

Image Processing & Vision Homework 4: Optical Flow

예술공학대학 컴퓨터예술학부

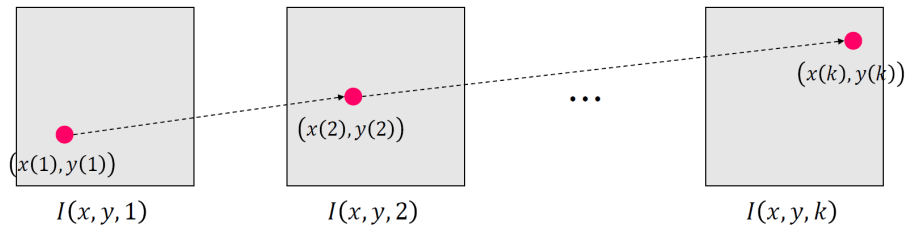
20190807 민정우

1. Optical Flow

Optical Flow는 이미지의 밝기 변화를 추적해 오브젝트의 움직임을 추정한다. Optical Flow는 연속한 프레임의 두 이미지에서 픽셀을 비교해 오브젝트의 움직임을 추정하며, 시간의 차이가 매우 작기 때문에 두 이미지의 동일한 오브젝트를 나타내는 픽셀이 다음 두 성질을 가진다고 가정한다.

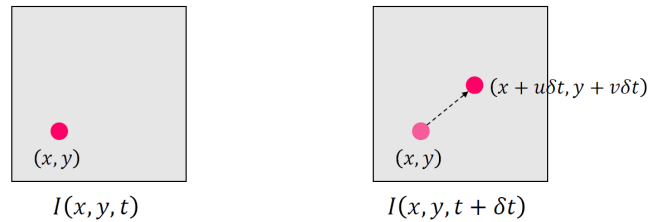
- Brightness constancy : 연속한 두 이미지의 픽셀의 밝기 변화가 일정하다고 가정한다.

$$I(x(t), y(t), t) = C \quad \text{where } t = 1, \dots, k$$



- Small motion : 픽셀의 움직임이 작다고 가정한다.

$$I(x + u\delta t, y + v\delta t, \delta t) = I(x, y, t)$$



따라서, Optical Flow는 같은 색상의 주위 픽셀을 찾아 오브젝트의 이동을 추정한다. Brightness constancy와 Small motion을 모두 적용한 방정식은 다음과 같다.

$$I(x, y, t) + \frac{\partial I}{\partial x} \delta x + \frac{\partial I}{\partial y} \delta y + \frac{\partial I}{\partial t} \delta t = I(x, y, t)$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} \delta x + \frac{\partial I}{\partial y} \delta y + \frac{\partial I}{\partial t} \delta t = 0$$

이 방정식을 dt 로 나누면 Brightness Constancy Equation을 구할 수 있다.

$$\frac{dI(x, y, t)}{dt} = \frac{\partial I}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial I}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial I}{\partial t} = 0$$

여기서 $\frac{\partial I}{\partial x}, \frac{\partial I}{\partial y}$ 는 Image gradients, $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ 는 Flow velocities, $\frac{\partial I}{\partial t}$ 는 Temporal gradient를 의미한다. $\frac{\partial I}{\partial x}, \frac{\partial I}{\partial y}, \frac{\partial I}{\partial t}$ 를 I_x, I_y, I_t 로, $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ 를 u, v 로 치환하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$I_x u + I_y v + I_t = 0$$

Image gradients인 I_x, I_y 는 Sobel Filter나 Canny Edge Detection 등으로 구할 수 있고, Temporal gradient인 I_t 는 두 이미지 간의 차이를 통해 계산할 수 있다. 아래 코드에서는 I_x, I_y 계산을 위해 Sobel Edge Detection을 통해 Image gradients를 계산했다.

```
# Compute the gradients w.r.to X, Y and T dimensions
# Solve with Sobel Edge detection
fx = cv2.Sobel(prev_fr, cv2.CV_64F, 1, 0, ksize=5) # Gradient of x-axis
fy = cv2.Sobel(prev_fr, cv2.CV_64F, 0, 1, ksize=5) # Gradient of y-axis
ft = next_fr - prev_fr # Gradient of time
```

그러나 u 와 v 는 이 방정식만으로 계산할 수 없는데, Lucas-Kanade method와 Horn-Shunck method를 통해 두 미지수를 구할 수 있다.

2. Lucas-Kanade method

Lucas-Kanade method는 window 안의 n 개의 픽셀이 전부 동일한 움직임을 가진다고 가정하고 window 내의 모든 픽셀에 대해 Brightness Constancy Equation을 구한다.

$$I_{x_1} u + I_{y_1} v = -I_{t_1}$$

$$I_{x_2} u + I_{y_2} v = -I_{t_2}$$

⋮

$$I_{x_n} u + I_{y_n} v = -I_{t_n}$$

이 연립방정식을 $Ax = b$ 의 행렬곱으로 나타낼 수 있다. 각 변수는 다음과 같다.

$$A = \begin{bmatrix} I_{x_1} & I_{y_1} \\ I_{x_2} & I_{y_2} \\ \vdots & \vdots \\ I_{x_n} & I_{y_n} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad b = -\begin{bmatrix} I_{t_1} \\ I_{t_2} \\ \vdots \\ I_{t_n} \end{bmatrix}$$

```
# Set the vector A and b for Ax=b to solve the equation for optical flow
A = np.column_stack((I_x, I_y))
b = -I_t
```

위 식에서 미지수 두 개를 구하는데 식이 n 개이므로 least square를 통해 근사치를 계산한다.

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$$

```
# find the x_hat vector, which is the predicted optical flow vector
# Solve with least squares
x_hat = np.dot(np.linalg.pinv(np.dot(A.T, A)), np.dot(A.T, b)) # Predicted u and v
```

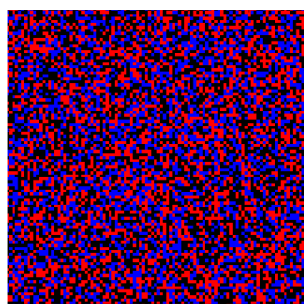
Lucas-Kanade method는 이미지의 작은 영역만을 보고 오브젝트의 이동 방향을 추정하기 때문에 불확실한 추정이 나타나는 aperture problem이 발생한다.

3. Horn-Shunck method

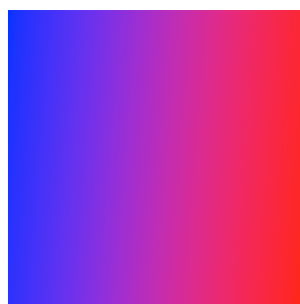
Horn-Shunck method는 Lucas-Kanade method가 가지는 aperture problem을 해결하기 위해 고안됐다. Horn-Shunck method는 Brightness Constancy와 Small motion뿐 아니라 smooth flow field를 함께 고려한다.

Smooth Flow Field는 인접한 영역이 균일하게 움직임을 가정하여 이미지의 전체의 흐름을 계산하는 것이다. Smooth Flow Field는 인접한 4방향을 고려하며 다음과 같이 계산한다.

$$E_s(i, j) = \frac{1}{4} [(u_{i,j} - u_{i+1,j})^2 + (u_{i,j} - u_{i,j+1})^2 + (v_{i,j} - v_{i+1,j})^2 + (v_{i,j} - v_{i,j+1})^2]$$



Large differences
between neighboring flows



Small differences
between neighboring flows

Lucas-Kanade method와 마찬가지로 Horn-Shunck method 또한 Brightness Constancy를 고려하며 다음과 같이 계산한다.

$$E_b(i, j) = [I_x(i, j)u_{i,j} + I_y(i, j)v_{i,j} + I_t(i, j)]^2$$

Horn-Schunck Optical Flow는 다음과 같이 계산한다.

$$\min_{u, v} \sum_{i, j} E_s(i, j) + \lambda E_b(i, j)$$

Horn-Schunck method는 Image gradients I_x, I_y 와 Temporal gradient인 I_t 를 미리 계산하고, optical flow field의 벡터 u, v 를 0으로 초기화한다. u, v 는 다음 수식에 따라 점진적으로 갱신한다.

$$\hat{u}_{k,l} = \bar{u}_{k,l} - \frac{I_x \bar{u}_{k,l} + I_y \bar{v}_{k,l} + I_t}{\lambda^{-1} + I_x^2 + I_y^2} I_x, \quad \hat{v}_{k,l} = \bar{v}_{k,l} - \frac{I_x \bar{u}_{k,l} + I_y \bar{v}_{k,l} + I_t}{\lambda^{-1} + I_x^2 + I_y^2} I_y$$

4. Compare the two methods

Lucas-Kanade method와 Horn-Schunck method는 Brightness Constancy와 Small Motion을 가정하고 Optical Flow를 추정하는 공통점을 가지고 있다. 이와 함께 Lucas-Kanade method는 window 영역에서 움직임이 일정하다고 가정하고 Local 영역에서 움직임을 추정하며, Horn-Schunck method는 인접한 영역이 균일하게 움직인다고 가정하고 Global 영역에서 움직임을 추정하는 차이점을 가지고 있다.