Basic concept

- vector space (벡터공간) ↗ 1사분면 ↗는 +곱하면 3사분면 가서 안된다
  - ↳ Linear combination 연산이 같은 공간상에 존재하는 벡터끼리 가능한 공간

- Linear combination (선형 결합)
  - ↳ 주어진 벡터 $v_1, v_2, v_3, \dots v_n$을 벡터공간 V의 벡터라고 할때, 임의의 스칼라 $k_1, k_2, \dots k_n$을 곱한뒤 더한것

- Span 생성 (공간을 포괄한다)

  $$\mathrm{Span}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \,\middle|\, k \in N,\ v_i \in S,\ \lambda_i \in K \right\}$$

  ⇒ 공집합이 아닌 집합 S의 span은 S의 원소들이 가능한 모든 선형결합의 집합

- Subspace (부분공간)

  V, W가 벡터공간일때, V가 W의 부분집합이면 (V is W's subspace)

  V = ((3,2,1), (2,1,6)) W = ((3,2,1) (2,1,6) (4,7,1) (-2,3,1))

  ex) 2차원에 포함된 벡터공간의 경우. 가장 작은것은 {[0,0]} 이며, 큰것은 $\mathbb{R}^2$ 자기자신

리턴투 실버 티파니 38만 16

58만

티파니

x 38.5 티파니

- Basis (기저)

집합 S가 벡터공간 V를 표현할수 있는 최소한의 집합이면 S를 V의 기저라고 한다

↳ ex) 2차원 벡터공간 V의 Basis = ((0,1), (1,0)) (유일한것은 아님)

→ Basis vector span space (기저벡터는 공간을 생성)

→ Basis vector is linear Independent (〃 선형 독립)

- determinant 행렬식

↳ 역행렬 존재유무 판별

→ 기하학적 meaning : 2차 행렬식의 절대값은 두 벡터로 이뤄진 평행사변형 넓이와 같다.

즉, 좌표 평면의 도형을 행렬로 1차변환 할때, 변환한 도형의 넓이는 변환전 넓이에 절대값을 곱한것과 같다.

↳ $\det(A) = ad - bc$

$\det(AB) = \det(A)\det(B)$

Linear Independence / dependence

- Linear independence

↳ 벡터 집합의 어떠한 원소도 나머지 원소들의 선형결합으로 나타낼수 X

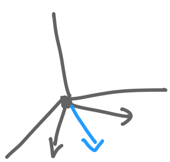
→ $\begin{bmatrix}6\\5\\4\end{bmatrix}x_1 + \begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}x_2 + \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}x_3 = \begin{bmatrix}12\\3\\4\end{bmatrix}$ 과같은것에서 해가 unique 한지 아닌지 구분할수 있음

↳ 3차원 공간에 벡터 4개인경우 선형의존 무조건 존재

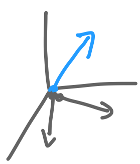
, 벡터 2개인경우 (선형의존 => 해 ∞개
선형 독립 => 해 1개

- linear dependence

↳ 벡터 집합 S의 원소중 적어도 하나는 나머지 원소들의 선형 결합 으로 나타낼 가능



<depen>



<indepen>

- 행렬 관점 (벡터집합) $S=\{u_1, u_2, u_3 \dots u_n\}$ (실수) $k_1, k_2, k_3, \dots k_n$ => $u_1k_1 + \dots + u_nk_n = 0$

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & & & \vdots \\ a_{1n} & & & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots \\ k_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots \\0\end{pmatrix}$$

=> $\det(A) \neq 0$ 이면 $x=(0,0,\dots 0)^T$ 유일한 해

$\det(A) = 0$ 이면 $x=(0,0,\dots 0)^T$ 이외의 여러해

연산안하고도 알수있는 경우 (벡터의 차원보다 벡터 개수가 많다 => dependence
어떤 벡터의 실수배인 벡터 존재하는 경우 => dependence

Linear transformation

- Linear transformation (선형변환)
  - def : A transformation (or mappings) T is linear if $T(cu+dv) = cT(u) + dT(v)$ for all u, v

ex) $T: x \to 3x$

$x_1 = 1 \to 3$

$x_2 = 4 \to 12$

$\Rightarrow$ T is linear transformation

$T(4x_1 + 5x_2) = 24 \to 72 = T(4x_1) + T(5x_2) = 12 + 60 = 72$

ex) $T: x \to 3x+2$ (bias 있는경우 LT 아니고 Affine Transformation 이라함)

$x_1 = 1 \to 5$

$x_2 = 2 \to 8$

$\Rightarrow$ T is not linear transformation

$T(3x_1 + 4x_2) = 11 \to 35 \neq T(3x_1) + T(4x_2) = 11 + 26 = 37$

ex) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $\quad T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}$, $T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$ 라고 할때 T 구하기

$T(x) = T\left(x_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = x_1 T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + x_2 T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$= x_1\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 0\\-1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$

▨ eigen value, vector

- 행렬 A를 선형변환으로 볼때 그 결과가 자기자신의 상수배가 되는 0이 아닌 벡터
  = eigen vector , 그 상수배 값 = eigen value

  => $Av = \lambda v$

- 기하학적 의미 : 방향은 보존, 스케일 값만 변환 (ex) 자전축)

ex) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ => $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$ => $(2-\lambda)(1-\lambda)^2 = 0$ $\lambda = 2, 1$

i) $\lambda = 2$ 일때 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = 0$ $v_x = v_y$, $v_z = 0$ (고유벡터-1)

ii) $\lambda = 1$ 일때 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = 0$ $v_x = 2v_z$

$(A-\lambda E)v = 0$ 을 푸는데 $(A-\lambda E)$가 역행렬 존재하면 안된다 왜냐면
$v = 0$ 이되면 안됨 (정의) 즉 $\det(A-\lambda E) \neq 0$ 으로 λ와 v를 구함

* 고유값은 unique 하지만 고유벡터는 상수 곱해면되 여러개 가능
그래서 normalized 한 것을 사용

$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$ $P(\lambda_1^k \cdots \lambda_n^k)P^{-1}$ $P\left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2} \cdots \frac{1}{\lambda_n}\right)P^{-1}$ $P\,\mathrm{diag}(f(\lambda_1)\cdots f(\lambda_n))P^{-1}$

Diagonalization

⇒ 손쉬운 연산 (det, n제곱, Inverse, trace) 가능

- 대각화 : 주어진 행렬을 대각행렬로 만듦 $P^{-1}AP \Rightarrow D$: 대각행렬이 된다

  ↳ 이는 $A = PDP^{-1}$

- 대칭행렬과 고유값 분해 ($A = A^T$)

  ⇒ 2가지 좋은 성질 ⇒ (항상 diagonalization 가능, 직교행렬 (orthogonal) 로 대각화 가능)

  $$A = P\Lambda P^{-1} = P\Lambda P^T \quad (P^{-1} = P^T)$$

  ↳ 특이값 분해 (SVD), PCA 에 쓰임

- Singular Value Decomposition (SVD) (특이값 분해)

  ↳ eigen value decomposition (EVD) 은 n×n 에서만 decom 이 가능하지만 SVD 은 크기 상관없이 m×n도 다 분해 됨

  $$A = U\Sigma V^T$$

  - U : m×m 직교행렬 ($AA^T = U(\Sigma\Sigma^T)U^T$)
  - V : n×n 직교행렬 ($A^TA = V(\Sigma^T\Sigma)V^T$)
  - Σ : m×n 직사각 대각행렬