大学院講義　2025年度前期　交通経済学

相関構造

階層構造が描く選択の地図

大澤 実（経済研究所）

課題 2

1. 自分の通学に関する**交通手段選択**について，以下の項目を構成せよ：
   - 選択肢（最低3つ）
   - 各選択肢の属性（例：所要時間，費用，快適性）の数値化された表
2. 自分自身にふさわしい**線形効用関数**を仮定し，β を与えてみよ．
3. MNLモデルの式に基づいて各選択肢の選択確率を求めよ．
4. **状況変化** を考え，選択確率の変化を調べ考察せよ
5. (Option) 特に赤バス・青バス問題に類する状況を考え考察せよ

前回の振り返り

- **多項ロジット (MNL) モデル**:
  - ランダム効用 $U_{ni} = V_{ni} + \varepsilon_{ni}$ において $\varepsilon_{ni} \sim$ i.i.d. Gumbel

$$P_{ni} = \frac{\exp(\theta^{-1} V_{ni})}{\sum_j \exp(\theta^{-1} V_{nj})}$$

- **IIA (Independence of Irrelevant Alternatives) 特性**
  - 選択確率の比 P_{ni}/P_{nk} は他の選択肢に依存せず
  - 計算が容易で弾力性の解析には便利だが……

前回の振り返り

- MNL の限界

1. 代替パターンが **一様**（相関構造なし）
   - 「赤バス・青バス問題」：選択肢の細分化に脆弱
2. 通常**個人の異質性** を無視（係数固定）
   - 通常，個人インデックス n についても i.i.d. と仮定する

IIA を越える二つの拡張

	ネスティッド・ロジット (NL)	混合ロジット (MXL)
相関構造	**選択ツリー**で構造を導入	**任意の相関**を近似
個人異質性	なし（ツリーは共通）	あり（連続分布）
IIA特性	部分緩和（e.g.,「ネスト」内では維持）	完全に緩和

- 研究・政策応用の例
  - 類似する選択肢追加後の需要予測 (NL)
  - WTP (willingness-to-pay) 分布の推定と価格差別 (MXL)
- 今日はこれらの~~2つの枠組み~~前者の枠組みについて学ぶ.

多変量極値分布モデル

G関数による基本的枠組みと Nested Logit

目標

- 構造を導入することで IIA 特性がどう緩和されるかを理解する
- 多変量極値分布 (MEV) モデルの一般論について知る
  - **G 関数** による基本枠組み
  - 代表例として，**Nested Logit** (NL) モデル

復習：多項ロジット (MNL) モデル

- 選択肢集合 $A = \{1, 2, \cdots, J\}$
- 仮定
  - 個人 n・選択肢 $i \in A$ のランダム効用：$U_{ni} = V_{ni} + \varepsilon_{ni}$
  - ε_{ni}：観測不能な効用・測定誤差・効用 V_{in} のモデル化誤差
  - ε_{ni}は **独立同分布** (independent and identically distributed; i.i.d.)
- 補足：多数の観測不能な効用の **最大値** と捉える → **極値分布** の利用
  - 極値分布 (extreme value distribution)：確率変数の最大値が従う
- 🧐 **独立同分布** の仮定を緩めたい.

多変量極値分布 (MEV) モデル

- 仮定
  - 個人 n のランダム効用：$U_n = V_n + \varepsilon_n$
  - $\varepsilon_n = (\epsilon_{ni})_{i \in A}$：観測不能な効用・測定誤差・モデル化誤差の**ベクトル**
  - 確定効用 $V_n = (V_{ni})_{i \in A}$ は同じ
  - ε_nは **多変量極値分布** に従う（= 独立とは限らない）
    - MEV = Multivariate Extreme Value

多変量極値分布

- **定義**：ε_n が多変量極値 (MEV) 分布に従うとき，その累積分布 F は

$$F(\varepsilon_n) = F(\varepsilon_{n1}, \varepsilon_{n2}, \cdots, \varepsilon_{nJ}) = \exp\left(-G(\exp(-\varepsilon_n)\right)$$

ただし $G : \mathbb{R}_+^J \to \mathbb{R}_+$，$\exp(\varepsilon_n) \equiv (\exp(\varepsilon_{ni}))_{i \in A}$（要素毎の適用）

- 例：Logit モデルで仮定する i.i.d. Gumbel は MEV 分布
  - ✍ 確認せよ．G は何か？
  - ただし一変量 Gumbel 分布は $F(\varepsilon) = \exp(-\exp(-\varepsilon/\theta))$.

仮定：関数 $G : \mathbb{R}_+^J \to \mathbb{R}_+$ の満たすべき性質

1. 極限 (limit property)

$$G(y_1, \cdots, +\infty, \cdots, y_J) = +\infty$$

2. 交代符号条件 (alternating sign property)

$$(-1)^{|S|-1} \frac{\partial^{|S|} G(y)}{\prod_{i \in S} \partial y_i} \geq 0 \qquad \forall S \subset A : S \neq \emptyset$$

3. μ次同次性 (μ-homogeneity)

$$G(ay) = a^{\mu} G(y) \qquad \forall \alpha > 0, y \geq \mathbf{0}$$

G に要求される性質の背景

累積分布関数 $F : \mathbb{R}^J \to \mathbb{R}$ が必ず満足しなければならない性質：

1. 極限の条件：$F(\varepsilon_1, \cdots, -\infty, \cdots, \varepsilon_J) = 0$. ✍
2. 確率の非負条件：

$$(-1)^{|S|} \frac{\partial^{|S|} F(\varepsilon)}{\prod_{i \in S} \partial \varepsilon_i} \geq 0 \qquad \forall S \subset A : S \neq \emptyset$$

3. $F(+\infty, \cdots, +\infty) = 1$ を保証. ✍
   更に，周辺分布が極値分布になり，選択確率が解析解を持つ.

確認：周辺分布が極値分布であること

周辺分布の定義と G に対する仮定より

$$
\begin{aligned}
F(+\infty,\cdots,\varepsilon_i,\cdots,+\infty) &= \exp(-G(0,\cdots,0,e^{-\varepsilon_i},0,\cdots,0)) \\
&= \exp(-e^{-\mu\varepsilon_i}\times G(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)) \\
&= \exp\left(-e^{-\mu\varepsilon_i+\log G(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)}\right) \\
&= \exp\left(-e^{-\mu\varepsilon_i+\mu\textcolor{red}{\eta}}\right) \\
&= \exp\left(-e^{-\mu(\varepsilon_i-\eta)}\right) \\
&= \exp\left(-\exp(-\mu(\varepsilon_i-\eta))\right)
\end{aligned}
$$

となり，確かに極値分布の一つである Gumbel 分布に帰着.

MEV モデルの選択確率

- **定理**：選択肢 $i \in A$ の選択確率は以下で与えられる：

$$P_i = \frac{\exp(V_i) G_i(e^V)}{\mu G(e^V)}$$

  - ただし $e^V \equiv (\exp(V_i))_{i \in A}$，$G_i = \frac{\partial G}{\partial y_i}$.
- 特に，同次関数に対する Euler の定理より

$$P_i = \frac{\exp(V_i) G_i(e^V)}{\sum_{j \in A} \exp(V_j) G_j(e^V)} = \frac{\exp(V_i + \log G_i(e^V))}{\sum_{j \in A} \exp(V_j + \log G_j(e^V))}$$

MEV モデルの期待最大効用

- 期待最大効用は以下で与えられる：

$$\mathbb{E}\left[\max_{j\in A} U_j\right] = \frac{1}{\mu}\left(\log G(e^V) + \gamma\right)$$

ただし $\gamma \approx 0.5772$ は Euler 定数.

- 注意：MEV モデルは，提案した McFadden (1978) に倣い **Generalized Extreme Value (GEV)** モデルと呼ばれていたことがある．近年では MEV と呼ばれる．（「GEV」は本来**一変量**極値分布を指す．水文学・金融リスク分野などではその用法が主）検索時には注意.

例①：MNL

- 以下の G は MNL を誘導する：

$$G(y) = \sum_{i \in A} y_i^{\mu}, \quad \mu > 0$$

- G は仮定を満たす.

1. $\lim_{y_i \to +\infty} G(y) = +\infty$
2. $\frac{\partial G}{\partial y_i} = \mu y_i^{\mu - 1} \geq 0$, $\frac{\partial^2 G}{\partial y_i \partial y_j} = 0$
3. $G(\alpha y) = \sum_{i \in A} (\alpha y_i)^{\mu} = \alpha^{\mu} \sum_{i \in A} y_i^{\mu} = \alpha^{\mu} G(y)$

例①：MNL

- 以下の G は MNL を誘導する：

$$G(y) = \sum_{i \in A} y_i^{\mu}, \quad \mu > 0$$

- $F(\varepsilon)$は

$$F(\varepsilon) = e^{-G(e^{-\varepsilon_1}, e^{-\varepsilon_2}, \cdots, e^{-\varepsilon_J})} = e^{-\sum_{i \in A} e^{-\mu \varepsilon_i}} = \prod_{i \in A} \underbrace{e^{-e^{-\mu \varepsilon_i}}}_{\text{Gumbel c.d.f.}}$$

  - ε_i が独立同一の Gumbel 分布に従うことと等価

例①：MNL

- 以下の G は MNL を誘導する：

$$G(y) = \sum_{i \in A} y_i^{\mu}, \quad \mu > 0$$

  - ✍️ 定理から選択確率が導出されることを確認せよ（→ 課題）
- 期待最大効用は

$$\mathbb{E}\left[\max_{i \in A} U_i\right] = \frac{1}{\mu}\log G(e^V) + \frac{\gamma}{\mu} = \frac{1}{\mu}\log \sum_{i \in A} \exp(\mu V_i) + \frac{\gamma}{\mu}$$

となり，確かに MNL の期待最大効用と一致する．

例②：Nested Logit (NL) モデル

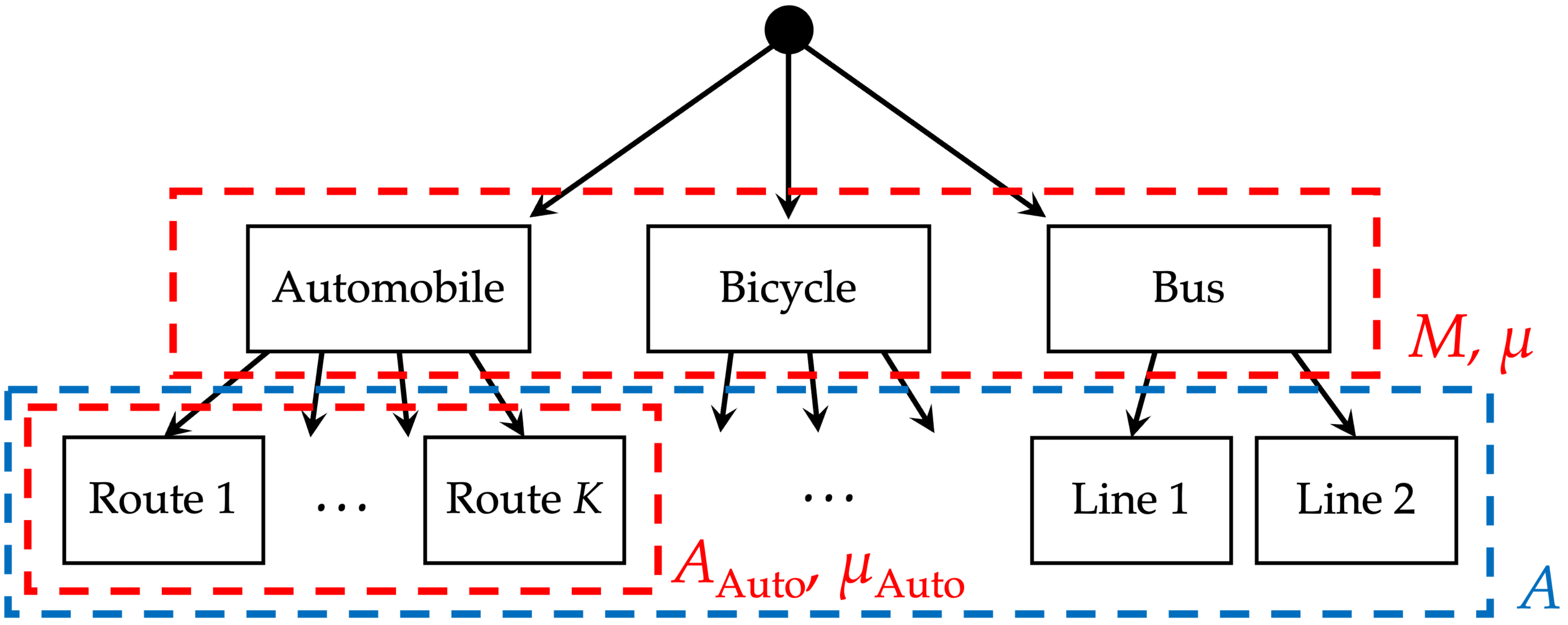
- 以下の G は **Nested Logit (NL) モデル** を誘導する：

$$G(y) = \sum_{m \in M} \left(\sum_{i \in A_m} y_i^{\mu_m} \right)^{\frac{\mu}{\mu_m}}, \quad \mu > 0, \mu_m > 0 \ \forall m \in M$$

ただし M は類似するレベルの選択肢をまとめた **ネスト** (nest)

例②：Nested Logit (NL) モデル

$$G(y) = \sum_{m \in M} \left(\sum_{i \in A_m} y_i^{\mu_m} \right)^{\frac{\mu}{\mu_m}}, \quad \mu > 0, \mu_m > 0 \ \forall m \in M$$



例②：Nested Logit (NL) モデル

- 以下の G は Nested Logit (NL) モデルを誘導する：

$$G(y) = \sum_{m \in M} \left(\sum_{i \in A_m} y_i^{\mu_m} \right)^{\frac{\mu}{\mu_m}}, \quad \mu > 0, \mu_m > 0 \ \forall m \in M$$

- この G 関数は $\mu \le \mu_m$ ならば必要な仮定を満足する． ✍️

例②：Nested Logit (NL) モデル – 選択確率

- 定理に従って選択確率を導出する：

$$P_i = \frac{\exp(V_i)G_i(e^V)}{\mu G(e^V)} = \frac{\exp(V_i + \log G_i(e^V))}{\mu G(e^V)}$$

- まず

$$G(e^V) = \sum_{m \in M} \left(\sum_{i \in A_m} e^{\mu_m V_i} \right)^{\frac{\mu}{\mu_m}} = \sum_{m \in M} \exp\left(\frac{\mu}{\mu_m} \log \sum_{i \in A_m} e^{\mu_m V_i} \right) = \sum_{m \in M} \exp\left(\mu S_m\right)$$

ただし $S_m \equiv \frac{1}{\mu_m} \log \sum_{i \in A_m} e^{\mu_m V_i}$ （cf. **MNLの期待最大効用**）

- $G_i(y)$は $i \in A_m$として

$$G_i(y) = \frac{\mu}{\mu_m} \cdot \mu_m y_i^{\mu_m - 1} \left(\sum_{j \in A_m} y_j^{\mu_m} \right)^{\frac{\mu}{\mu_m} - 1}$$

$$\Rightarrow \quad \log G_i(y) = \log \mu + (\mu_m - 1) \log y_i + \left(\frac{\mu}{\mu_m} - 1 \right) \log \sum_{j \in A_m} y_j^{\mu_m}$$

$$\log G_i(e^V) = \log \mu + (\mu_m - 1) V_i + \left(\frac{\mu}{\mu_m} - 1 \right) \log \sum_{j \in A_m} e^{\mu_m V_j}$$

$$= \log \mu + (\mu_m - 1) V_i - \log \sum_{j \in A_m} e^{\mu_m V_j} + \mu S_m$$

$$
\begin{aligned}
P_i &= \frac{\exp(V_i + \log G_i(e^V))}{\mu G(e^V)} \\
&= \frac{\exp(\log \mu + \mu_m V_i - \log \sum_{j \in A_m} e^{\mu_m V_j} + \mu S_m)}{\mu \sum_{k \in M} \exp\left(\mu S_k\right)} \\
&= \frac{\exp(\mu_m V_i) \exp(\mu S_m)}{\sum_{j \in A_m} \exp(\mu_m V_j) \times \sum_{k \in M} \exp\left(\mu S_k\right)} \\
&= \frac{\exp(\mu_m V_i)}{\sum_{j \in A_m} \exp(\mu_m V_j)} \times \frac{\exp(\mu S_m)}{\sum_{k \in M} \exp\left(\mu S_k\right)}
\end{aligned}
$$

- 結果的に **「ネスト間のMNL選択」** $\times$ **「ネスト内のMNL選択」** の形！
- 二段階以上の選択がある場合でも同様に選択確率を導出可能.

例②：Nested Logit (NL) モデル

- 段階的に MNL で選択している状況に相当
  - このとき，μ は誤差分布の分散パラメタの逆数 θ^{-1}
- 条件 $\mu \leq \mu_m$ の直観：
  異なる**ネスト間**でのばらつきより**ネスト内**のばらつきの方が小さい
- 各ネストに対して得られる S_m は MNL の期待最大効用と解釈可能
  $\rightarrow$ "ログサム変数" のほか，**包括的価値 (Inclusive Value)** と呼ばれる
- ✍ 以上のNLの期待最大効用を確認し，その確定効用による微分が選択確率を与えることを確認しよう.

赤バス vs. 青バス問題

- ちょっと休憩 😮‍💨

赤バス vs. 青バス問題：MNLの限界

- $A = \{自動車, バス\}$ であり，ともに効用が V だとすると

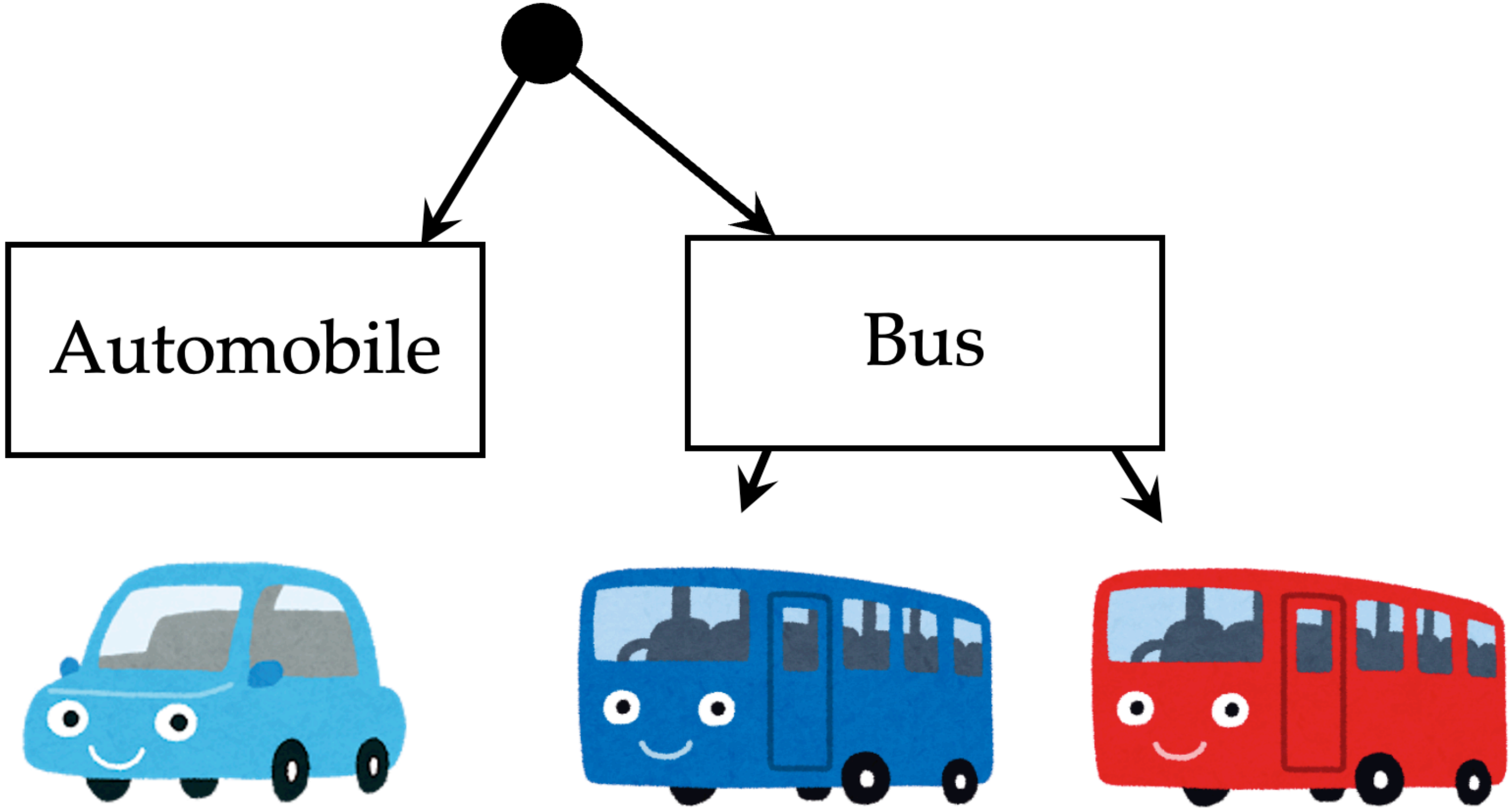
$$P_{\text{auto}} = P_{\text{bus}} = \frac{e^V}{e^V + e^V} = \frac{1}{2}$$

- バスを半分ずつ赤青に塗り分け $A = \{自動車, 赤バス, 青バス\}$ にする.
  - 誤差項がそれでも同じく i.i.d. とすると

$$P_{\text{auto}} = \frac{e^V}{e^V + e^V + e^V} = \frac{1}{3}, \; P_{\text{bus}} = \frac{e^V + e^V}{e^V + e^V + e^V} = \frac{2}{3}$$

- バスの選択率が直観的には過大評価になっている.

赤バス vs. 青バス問題：ネスト構造を導入



赤バス vs. 青バス問題：下位の選択

- 赤バス・青バスの選択がパラメタμ_{Bus}のMNLに従うとする.
- 期待最大効用は

$$
\begin{aligned}
S_{\mathrm{Bus}} &= \frac{1}{\mu_{\mathrm{Bus}}}\log\left(\exp(\mu_{\mathrm{Bus}}V) + \exp(\mu_{\mathrm{Bus}}V)\right) \\
&= \frac{1}{\mu_{\mathrm{Bus}}}\log\left(2\exp(\mu_{\mathrm{Bus}}V)\right) = V + \frac{1}{\mu_{\mathrm{Bus}}}\log 2
\end{aligned}
$$

赤バス vs. 青バス問題：上位の選択

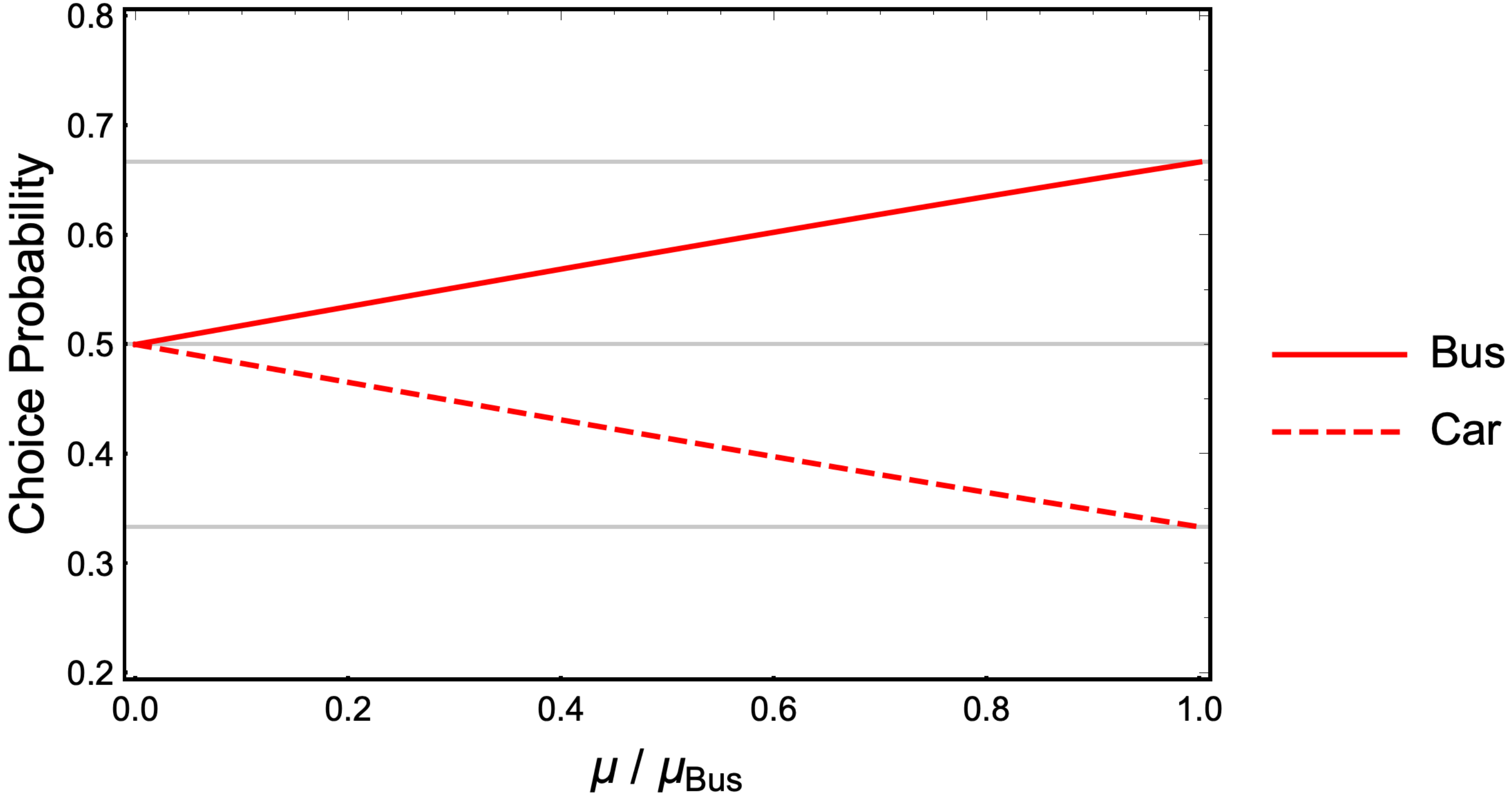
- 自動車・バスの選択がパラメタ μ のMNLに従うとする.
- 自動車の選択確率は

$$P_{\mathrm{Car}} = \frac{\exp(\mu V)}{\exp(\mu V) + \exp(\mu V + \frac{\mu}{\mu_{\mathrm{Bus}}}\log 2)} = \frac{1}{1 + 2^{\mu/\mu_{\mathrm{Bus}}}}$$

  - $\mu = \mu_{\mathrm{Bus}}$ なら $P_{\mathrm{Bus}} = \frac{2}{3}$（MNL）
  - $\mu < \mu_{\mathrm{Bus}}$ なら $P_{\mathrm{Bus}} < \frac{2}{3}$.
  - 特に，$\mu/\mu_{\mathrm{Bus}} \to 0$ のとき $P_{\mathrm{Bus}} \to \frac{1}{2}$！
- μ/μ_{Bus}は推定されるべきパラメタ

赤バス vs. 青バス問題：選択確率

- $\mu/\mu_{\mathrm{Bus}} \in (0,1]$ に対する選択確率の変化（$1 = \mathrm{MNL}$）



赤バス vs. 青バス問題：確率効用の共分散行列

$\mu = 1$に基準化すると以下のような構造を持つ（自動車・赤B・青B）：

$$\Sigma = \frac{\pi^2}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 - 1/\mu_{\text{Bus}} \\ 0 & 1 - 1/\mu_{\text{Bus}} & 1 \end{bmatrix}$$

- $\mu_{\text{Bus}} \geq 1$が相関の強さを制御
  - $\mu_{\text{Bus}} = \mu = 1$のとき非対角要素はなし $\to$ MNL に帰着
  - $\mu_{\text{Bus}} \to \infty$（分散ゼロ）のとき赤バスと青バスの効用は完全に相関

IIA 特性の部分的な緩和

IIA特性		直観
同一のネスト内	あり	色違いのバスは似ている
異なるネスト間	なし	バス vs. 鉄道は独立でない

- $\mu_m = 1$ なら全ての選択肢間で IIA特性（MNLに退化）
- $\mu_m > 1$ で相関↑、IIA 特性緩和
- IIA特性が自動車・赤バス・青バス間で成立しないことを確認しよう ✍️
  - V_a, V_r, V_b の一般ケースで考える.
  - IIA 特性：P_i / P_jが選択肢 i, j の効用のみに依存

推定とモデル誤指定 (model misspecification)

- NLにおいて，**選択ツリーの設計** = 行動仮説
  - 誤指定 ⇒ 例えばμ_{Bus}が境界値 1 に張り付く／バイアス
- 検証方法（例）
  1. **包括的価値のパターン**の妥当性の検証
  2. **情報量規準** (AIC/BIC) による診断 + 行動解釈
  3. **Cross Nested Logit (CNL)** モデルなど異なる選択ツリー構造と比較
     - CNL は MEV ファミリーのひとつ

※ 推定と関連する話題については今後の講義で取り扱う.

MEV モデルの類型

G 関数ベースで記述可能な選択モデル

- **Multinomial Logit (MNL)**：IIA 完全維持・相関なし
- **Nested Logit (NL)**：ネスト内相関の表現
- **Cross-Nested Logit (CNL)**：選択肢は複数のネストに所属可能
- **Pairwise / Paired-Combinatorial Logit (PCL)**：ペア単位で相関
- **Network MEV**：選択ツリーの構造に基づいて任意の相関構造を表現する G 関数を作成するフレームワーク

まとめ

- **MEV** モデルは MNL 系モデルを統合
- **Nested Logit** は **階層構造** を明示的に表現
- **包括的価値**：下位選択肢集合の「価値」を上位選択に伝達

個人の**選好の異質性** (Mixed Logit)

課題 3-1：MNL 選択確率の再導出

- $G(y)=\sum_i y_i^{\mu}$ から，定理

$$P_i = \frac{\exp(V_i) G_i(e^V)}{\mu G(e^V)}$$

によって

$$P_i = \frac{\exp(\mu V_i)}{\sum_j \exp(\mu V_j)}$$

が得られることを確認せよ．

課題 3-2：NLの G 関数の性質

- 講義で議論した

$$G(y) = \sum_{m \in M} \left(\sum_{i \in A_m} y_i^{\mu_m} \right)^{\mu/\mu_m}$$

  が以下の G 関数としての仮定を満足することを示せ：

  1. 極限条件
  2. 交代符号性
  3. μ-同次性

- 論理を簡潔にまとめA4 $\leq$ 2枚程度に手書き or LaTeXで.

課題 3-3：IIA 特性の部分緩和の確認

- 赤バス・青バス・自動車（NL；$\mu_{\text{Bus}} \neq 1$）を例に

$$\frac{P_{\text{Car}}}{P_{\text{Red Bus}}}$$

  が **自動車・赤バス以外の効用**に依存することを具体的に確認せよ．
- V_a, V_r, V_b を一般値で置き，依存項を明示せよ．

参考文献

[1] Train, K. E. (2009). **Discrete Choice Methods with Simulation**. Cambridge.

[2] Bierlaire, M. (2016). Multivariate extreme value models. *EPFL Lecture Note*.

[3] Bierlaire, M. (2008). Nested logit models. *EPFL Lecture Note*.

[4] Daly, A. & Bierlaire, M. (2006) A general and operational representation of Generalised Extreme Value models. *Transportation Research Part B*, Vol.40, Issue.4, pp.285-305