

部分分数分解と級数の極限

高校数学，発展的話題まで，

一つの例

まず，はじめに次の級数（数列の和のこと）を求める．

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

これは，以下のように式変形を行えば，求めることが出来る．

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \left(= \frac{n}{n+1} \right)\end{aligned}$$

このことから，次の極限值がわかる．

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1$$

この極限值は以下のオイラーによって求められたバーゼル問題を考えると不思議なことに思われる．

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

(1735 年, Leonhard Euler)

一つの拡張

上の問題を受けて，次の級数を求める．

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

まずは素直に求めてみよう.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)} \\
&= \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) - \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \right. \\
&\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right\} \\
&= \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+2)} \right) \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

よって、この級数の極限值は、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4}$$

である.

もう一つの計算

次のように部分分数分解されとしよう. ただし A, B, C, D は定数とする.

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{Ak+B}{k(k+1)} + \frac{Ck+D}{(k+1)(k+2)}$$

これを A, B, C, D について上手く解けば,

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right)$$

一般の場合はこのようにすれば良いが、これは少し計算が煩雑である。工夫して計算しよう。

$$\begin{aligned}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{k+1} \left(\frac{1}{k(k+2)} \right) \\ &= \frac{1}{k+1} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right)\end{aligned}$$

このように式変形すれば、直ちに導出できる。級数についても、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{12} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

よって、同様に、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4}$$

練習問題

次の極限值を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$$

研究

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1) \cdots (k+m-1)(k+m)}$$

一つの一般化

k と $k+1$ の差は 1 であった。ここでは、一般化して、差を $\alpha (> 0)$ としよう。

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+\alpha)} \quad (\alpha \neq -1)$$

この級数と極限值を求めたい。その前に準備が必要である。まずは、

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k \left(k + \frac{1}{2}\right)}$$

を考えよう。

ガンマ関数

実部が正となる複素数 $z \in \mathbb{C}$ について、次の積分で定義される関数

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad (\Re z > 0)$$

をガンマ関数と呼ぶ。次の式は階乗の一つの一般化として見ることができる。この等式の証明は部分積分を用いれば証明できる。

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= z\Gamma(z) \\ \Gamma(1) &= 1\end{aligned}$$

階乗と関連付けると、

$$\Gamma(n+1) = n!$$

一般の複素数 z に対しては、次の解析接続が知られている。

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z n!}{\prod_{k=0}^n (z+k)}$$

ディガンマ関数

ガンマ関数を用いて、次のディガンマ関数を定義する。

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \log \Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

ここで、ガンマ関数を微分することで、

$$\Gamma'(z+1) = z\Gamma'(z) + \Gamma(z)$$

ここで、両辺を $\Gamma(z+1)$ で割ると、

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)} &= \frac{z\Gamma'(z) + \Gamma(z)}{\Gamma(z+1)} \\ &= \frac{z\Gamma'(z) + \Gamma(z)}{z\Gamma(z)} \\ &= \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} + \frac{1}{z}\end{aligned}$$

よって、ディガンマ関数を用いると、

$$\psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z}$$

少しの計算で次の等式を得る． H_n はハーモニクナンバーである．（証明は読者に任せる．）今， $n \in \mathbb{N}$ としよう．

$$\begin{aligned}\psi(n) &= \psi(1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \\ &= -\gamma + H_{n-1}\end{aligned}$$

また、半整数について、

$$\begin{aligned}\psi(n+1/2) &= \psi(1/2) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k + \frac{1}{2}} \\ &= -\gamma - 2\log 2 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k + \frac{1}{2}} \\ &= -\gamma - 2\log 2 + 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k + \frac{1}{2}}\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}\psi(1) &= -\gamma \\ \psi\left(\frac{1}{2}\right) &= -\gamma - 2\log 2\end{aligned}$$

を用いた。(証明略。)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k \left(k + \frac{1}{2}\right)} &= 2 \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k + \frac{1}{2}} \right) \\
&= 2 \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k + \frac{1}{2}} \right) \\
&= 2 \{ \psi(n) + \gamma - (\psi(n + 1/2) + \gamma + 2 \log 2 - 2) \} \\
&= 2 (\psi(n) - \psi(n + 1/2) + 2 - 2 \log 2)
\end{aligned}$$

ここで、ディガンマ関数の漸近展開は、

$$\begin{aligned}
\psi(n) &= \log z - \frac{1}{2z} - \frac{1}{12z^2} + \frac{1}{120z^4} + \mathcal{O} \left(\left(\frac{1}{z} \right)^6 \right) \\
\psi(n + 1/2) &= \log z + \frac{1}{24z^2} - \frac{7}{960z^4} + \mathcal{O} \left(\left(\frac{1}{z} \right)^6 \right)
\end{aligned}$$

よって、これらの差は漸近展開は漸近冪級数展開となる。

$$\psi(n) - \psi(n + 1/2) = -\frac{1}{2z} - \frac{1}{8z^2} + \frac{1}{64z^4} + \mathcal{O} \left(\left(\frac{1}{z} \right)^5 \right)$$

ゆえに、

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k \left(k + \frac{1}{2}\right)} = 2 (\psi(n) - \psi(n + 1/2) + 2 - 2 \log 2)$$

に対して、 $n \rightarrow \infty$ の極限を取れば、

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \left(k + \frac{1}{2}\right)} &= 2 (2 - 2 \log 2) \\
&= 4(1 - \log 2)
\end{aligned}$$

となる。これを参考に、

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k + \alpha)} \quad (\alpha \neq -1)$$

を求めることは読者に任せる。

その他の話題

$\alpha \rightarrow 0$ を考えると,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{H_x}{x} = \frac{\pi^2}{6}$$

また, 計算を進めると,

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_k}{k^2} = \zeta(3)$$

別表現は,

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k^2} \left(\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)} + \gamma \right) \right\} = \zeta(3)$$

となる. これを一般化して数式処理ソフトにより計算させると,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_k}{k^{15}} = -\zeta(7)\zeta(9) - \zeta(5)\zeta(11) - \zeta(3)\zeta(13) + \frac{3617\pi^{16}}{76621545000}$$

や,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_k}{k^{21}} = -\frac{\zeta(11)^2}{2} - \zeta(9)\zeta(13) - \zeta(7)\zeta(15) - \zeta(5)\zeta(17) - \zeta(3)\zeta(19) + \frac{77683\pi^{22}}{1169378864403750}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_k}{k^{23}} &= -\zeta(11)\zeta(13) - \zeta(9)\zeta(15) - \zeta(7)\zeta(17) - \zeta(5)\zeta(19) - \zeta(3)\zeta(21) \\ &\quad + \frac{236364091\pi^{24}}{32307131514201043500} \end{aligned}$$

を得る.