



## ТОЧНЫЕ $D$ -ОПТИМАЛЬНЫЕ ПЛАНЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ МНОЖЕСТВЕННОЙ РЕГРЕССИИ С НЕРАВНОТОЧНЫМИ НАБЛЮДЕНИЯМИ

**В.П. Кирлица**

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь,  
Kirlitsa@bsu.by

Рассмотрим линейную модель неравноточных наблюдений:

$$y_i = \theta_1 x_{1i} + \dots + \theta_m x_{mi} + \varepsilon(x_{(i)}), \quad i = \overline{1, n}, \quad n \geq m, \quad (1)$$

где  $y_i$  — наблюдаемые значения;  $\theta_1, \dots, \theta_m$  — неизвестные параметры;  $x_{(i)} = (x_{1i}, \dots, x_{mi})$  —  $m$ -вектор контролируемых переменных, компоненты которого принадлежат единичному  $m$ -мерному кубу:  $-1 \leq x_i \leq 1$ ,  $i = \overline{1, m}$ ;  $\varepsilon(x_{(i)})$  — некоррелированные случайные ошибки наблюдений со средними значениями нуль и ограниченными

дисперсиями  $D(\varepsilon(x_{(i)}) = d_i(x_{(i)})$ , зависящими от точки наблюдения. Функции  $d_i(x_{(i)})$  удовлетворяют неравенствам:

$$d_i(x_{(i)}) \geq a_{0i} + a_{1i}x_{1i} + \dots + a_{mi}x_{mi} > 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2)$$

для каждой реализации  $x_{(i)}$  из единичного  $m$ -мерного куба. Константы  $a_{0i}, a_{1i}, \dots, a_{mi}$  в (2) удовлетворяют неравенствам:  $a_{0i} > 0$ ,  $|a_{1i}| + \dots + |a_{mi}| < a_{0i}$ . Кроме того, в вершинах единичного  $m$ -мерного куба неравенства (2) должны обращаться в равенства.

Используя результаты статьи [1], можно доказать следующую теорему.

**Теорема.** *Существует точный  $D$ -оптимальный план экспериментов  $\varepsilon^0$  для модели наблюдений (1), (2) все точки спектра которого лежат в вершинах единичного  $m$ -мерного куба.*

Теорема обобщает результаты статьи [1] и позволяет эффективно строить точные  $D$ -оптимальные планы экспериментов.

Так, например, для модели наблюдений (1), (2)

$$y_i = 1 + \theta_{1i}x_{1i} + \theta_{2i}x_{2i}, \quad i = \overline{1, 4},$$

с функциями  $d_i(x_{(i)}) = 10 - x_{1i} + 4x_{2i}$ ,  $i = \overline{1, 3}$ ,  $d_4(x_{(4)}) = 10 - x_{14} + 8x_{24}$  точный  $D$ -оптимальный план  $\varepsilon^0$  имеет структуру. Первые три наблюдения надо проводить в точках  $x_{(1)} = (1, 1)$ ,  $x_{(2)} = (-1, 1)$ ,  $x_{(3)} = (-1, -1)$  в произвольном порядке. Четвертое наблюдение — в точке  $x_{(4)} = (1, -1)$ . Определитель информационной матрицы такого плана равен 0,421978.

В частном случае модели наблюдений (1), (2) ( $m = 2$ ,  $x_{0i} = 1$ ,  $i = \overline{1, n}$ ) в работах автора [2, 3] в явном виде построены точные  $D$ -оптимальные планы экспериментов при более слабых ограничениях, накладываемых на функции  $d_i(x_{(i)})$ , чем ограничения (2).

### Литература

1. Kirlitsa V. P. *Exact D-optimal designs of experiments for linear multiple model with linear variance of observations.* // Proceeding of the international conference «Computer data analysis and modeling», Minsk, 2004. Vol. 1, P. 165–167.
2. Кирлица В. П. *Точные  $D$ -оптимальные планы экспериментов для линии регрессии с неравноточными наблюдениями* // Вестн. Белорусского гос. ун-та. Сер. 1. 2015. № 2. С. 97–102.
3. Кирлица В. П. *Точные  $D$ -оптимальные планы экспериментов для линейной модели парной регрессии* // Вестн. Белорусского гос. ун-та. Сер. 1. 2016. № 2. (в печати).