距離空間

自分のための定義，定理，証明まとめ．

定義 1 (収束)．距離空間 (X,d) において，点列 $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ が $a\in X$ に収束するとは，

$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n>N,\ d(a_n,a)<\varepsilon.$

定義 2 (収束列)．距離空間 (X,d) において，点列 $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ が収束列であるとは，

$\exists a\in X,\ \forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n>N,\ d(a_n,a)<\varepsilon.$

定義 3 (Cauchy 列)．距離空間 (X,d) において，点列 $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ が Cauchy 列であるとは，

$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall m,\forall n>N,\ d(a_m,a_n)<\varepsilon.$

定義 4 (点列コンパクト)．距離空間 (X,d) が点列コンパクトであるとは，任意の点列が収束部分列を持つ空間のことである．

定義 5 (完備)．距離空間 (X,d) が完備であるとは，X における任意の Cauchy 列が収束することである．

定義 6 (全有界)．距離空間 (X,d) が全有界であるとは，任意の $\varepsilon>0$ に対して，X の有限個の点，$x_1,x_2,x_3,\dots,x_n$ を選んで，

$$X=\bigcup_{k=1}^{n}N(x_1;\varepsilon)$$

となるようにできることである．ただし，$N(a,\varepsilon)$ は，点 a の ε 近傍，すなわち $N(a;\varepsilon):=\{x\in X\mid d(a,x)<\varepsilon\}$ のことである．

命題 7. 距離空間 (X,d) が

「点列コンパクト」$\Longrightarrow$「全有界」かつ「完備」

であることを示せ．

証明. X から，点列 $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ を取ってくる．今，X は点列コンパクト空間なので，以下のような，部分列 $\{a_{k(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ を収束させるような狭義単調増加函数

$$k:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$$

が存在する． □

位相空間論についてのある問題

以下，いろいろ問題がありすぎる．

定義 8. $\forall U \in \mathcal{O}$ になんらかの正の実数 $\mathrm{size}(U) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$（$U$ のサイズと呼ぶことにする．）が付与された位相空間 $(X, \mathcal{O}, \mathrm{size})$ が全有界であるとは，任意の $E > 0$ に対して，$n \in \mathbb{N}$ が存在して，それぞれのサイズが E 以下であるような $U_1, U_2, \ldots, U_n$ が存在し，その合併が X の（有限）開被覆になっていることである．

↑これもどうかと思うよ．

定義 9. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ について，点 $p \in X$ の近傍とは，点 p を含む X の開集合 U を含む部分集合 V のことをいう．

定義 10. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ において，点列 $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ が点 a に収束すると，a の任意の近傍 U に対して，$\exists N \in \mathbb{N}$，$\forall n \geq N \Longrightarrow a \in U$ が成り立つことである．

定義 11. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が点列コンパクトであるとは，任意の点列が収束部分列を持つことである．

定義 12. ~~位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が完備であるとは，$\forall i \in \mathbb{N}$，$a_i \in X$ なる任意の点列 $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ が収束することである．~~

この設定で以下を証明しなさい．逆も成り立つ場合，それを証明せよ．

命題. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ について，

「点列コンパクト」 $\Longrightarrow$ 「全有界」かつ「完備」

質問等は mino2357 あっと gmail.com まで