

Basic concept

- Vector Space (벡터공간)

→ 1차원인 \mathbb{R} 은 1공간이면
3차원인 \mathbb{R}^3 은 3공간이다

↳ Linear combination 연산이 같은 공간상에 존재하는 벡터끼리 가능한 공간

- Linear combination (선형 결합)

↳ 주어진 벡터 $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ 을 벡터공간 V 의 벡터라고 할때, 임의의 스칼라 k_1, k_2, \dots, k_n 을 곱해서 더한것

- Span 생성 (공간을 포괄한다)

$$\text{Span}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i \mid k \in \mathbb{N}, v_i \in S, \lambda_i \in \mathbb{K} \right\}$$

⇒ 공집합이 아닌 집합 S 이 Span 은 S 의 원소들이 가능한 모든 선형결합의 집합

- Subspace (부분공간)

V, W 가 벡터공간일때, V 가 W 의 부분집합이면 (V is W 's subspace)

$$V = \{ (3, 2, 1), (2, 1, 6) \} \quad W = \{ (3, 2, 1), (2, 1, 6), (4, 7, 1), (-2, 3, 1) \}$$

ex) 2차원에 포함된 벡터공간의 경우, 가장 작은것은 $\{0, 0\}$ 이며, 큰것은 \mathbb{R}^2 2차공간



Basis (기저)

집합 S 가 벡터공간 V 를 표현할수 있는 최소한의 집합이면 S 를 V 의 기저라고 한다

(예) 2차원 벡터공간 V 의 Basis = $((0,1), (1,0))$ (좌표축을 의미)

→ Basis vector span space (기저벡터는 공간을 생성)

→ Basis vector is linear independent (" 선형 독립")

determinant 행렬식

↳ 역행렬 존재유무 판별

값도

→ 기하학적인 meaning : 2차 행렬식의 절대값은 두 벡터로 이뤄진 평행사변형 넓이와

즉, 좌표 평면의 도형을 행렬로 1차변환 할때, 변환한

$$\hookrightarrow \det(A) = ad - bc$$

도형의 넓이는 변환된 넓이에 절대값을 곱한 것과 같다.

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

Linear independence / dependence

Linear independence

↳ 벡터 집합의 어떠한 원소도 나머지 원소들의 선형결합으로 나타낼 수 없다

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_3 = \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{과 같은 해가 unique 한지 여부도 구분할 수 있다}$$

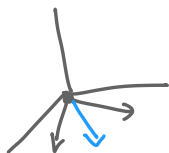
↳ 3차원 공간에 벡터 4개만으로도 선형적으로 무조건 존재

벡터 2개만으로도 (선형적립 \Rightarrow 해 10개)
(선형 독립 \Rightarrow 해 1개)

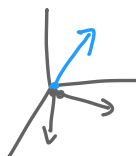
Linear dependence

으로 나타낼 가능

↳ 벡터 집합 소의 원소들 중에서도 한개나 나머지 원소들의 선형결합



(depen)



(independ)

(벡터집합)

(선형)

행렬과 관련

$$S = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\} \quad k_1, k_2, k_3, \dots, k_n \Rightarrow u_1 k_1 + \dots + u_n k_n = 0$$

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ & & i & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ i \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det(A) \neq 0$ 이면 $x = (0, 0, \dots, 0)^T$ 유일한 해

$\det(A) = 0$ 이면 $x = (0, 0, \dots, 0)^T$ 이외의 여러개

연산안하고도 알 수 있는 경우

(벡터의 차원보다 벡터 개수가 많다 \Rightarrow dependence
어떤 벡터의 스칼라배인 벡터 존재하는 경우 \Rightarrow dependence)

Linear transformation

- Linear transformation (선형변환)

↳ def: A transformation (or mappings) T is linear
if $T(cu + dv) = cT(u) + dT(v)$ for all u, v

ex) $T: x \rightarrow 3x$

$x_1 = 1 \rightarrow 3$

$x_2 = 4 \rightarrow 12$

$\Rightarrow T$ is linear transformation

$$T(4x_1 + 5x_2) = 24 \rightarrow 12 = T(4x_1) + T(5x_2) = 12 + 60 = 72$$

ex) $T: x \rightarrow 3x + 2$

$x_1 = 1 \rightarrow 5$

$x_2 = 2 \rightarrow 8$

(bias ~~0이냐~~ LT or Affine Transformation)
이러함)

$\Rightarrow T$ is not linear transformation

$$T(3x_1 + 4x_2) = 11 \rightarrow 35 \neq T(3x_1) + T(4x_2) = 11 + 26 = 37$$

ex) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ 라고 할 때 T 찾기

$$T(x) = T(x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = x_1 T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + x_2 T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$