群構造

群の定義

群とは，集合と適切な演算の対である．すなわち集合を G，演算を ϕ とすれば，(G,ϕ) であり，演算について次の公理 γ_1,γ_2 を満たせば (G,ϕ) を群という．演算は 2 変数の写像，$G\times G\to G$ である．

$$\begin{aligned}\gamma_1 &: \forall x,y,z\in G[\phi(\phi(x,y),z)=\phi(x,\phi(y,z))]\\ \gamma_2 &: \exists e\in G[\forall g\in G[\phi(g,e)=\phi(e,g)=g]\wedge\forall g\in G,\exists u\in G[\phi(g,u)=\phi(u,g)=e]]\end{aligned}$$

γ_1 は演算の結合性，γ_2 は，単位元の存在と逆元の存在性を述べている．今後，単位元は e と書き，$x\in G$ の逆元は g^{-1} と書くことにする．今後毎回 ϕ を書くとややこしいので，代わりに括弧を省き中置演算子 $*$ を使うことにする．また，群 $(G,*)$ のことを，ただ単に群 G と書くことがある．その場合，先に述べた適切な演算が G に入っていると思えば良い．

とある話題

$(G,*)$ を群とする．ここで，$c\in G$ を固定して，

$$Gc=\{g*c\mid g\in G\}$$

なる集合を考える．G は群なので Gc も群である（表示は違うが同じ演算が自然に入ると思えば良い）．ここで，群 Gc に次のような演算 $\langle\_,\_\rangle$ を導入する．

$$\begin{aligned}\langle\_,\_\rangle\ :\ Gc\times Gc &\longrightarrow Gc\\ \langle x,y\rangle &\longmapsto (x*y)*c\end{aligned}$$

実は，$Gc=G$（集合としても（元の演算を考えれば）群として等しい．）なので，次を考えることと等価である．

$$\begin{aligned}\langle\_,\_\rangle\ :\ G\times G &\longrightarrow G\\ \langle x,y\rangle &\longmapsto x*y*c\end{aligned}$$

この演算が，群の演算の公理 γ_1, γ_2 を満たしているか確認していこう．演算が閉じていることは明らか．はじめに，結合法則がなりたつか見ていこう．

$$
\begin{aligned}
\langle\langle x, y\rangle z\rangle &= \langle(x * y) * c, z\rangle \\
&= x * y * c * z * c \\
&= \cdots
\end{aligned}
$$

なんだかこのままだと何もできそうにないので，c を群の中心 $Z(G)$ から取ってこよう．群の中心とは，$\{x \in G \mid \forall g[g * x = x * g]\}$ のことである．群の中心は G の正規部分群となるなど面白い性質がある（確認せよ）．

$$
\begin{aligned}
\langle\langle x, y\rangle z\rangle &= x * y * c * z * c \\
&= x * y * z * c * c \\
&= x * \langle y, z\rangle * c \\
&= \langle x, \langle y, z\rangle\rangle
\end{aligned}
$$

無事に新しく導入した演算は結合法則を満たすことがわかった．次に，単位元の存在性を確認しよう．

$$
\forall g, \exists e[\langle g, e\rangle = \langle e, g\rangle = g]
$$

いま，単位元の候補として $e' := c^{-1}$ と置こう．任意の g に対して，

$$
\begin{aligned}
\langle g, e'\rangle &= \langle g, c^{-1}\rangle \\
&= g * c^{-1} * c = g
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle e', g\rangle &= \langle c^{-1}, g\rangle \\
&= c^{-1} * g * c = g
\end{aligned}
$$

次に逆元について考察する．

$$
\forall g, \exists u[\langle g, u\rangle = \langle u, g\rangle = e' = c^{-1}]
$$

$u := g^{-1} * c^{-2}$ とすれば，

$$
\begin{aligned}
\langle g, u\rangle &= \langle g, g^{-1} * c^{-2}\rangle \\
&= g * g^{-1} * c^{-2} * c \\
&= c^{-1} = e'
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle u, g\rangle &= \langle g^{-1} * c^{-2}, g\rangle \\
&= g^{-1} * c^{-2} * g * c \\
&= c^{-1} = e'
\end{aligned}
$$

故に，新たな群の演算 $\langle,\rangle$ は演算の公理 γ_1, γ_2 を満たしているので，$c \in Z(G)$ なら $(G, \langle,\rangle)$ は群である．

さて，この群はなんであろうか？

質問等は mino2357 あっと gmail.com まで