2025後期　均衡分析と数理最適化

集団ゲーム (Population Game)

経済研究所　大澤 実

osawa.minoru.4z@kyoto-u.ac.jp

本日の目的

多数の主体の相互作用を表現する**集団ゲーム** (population game) および進化ダイナミクスを学び，数理計画法とのつながりについて理解する．

講義の底本

- Sandholm『Population Games and Evolutionary Dynamics』
- 土木学会『交通ネットワークの均衡分析』

集団ゲームとその均衡

集団ゲーム (population game)

集団ゲームは，非常に多数の主体の相互作用を扱う枠組みである．

適用可能な問題の特性は次の通り．

- 主体数が非常に多い．
- 個々の主体は小さい：
  個別の主体の行動は他の主体の利得に直接影響を及ぼさない．
- 個々の主体は匿名的 (anonymous) である：
  社会全体の戦略の分布のみが利得に影響する．

つまり，都市・地域の問題に適した枠組みである．換言すれば，多くの既存の連続体モデルは暗黙的に集団ゲームの枠組みに基づいている．

Population Game

定義 **Population Game** (PG) とは次の組$(\mathcal{X}, U)$のことである．

- P種類の集団 (population) を考える．$\mathcal{P} = \{1, 2, \ldots, \mathrm{P}\}$．
  集団$p \in \mathcal{P}$のサイズをm^pとする．
- 各集団に属する主体はn^p通りの離散的な行動 (action) を選ぶことができる．$\mathcal{S}^p = \{1, 2 \ldots, n^p\}$．
- 集団$p \in \mathcal{P}$の戦略分布を$x^p = (x_1^p, x_2^p, \ldots, x_{n^p}^p)$とする．
  “社会” 全体での戦略分布は$x = (x^1, x^2, \ldots, x^{\mathrm{P}})$．
  全ての戦略分布の集合は$\mathcal{X} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \mathcal{X}^p$，ただし
  $$\mathcal{X}^p = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n^p} \;\middle|\; \textstyle\sum_i x_i^p = m^p, x_i^p \geq 0 \right\}$$
- 利得関数をLipschitz連続な関数$U : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$で与える．

例：交通ネットワークの経路選択均衡

毎日の道路交通の平均的な混雑パターンが人々が可能な限り所要時間が小さくなる経路を選ぼうとする行動による均衡状態であると捉えてみよう．

なお，人々の居住地と勤務地が変化しない短期的な状況を考え，居住地と勤務地はそれぞれゾーンなどの離散的単位で考える．

Quiz この例において，PGの各要素に対応するものはなにか．

- P種類の集団$\{1, 2, \ldots, \mathrm{P}\}$，集団$p$のサイズ$m^p$
- n^p通りの行動．$\{1, 2 \ldots, n^p\}$．
- 集団$p \in \mathcal{P}$の戦略分布$x^p = (x_1^p, x_2^p, \ldots, x_{n^p}^p)$
- 利得関数$U : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$

Nash 均衡

集団$p \in \mathcal{P}$に属する主体の**最適応答対応**は次の通り．

$$b^p(x) = \arg\max_{i \in \mathcal{S}^p} U_i^p(x)$$

混合最適応答対応は次の通り．

$$B^p(x) = \{y^p \in \Delta^p \mid y_i^p > 0 \Rightarrow i \in b^p(x)\}$$

ただしΔ^pは単体：$\Delta^p \equiv \{y^p \in \mathbb{R}_+^{n^p} \mid \sum_i y_i^p = 1\}$.

復習 各点$x \in \mathcal{X}$において混合最適応答対応B^pは線形計画問題の解．

Nash 均衡

すなわち，$x^* = (x^{p*})_{p\in\mathcal{P}}$ がNash 均衡状態であるならば

$$x^{p*} \in m^p B^p(x) \quad \forall p \in \mathcal{P}$$

Nash 均衡の集合を$\mathrm{NE}(U)$と書けば

$$\mathrm{NE}(U) = \{x \in \mathcal{X} \mid x^{p*} \in m^p B^p(x)\ \forall p \in \mathcal{P}\}.$$

あるいは

$$\mathrm{NE}(U) = \left\{ x \in \mathcal{X} \;\middle|\; \begin{array}{r} x_i^p > 0 \Rightarrow U_i^p(x) \geq U_j^p(x) \\ \forall i, j \in \mathcal{S}^p\ \forall p \in \mathcal{P} \end{array} \right\}$$

Nash 均衡

結局 Nash 均衡 $x^* \in \mathrm{NE}(U)$ は以下の条件を満足する状態.

$$\begin{cases} U_i^p(x^*) = V^{p*} & \text{if } x_i^{p*} > 0 \\ U_i^p(x^*) \leq V^{p*} & \text{if } x_i^{p*} = 0 \end{cases} \qquad \forall i = 1, \ldots, n^p, \forall p \in \mathcal{P},$$

$$\textstyle\sum_i x_i^p = m^p, \ x_i^p \geq 0 \quad \forall i, \forall p \in \mathcal{P}$$

ただし $V^{p*} = \max\{U_i^p(x^*)\}$.

復習 これは次の変分不等式を満足する $x \in \mathcal{X}$ を求める問題と等価.

$$\langle -U(x), y - x \rangle = \textstyle\sum_{p \in \mathcal{P}} \langle -U^p(x), y^p - x^p \rangle \geq 0 \quad \forall y \in \mathcal{X}$$

例：標準形ゲームにおけるマッチング

- 単一集団を考える（P = 1）.
- 主体はn戦略の標準形ゲームをお互い各1回ずつプレイする.
- 戦略$i, j \in \mathcal{S} = \{1, 2, \ldots, n\}$として，利得行列を$A = [a_{ij}]$とする. a_{ij}は自分の戦略がiのとき戦略jとマッチした際の利得.
- 集団の状態は$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

純粋戦略$i \in \mathcal{S}$の期待利得は$U_i(x) = \sum_j a_{ij} x_j$，すなわち

$$U(x) = Ax$$

Quiz このゲームの解の一意性を調べ，その直観的意味について説明せよ.

例：混雑ゲーム (Congestion Game)

道路混雑のモデルをより詳細な部分まで考えてみよう．

簡単のため，まず単一集団（=単一ODペア）を考えよう．

- 主体の戦略は経路 (route) $r \in \mathcal{R} = \{1, 2, \ldots, R\}$.
- 経路の選択率$x = (x_r)_{r \in \mathcal{R}}$が戦略分布である．
- 施設 (facilities) の集合Φ．道路リンクの集合と解釈しよう．
- 各経路$r \in \mathcal{R}$は施設$\Phi^r \subset \Phi$を使用する．
- 戦略分布がxのとき，各施設$\phi \in \Phi$の使用レベルは

$$z_\phi(x) = \sum_{r:\phi \in \Phi^r} x_r$$

例：混雑ゲーム (Congestion Game)

- 各施設$\phi \in \Phi$は**混雑する**.
- 使用レベルzに応じてコスト$C_\phi(z)$が必要．C_ϕは微分可能な単調増加関数と仮定する.
- 従って，経路rを使用するコストは

$$C_r(x) = \sum_{\phi \in \Phi^r} C_\phi(z_\phi(x))$$

$$z_\phi(x) = \sum_{q:\phi \in \Phi^q} x_q$$

- 以上より，$U(x) = -C(x)$

進化ダイナミクス

進化ダイナミクス (evolutionary game dynamics)

- Nash 均衡は均衡点のみを特徴づける概念である．**どうやって**その状態にたどり着いたのだろうか？
- 標準形ゲームですら解は一意とは限らない．規模の経済・集積の経済などの正のフィードバックが働くとき必ずしも均衡は一意ではない．**どの**均衡が尤もらしいのだろうか？

このような疑問に答えるには，調整過程のモデルを考える必要がある．

$\boxed{\textbf{定義}}$ 集団ゲーム $(\mathcal{X}, U)$ に対して，$\mathcal{X}$ 上の戦略分布の変化を表す微分方程式（微分包含式）モデルを**進化ダイナミクス**と呼ぶ．

- 微分方程式に基づく以上，進化ダイナミクスは近視眼的 (myopic)
- 微分方程式の**停留点**が Nash 均衡解を含むのが望ましい．行動論的に導出される動学は概ねこの要求を満足する．

進化ダイナミクス (evolutionary game dynamics)

簡単のために単一集団を考えよう．

状態xにおいて，戦略iを使用している主体が戦略jに変更する速度をρ_{ij}としよう．ρ_{ij}はxおよび$\pi = U(x)$に依存すると考える．

このとき，進化ダイナミクスの一般形は次のようになる．

$$\dot{x}_i = \sum_j x_j \rho_{ji}(x, \pi) - x_i \sum_j \rho_{ij}(x, \pi)$$

例 複製動学 (replicator dynamic)

状態 $x = (x_i)$ と利得 $\pi = (\pi_i)$ が与えられたとき，

$$\dot{x}_i \equiv \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = x_i \left(\pi_i - \overline{\pi}\right), \quad \overline{\pi} = \frac{1}{m} \sum_i \pi_i x_i$$

ただし $m = x_1 + \cdots + x_n$.

Quiz Nash 均衡がこの動学の停留点になることを確認せよ．また，Nash 均衡でなくとも停留点になり得ることを確認せよ.

Quiz $m = 1$ とする． $\rho_{ij} = x_j(\pi_j - \pi_i)_+$， $\rho_{ij} = -\pi_i x_j$， $\rho_{ij} = \pi_j x_j$ について，それぞれの意味を述べ，これらが全て複製動学を導くことを確認せよ．ただし $(a)_+ \equiv \max\{a, 0\}$.

例 最適応答動学 (best-response dynamic)

状態$x = (x_i)$と利得$\pi = (\pi_i)$が与えられたとき，

$$\dot{x}_i \in mB(x) - x$$

ただし$m = x_1 + \cdots + x_n$，$B(x)$はxにおける混合最適応答．

Quiz Nash 均衡がこの動学の停留点になることを確認せよ．

例 射影動学 (projection dynamic)

状態 $x = (x_i)$ において，

$$\dot{x}_i = \mathrm{Proj}(x + U(x)) - x$$

ただし Proj は x における実行可能領域への直交射影．

Quiz この動学の幾何学的な意味を確認せよ．また，停留点は Nash 均衡であることを確認せよ．

例：Logit動学 (logit dynamic)

状態$x = (x_i)$と利得$\pi = (\pi_i)$が与えられたとき，

$$\dot{x}_i = mP(x) - x_i$$

ただし$m = x_1 + \cdots + x_n$，$P(x)$はxにおける logit 選択確率：

$$P_i(x) = \frac{\exp(U_i(x)/\theta)}{\sum_k \exp(U_k(x)/\theta)}$$

Quiz Nash均衡はこの動学の停留点にならないことを確認せよ．

集団ゲームの重要な問題クラス

Population Game のよい問題クラス

PG は多面体上の変分不等式問題であることは明らか．

⇒ 変分不等式・最適化問題のよい問題クラスに対応する「よい」（解きやすい）問題クラスが存在．

- **ポテンシャルゲーム** (potential game)：利得関数 U が**積分可能**
  ⇒（凸とは限らない）最適化問題に変換可能．
- **安定ゲーム** (stable game/contractive game)：利得関数 U が**単調**
  ⇒ 解集合が凸，狭義単調なら解が存在すれば一意．
- **優モジュラゲーム** (supermodular game)：利得関数 U が優モジュラ
  ⇒ 最適応答対応の単調性が解を特徴づける．（紹介のみ）

ポテンシャルゲームかつ安定ゲームならば**凸計画問題**に帰着される．

ポテンシャルゲーム

$\boxed{\textbf{定義}}$ 集団ゲーム$(\mathcal{X}, U)$に対して，$\nabla f = U$なるスカラー値関数fが存在するとき，**ポテンシャルゲーム**と呼ぶ．また，fをこのゲームの**ポテンシャル関数** (potential function) と呼ぶ．

$\boxed{\textbf{復習}}$ 変分不等式問題においてベクトル場がスカラー関数の微分で与えられるならば，KKT条件が最適化問題のKKT条件と形式的に一致した．

- Monderer, D., & Shapley, L. S. (1996). Potential games. Games and Economic Behavior, 14(1), 124-143.
- Sandholm, W. H. (2001). Potential games with continuous player sets. Journal of Economic theory, 97(1), 81-108.
- Sandholm, W. H. (2009). Large population potential games. Journal of Economic Theory, 144(4), 1710-1725.

ポテンシャルゲームのよい性質

ポテンシャルゲームについて以下が成立する.

- 均衡状態は**ポテンシャル最大化問題**のKKT条件を満足する点.
  最適化問題としての局所的最適解とは限らない.
- 様々な**進化ダイナミクス** (evolutionary dynamics) のもとでの均衡の**安定性** (stability) がポテンシャル関数の形状によって定まる.
- ポテンシャル関数の局所最大化点は様々な代表的ダイナミクスのもとで局所安定なNash均衡となる.

- Sandholm, W. H. (2010). Local stability under evolutionary game dynamics. Theoretical Economics, 5(1), 27-50.

$\boxed{\text{例}}$ 混雑ゲーム

ひとつのODペアのあいだにn本のリンク（道路）$\phi = 1, 2, \ldots, n$がパラレルにあるネットワークを考えよう．

経路とリンクとが対応しているので，この場合は簡単で戦略ϕの利得は

$$U_\phi(x) = -C_\phi(x_\phi)$$

次の関数はこの問題のポテンシャル関数である．

$$f(x) \equiv -\sum_{\phi \in \Phi} \int_0^{x_\phi} C_\phi(z) \mathrm{d}z$$

例 混雑ゲーム

一般ケースを考える．

$$C_r(x) = \sum_{\phi \in \Phi^r} C_\phi(z_\phi(x)), \quad z_\phi(x) = \sum_{q:\phi \in \Phi^q} x_q$$

Quiz 次の関数がこの問題のポテンシャル関数であることを確認せよ．

$$f(x) \equiv -\sum_{\phi \in \Phi} \int_0^{z_\phi(x)} C_r(z)\mathrm{d}z$$

安定ゲーム

定義 集団ゲーム$(\mathcal{X}, U)$について，Uが単調であるとき**安定ゲーム** (stable game) と呼ぶ．

補足 狭義単調であれば strict をつける．**縮小ゲーム** (contractive game), **(半)負定値ゲーム** (negative (semi)definite game) などと呼ばれることもある．

Quiz 混雑ゲームが単調ゲームであることを確認せよ．

- 混雑ゲームについてより詳しく取り扱う.