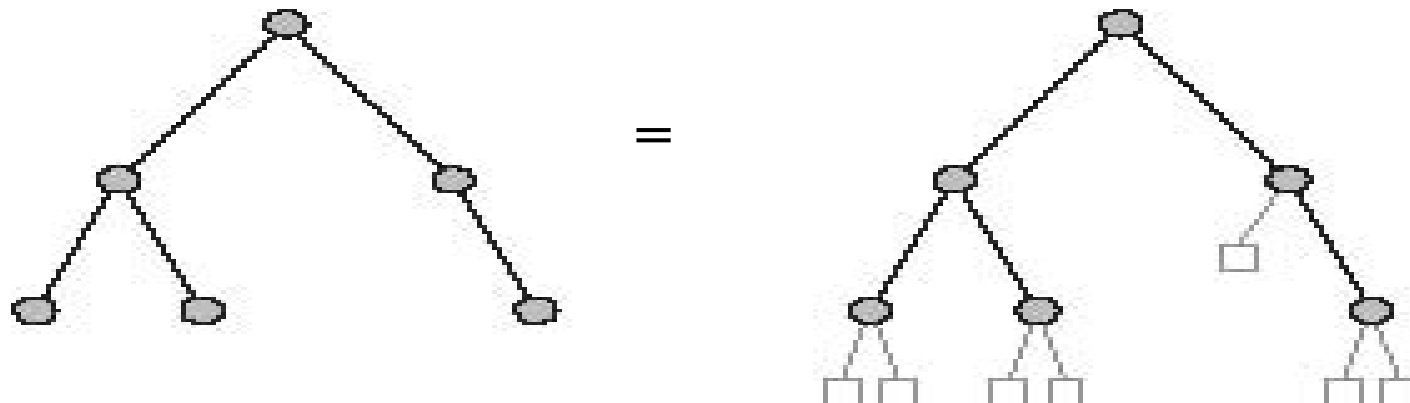
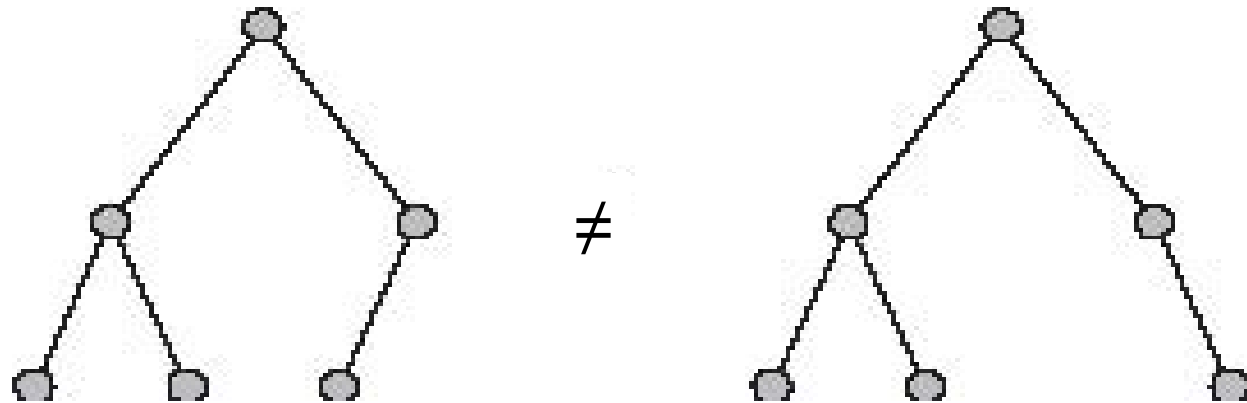


12. 이진 트리

12.1 이진 트리의 정의

- 정의
 - 이진 트리는 공집합이거나 x 가 루트이고 L 과 R 은 둘 중 어떤 것도 x 를 포함하지 않는 서로 분리된 이진 트리일 때, 삼원소 쌍 (x, L, R) 이다. 트리 L 과 R 을 루트 x 의 왼쪽 서브트리와 오른쪽 서브트리라고 부른다.
- 이진 트리는 순서 트리임
 - 두 서브트리 L 과 R 이 "왼쪽"과 "오른쪽"이라는 이름으로 구분됨
 - 이진 트리의 모든 공백이 아닌 노드는 반드시 왼쪽 서브트리와 오른쪽 서브트리를 가져야 함
 - 서브트리는 모두 공백일 수 있음

이진 트리의 예



12.2 이진 트리의 특성

- 높이가 h 인 포화 이진 트리의 크기

$$n = 2^{h+1} - 1 \qquad n = \frac{d^{h+1} - 1}{d - 1}$$

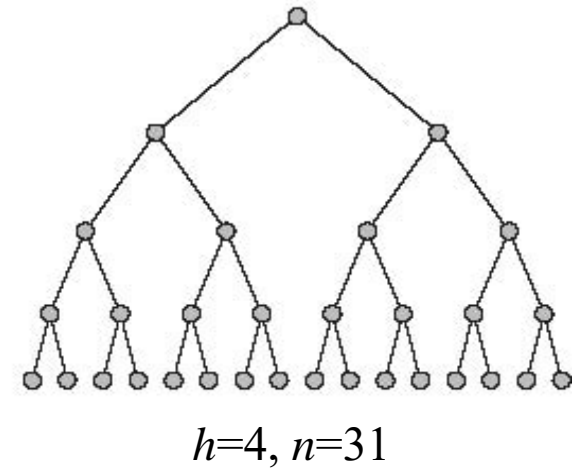
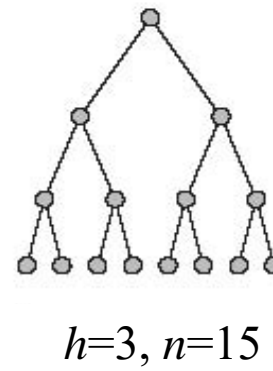
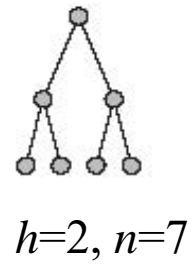
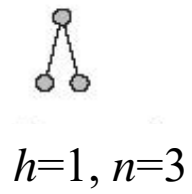
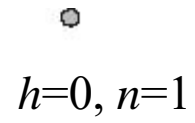
- 높이가 h 인 이진 트리의 크기에 대한 범위

$$h + 1 \leq n \leq 2^{h+1} - 1 \qquad h + d \leq n \leq \frac{d^{h+1} - 1}{d - 1}$$

- 크기가 n 인 공백이 아닌 이진 트리의 높이

$$\lfloor \lg n \rfloor \leq h \qquad (\text{포화트리 } h = \theta(\log n))$$

포화 이진 트리

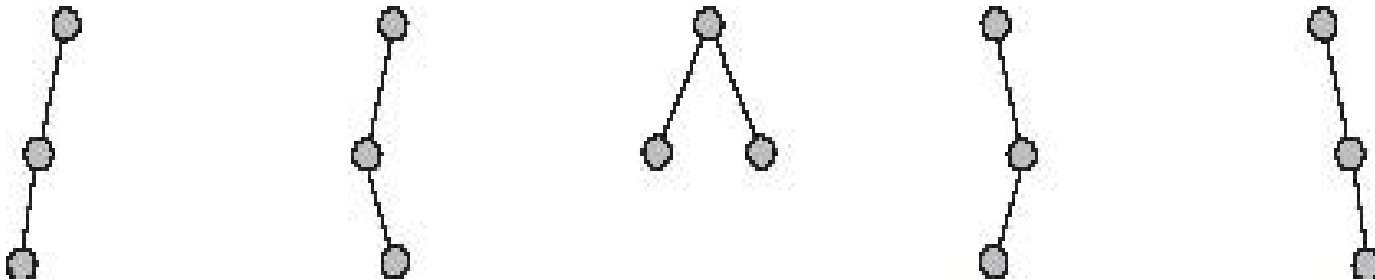


12.3 이진 트리의 개수 세기

- 크기가 2인 2 개의 이진 트리



- 크기가 3인 5 개의 이진 트리



카탈로니아 수

- 카탈로니아 수(Catalan number)
 - 이진 트리의 개수를 세는데 사용되는 폐쇄형 공식

크기가 n 인 이진트리의 개수

$$C_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$

- 크기가 5인 이진 트리의 개수

$$C_5 = \frac{(2(5))!}{(5)!((5)+1)!} = \frac{10!}{5!6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 42$$

12.4 이진 트리 순회 알고리즘 (1)

- 레벨 순서 순회
 1. 큐를 초기화한다.
 2. 루트를 큐에 삽입한다.
 3. 큐가 공백이 될 때까지 단계 4-7을 반복한다.
 4. 큐에서 첫 번째 노드 x 를 삭제한다.
 5. x 를 방문한다.
 6. 만일 x 의 왼쪽 자식이 존재하면, 그것을 큐에 삽입한다.
 7. 만일 x 의 오른쪽 자식이 존재하면, 그것을 큐에 삽입한다.
- 순환 전위 순회
 1. 루트를 방문한다.
 2. 만일 왼쪽 서브트리가 공백이 아니면, 그것에 대해 전위 순회를 수행한다.
 3. 만일 오른쪽 서브트리가 공백이 아니면, 그것에 대해 전위 순회를 수행한다.

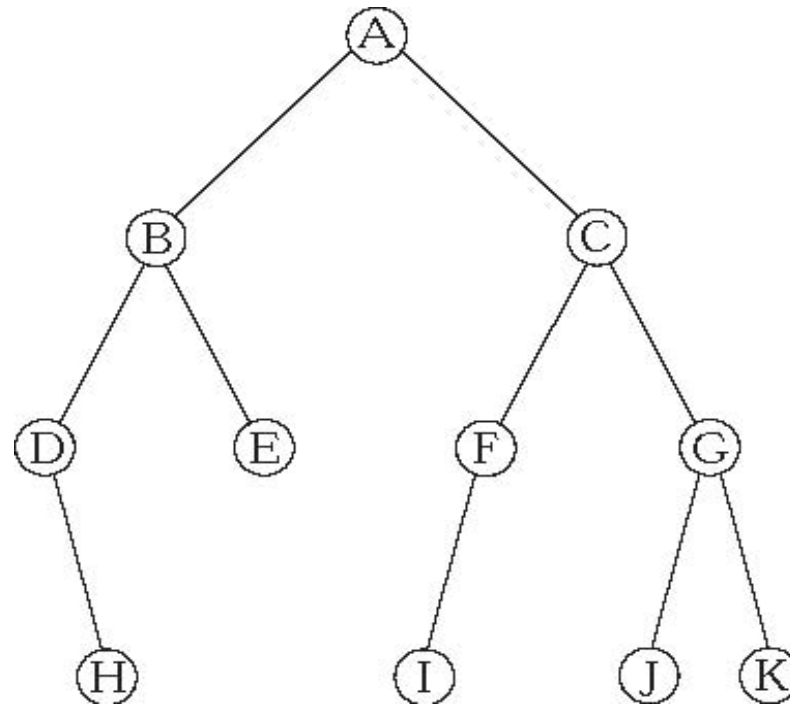
이진 트리 순회 알고리즘 (2)

- 순환 후위 순회
 1. 만일 왼쪽 서브트리가 공백이 아니면, 그것에 대해 후위 순회를 수행한다.
 2. 만일 오른쪽 서브트리가 공백이 아니면, 그것에 대해 후위 순회를 수행한다.
 3. 루트를 방문한다.
- 순환 중위 순회
 1. 만일 왼쪽 서브트리가 공백이 아니면, 그것에 대해 중위 순회를 수행한다.
 2. 루트를 방문한다.
 3. 만일 오른쪽 서브트리가 공백이 아니면, 그것에 대해 중위 순회를 수행한다.
- 접두사 전(pre), 중(in), 후(post)는 루트를 두 서브트리의 순회 이전(before), 중간(between), 이후(after)에 방문하는 것을 의미함,

이진 트리 순회의 예

◆ 네 가지 순회

- 전위 순회 : A, B, D, H, E, C, F, I, G, J, K
- 중위 순회 : D, H, B, E, A, I, F, C, J, G, K
- 후위 순회 : H, D, E, B, I, F, J, K, G, C, A
- 레벨 순서 순회 : A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K



12.6 완전 이진 트리 (1)

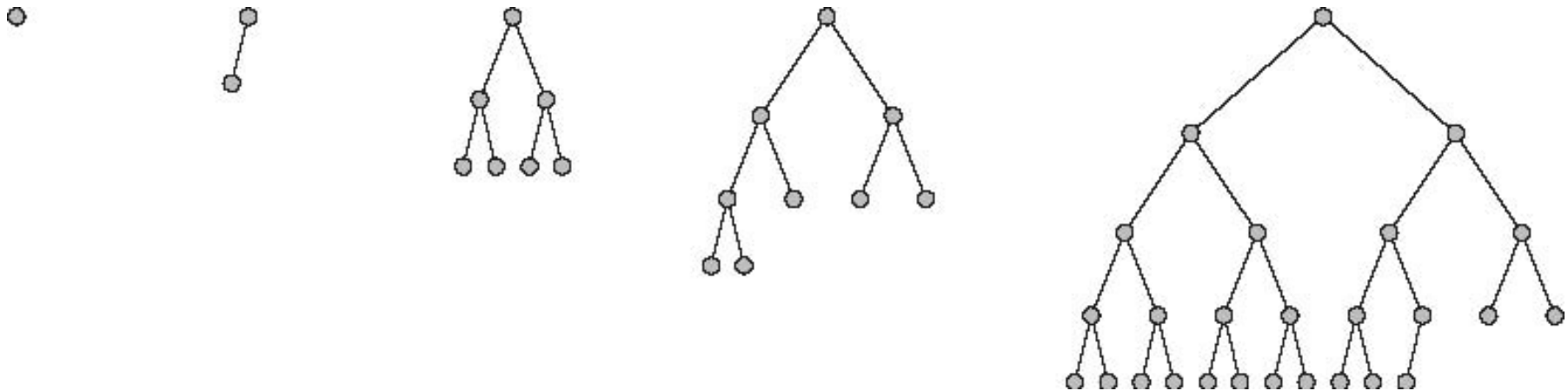
- ◆ 높이가 h 인 완전 이진 트리의 크기에 대한 범위

$$2^h \leq n \leq 2^{h+1} - 1$$

- ◆ 완전 이진 트리의 높이

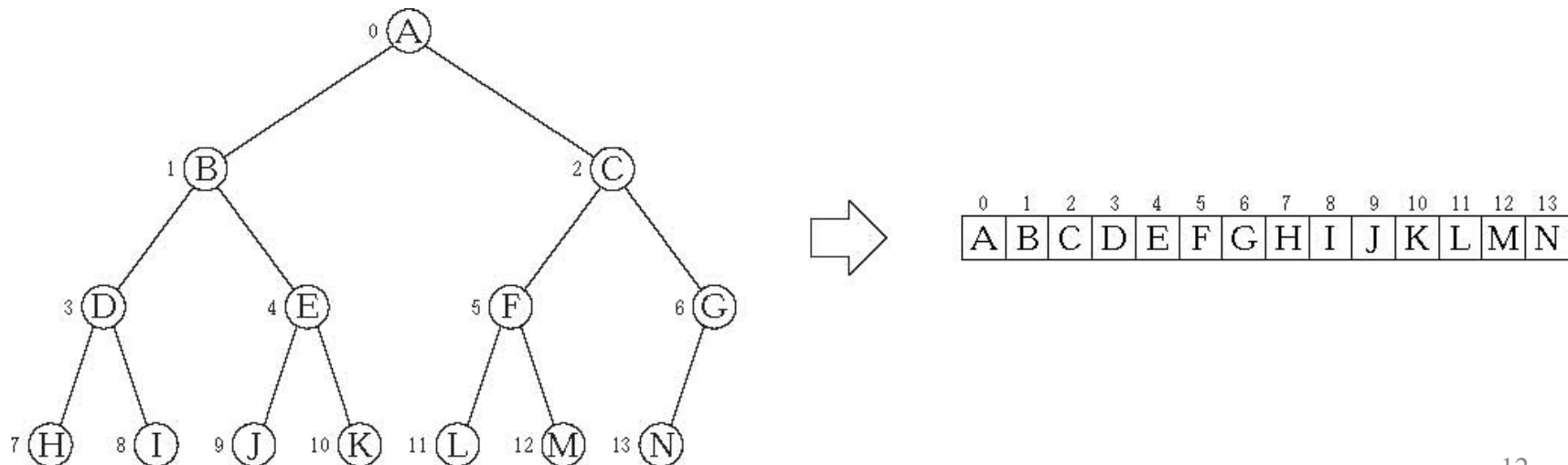
$$h = \lfloor \lg n \rfloor$$

- ◆ 완전 이진 트리의 예



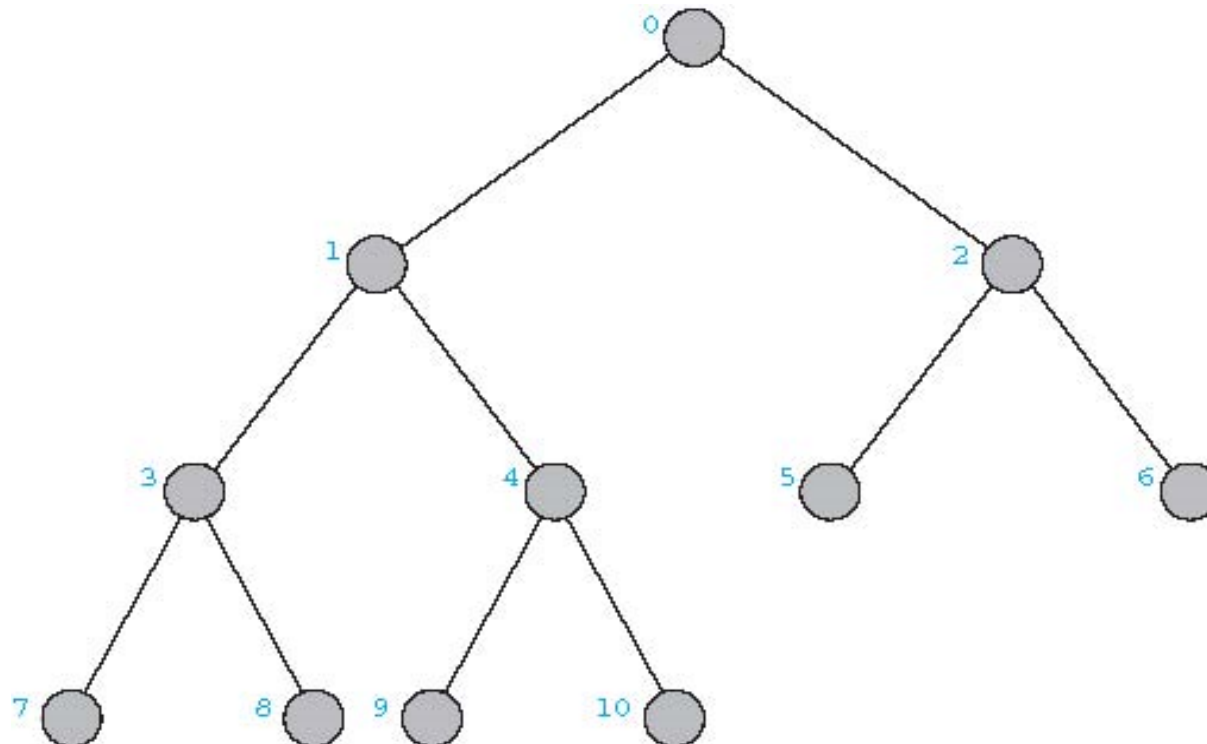
완전 이진 트리 (2)

- ◆ 완전 이진 트리의 직렬화
 - 이진 트리에서 노드 i 의 부모의 인덱스는 $(i-1)/2$ 이고, 자식은 $2i+1$ 과 $2i+2$ 로 번호가 매겨져 있음 (정수 나눗셈 사용)
- ◆ 완전 이진 트리에서 리프의 개수에 대한 범위
 - 크기가 n 인 완전 이진 트리에서 리프는 $n/2$ 에서 $n-1$ 까지 번호가 매겨 짐
- ◆ 완전 이진 트리를 배열로 자연 매핑하는 예

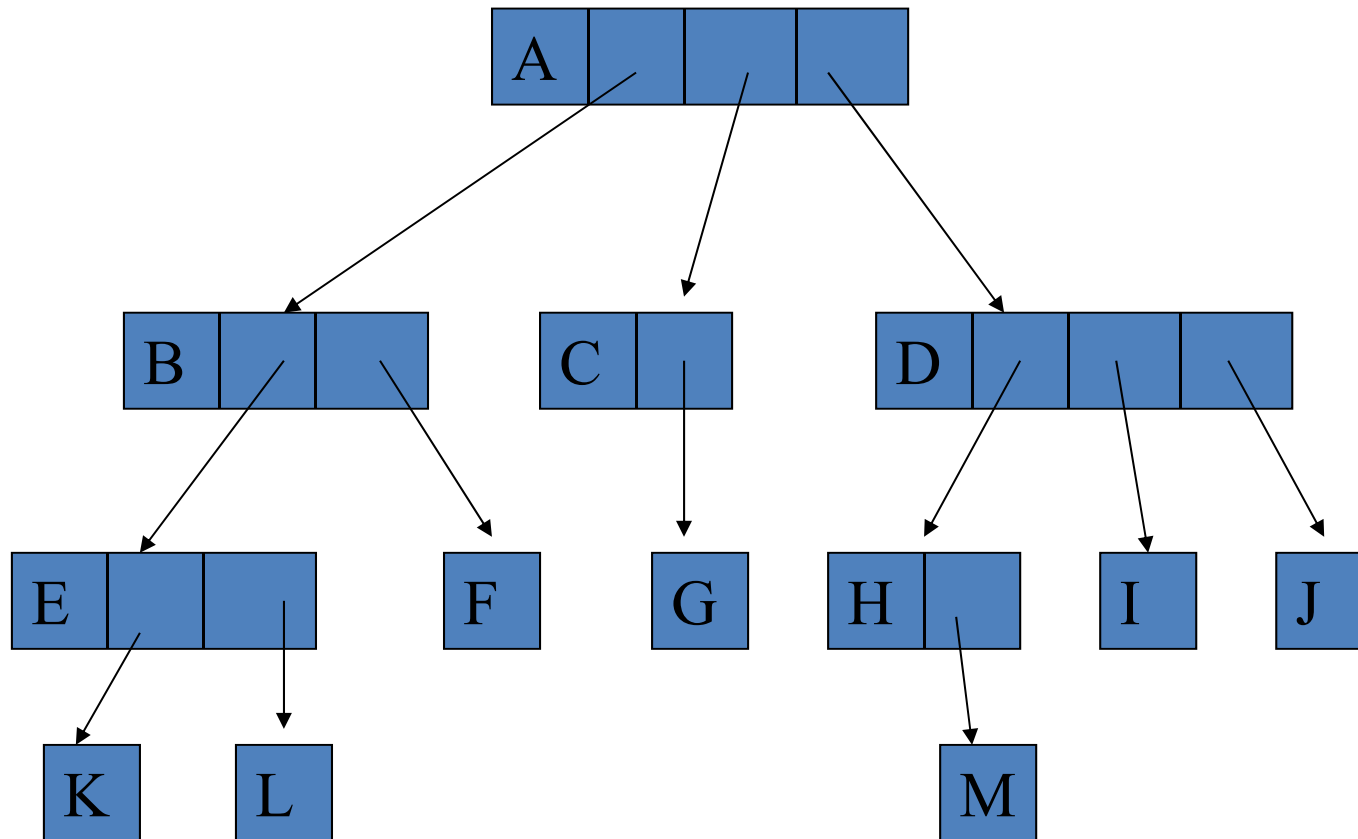


완전 이진 트리 (3)

- ◆ 완전 이진 트리에서 내부 노드의 개수에 대한 범위
 - 완전 이진 트리는 $n/2$ 개의 내부 노드와 $(n+1)/2$ 개의 리프를 가지고 있음

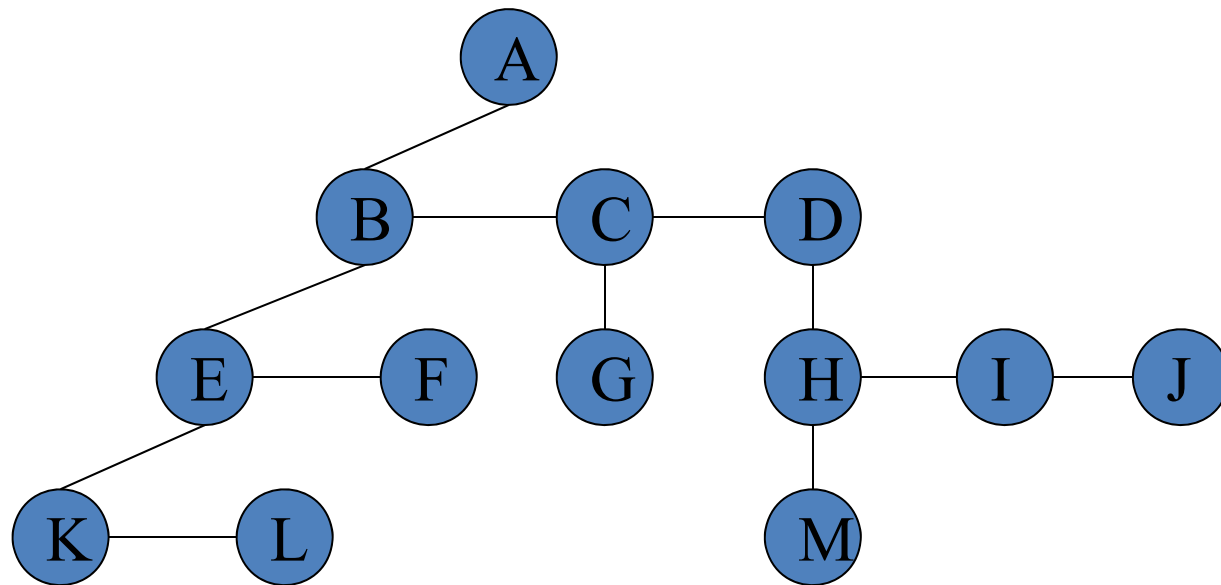


이진트리로의 변환(1)



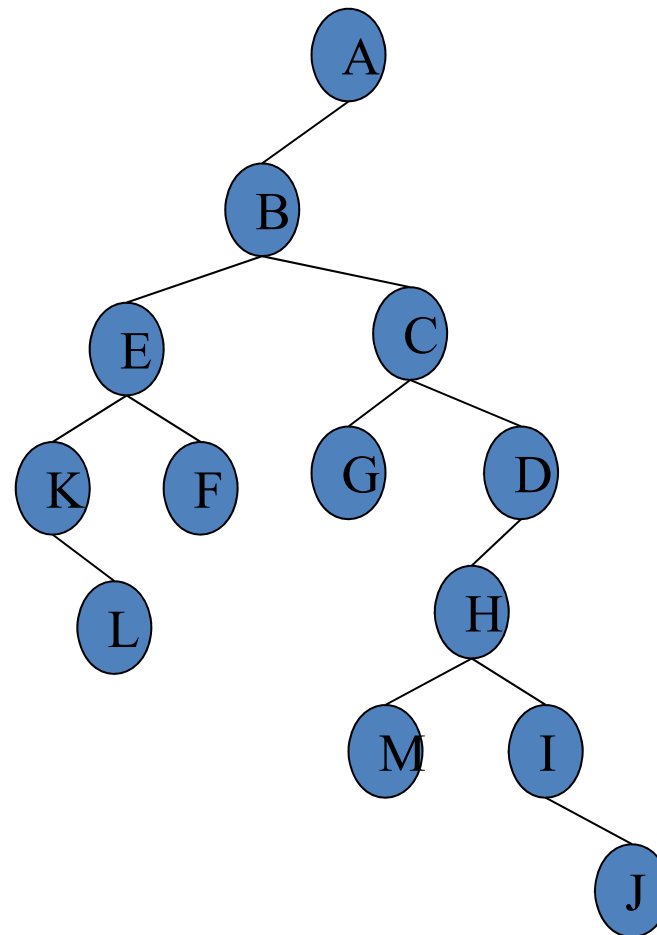
이진트리로의 변환(2)

Left Child-Right Sibling Representation



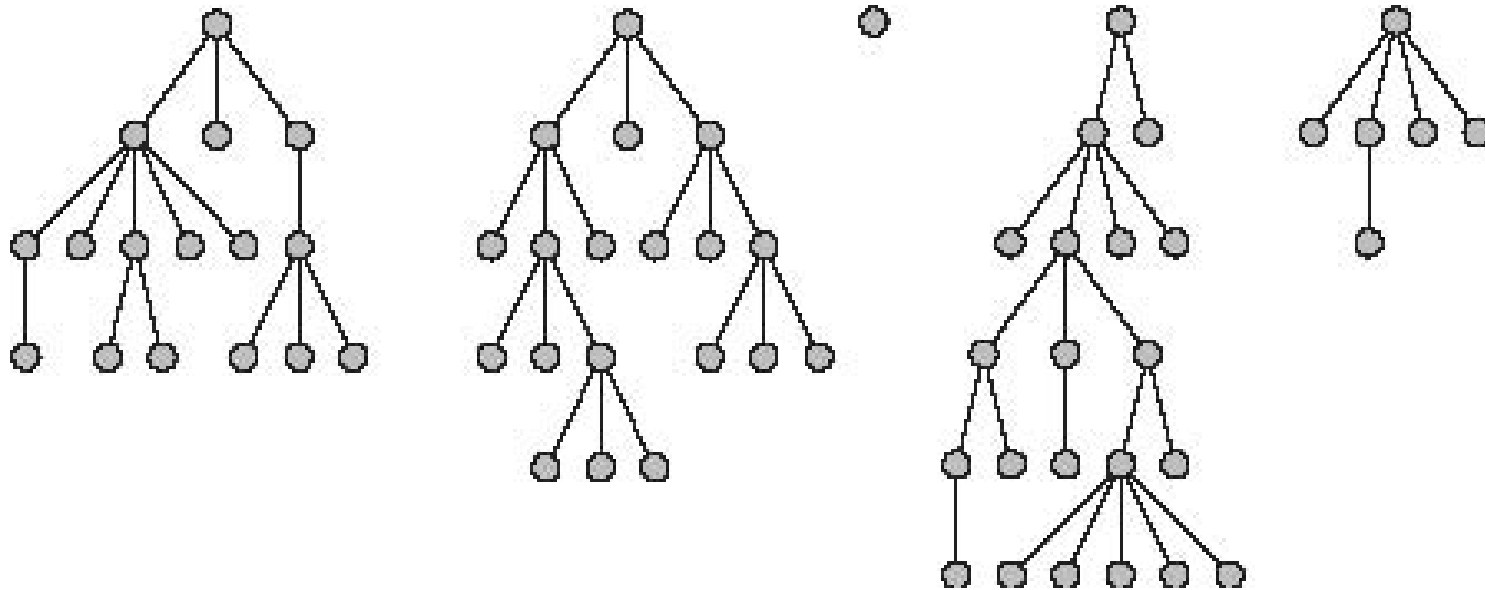
이진트리로의 변환(3)

Rotate the right sibling pointers clockwise by 45°



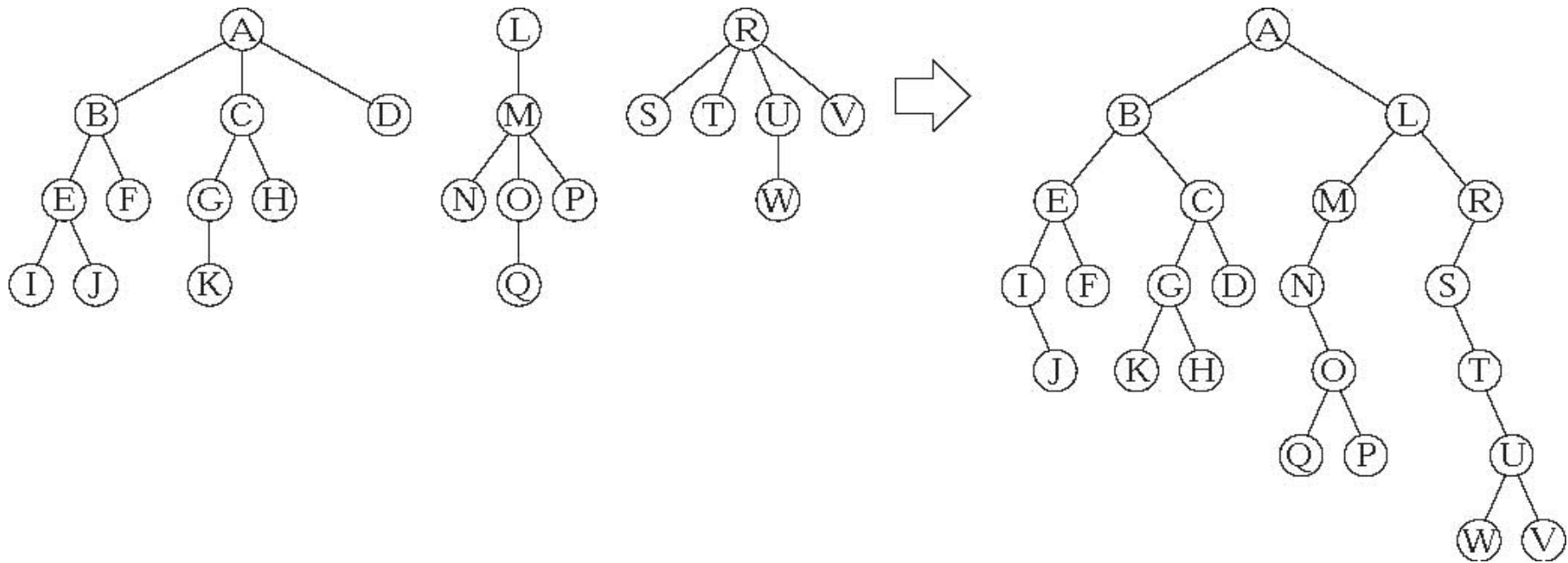
12.7 포리스트 (forest)

- ◆ 포리스트
 - 포리스트 : 트리의 집합
- ◆ 순서 포리스트(ordered forest) : 순서 트리의 시이퀀스
- ◆ 순서 포리스트의 예



순서 포리스트의 자연 매핑

- ◆ 하나의 이진 트리로 순서 포리스트를 표현하는 예



포리스트를 이진 트리로 표현

◆ 자연 매핑을 사용하여 포리스트를 이진 트리로 표현하는 알고리즘

1. 첫 번째 트리의 루트를 이진 트리의 루트로 매핑한다.
2. 만일 노드 y 가 x 의 첫 번째 자식이고 x 가 x' 으로 매핑된다면, y 를 x' 의 왼쪽 자식으로 매핑한다.
3. 만일 노드 z 가 x 의 다음 형제이면, z 를 x' 의 오른쪽 자식으로 매핑한다.

