重積分の問題について

次の重積分を求めるため，累次積分の形にして計算したい.*.

$$\iint_D xy^2 dxdy, \quad D = \{(x,y) \mid x \leq 1,\ y \leq 1,\ y \geq -x+1\}$$

x から累次積分する

領域 D についての条件を変形すると，(x の範囲が y に依存した形)

$$\begin{cases} x \in [1-y, \infty) \cap (-\infty, 1] \\ y \in (-\infty, 1] \end{cases}$$

x の区間については次のように変形できて，

$$\begin{cases} x \in [1-y, 1] \\ y \in (-\infty, 1] \end{cases}$$

また，ここで，

$$x \in [1-y, 1] \neq \emptyset$$

なので，

$$1 - y \leq 1$$

解くと，y が取らなければいけない範囲は，

$$0 \leq y$$

故に，

$$\begin{cases} x \in [1-y, 1] \\ y \in [0, 1] \end{cases}$$

以上から，D について，

$$\begin{aligned} D &= \{(x,y) \mid y \in [-\infty, 1].x \in [1-y, 1]\} \\ &= \{(x,y) \mid y \in [0, 1].x \in [1-y, 1]\} \end{aligned}$$

となる．よって，累次積分は，

$$\int_0^1 \left(\int_{1-y}^1 xy^2 dx \right) dy$$

を計算すれば良い.

*累次積分で求められることは省略．証明は三宅著「入門微分積分」など参照.

0.1 y から累次積分する

領域 D についての条件を変形すると，(y の範囲が x に依存した形)

$$\begin{cases} x \in (\infty, 1] \\ y \in [1-x, 1] \end{cases}$$

ここで，

$$y \in [1-x, 1] \neq \emptyset$$

なので，

$$\begin{cases} x \in [0, 1] \\ y \in [1-x, 1] \end{cases}$$

ゆえに領域 D は，

$$D = \{(x, y) \mid x \in [0, 1],\ y \in [1-x, 1]\}$$

よって，累次積分は，

$$\int_0^1 \left(\int_{1-x}^1 xy^2 dy \right) dx$$

となり，これを計算すれば良い．

質問等は mino2357 あっと gmail.com まで