部分分数分解と級数の極限

高校数学．発展的話題まで．

一つの例

まず，はじめに次の級数（数列の和のこと）を求める．

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

これは，以下のように式変形を行えば，求めることが出来る．

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \left(= \frac{n}{n+1}\right)\end{aligned}$$

このことから，次の極限値がわかる．

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1$$

この極限値は以下のオイラーによって求められたバーゼル問題を考えると不思議なことに思われる．

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

(1735 年, Leonhard Euler)

一つの拡張

上の問題を受けて，次の級数を求める．

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

まずは素直に求めてみよう．

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)} \\
&= \left(1-\frac{1}{n+1}\right)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right) \\
&= \left(1-\frac{1}{n+1}\right)-\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right. \\
&\quad \left.+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\} \\
&= \left(1-\frac{1}{n+1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) \\
&= \left(1-\frac{1}{n+1}\right)-\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{2(n+2)}\right) \\
&= \frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+2)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}
\end{aligned}
$$

よって，この級数の極限値は，

$$
\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{4}
$$

である．

もう一つの計算

次のように部分分数分解されるとしよう．ただし A,B,C,D は定数とする．

$$
\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{Ak+B}{k(k+1)}+\frac{Ck+D}{(k+1)(k+2)}
$$

これを A,B,C,D について上手く解けば，

$$
\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)
$$

一般の場合はこのようにすれば良いが，これは少し計算が煩雑である．工夫して計算しよう．

$$\begin{aligned}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} =& \frac{1}{k+1}\left(\frac{1}{k(k+2)}\right)\\ =& \frac{1}{k+1}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)\right\}\\ =& \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)\end{aligned}$$

このように式変形すれば，直ちに導出できる．級数についても，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} =& \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)\\ =& \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{12}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\right\}\\ =& \frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

よって，同様に，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4}$$

練習問題

次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$$

研究

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+m-1)(k+m)}$$

一つの一般化

k と $k+1$ の差は 1 であった．ここでは，一般化して，差を $\alpha(>0)$ としよう．

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+\alpha)}$$

この級数と極限値を求めたい．その前に準備が必要である．まずは，

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\left(k+\frac{1}{2}\right)}$$

を考えよう．

ガンマ関数

実部が正となる複素数 $z \in \mathbb{C}$ について，次の積分で定義される関数

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt \qquad (\Re z > 0)$$

をガンマ関数と呼ぶ．次の式は階乗の一つの一般化として見ることができる．この等式の証明は部分積分を用いれば証明できる．

$$\begin{aligned} &\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \\ &\Gamma(1) = 1 \end{aligned}$$

階乗と関連付けると，

$$\Gamma(n+1) = n!$$

一般の複素数 z に対しては，次の解析接続が知られている．

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^z n!}{\prod_{k=0}^{n}(z+k)}$$

ディガンマ関数

ガンマ関数を用いて，次のディガンマ関数を定義する．

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \log \Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

ここで，ガンマ関数を微分することで，

$$\Gamma'(z+1) = z\Gamma'(z) + \Gamma(z)$$

ここで，両辺を $\Gamma(z+1)$ で割ると，

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)} &= \frac{z\Gamma'(z)+\Gamma(z)}{\Gamma(z+1)}\\ &= \frac{z\Gamma'(z)+\Gamma(z)}{z\Gamma(z)}\\ &= \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}+\frac{1}{z}\end{aligned}$$

よって，ディガンマ関数を用いると，

$$\psi(z+1)=\psi(z)+\frac{1}{z}$$

少しの計算で次の等式を得る．H_n はハーモニックナンバーである．（証明は読者に任せる.）今，$n\in\mathbb{N}$ としよう．

$$\begin{aligned}\psi(n) =&\psi(1)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\\ =&-\gamma+H_{n-1}\end{aligned}$$

また，半整数について，

$$\begin{aligned}\psi(n+1/2) =&\psi\left(1/2\right)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+\frac{1}{2}}\\ =&-\gamma-2\log 2+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+\frac{1}{2}}\\ =&-\gamma-2\log 2+2+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned}\psi(1)&=-\gamma\\ \psi\left(\frac{1}{2}\right)&=-\gamma-2\log 2\end{aligned}$$

を用いた．(証明略.)

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k\left(k+\frac{1}{2}\right)} =& 2\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+\frac{1}{2}}\right) \\
=& 2\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+\frac{1}{2}}\right) \\
=& 2\left\{\psi(n)+\gamma-\left(\psi\left(n+1/2\right)+\gamma+2\log 2-2\right)\right\} \\
=& 2\left(\psi(n)-\psi\left(n+1/2\right)+2-2\log 2\right)
\end{aligned}
$$

ここで，ディガンマ関数の漸近展開は，

$$
\begin{aligned}
\psi(n) &= \log z-\frac{1}{2z}-\frac{1}{12z^2}+\frac{1}{120z^4}+\mathcal{O}\left(\left(\frac{1}{z}\right)^6\right) \\
\psi(n+1/2) &= \log z+\frac{1}{24z^2}-\frac{7}{960z^4}+\mathcal{O}\left(\left(\frac{1}{z}\right)^6\right)
\end{aligned}
$$

よって，これらの差は漸近展開は漸近冪級数展開となる．

$$
\psi(n)-\psi(n+1/2) = -\frac{1}{2z}-\frac{1}{8z^2}+\frac{1}{64z^4}+\mathcal{O}\left(\left(\frac{1}{z}\right)^5\right)
$$

ゆえに，

$$
\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k\left(k+\frac{1}{2}\right)} = 2\left(\psi(n)-\psi\left(n+1/2\right)+2-2\log 2\right)
$$

に対して，$n\to\infty$ の極限を取れば，

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\left(k+\frac{1}{2}\right)} =& 2\left(2-2\log 2\right) \\
=& 4(1-\log 2)
\end{aligned}
$$

となる*．これを参考に，

$$
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+\alpha)}
$$

---

* $\alpha = 1/2$ の時はさらに初等的な別証明がある．

を求めることは読者に任せる．

その他の話題

$\alpha \to 0$ を考えると，

$$\lim_{x\to 0}\frac{H_x}{x}=\frac{\pi^2}{6}$$

また，計算を進めると，

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_k}{k^2}=\zeta(3)$$

別表現は，

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{k^2}\left(\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)}+\gamma\right)\right\}=\zeta(3)$$

となる．これを一般化して数式処理ソフトにより計算させると，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_k}{k^{15}}=-\zeta(7)\zeta(9)-\zeta(5)\zeta(11)-\zeta(3)\zeta(13)+\frac{3617\pi^{16}}{76621545000}$$

や，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_k}{k^{21}}=-\frac{\zeta(11)^2}{2}-\zeta(9)\zeta(13)-\zeta(7)\zeta(15)-\zeta(5)\zeta(17)-\zeta(3)\zeta(19)+\frac{77683\pi^{22}}{1169378864403750}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_k}{k^{23}}=&-\zeta(11)\zeta(13)-\zeta(9)\zeta(15)-\zeta(7)\zeta(17)-\zeta(5)\zeta(19)-\zeta(3)\zeta(21)\\&+\frac{236364091\pi^{24}}{32307131514201043500}\end{aligned}$$

を得る．

質問等は mino2357 あっと gmail.com まで