Probability Density Function

20417 정민호

Contents

- 1. 확률밀도함수 소개
- 2. 정규분포의 확률밀도함수 적분 증명 (4가지 방법)
- 3. $\int e^{-x^2} dx$ 계산 (feat. Taylor 급수)
- 4. $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ 계산 (오차 0.001 이내)

CAUTION

1. 약간 의식의 흐름대로 만들어서
   뜬금없는 개념이 등장할 수도 있음
2. 이 PPT의 페이지 수가 107페이지인 관계로
   다소 지루한 발표가 될 수도 있음

Probability Density Function

확률밀도함수(Probability Density Function, PDF):

주어진 변량이 정해진 구간 안에 존재할 확률을 나타낸 함수

Probability Density Function

CRV X에 대하여 음이 아닌 함수 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 존재하여

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \ \wedge \ \mathrm{P}(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

를 만족하면 f를 X의 PDF라고 한다.

Probability Density Function

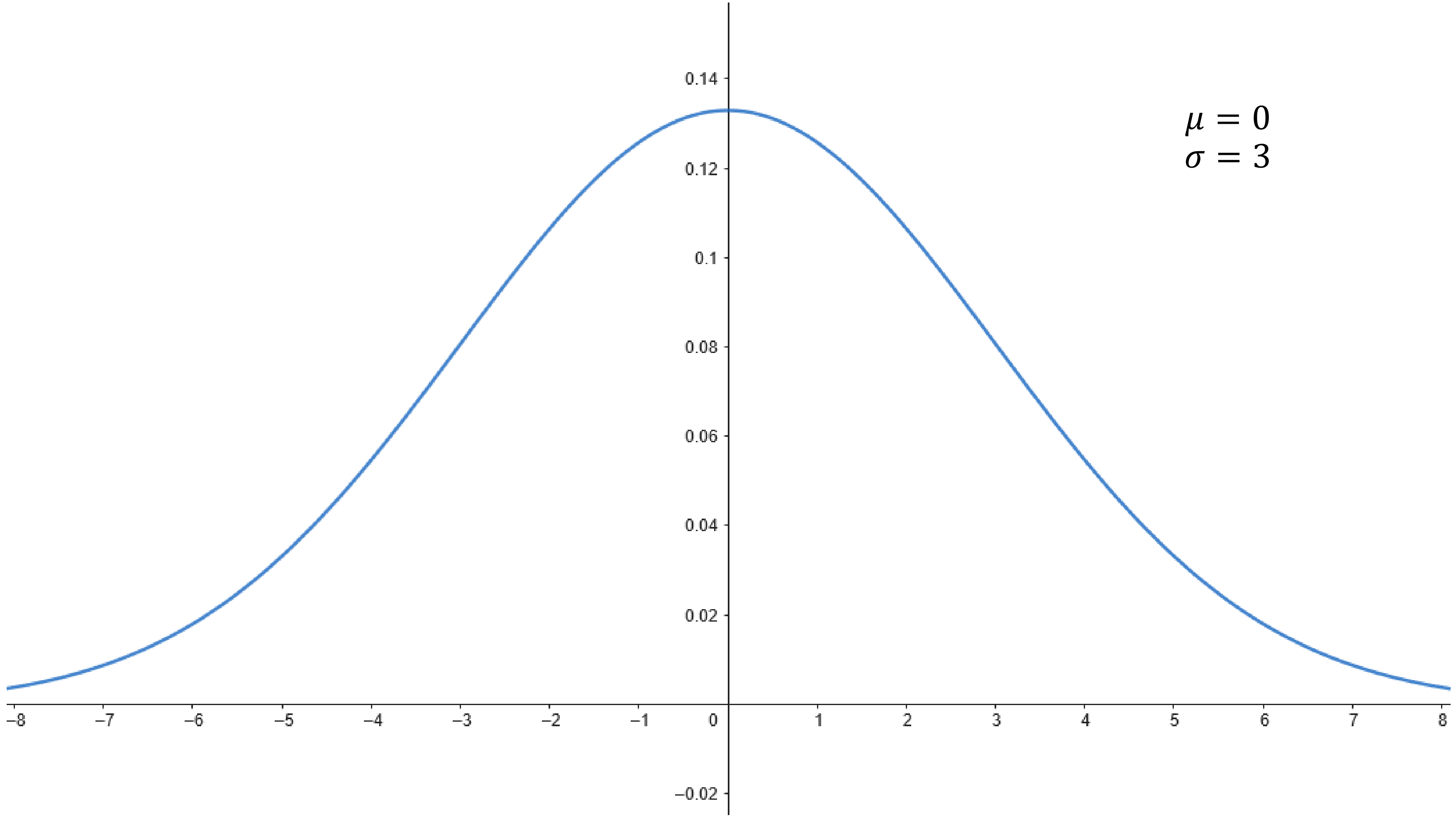
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Probability Density Function

σ(sigma): standard deviation

μ(mu): mean

Probability Density Function



$\mu = 0$
$\sigma = 3$

Probability Density Function

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$$

Probability Density Function

$$u \mapsto \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Probability Density Function

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 1$$

Probability Density Function

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$$

Probability Density Function

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$$

Probability Density Function

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx = 1$$

Gaussian Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

Proof #1: Polar Coordinates

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

Proof #1: Polar Coordinates

다음과 같은 함수 I를 생각하자.

$$I(a) = \int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx$$

Proof #1: Polar Coordinates

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$가 절대수렴한다면,

Cauchy 주요값을 통해 이상적분을 구할 수 있다.

이는 $\lim\limits_{a \to \infty} I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$와 동치이다.

Proof #1: Polar Coordinates

다음이 성립하므로 준 식은 절대수렴한다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{-x^2} \right| dx < \int_{-\infty}^{-1} -xe^{-x^2}\, dx + \int_{-1}^{1} e^{-x^2}\, dx + \int_{1}^{\infty} xe^{-x^2}\, dx < \infty$$

Proof #1: Polar Coordinates

따라서 다음이 성립한다.

$$\lim_{a\to\infty} I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

Proof #1: Polar Coordinates

$$\{I(a)\}^2$$

Proof #1: Polar Coordinates

$$= \left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2} dx\right)\left(\int_{-a}^{a} e^{-y^2} dy\right)$$

Proof #1: Polar Coordinates

$$= \left(\int_{-a}^{a} \left(\int_{-a}^{a} e^{-y^2} \, dy \right) e^{-x^2} \, dx \right)$$

Proof #1: Polar Coordinates

$$= \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} e^{-(x^2+y^2)}\, dy\, dx$$

Proof #1: Polar Coordinates

Fubini의 정리에 의해 앞의 중적분은

다음과 같은 면적분으로 나타낼 수 있다.

$$\iint_{[-a,a]\times[-a,a]} e^{-\left(x^2+y^2\right)} d(x,y)$$

Proof #1: Polar Coordinates

지수함수는 모든 실수에 대해 0보다 크므로,

내접하는 디스크의 면적분 값은 $\{I(a)\}^2$보다 작고,

외접하는 디스크의 면적분 값은 $\{I(a)\}^2$보다 크다.

Proof #1: Polar Coordinates

계산의 편리성을 위해 직교좌표계를 극좌표계로 변환하자.

그렇다면 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$x = r\cos\theta\,, y = r\sin\theta$$

Proof #1: Polar Coordinates

$$J(r,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$d(x,y) = |J(r,\theta)|d(r,\theta) = rd(r,\theta)$$

Proof #1: Polar Coordinates

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{a} re^{-r^2}\,dr\,d\theta < \{I(a)\}^2 < \int_0^{2\pi}\int_0^{a\sqrt{2}} re^{-r^2}\,dr\,d\theta$$

Proof #1: Polar Coordinates

$$\pi\left(1 - e^{-a^2}\right) < \{I(a)\}^2 < \pi\left(1 - e^{-2a^2}\right)$$

Proof #1: Polar Coordinates

$$\pi = \lim_{a\to\infty} \pi\left(1 - e^{-a^2}\right) \le \lim_{a\to\infty} \{I(a)\}^2 \le \lim_{a\to\infty} \pi\left(1 - e^{-2a^2}\right) = \pi$$

Proof #1: Polar Coordinates

따라서 다음이 성립한다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

Proof #1: Polar Coordinates

앞의 식은 다음과 동치이다. 따라서 다음 식은 참이다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx = 1 \blacksquare$$

Absolute Convergence

무한급수의 각 항의 절대값을 항으로 하는 양항급수가 수렴하면,

원래의 무한급수는 절대수렴한다고 한다.

Absolute Convergence

$$(\forall \epsilon > 0)\ (\exists \beta \in \mathbb{R})\ \left|\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| - \beta\right| < \epsilon$$

$$\Longrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \alpha \in \mathbb{R})\ \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \alpha\right| < \varepsilon$$

Cauchy Principal Value

일반적인 정적분으로 값을 구할 수 없는
일부 이상적분의 값을 구할 수 있는 방법

Cauchy Principal Value

함수 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 x_0 부근에서 발산한다고 하자.

그렇다면 $a < x_0 < b$에서의 적분 $\int_a^b f(x)dx$가

Riemann 적분 혹은 Lebesgue 적분으로써 존재하지 않을 수 있다.

* 여기서 x_0를 특이점이라고 한다.

Cauchy Principal Value

그러나 다음과 같은 극한이 존재할 수 있다.

$$\mathcal{P}\int_a^b f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\int_a^{x_0-\varepsilon} f(x)dx + \int_{x_0+\varepsilon}^b f(x)dx\right]$$

* 여기서 x_0를 특이점이라고 한다.

Cauchy Principal Value

이때 $\mathcal{P}\int_a^b f(x)dx$를 코시 주요값이라고 한다.

* 여기서 x_0를 특이점이라고 한다.

Fubini's Theorem

$$\iint\limits_{X\times Y} f(x,y)\,d(x,y) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,dy\right)dx = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,dx\right)dy$$

$$\text{if } \iint\limits_{X\times Y} |f(x,y)|\,d(x,y) < +\infty$$

Proof #2: Cartesian Coordinates

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

Proof #2: Cartesian Coordinates

증명 1에서 $y = xs$라고 하면, $dy = xds$이다.

이때, $y \to \pm\infty$로 갈 때 s의 극한은 x의 부호에 영향을 받는다.

Proof #2: Cartesian Coordinates

e^{-x^2}이 우함수이므로 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx$가 성립하고,

x가 양수일 때, y와 s는 같은 극한을 갖는다.

따라서 다음과 같이 계산할 수 있다.

Proof #2: Cartesian Coordinates

$$I^2$$

Proof #2: Cartesian Coordinates

$$= 4\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dy\,dx$$

Proof #2: Cartesian Coordinates

$$= 4\int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dy\right)dx$$

Proof #2: Cartesian Coordinates

$$= 4\int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-x^2(1+s^2)} x\,ds\right) dx$$

Proof #2: Cartesian Coordinates

$$= 4\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty} e^{-x^2(1+s^2)}x\,dx\right)ds$$

Proof #2: Cartesian Coordinates

$$= 4\int_0^\infty \left[\frac{e^{-x^2(1+s^2)}}{-2(1+s^2)}\right]_{x=0}^{x=\infty} ds$$

Proof #2: Cartesian Coordinates

$$= 2\int_0^\infty \frac{1}{1+s^2}\,ds$$

Proof #2: Cartesian Coordinates

$$= 2[\arctan(s)]_0^{\infty}$$

Proof #2: Cartesian Coordinates

$$= \pi$$

Proof #2: Cartesian Coordinates

따라서 다음이 성립한다.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Proof #2: Cartesian Coordinates

앞의 식은 다음과 동치이다. 따라서 다음 식은 참이다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx = 1 \blacksquare$$

Proof #3: Laplace's Method

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

Proof #3: Laplace's Method

Laplace 근사를 사용하면 다음과 같이 근사할 수 있다.

$$e^{-x^2} \approx 1 - x^2 \approx (1 + x^2)^{-1}$$

Proof #3: Laplace's Method

임의의 실수 t에 대해 $(1+t)e^{-t} \leq 1$이 성립하므로,

e^{-x^2}은 다음과 같이 유계이다.

$$1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq (1+x^2)^{-1}$$

Proof #3: Laplace's Method

따라서, 다음 식이 성립한다.

$$\int_{[-1,1]} (1-x^2)^n dx \le \int_{[-1,1]} e^{-nx^2} dx \le \int_{[-1,1]} (1+x^2)^{-n} dx$$

Proof #3: Laplace's Method

앞의 식은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$2\sqrt{n}\int_{[0,1]}(1-x^2)^n dx \leq \int_{[-\sqrt{n},\sqrt{n}]} e^{-x^2}dx \leq 2\sqrt{n}\int_{[0,1]}(1+x^2)^{-n}dx$$

Proof #3: Laplace's Method

삼각치환을 통해 상한과 하한을 얻을 수 있다.

$$\frac{2\sqrt{n}(2n)!!}{(2n+1)!!} \ \& \ \frac{\pi}{2}\cdot\frac{2\sqrt{n}(2n-3)!!}{(2n-2)!!}$$

Proof #3: Laplace's Method

Wallis 공식은 다음과 같다.

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}$$

Proof #3: Laplace's Method

앞의 식에서 양변에 2를 곱하고 제곱근을 취해주면 다음과 같이 나타난다.

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n \to \infty} 2\sqrt{n} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

Proof #3: Laplace's Method

우변은 상한과 같고, 비슷한 방법으로 하한도 $\sqrt{\pi}$임을 보일 수 있다.

따라서 다음이 성립한다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Proof #3: Laplace's Method

앞의 식은 다음과 동치이다. 따라서 다음 식은 참이다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx = 1 \blacksquare$$

Proof #4: Gamma Function

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

Proof #4: Gamma Function

피적분함수가 우함수이므로 다음이 성립한다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

Proof #4: Gamma Function

$x \mapsto \sqrt{t}$로 치환하면 다음과 같이 정리된다.

$$2\int_0^\infty e^{-x^2}dx = 2\int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt = \int_0^\infty e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt$$

Proof #4: Gamma Function

감마 함수의 정의는 다음과 같다.

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

Proof #4: Gamma Function

따라서 다음이 성립한다.

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Proof #4: Gamma Function

그러므로, 다음 식은 참이다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx = 1 \blacksquare$$

Gamma Function

감마 함수(gamma function):

계승 함수의 해석적 연속으로, 정의역은 $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^{-}$이다.

Gamma Function

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^z}{1 + \frac{z}{n}}$$

Gamma Function

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! \cdot n^z}{\prod_{i=0}^{n}(z+i)}$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} e^{-\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{z}{n}}}{1+\frac{z}{n}}$$

Properties of Gamma Function

$$\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n) = (n-1)!$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

$$\Gamma(1) = 1$$

Properties of Gamma Function

$$\Gamma(z)\Gamma(1-\mathrm{z}) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(\mathrm{z}+\frac{1}{2}\right)$$

$$\Gamma(\mathrm{z}+1) \approx \sqrt{2\pi z}\left(\frac{z}{e}\right)^{z}$$

Additional Problem #1

$$\int e^{-x^2} dx$$

Taylor Series

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

* 여기서 $x_0 = 0$일 때의 급수를 Maclaurin 급수라고 한다.

Proof for Taylor Series

가정: 함수 f는 정칙함수이다.

Proof for Taylor Series

FTC2에 의해 다음이 성립한다.

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$$

Proof for Taylor Series

여기서 부분적분을 시행하는데,

1을 적분할 함수, $f'(t)$를 미분할 함수로 설정하자.

또, 1의 부정적분을 $t - x$로 두자.

Proof for Taylor Series

$$\int_a^x f'(t)dt = [(t-x)f'(t)]_a^x - \int_a^x (t-x)f''(t)dt = f'(a)(x-a)\int_a^x (t-x)f''(t)dt$$

$$\int_a^x (t-x)f''(t)dt = -\frac{(x-a)^2}{2}f''(a) - \int_a^x \frac{(t-x)^2}{2}f'''(t)dt$$

$$\dots$$

$$\int_a^x \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)dt = (-1)^{n-1}\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) - \int_a^x \frac{(t-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt$$

Proof for Taylor Series

이를 정리하면 다음과 같다.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (-1)^n \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(t-x)^n dt$$

Proof for Taylor Series

이를 합으로 간단히 나타내면 다음과 같다.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + (-1)^n \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(t-x)^n dt$$

Proof for Taylor Series

적분의 MVT를 이용하면 다음과 같다.

$$R_n = (-1)^n \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(t-x)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \alpha \in (a,x)$$

이때 R_n을 Lagrange의 나머지라고 부른다.

Proof for Taylor Series

$n \to \infty$일 때 $R_n \to 0$이라면 $f(x)$는 다음과 같이 표현된다.

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

이는 우리가 원하던 Taylor 급수의 꼴이다.

Taylor Series of exp(x)

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Taylor Series of exp(x)

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots$$

Additional Problem #1

$$\int e^{-x^2} dx$$

Additional Problem #1

$$= \int \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{k!}\,dx$$

Additional Problem #1

$$= \int \left\{ 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} - \cdots \right\} dx$$

Additional Problem #1

$$= \left\{ x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^9}{216} - \cdots \right\} + C$$

Additional Problem #1

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{k!\,(2k+1)} + C$$

Additional Problem #1

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\operatorname{erf}(x) + C$$

Error Function

$$\mathrm{erf}(x)$$

Error Function

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

Derivative of Error Function

$$\frac{d}{dx}\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

Properties of Error Function

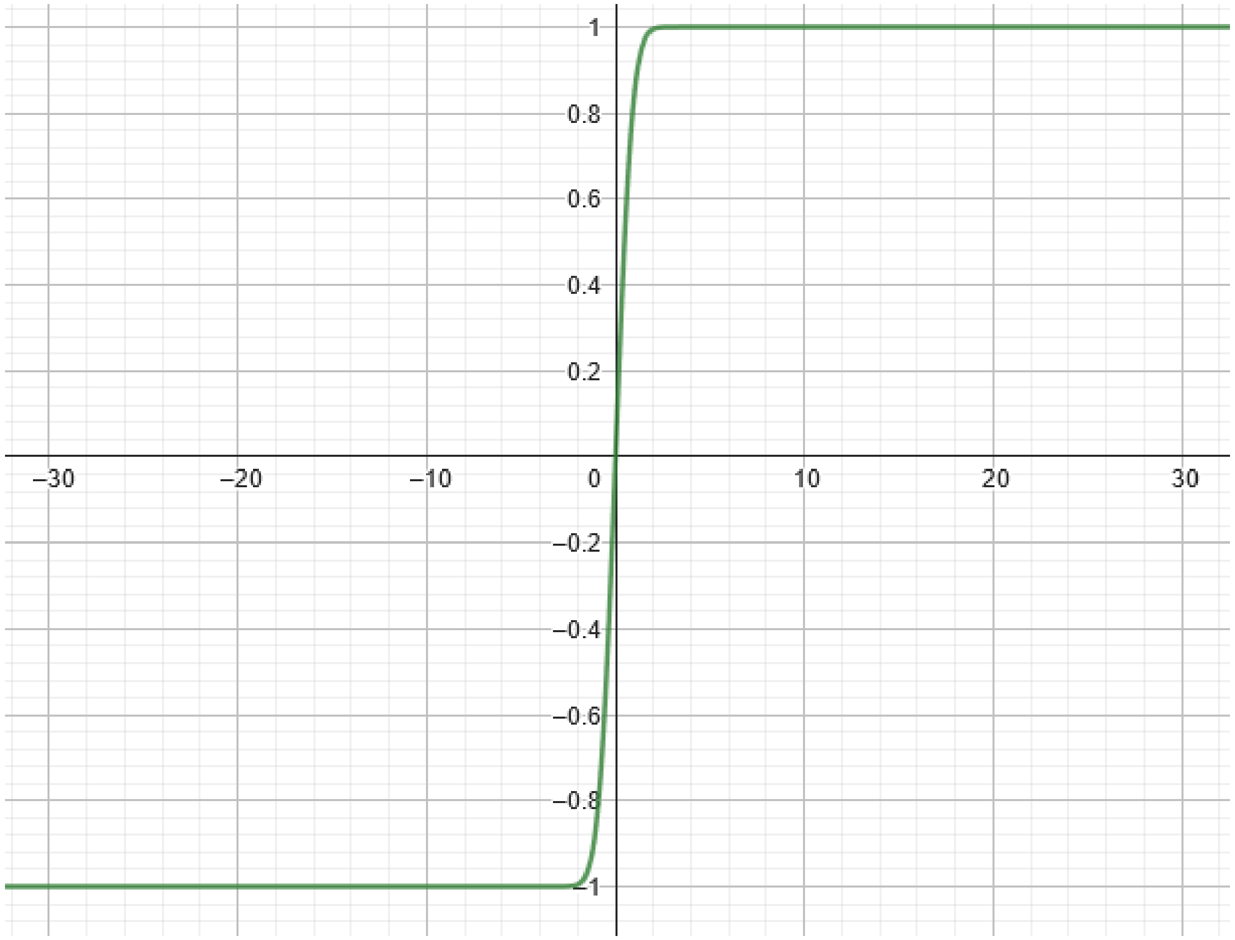
$$\mathrm{erf}(x) = -\mathrm{erf}(-x)$$

$$\lim_{x \to 0} \mathrm{erf}(x) = 0$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \mathrm{erf}(x) = \pm 1$$

$$\mathrm{erf}(z^*) = \mathrm{erf}^*(z)$$

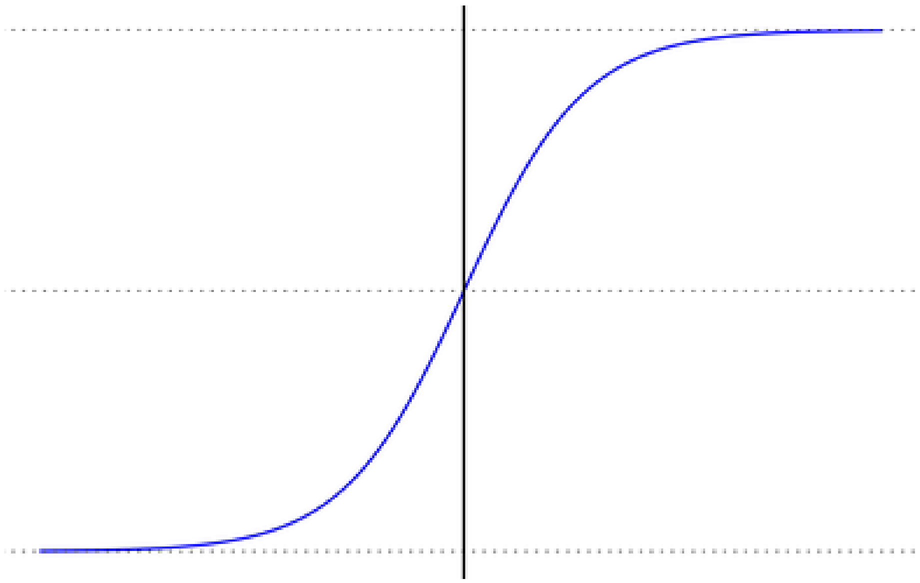
Graph of Error Function



Sigmoid Function

기울어진 S자 형태의 곡선

e.g. $\mathrm{erf}(x)$, $\tanh(x)$, $\arctan(x)$, $\mathrm{gd}(x)$



Additional Problem #2

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

Additional Problem #2

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(2k+1)}$$

Additional Problem #2

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} + \frac{1}{9360} - \frac{1}{75600} + \cdots$$

Additional Problem #2

$$\approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} + \frac{1}{9360}$$

Additional Problem #2

$$= 0.7468\overline{360343}$$

error: approx. 0.000012

Additional Problem #2

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}(1) = 0.746824132812427025399467\cdots$$

References

- 1. Introduction to Probability (Bertsekas & Tsitsiklis, 2nd)
- 2. Probability Theory: STAT310/MATH230 (A. Dembo, Ver. 20190423)
- 3. Complex Analysis (Stein & Shakarchi, 2nd)
- 4. Principles of Mathematical Analysis (Rudin, 3rd)
- 5. Calculus, Volume II: Multi-Variable Calculus and Linear Algebra, with Applications to Differential Equations and Probability (Apostol, 2nd)

Thank you
for your listening