M-AXIS

Tropical Calculus

M-AXIS

M-AXIS

| Tropical Calculus ▾

조원정보

30412 정민호

30413 정진우

30414 한재현

목차

M-AXIS

1. 연구의 필요성 및 목적

i. 필요성

열대 반환은 다른 수 체계에 비해 수학적인 성질이 부족하지만, 다항함수의 성질을 연구할 때 매우 유의미하게 작용한다. 그러나, 기본적인 연산의 성질만 알려져 있을 뿐, 미분이나 적분과 관련된 연구는 아직 많이 이루어지지 않았다. 열대 반환에서는 덧셈과 곱셈이 일반적인 수 체계와는 다른 방식으로 정의되며, 이미 알려진 대수적, 기하학적 성질이 매우 흥미롭다. 따라서, 우리가 흔히 사용하는 실·복소 함수의 미분과 적분처럼 계산할 수 있는 성질을 이식할 수 있는지, 만약 불가능하다면 이 공간 내에서 자연스럽게 정의할 방법을 고안하는 시도가 필요하다고 생각한다.

ii. 목적

열대 반환에서 미분과 적분을 이식하거나 새롭게 정의하는 시도가 필요하다. 실수·복소수 체계에서는 표준 해석학과 비표준 해석학에서 정의한 미분이 결과적으로 같은데, 이러한 성질이 열대 반환에서도 유지되는지 비교하는 연구를 진행하고자 한다.

M-AXIS

2. 이론적 배경

- Valuation (값매김)

$$\{v : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}\}$$

$$\begin{cases} v(a+b) \geq \min\{v(a), v(b)\} \\ v(a \cdot b) = v(a) + v(b) \\ v(0) = +\infty \end{cases}$$

$$\exists!\,(a, b, p, n);\ q = \frac{a}{b} \cdot p^n$$

(단, $\gcd(a,p) = 1,\ \gcd(b,p) = 1,\ \gcd(a,b) = 1,\ n \in \mathbb{Z}$)

$$\begin{aligned} v_p(q) &= v_p\left(\frac{a}{b} \cdot p^n\right) \\ &= v_p(a) + v_p\left(\frac{1}{b}\right) + v_p(p^n) \\ &= 0 + 0 + n \\ &= n. \end{aligned}$$

이러한 연산적 성질은 열대 반환에서의 연산과 닮아 있음을 확인할 수 있다.

2. 이론적 배경

- 열대 반환

열대 기하학:
브라질의 컴퓨터 과학자 I. Simon 등 많은 수학자가 독자적으로 제시한 수학적 개념으로부터 시작한 수학의 한 분야로 덧셈이 최소 함수로, 곱셈이 일반적인 덧셈으로 바뀌었을 때 다항식과 그 성질에 대한 연구이다.

min tropical semiring(NTS)에서 두 실수의 덧셈과 곱셈은 다음과 같이 정의된다.

$$x \oplus y \coloneqq \min\{x, y\}$$
$$x \otimes y = x + y$$

반면, max tropical semiring(XTS)에서는 다음과 같이 정의된다.

$$x \oplus y \coloneqq \max\{x, y\}$$
$$x \otimes y = x + y$$

2. 이론적 배경

- 열대 변환

임의의 다항함수 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$의 열대 변환 $\mathrm{Trop}(f)$를 다음과 같이 정의한다.

$$\mathrm{Trop}\big(f(x)\big) = v(a_0) \oplus v(a_1) \otimes x \oplus v(a_2) \otimes x^{\otimes 2} \oplus \cdots \oplus v(a_n) \otimes x^{\otimes n}.$$

예를 들어, 다항함수 $f(x) = x^3 + 7x^2 + 12x + 3$의 열대 변환 $\mathrm{Trop}(f)$는 다음과 같다.

$$\mathrm{Trop}\big(f(x)\big) = v(1) \otimes x^{\otimes 3} \oplus v(7) \otimes x^{\otimes 2} \oplus v(12) \otimes x \oplus v(3).$$

이때, $p = 3$이라면 $\mathrm{Trop}(f)$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathrm{Trop}\big(f(x)\big) &= 0 \otimes x^{\otimes 3} \oplus 0 \otimes x^{\otimes 2} \oplus 1 \otimes x \oplus 1\\ &= x^{\otimes 3} \oplus x^{\otimes 2} \oplus 1 \otimes x \oplus 1.\end{aligned}$$

3. 연구방법

1. 1차, 2차 연산이 주어진 반환에 3차 연산을 부여하고, 그 성질을 확인한다. 또한, 다항식의 인수분해 가능성을 확인한다. 열대 반환 덧셈은 $\min\{\cdot\}$으로 정의되기 때문에 항이 3개 이상이 될 때 동치인 다항식이 존재할 것이다. 이를 고려하여, 특히, 이차식의 인수분해 방법과 인수분해 가능할 조건을 조사한다.

2. 열대 반환에서는 덧셈의 역원이 정의되지 않으므로 뺄셈을 정의할 수 없어, 이를 이용하여 거리를 논할 수 없다. 따라서 다른 방법으로 거리를 정의해야 하며, 반환은 성질이 체나 환에 비해 부족하므로, 적당한 거리를 찾기 어렵다. 따라서 Cauchy의 극한이 아닌 비표준 해석학의 방법을 이용한 Thompson 미적분학의 정의를 열대 반환에 우선적으로 적용해본다.

3. 적용된 직관적인 미분을 바탕으로 미분이 잘 정의되었는지 확인해본다. 이를 위해 실수체에 서 정의된 함수를 미분한 후에 열대반환으로 변환시킨 함수와 함수를 열대반환으로 변환시킨 후 열대반환 내에서 직관적으로 미분한 함수와의 관계를 확인할 수 있다. 또한 실수체에서 정의된 함수의 도함수와 열대 변환 내에서의 도함수를 다시 역변환 했을 때 두 함수 간의 관계를 확인한다.

4. 열대 미분의 역연산을 통해 열대 반환에서의 적분을 정의할 수 있다. 이때 p의 값에 유의하며 적분 가능함을 확인해본다.

5. 열대 반환 내에서의 미분과 적분의 기하학적 성질에 대해 탐구해보고, 보완할 점을 고안해본다.

4. 연구 결과

- 거듭제곱 정의

거듭제곱을 곱셈을 거듭하여 만들어지는 연산이라 하자.

$$\begin{cases} x^{\otimes n} = x \otimes x \otimes \cdots \otimes x = nx. \\ x^{\otimes(-n)} = \left(x^{\otimes n}\right)^{-1} = -nx. \\ x^{\otimes 0} = 0. \end{cases}$$

이때, 두 자연수 m과 n에 대하여 다음과 같은 성질을 만족한다.

(E1) $x^{\otimes n} \otimes x^{\otimes m} = x^{\otimes(n+m)}$.

(E2) $\left(x^{\otimes n}\right)^{\otimes m} = x^{\otimes(nm)}$.

(E3) $(x \otimes y)^{\otimes n} = x^{\otimes n} \otimes y^{\otimes n}$.

M-AXIS

4. 연구 결과

- 이차식의 인수분해

이차 열대함수 $f(x) = x^{\otimes 2} \oplus 15 \otimes x \oplus 7$을 생각해보자. 이를 계산하여 간단한 꼴로 나타내면

$f(x) = x^{\otimes 2} \oplus 15 \otimes x \oplus 7 = \min\{2x, x + 15, 7\} = \min\{2x, 7\} = x^{\otimes 2} \oplus 7$임을 알 수 있다.

여기서 $x^{\otimes 2} \oplus 15 \otimes x \oplus 7$과 같이 더 간단한 꼴로 나타낼 수 있는 함수를 기약 함수라 부르고, 그 자체로 가장 간단한 꼴인 $x^{\otimes 2} \oplus 7 \otimes x \oplus 21$과 같은 함수를 인수분해 가능 함수라고 부른다.

이때, $f(x) = x^{\otimes 2} \oplus a \otimes x \oplus b$에 대해,

1) $2a \geq b$이면 $f(x)$가 기약 함수로, $f(x) \sim x^{\otimes 2} \oplus b$이다. (여기서 ~은 동치 기호이다.)

2) $2a < b$이면 $f(x)$가 인수분해 가능 함수로, $f(x) = (x \oplus a) \otimes \big(x \oplus (b - a)\big)$이다.

M-AXIS

4. 연구 결과

- Thompson 미적분학

1) n차 다항함수 (α: 이항계수)

$$y \coloneqq x^{\otimes n} \longrightarrow y \oplus dy = (x \oplus dx)^{\otimes n} = x^{\otimes n} \oplus \alpha \otimes x^{\otimes (n-1)} \otimes dx \oplus \cdots \oplus (dx)^{\otimes n}$$
$$\longrightarrow y = x^{\otimes n} \oplus (dx)^{\otimes n} = x^{\otimes n}.$$

2) 지수함수 (exp)

$$y \coloneqq e^{\otimes x} \longrightarrow y \oplus dy = e^{\otimes (x \oplus dx)} \longrightarrow y = e^{\otimes x}.$$

3) 삼각함수 (sin)

$$y \coloneqq \mathrm{sint}\, x \longrightarrow y \oplus dy = \mathrm{sint}(x \oplus dx)$$
$$\longrightarrow y = \mathrm{sint}\, x \otimes \mathrm{cost}\, dx \oplus \mathrm{cost}\, x \otimes \mathrm{sint}\, dx = \mathrm{cost}\, x\,.$$

(if $\mathrm{cost}\, dx = 1$, $\mathrm{sint}\, dx = 0$.)

4. 연구 결과

- m-변환

m-변환은 실수체에서 정의된 다항식을 열대화하는 하나의 변환 방법이다.

다항식 $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$에 대해 m-변환을 적용한 $m\big(f(x)\big)$는 다음과 같이 정의한다.

$$m\big(f(x)\big) = a_0 \oplus a_1 \otimes x \oplus a_2 \otimes x^{\otimes 2} \oplus \cdots \oplus a_n \otimes x^{\otimes n}.$$

예를 들어, $f(x) = x^2 + 15x + 7$에 대해 m-변환을 적용하면 $m\big(f(x)\big) = x^{\otimes 2} \oplus 15 \otimes x \oplus 7$을 얻는다.

M-AXIS

4. 연구 결과

- 선행 연구의 결과 및 한계

선행 연구에서는 앞서 설명한 m-변환을 이용하여 실수체의 다항식을 열대다항식으로 변환하였다. 열대다항식의 미분과 적분 또한 실수체에서의 방법과 유사하게 적용하여 m-변환을 통해 그대로 도입하였다. 그러나, 이 방법의 경우 실수체 다항식과 열대다항식 사이의 관계를 규명하기 어렵고, 미적분의 연산적 성질을 일부 소실하는 단점이 존재한다.

선행 연구에서의 미분 예시:

$$f(x) = x^2 + 15x + 7 \longrightarrow m\big(f(x)\big) = x^{\otimes 2} \oplus 15 \otimes x \oplus 7 \longrightarrow m'\big(f(x)\big) = 2 \otimes x \oplus 15.$$

본 연구에서는 선행 연구처럼 자명한 값매김을 이용하지 않고, p진 값매김을 활용하여 열대화 등을 정의할 것이다.

4. 연구 결과

- 열대 변환 (reminder)

임의의 다항함수 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$의 열대 변환 $\mathrm{Trop}(f)$를 다음과 같이 정의한다.

$$\mathrm{Trop}\big(f(x)\big) = v(a_0) \oplus v(a_1) \otimes x \oplus v(a_2) \otimes x^{\otimes 2} \oplus \cdots \oplus v(a_n) \otimes x^{\otimes n}.$$

예를 들어, 다항함수 $f(x) = x^3 + 7x^2 + 12x + 3$의 열대 변환 $\mathrm{Trop}(f)$는 다음과 같다.

$$\mathrm{Trop}\big(f(x)\big) = v(1) \otimes x^{\otimes 3} \oplus v(7) \otimes x^{\otimes 2} \oplus v(12) \otimes x \oplus v(3).$$

이때, $p = 3$이라면 $\mathrm{Trop}(f)$는 다음과 같다.

$$\mathrm{Trop}\big(f(x)\big) = 1 \oplus 1 \otimes x \oplus 0 \otimes x^{\otimes 2} \oplus 0 \otimes x^{\otimes 3}$$

$$= x^{\otimes 3} \oplus x^{\otimes 2} \oplus 1 \otimes x \oplus 1.$$

M-AXIS

4. 연구 결과

- 확장된 값매김

기존의 유리수체 값매김은 유리수 $q = \frac{a}{b} \cdot p^{n}$에 대해 $v_p(q) = n$으로 정의한다.

이를 확장해 대수적 수 $\alpha = \frac{a}{b} \cdot p^{z}$에 대해 $v_p(\alpha) = z$로 정의한다.

이를테면, $v_3\left(\sqrt[3]{45}\right) = v_3\left(\sqrt[3]{5}\right) + v_3\left(\sqrt[3]{9}\right) = 0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$이다.

초월수 τ에 대해서는 임의의 소수 p에 대해 $v_p(\tau) = 0$으로 정의한다.

4. 연구 결과

- 변환과 미분의 적용 순서 비교를 통한 미분의 정의

$$
\begin{tikzcd}
f \arrow[r, "\text{trop.}"] \arrow[d, "\text{diff.}"] & \mathrm{Trop}(f) \arrow[dr, "\text{diff.}"] & \\
f' \arrow[r, "\text{trop.}"] & \mathrm{Trop}(f') \arrow[r, phantom, "\overset{?}{=}"] & \{\mathrm{Trop}(f)\}'
\end{tikzcd}
$$

4. 연구 결과

- 변환과 미분의 적용 순서 비교를 통한 미분의 정의

$\mathrm{Trop}(f')$과 $\{\mathrm{Trop}(f)\}'$을 계산하기 쉽게 $f = f'$을 만족하는 함수인 e^x를 가져오자.

그럽다면 $\mathrm{Trop}(f') = \mathrm{Trop}(f) \stackrel{?}{=} \{\mathrm{Trop}(f)\}'$를 조사하면 된다.

Taylor 급수를 활용하여 $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots$로 두자.

이때, $\mathrm{Trop}_2(e^x) = 0 \oplus 0 \otimes x \oplus (-1) \otimes x^{\otimes 2} \oplus (-1) \otimes x^{\otimes 3} \oplus (-3) \otimes x^{\otimes 4} \oplus \cdots$이다.

M-AXIS

4. 연구 결과

- 변환과 미분의 적용 순서 비교를 통한 미분의 정의

$\{\mathrm{Trop}_2(e^x)\}'$를 정의할 때, 세 가지의 방법을 시도하였다.

정의 1) $\left(a \otimes x^{\otimes n}\right)' = (a \cdot n) \otimes x^{\otimes(n-1)}$. (선행연구와 같은 방법)

정의 2) $\left(a \otimes x^{\otimes n}\right)' = a \otimes n \otimes x^{\otimes(n-1)}$.

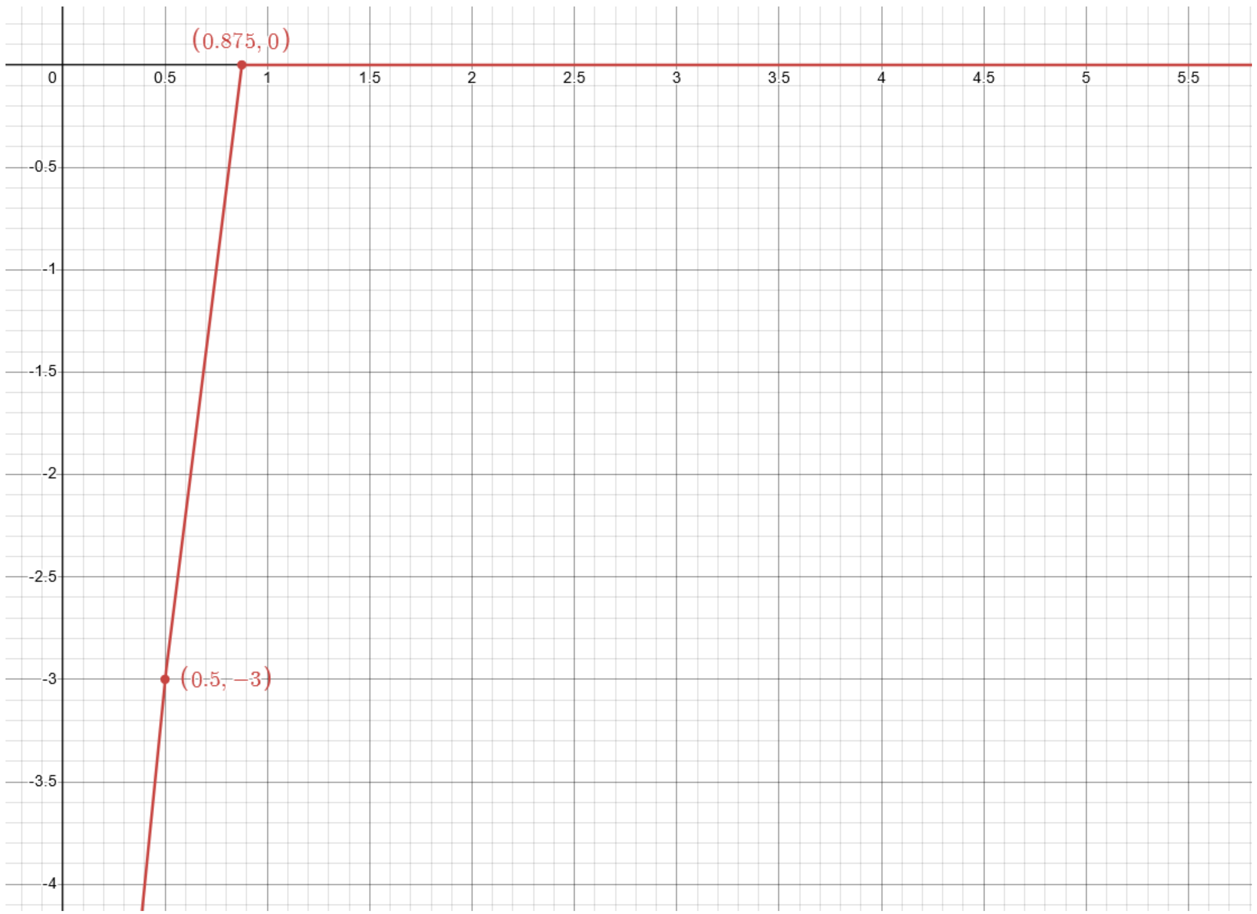
정의 3) $\left(a \otimes x^{\otimes n}\right)' = a \otimes v(n) \otimes x^{\otimes(n-1)}$.

이때, 우리가 원하는 성질($T(f') = T(f)'$)을 만족하는 정의는 (정의 3)이었다.

M-AXIS

4. 연구 결과

- 변환과 미분의 적용 순서 비교를 통한 미분의 정의



4. 연구 결과

- 열대 미분의 연산적 성질

Postulate:

차수가 다른 두 열대단항식 $a \otimes x^{\otimes n}$과 $b \otimes x^{\otimes m}$에 대해

$$\left(a \otimes x^{\otimes n} \oplus b \otimes x^{\otimes m}\right)' = \left(a \otimes x^{\otimes n}\right)' \oplus \left(b \otimes x^{\otimes m}\right)'$$

이 항상 성립한다.

M-AXIS

4. 연구 결과

- 열대 미분의 연산적 성질

Addition: 적당한 소수 p와 임의의 두 다항함수 f와 g에 대해 $\big(T(f+g)\big)' = T(f)' \oplus T(g)'$이 성립한다.

Example: $f(x) = x^6 + 4x^5 + 7x^4 + 2x^2,\ \ g(x) = x^5 + 3x^4 + x^2$

$$\text{LHS} = v(6) \otimes x^{\otimes 5} \oplus v(25) \otimes x^{\otimes 4} \oplus v(40) \otimes x^{\otimes 3} \oplus v(6) \otimes x.$$

$$\text{RHS} = v(6) \otimes x^{\otimes 5} \oplus \big(v(5) \oplus v(20)\big) \otimes x^{\otimes 4} \oplus \big(v(12) \oplus v(28)\big) \otimes x^{\otimes 3} \oplus \big(v(2) \oplus v(4)\big) \otimes x.$$

이때, $p = 3$에 대하여 양변이 같다. (2와 5를 제외한 모든 소수에 대해 성립함.)

M-AXIS

4. 연구 결과

- 열대 미분의 연산적 성질

Multiplication: 적당한 소수 p와 임의의 두 다항함수 f와 g에 대해

$$\big(T(f\cdot g)\big)' = \big(T(f)'\otimes T(g)\big)\oplus\big(T(f)\otimes T(g)'\big)$$ 이 성립한다.

Example: $f(x) = x^3 + 2x + 3,\ \ g(x) = x^2 + 1$

LHS $= v(5)\otimes x^{\otimes 4}\oplus v(9)\otimes x^{\otimes 2}\oplus v(6)\otimes x\oplus v(2).$

RHS $= v(3)\otimes x^{\otimes 4}\oplus\big(v(2)\oplus v(3)\big)\otimes x^{\otimes 2}\oplus v(3)\otimes x\oplus v(2).$

이때, $p = 7$에 대하여 양변이 같다. (2, 3, 5를 제외한 모든 소수에 대해 성립함.)

4. 연구 결과

- 열대 미분의 연산적 성질

Chain Rule: 적당한 소수 p와 임의의 두 다항함수 f와 g에 대해

$\big(T(f \circ g)\big)' = T(g)' \otimes T(f)'\big(T(g)\big)$이 성립한다.

Example: $f(x) = 3x^2 + 7x + 2,\ \ g(x) = 6x + 4$

LHS $= v(216) \otimes x \oplus v(186)$.

RHS $= v(1296) \otimes x \oplus v(252)$.

이때, $p = 11$에 대하여 양변이 같다. (2, 3, 7, 31을 제외한 모든 소수에 대해 성립함.)

M-AXIS

4. 연구 결과

- 열대 적분 정의

열대 적분을 열대 미분의 역연산으로 정의한다. 따라서 $\int a \otimes v(n) \otimes x^{\otimes(n-1)} = a \otimes x^{\otimes n}$이다.

예를 들어, $f(x) = 6 \otimes x^{\otimes 2} \oplus 7 \otimes x \oplus 3$라 하자.

이때, $p = 2$라면 $\int f = 6 \otimes x^{\otimes 3} \oplus 6 \otimes x^{\otimes 2} \oplus 3 \otimes x \oplus C$이다.

반면, $p = 3$이라면 $\int f = 5 \otimes x^{\otimes 3} \oplus 7 \otimes x^{\otimes 2} \oplus 3 \otimes x \oplus C$이다.

한편, $p \neq 2, 3$이라면 $\int f = 6 \otimes x^{\otimes 3} \oplus 7 \otimes x^{\otimes 2} \oplus 3 \otimes x \oplus C$이다.

4. 연구 결과

- 열대 적분의 연산적 성질

Postulate:

차수가 다른 두 열대단항식 $a \otimes x^{\otimes n}$과 $b \otimes x^{\otimes m}$에 대해

$$\int a \otimes x^{\otimes n} \oplus b \otimes x^{\otimes m} = \int a \otimes x^{\otimes n} \oplus \int b \otimes x^{\otimes m}$$

이 항상 성립한다.

4. 연구 결과

- 열대 적분의 연산적 성질

Addition: 적당한 소수 p와 임의의 두 다항함수 f와 g에 대해 $\int T(f+g) = \int T(f) \oplus \int T(g)$이 성립한다.

Example: $f(x) = x^3 + 2x + 3,\ \ g(x) = x^2 + 1$

LHS $= v\left(\frac{1}{4}\right) \otimes x^{\otimes 4} \oplus v\left(\frac{1}{3}\right) \otimes x^{\otimes 3} \oplus x^{\otimes 2} \oplus v(4) \otimes x \oplus C.$

RHS $= v\left(\frac{1}{4}\right) \otimes x^{\otimes 4} \oplus v\left(\frac{1}{3}\right) \otimes x^{\otimes 3} \oplus x^{\otimes 2} \oplus x \oplus C.$

이때, $p = 3$에 대하여 양변이 같다. (2를 제외한 모든 소수에 대해 성립함.)

M-AXIS

4. 연구 결과

- 열대 미적분의 기하적 성질

역사적으로, 미분은 순간적인 변화율을, 적분은 면적이나 길이 등을 측량하기 위해 만들어진 개념이다.

일반적인 함수에 대해 미분계수는 접선의 기울기를 나타내고, 정적분은 그래프 아래 면적을 나타낸다.

그러나 열대 미적분에 대해서는 그러한 점을 찾기 어렵다.

5. 추후 연구 계획 및 제언

본 연구에서는 Wang의 선행 연구에서 제시한 열대함수의 미분 및 적분의 한계점을 분석하고, 이를 개선하기 위하여 열대화와 값매김을 활용하여 일반 함수로부터의 변환이 자유롭게끔 미분과 적분을 새롭게 정의하였다. 또한, 값매김 연산을 확장하여 유리계수 열대함수에 대해서만 논할 수 있었던 연산을 실계수 열대함수로 확장하였다.

그러나, 본 연구 또한 몇 가지의 뚜렷한 한계점을 가진다.

첫째, (선행 연구와 마찬가지로) 앞서 정의한 열대 미분과 적분의 정의로는 기하적인 의미를 찾기 어렵다.

둘째, 값매김 함수가 전단사함수가 아니기 때문에, 열대 역변환이 존재하지 않아 열대 함수를 일반 함수로 나타낼 수 없다.

셋째, 일반 미적분과 마찬가지로 성질을 가지게 조작하려면, 값매김에 이용되는 소수를 제한해야 한다.

5. 추후 연구 계획 및 제언

첫번째로 제시한 한계점의 경우, 대수적인 미적분의 의미를 지키면서, 기하적인 의미까지 지킬 방법이 존재하지 않는다.

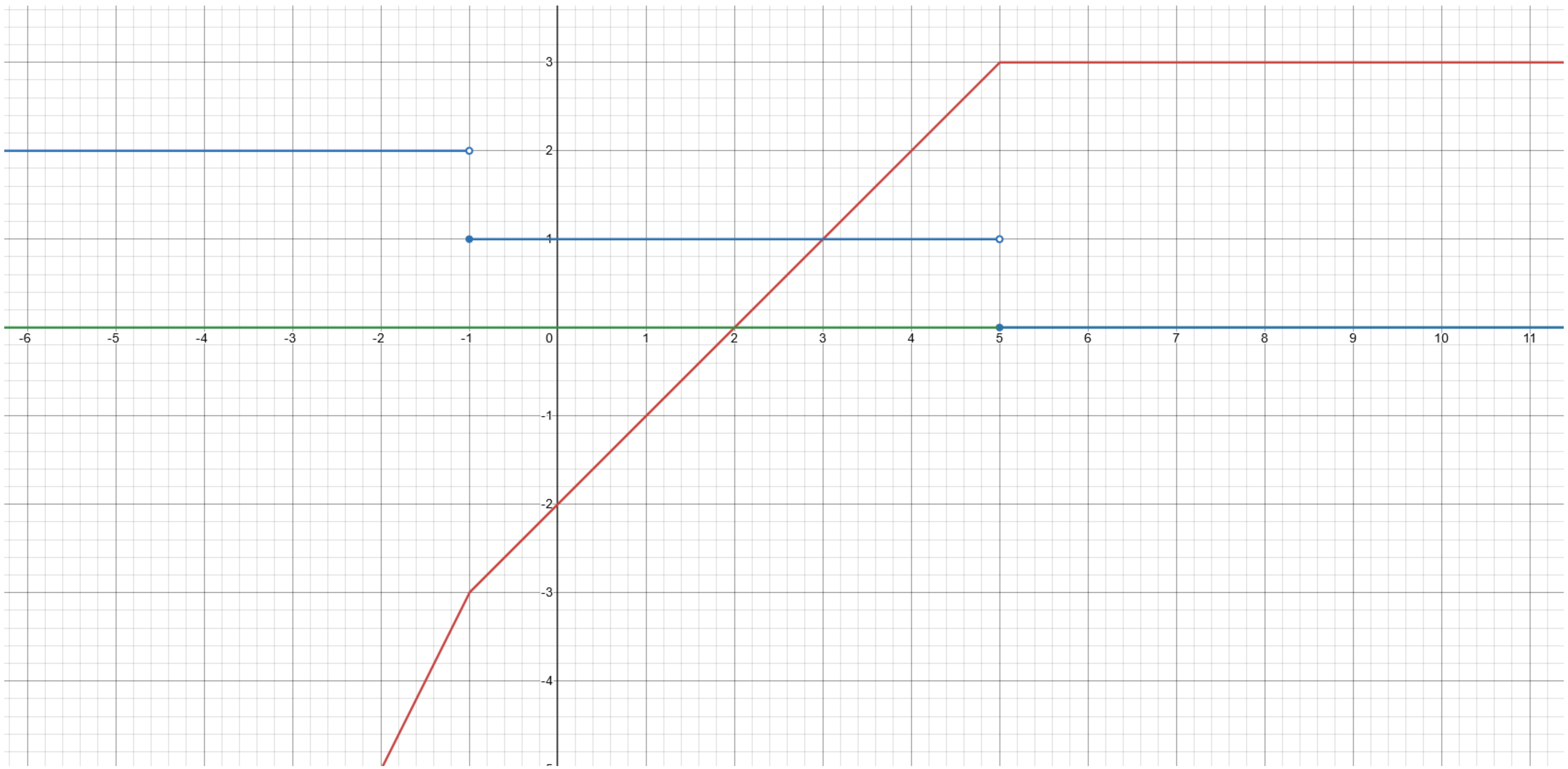
만일 기하적 의미를 중시하여 미분을 접선의 기울기로 정의할 경우, 임의의 함수의 도함수는 조각적으로 정의된 상수함수에 불과하다.

다시 말해, 임의의 함수의 이계도함수는 영함수이다.

두번째로 논의된 한계점은 갑매김을 포기하고, 선행연구의 방식을 채택하는 것으로 개선할 수 있겠으나, 본 연구의 목적에 어긋나는 방안이고, 이미 충분히 논의된 방법이므로 무의미할 것이라 생각된다.

세번째로 제시한 한계점을 개선하려고 시도한다면 열대 덧셈과 곱셈의 정의나 성질을 다르게 정의, 유도할 수 있겠으나, 해당 방법의 경우 '열대' 연산이라 부를 수 있을지 의문이다. (e.g., 1학년의 꿈 확장…?)

5. 추후 연구 계획 및 제언



5. 추후 연구 계획 및 제언

본 연구에서 잘 설명하지 못한 부분을 충분히 개선한다면, 열대 반환 내에서 독자적인 미분방정식 등의 이론을 전개해볼 수 있을 것이라 기대한다. ([Grigoriev, 15]에서 비선형 열대 미분방정식이 NP 문제임을 증명하기는 함.)

또한, 본 연구에서는 직관적인 미분의 정의를 차용하여 열대 미분과 적분을 정의하였다. 일부 연구에 따르면 반환 내에 거리를 부여할 수 있다고 하므로, 이를 이용한다면 Cauchy의 극한의 정의($\varepsilon - \delta$ 논법)와 마찬가지로 엄밀하고 체계적인 방식으로 정의한다면 더욱 개선된 결과를 얻을 수 있을 것이라고 기대한다.

M-AXIS

6. 참고 문헌

[1] Wang, Jingping. *Tropical Derivatives and Anti-derivatives*. 2013. National Chengchi University, Master's Thesis.

[2] Stewart, James, et al. *Calculus*. 9th ed., Cengage Learning, 2020.

[3] "Tropical geometry." Wikipedia, Wikipedia Foundation, 30 Apr. 2024, https://en.wikipedia.org/wiki/Tropical_geometry. Accessed 4 Jun. 2024.

[4] "Valuation (algebra)." Wikipedia, Wikipedia Foundation, 5 Feb. 2024, https://en.wikipedia.org/wiki/Valuation_(algebra). Accessed 4 Jun. 2024.

M-AXIS

| 감사합니다

문서 기여도

30412 정민호: 2.3, 4.6-4.12, 5, 6

30413 정진우: 4.1-4.5, 4.9, 4.11

30414 한재현: 1, 2.1-2.2, 3