PRML에서 Naive bayes 와 Logistic regression에 대해 공부하였는데 이 둘의 관계에 대해 간단히 정리해보고자 한다. (문일철 교수님의 강의에 대해 정리하였습니다.)

- 몇 가지 가정(constraint)가 더해지면 Naive bayes와 Logistic regression이 같아진다.

Gaussian Naive Bayes

Naive Bayes에 대해서는 이전에 공부하였다. 이번에는 거기에 조금 더 추가하여 각 conditional distribution들이 Gaussian distribution이라고 가정해보자.

$$f_{NB} = argmax_{Y=y} P(Y=y) \prod_{i=1}^{D} P(X_i = x_i | Y = y)$$

$$P(Y=k) = \pi_k$$

$$P(X_i = x_i | Y = y) = \frac{1}{c\sigma_k^i} exp(-\frac{1}{2}(\frac{x_i - \mu_k^i}{\sigma_k^i})^2)$$

이제 Naive bayes classifier이 Logistic regression의 형태가 되는 과정을 살펴볼 것이다.

- Logistic regression : $P(Y=k/X)$
- Naive Bayes : $\frac{P(X/Y=k)P(Y=k)}{P(X)}$
  - generative 방법의 Naive bayes로 부터 Discriminative한 Logistic regression으로 가보자

$$= \frac{p(Y=k)\prod_{i=1}^{D} P(X_i|Y=y)}{p(Y=k)\prod_{i=1}^{D} P(X_i|Y=k) + p(Y=k^C)\prod_{i=1}^{D} P(X_i|Y=k^C)}$$
$$= 1/[1 + \frac{\pi_2 \prod \frac{1}{c\sigma_{not\ k}^i} exp(-\frac{1}{2}(\frac{x_i - \mu_{not\ k}^i}{\sigma_{not\ k}^i})^2)}{\pi_1 \prod \frac{1}{c\sigma_k^i} exp(-\frac{1}{2}(\frac{x_i - \mu_k^i}{\sigma_k^i})^2)}]$$

여기서 $\sigma_{not\ k} = \sigma_k = \sigma$라고 가정하면

$$= 1/[1 + \frac{\pi_2 \prod exp(-\frac{1}{2}(\frac{x_i - \mu_{not\ k}^i}{\sigma^i})^2)}{\pi_1 \prod exp(-\frac{1}{2}(\frac{x_i - \mu_k^i}{\sigma^i})^2)}]$$
$$= 1/[1 + exp(-\frac{1}{2{\sigma^i}^2}\sum\{2(\mu_{not\ k}^i - \mu_k^i)x_i + {\mu_{not\ k}^i}^2 - {\mu_k^i}^2 + log\pi_2 - log\pi_1\}]$$

최종식을 보면 sigmoid function에 $w^T x$가 들어가있는 형태이다. 즉, Logistic regression이 되는 것이다.

- Naive Bayes의 conditional independent 가정
- conditional한 상황에서 각 feature들이 Gaussian이고 분산이 같다는 가정