x)=x^3-4x^2-(k^2-3k-3)x+k^2-3k$라 하면

$P(1)=0$이므로 $x-1$은 $P(x)$의 인수이다.

조립제법을 이용해 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -4 & -k^2+3k+3 & k^2-3k \\ & & 1 & -3 & -k^2+3k \\ \hline & 1 & -3 & -k^2+3k & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x-1)(x^2-3x-k^2+3k)=(x-1)(x-k)(x-3+k)$

그러므로 삼각형 ABC의 세 변의 길이는 1, k, $3-k$이다.

이때 삼각형 ABC가 이등변삼각형이 되려면

$k=1$ 또는 $k=3-k$ 또는 $3-k=1$

즉, $k=1$ 또는 $k=\dfrac{3}{2}$ 또는 $k=2$

(i) $k=1$ 또는 $k=2$인 경우: 삼각형 ABC의 세 변의 길이는 1, 1, 2이다. $1+1=2$이므로 삼각형이 결정되지 않는다.

(ii) $k=\dfrac{3}{2}$인 경우: 삼각형 ABC의 세 변의 길이는 1, $\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{3}{2}$이므로 이등변삼각형이 된다.

(i), (ii)에서 $k=\dfrac{3}{2}$