無題–群論–001

itmz153

2018 年 3 月 17 日

とある会話

K 氏「任意のアーベル群 $G(S, **)$ に対して $a ** b = abc(c \in S)$ としたとき $(S, **)$ も群になるやんけ！[*1]」

M 氏「証明を[*2]」

$\vdots$

群構造

群の定義

群とは，集合と適切な演算の対である．すなわち集合を G，演算を ϕ とすれば，(G, ϕ) であり，演算について次の公理 γ_1, γ_2 を満たせば (G, ϕ) を群という．演算は 2 変数の写像，$G \times G \to G$ である．

$$
\begin{aligned}
\gamma_1 &: \forall x, y, z \in G[\phi(\phi(x, y), z) = \phi(x, \phi(y, z))] \\
\gamma_2 &: \exists e \in G[\forall g \in G[\phi(g, e) = \phi(e, g) = g] \wedge \forall g \in G, \exists u \in G[\phi(g, u) = \phi(u, g) = e]]
\end{aligned}
$$

γ_1 は演算の結合性，γ_2 は，単位元の存在と逆元の存在性を述べている．今後，単位元は e と書き，$x \in G$ の逆元は g^{-1} と書くことにする．今後毎回 ϕ を書くとややこしいので，代

[*1] https://twitter.com/Kory__3/status/971393264489152513
[*2] https://twitter.com/math153arclight/status/971395172335435776

わりに括弧を省き中置演算子 $*$ を使うことにする．また，群 $(G,*)$ のことを，ただ単に群 G と書くことがある．その場合，先に述べた適切な演算が G に入っていると思えば良い．

とある会話について

$(G,*)$ を群とする．ここで，$c \in G$ を固定して，

$$Gc = \{g * c \mid g \in G\}$$

なる集合を考える．G は群なので Gc も群である（表示は違うが同じ演算が自然に入ると思えば良い）．ここで，群 Gc に次のような演算 $\langle \_, \_ \rangle_c$ を導入する．

$$\begin{aligned} \langle \_, \_ \rangle_c \ : \ Gc \times Gc &\longrightarrow Gc \\ \langle x, y \rangle_c &\longmapsto (x * y) * c \end{aligned}$$

実は，$Gc = G$（集合としても（元の演算を考えれば）群として等しい．）なので，次を考えることと等価である．

$$\begin{aligned} \langle \_, \_ \rangle_c \ : \ G \times G &\longrightarrow G \\ \langle x, y \rangle_c &\longmapsto x * y * c \end{aligned}$$

この演算が，群の演算の公理 γ_1, γ_2 を満たしているか確認していこう．演算が閉じていることは明らか．はじめに，結合法則がなりたつか見ていこう．

$$\begin{aligned} \langle \langle x, y \rangle_c, z \rangle_c &= \langle (x * y) * c, z \rangle_c \\ &= x * y * c * z * c \\ &= \cdots \end{aligned}$$

なんだかこのままだと何もできそうにないので，<u>c を群の中心 $Z(G)$ から取ってこよう．</u>群の中心とは，$\{x \in G \mid \forall g[g * x = x * g]\}$ のことである．群の中心は G の正規部分群となるなど面白い性質がある（確認せよ）．

<u>今後，$c \in Z(G)$ とする．</u>

$$\begin{aligned} \langle \langle x, y \rangle_c, z \rangle_c &= x * y * c * z * c \\ &= x * y * z * c * c \\ &= x * \langle y, z \rangle * c \\ &= \langle x, \langle y, z \rangle_c \rangle_c \end{aligned}$$

無事に新しく導入した演算は結合法則を満たすことがわかった．次に，単位元の存在性を確認しよう．

$$\exists e, \forall g[\langle g, e, \rangle_c = \langle e, g\rangle_c = g]$$

いま，単位元の候補として $e' := c^{-1}$ と置こう．任意の g に対して，

$$\begin{aligned}\langle g, e'\rangle_c &= \langle g, c^{-1}\rangle_c \\ &= g * c^{-1} * c = g\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle e', g\rangle_c &= \langle c^{-1}, g\rangle_c \\ &= c^{-1} * g * c = g\end{aligned}$$

次に逆元について考察する．

$$\forall g, \exists u[\langle g, u\rangle_c = \langle u, g\rangle_c = e' = c^{-1}]$$

$u := g^{-1} * c^{-2}$ とすれば，

$$\begin{aligned}\langle g, u\rangle_c &= \langle g, g^{-1} * c^{-2}\rangle_c \\ &= g * g^{-1} * c^{-2} * c \\ &= c^{-1} = e'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle u, g\rangle_c &= \langle g^{-1} * c^{-2}, g\rangle_c \\ &= g^{-1} * c^{-2} * g * c \\ &= c^{-1} = e'\end{aligned}$$

よって，$e' := c^{-1}$は単位元の公理を満たす．故に，新たな群の演算 $\langle , \rangle_c$ は演算の公理 γ_1, γ_2 を満たしているので，$c \in Z(G)$ なら $(G, \langle , \rangle_c)$ は群である．

　さて，この群はなんであろうか？