部分分数分解と級数の極限

高校数学．発展的話題まで．

一つの例

まず，はじめに次の級数（数列の和のこと）を求める．

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

これは，以下のように式変形を行えば，求めることが出来る．

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \left(= \frac{n}{n+1} \right)\end{aligned}$$

このことから，次の極限値がわかる．

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1$$

この極限値は以下のオイラーによって求められたバーゼル問題を考えると不思議なことに思われる．

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

(1735 年, Leonhard Euler)

一つの拡張

上の問題を受けて，次の級数を求める．

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

まずは素直に求めてみよう．

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} \\
&= \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) - \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \right. \\
&\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right\} \\
&= \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+2)} \right) \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

よって，この級数の極限値は，

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4}$$

である．

もう一つの計算

次のように部分分数分解されるとしよう．ただし A, B, C, D は定数とする．

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{Ak+B}{k(k+1)} + \frac{Ck+D}{(k+1)(k+2)}$$

これを A, B, C, D について上手く解けば，

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right)$$

一般の場合はこのようにすれば良いが，これは少し計算が煩雑である．工夫して計算しよう．

$$\begin{aligned}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{k+1}\left(\frac{1}{k(k+2)}\right) \\ &= \frac{1}{k+1}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)\end{aligned}$$

このように式変形すれば，直ちに導出できる．級数についても，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{12}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

よって，同様に，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4}$$

練習問題

次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$$

研究

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+m-1)(k+m)}$$

一つの一般化

k と $k+1$ の差は 1 であった．ここでは，一般化して，差を $\alpha(>0)$ としよう．

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+\alpha)} \qquad (\alpha \neq -1)$$

この級数と極限値を求めたい．その前に準備が必要である．

ガンマ関数

実部が正となる複素数 $z \in \mathbb{C}$ について，次の積分で定義される関数

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt \qquad (\Re z > 0)$$

をガンマ関数と呼ぶ．次の式は階乗の一つの一般化として見ることができる．この等式の証明は部分積分を用いれば証明できる．

$$\begin{aligned} &\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \\ &\Gamma(1) = 1 \end{aligned}$$

階乗と関連付けると，

$$\Gamma(n+1) = n!$$

一般の複素数 z に対しては，次の解析接続が知られている．

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^z n!}{\prod_{k=0}^{n} (z+k)}$$

ディガンマ関数

ガンマ関数を用いて，次のディガンマ関数を定義する．

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \log \Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

今求めたい極限値を導出するには以下の関係式を用いる．

$$\psi(z) = \lim_{n\to\infty} \left\{ \log n - \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z+k} \right\}$$

続く...

質問等は mino2357 あっと gmail.com まで