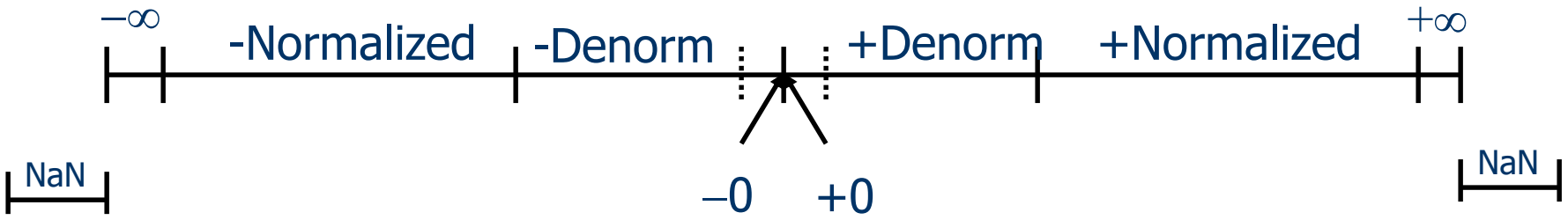
CHUNGNAM NATIONAL UNIVERSITY

시스템 프로그래밍

강의 3 : 2.4 실수의 표현 및 처리 - IEEE 754

http://eslab.cnu.ac.kr

소수 표현 요약

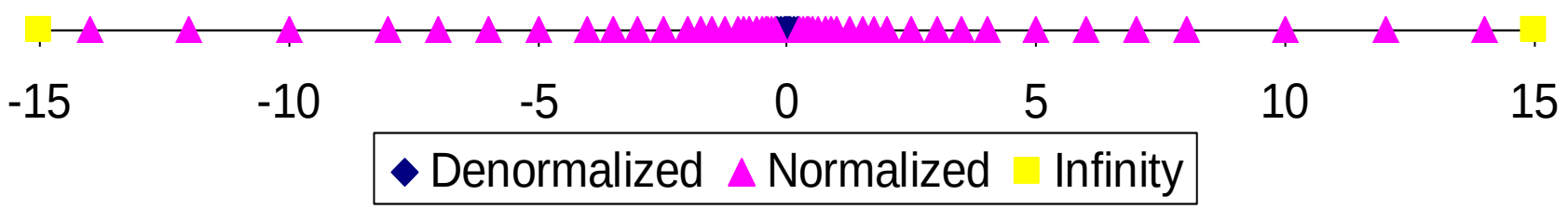


값의 분포 – 6비트 체계

6 비트 IEEE 유사한 형식으로 표시하는 경우

- e = 3 비트 지수
- f = 2 비트 소수
- 바이어스 = 3
- 정규화 최대값은 14

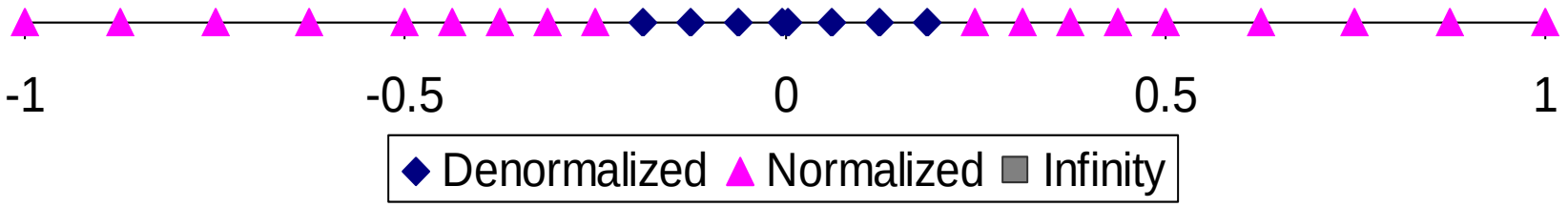
0 부근에서 왜 분포가 조밀해 지는지 파악해 보자



값의 분포(확대)

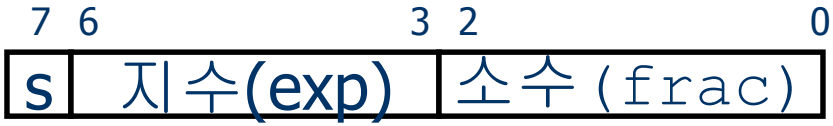
6 비트 IEEE 유사한 형식으로 표시하는 경우

- e = 3 비트 지수
- f = 2 비트 소수
- 바이어스 = 3



간단한 Floating Point 시스템 예제

- 8-bit Floating Point 표시
  - 부호비트는 MSB로 표시.
  - 다음 4비트는 바이어스 값 7로 exp로 사용.
  - 마지막 3비트는 `frac`
- IEEE Format 과 동일한 일반적인 형태
  - 정규화, 비정규화 표시 사용
  - 0, NaN, infinity 등 표시 사용



지수 값의 범위

Exp	exp	E	2^E	
0	0000	-6	1/64	(비정규화)
1	0001	-6	1/64	
2	0010	-5	1/32	
3	0011	-4	1/16	
4	0100	-3	1/8	
5	0101	-2	1/4	
6	0110	-1	1/2	
7	0111	0	1	
8	1000	+1	2	
9	1001	+2	4	
10	1010	+3	8	
11	1011	+4	16	
12	1100	+5	32	
13	1101	+6	64	
14	1110	+7	128	
15	1111	n/a		(inf, NaN)

bias=7

E=1-bias

E=exp-bias

8비트 시스템 - 표현 가능 수(양수)

$(-1)^s\ M\ 2^E$

	s	exp	frac	E	Value	
비정규화 수	0	0000	000	-6	0	
	0	0000	001	-6	1/8*1/64 = 1/512	← 0 에 가장 가까운 값
	0	0000	010	-6	2/8*1/64 = 2/512	
	…					
	0	0000	110	-6	6/8*1/64 = 6/512	
	0	0000	111	-6	7/8*1/64 = 7/512	← 최대 비정규화 수
정규화 수	0	0001	000	-6	8/8*1/64 = 8/512	← 최소 정규화 수
	0	0001	001	-6	9/8*1/64 = 9/512	
	…					
	0	0110	110	-1	14/8*1/2 = 14/16	
	0	0110	111	-1	15/8*1/2 = 15/16	← 1 에 가장근접한 수
	0	0111	000	0	8/8*1 = 1	
	0	0111	001	0	9/8*1 = 9/8	← 1에 가장근접한 수
	0	0111	010	0	10/8*1 = 10/8	
	…					
	0	1110	110	7	14/8*128 = 224	
	0	1110	111	7	15/8*128 = 240	← 최대 정규화 수
	0	1111	000	n/a	inf	

Floating Point 근사(Rounding)

근사 과정

- 먼저 정확한 값을 계산한다
- 그 결과를 원하는 정밀도로 조정한다
  - 만일 지수부가 너무 크다면 오버플로우일 수 있다
  - `frac` 필드의 길이에 맞출 수 있도록 반올림 한다

근사 방법의 선택

	$1.40	$1.60	$1.50	$2.50	–$1.50
0 방향	$1	$1	$1	$2	–$1
내림(-∞)	$1	$1	$1	$2	–$2
올림 (+∞)	$2	$2	$2	$3	–$1
인접짝수 (default)	$1	$2	$2	$2	–$2

Q. 웬 짝수 ?

Note:

1. 버림: 근사값은 참값보다 클 수 없다.
2. 올림: 근사값은 참값보다 작을 수 없다.

인접 짝수 모드(Round-To-Even)

컴퓨터에서 사용하는 기본(Default) 근사모드

- 어셈블리 언어 수준까지 이해하지 않고는 설명할 수 없다
- 다른 근사 모드들은 모두 통계적으로 편향되어 있다
  - 여러 개의 근사한 양수들의 합은 과대(또는 과소)평가 하게 된다

십진수에서 근사법의 적용

- 두 개의 가능한 값의 정 중간 값인 경우(그 이외의 경우에는 반올림)
  - 최소 자리값이 짝수가 되도록 근사
- E.g., 0.01의 자리로 근사하는 경우

1.2349999	1.23	(정 중간 보다 작다)
1.2350001	1.24	(정 중간보다 크다)
1.2350000	1.24	(정 중간 값 – 올림)
1.2450000	1.24	(정 중간 값— 내림)

이진수에서의 근사법

이진 소수의 표현

- "짝수" 는 최소 유효 값이 0 인 경우를 말함
- 근사의 대상이 되는 중간값의 표시는 근사하는 자리 바로 오른쪽의 비트가 = xxx100...$_2$

Examples

- 1/4 자리로 근사하는 경우(2 진 소숫점이하 2번째 자리로)

값	이진수	근사값	연산	근사값(10진수)
2 3/32	10.00011_2	10.00_2	(<1/2—down)	2
2 3/16	10.00110_2	10.01_2	(>1/2—up)	2 1/4
2 7/8	10.11100_2	11.00_2	(1/2—up)	3
2 5/8	10.10100_2	10.10_2	(1/2—down)	2 1/2

종합 적용 : Floating point 수 만들기

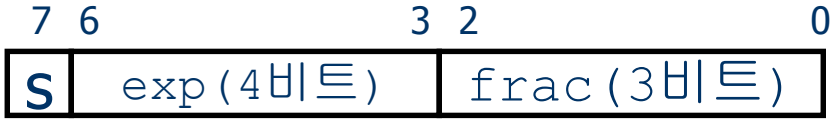
과정

- 1 이 맨 앞에 올 수 있도록 정규화(Normalize)
- 소수점 자리(fraction)에 맞도록 반올림
- 반올림 효과를 반영하기 위한 정규화 후처리(Post-normalize)

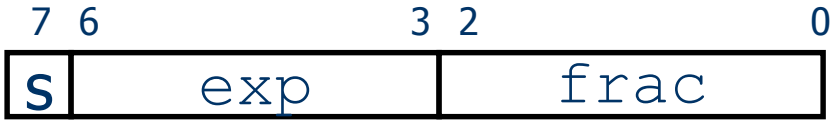
예)

- 8-bit 비부호형 수를 아래와 같은 간단한 floating point format 으로 표시해보자
- Example Numbers(128 => 128.0 으로 표시하기)

128	10000000
15	00001101
33	00010001
35	00010011
138	10001010
63	00111111



1단계 : 정규화하기

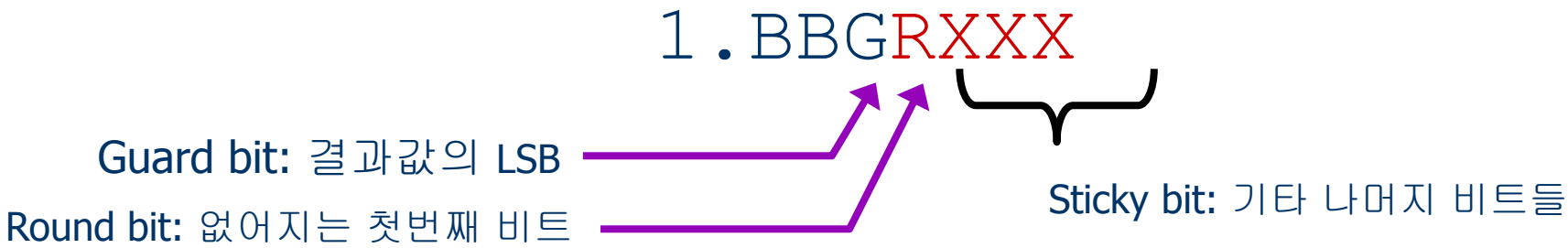


요구사항

- 이진 소수의 위치를 이동해서 ***1.xxxxx 의 형태가*** 되도록 한다
- 자리수 만큼 0 을 채운다
  - 지수값을 소수점 위치에 맞도록 조정

Value	Binary	M	E
128	10000000	1.0000000	7
13	00001101	1.1010000	3
17	00010001	1.0001000	4
19	00010011	1.0011000	4
138	10001010	1.0001010	7
63	00111111	1.1111100	5

2단계 : 근사



* frac 필드가 3비트 이므로, 1/8 위치로 근사해야 한다.

반올림 조건

- Round = 1, Sticky = 1 ➔ > 0.5
- Guard = 1, Round = 1, Sticky = 0 ➔ 인접짝수

Value	소수	GRS	올림?	근사값
128	1.0000000	000	N	1.000
13	1.1010000	100	N	1.101
17	1.0001000	010	N	1.000
19	1.0011000	110	Y	1.010
138	1.0001010	011	Y	1.001
63	1.1111100	111	Y	10.000

3단계 : 정규화 후처리

방법

- 근사화 결과 오버플로우가 발생했을지 모른다
- 우측으로 한 자리 shift 하고, 지수값을 1 증가시킨다(정규화 작업)

Value	근사값	지수	조정후	결과
128	1.000	7		128
13	1.101	3		13
17	1.000	4		16
19	1.010	4		20
138	1.001	7		144
63	10.000	5	1.000/6	64

int에서 float으로 타입이 바뀌면 결과값이 달라진다!!!

Practice 5 : IEEE 소수표현 – 인코딩

❖ 다음의 이진수들을 소수점 첫째 자리로 짝수 근사법을 이용하여 근사법을 보이시오

1. 10.010_2
2. 10.011_2
3. 10.110_2
4. 11.001_2

Practice 6 : IEEE 소수표현 – 인코딩

❖ 아래와 같은 시스템이 있다고 할 때 아래소수를 IEEE 소수로 표현하시오. 인접짝수 근사를 이용하시오.

- **8-bit Floating Point**
- **부호비트는 MSB로 표시.**
- **다음 4비트는 바이어스 값 7로 지수부로 사용.**
- **마지막 3비트는 `frac`**

1. 10.010_2
2. 10.011_2
3. 10.110_2
4. 11.001_2

C 언어에서의 Floating Point

C 에서는 2개의 정밀도를 제공

`float`	single precision
`double`	double precision

변환

- `int`, `float`, `double` 간의 casting 은 값을 변화시킨다
- `Double`, `float` 에서 `int` 로의 변환
  - 소수 부분을 제거
  - 0 방향으로의 근사와 동일
  - 무한대 또는 NaN 의 경우에는 정의 되어 있지 않음
    - 일반적으로 TMin
- `int` 에서 `double` 로
  - 정확한 변환, 정수가 53비트 보다 짧은 경우에만
- `int` 에서 `float` 로
  - 근사 모드에 따라 근사화

인코딩의 특징

- FP에서의 0 은 정수에서의 0 과 동일하다
  - 모든 비트들 = 0
- 비부호 정수 비교를 사용할 수 있다(거의)
  - 먼저 부호비트를 비교해야 한다
  - -0 = 0 인 점을 고려해야 한다
  - NaN의 경우는 문제가 생긴다
    - 다른 모든 값들보다는 클 것인가
    - 비교의 결과는 무엇인가?
  - 그렇지 않은 다른 경우는 OK
    - 비정규화 vs. 정규화
    - 정규화 vs. 무한대

Ariane 5

- 이륙후 37초 후 폭파
- 위성체 손실규모 5천억원

이유

- 수평 속도를 64비트 floating point 형으로 계산한 후에 16-bit int 타입으로 변환한 후에 오버플로우 발생
- Ariane 4 로켓에서는 이 수평속도 값의 범위를 정의하여, 정상동작
- Ariane 5 로켓에서는 치명적 오류로 판단
  - 동일한 소프트웨어를 사용해서

Summary

컴퓨터에서 부동소숫점의 표시 방식을 이해해야 한다.

IEEE Floating Point 표준은 명쾌한 수학특성을 갖는다

- $M \times 2^E$ 형태의 수 표현
- 실제 구현 방법과 관계없이 연산을 적용할 수 있다
  - 마치 완벽한 정밀도로 계산한 후에 근사화 한 것 처럼
- 실제 연산과 일치하는 것은 아니다
  - 교환/배분 법칙에 위배되는 경우가 있다
  - 컴파일러 개발자나 고급 프로그래머들에게는 큰 위협

부동소숫점의 표현도 다른 데이터 타입간의 혼용 또는 변환을 하는 경우에 주의해야 한다.

** 예습 숙제