Лабораторная работа №5. Решение ОДУ.

В данной лабораторной работе будет рассмотрена работа методов Рунге-Кутта 4 порядка и Адамса 4 порядка для решения ОДУ 1 порядка

1. Реализуем данные методы

```
def runge_kutta_4(f, x0, y0, xn, n):
    h = (xn - x0) / n
    x = np.linspace(x0, xn, n + 1)
    y = np.zeros(n + 1)
    y[0] = y0
    for i in range(n):
        k1 = h * f(x[i], y[i])
        k2 = h * f(x[i] + h / 2, y[i] + k1 / 2)
        k3 = h * f(x[i] + h / 2, y[i] + k2 / 2)
        k4 = h * f(x[i] + h, y[i] + k3)
        y[i + 1] = y[i] + (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) / 6
    return x, y

2 usages
def adams_4(f, x0, y0, xn, n):
    h = (xn - x0) / n
    x = np.linspace(x0, xn, n + 1)
    y = np.zeros(n + 1)
    x_rk, y_rk = runge_kutta_4(f, x0, y0, x0 + 3 * h,  n: 3)
    y[:4] = y_rk
    for i in range(3, n):
        y[i + 1] = y[i] + h / 24 * (
            55 * f(x[i], y[i]) - 59 * f(x[i - 1], y[i - 1]) + 37 * f(x[i - 2], y[i - 2]) - 9 * f(x[i - 3], y[i - 3]))
    return x, y
```

2. Теперь протестируем их работу на следующей задаче Коши:
   y' = y * cos(x)
   y(0) = 1

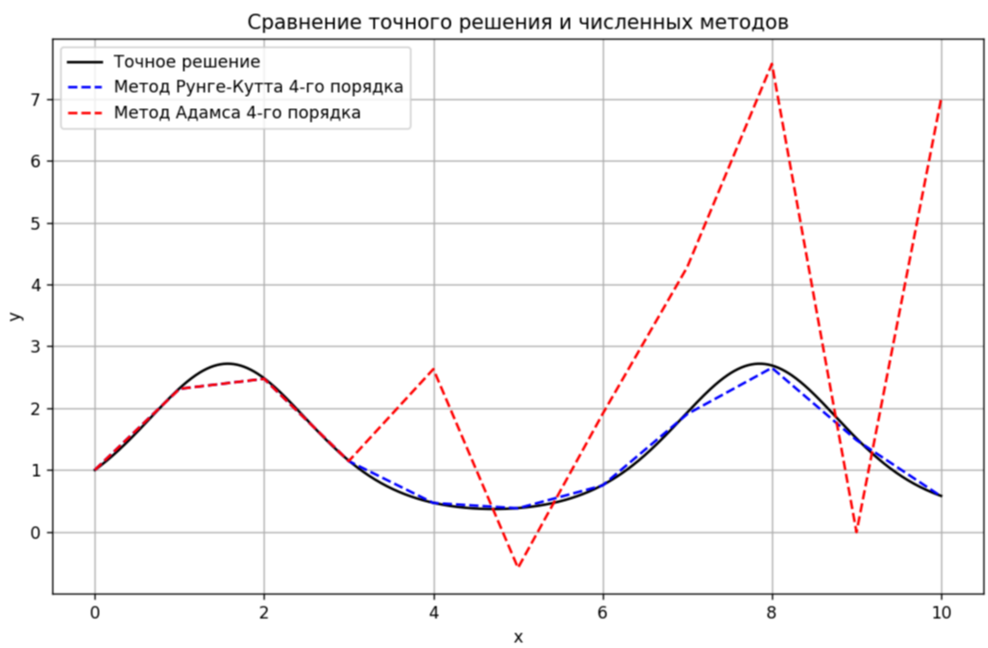
   Аналитическим решением которого будет являться функция
   y = e ^ sin(x)

   Объявим функцию диффура и функцию аналитического решения:

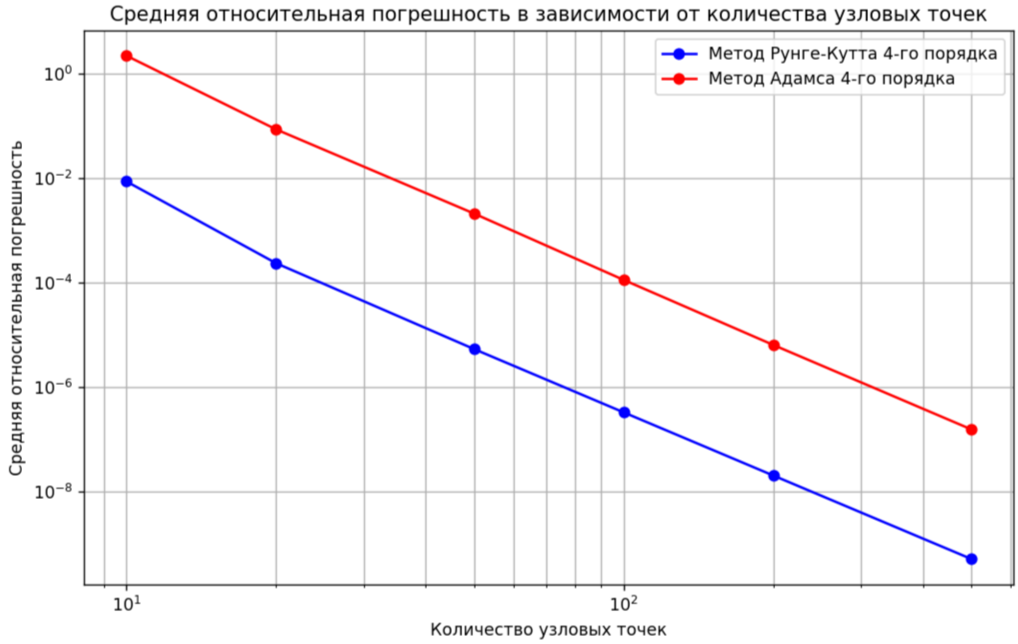
```
def f(x, y):
    return y * np.cos(x)

2 usages
def exact_solution(x):
    return np.exp(np.sin(x))
```

3. Сравним графики решений, полученных этими методами с аналитическим решением:

```python
x0, y0, xn = 0, 1, 10
n = 10

x_exact = np.linspace(x0, xn,  num: 1000)
y_exact = exact_solution(x_exact)

x_rk, y_rk = runge_kutta_4(f, x0, y0, xn, n)
x_adams, y_adams = adams_4(f, x0, y0, xn, n)

plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot( *args: x_exact, y_exact, label='Точное решение', color='black')
plt.plot( *args: x_rk, y_rk, label='Метод Рунге-Кутта 4-го порядка', linestyle='--', color='blue')
plt.plot( *args: x_adams, y_adams, label='Метод Адамса 4-го порядка', linestyle='--', color='red')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.legend()
plt.title('Сравнение точного решения и численных методов')
plt.grid(True)
plt.show()
```



4. Как видно из решения, метод Адамса в точках, идущих дальше 4 (первые 4 совпадают с методом Рунге-Кутта) имеет довольно большую погрешность, в то время как решения методом Рунге-Кутта практически точное. Теперь посмотрим, насколько точно методы будут работать при увеличении количества точек.


Средняя относительная погрешность в зависимости от количества узловых точек
Метод Рунге-Кутта 4-го порядка
Метод Адамса 4-го порядка
Средняя относительная погрешность
10^{0}
10^{-2}
10^{-4}
10^{-6}
10^{-8}
10^{1}
10^{2}
Количество узловых точек