
بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

پروژه‌ی کارشناسی
مهندسی کامپیوتر - نرم‌افزار

عنوان:

مسئله‌ی راه فرار مستطیل‌ها

نگارش:

احسان امام‌جمعه‌زاده

سپهر اسدی

استاد راهنما:

دکتر حمید ضرابی‌زاده

تیرماه ۱۳۹۲

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

پروژه‌ی کارشناسی

مهندسی کامپیوتر - نرم‌افزار

عنوان:

مسئله‌ی راه فرار مستطیل‌ها

نگارش:

احسان امام‌جمعه‌زاده

سپهر اسدی

استاد راهنما:

دکتر حمید ضرابی‌زاده

امضای استاد ممتحن: امضای استاد راهنما: نمره:

چکیده

در این رساله به بررسی *مسئله‌ی راه فرار مستطیل‌ها* می‌پردازیم که در مسیردهی بر روی بردهای دیجیتال مورد نیاز است. مسئله‌ی راه فرار مستطیل‌ها را می‌توان این‌گونه تعریف کرد: مجموعه‌ی S شامل n مستطیل داده شده که همگی بر روی یک ناحیه‌ی مستطیلی بزرگ به نام *قاب* قرار گرفته‌اند، به شکلی که اضلاع مستطیل‌ها همگی موازی مرزهای قاب هستند. هدف، فراری دادن هر کدام از این مستطیل‌های عضو S به یکی از چهار جهت اصلی است، به گونه‌ای که بیشینه چگالی نقاط قاب، کمینه شود. برای هر نقطه‌ی p از قاب، چگالی نقطه‌ی p، تعداد مستطیل‌هایی است که در فرارشان از آن نقطه عبور می‌کنند.

در این رساله، ابتدا سختی این مسئله را بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که با فرض $P \neq NP$، الگوریتمی چندجمله‌ای با ضریب تقریب بهتر از برای این مسئله وجود ندارد. سپس برای حالتی که بیشینه چگالی مجاز برابر با یک است، یک الگوریتم چندجمله‌ای با زمان اجرای $O(n)$ ارائه می‌کنیم که در مقایسه با الگوریتم پیشین این مسئله با زمان اجرا $O(n)$، از زمان اجرای بهتری برخوردار است. در پایان، به ازای هر مقدار $< \epsilon$، با این شرط که مقدار جواب به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد، یک الگوریتم تقریبی احتمالی با ضریب تقریب $+ \epsilon$ ارائه می‌دهیم. این درحالی است که ضریب تقریب بهترین الگوریتم تقریبی قبلی است.

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

فصل ۱

مقدمات

این جمله توسط مینا اضافه شده است.

در این بخش، به معرفی برخی از مفاهیمی می‌پردازیم که در این رساله استفاده شده‌اند.

۱-۱ کلاس‌های پیچیدگی

مهم‌ترین کلاس‌های پیچیدگی در ادامه معرفی شده‌اند. پیش از آن، گفتنی است به یک مسئله که پاسخ آن *بلی* یا خیر باشد، مسئله‌ی *تصمیم‌گیری*[۱] گفته می‌شود.

کلاس پیچیدگی P: مجموعه‌ای از مسئله‌های تصمیم‌گیری که برای آن‌ها الگوریتم (قطعی) با زمان اجرای چندجمله‌ای وجود دارد.

کلاس پیچیدگی NP: مجموعه‌ای از مسئله‌های تصمیم‌گیری که وقتی به ازای یک ورودی، پاسخ *بلی* باشد، این ادعا را می‌توان در زمان چندجمله‌ای ثابت کرد.

با توجه به تعاریف ارائه شده، بدیهی است که $P \subseteq NP$. یک پرسش بسیار مشهور است این است که آیا $P = NP$ یا خیر؟ در حال حاضر، حدس بسیار قوی در رابطه با پاسخ این پرسش این است که NP با P برابر نیست.

کلاس پیچیدگی NP-سخت[۲]: مجموعه‌ی مسئله‌هایی است که در صورت حل شدن یکی از آن‌ها در زمان چندجمله‌ای، همه‌ی مسئله‌های NP در زمان چندجمله‌ای حل خواهند شد. پس با فرض $NP \neq P$، هیچ یک از مسئله‌های NP-سخت، الگوریتم چندجمله‌ای ندارند. شایان ذکر است که برخی از مسئله‌های NP-سخت ممکن است مسئله‌ی تصمیم‌گیری نباشند.

[۱] Decision Problem

[۲] NP-Hard

کلاس پیچیدگی NP-کامل[۳]: مجموعه‌ی مسئله‌هایی است که هم NP و هم NP-سخت باشند.

۱-۲ الگوریتم‌های تقریبی

مسئله‌های بهینه‌سازی گسسته، مسئله‌هایی هستند که در آن‌ها هدف، کمینه کردن هزینه (یا بیشینه کردن سود) است. اکثر مسئله‌های مورد توجه در این مجموعه، مسئله‌های هستند که NP-سخت بودن آن‌ها نشان داده شده‌است و در نتیجه، با این فرض که $NP \neq P$، نمی‌توان برای یافتن پاسخ بهینه‌ی چنین مسئله‌هایی، راه حلی کارا ارائه کرد.

نظر به دشواری یافتن پاسخ بهینه‌ی چنین مسئله‌هایی، یک رویکرد رایج، ارائه‌ی الگوریتم‌های کارایی است که پاسخی نه چندان دور از پاسخ بهینه می‌یابند. به چنین الگوریتم‌هایی، *الگوریتم‌های تقریبی*[۴] گفته می‌شود. یک الگوریتم تقریبی برای یک مسئله‌ی کمینه‌سازی دارای *ضریب تقریب*[۵] α است اگر به ازای همه‌ی ورودی‌ها، پاسخی حداکثر α برابر پاسخ بهینه بیابد.

۱-۳ تعاریف و قضایای احتمال

از آن‌جایی که بخشی از نتایج این رساله، بر پایه‌ی الگوریتم‌های تصادفی[۶] و نامساوی‌های احتمالاتی به دست آمده‌اند، به بیان چند تعریف پایه و سپس قضایای مورد استفاده می‌پردازیم.

- **فرایند تصادفی**[۷]: به هر فرایندی که نتیجه آن نه به صورت قطعی که به صورت احتمالاتی مشخص می‌شود، فرایند تصادفی گفته می شود. به عنوان مثال، پرتاب یک سکه، یک فرایند تصادفی است؛ چراکه نتیجه‌ی آن به صورت احتمالاتی شیر یا خط است.
- **فضای نمونه**[۸]: به مجموعه‌ی نتیجه‌هایی که یک فرایند تصادفی می‌تواند اتخاذ کند، فضای نمونه‌ی آن فرایند تصادفی گفته می‌شود. به عنوان مثال، فضای نمونه‌ی فرایند تصادفی پرتاب سکه، مجموعه‌ی {شیر، خط} است.
- **متغیر تصادفی**[۹]: تابعی از فضای نمونه‌ی یک فرایند تصادفی به مجموعه‌ی اعداد حقیقی، یک متغیر تصادفی است. به عنوان مثال، متغیر تصادفی x_i را می‌توان معادل با شیر آمدن سکه پس از پرتاب iم تعریف کرد که در صورت شیر آمدن سکه، مقدار و در غیر این صورت، مقدار می‌گیرد. در این رساله، برد همه‌ی متغیرهای تصادفی، زیرمجموعه‌ای متناهی از مجموعه‌ی اعداد صحیح است.

---

[۳] NP-Complete
[۴] Approximation Algorithms
[۵] Approximation Factor
[۶] Randomized Algorithms
[۷] Stochastic Process
[۸] Sample Space
[۹] Random Variable

- **متغیر تصادفی شناسه**[۱۰]: یک متغیر تصادفی که برد آن $\{,\}$ است (یک زیرمجموعه از فضای نمونه را به و باقی را به می‌برد)، یک متغیر تصادفی شناسه است. به بیانی دیگر، می‌توان گفت که بودن یک متغیر تصادفی شناسه معادل با اتفاق افتادن عضوی از زیرمجموعه‌ی مورد نظر است.

- **امید ریاضی**[۱۱]: امید ریاضی یک متغیر تصادفی که برد آن، مجموعه‌ی متناهی R است، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E[X] = \Sigma_{x \in R} P(X = x) \times x$$

برای یک متغیر تصادفی شناسه بنا به تعریف داریم:

$$E[X] = P(X = \ ) \times \ + P(X = \ ) \times \ = P(X = \ )$$

به بیان دیگر، برای یک متغیر تصادفی شناسه، امید ریاضی برابر است با احتمال شدن مقدار آن متغیر.

- **واریانس**[۱۲]: واریانس معیاری است برای نشان دادن فاصله‌ی مقادیر یک متغیر تصادفی از امید ریاضی آن. به طور رسمی واریانس به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$var(X) = E[X] - (E[X])$$

هم‌چنین $\sigma(X)$ را برابر با $\sqrt{var(X)}$ تعریف می‌کنند و آن را *انحراف معیار*[۱۳] متغیر تصادفی X می‌نامند.

در ادامه به چند قضیه‌ی مهم و اساسی احتمالاتی اشاره می‌کنیم:

قضیه‌ی ۱ (خطی بودن امید ریاضی) *امید ریاضی خطی است. به بیان دقیق‌تر، برای هر دو متغیر تصادفی X و Y و عدد ثابت c، روابط زیر برقرارند:*

$$E[cX] = cE[X]$$

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$

لازم به یادآوری است که تساوی‌های قضیه‌ی ۱ به ازای هر دو متغیر تصادفی X و Y برقرار است؛ چه مستقل باشند و چه نباشند.

قضیه‌ی ۲ (نامساوی‌های احتمالاتی) *در این قضیه، چند نامساوی احتمالاتی معروف که در تحلیل الگوریتم‌های احتمالی کاربرد دارند، بیان می‌شوند.*

- *اگر $X = \{x, \dots, x_k\}$ مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی باشد که برد همه‌ی آن‌ها $\{,\}$ است، احتمال آن‌که مقدار حداقل یک $x_i \in X$ برابر شود، حداکثر $\Sigma_{x_i \in X} P(x_i = \ )$ است. دقت کنید که $\Sigma_{x_i \in X} P(x_i = \ )$، مجموع احتمال شدن این متغیرهاست.*

[۱۰] Indicator Random Variable

[۱۱] Expected Value

[۱۲] Variance

[۱۳] Standard Deviation

- **نامساوی مارکوف**[۱۴]: *اگر برد متغیر تصادفی X، زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی نامنفی باشد، آن‌گاه به ازای هر $a >$، داریم:*

$$P(X \ge a) \le \frac{E[X]}{a}$$

یا به طور معادل، می‌توان نوشت به ازای هر $c >$:

$$P(X \ge cE[X]) \le \frac{}{c}$$

به بیان دیگر، احتمال آن‌که مقدار X از c برابر مقدار امید ریاضی بیش‌تر شود، حداکثر $\frac{}{c}$ است.

- **نامساوی چبیچو**[۱۵]: *برای متغیر تصادفی X با امید ریاضی و واریانس متناهی، به ازای هر $c >$ داریم:*

$$P(|X - E[X]| \ge c\sigma(X)) \le \frac{}{c}$$

که در آن $\sigma(X) = \sqrt{var(X)}$.

- **نامساوی چرنوف**[۱۶]: *اگر $x,\dots,x_n$ متغیرهای تصادفی مستقل از هم با دامنه‌ی $\{,\}$ باشند و متغیر تصادفی X به صورت $X = \Sigma_{i=}^{n} x_i$ تعریف گردد، آن گاه داریم:*

$$P\{X \ge (+\epsilon)E[X]\} < \left(\frac{e^{\epsilon}}{(+\epsilon)^{(+\epsilon)}}\right)^{E[X]}$$

هم چنین در ادامه‌ی این نامساوی، داریم:

$$\left(\frac{e^{\epsilon}}{(+\epsilon)^{(+\epsilon)}}\right)^{E[X]} \le e^{-E[X]\epsilon/}$$

۱-۴ برنامه‌ریزی خطی

هدف از یک برنامه‌ریزی خطی[۱۷]، یافتن یک بردار با مؤلفه‌های حقیقی است که در نامساوی‌های خطی داده‌شده در مسئله صدق کند و مقدار یک عبارت خطی را نیز کمینه (یا بیشینه) نماید. این عبارت خطی، *تابع هدف*[۱۸] نامیده می‌شود. فرض کنید $x,\dots,x_n$ متغیرهایی با دامنه‌ی اعداد گویا باشند و

$$c_j \in \mathbb{Q}, \quad b_i \in \mathbb{Q}, \quad a_{i,j} \in \mathbb{Q} \;\; (\le i \le m, \; \le j \le n)$$

یک برنامه‌ریزی خطی در حالت کلی به شکل زیر است:

[۱۴] Markov Inequality

[۱۵] Chebyshev Inequality

[۱۶] Chernoff Inequality

[۱۷] Linear Programming (LP)

[۱۸] Objective Function

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\text{subject to} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \geq b_i \qquad && \forall\ 1 \leq i \leq m \\
& x_j \geq 0 && \forall\ 1 \leq j \leq n
\end{aligned}
$$

در این برنامه‌ریزی خطی، عبارت خطی $\sum_{j=}^{n} c_j x_j$، تابع هدف است. بدیهی است که اگر قصد بیشینه کردن تابع هدف را داشته‌باشیم، کافی است همه‌ی ضرایب c_j در تابع هدف را قرینه کنیم. به این ترتیب، تابع هدفی به دست می‌آید که می‌خواهیم مقدار آن کمینه شود.

به یک بردار *امکان‌پذیر* گفته می‌شود اگر در همه‌ی محدودیت‌های برنامه‌ریزی صدق کند. منظور از حل یک برنامه‌ریزی خطی، یافتن برداری امکان‌پذیر است که مقدار تابع هدف را کمینه کند. الگوریتم‌های کارایی برای حل برنامه‌ریزی خطی وجود دارند. یکی از بهترین الگوریتم‌های چندجمله‌ای که برای حل برنامه‌ریزی خطی ارائه شده، الگوریتم interior-point است که در سال ۱۹۸۴ توسط کارمارکار پیشنهاد شده‌است [؟]. زمان اجرای این الگوریتم از $O(nL)$ است که n تعداد متغیرهای برنامه‌ریزی خطی است و L تعداد بیت‌هایی است که برای نمایش متغیرها و محدودیت‌ها نیاز است.

۱-۵ برنامه‌ریزی صحیح

برنامه‌ریزی صحیح[۱۹] یک برنامه‌ریزی خطی است که در آن، دامنه‌ی متغیرها محدود به اعداد صحیح است. هرچند برنامه‌ریزی خطی در زمان چندجمله‌ای قابل حل است، ولی می‌توان نشان داد که مسئله‌ی حل برنامه‌ریزی صحیح یک مسئله‌ی NP-سخت است. گفتنی است یک حالت خاص از مسئله‌ی برنامه‌ریزی صحیح که در آن دامنه‌ی متغیرها تنها مجموعه‌ی دو عضوی $\{,\}$ است، یکی از ۲۱ مسئله‌ای است که کارپ به عنوان مسئله‌های NP-سخت معرفی کرده‌است [؟].

۱-۶ الگوریتم تقریبی بر پایه‌ی برنامه‌ریزی خطی

برای بسیاری از مسئله‌های کمینه‌سازی هزینه، می‌توان یک برنامه‌ریزی صحیح معادل نوشت که دامنه‌ی متغیرهای آن $\{,\}$ است، ولی همان گونه که اشاره شد، با فرض $NP \neq P$، الگوریتم کارآیی برای حل برنامه‌ریزی صحیح وجود ندارد تا با کمک آن، مسئله‌ی بهینه‌سازی مورد نظر نیز حل شود. در چنین مواردی، یک راهکار رایج، این است که برنامه‌ریزی صحیح متناظر با مسئله‌ی مورد نظر به یک برنامه‌ریزی خطی با همان محدودیت‌ها تبدیل

[۱۹] Integer Programming (IP)

گردد و حل شود. بدیهی است که در برنامه‌ریزی خطی متناظر، دامنه‌ی متغیرها به جای مجموعه‌ی دوعضوی $\{,\}$، مجموعه‌ی همه‌ی اعداد گویای بازه‌ی $[,]$ خواهد بود. فرض کنید جواب این برنامه‌ریزی خطی را بردار OPT_{LP} بنامیم. یک ایده برای به دست آوردن الگوریتمی تقریبی آن است که پس از به دست آوردن OPT_{LP}، با گرد کردن مؤلفه‌های بردار OPT_{LP} به یکی از دو روش زیر، پاسخی تقریبی برای برنامه‌ریزی صحیح مورد نظر به دست آید.

- **گرد کردن قطعی**

در این روش، یک عدد $<\alpha<$ انتخاب می‌شود. سپس هر متغیر که مقدار آن در OPT_{LP} کم‌تر از α است، در برنامه‌ریزی صحیح مقدار می‌گیرد و مقدار سایر متغیرها، همگی مقدار . آن‌چه در این جا اهمیت دارد، انتخاب مقدار مناسبی برای α است، به گونه‌ای که بردار حاصل از گرد کردن، یک بردار امکان‌پذیر برای برنامه‌ریزی صحیح باشد. از آن‌جایی که در بردار جدید به دست آمده، مقدار هر متغیر حداکثر $\frac{}{\alpha}$ برابر شده‌است، مقدار تابع هزینه نیز حداکثر $\frac{}{\alpha}$ برابر خواهد شد و به این ترتیب، یک الگوریتم با ضریب تقریب $\frac{}{\alpha}$ خواهیم داشت.

- **گرد کردن تصادفی**

در این روش، مقدار هر متغیر، نه به صورت قطعی بلکه با احتمالی به گرد می‌شود که این احتمال، خود تابعی است از مقدار همان متغیر در OPT_{LP}. بدیهی است که در این صورت، باید پذیرفت بردار جدید ممکن است امکان‌پذیر نباشد. در تحلیل یک الگوریتم تقریبی که بر پایه‌ی گرد کردن تصادفی طراحی شده، باید هم احتمال به دست آمدن برداری امکان‌پذیر بررسی شود و هم امید ریاضی مقدار تابع هزینه.

فصل ۲

معرفی مسئله

۲-۱ تعریف دقیق مسئله

در این فصل، مسئله‌ی راه فرار مستطیل‌ها[۱] را معرفی خواهیم کرد. این مسئله را می‌توان این گونه تعریف کرد:

مسئله‌ی ۱ (راه فرار مستطیل‌ها) *یک ناحیه‌ی مستطیلی با مرزهای موازی محورهای مختصات به نام قاب داده شده‌است که درون آن n مستطیل با اضلاع موازی محورها قرار گرفته‌اند. هدف، فراری دادن این مستطیل‌ها - هر یک به یکی از چهار جهت اصلی - است، به گونه‌ای که بیشینه چگالی[۲] نقاط قاب کمینه شود. چگالی یک نقطه از قاب، تعداد مستطیل‌هایی تعریف می‌شود که روی آن نقطه قرار گرفته‌اند یا در فرارشان از آن نقطه عبور می‌کنند.*

در این رساله، برای سادگی، مسئله‌ی تصمیم‌گیری زیر را نیز تعریف می‌کنیم.

مسئله‌ی ۲ *یک نمونه از مسئله‌ی راه فرار مستطیل‌ها و عدد طبیعی k داده شده‌اند. آیا می‌توان مستطیل‌ها را به گونه‌ای فراری داد که چگالی هیچ نقطه‌ای از قاب بیش‌تر از k نشود؟*

بدیهی است که به ازای یک ورودی از مسئله‌ی راه فرار مستطیل‌ها، پاسخ مسئله‌ی ۱ برابر است با کم‌ترین عدد k که پاسخ مسئله‌ی ۲ به ازای آن، *بلی* شود.

مسئله‌ی راه فرار مستطیل‌ها که در [؟] تعریف شده‌است، در مسیردهی روی بردهای دیجیتال[۳] مورد نیاز است. تراشه‌های مستطیلی شکلی را در نظر بگیرید که روی یک برد قرار گرفته‌اند، به گونه‌ای که اضلاع تراشه‌ها موازی اضلاع برد است. می‌خواهیم هر یک از تراشه‌ها را در یکی از چهار جهت اصلی از طریق یک گذرگاه[۴] (مطابق

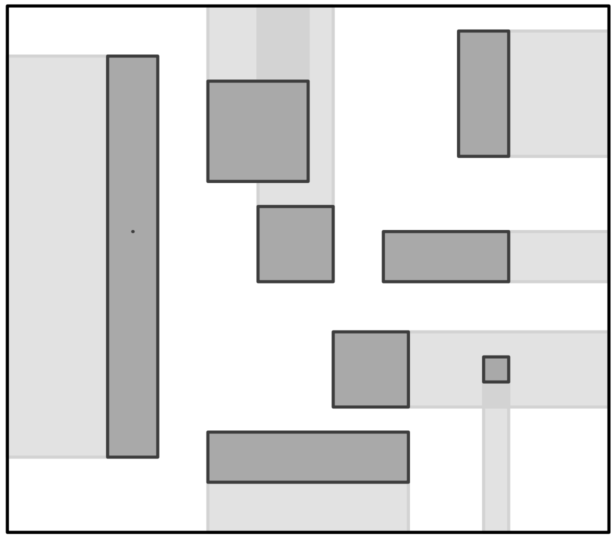
---

[۱] Rectange Escape Problem (REP)

[۲] Density

[۳] Printed Circuit Board (PCB) Routing

[۴] Bus



شکل ۲-۱: یک نمونه از مسئله‌ی راه فرار مستطیل‌ها.

شکل ۲-۱) به دیواره‌ی برد متصل کنیم. هدف، کمینه کردن بیش‌ترین تعداد گذرگاهی است که در یک نقطه برخورد می‌کنند تا تعداد لایه‌های لازم برای اتصال تراشه‌ها به دیواره‌های قاب کمینه شود.

مسئله‌ی کمینه‌سازی تعداد لایه‌ها، پیش‌تر نیز مورد بررسی قرار گرفته‌اند [؟، ؟، ؟، ؟، ؟، ؟، ؟، ؟، ؟، ؟]. گفتنی است که [؟] برای مسئله‌ی زیر الگوریتمی با زمان اجرای $O(n)$ ارائه کرده‌است:

مسئله‌ی ۳ *بر روی یک قاب مستطیلی، n مستطیل با اضلاع موازی اضلاع قاب داده شده‌اند، به گونه‌ای که از هر مستطیل، حداقل یک ضلع روی مرز قاب قرار گرفته‌است. بیش‌ترین تعداد مستطیل از میان این n مستطیل را بیابید که هم‌پوشانی نداشته باشند.*

به سادگی می‌توان دید که با کمک مسئله‌ی ۳ می‌توان مسئله‌ی ۲ به ازای $k =$ را حل کرد. کافی است برای یک نمونه از مسئله‌ی راه فرار مستطیل‌ها، همه‌ی n مستطیل داده‌شده را به هر چهار جهت تا مرز قاب گسترش دهیم. به این ترتیب، n مستطیل خواهیم داشت که حداقل یک ضلع از هر کدام از آن‌ها روی مرز قاب قرار گرفته‌است. اکنون کافی است از میان این n مستطیل، بیش‌ترین تعداد مستطیل بدون هم‌پوشانی را بیابیم. این تعداد برابر n است اگر و تنها اگر مستطیل‌ها بتوانند با بیشینه چگالی فرار کنند.

۲-۲ کارهای پیشین

درباره‌ی مسئله‌ی راه فرار مستطیل‌ها پیش از این ثابت شده‌است:

- مسئله‌ی راه فرار مستطیل‌ها یک مسئله‌ی NP-سخت است. به طور دقیق‌تر، مسئله‌ی ۲ به ازای $k =$ در کلاس پیچیدگی NP-کامل قرار دارد [؟].

- هرچند مسئله‌ی راه فرار مستطیل‌ها در حالت کلی NP–سخت است، ولی همان گونه که توضیح داده‌شد، برای مسئله‌ی ۲ به ازای $k =$ ، یک الگوریتم با زمان اجرای $O(n)$ در [؟] ارائه شده‌است.
- در [؟]، الگوریتمی تقریبی با زمان اجرای چندجمله‌ای و ضریب تقریب برای مسئله‌ی ۱ ارائه شده‌است.

۲-۳ نتایج ما

نتایجی که در این رساله به دست آورده‌ایم، به شرح زیر است:

- مسئله‌ی ۲ به ازای $k =$ در کلاس پیچیدگی NP-کامل قرار دارد. گفتنی است که این نتیجه، حتی برای حالت خاص‌تر مسئله که در آن هیچ دو مستطیلی از n مستطیل ورودی هم‌پوشانی ندارند هم برقرار است.
- با فرض $P \neq NP$، برای مسئله‌ی ۱ نمی‌توان الگوریتمی تقریبی با ضریب تقریب بهتر از یافت.
- مسئله‌ی ۲ وقتی $k =$، در زمان $O(n)$ قابل حل است.
- به ازای هر عدد ثابت $\epsilon >$، در حالتی که جواب مسئله‌ی ۱ به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد، الگوریتمی احتمالی با ضریب تقریب $+ \epsilon$ برای مسئله‌ی ۱ وجود دارد.

فصل ۳

سختی مسئله

در این بخش، ابتدا سختی مسئله‌ی ۲ به ازای $k =$ را بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که این مسئله در کلاس پیچیدگی NP-کامل قرار دارد. این نتیجه را برای حالت خاص‌تری از مسئله که در آن هیچ دو مستطیلی از n مستطیل ورودی هم‌پوشانی ندارند، ثابت می‌کنیم. سپس نتیجه می‌گیریم با فرض $NP \neq P$، برای مسئله‌ی ۱ الگوریتمی تقریبی با ضریب تقریب بهتر از نمی‌توان یافت.

۳-۱ سختی مسئله برای چگالی ۲

همان گونه که اشاره شد، سختی مسئله‌ی ۲ برای چگالی پیش‌تر در [؟] بررسی شده‌است. در این جا، سختی این مسئله را به ازای $k =$ نشان خواهیم داد. پیش از بررسی سختی مسئله‌ی ۲، ابتدا مسئله‌ی مشهور -ارضاپذیری [1] را معرفی می‌کنیم:

مسئله‌ی ۴ (-ارضاپذیری) *برای مجموعه‌ی $X = \{x, \dots, x_n\}$ از متغیرهایی با دامنه‌ی $\{,\}$، m عبارت[2] به شکل $C_i = l_{i,} \vee l_{i,} \vee l_{i,}$ داده‌شده‌اند که در آن، هر $l_{i,\lambda}$ یکی از n متغیر عضو X یا نقیض یکی آن‌هاست. آیا می‌توان متغیرهای مجموعه‌ی X را به گونه‌ای مقداردهی کرد که مقدار همه‌ی این m عبارت منطقی، برابر شود؟*

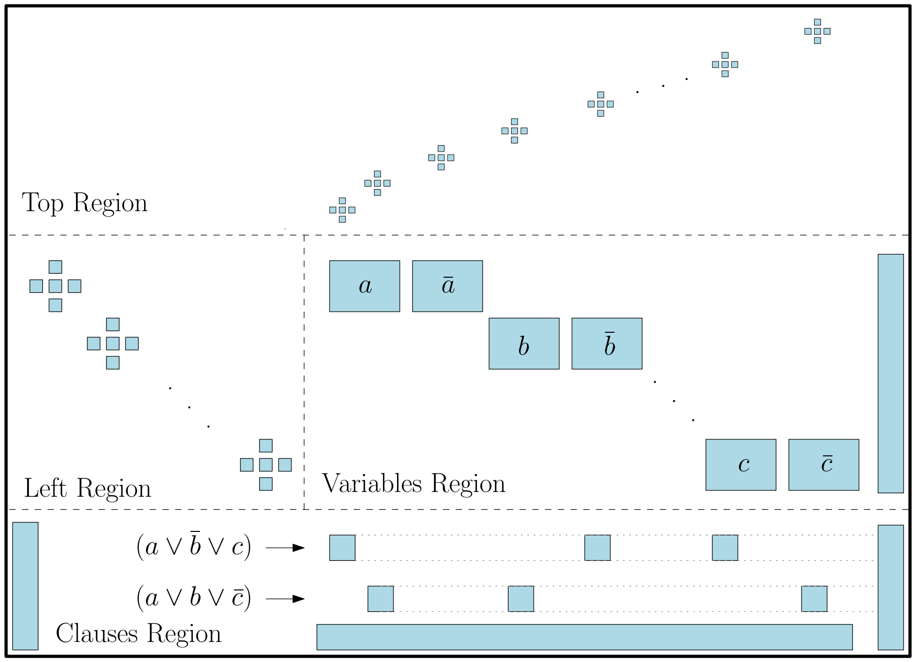
مسئله‌ی ۴ یکی از مشهورترین مسئله‌های NP-کامل شناخته‌شده است [؟]. ما در این بخش با فرض NP-کامل بودن مسئله‌ی ۴، قضیه‌ی زیر را ثابت می‌کنیم:

قضیه‌ی ۳ *برای $k =$، مسئله‌ی ۲ حتی با این محدودیت که هیچ دو مستطیلی هم‌پوشانی ندارند، یک مسئله‌ی NP-کامل است.*

---

[1] -SAT

[2] Clause



شکل ۳-۱: کاهش از مسئله‌ی -ارضاپذیری .

اثبات. این که مسئله‌ی مورد نظر در کلاس پیچیدگی NP قرار می‌گیرد، بدیهی است. پس برای نشان دادن NP-کامل بودن این مسئله برای $k =$ ، کافی است NP-سخت بودن آن را ثابت کنیم. این کار را با کاهش[۳] از مسئله‌ی ۴ انجام می‌دهیم. به بیان ساده‌تر، ثابت می‌کنیم که اگر مسئله‌ی ۲ به ازای $k =$ در حالتی که هم‌پوشانی وجود ندارد، الگوریتمی با زمان اجرای چندجمله‌ای داشته‌باشد، آن‌گاه مسئله‌ی ۴ نیز در زمان چندجمله‌ای قابل حل است. به این منظور، برای یک نمونه از مسئله‌ی -ارضاپذیری ، یک نمونه از مسئله‌ی راه فرار مستطیل‌ها به شکل زیر می‌سازیم:

یک قاب مستطیلی در نظر می‌گیریم و آن را به صورت مجازی به چهار ناحیه تقسیم می‌کنیم. این ناحیه‌ها را مطابق شکل ۳-۱ ، ناحیه‌ی *بالا*[۴]، ناحیه‌ی چپ[۵]، ناحیه‌ی *متغیرها*[۶] و ناحیه‌ی *عبارت‌ها*[۷] می‌نامیم.

- به ازای هر متغیر x_j، دو مستطیل با نام‌های v_j و $\bar{v_j}$ متناظر با x_j و $\bar{x_j}$ همان گونه که در شکل ۳-۱ نشان داده‌شده، در ناحیه‌ی متغیرها به صورت افقی کنار هم قرار می‌دهیم. این مستطیل‌های متناظر با متغیرها باید به گونه‌ای قرار بگیرند که یک خط عمودی یا افقی، دو مستطیل مربوط به دو متغیر مختلف را قطع نکند. فرض کنید این مستطیل‌ها را مستطیل‌های *نوع یک* بنامیم. علاوه بر مستطیل‌های نوع یک، یک مستطیل بلند نیز به صورت عمودی در سمت راست ناحیه‌ی متغیرها قرار می‌گیرد. شکل ۳-۱ را ببینید.

- برای هر عبارت $C_i = l_{i_1} \vee l_{i_2} \vee l_{i_3}$، سه مستطیل در بخش عبارت‌ها قرار می‌دهیم. این سه مستطیل روی

[۳] Reduction
[۴] Top Region
[۵] Left Region
[۶] Variable Region
[۷] Clause Region

یک خط افقی به گونه‌ای قرار می‌گیرند که زیر مستطیل‌های نوع یک متناظر با $l_{i,i}$، $l_{i,}$ و $l_{i,}$ باشند. همه‌ی این مستطیل‌ها را نیز مستطیل‌های *نوع دو* می‌نامیم. همان گونه که در مثال شکل ۳-۱ نشان داده‌شده، یک خط عموی یا افقی نباید هیچ دو مستطیلی را که وابسته به دو عبارت مختلف هستند، قطع نماید.

علاوه بر این مستطیل‌های نوع دو، دو مستطیل بلند به صورت عمودی در سمت چپ و سمت راست این ناحیه و هم‌چنین یک مستطیل بلند افقی در پایین آن قرار می‌دهیم.

- برای هر متغیر، در سمت چپ مستطیل‌های نوع یک متناظر با آن، مربع کوچک که شکلی صلیبی ساخته‌اند، در ناحیه‌ی چپ قرار می‌گیرند. این شکل‌های صلیبی را *سد* می‌نامیم. دقت کنید که مربع یک سد به هر روشی که فرار کنند، چگالی نقطه‌ای روی یکی از آن‌ها حداقل خواهد شد. سدهای ناحیه‌ی چپ به گونه‌ای قرار می‌گیرند که با یک خط افقی یا عمودی نتوان دو سد مختلف را قطع کرد.
- بالای هر مستطیل نوع دو، یک سد در ناحیه‌ی بالا قرار می‌گیرد. سپس اگر بالای یک مستطیل نوع یک هیچ سدی قرار نگرفت، برای آن مستطیل نیز یک سد در ناحیه‌ی بالا قرار می‌دهیم. سدهای ناحیه‌ی بالا را نیز به شکلی قرار می‌دهیم که یک خط عمودی یا افقی نتواند دو سد مختلف را قطع کند.

اکنون فرض کنید در نمونه‌ی ساخته‌شده، مستطیل‌ها بتوانند به گونه‌ای فرار کنند که چگالی هیچ نقطه‌ای از قاب بیش‌تر از نشود. می‌خواهیم ثابت کنیم یک مقداردهی برای متغیرهای $\{x, \ldots, x_n\}$ وجود دارد که به ازای آن مقداردهی، همه‌ی عبارت‌ها مقدار می‌گیرند.

با توجه به مکان قرارگیری سدها در ناحیه‌ی چپ و ناحیه‌ی بالا، هیچ مستطیل نوع یکی نمی‌تواند به چپ یا بالا فرار کرده‌باشد، پس هر کدام از مستطیل‌های نوع یک به راست یا پایین فرار کرده‌اند. از طرفی، با توجه به قرارگیری مستطیل بلندی در سمت راست ناحیه‌ی متغیرها، دو مستطیل نوع یکی که متناظر با متغیر یکسانی هستند، نمی‌توانند هر دو به راست فرار کرده‌باشند؛ چراکه در این صورت چگالی نقطه‌ای روی مستطیل بلند سمت راست ناحیه‌ی متغیرها، بیش‌تر از می‌شد. برای هر متغیر x_i، اگر v_i به سمت راست فرار کرده‌بود، مقدار x_i را برابر قرار می‌دهیم و اگر $\bar{v_i}$ به سمت راست فرار کرده‌بود، مقدار $\bar{x_i}$ را برابر با در نظر می‌گیریم. اگر هم هیچ یک از این دو مستطیل به سمت راست فرار نکرده‌بودند (در واقع فرار هر دو به سمت پایین بود)، مقدار x_i را و در نتیجه مقدار $\bar{x_i}$ را می‌گیریم. ادعا می‌کنیم که با این مقداردهی، همه‌ی عبارت‌ها برابر خواهند شد.

به خاطر سدهای ناحیه‌ی بالا، هیچ یک از مستطیل‌های نوع دو نمی‌تواند به سمت بالا فرار کند. هم‌چنین با توجه به قرارگیری دو مستطیل بلند سمت چپ و راست ناحیه‌ی عبارت‌ها، برای هر عبارت $C_i = l_{i,} \vee l_{i,} \vee l_{i,}$، حداکثر یکی از سه مستطیل نوع دو وابسته به این عبارت می‌تواند به چپ فرار کند و حداکثر هم یکی به راست. بنابراین، حداقل یکی از این سه مستطیل نوع دو به سمت پایین فرار کرده‌است. فرض کنید که مستطیل متناظر با $l_{i,\lambda}$ به پایین فرار کرده‌باشد ($\lambda \in \{,,\}$). مستطیل نوع یکی که بالای این مستطیل قرار گرفته‌است، باید به سمت راست فرار کرده‌باشد، چون اگر به پایین فرار کرده‌باشد، چگالی نقطه‌ای روی مستطیل بلند پایین ناحیه‌ی عبارت‌ها بیش از خواهد شد. پس با توجه به نحوه‌ی مقداردهی متغیرها، مقدار $l_{i,\lambda}$ و در نتیجه مقدار عبارت C_i برابر است. به این ترتیب ثابت شد که با مقداردهی ارائه‌شده، مقدار همه‌ی عبارت‌ها برابر خواهد شد.

در سوی دیگر، باید ثابت کنیم که اگر برای نمونه‌ی داده‌شده از مسئله‌ی -ارضاپذیری ، یک مقداردهی وجود

داشته‌باشد که همه‌ی عبارت‌ها را کند، آن‌گاه مستطیل‌ها می‌توانند به گونه‌ای فرار کنند که بیشینه چگالی نقاط قاب باشد. به این منظور، برای هر متغیر x_i، اگر $x_i =$ ، آن‌گاه جهت فرار v_i را سمت راست و جهت فرار $\bar{v_i}$ را پایین در نظر در نظر می‌گیریم. در غیر این صورت، v_i را به سمت پایین و $\bar{v_i}$ را به سمت راست فراری می‌دهیم.

برای هر عبارت $C_i = l_{i,} \vee l_{i,} \vee l_{i,}$، حداقل یک $\lambda \in \{,,\}$ وجود دارد که مقدار $l_{i,\lambda}$ برابر باشد. برای فرار مستطیل نوع دو متناظر با $l_{i,\lambda}$ جهت پایین در نظر گرفته می‌شود و از بین دو مستطیل نوع دو دیگری که وابسته به همین عبارت هستند، مستطیل سمت چپ به سمت چپ و مستطیل دیگر به راست فرار می‌کند.

هم‌چنین مستطیل بلند سمت راست ناحیه‌ی متغیرها به بالا، مستطیل‌های بلند سمت چپ و سمت راست ناحیه‌ی عبارت‌ها هر دو به پایین و مستطیلی که در پایین این ناحیه قرار گرفته‌است به سمت راست فراری داده می‌شود. در مورد سدها هم کافی است از هر سد، مربع‌های وسطی و پایینی به سمت چپ فرار کنند و سه مستطیل دیگر به سمت بالا. به این ترتیب، همه‌ی مستطیل‌ها می‌توانند به گونه‌ای فرار کنند که بیشینه چگالی نقاط قاب برابر باشد. گفتنی است که با این شیوه‌ی فرار، چگالی هیچ نقطه‌ای روی اضلاع قاب بیش‌تر از نخواهد شد.

بنابر آن‌چه گفته‌شد، در صورت حل مسئله‌ی ۲ به ازای $k =$ در زمان چندجمله‌ای، مسئله‌ی -ارضاپذیری نیز در زمان چندجمله‌ای قابل حل خواهد بود. پس مسئله‌ی ۲ برای $k =$ در کلاس پیچیدگی NP-کامل قرار دارد.

□

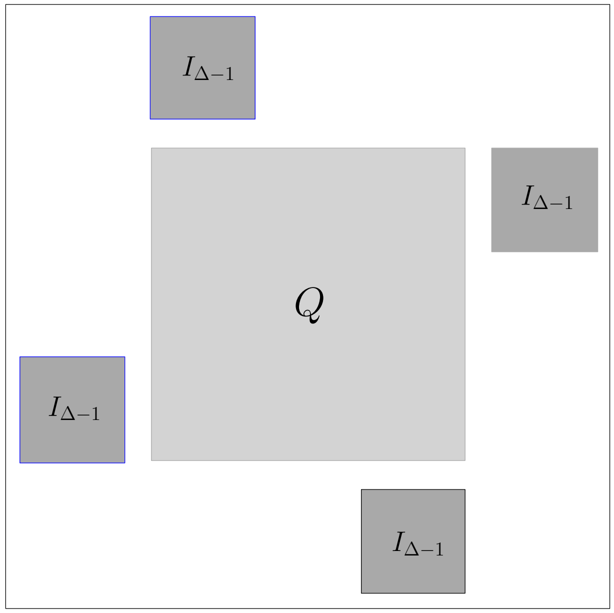
۳-۲ سختی مسئله برای چگالی بیش‌تر از ۲

پیش‌تر، سختی مسئله‌ی ۲ به ازای $k =$ بررسی شد. در این‌جا، نتیجه‌ی مشابهی را با استفاده از استقرا به ازای هر عدد طبیعی ثابت $k \geq$ به دست می‌آوریم.

قضیه‌ی ۴ *برای هر عدد طبیعی $k \geq$ ، مسئله‌ی ۲ حتی برای حالتی که هیچ دو مستطیلی هم‌پوشانی نداشته‌باشند، در کلاس NP-کامل قرار دارد.*

اثبات. پایه‌ی استقرا معادل قضیه‌ی ۳ است که ثابت شد. اکنون فرض کنید که متناظر با نمونه‌ی داده‌شده‌ای از مسئله‌ی ۴، $I_{\Delta-}$ نمونه‌ای از مسئله‌ی ۲ به ازای $k = \Delta -$ باشد ($\Delta >$). برای ساختن I_Δ همان گونه که در شکل ۳-۲ نشان داده‌شده، یک مربع بزرگ Q در وسط می‌گذاریم و چهار نمونه از $I_{\Delta-}$ را در اطراف آن به گونه‌ای قرار می‌دهیم که یک خط عمودی یا افقی نتواند قاب هیچ دوتایی از آن‌ها را قطع کند.

ادعا می‌کنیم که پاسخ مسئله‌ی ۲ به ازای $k = \Delta$ برای نمونه‌ی I_Δ *بلی* است اگر و تنها اگر جواب همین مسئله به ازای $k = \Delta -$ برای نمونه‌ی $I_{\Delta-}$ *بلی* باشد. ابتدا فرض کنید مستطیل‌های I_Δ به شکلی فرار کرده‌اند که چگالی هیچ نقطه‌ای از قاب بیش‌تر از Δ نیست. با توجه به این که Q به یکی از چهار جهت فرار کرده‌است و در نتیجه از روی یکی از چهار نمونه‌ی $I_{\Delta-}$ عبور کرده‌است، می‌توان نتیجه گرفت که اگر $I_{\Delta-}$ به تنهایی در نظر گرفته‌شود، مستطیل‌ها می‌توانند به گونه‌ای فرار کنند که بیشینه چگالی، $\Delta -$ شود. در دیگر سوی، باید ثابت کنیم که اگر مستطیل‌ها در $I_{\Delta-}$ بتوانند با بیشینه چگالی $\Delta -$ فرار کنند، آن‌گاه در I_Δ، مستطیل‌ها می‌توانند به گونه‌ای



شکل ۳-۲: ساختن I_Δ با استفاده از چهار نمونه از $I_{\Delta-}$ برای مسئله‌ی ۲.

فرار کنند که بیشینه چگالی Δ شود. دقت کنید که مستطیل‌های چهار نمونه‌ی $I_{\Delta-}$ در I_Δ باید به گونه‌ای فرار کنند که چگالی هیچ نقطه‌ای روی مکان اولیه‌ی Q از Δ بیش‌تر نشود. مشاهده‌ی زیر اثبات قضیه‌ی ۴ را کامل می‌کند.

مشاهده‌ی ۱ *به ازای هر $\leq \Delta$ ، اگر مستطیل‌های I_Δ بتوانند به گونه‌ای فرار کنند که چگالی هیچ نقطه‌ای بیش از Δ نشود، آن‌گاه این مستطیل‌ها را می‌توان به گونه‌ای فراری داد که*

- *چگالی نقاط ضلع بالایی قاب کم‌تر از Δ (حداکثر $- \Delta$) باشد.*
- *چگالی هر نقطه‌ای روی سه ضلع دیگر قاب حداکثر باشد.*

در زیربخش قبلی، این نتیجه برای $= \Delta$ به دست آمده‌بود. از طرفی دیگر، فرض کنید مستطیل‌های هر چهار $I_{\Delta-}$ در I_Δ به گونه‌ای فرار کرده‌باشند که برای هر یک از این چهار نمونه، بیشینه چگالی روی ضلع بالایی قاب $\Delta -$ باشد و چگالی نقاط سایر اضلاع قاب هم حداکثر . به سادگی می‌توان دید که چگالی هیچ نقطه‌ای از مکان اولیه‌ی Q بیش از Δ نیست. هم‌چنین اگر خود Q به سمت بالا فرار کند، آن‌گاه محدودیت‌های گفته‌شده در مشاهده برای چگالی نقاط روی قاب I_Δ رعایت شده‌است.

$\square$

۳-۳ تقریب‌ناپذیری

با استفاده از قضیه‌ی ۳، می‌توان قضیه‌ی زیر را ثابت کرد:

قضیه‌ی ۵ (تقریب‌ناپذیری) *برای مسئله‌ی ۱ الگوریتمی تقریبی با زمان چندجمله‌ای و ضریب تقریب بهتر از نمی‌توان یافت مگر آن‌که* $P = NP$.

اثبات. گفتنی است که این نتیجه‌ی تقریب‌ناپذیری را نیز برای حالت بدون هم‌پوشانی می‌توان ثابت کرد. اگر الگوریتمی با ضریب تقریب کم‌تر از $\alpha <$ وجود داشته‌باشد، آن‌گاه به ازای یک ورودی از مسئله‌ی راه فرار مستطیل‌ها، در زمان چندجمله‌ای می‌توان دریافت که آیا مستطیل‌ها می‌توانند به گونه‌ای فرار کنند که چگالی هیچ نقطه‌ای از قاب بیش از نشود: مستطیل‌ها را به عنوان ورودی به الگوریتم تقریبی دارای ضریب تقریب α می‌دهیم و پاسخ به دست آمده را با عدد مقایسه می‌نماییم.

- اگر پاسخ مسئله‌ی ۱ حداکثر باشد، آن‌گاه الگوریتم تقریبی باید پاسخی کم‌تر $\times =$ بیابد.
- اگر پاسخ مسئله‌ی ۱ حداقل باشد، پاسخی که الگوریتم تقریبی مورد نظر به دست می‌آورد نیز حداقل خواهد بود.

□

فصل ۴

الگوریتم دقیق برای چگالی واحد

در این فصل، یک الگوریتم با زمان اجرای $O(n)$ برای مسئله‌ی ۲ به ازای $k =$ ارائه می‌کنیم. به بیان دیگر، یک نمونه از مسئله‌ی راه فرار مستطیل‌ها داده شده‌است که در آن مکان اولیه‌ی هیچ دو مستطیلی هم‌پوشانی ندارند و هدف فراری دادن مستطیل‌هاست با این شرط که چگالی هیچ نقطه‌ای از قاب بیش‌تر از یک نشود. همان‌گونه که پیش‌تر گفته‌شد، زمان اجرای بهترین الگوریتم قبلی برای این مسئله، الگوریتمی با زمان $O(n)$ بوده که در [؟] ارائه شده‌است. در این بخش، با کمک برنامه‌ریزی پویا[1]، الگوریتمی با زمان اجرای $O(n)$ برای این مسئله به دست خواهیم‌آورد. به این منظور، ابتدا این مسئله‌ی بهینه‌سازی را که آن را بیشینه فرار مجزا[2] می‌نامیم، در نظر بگیرید:

مسئله‌ی ۵ (بیشینه فرار مجزا) *یک نمونه از مسئله‌ی راه فرار مستطیل‌ها داده شده‌است که در آن مکان هیچ دو مستطیلی هم‌پوشانی ندارند. بیش‌ترین تعداد مستطیلی را بیابید که با چگالی یک می‌توانند فرار کنند.*

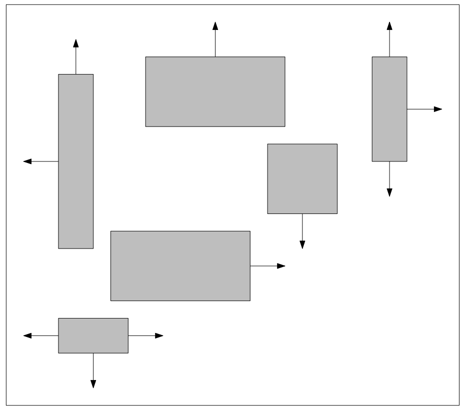
لازم به ذکر است که در مسئله‌ی ۵، مکان اولیه‌ی مستطیل‌های فرار نکرده هم اهمیت دارد: یک مستطیل در مسیر فرار خود نمی‌تواند با مکان اولیه‌ی هیچ مستطیل دیگری - حتی مستطیل‌های فرار نکرده - برخورد کند.

مستطیل‌های $R,\ldots,R_n$ را در نظر بگیرید به گونه‌ای که اضلاع این مستطیل‌ها موازی محورهای مختصات هستند و هیچ دو مستطیلی هم‌پوشانی ندارند. بدیهی است که قاب را می‌توان هر ناحیه‌ی مستطیل دلخواهی با مرزهای موازی محورها در نظر گرفت که همه‌ی این n مستطیل را در بر بگیرد. فرض کنید که این n مستطیل بر حسب ضلع پایینی خود مرتب شده‌اند، به گونه‌ای که ضلع پایینی R_i از ضلع پایینی R_{i+} بالاتر نیست ($\leq i < n$).

برای مستطیل R_i و $d \in \{left, right, up, down\}$، جهت d را برای مستطیل R_i *آزاد* می‌نامیم، اگر R_i در صورت فرار در جهت d از روی مکان اولیه‌ی هیچ مستطیلی عبور نکند. بنا بر تعریف، آزاد بودن یک جهت برای یک مستطیل وابسته به جهت فرار هیچ مستطیلی نیست. شکل ۴-۱ را ببینید. برای هر مستطیل R_i، جهت‌های آزاد

[1] Dynamic Programming

[2] Maximum Disjoint Escaping



شکل ۴-۱: جهت‌های آزاد برای هر یک از مستطیل‌ها در مسئله‌ی ۲ به ازای $k =$.

این مستطیل را می‌توان به سادگی در زمان $O(n)$ به دست آورد، پس با یک پیش‌پردازش[۳] در زمان $O(n)$ جهت‌های آزاد همه‌ی مستطیل‌های داده‌شده را می‌توان یافت. گذشته از این، مجموعه‌ی $\{v, \dots, v_k\}$ را مجموعه‌ی همه‌ی خط‌های عمودی در نظر می‌گیریم که ضلع‌های عمودی مستطیل‌ها بر روی آن‌ها قرار گرفته‌اند. فرض کنید این خط‌ها از چپ به راست مرتب شده‌اند. این خط‌ها را نیز در پیش‌پردازش با همان زمان $O(n)$ می‌توان به دست آورد.[۴]

برای حل مسئله‌ی ۵، ابتدا دو زیر مسئله‌ی ساده‌ی زیر را در نظر می‌گیریم:

- $One\text{–}Direction(i, l, r)$

  بیش‌ترین تعداد مستطیل از میان مستطیل‌های $R, \dots, R_i$ که بین دو خط عمودی v_l و v_r قرار گرفته‌اند و می‌توانند به سمت بالا فرار کنند.

- $Two\text{–}Direction(i, l, r)$

  بیش‌ترین تعداد مستطیل از میان مستطیل‌های $R, \dots, R_i$ که بین دو خط عمودی v_l و v_r قرار گرفته‌اند و می‌توانند به سمت بالا یا پایین فرار کنند.

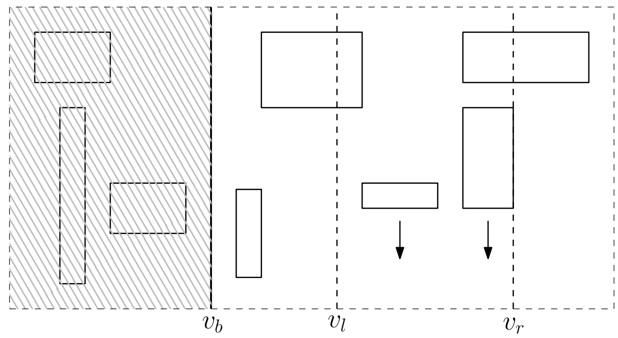
این دو زیرمسئله به سادگی با الگوریتم‌های حریصانه[۵] قابل حل هستند. برای یافتن مقدار $One\text{–}Direction(i, l, r)$ کافی است از میان مستطیل‌های $R, \dots, R_i$ که بین دو خط v_l و v_r قرار گرفته‌اند، تعداد مستطیل‌هایی را بیابیم که جهت بالا برای آن‌ها آزاد است. هم‌چنین برای $Two\text{–}Direction(i, l, r)$ باید تعداد مستطیل‌هایی در بین مستطیل‌های گفته‌شده را یافت که برای آن‌ها جهت بالا یا پایین، آزاد باشد. توجه کنید که اگر دو مستطیل در جهت عمودی (بالا یا پایین) فرار کنند به گونه‌ای که جهت فرارشان آزاد باشد، آن‌گاه مسیر فرارشان برخورد نخواهد داشت.

---

[۳] Preprocess

[۴] همه‌ی این پیش‌پردازش‌ها را در زمان $O(n \log n)$ هم می‌توان انجام داد.

[۵] Greedy



شکل ۴-۲: یک نمونه از مسئله‌ی فرار به سه جهت.

بنا به آن‌چه گفته شد، مقادیر $One\text{–}Direction$ و $Two\text{–}Direction$ را می‌توان در زمان $O(n)$ برای همه‌ی سه‌تایی‌های (i, l, r)به دست آورد[۶] و در آرایه‌هایی ذخیره نمود.

اکنون زیرمسئله‌های زیر را در نظر بگیرید:

مسئله‌ی ۶ (فرار به سه جهت) *زیرمسئله‌ی$No\text{–}Left\text{–}Escape(i, b, l, r)$ بیش‌ترین تعداد مستطیل در میان مستطیل‌های $R, \ldots, R_i$ تعریف می‌شود که با شرایط زیر می‌توانند فرار کنند:*

- *هیچ مستطیلی نمی‌تواند به سمت چپ فرار کند.*
- *فقط مستطیل‌هایی که سمت راست خط عمودی v_b قرار دارند، می‌توانند فرار کنند.*
- *فقط مستطیل‌هایی که بین خط‌های v_l و v_r قرار دارند، می‌توانند به سمت پایین فرار کنند.*

شکل ۴-۲ را ببینید.

زیرمسئله‌ی$No\text{–}Right\text{–}Escape(i, b, l, r)$ نیز به طریق مشابه قابل تعریف است، با این تفاوت که در$No\text{–}Right\text{–}Escape$ ، هیچ مستطیلی به سمت راست نمی‌تواند فرار کند.

برای یافتن مقدار $No\text{–}Left\text{–}Escape(i, b, l, r)$ به صورت بازگشتی، می‌توان همه‌ی گزینه‌های ممکن برای R_i (که پایین‌ترین مستطیل در بین مستطیل‌های مورد نظر است) را در نظر گرفت. نخستین گزینه این است که R_i فرار نکند. در این صورت، بیش‌ترین تعداد مستطیلی که با رعایت محدودیت‌های مسئله می‌توانند فرار کنند، برابر است با $No\text{–}Left\text{–}Escape(i-, b, l, r)$ که به صورت بازگشتی قابل محاسبه است. سایر گزینه‌ها، فرار R_i به یکی از سه جهت پایین، بالا و راست هستند که به صورت جداگانه در زیر بررسی شده‌اند. در همه‌ی حالت‌ها فرض بر این است که جهت مورد بررسی برای R_i آزاد است و فرار در آن جهت با همه‌ی محدودیت‌های مسئله سازگاری دارد.

در ضمن فرض کنید خطوط v_α و v_β خط‌هایی هستند که ضلع‌های عمودی R_i روی آن‌ها قرار گرفته‌اند و $\alpha < \beta$ (به بیان دیگر، ضلع سمت چپ روی v_α و ضلع سمت راست روی v_β قرار گرفته‌است.)

[۶] این مقادیر با کمک برنامه‌ریزی پویا در زمان $O(n)$ نیز قابل محاسبه هستند.

- فرار به سمت *پایین*

اگر R_i به سمت پایین فرار کند، هیچ محدودیت جدیدی برای فرار مستطیل‌های $R,\ldots,R_{i-}$ ایجاد نخواهد شد. بنابراین، بیش‌ترین تعداد مستطیل از بین این $i-$ مستطیل که می‌توانند با رعایت محدودیت‌های مسئله فرار کنند، برابر است با $No\text{–}Left\text{–}Escape(i-,b,l,r)$ که به صورت بازگشتی قابل محاسبه است.

- فرار به سمت *بالا*

با فرار R_i به سمت بالا، یک محدودیت بر فرار $i-$ مستطیل دیگر افزوده می‌شود: مستطیل‌هایی که در سمت راست v_β قرار ندارند، نمی‌توانند به سمت راست فرار کنند، چراکه در این صورت، با مسیر فرار R_i برخورد خواهند کرد. با توجه به این نکته، مستطیل‌هایی را در که بین v_b و v_β قرار دارند، در نظر بگیرید. بسته به جایگاه قرارگیری v_l و v_r، بیش‌ترین تعداد مستطیل از بین این مستطیل‌ها که می‌توانند فرار کنند، با استفاده از زیر مسئله‌های $One\text{–}Direction$ و $Two\text{–}Direction$ به دست می‌آید. از سوی دیگر، بیش‌ترین تعداد مستطیل از $R,\ldots,R_{i-}$ که سمت راست v_β قرار دارند و می‌توانند فرار کنند، برابر است با

$$No\text{–}Left\text{–}Escape(i-,max(b,\beta),l,r)$$

که به صورت بازگشتی قابل محاسبه است.

- فرار به سمت *راست*

اگر R_i به سمت راست فرار کند، از بین $i-$ مستطیل دیگر، مستطیل‌هایی که سمت چپ v_α قرار ندارند، نمی‌توانند به پایین فرار کنند. پس اگر مستطیلی بخواهد به پایین فرار کند، باید نه تنها سمت چپ v_r که سمت چپ v_α نیز قرار داشته‌باشد. به این ترتیب، بیش‌ترین تعداد مستطیل از میان این $i-$ مستطیل که می‌توانند فرار کنند، برابر است با:

$$No\text{–}Left\text{–}Escape(i-,b,l,min\{r,\alpha\})$$

زیرمسئله‌ی $No\text{–}Left\text{–}Escape$ مطابق آن‌چه گفته شد، با در نظر گرفتن همه‌ی گزینه‌های ممکن برای R_i به صورت بازگشتی قابل حل است. همین الگوریتم بازگشتی را می‌توان به الگوریتمی مبتنی بر برنامه‌ریزی پویا تبدیل کرد. این ترتیب مقدار $No\text{–}Left\text{–}Escape$ برای همه‌ی چهارتایی‌هایی (i,b,l,r) در زمان $O(n)$ به دست می‌آید. هم‌چنین برای زیرمسئله‌ی $No\text{–}Right\text{–}Escape$ نیز با الگوریتم مشابهی می‌توان پاسخ را به ازای همه‌ی چهارتایی‌های (i,b,l,r) به دست آورد. با داشتن این مقادیر، مسئله‌ی کلی زیر را حل خواهیم کرد:

مسئله‌ی ۷ *به ازای اعداد $\le i \le n$ و $\le l,r \le k$ ، بیش‌ترین تعداد مستطیل از بین مستطیل‌های $R,\ldots,R_i$ را بیابید که با این محدودیت می‌توانند فرار کنند: تنها مستطیل‌هایی که سمت راست v_l و سمت چپ v_r قرار دارند، می‌توانند به سمت پایین فرار کنند.*

این مسئله که حالت کلی‌تری از مسئله‌ی ۵ است، مشابه دو زیرمسئله‌ی گفته‌شده با در نظر گرفتن همه‌ی گزینه‌های ممکن برای R_i و به صورت بازگشتی قابل حل است. الگوریتم ۱ را ببینید.

الگوریتم بازگشتی ۱ را نیز می‌توان با بهره‌گیری از برنامه‌ریزی پویا بازنویسی کرد و به این ترتیب، مقدار $Max\text{–}Route$ برای همه‌ی سه‌تایی‌های (i,l,r) در زمان $O(n)$ به دست می‌آید.

Algorithm ۱ $Max\text{-}Route(i, l, r)$

if $i = 0$ **then**
    Return 0
$ans_n \leftarrow Max\text{-}Route(i-1, l, r)$
$ans_d \leftarrow 0, ans_u \leftarrow 0, ans_l \leftarrow 0, ans_r \leftarrow 0$
$\alpha, \beta \leftarrow$ indices of the vertical lines through the left and the right sides of R_i
if *down* is feasible for R_i **then**
    $ans_d \leftarrow Max\text{-}Route(i-1, l, r) + 1$
if *left* is feasible for R_i **then**
    $ans_l \leftarrow Max\text{-}Route(i-1, \max\{l, \beta\}, r) + 1$
if *right* is feasible for R_i **then**
    $ans_r \leftarrow Max\text{-}Route(i-1, l, \min\{r, \alpha\}) + 1$
if *up* is feasible for R_i **then**
    $ans_u \leftarrow No\text{-}Right\text{-}Escape(i-1, \alpha, l, r) + No\text{-}Left\text{-}Escape(i-1, \beta, l, r) + 1$
Return $\max\{ans_n, ans_d, ans_u, ans_l, ans_r\}$

در پایان، برای یافتن پاسخ مسئله‌ی ۵ تنها داشتن مقدار $Max\text{-}Route(n, , k)$ کافی است که در آن، اندیس چپ‌ترین و k اندیس راست‌ترین خط عمودی است. بدیهی است که اگر این مقدار برابر n باشد، به معنی آن است که همه‌ی این n مستطیل می‌توانند در چگالی فرار کنند. اکنون قضیه‌ی زیر را می‌توان نتیجه گرفت:

قضیه‌ی ۶ *به ازای $k =$ ، مسئله‌ی ۲ در زمان $O(n)$ قابل حل است که در آن، n تعداد مستطیل‌های ورودی است.*

اثبات. کافی است ابتدا بررسی شود که آیا n مستطیل داده‌شده هم‌پوشانی دارند یا نه. اگر دو مستطیل هم‌پوشانی داشته‌باشند، بدیهی است که مستطیل‌ها نمی‌توانند به گونه‌ای فرار کنند که چگالی همه‌ی نقاط قاب حداکثر باشد، چراکه برخی ار نقاط قاب را بیش از یک مستطیل پوشانده‌اند. در غیر این صورت، کافی است پاسخ مسئله‌ی ۵ با عدد n مقایسه شود.

□

فصل ۵

الگوریتم تقریبی

در این فصل، دو الگوریتم تقریبی برای مسئله‌ی راه فرار مستطیل‌ها را بررسی خواهیم‌کرد. از آن‌جایی که الگوریتم‌های تقریبی این فصل مبتنی بر برنامه‌ریزی صحیح و برنامه‌ریزی خطی است، ابتدا یک برنامه‌ریزی صحیح برای مسئله ارائه می‌کنیم.

پیش از ارائه‌ی برنامه‌ریزی صحیح معادل با مسئله‌ی ۱ ، ابتدا فرض کنید همه‌ی اضلاع مستطیل‌ها را از دو طرف گسترش دهیم تا اضلاع قاب را قطع کنند. به این ترتیب، قاب به شکل مشبک در خواهد آمد. شکل ۵-۱ را ببینید. به سادگی می‌توان دید که مستقل از چگونگی فرار مستطیل‌ها، چگالی همه‌ی نقاط درون یک *سلول* از این شبکه با هم برابر است، پس به جای چگالی نقاط قاب، می‌توان چگالی را به یک سلول نسبت داد. از سوی دیگر، بدیهی است که تعداد سلول‌ها از $O(n)$ خواهد بود.

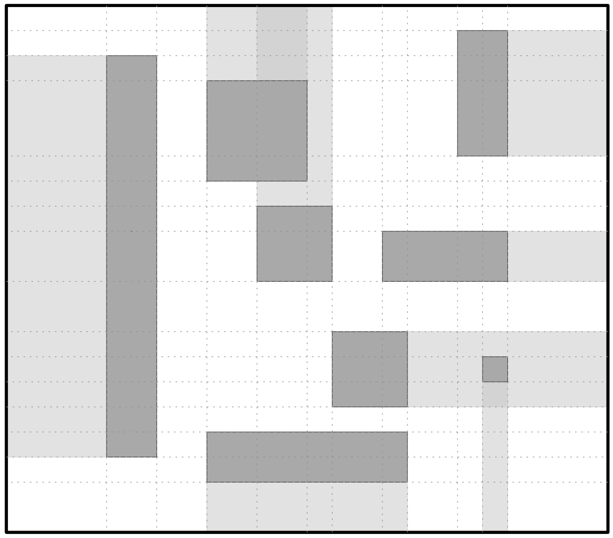
اکنون می‌توان یک برنامه‌ریزی صحیح نوشت که معادل مسئله‌ی ۱ باشد. مستطیل‌های ورودی را $R, \dots, R_n$ در نظر بگیرید. به ازای هر $\leq i \leq n$ ، چهار متغیر $x_{i,l}$، $x_{i,r}$، $x_{i,u}$ و $x_{i,d}$ با دامنه‌ی $\{ , \}$ تعریف می‌کنیم. منظور از بودن مقدار $x_{i,l}$، فرار کردن R_i به سمت چپ است. به طریق مشابه، بودن مقدار $x_{i,r}$، $x_{i,u}$ و $x_{i,d}$ را به ترتیب معادل فرار R_i به راست، بالا و پایین در نظر می‌گیریم. فرض کنید این متغیرها را *متغیرهای جهت* نام‌گذاری کنیم.

برای هر سلول c، مجموعه‌ای به نام P_c به این شکل تعریف می‌کنیم: به ازای هر $\leq i \leq n$ و هر جهت $\lambda \in \{l, r, u, d\}$، دوتایی (i, λ) در P_c قرار دارد، اگر و تنها اگر مستطیل R_i در صورت فرار در جهت λ، مسیر فرارش از سلول c عبور کند. بنابر تعریف، اگر مکان اولیه‌ی R_i روی سلول c قرار گرفته‌باشد، آن‌گاه هر چهار زوج (i, l)، (i, r)، (i, u) و (i, d) در P_c قرار دارند و در غیر این صورت، حداکثر یکی از این چهار زوج، عضو P_c است.

اکنون می‌توان محدودیت‌های خطی زیر را با این فرض که بیشینه چگالی نقاط برد برابر Z باشد، نوشت:

- به ازای هر i، باید $x_{i,l} + x_{i,r} + x_{i,u} + x_{i,d} \geq$. به بیان دیگر، هر مستطیل باید حداقل به یکی از چهار جهت فرار کند.

- چگالی همه‌ی سلول‌ها باید کم‌تر یا مساوی Z باشد، پس به ازای هر سلول c، محدودیت $\Sigma_{(i,\lambda) \in P_c} x_{i,\lambda} \leq Z$



شکل ۵-۱: سلول‌ها برای یک نمونه از مسئله‌ی راه فرار مستطیل‌ها.

وجود دارد.

بنابر آن‌چه گفته شد، برنامه‌ریزی صحیح زیر معادل مسئله‌ی ۱ است. دقت کنید که در این برنامه‌ریزی صحیح، تعداد محدودیت‌ها از $O(n)$ است.

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize} && Z && \\
&\text{subject to} && \sum_{(i,\lambda)\in P_c} x_{i,\lambda} \leq Z && \forall c \\
& && x_{i,l}+x_{i,r}+x_{i,u}+x_{i,d} \geq 1 && \forall\ 1 \leq i \leq n
\end{aligned}
$$

همان گونه که پیش‌تر اشاره شد، دامنه‌ی همه‌ی متغیرهای جهت در برنامه‌ریزی صحیح داده‌شده، مجموعه‌ی $\{,\}$ است. دامنه‌ی متغیر Z را نیز می‌توان مجموعه‌ی همه‌ی اعداد طبیعی در نظر گرفت، هرچند می‌دانیم که مقدار Z در جواب بهینه، عضو $\{,\ldots,n\}$ خواهد بود. برنامه‌ریزی خطی متناظر با این برنامه‌ریزی صحیح را می‌توان این گونه تعریف کرد که همه‌ی محدودیت‌ها مطابق برنامه‌ریزی صحیح باشند، ولی دامنه‌ی متغیرهای جهت در آن، همه‌ی اعداد گویای بازه‌ی $[,]$ در نظر گرفته‌شود و دامنه‌ی Z هم همه‌ی اعداد گویای بازه‌ی $[,n]$.

هرچند با فرض $NP \neq P$، برای حل برنامه‌ریزی صحیح مورد نظر هیچ الگوریتم کارایی وجود ندارد، ولی برنامه‌ریزی خطی متناظر را می‌توان در زمان چندجمله‌ای حل کرد. پاسخ برنامه‌ریزی خطی را OPT_{LP} می‌نامیم. فرض کنید که مقدار متغیر $x_{i,\lambda}$ در OPT_{LP} را ${x^*}_{i,\lambda}$ و مقدار متغیر Z در OPT_{LP} را نیز Z^* بنامیم. لازم به ذکر است که هر بردار امکان‌پذیر برای برنامه‌ریزی صحیح داده‌شده یک بردار امکان‌پذیر برای برنامه‌ریزی خطی متناظر نیز هست، پس برای برنامه‌ریزی صحیحی مورد نظر، بردار امکان‌پذیری نمی‌توان یافت که در آن مقدار متغیر Z

کم‌تر از Z^* باشد. به بیان دیگر، کمینه چگالی ممکن برای فراری دادن مستطیل‌ها نمی‌تواند کم‌تر از Z^* باشد.

اکنون با داشتن OPT_{LP} می‌توان الگوریتم‌هایی تقریبی برای مسئله‌ی ۱ به دست آورد. در این بخش ابتدا یک الگوریتم تقریبی ساده با ضریب تقریب ارائه خواهد شد. این الگوریتم پیش‌تر در [؟] معرفی شده‌است. سپس الگوریتمی احتمالی ارائه خواهیم کرد که به ازای هر $\epsilon >$، در صورتی که جواب مسئله راه فرار مستطیل‌ها به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد، با احتمال بسیار بالایی پاسخی با ضریب تقریب $+ \epsilon$ به دست می‌دهد.

۵-۱ ضریب تقریب

با داشتن OPT_{LP} و با بهره‌گیری از روش گرد کردن قطعی به سادگی می‌توان یک الگوریتم تقریبی با ضریب تقریب برای مسئله به دست آورد. برای این کار، با داشتن OPT_{LP}، یک بردار امکان‌پذیر برای برنامه‌ریزی صحیح اولیه، مطابق با آن‌چه در ادامه می‌آید، به دست می‌آوریم.

- برای هر مستطیل i، جهت λ را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که مقدار ${x^*}_{i,\lambda}$ در بین چهار متغیر جهت مربوط به این مستطیل بیشینه باشد. اگر بیش از یک جهت با این ویژگی وجود داشت، یک جهت به دلخواه انتخاب می‌شود. سپس در برنامه‌ریزی صحیح معادل با مسئله‌ی ۱، مقدار متغیر $x_{i,\lambda}$ را برابر و مقدار سه متغیر جهت دیگری که مربوط به R_i هستند را در نظر می‌گیریم. این مقداردهی به متغیرها معادل با این است که مستطیل R_i در جهت λ فرار کند.
- مقدار متغیر Z در برنامه‌ریزی صحیح مورد نظر را $\lfloor Z^* \rfloor$ قرار می‌دهیم.

پیش از هر چیز نشان می‌دهیم بردار صحیحی که این گونه به دست می‌آید، یک بردار امکان‌پذیر است. برای این منظور دقت کنید که اگر مستطیل R_i در جهت λ فرار کند، در OPT_{LP} مقدار ${x^*}_{i,\lambda}$ حداقل بوده‌است، چراکه $x_{i,l} + x_{i,r} + x_{i,u} + x_{i,d} \geq$. بنابراین، در نتیجه‌ی گرد کردن، مقدار هر متغیر جهت، حداکثر برابر شده‌است. پس اگر مقدار متغیر Z در برنامه‌ریزی صحیح مورد نظر برابر $\lfloor Z^* \rfloor$ قرار داده‌شود، همه‌ی محدودیت‌های به شکل $\Sigma_{x \in P_c} x \leq Z$ رعایت خواهند شد. پس بردار به دست آمده یک بردار امکان‌پذیر برای برنامه‌ریزی صحیحی است که ارائه شده‌است.

از سوی دیگر، مقدار تابع هدف به ازای این بردار به دست آمده برابر همان $\lfloor Z^* \rfloor$ است و به این ترتیب می‌توان نتیجه گرفت که الگوریتم گفته‌شده، الگوریتمی تقریبی برای مسئله‌ی راه فرار مستطیل‌ها با ضریب تقریب است.

۵-۲ ضریب تقریب هر اندازه نزدیک به

اکنون به معرفی یک الگوریتم تقریبی با ضریب تقریبِ به میزان دلخواه نزدیک به در هنگامی که پاسخ بهینه به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد، می‌پردازیم. به طور دقیق‌تر، الگوریتم ارائه‌شده در این بخش یک الگوریتم تصادفی است که اگر Z^* (پاسخ بهینه‌ی برنامه‌ریزی خطی) از $c_\epsilon \log n$، بیش‌تر باشد، آن گاه با احتمال زیاد جواب بدست آمده

از $+\epsilon$ برابر جواب بهینه بیش‌تر نیست. دقت کتید که c_ϵ عدد ثابتی است وابسته به ϵ (و مستقل از n یا هر پارامتر دیگری).

این الگوریتم، بر پایه‌ی گرد کردن تصادفی است که در بخش های پیشین به طور مختصر معرفی شده‌است. یک نکته‌ی مهم در این الگوریتم، مستقل نبودن متغیرهای تصادفی حاصل از گرد کردن متغیرهای برنامه‌ریزی خطی است. به بیان دیگر، در روشی که ارائه می‌کنیم، بر خلاف روشی که توضیح داده شده، متغیرها به صورت مستقل از هم گرد نمی‌شوند، بلکه در گرد کردن آن‌ها وابستگی وجود دارد. ابتدا لم زیر را برای گرد کردن متغیرهای گویا به اعداد صحیح ارائه می‌دهیم.

لم ۱ *فرض کنید متغیرهای $x_i \in [,]$ داده شده‌اند و داریم $\Sigma x_i =$. می‌توان متغیرهای x_i را به یکی از اعداد یا گرد کرد به گونه‌ای که:*

- *احتمال گرد شدن متغیر x_i به یک، برابر با مقدار x_i باشد.*
- *یک و تنها یکی از متغیرهای داده شده شود و باقی همگی به گرد شوند.*

اثبات. لازم به یادآوری است که روش گرد کردن متغیرها به صورت مستقل و با احتمال x_i به ازای هر متغیر، در این جا کاربرد ندارد؛ چرا که در این روش، شرط دوم لم در برآورده نمی‌شود.

برای آن که بتوان هر دو شرط را به طور هم‌زمان برآورده کرد، روش مقابل را پیشنهاد می دهیم: به هرکدام از متغیرهای x_i یک زیربازه از بازه‌ی $(,]$ با طولی برابر با مقدار x_i نسبت می‌دهیم به طوری که هیچ دو بازه‌ای اشتراک نداشته باشند. به این ترتیب، از آن جایی که $\Sigma x_i =$، اجتماع این بازه‌های مجزا، کل $(,]$ را می‌پوشاند.

پس از این کار، یک عدد تصادفی به صورت یکنواخت در بازه‌ی $(,]$ انتخاب می‌کنیم و آن متغیر x_i را که نقطه‌ی انتخاب شده در بازه‌ی نسبت داده‌شده به آن باشد، به گرد می‌کنیم. سایر متغیرها را نیز به گرد می‌نماییم. با توجه به این که اندازه‌ی بازه‌ی نسبت داده‌شده به هر متغیر x_i برابر است با مقدار آن متغیر، احتمال آن که یک متغیر به گرد شود، مساوی با مقدار x_i است. از طرف دیگر، با توجه به این که اجتماع این بازه‌های مجزا تمام بازه‌ی $(,]$ را می‌پوشانند و نقطه‌ی انتخاب شده در یک و تنها یک بازه خواهد بود، شرط دوم لم با این روش برآورده می‌شود.

□

اکنون با استفاده از لم بالا، الگوریتم تقریبی زیر را برای مسئله‌ی ۱ ارائه می‌دهیم.

- برای هر مستطیل i داریم $x^*_{i,l}+x^*_{i,r}+x^*_{i,u}+x^*_{i,d} =$. مطابق لم بالا، این چهار متغیر جهت را گرد می کنیم. فرض کنید که متغیر $\hat{x}_{i,\lambda}$ را برابر با مقدار گرد شده متغیر $x^*{}_{i,\lambda}$ در نظر بگیریم. به این ترتیب، از بین چهار متغیر $\hat{x}_{i,l}$، $\hat{x}_{i,r}$، $\hat{x}_{i,u}$ و $\hat{x}_{i,d}$، مقدار یکی برابر و مقدار سه‌تای دیگر است.
- مستطیل R_i را به جهتی فرار می‌دهیم که مقدار $\hat{x}_{i,\lambda}$ متناظر با آن جهت برابر باشد.

قضیه‌ی ۷ *الگوریتم گفته‌شده یک الگوریتم تقریبی با ضریب تقریب $+\epsilon$ برای مسئله‌ی راه فرار مستطیل‌ها است، هنگامی که $Z^* \geq (/\epsilon)\ln n$.*

اثبات. همان گونه که توضیح داده‌شد، این الگوریتم به هر مستطیل یک و تنها یک جهت برای فرار نسبت می‌دهد. حال چگالی نقطه‌های قاب را با جواب Z^* مقایسه می‌کنیم. به ازای هر سلول در قاب مانند c، متغیر d_c را برابر با چگالی آن سلول وقتی مستطیل‌ها طبق الگوریتم گفته‌شده فرار می‌کنند، تعریف می‌کنیم. بنابر این داریم:

$$d_c = \Sigma_{(i,\lambda)\in P_c}\hat{x}_{i,\lambda}$$

طبق روش گرد کردن می‌توان گفت:

$$E[d_c] = E[\Sigma_{(i,\lambda)\in P_c}\hat{x}_{i,\lambda}] = \Sigma_{(i,\lambda)\in P_c}E[\hat{x}_{i,\lambda}] = \Sigma_{(i,\lambda)\in P_c}P[\hat{x}_{i,\lambda}] = \Sigma_{(i,\lambda)\in P_c}{x^*}_{i,\lambda} \leq Z^*$$

در عبارت بالا، تساوی دوم بر اساس خطی بودن امید ریاضی به دست آمده، تساوی سوم بر اساس قسمت شرط نخست بالا و تساوی چهارم بر اساس تعریف امید ریاضی برای متغیرهای تصادفی شناسه[1]. نامساوی پایانی نیز نتیجه‌ی محدودیت‌های برنامه‌ریزی خطی است. بنابر آن چه به دست آمد، امید ریاضی چگالی هر سلول کم‌تر از یا مساوی با Z^* است. اکنون باید فاصله‌ی مقدار چگالی یک سلول از مقدار امید ریاضی آن را بررسی کنیم. ابزاری که برای این کار استفاده می‌کنیم، نامساوی چرنوف است که پیش از این مطرح شده‌است.

مطابق با آن‌چه در نامساوی چرنوف گفته شده، در این جا، متغیر تصادفی d_c مجموع تعدادی متغیر تصادفی است که دامنه‌ی آنها $\{,\}$ است. تنها نکته‌ای که باید در نظر داشت این است که در نامساوی چرنوف، شرط مستقل بودن متغیرها وجود دارد، در حالی که روش گرد کردن متغیرها در الگوریتم بالا مستقل نیست. در این باره می‌توان گفت:

- اگر مکان اولیه‌ی مستطیل R_i روی سلول c قرار داشته‌باشد، آن گاه هر چهار زوج (i,l)، (i,r)، (i,u) و (i,d) عضو P_c هستند. در این حالت، به جای چهار متغیر وابسته به R_i در عبارت $d_c = \Sigma_{(i,\lambda)\in P_c}\hat{x}_{i,\lambda}$، می‌توان عدد قرار داد؛ چرا که همواره یک و تنها یکی از این متغیرها مقدار خواهد داشت.
- اگر مکان اولیه‌ی مستطیل R_i روی سلول c قرار نداشته‌باشد، آن گاه حداکثر یکی از چهار زوج (i,l)، (i,r)، (i,u) و (i,d) در P_c است. از سوی دیگر، به سادگی می‌توان دید که متغیرهای $\hat{x}_{i,\lambda}$ و $\hat{x}_{i',\lambda'}$ به ازای $i \neq i'$ مستقل از هم هستند.

بنابر آن چه گفته شد، برای هر سلول c، می‌توان فاصله‌ی d_c از امید ریاضی آن را با کمک نامساوی چرنوف بررسی کرد.

$$P(d_c \geq (+ \epsilon)E[d_c]) \leq (\frac{e^\epsilon}{(+ \epsilon)^{(+\epsilon)}})^{Z^*}$$

هم چنین، با توجه به آن چه که پیش‌تر در رابطه با نامساوی چرنوف گفته شد، می‌توان نوشت:

$$(\frac{e^\epsilon}{(+ \epsilon)^{(+\epsilon)}})^{Z^*} \leq e^{-Z^*\epsilon/}$$

دقت کنید پاسخی که الگوریتم ما برای مسئله‌ی راه فرار مستطیل‌ها تولید می‌کند، برابر است با بیشینه مقدار d_c یا به بیان دقیق‌تر $max_c\{d_c\}$. هم‌چنین تعداد سلول‌های قاب حداکثر برابر است با (n). حال فرض کنید که به

[1] به فصل مقدمات رجوع کنید

ازای یک ثابت عددی وابسته به ϵ مانند c_ϵ داریم:

$$Z^* \geq c_\epsilon \ln n$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$P\{max_c\{d_c\} \geq (+ \epsilon)Z^*\} \leq \Sigma_c P\{d_c \geq (+ \epsilon)Z^*\} \leq (n) \times n^{-c_\epsilon \epsilon /}$$

بنا بر آن چه گفته شد، اگر ثابت عددی c_ϵ برابر با $\epsilon/$ در نظر گرفته‌شود، احتمال آن که بیشینه چگالی در الگوریتم ما از $+\epsilon$ برابر پاسخ برنامه‌ریزی خطی بیش‌تر باشد، از $\frac{}{n}$ کم‌تر است. از آن جایی که Z^* کران پایینی برای مسئله‌ی ۱ است، می‌توان ادعا کرد وقتی $Z^* \geq c_\epsilon \ln n$، آن گاه با احتمال بالا خروجی الگوریتم ما حداکثر $+ \epsilon$ برابر پاسخ بهینه است.

$\square$

فصل ۶

نتیجه‌گیری

در این رساله، نتایج جدیدی در مورد مسئله‌ی راه فرار مستطیل‌ها به دست آمد که به طور خلاصه به شرح زیر هستند:

- ثابت شد مسئله‌ی ۲ به ازای $k =$ در کلاس پیچیدگی NP-کامل قرار دارد. این در حالی است که پیش از این، NP-کامل بودن این مسئله به ازای $k \geq$ در [؟] نشان داده شده‌بود و از سوی دیگر برای $k =$، [؟] الگوریتمی چندجمله‌ای ارائه کرده‌بود. به این ترتیب، وضعیت مسئله‌ی ۲ برای هر عدد k مشخص شد.
- با فرض $P \neq NP$، نمی‌توان الگوریتمی تقریبی با زمان چندجمله‌ای و ضریب تقریب بهتر از برای مسئله‌ی ۱ یافت.
- پاسخ مسئله‌ی ۲ به ازای $k =$ را می‌توان در زمان $O(n)$ یافت که در مقایسه با الگوریتم ارائه شده در [؟] از زمان اجرای بهتری برخوردار است و در عمل می‌تواند بسیار قابل استفاده‌تر باشد.
- به ازای هر عدد $< \epsilon$، برای مسئله‌ی ۱ الگوریتمی تقریبی و احتمالی با ضریب تقریب $+ \epsilon$ ارایه شد، ولی به شرط آن که پاسخ از عدد مشخصی (وابسته به ϵ) بیش‌تر باشد.

علی‌رغم الگوریتم تقریبی ارائه شده در این مقاله، هنوز یک پرسش جذاب در رابطه با این مسئله بی‌پاسخ مانده‌است: آیا می‌توان الگوریتمی تقریبی با ضریب تقریب بهتر از برای مسئله‌ی راه فرار مستطیل‌ها در حالت کلی یافت؟

سپاس

از استاد بزرگوارمان، دکتر ضرابی‌زاده که با کمک‌ها و راهنمایی‌های بی‌دریغشان، ما را در انجام این پروژه یاری داده‌اند، تشکر و قدردانی می‌کنیم.

هم‌چنین از آقای حسام منفرد که این مسئله را به ما پیشنهاد دادند و دوست عزیزمان، آقای صدرا یزدان‌بد که در به دست آوردن نتایج این مقاله با ما همکاری داشتند، صمیمانه سپاس‌گزاریم.

abstract

Motivated by a bus routing application, we study the following *rectangle escape* problem: Given a set S of n rectangles inside a rectangular region named *board*, extend each rectangle in S toward one of the four borders of the board so that the maximum density over the board is minimized, where the density of each point p of the board is defined as the number of extended rectangles containing p.

We show that the problem is hard to approximate to within any factor better than $\frac{3}{2}$. When the desired density is 1, we provide an exact algorithm that finds an optimal solution in $O(n^4)$ time, improving upon the current best $O(n^6)$-time algorithm. When the optimal density is sufficiently large, for any constant $\epsilon > 0$, we provide a randomized algorithm that achieves an approximation factor of $1 + \epsilon$ with high probability improving upon the current best 4-approximation algorithm available for the problem.

Sharif University of Technology
Computer Engineering Department

B.Sc. Thesis
Computer Engineering - Software

Title:

Rectangle Escape Problem

By:

Ehsan Emamjomeh-Zadeh

Sepehr Assadi

Supervisor:

Dr. Hamid Zarrabi-Zadeh

June 2013