Chap 2. Vector Space

미지수보다 식의 갯수가 많은 경우, solution이 무한한 경우가 생긴다. 이를 표현하기 위해 vetor space라는 개념이 필요하고 이를 배워보자.

Vector space

space

set closed under addition & scalar multiplication

Vector space

any vector $\vec{x}, \vec{y} \in R^n$, any scalar $c \in R^n$ 일 때

1. $\vec{x}, \vec{y} \in V$
2. $\vec{x} + \vec{y} \in V$
3. $c\vec{x} \in V$

위의 3가지 조건을 만족하면 V를 vector space라고 한다.
vetor space는 무조건 영벡터를 포함한다. vector 집합에 영벡터가 없으면 vector space가 될 수 없다.

Subspace

subset of the whole vector space that satisfies the conditions of vector space

eg) Lower traianluar matrix in R^{n^2}
L_{n*n} 를 linear combination을 해도 lower triangular matrix 이기 때문에 L_{n*n}은 R^{n^2}의 subspace이다.

- 행렬도 결국 vector와 똑같이 생각할 수 있다고 한다. (잘 이해는 안됨)
  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in R^{2*2}$ 이 행렬은 $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$와 같은 의미라고 한다.

Column space of A : C(A)

set of all linear combination from columns vector

- $A\vec{x} = \vec{b}$에서 $\vec{b} \in C(A)$이면 최소 하나의 해를 갖는다.
- 또한, $A\vec{x} = \vec{b}$에서 A의 역행렬이 존재하면 $C(A)$는 whole space가 된다. A의 역행렬이 존재한다는 의미는 결국 $\vec{b}$가 어떤 vector가 되더라도 해를 가진다는 의미이다. 이는 결국 A의 columns vector의 linear combination으로 모든 vector를 만들수 있게되어 $C(A)$는 해당 차원의 whole space가 된다.

Null space of A : N(A)

set of vectors such that $A\vec{x} = \vec{0}$

- $N(A) = \left\{x | A\vec{x} = \vec{0}\right\}$

1. closed under addition ?
   : for $A\vec{x_1} = \vec{0}$, $A\vec{x_2} = \vec{0}$, $\vec{x_1} + \vec{x_2} \in N(A)$

: $A(\vec{x_1}+\vec{x_2})=\vec{0}$, $A\vec{x_1}+A\vec{x_2}=\vec{0}$ so, YES!

2. closed under scalar multiplication?
   : $\vec{x} \in N(A)$
   : $A(c\vec{x})=cA\vec{x}$ so, YES!

Solutions $A\vec{x}=\vec{0}$

이전에는 GE으로 n*n행렬, 정사각행렬에 대해서 다루었다. 이 경우에는 하나의 해, 무한의 해, 해가 없음 3가지 경우가 존재했다. 이제 정사각행렬이 아니라 직사각행렬에 대해서 살펴보고자 한다. 그 중 '식의수 < 미지수의 수' 의 경우에 대해 볼 것이고 이는 무한의 해, 해가 없음 두 가지 경우가 생긴다. 이 때, 해를 구하는 법에 대해 살펴보자.

- Echeolon form U

$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 3 & 2\\ 2 & 6 & 9 & 7\\ -1 & -3 & 3 & 4\end{bmatrix}$, $A\vec{x}=\vec{0}$에서 $\vec{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}$를 구하는 과정을 보자. 이전과 다르게 직사각행렬이고 3*4 행렬이다. 이전과 같이 GE의 방법으로 하면 되고 오른쪽 행렬은 영벡터이기 때문에 함께 쓰지는 않겠다.

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 3 & 2\\ 2 & 6 & 9 & 7\\ -1 & -3 & 3 & 4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

위 행렬의 형태를 echelon form 이라고 하고 주로 U라고 쓴다.

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

pivot=1 을 만들고 pivot이 있는 columns에서 나머지 원소들은 0으로 만든다. 위 행렬과 같은 형태를 row reduced form이라고 하고 주로 R이라고 쓴다.
그러면 결국 pivot variable : x_1, x_3, free variable : x_2, x_4 이고 $x_1=-3x_2+x_4$, $x_3=-x_4$이다. 이를 vector로 표현하면

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=x_2\begin{bmatrix}-3\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\\ 1\end{bmatrix}$$

그래서 결국 해를 구할 때, row reduced form을 만들고 이를 vector의 linear combination 형태로 표현할 수 있다.

Dimension of vector space

number of independent vectors
예를 들어, 위에서 구한 N(A)의 차원은 2 이다 : $dim(N(A))=2$

Solutions of $A\vec{x}=\vec{b}$ (b is not 0)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

위의 과정처럼 GE을 하면

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

이런 형태가 나오고 이를 vector combination으로 표현하면

$$x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

의 결과를 얻을 수 있다. 위의 vector combination은 두 부분으로 나눠서 생각할 수 있는데 앞의 두 vector는 이전에 구한 $N(A)$와 동일하다. 즉, $A\vec{x} = \vec{b}$의 해는 $A\vec{x} = \vec{0}$의 해를 평행이동한 값이다. $A\vec{x} = \vec{b}$의 해는 $N(A)$에 특정 vector $\vec{X_p}$를 더한 결과이다. $A\vec{x} = \vec{b}$의 해를 구하는 방법은 간단하다. $A\vec{x} = \vec{0}$의 해를 구하고 pivot 위치에 있는 오른쪽의 수를 그대로 쓰면 된다. 즉 , 위에서 보면 pivot값이 1번째, 3번째 위치에 있다. 이에 해당하는 위치에 -2, 1을 넣고 나머지는 0을 넣으면 $\vec{X_p}$ vector가 완성되는 것이다.

Linear independent

$c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} + ... + c_n\vec{v_n} = \vec{0}$을 만족하는 c가 only $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$ 인 경우 vector $\vec{v_i}$들이 linear independent하다고 한다.

- if GE of A generates m non-zero rows -> m개의 independent columns vector가 존재한다 in A

Span

all linear combination of vectors로 생각할 수 있으 vectors가 어떤 vector space를 이루고 있을 때, 그 vectors가 그 vector space를 span 한다고 한다. span은 명사가 아니라 동사 같은 의미라고 이해하면 될 것 같다.

Rank of A : rank(A)

= # of independent column vector
= # of independent row vector
= # of independent pivot in GE
= dim of C(A)
eg) A의 col vector가 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 라고 하면 vector들은 3차원이지만 이들로 만들 수 있는 것은 x, y 평면이다. 즉, 2차원의 평면을 만들수 밖에 없다. 따라서 $rank(A) = 2 = dim(C(A))$

Basis(vectors)

어떤 vector space를 span하기 위한 최소의 vector 집합으로 basis의 vector들은 linear independent하다.

- 어떤 vector space의 Basis는 unique하지 않다.
- 하지만 Basis로 특정 vector를 만들 때, combination은 unique하다.

4 fundamental subspace of A_{m*n}

1. Column space : $C(A) \in R^m$
2. Null space : $N(A) \in R^n$
3. Row space : $C(A^T) \in R^n$
4. Left Null space : $N(A^T) \in R^m$

- about dim
  $dim(C(A)) + dim(N(A^T)) = m$
  $dim(N(A)) + dim(C(A^T)) = n$

아울러 $C(A), N(A^T)$의 vector들은 서로 수직이다. (직접 손으로 하면 이해될것) 물론 $N(A), C(A^T)$도 마찬가지이다.

Existence of inverse

1. square case
   $AA^{-1} = I, A^{-1}A = I$
2. $A_{m*n}, m < n$
   $AA^{-1} = I$: right inverse
3. A_{m*n} , $m < n$: left inverse
   $A^{-1}A = I$: left inverse

Linear transformation (선형변환)

$T : R^n -> R^m$, 즉 $T(\vec{x}) = \vec{b}$의 의미는 input vector x를 linear transformation하여 output vector b를 만들어내는 것이다.

- 행렬과 벡터의 곱은 항상 linear transformation이다. 행렬 A 라고 하면

$$A(\vec{a} + \vec{b}) = A\vec{a} + A\vec{b}$$

$$A(c\vec{a}) = cA(\vec{a})$$

- 모든 linear transformation은 행렬과 벡터의 곱으로 표현할 수 있다.

항등행렬 $I = [\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}]_{n*n}$(여기서 $\vec{e_i}$는 항등행렬의 column vector) , $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)^T$ 라고 하면 $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + ... + x_n\vec{e}_n$ 이고 $T(\vec{x}) = x_1T(\vec{e}_1) + ... + x_nT(\vec{e}_n)$이다. 결국

$$T(\vec{x}) = [T(\vec{e}_1)\ T(\vec{e}_2)\ ...\ T(\vec{e}_n)] \begin{bmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix}$$

임을 알 수 있다. 위 과정을 통해 우리는 모든 linear transformation은 행렬과 벡터의 곱으로 표현할 수 있음을 알 수 있다. $T(\vec{x}) = A\vec{x}$인 것이다.

- how to get A?

위의 방법을 이용하면 된다. Elementary basis 의 vector들의 linear transformation의 결과를 알고 있다면 바로 A를 구할 수 있다.

eg) $\vec{x_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{x_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 에서 $A\vec{x_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$, $A\vec{x_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$ 이면 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ 이다.