chap4. Determinants

: for n*n square matrix

(1) A^{-1} exists iff det(A) is not 0

(2) det(A) equals volums of a box in R^n

(3) A에서 pivoting 하면 부호가 바뀐다.

(4) Crammer's rule
$A\vec{x} = \vec{b}, x_i = \frac{det(A)_i}{det(A)}$
where $A_i = [\vec{a}_1\ \vec{a}_2 ... \vec{a}_{i-1}\ b\ \vec{a}_{i+1}\ ...\ \vec{a}_n]$

properties of Determinants

- 3 basic

(1) $det(I) = 1$

(2) $det(A)$ changes the sign when two rows are interchanged

(3) $det(A)$ depends linearly on the firsts row

$$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$$

- additional by (1)~(3)

(4) if two rows are equal then $det(A) = 0$
$det(A) = -det(A')$ 여기서 A'은 똑같은 row끼리 row exchage한 경우, 근데 똑같은 row끼리 바꿔도 행렬은 그대로 이므로 $det(A) = det(A') = 0$

(5) row operation do not change the Determinants
GE 처럼 row operation을 하여도 det는 똑같은 결과를 낸다.

(6) if A has a zero-row, $det(A) = 0$

(7) if A is triangular, $det(A)$ = product of diagonal entries
GE하면 대각행렬로 만들수 있고 대각행렬의 det는 대각선 값들의 곱

(8) singular means $det(A) = 0$, 이는 역행렬이 존재 하지 않음을 의미

(9) $det(AB) = det(A)det(B)$

(10) $det(A^T) = det(A)$

formula

Determinants를 구하는 공식에 대해 살펴보자. 위에서 설명한 내용들을 이용하여 det를 쉽게 구하는 방법은 상당히 다양하다.

(1) $det(A)$ = product of all pivots from GE (not pivoting)

proof) $A = LDU, det(A) = det(L)det(D)det(U)$ 이다. $det(L) = 1$, $det(D) =$대각성분의 곱(pivot들의 곱), $det(U) = 1$

GE에서 pivoting을 하면 pivoting을 할 때마다 부호를 반대로 하면 된다. 즉, (-1)을 곱한다는 의미이다. 이 방법이 간단해보인다.

(2) $det(A) = \sum_{j=1}^{n} \vec{a}_{ij}(-1)^{i+j}det(M_{ij})$
(원하는 i행 선택)
위 식에서 M_{ij}가 의미하는 것은 아래와 같은 행렬 A에서 i행과 j열을 지우고 나머지 부분으로 이루어진 행렬(cofactor)을 의미한다.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$$