

# Heuristieken

Wouter Vrielink

# Inhoud

- Type problemen
- Statespace
- (Computational) Complexity
- Landschappen
- Voorbeeld statespace

# Objective function

Wiskundige formule die de oplossingskwaliteit quantificeert

- Voldaan
- Maximaliseren
- Minimaliseren

$$\text{MSE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

**MSE** = mean squared error

**n** = number of data points

**$Y_i$**  = observed values

**$\hat{Y}_i$**  = predicted values

# Constraints

- Definiëren het domein van het problem
- Moet aan worden voldaan

# Type problemen

	<b>Constraints</b>	<b>No constraints</b>
<b>Objective Function</b>	Constraint Optimization Problem (COP)	Free Optimization Problem (FOP)
<b>No Objective Function</b>	Constraint Satisfaction Problem (CSP)	?

# Constraint Satisfaction Problem (CSP)

Vul getallen 0-9 in de sudoku in zodat ieder getal maar één keer voorkomt in rij, kolom, en vak.

5	3		7					
6		1	9	5				
9	8				6			
8		6				3		
4		8	3			1		
7		2			6			
6			2	8				
	4	1	9			5		
	8		7	9				



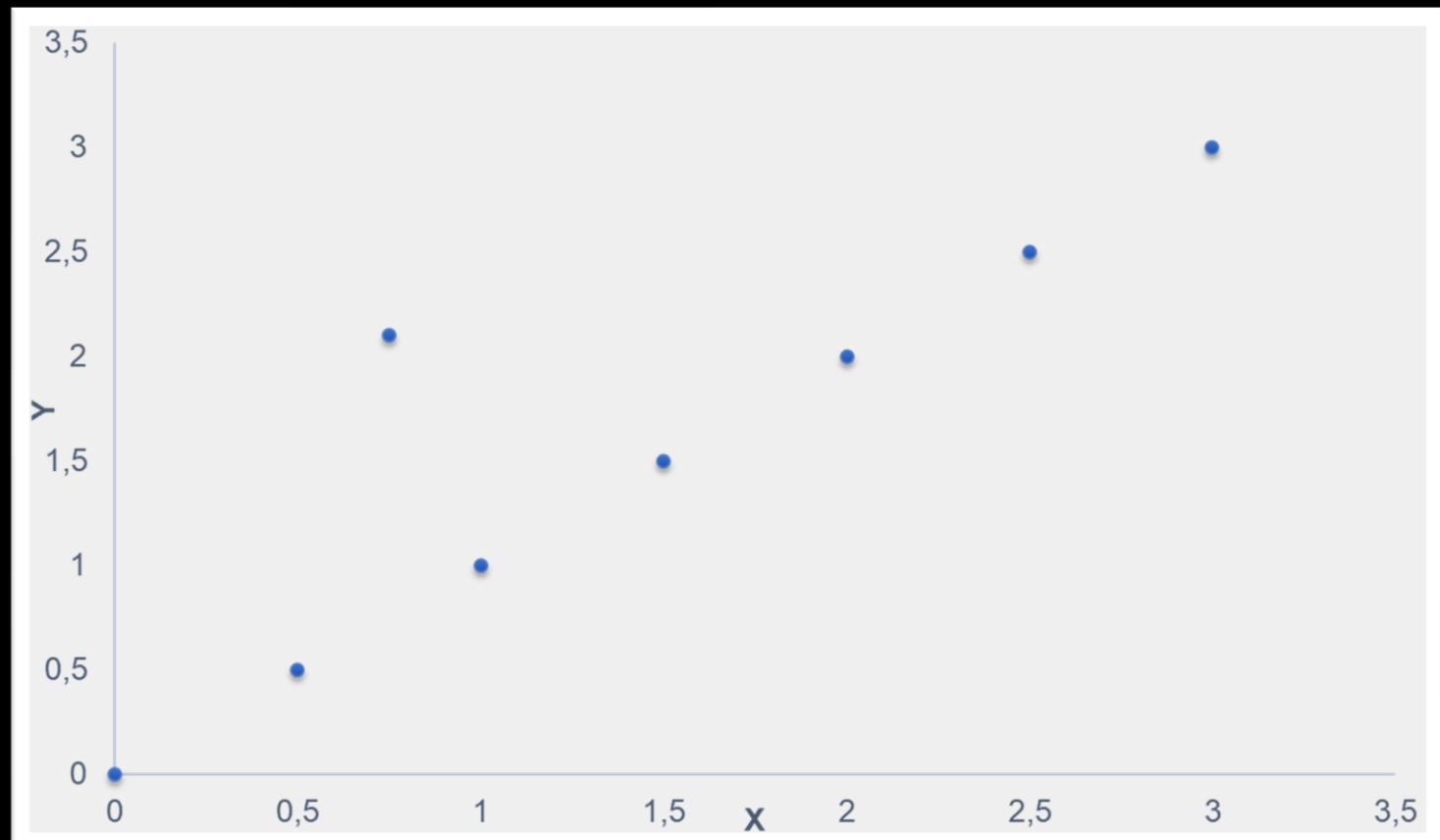
5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

# Free Optimization Problem (FOP)

Gegeven een set inputs

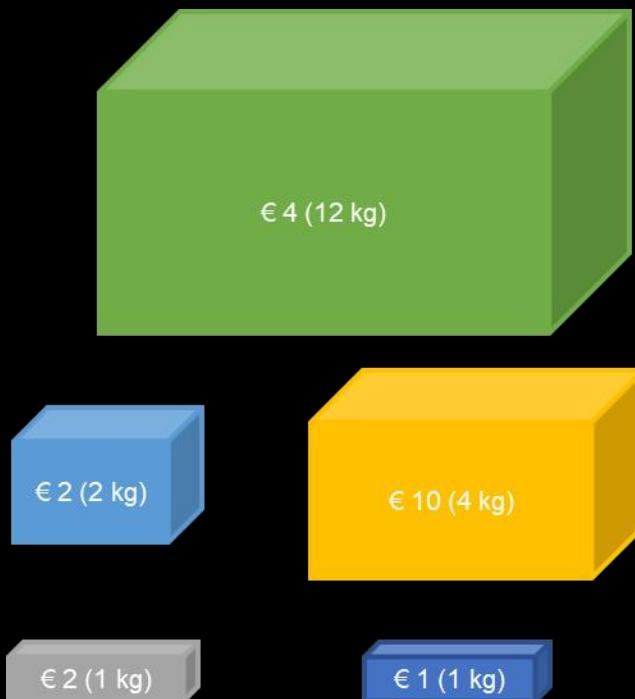
Geef de lineaire vergelijking  
die de relatie tussen X en  
Y het best beschrijft.

Bijv. adhv MSE



# Constraint Optimization Problem (COP)

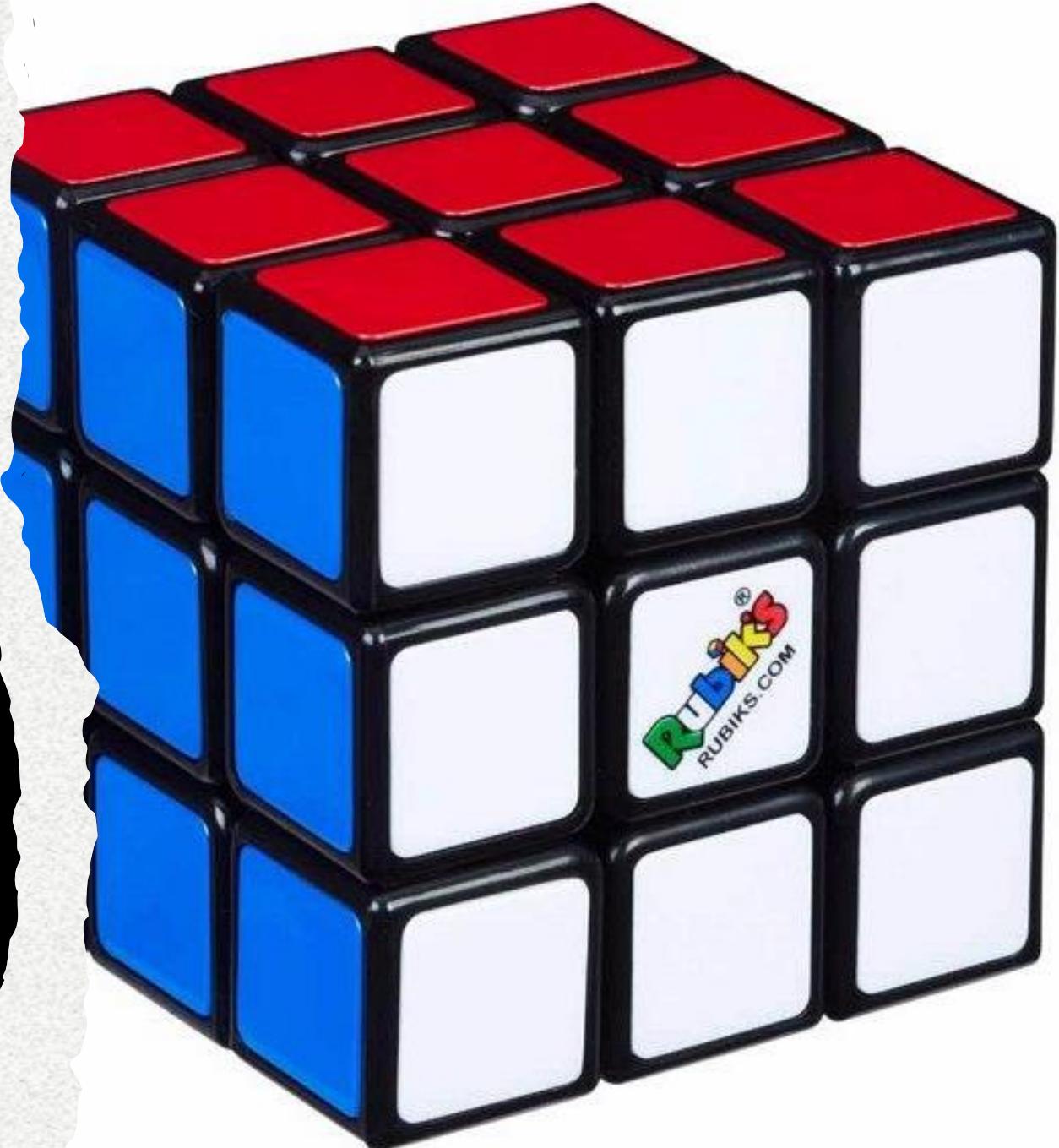
Kies dozen uit de gegeven set die de waarde maximaliseren. Het gewicht moet onder de 15kg blijven.



*Objective:* Maximize €  
*Constraint:* Weight < 15 kg.

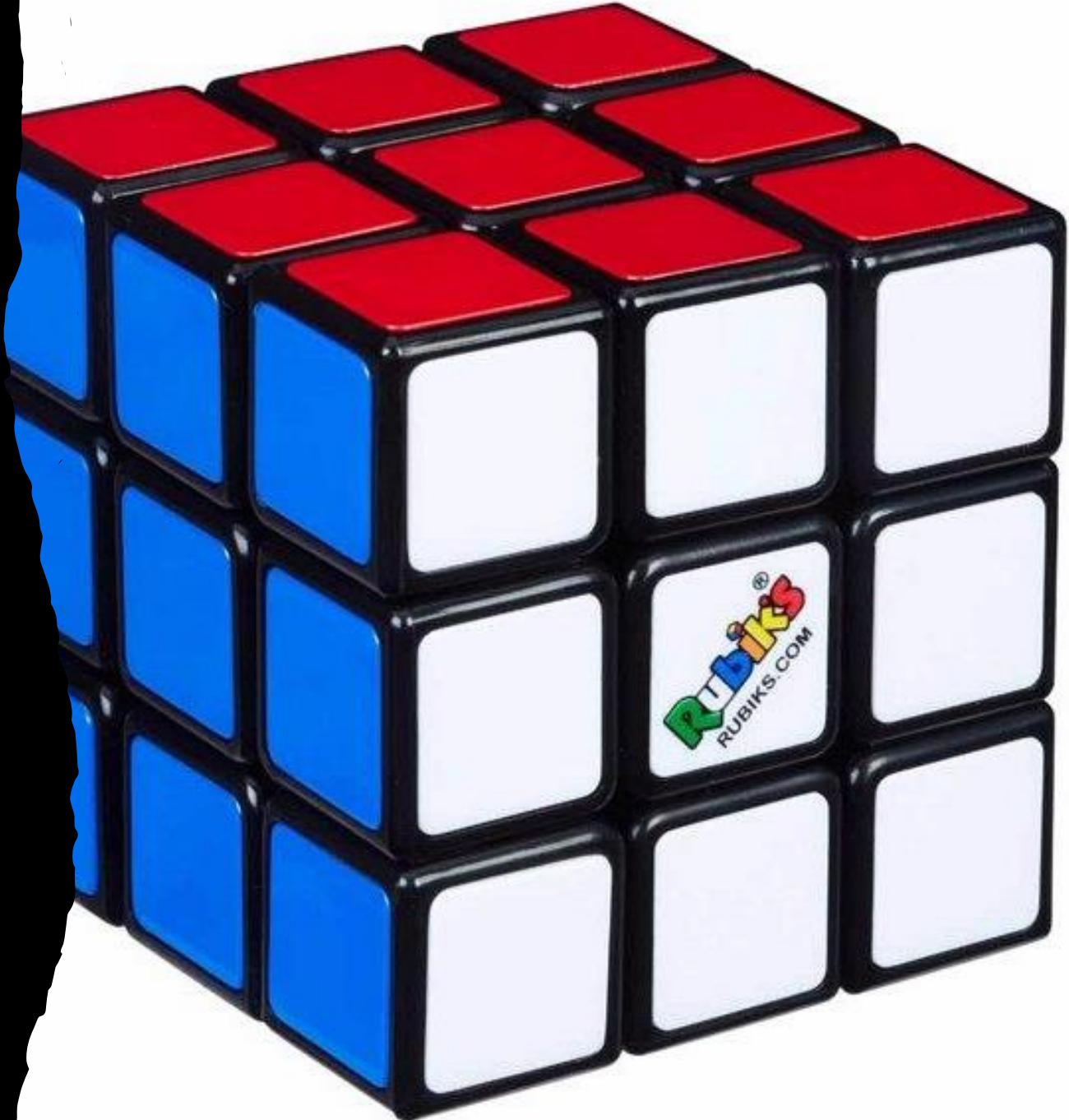
# POP quiz!

- A. Free Optimization Problem (FOP)
- B. Constraint Optimization Problem (COP)
- C. Constraint Satisfaction Problem (CSP)



# POP quiz!

- A. Free Optimization Problem (FOP)
- B. Constraint Optimization Problem (COP)
- C. Constraint Satisfaction Problem (CSP)



Vragen?

# Statespace

De verzameling van alle mogelijke configuraties van een problem...

# Hoe veel configuraties?



AAN of UIT

# Hoe veel configuraties?

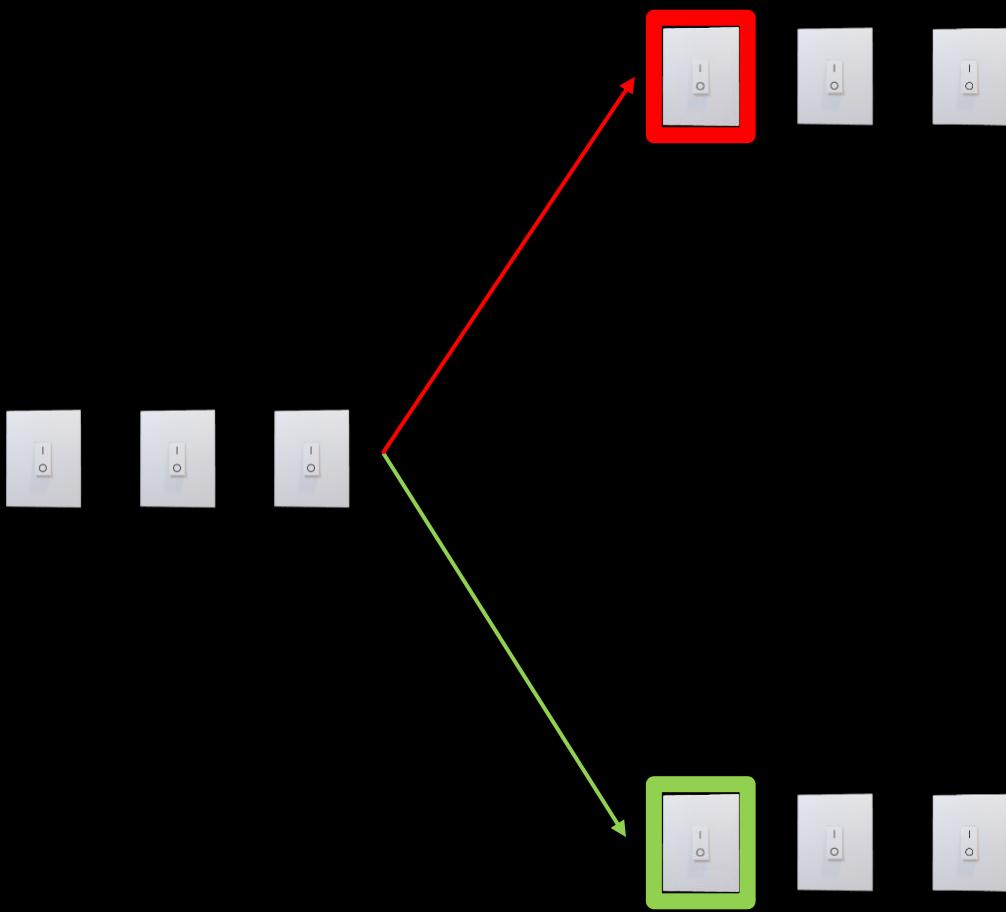


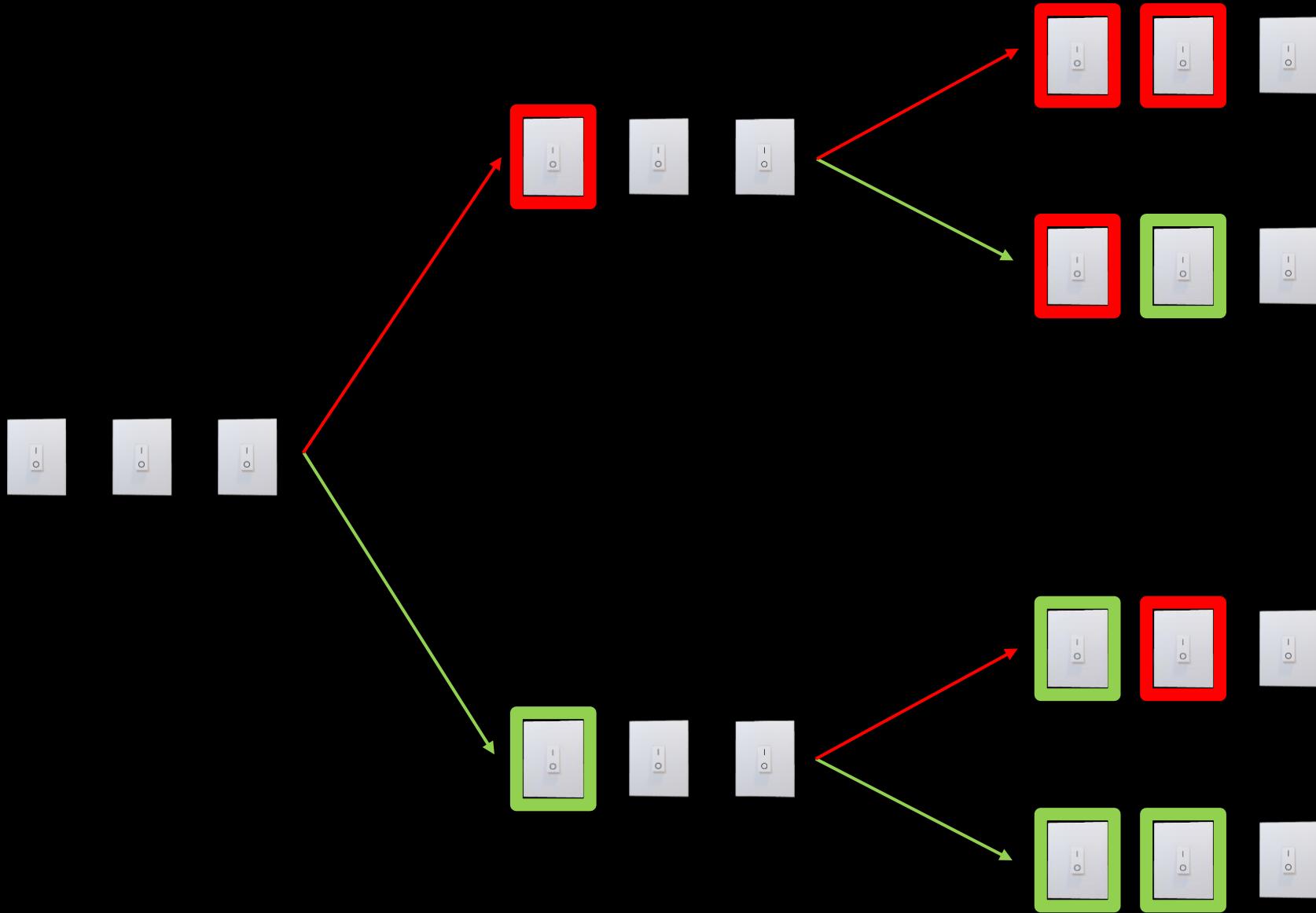
AAN of UIT

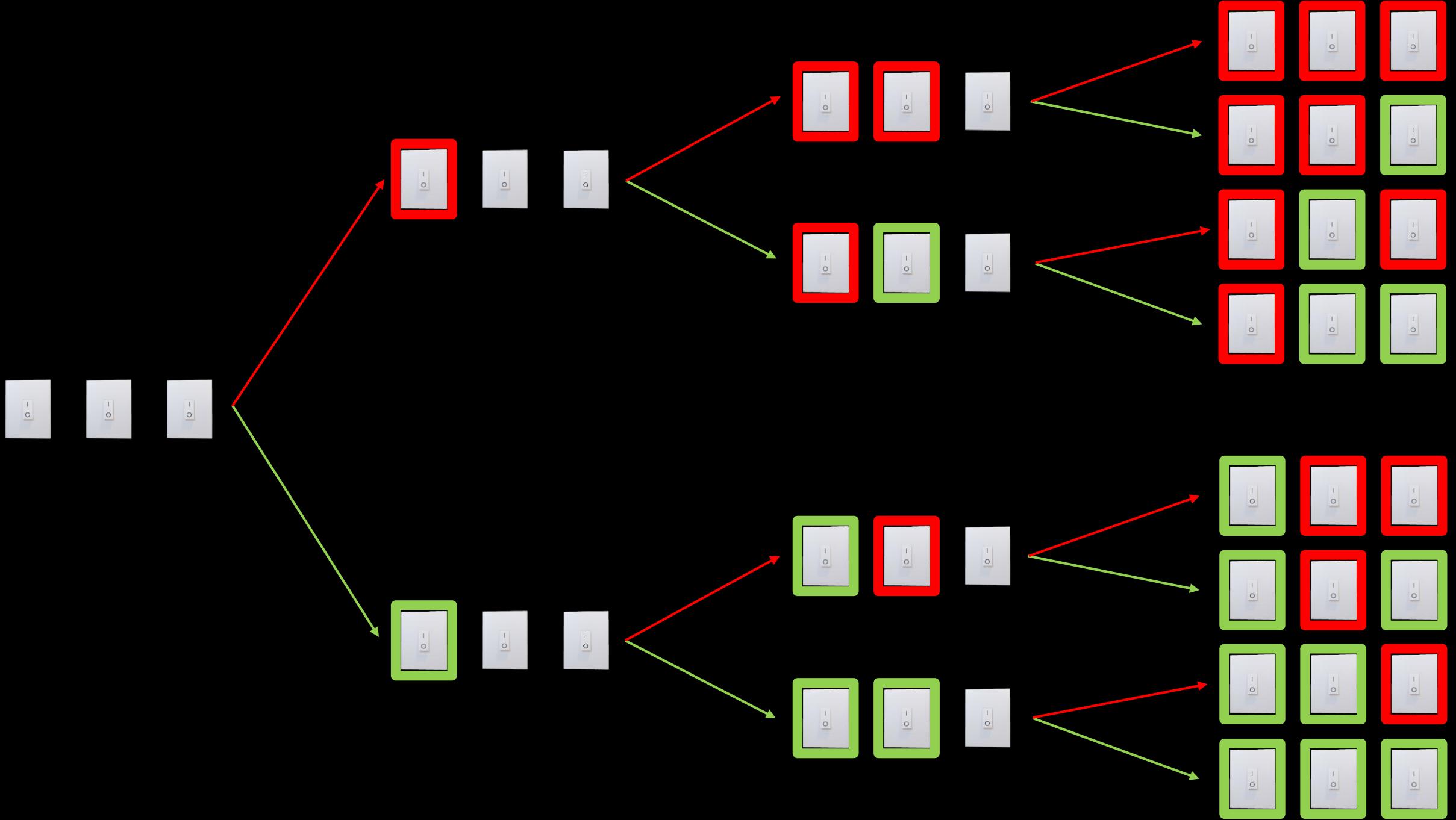


AAN of UIT









State Space Size

1 - Switch



2

2 - Switches



4

3 - Switches



8

4 - Switches



16

n - Switches



$2^n$

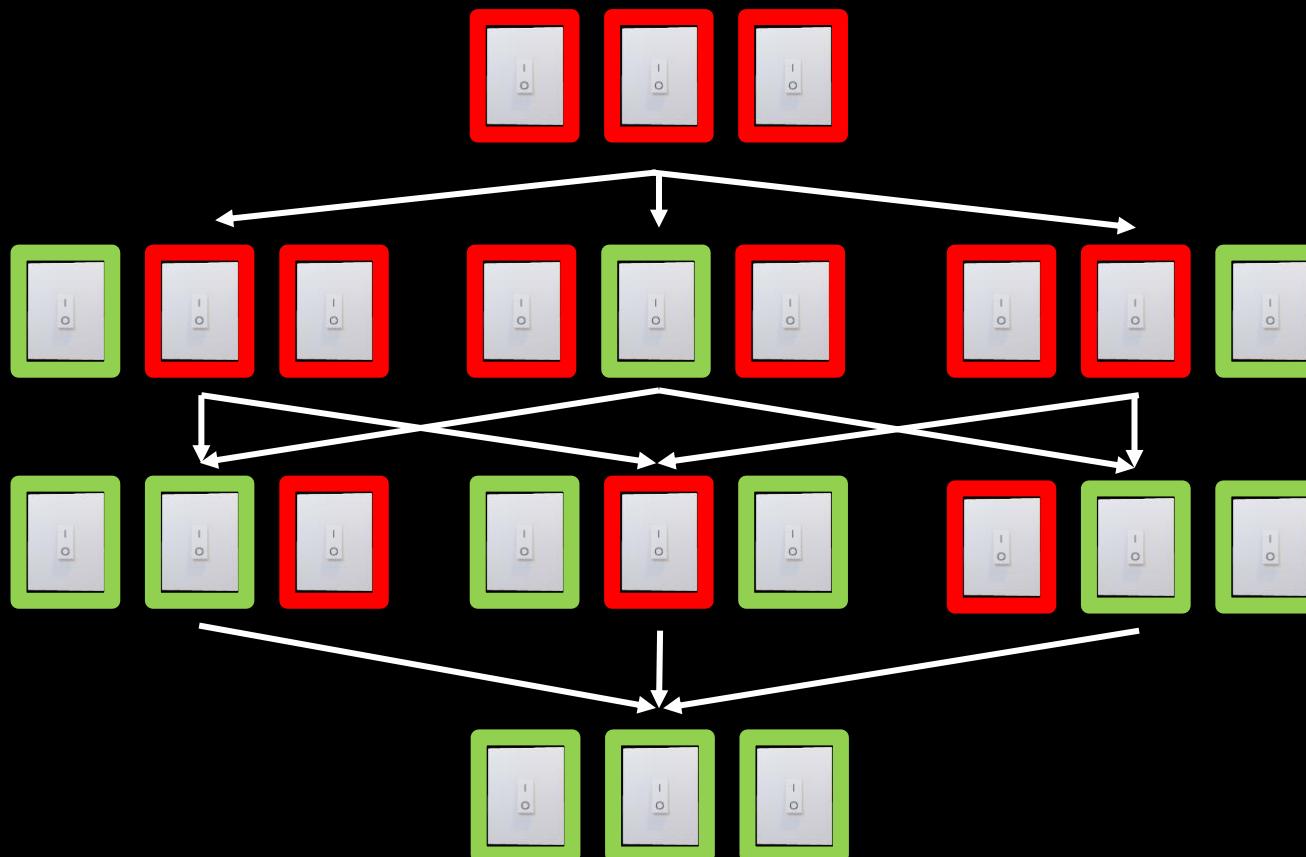
$\rightarrow r^n$

# Statespace

De verzameling van alle mogelijke configuraties van een problem...

*...maar let op dat dit afhankelijk is van de vraag die je stelt!*

# Manieren om alle schakelaars aan te doen



3

x

2

x

1

$= 3! = 6$

# POP QUIZ!

## Exponentiële Groei

Papier is 1mm dik. We vouwen een papiertje 20 keer dubbel. Hoe dik is het papier ongeveer na 20 keer vouwen?

- A. 20cm
- B. 2m
- C. Zo hoog als dit gebouw
- D. 1km



# POP QUIZ!

## Exponentiële Groei

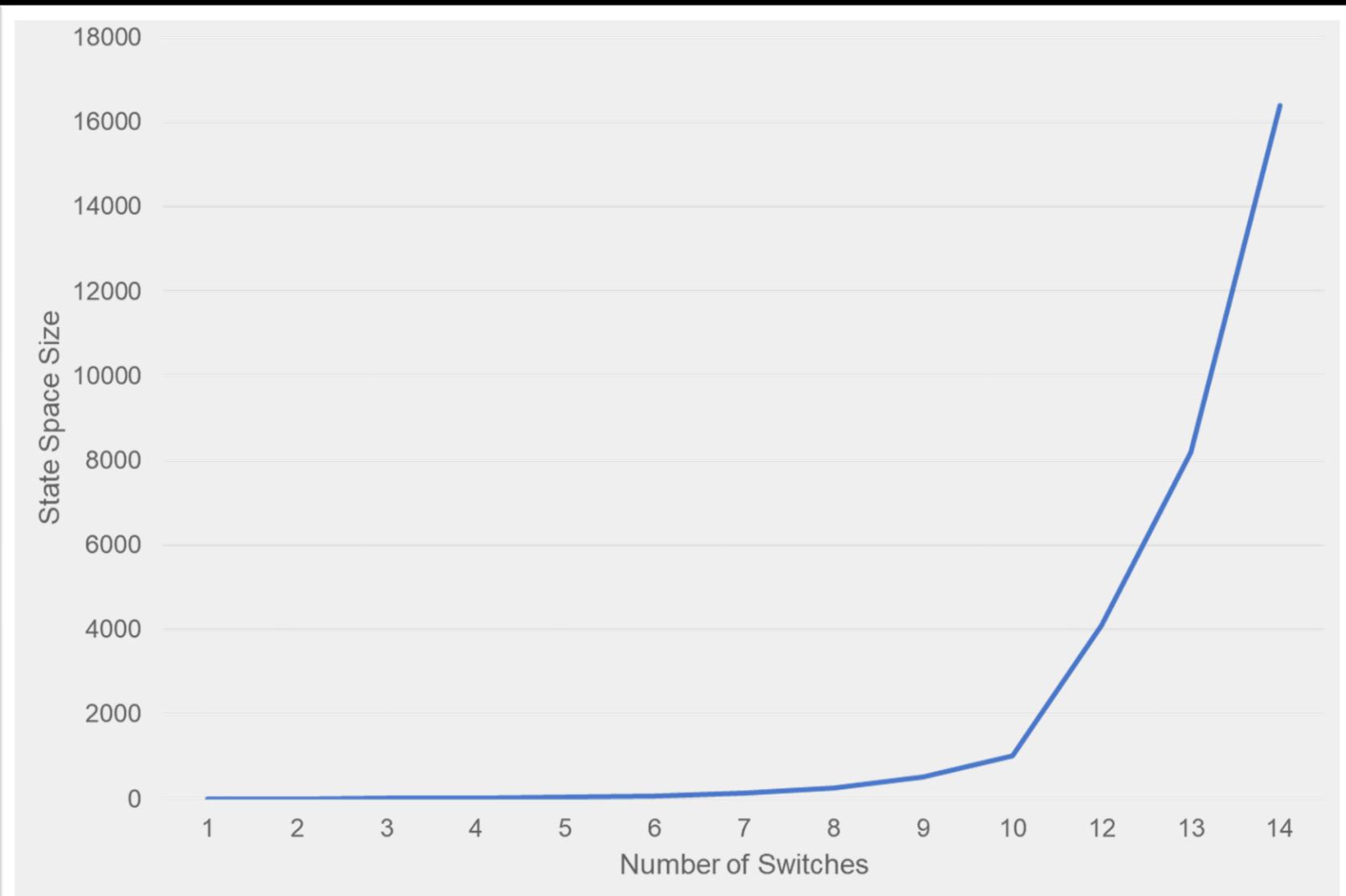
Papier is 1mm dik. We vouwen een papiertje 20 keer dubbel. Hoe dik is het papier ongeveer na 20 keer vouwen?

- A. 20cm
- B. 2m
- C. Zo hoog als dit gebouw
- D. 1km

$$1\text{mm} * 2 * 2 * 2 \dots = 2^{20} = 1048576\text{mm} = 1049\text{m!}$$



# Exponential Statespace





**Tot de maan is  
maar 39 keer  
vouwen**

Vragen?

# Statespace - Autekentekens

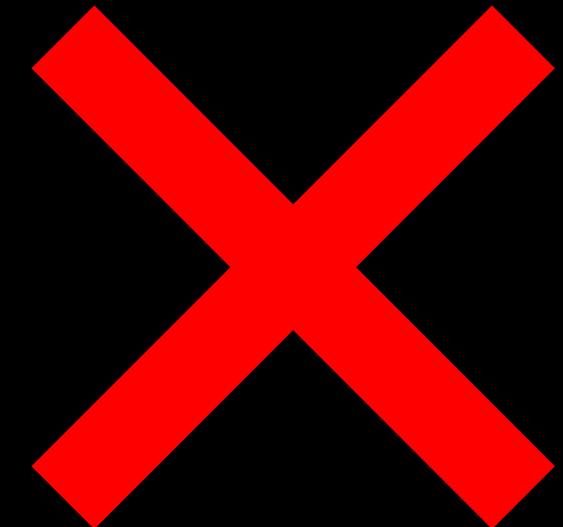
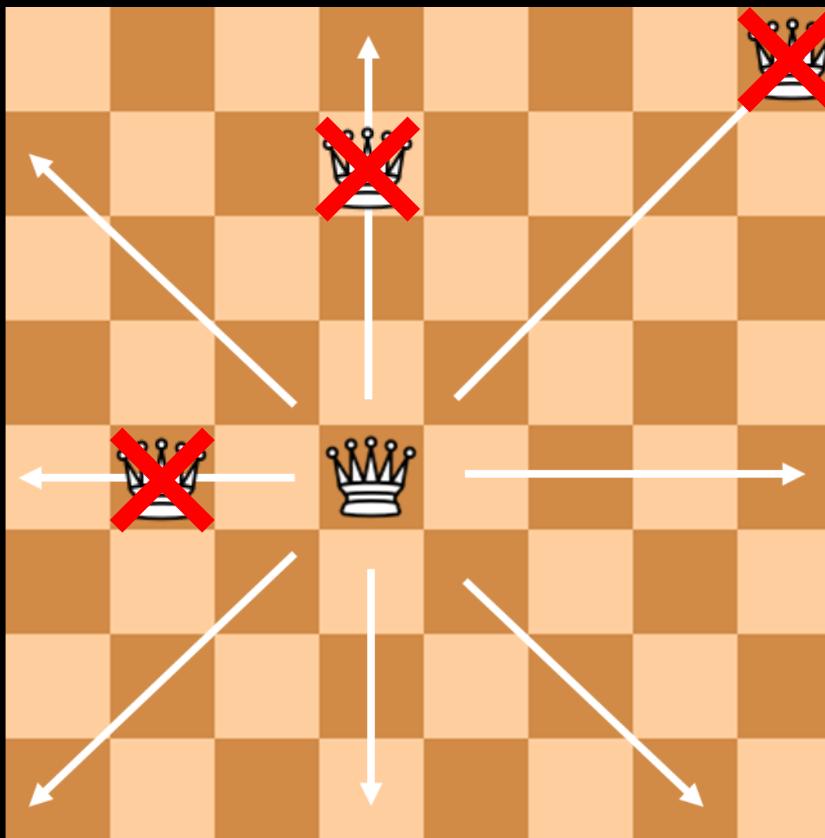
X – 999 – XX

X = letter, 9 = cijfer

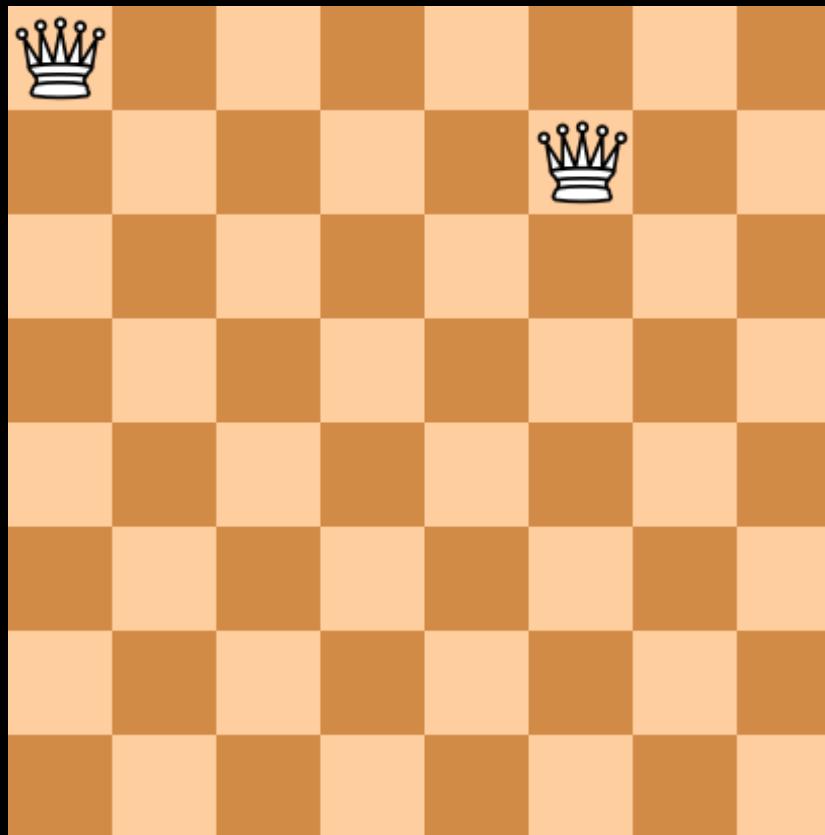
$$26 * 10 * 10 * 10 * 26 * 26 = \\ 17576000$$



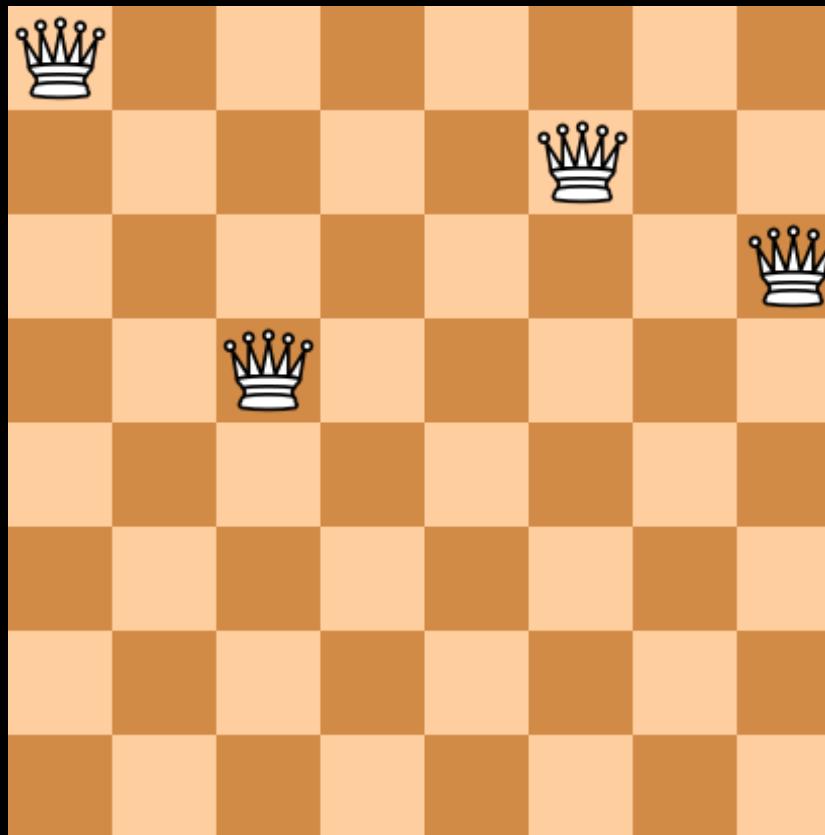
# Statespace – N-Queen puzzle



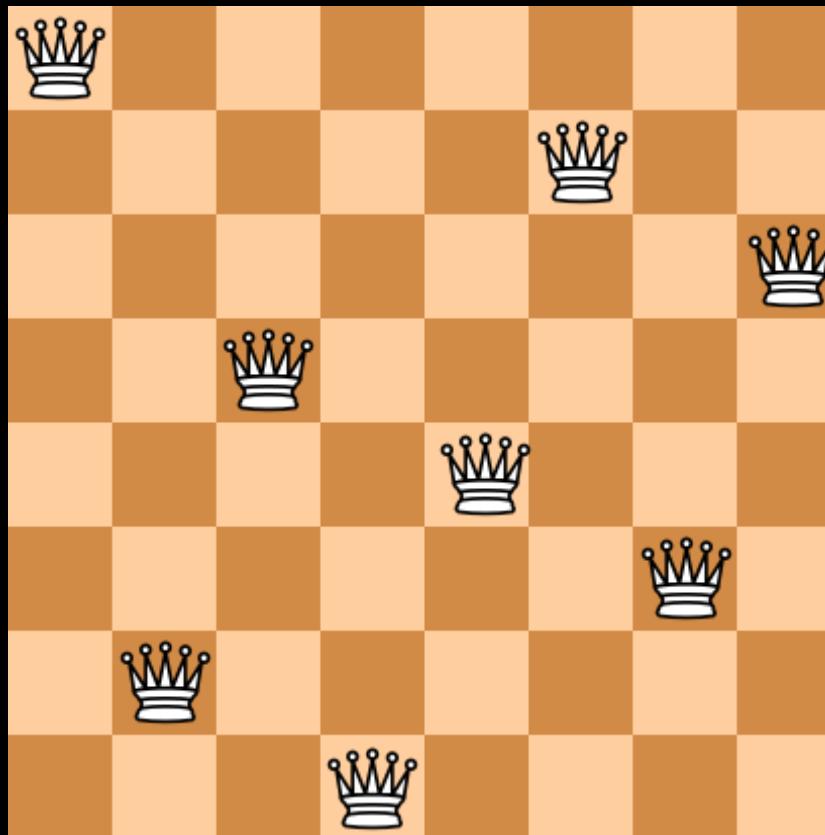
# Statespace – N-Queen puzzle



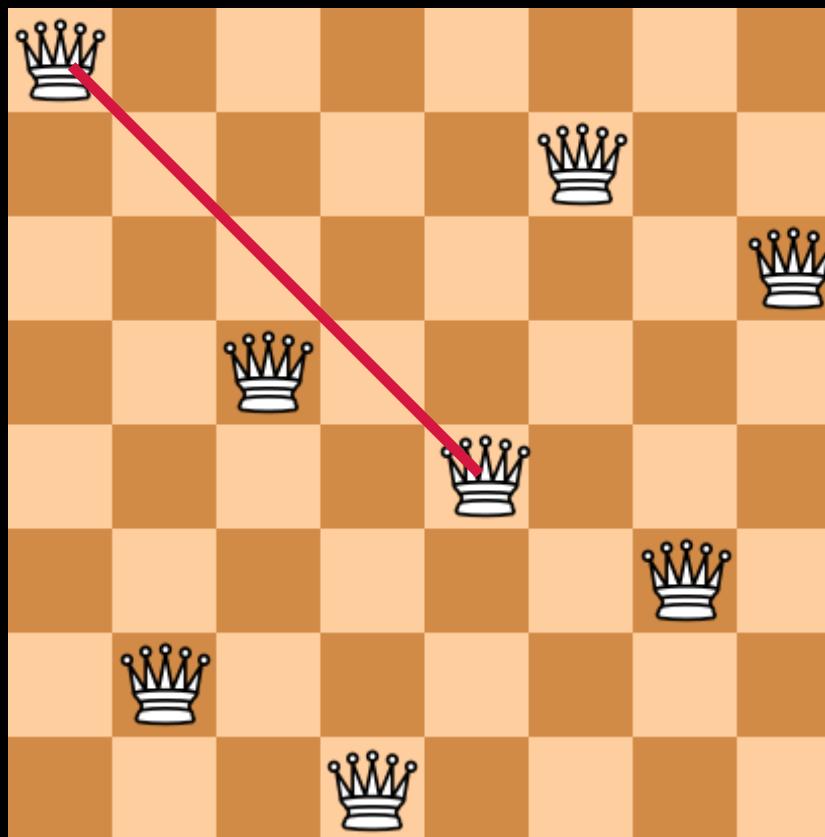
# Statespace – N-Queen puzzle



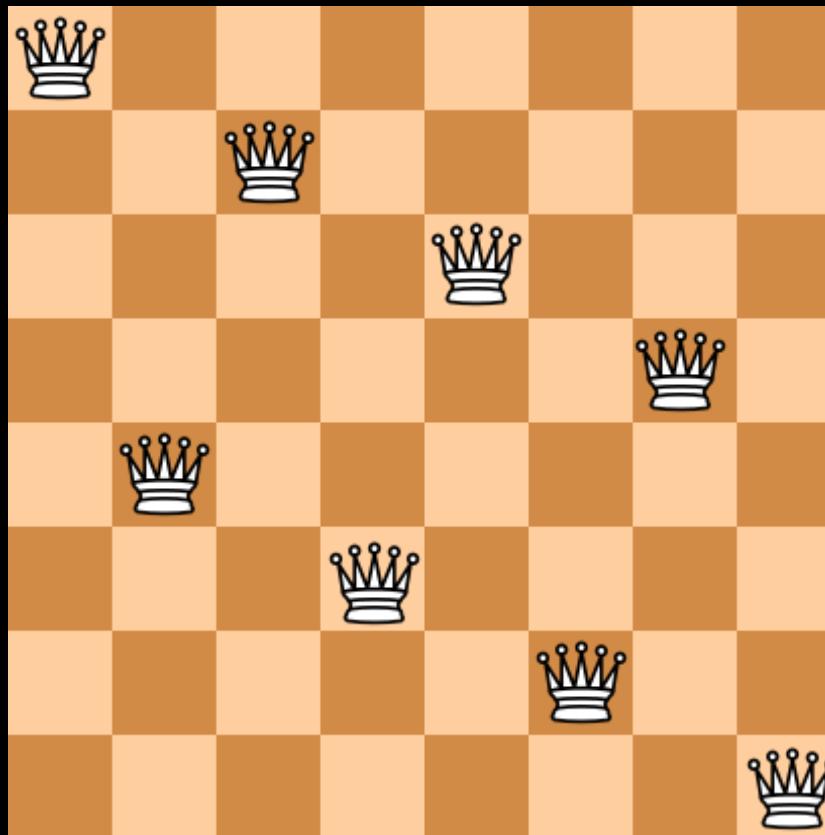
# Statespace – N-Queen puzzle



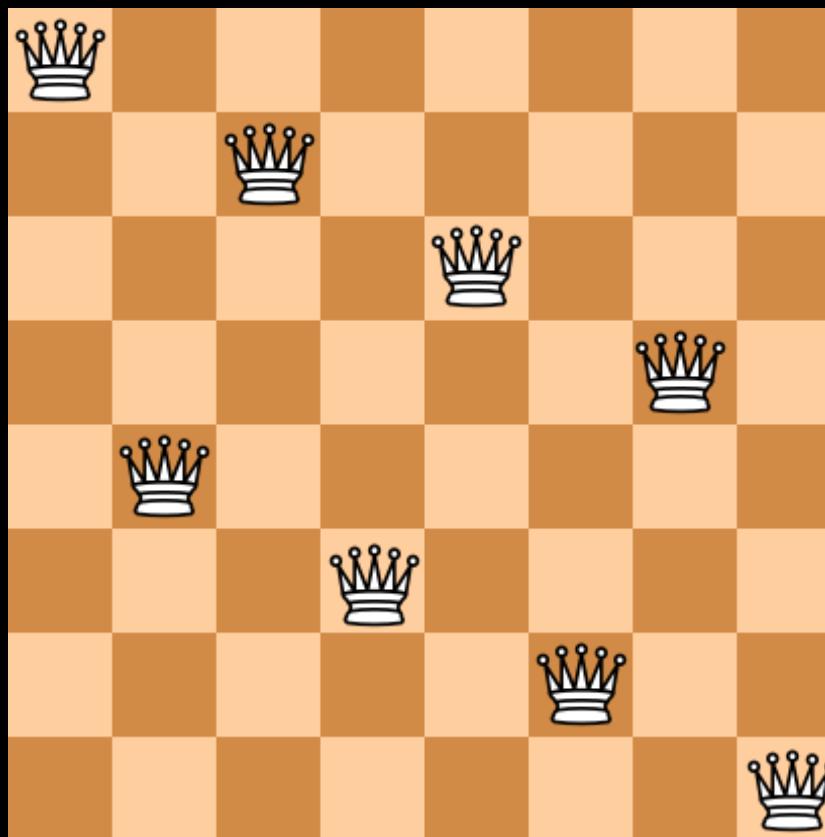
# Statespace – N-Queen puzzle



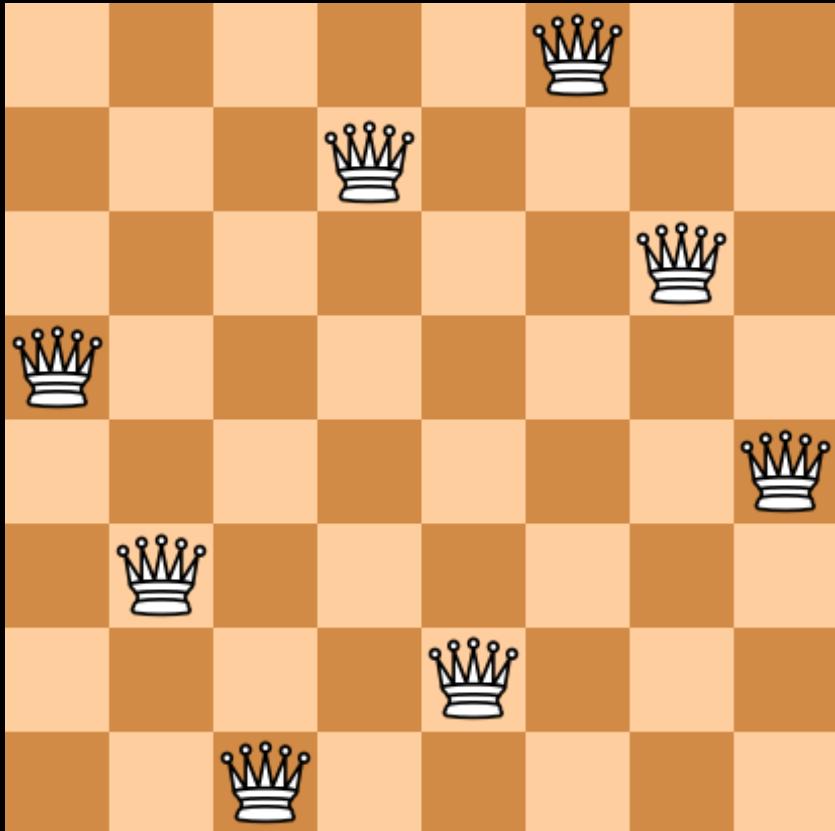
# Statespace – N-Queen puzzle



# Statespace – N-Queen puzzle



# State Space



1<sup>st</sup> Queen: 64 Squares

2<sup>nd</sup> Queen: 63 Squares

3<sup>rd</sup> Queen: 62 Squares

4<sup>th</sup> Queen: 61 Squares

5<sup>th</sup> Queen: 60 Squares

6<sup>th</sup> Queen: 59 Squares

7<sup>th</sup> Queen: 58 Squares

8<sup>th</sup> Queen: 57 Squares

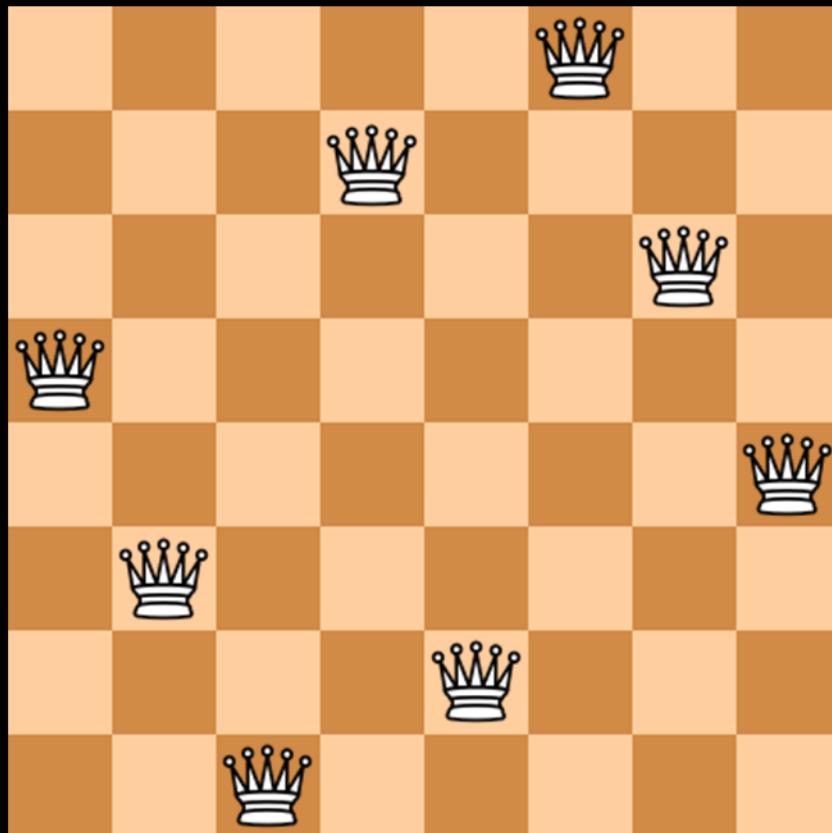
$$\text{Total Ways} = 64 * 63 * 62 * 61 * 60 * 59 * 58 * 57 = 4426165368 = \binom{64}{8}$$

8-Queen Puzzle.

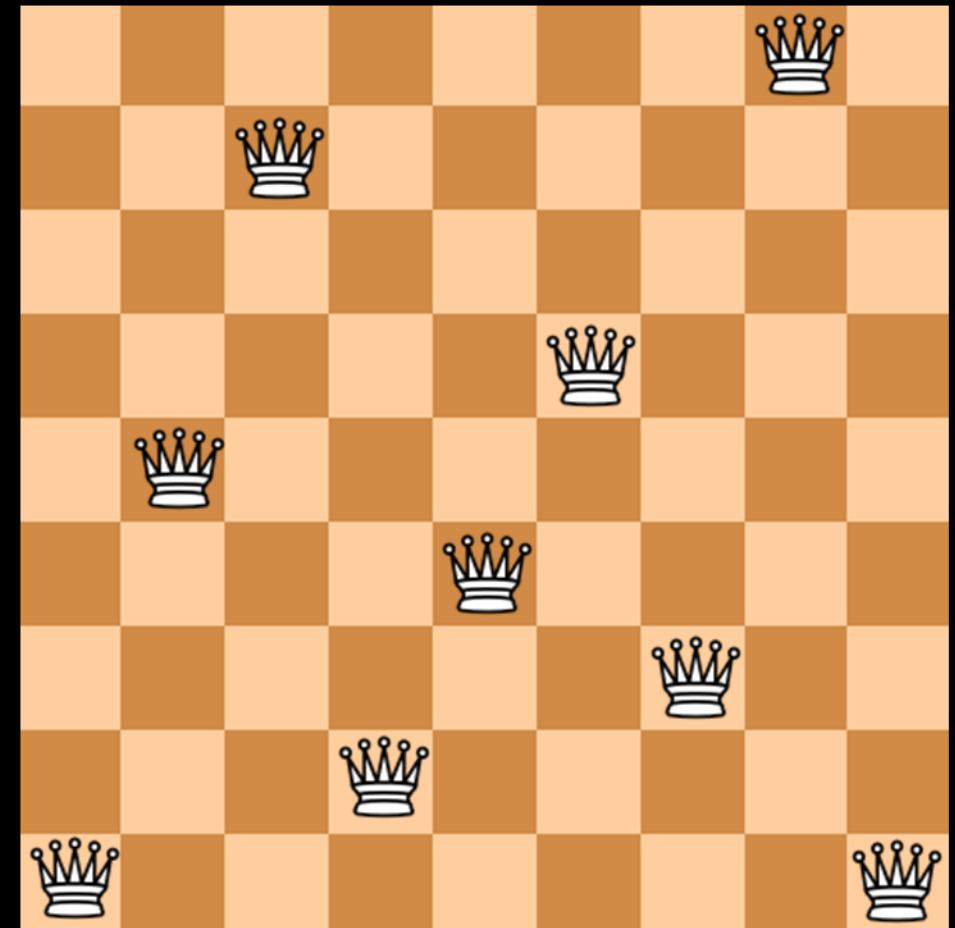
$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Where,  
 $n$  is number of squares  
 $r$  is number of queens

# Statespace – N-Queen puzzle



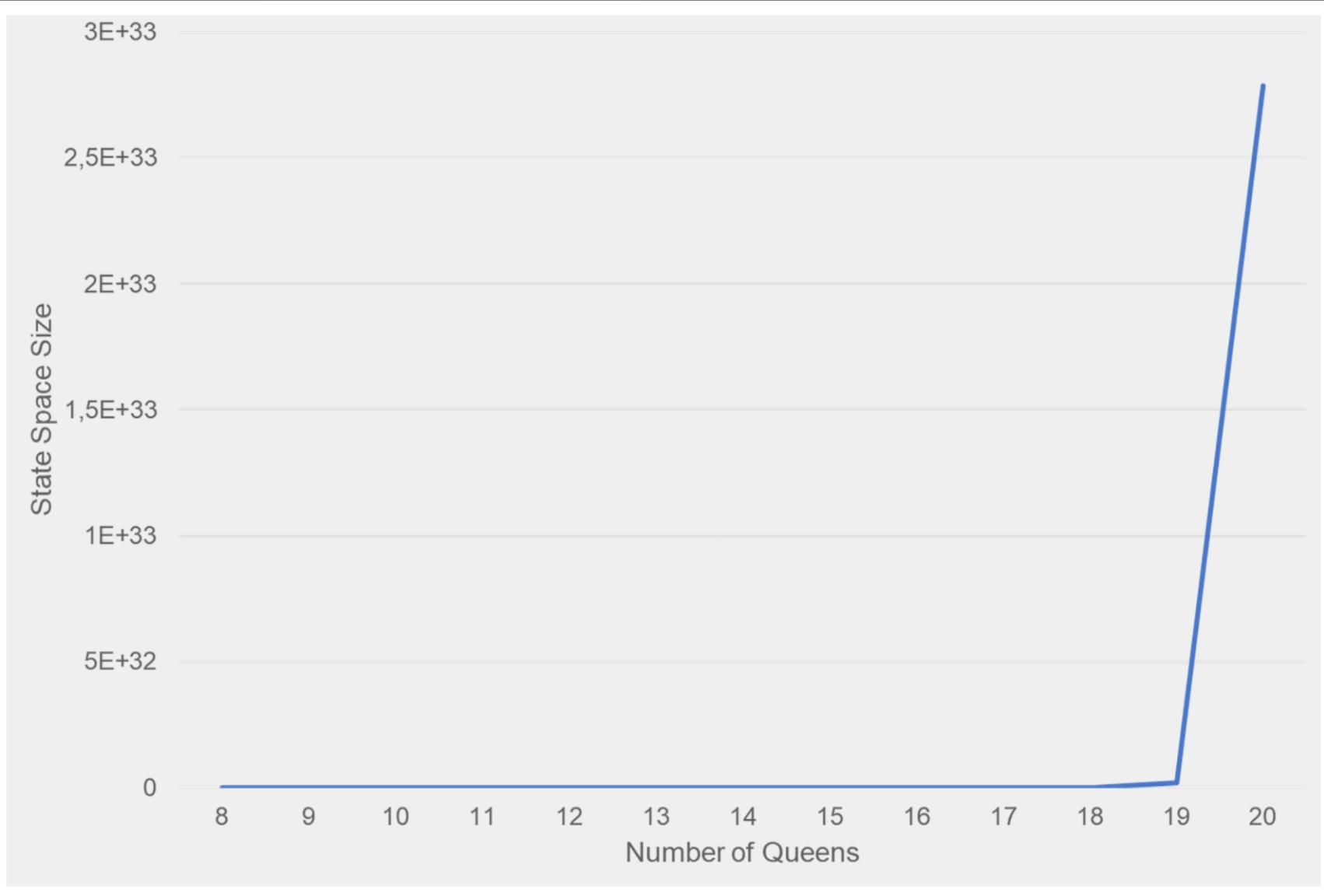
8-Queen Problem:  $\binom{64}{8} = 4426165368$

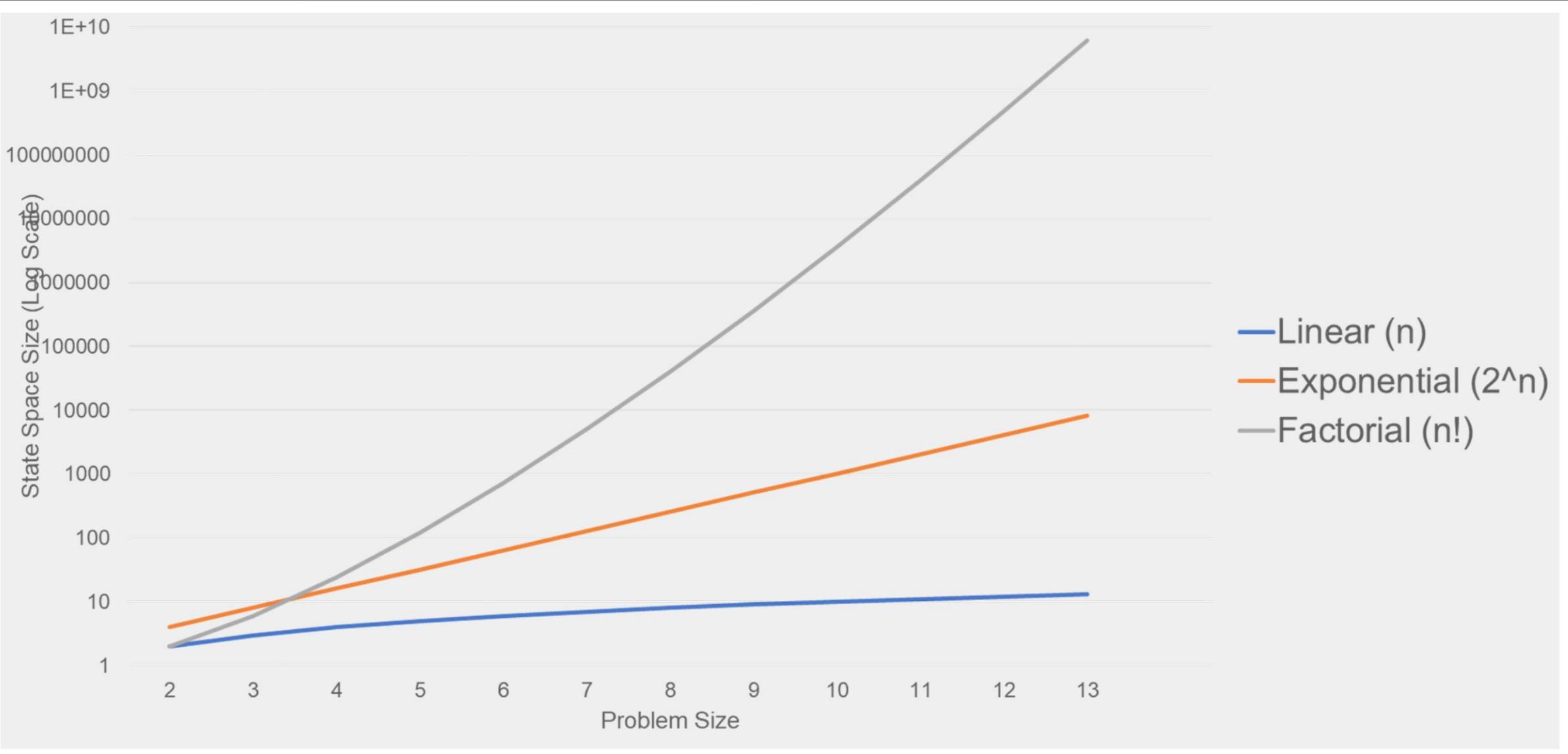


9-Queen Problem:  $\binom{81}{9} = 260887834350$

# Statespace – N-Queen puzzle

Queens	Squares	State Space	Approximate Time to Solve
8	64	4426165368	4.42 Seconds
9	81	260887834350	4.34 Minutes
10	100	17310309456440	4.8 Hours
11	121	1276749965026540	14.77 Days
12	144	103619293824707000	39.40 Months
13	169	9176358300744340000	290.78 Years
14	196	880530516383349000000	27 902.92 Years
15	225	91005567811177500000000	2 883 854.02 Years
16	256	100787516020223000000000000	319 383 187 Years
17	289	11907390443444900000000000000	$3.77330493 \times 10^{10}$ Years
18	324	149482492334195000000000000000	$4.73691552 \times 10^{12}$ Years
19	361	1987086705354380000000000000000	$6.29683229 \times 10^{14}$ Years
20	400	2788360983670900000000000000000	$8.83597149 \times 10^{16}$ Years





# Statespace - Formules

Order: Is de volgorde belangrijk?

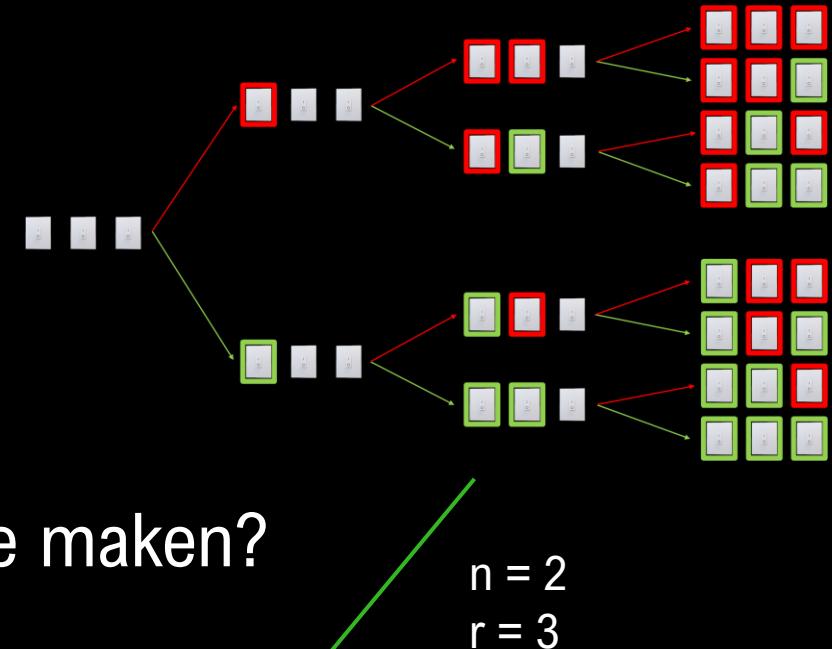
Repetition: Kan ik herhaaldelijk dezelfde keuze maken?

Combinations and Permutations r: aantal keuzes n: aantal mogelijkheden per keuze		Repetition	
		yes	no
Order	yes	$n^r$	$\frac{n!}{(n-r)!}$
	no	$\frac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!}$	$\frac{n!}{r!(n-r)!}$

# Statespace - Formules

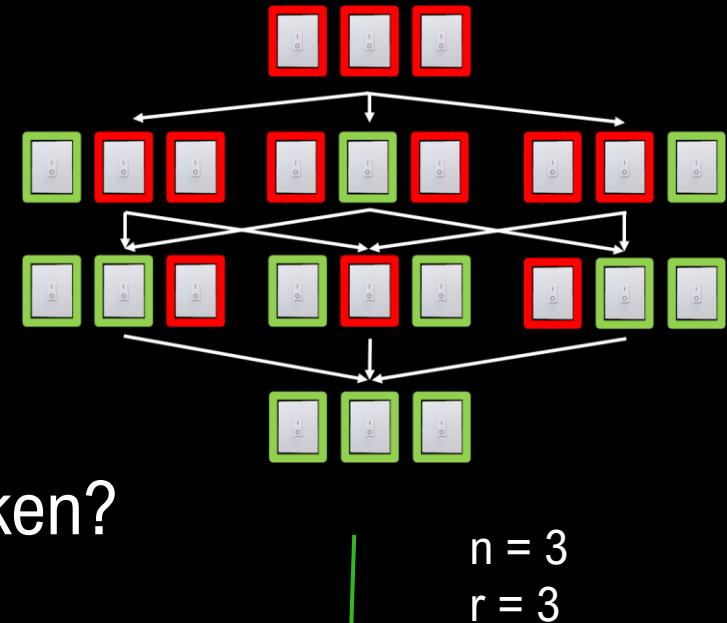
Order: Is de volgorde belangrijk?

Repetition: Kan ik herhaaldelijk dezelfde keuze maken?



Combinations and Permutations		Repetition	
Order	yes	yes	no
		$n^r$	$\frac{n!}{(n-r)!}$
	no	$\frac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!}$	$\frac{n!}{r!(n-r)!}$

# Statespace - Formules



Order: Is de volgorde belangrijk?

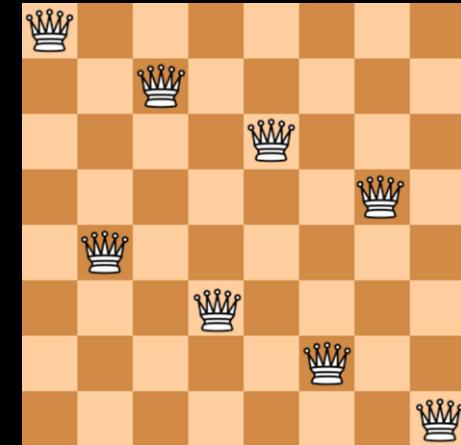
Repetition: Kan ik herhaaldelijk dezelfde keuze maken?

Combinations and Permutations r: aantal keuzes n: aantal mogelijkheden per keuze		Repetition	
Order	yes	yes	no
		$n^r$	$\frac{n!}{(n-r)!}$
	no	$\frac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!}$	$\frac{n!}{r!(n-r)!}$

# Statespace - Formules

Order: Is de volgorde belangrijk?

Repetition: Kan ik herhaaldelijk dezelfde keuze maken?



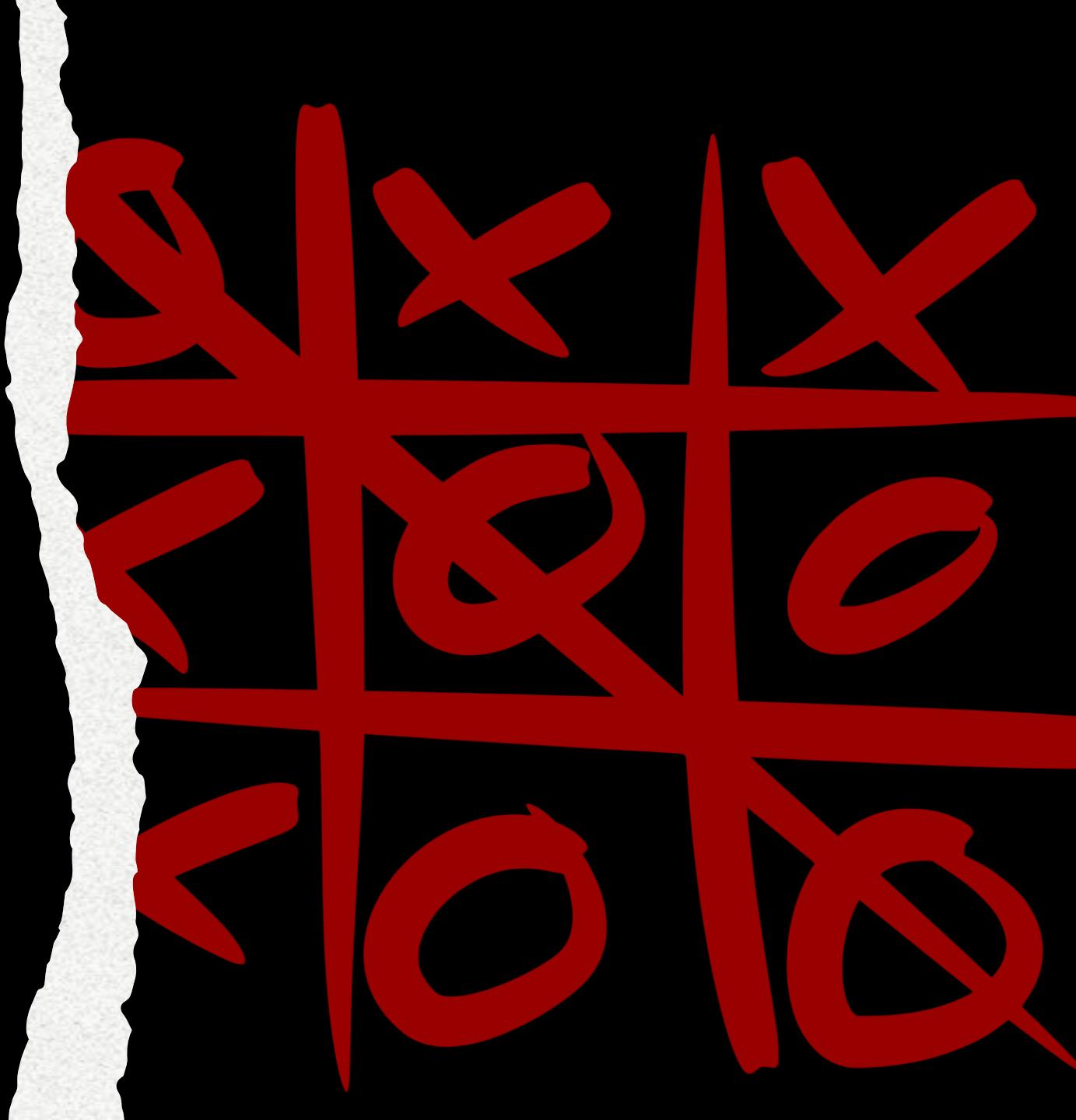
$$\begin{aligned} n &= 64 \\ r &= 8 \end{aligned}$$

Combinations and Permutations r: aantal keuzes n: aantal mogelijkheden per keuze		Repetition	
		yes	no
Order	yes	$n^r$	$\frac{n!}{(n-r)!}$
	no	$\frac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!}$	$\frac{n!}{r!(n-r)!}$

# POP quiz!

Wat is de kleinste upper bound voor de state-space van Boter-kaas-en-eieren?

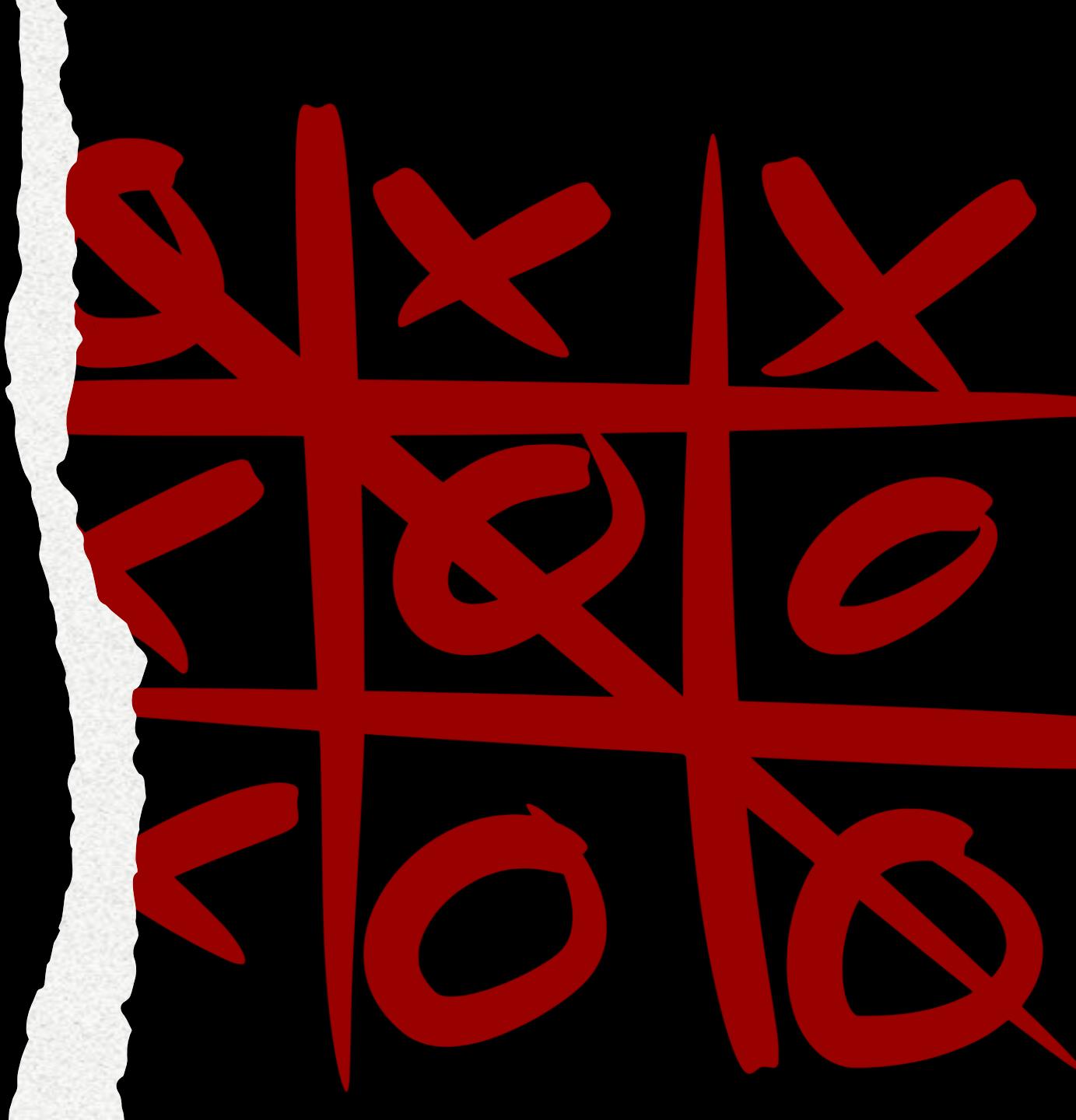
1.  $3^9$
2.  $9^3$
3.  $9!$



# POP quiz!

Wat is de kleinste upper bound voor de state-space van Boter-kaas-en-eieren?

1.  $3^9$
2.  $9^3$
3.  $9!$



Vragen?

# POP quiz!

Wat maakt een probleem moeilijk om op te lossen?

1. Een grote statespace
2. De constraints
3. Iets anders?



# Computeralgoritme

Een algoritme is een reeks stappen die gevolgd kunnen worden om een specifiek probleem op te lossen.



Bubble sort

# Computationele complexiteit

2,1,3,4,5,6,7,8,9,10

Best-Case

Bubble Sort (1 Step)

1,2,3,4,5,6,7,8,9,10

10,9,8,7,6,5,4,3,2,1

Worst-Case

Bubble Sort (<=100 Steps)

# Probleem Complexiteit

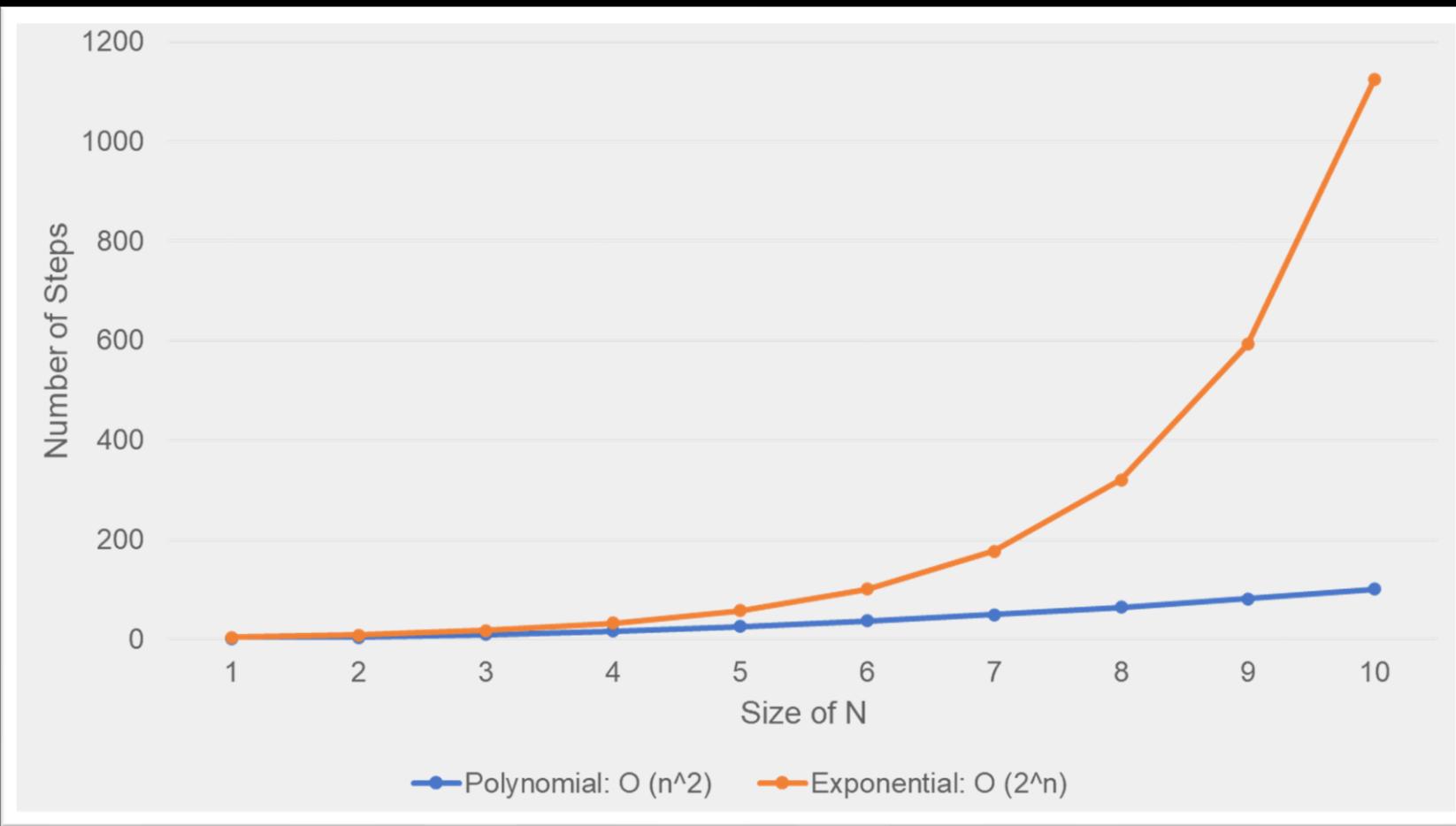


$O(n^{\dots})$   
Polynomial

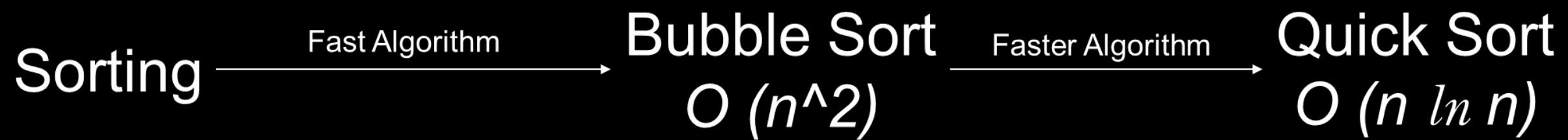


$O(\dots^n)$   
Exponential

# Polynomiaal versus Exponentieel



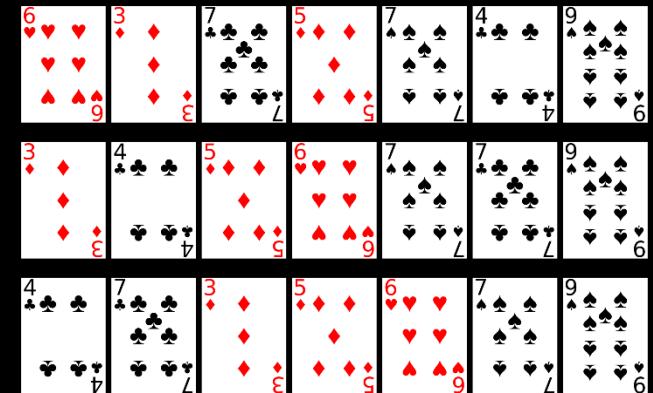
# Snelle algoritmen



# Moeilijkheid



5	3		7					
6			1	9	5			
	9	8				6		
8			6				3	
4		8	3				1	
7			2			6		
	6			2	8			
		4	1	9			5	
			8		7	9		



Moeilijk

???

Makkelijk

# POP quiz!

Hoe moeilijk is sudoku?

1. Zo makkelijk als sorteren
2. Zo moeilijk als schaken
3. We zullen het nooit weten



# Moeilijkheid

5	3		7					
6		1	9	5				
9	8				6			
8		6			3			
4		8	3		1			
7		2			6			
6			2	8				
	4	1	9		5			
	8		7	9				

Moeilijk op te lossen

5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

Makkelijk te Controleren

# Moeilijkheid



Moeilijk op te lossen



Moeilijk te controleren

Is E4 de beste opening voor wit?

Vragen?

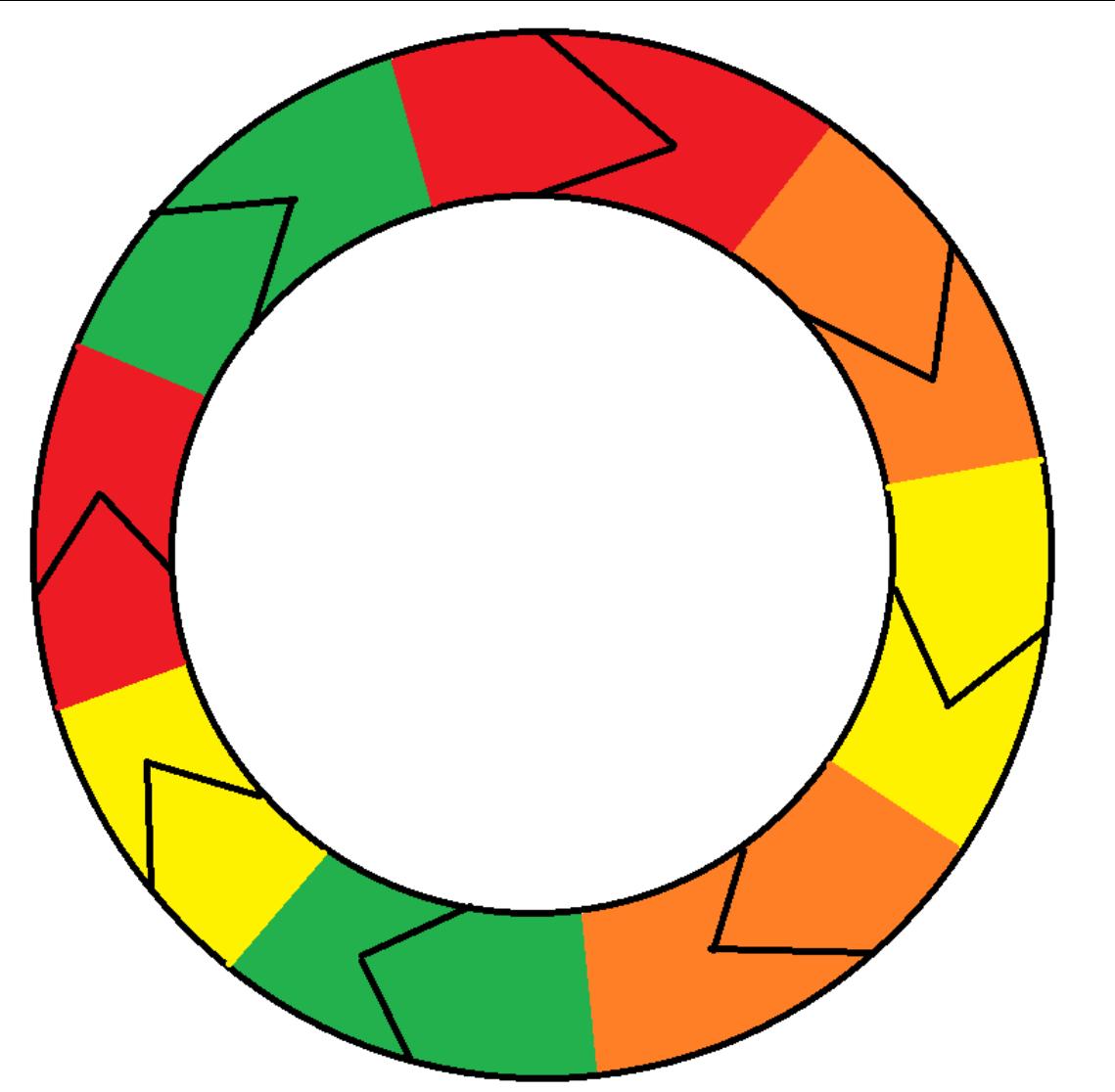


# Complexiteit + Statespace

- 8 puzzelstukken van gelijke vorm
- Ieder puzzelstuk heeft 2 kleuren
- Kleuren die elkaar raken moeten overeen komen

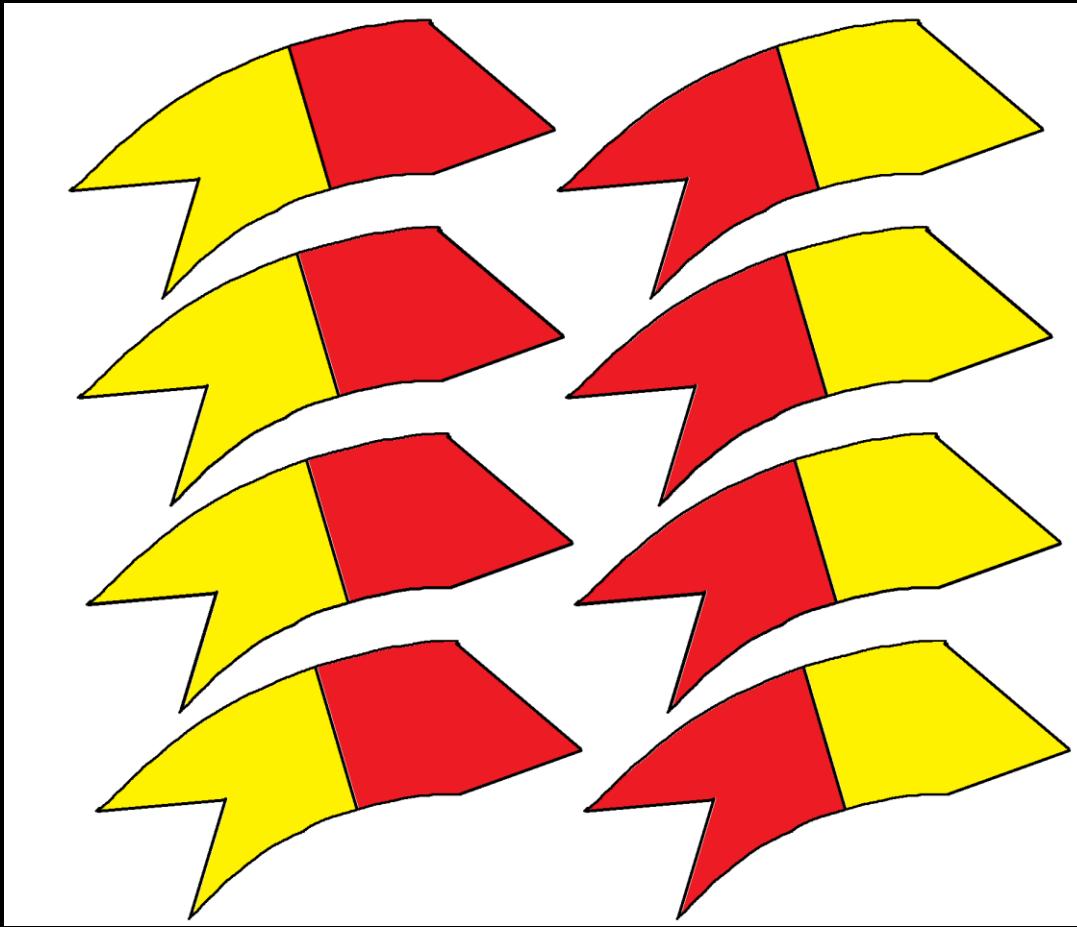
$$n = 8, r = 8$$

$$8! = 40320$$

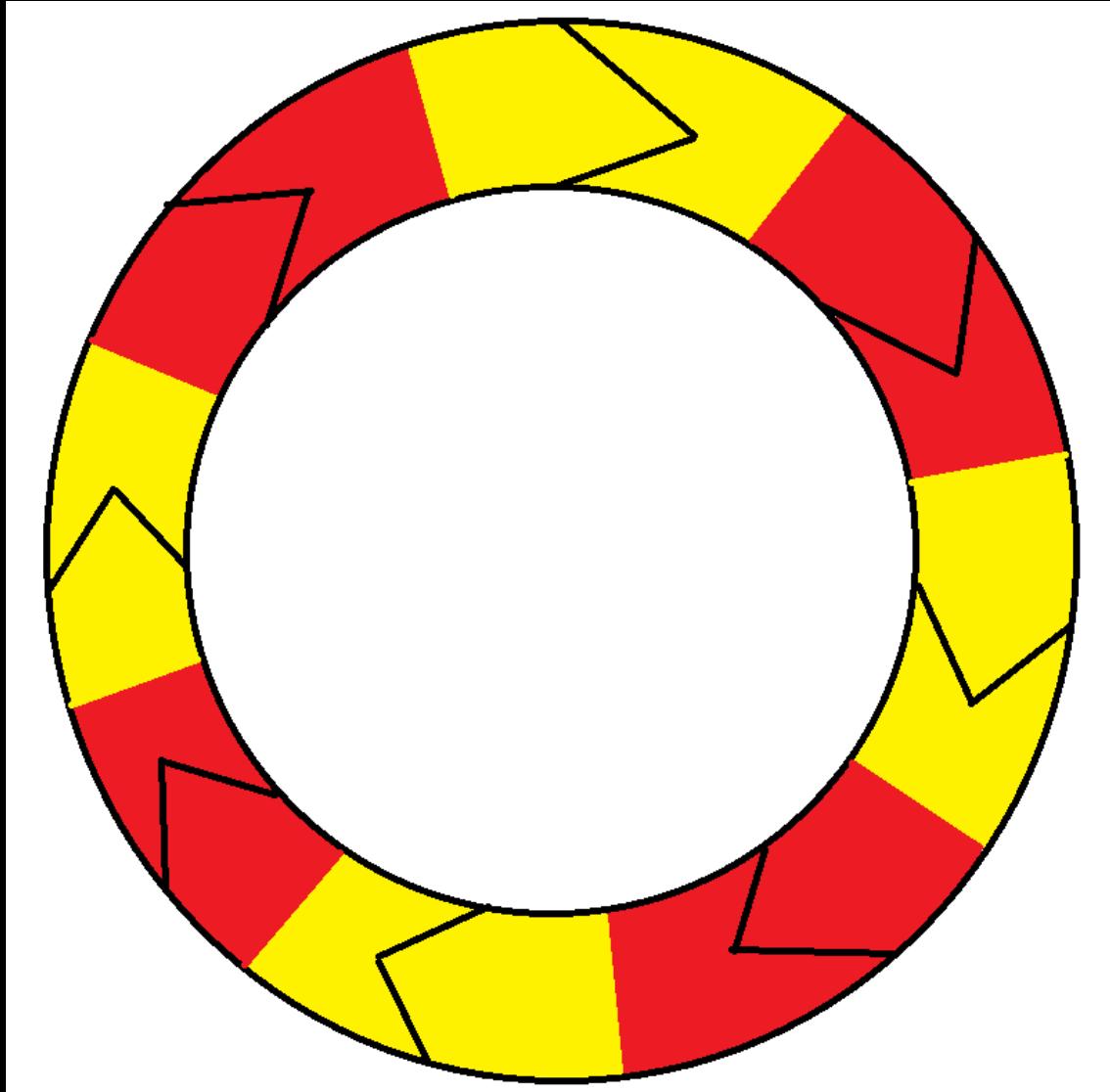


# Complexiteit + Statespace

Maar hoe maken we het  
makkelijk?



**Complexiteit +  
Statespace**

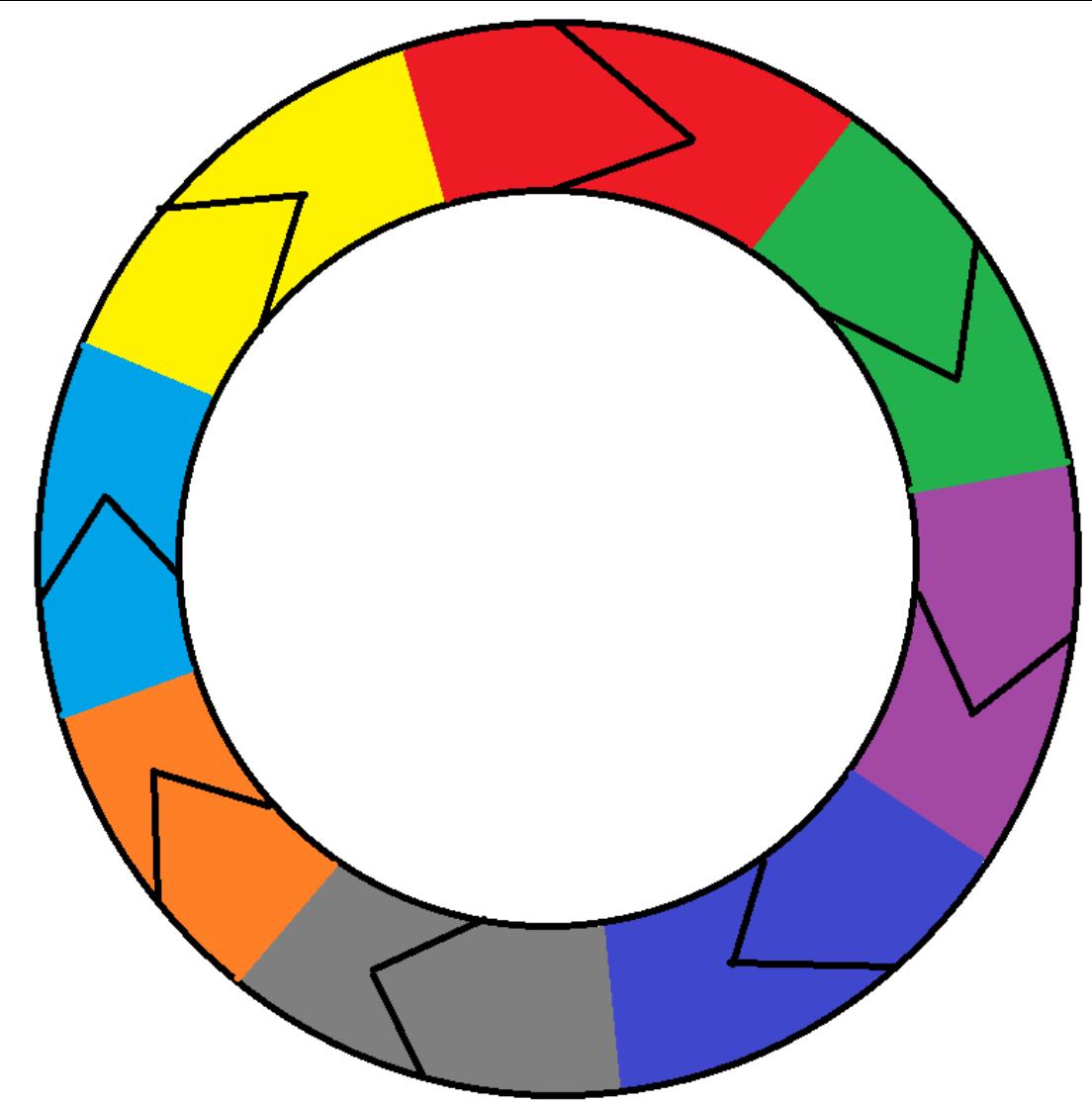


# Complexiteit + Statespace

Veel soortgelijke opties

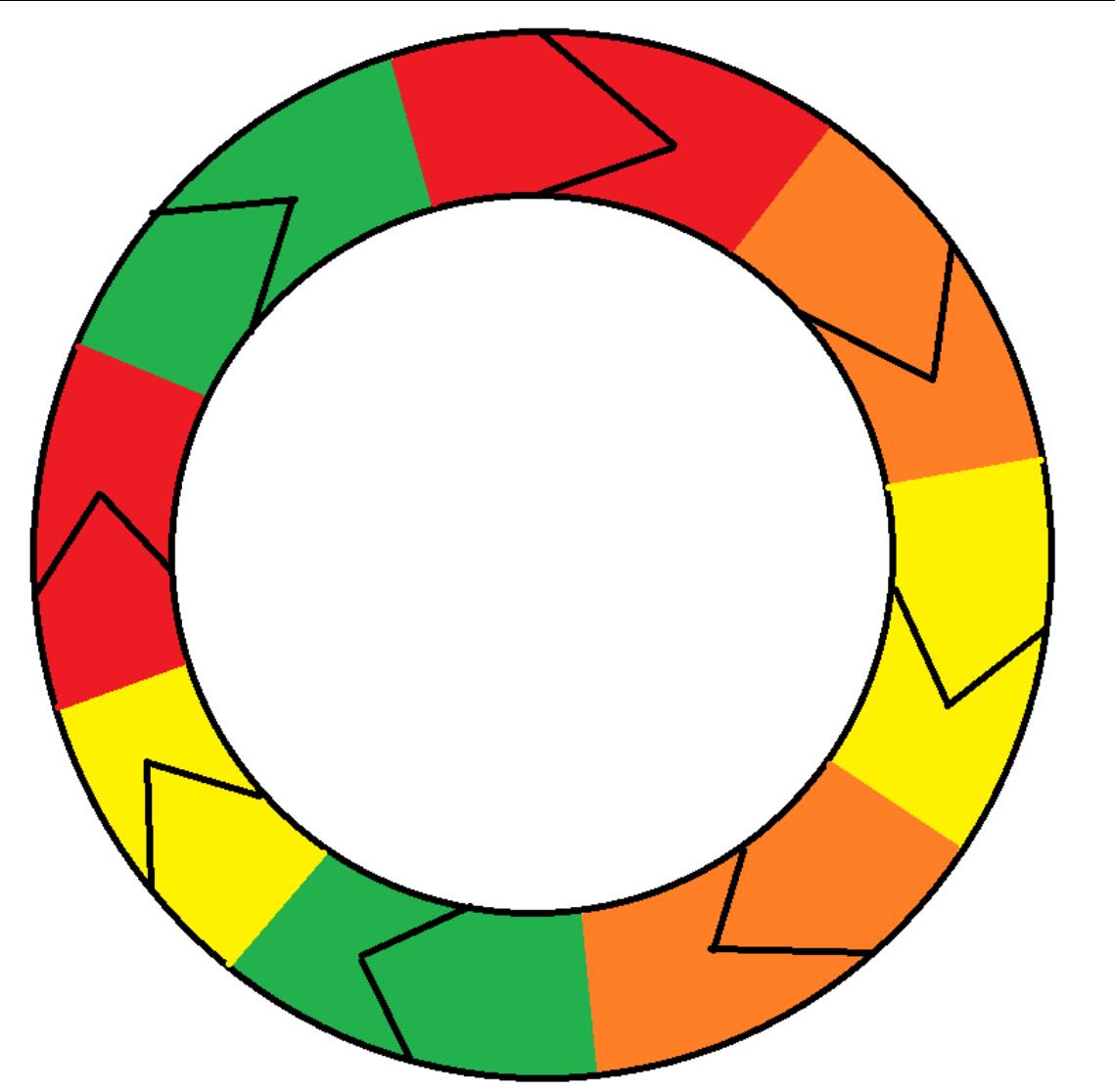


**Complexiteit +  
Statespace**



**Moeilijkheid +  
Statespace**

Weinig opties



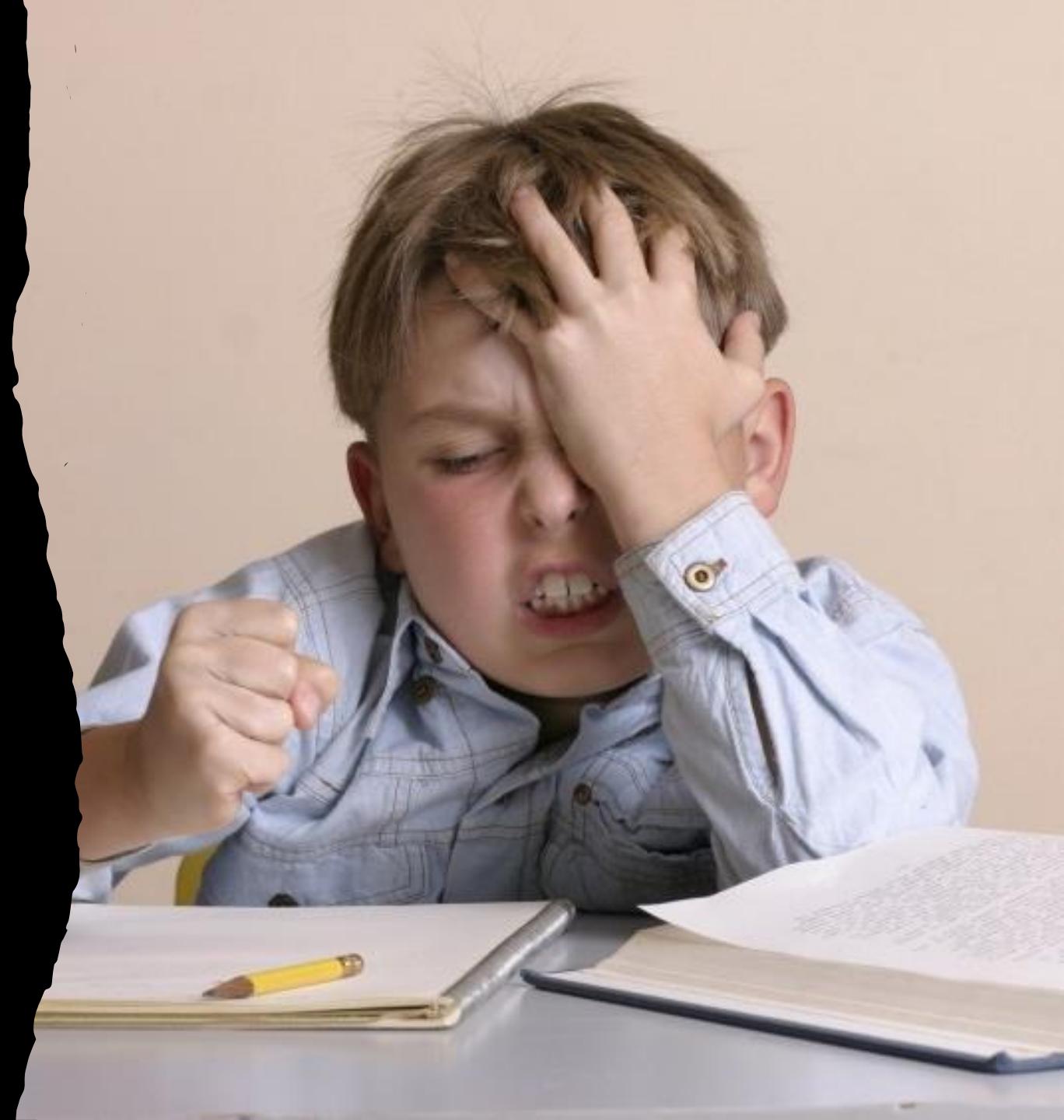
# Complexiteit + Statespace

Iets daar tussenin is  
moeilijk!

# POP quiz!

Wat maakt een probleem moeilijk om op te lossen?

1. Een grote statespace
2. De constraints
3. Weinig geldige oplossingen
4. iets anders?



# Wat is de oplossing?

## Heuristieken!

Slimme en snelle algoritmes die een zeer goede oplossing geven in een redelijke tijd, ook voor COPs

# Moeilijkheid



Moeilijk op te lossen

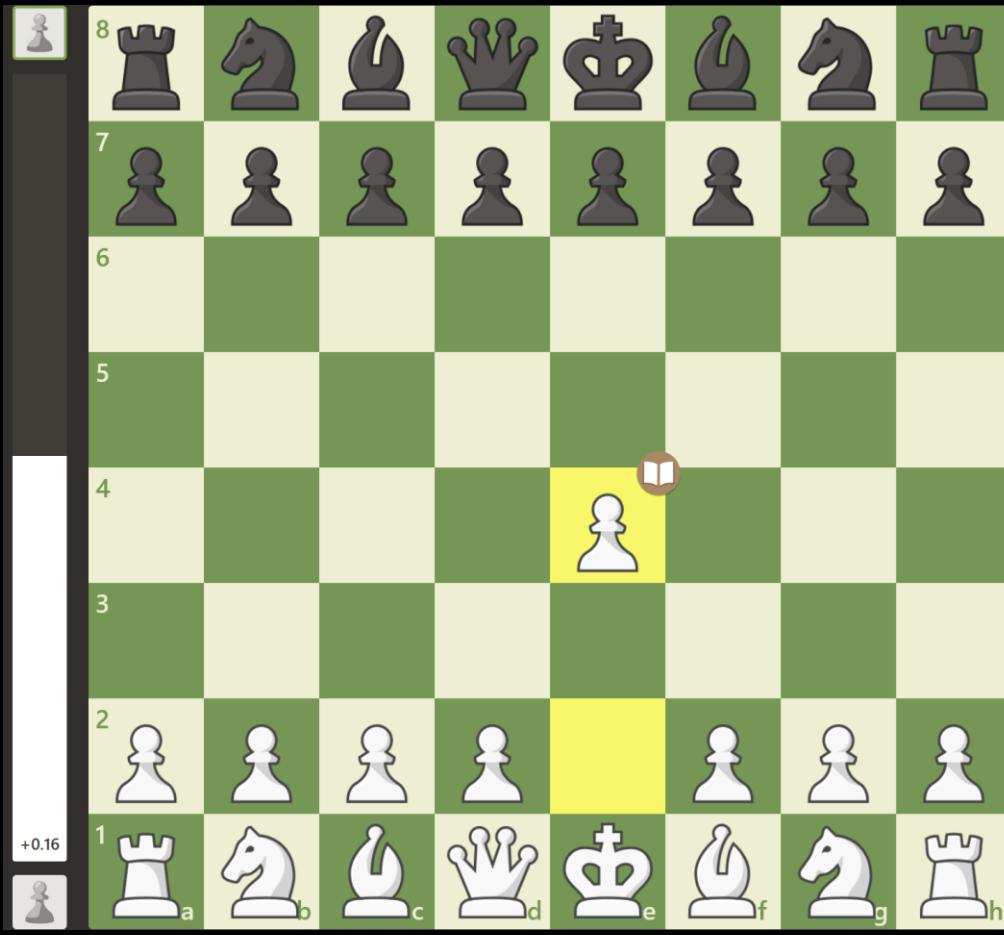


Moeilijk te controleren

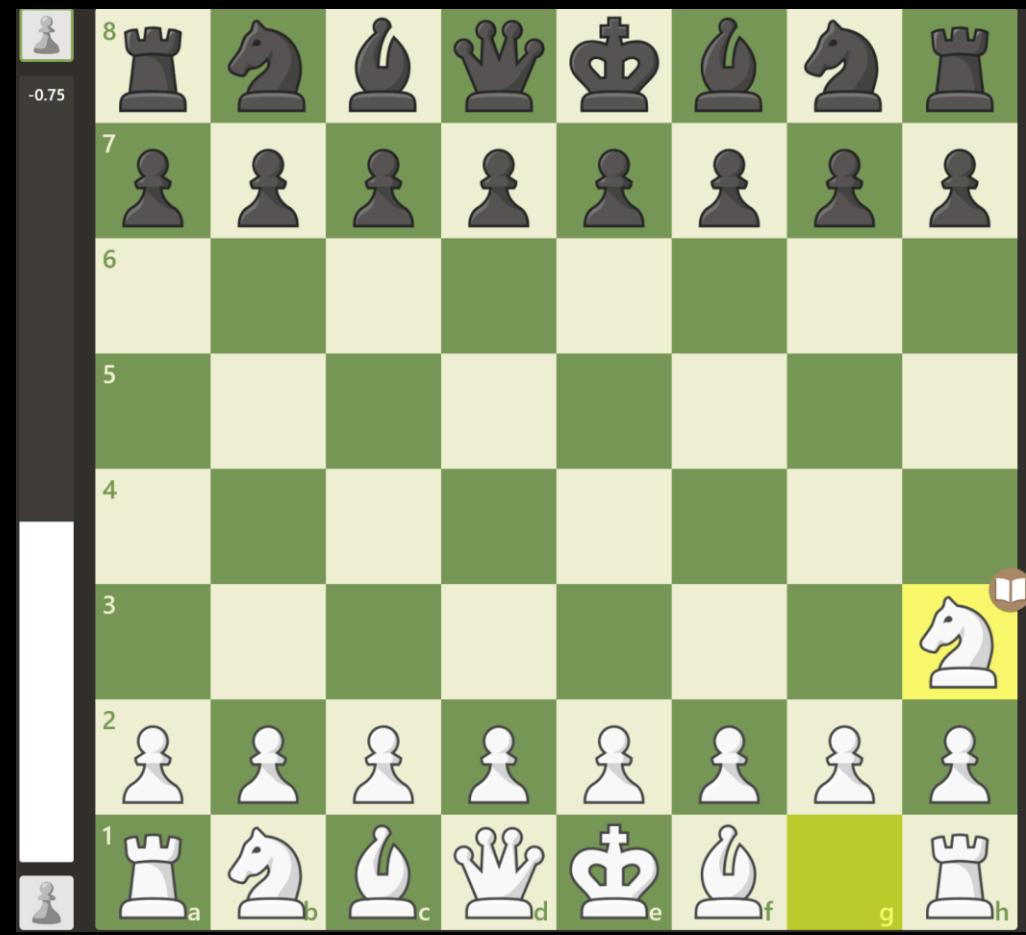
Is E4 de beste opening voor wit?

# Moeilijkheid

Good Opening (+0.16)



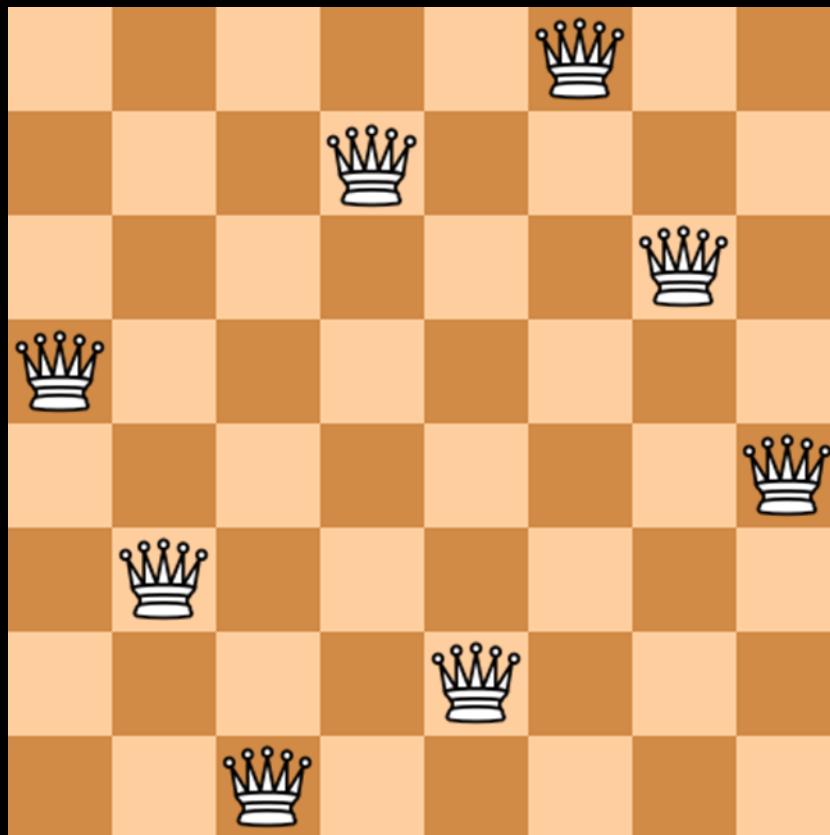
Bad Opening (-0.75)



Vragen?

**Representatie maakt uit!**

# Moeilijkheid – N-Queen puzzle



1<sup>st</sup> Queen: 64 Squares

2<sup>nd</sup> Queen: 63 Squares

3<sup>rd</sup> Queen: 62 Squares

4<sup>th</sup> Queen: 61 Squares

5<sup>th</sup> Queen: 60 Squares

6<sup>th</sup> Queen: 59 Squares

7<sup>th</sup> Queen: 58 Squares

8<sup>th</sup> Queen: 57 Squares

$$\text{Total Ways} = 64 * 63 * 62 * 61 * 60 * 59 * 58 * 57 = 4426165368 = \binom{64}{8}$$

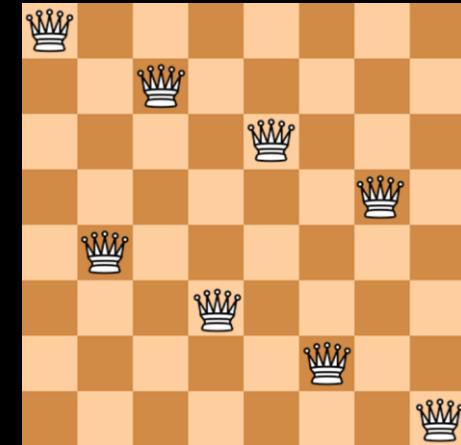
8-Queen Puzzle.

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$
 Where,  
 $n$  is number of squares  
 $r$  is number of queens

# Statespace - Formules

Order: Is de volgorde belangrijk?

Repetition: Kan ik herhaaldelijk dezelfde keuze maken?



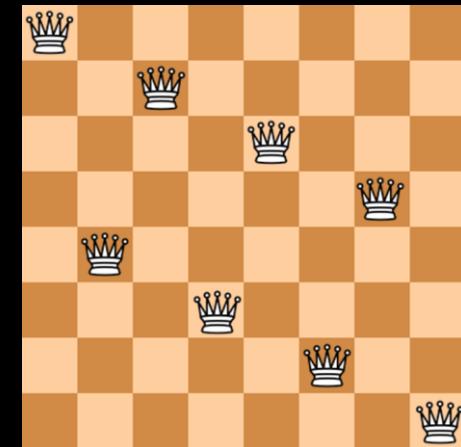
$$\begin{aligned} n &= 64 \\ r &= 8 \end{aligned}$$

Combinations and Permutations r: aantal keuzes n: aantal mogelijkheden per keuze		Repetition	
		yes	no
Order	yes	$n^r$	$\frac{n!}{(n-r)!}$
	no	$\frac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!}$	$\frac{n!}{r!(n-r)!}$

# Statespace - Formules

Order: Is de volgorde belangrijk?

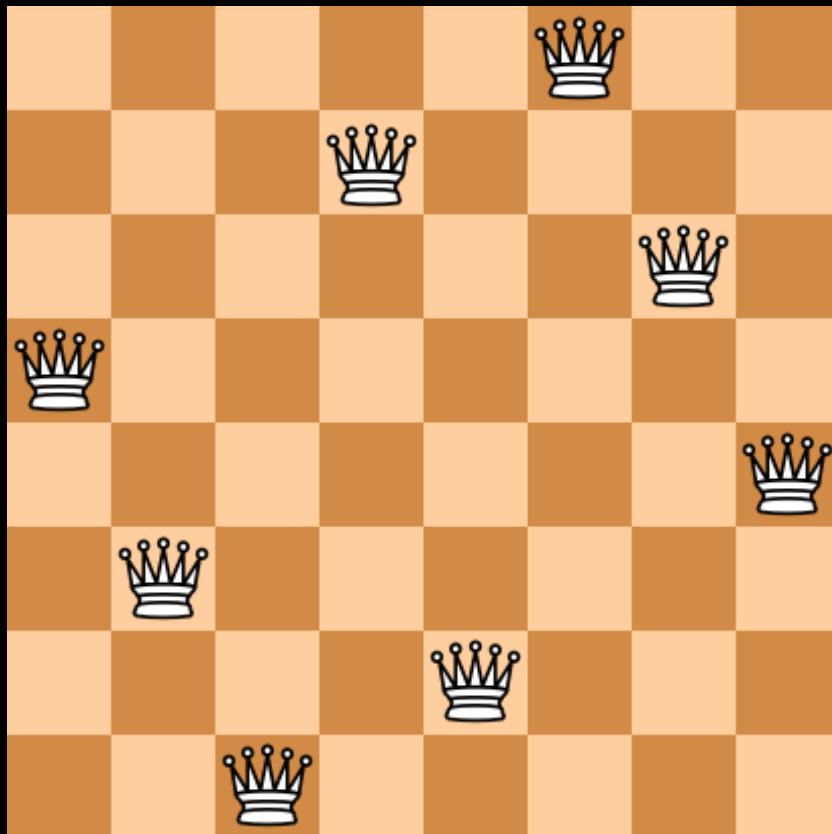
Repetition: Kan ik herhaaldelijk dezelfde keuze maken?



$$\begin{aligned} n &= 8 \\ r &= 8 \end{aligned}$$

Combinations and Permutations r: aantal keuzes n: aantal mogelijkheden per keuze		Repetition	
		yes	no
Order	yes	$n^r$	$\frac{n!}{(n-r)!}$
	no	$\frac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!}$	$\frac{n!}{r!(n-r)!}$

# Moeilijkheid – N-Queen puzzle



1<sup>st</sup> Queen: 8 Squares

2<sup>nd</sup> Queen: 7 Squares

3<sup>rd</sup> Queen: 6 Squares

4<sup>th</sup> Queen: 5 Squares

5<sup>th</sup> Queen: 4 Squares

6<sup>th</sup> Queen: 3 Squares

7<sup>th</sup> Queen: 2 Squares

8<sup>th</sup> Queen: 1 Square

Total Ways =  $8! = 40320$

8-Queen Puzzle.

This also makes our algorithm and representation better!

Vragen?

# POP quiz!

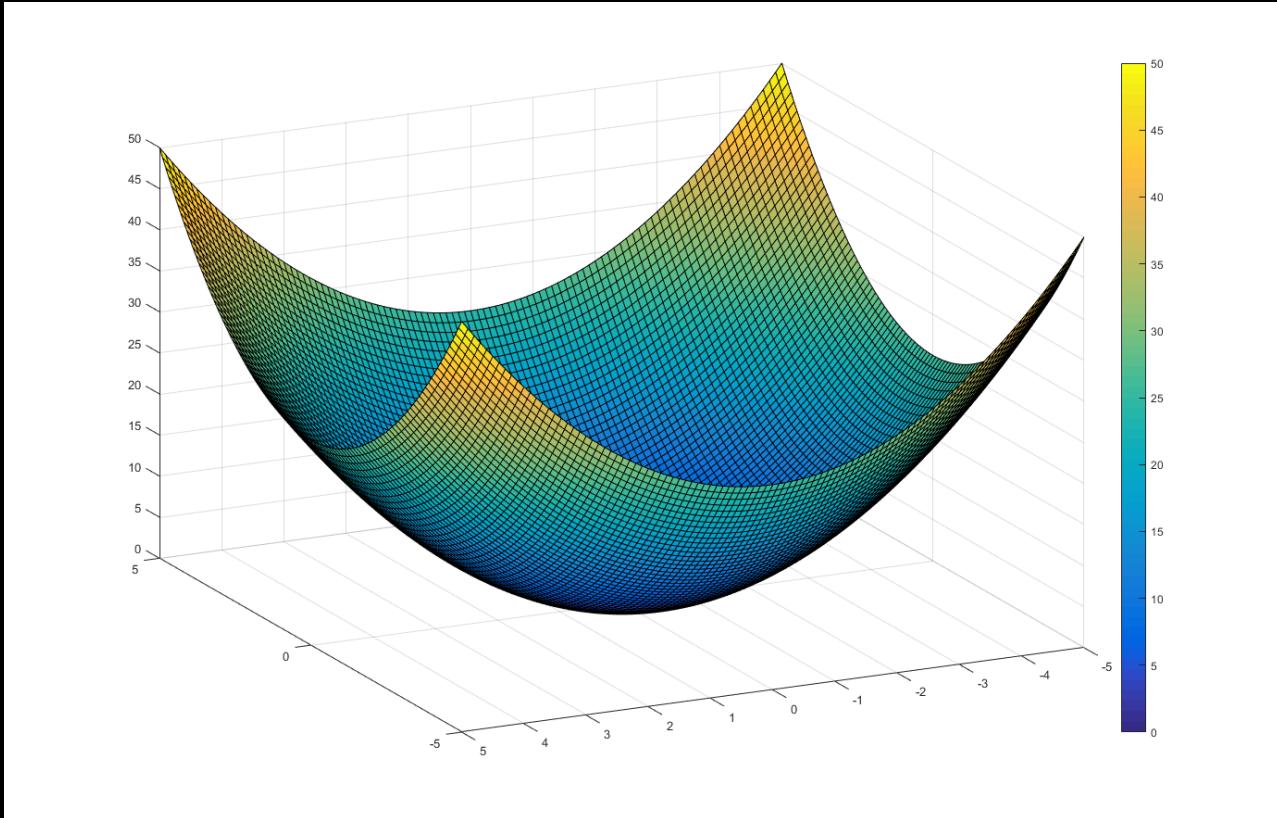
Wat maakt een probleem moeilijk om op te lossen?

1. Een grote statespace
2. Weinig geldige oplossingen
3. De constraints
4. Iets anders?

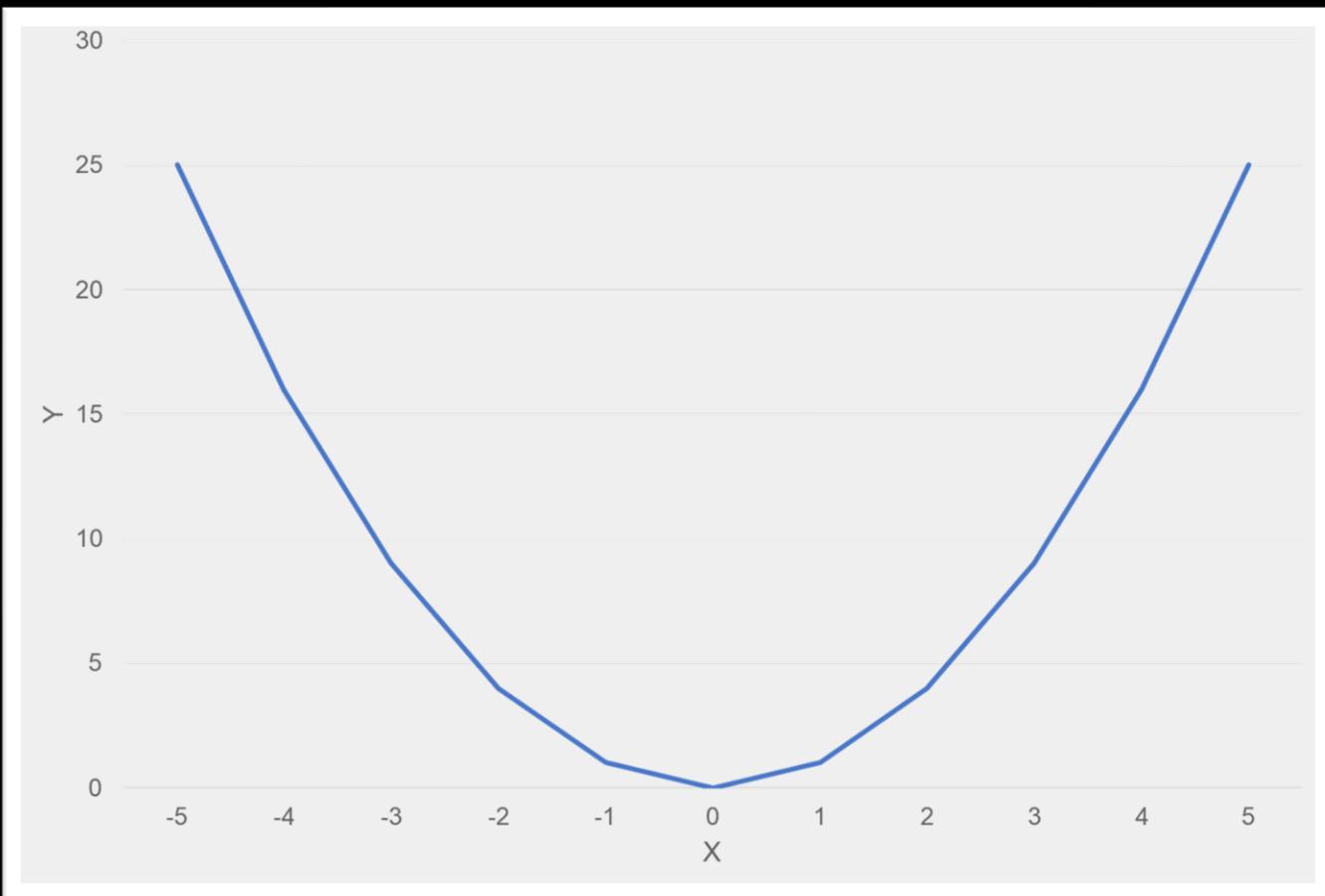


# Vorm van de statespace

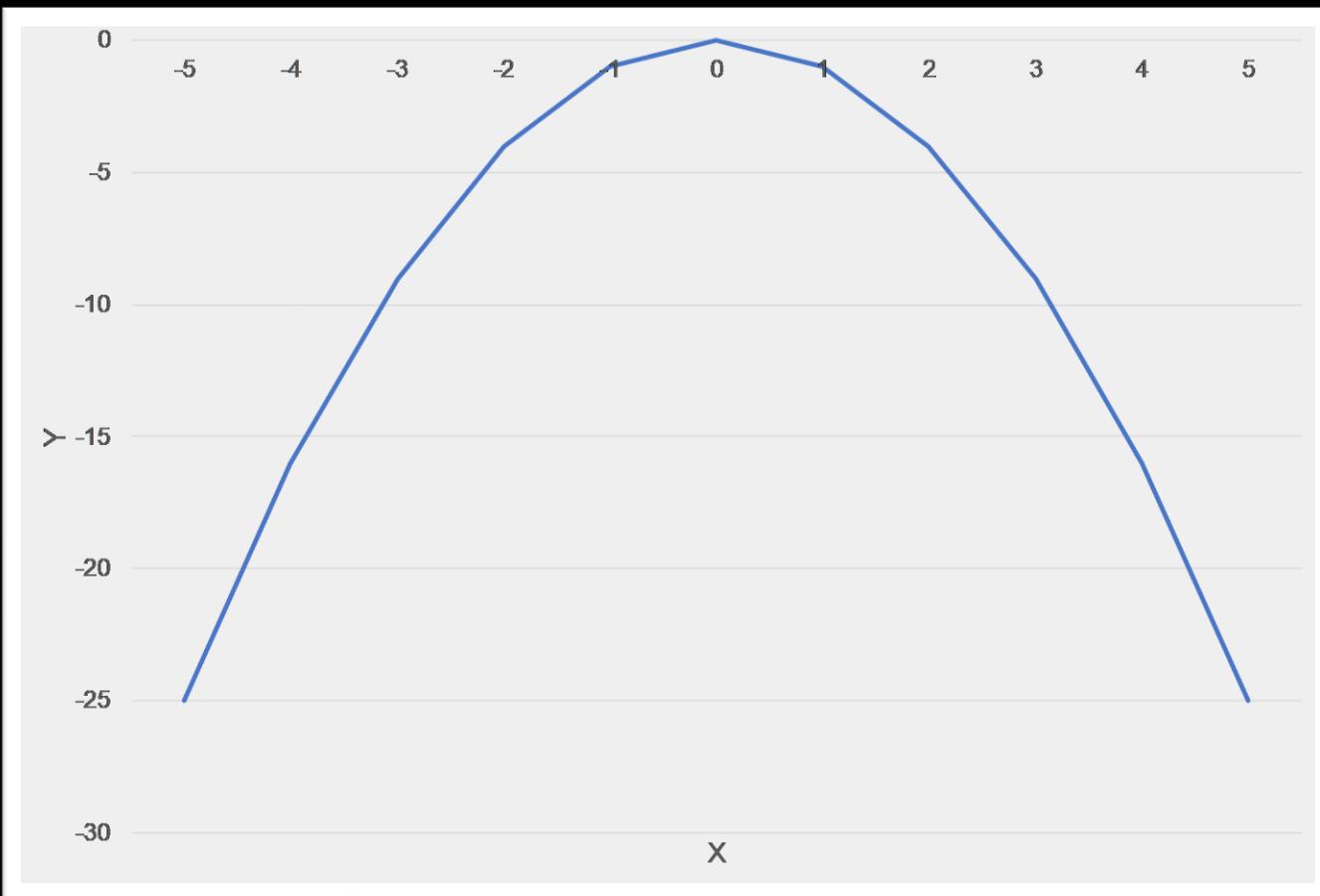
- Convex
- Globaal minimum



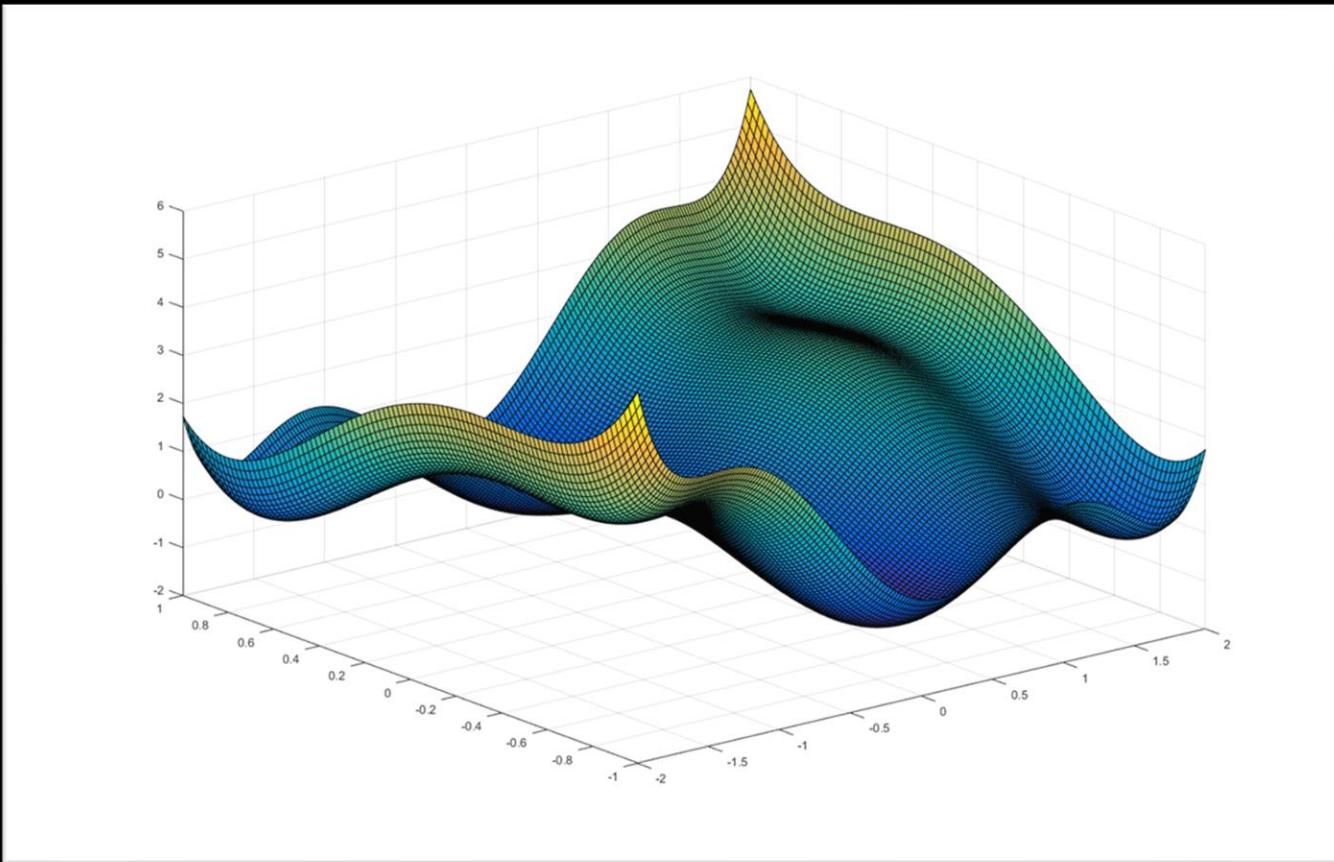
# Gradient Descent



# Gradient Ascent



# Non-convex statespace



# Vorm van de statespace

	Exploratie Moeilijkheid	Minima	Oplossingskwaliteit
Convex Statespace	Makkelijk	Globaal Minima	Optimaal
Non-Convex Statespace	Moeilijk	Lokaal Minima	Sub-Optimaal

Vragen?



Radio Russia

# Indeling zendfrequenties



Zeven types zendmasten



Vier kostenschema's



Geen overlap



4 kaarten

Oekraïne

USA

China

Russia

# Zenders

<b>Zendertype</b>	<b>Kosten 1</b>	<b>Kosten 2</b>	<b>Kosten 3</b>	<b>Kosten 4</b>
A	12	19	16	3
B	26	20	17	34
C	27	21	31	36
D	30	23	33	39
E	37	36	36	41
F	39	37	56	43
G	41	38	57	58

# Zenderinrichting

- Zo min mogelijk zendertypes
- Ieder zendertype even veel
- Minimaliseer kosten
  - Voor ieder land
  - Voor ieder kostenschema

Zendertype	Kosten 1	Kosten 2	Kosten 3	Kosten 4
A	12	19	16	3
B	26	20	17	34
C	27	21	31	36
D	30	23	33	39
E	37	36	36	41
F	39	37	56	43
G	41	38	57	58

# Kaart USA



# Kaart USA



# Kaart USA



# Statespace

Eerste keer 7 opties

Staat er naast 6...

Daar naast ???

Versimpel!

$r = \text{aantal staten} = 50$

$n = \text{aantal masten} = 7$

Combinations and Permutations r: aantal keuzes n: aantal mogelijkheden per keuze		Repetition	
Order	yes	yes ✓	no
	no ✓	$\frac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!}$	$\frac{n!}{r!(n-r)!}$

$$\frac{(50+7-1)!}{50!(7-1)!} = 32468436$$

Vragen?