12103 MARTINET Ellyas-Émile

Tromper l'intuition géométrique avec la géométrie hyperbolique

Après avoir découvert l'existence de géométries non euclidiennes, je me demandais comment les visualiser et qu'impliquaient leur particularités sur notre intuition géométrique. L'approche de ces considérations par le jeu vidéo me semblait être un axe intéressant, puisque ce média, par son côté interactif, facilite la compréhension intuitive de tels concepts.

Nous construisons ici un jeu à l'aide d'outils fonctionnant selon les règles de la géométrie hyperbolique, ce qui s'inscrit bien dans le thème de l'année.

Positionnement thématique (ÉTAPE 1) :

- *MATHEMATIQUES (Géométrie)*
- *INFORMATIQUE (Informatique pratique)*
- *MATHEMATIQUES (Autres)*

Mots-clés (ÉTAPE 1) :

Mots-clés (en français)	**Mots-clés (en anglais)**
Géométrie Hyperbolique	*Hyperbolic Geometry*
Pavages du Plan Hyperbolique	*Tesselations of the Hyperbolic Plane*
Cartes Combinatoriales	*Combinatorial Maps*
Jeux Algorithmiques	*Algorithmic Games*
Espace de Minkowski	*Minkowski Space*

Bibliographie commentée

Les jeux permettent d'explorer des mondes étranges de manière interactive et ludique. Cependant ils sont souvent construits avec des outils fonctionnant selon les règles de la géométrie euclidienne. La géométrie hyperbolique peut constituer un élément intriguant et contre-intuitif d'un jeu, et nous explorons ici d'une part comment fournir des outils (moteur de jeu, système de rendu principalement) pour aider à la construction de jeux utilisant cette géométrie, et d'autre part comment exploiter certaines propriétés essentielles pour tromper l'intuition géométrique classique.

Historiquement, la géométrie hyperbolique fut l'un des contres-exemples exhibés par Gauß et Lobatchevski à l'idée, proposée par Euclide, que son cinquième postulat (axiome des parallèles) pouvait être déduit des quatres précédents [8].

La géométrie hyperbolique et ses applications sont peu explorées dans les domaines du jeu vidéo, bien qu'elle ait plusieurs applications en physique théorique, notamment [5]. Il semble naturel de s'y intéresser comme moyen de proposer des expériences nouvelles, et de rendre sa compréhension ludique et intuitive.

Un moteur de jeu est un outil pour la création de jeux, il faut donc qu'il soit capable de gérer les tâches suivantes :

- Placer les objets dans le monde dans leur état initial

- À chaque instant, calculer les transformations à appliquer à chacun d'entre eux, typiquement les translations et les rotations

- Afficher les objets, déterminer leur visibilité et les projeter sur l'écran [2]

L'adaptation de moteurs déjà existants comme Unity aux espaces courbes est une possibilité pour développer un jeu [2]. Cependant, nous nous inspirerons de l'implémentation proposée par le jeu HyperRogue [1] pour certains des concepts suivants.

L'affichage du plan hyperbolique, ici restreint à deux dimensions, nécessite l'utilisation de cartes combinatoires, sur lesquelles repose l'algorithme optimisé de génération du plan proposé par Celińska-Kopczyńska et Kopczyński [4]. Ceci permet de limiter les erreurs d'imprécision inhérentes à l'utilisation de flottants, et gagner en efficacité pour la génération procédurale du terrain, puisque les cases seront plus facilement repérées et modifiées, là où le plan hyperbolique nécessiterait sinon un autre système de coordonnées que les cartésiennes [6]. Un ensemble de fonctions est nécessaire pour calculer à chaque instant les transformations à appliquer à chaque point de l'espace. En particulier, nous verrons l'hyperboloïde, support de calculs en interne, comme un objet reposant dans l'espace de Minkowski [3] et nous utiliserons les transformées de Lorentz [5] pour en déduire les isométries de l'espace d'étude. Enfin, Kopczyński, Celińska, et Čtrnáct indiquent que les propriétés principales de la géométrie hyperbolique utilisables en jeu sont l'holonomie, la taille de l'espace à distance donnée et la multiplicité des droites parallèles [3]. Dès lors, Kopczyński montre que le jeu de démineur dans le plan hyperbolique est donc dans P grâce à ces propriétés, là où sa variante la plus classique, est NP-Complet [7].

Problématique retenue

Comment la géométrie hyperbolique peut-elle tromper l'intuition géométrique, et peut-on construire un jeu qui défie cette intuition ?

Objectifs du TIPE du candidat

Construire un moteur de jeu généraliste avec SDL2

Produire un ensemble de fonctions pour créer un monde hyperbolique

Utiliser ces outils pour construire un jeu répondant à notre problématique

Références bibliographiques (ÉTAPE 1)

[1] ZENOROGUE : Site du jeu HyperRogue *: https://roguetemple.com/z/dev.php (Version du 20 Janvier 2024)*

[2] SZIRMAY-KALOS, L., MAGDICS, M. : Adapting Game Engines to Curved Spaces *: The Visual Computer (2022), https://doi.org/10.1007/s00371-021-02303-2*

[3] KOPCZYŃSKI, E., CELIŃSKA, D., ČTRNÁCT, M. : HyperRogue: Playing with Hyperbolic Geometry *: Bridges 2017 Conference Proceedings, https://www.researchgate.net /publication/336702574_ HyperRogue_ Playing_ with_ Hyperbolic_ Geometry*

[4] CELIŃSKA-KOPCZYŃSKA, D., KOPCZYŃSKI, E. : Generating Tree Structures for Hyperbolic Tesselations *: arXiv:2111.12040, https://doi.org/10.48550/arXiv.2111.12040*

[5] ROVELLI, C. : General Relativity : The Essentials *: ISBN : 9781009031806*

[6] COSTA, S. S. E : A Description of Several Coordinate Systems for Hyperbolic Spaces *: https://doi.org/10.48550/arXiv.math-ph/0112039*

[7] KOPCZYŃSKI, E. : Hyperbolic Minesweeper is in P *: https://doi.org/10.48550/arXiv. 2002.09534*

[8] DAHAN-DALMEDICO, A., PEIFFER, J. : Une Histoire des Mathématiques : Routes et Dédales *: ISBN : 9782020091381*