

積分と極限についての問題

次の自然数 n に添字付けられた関数 f_n について考える.

$$f_n(x) = \begin{cases} 4n^2x & \left(0 \leq x < \frac{1}{2n}\right) \\ -4n^2x + 4n & \left(\frac{1}{2n} \leq x < \frac{1}{n}\right) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

(1) 次の積分の値を求めよ.

$$\int_0^1 f_1(x) dx$$

(2) 次の積分の値を求めよ.

$$\int_0^1 f_3(x) dx$$

(3) 次の極限の値を求めよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$$

(4) 次の積分の値を求めよ.

$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$