- 이상화 교수님 선형대수 , khan academy 개인공부 내용 정리(not 친절 정리)
- khan에서는 벡터의 개념부터 시작하여 상당히 개념설명이 좋다. 하지만 분해와 관련한 내용이 부족하기에 이상화 교수님의 선형대수 강의를 추가로 수강하였다.
- 아래의 내용들은 이상화 교수님의 수업을 혼자 공부하며 정리한 내용이다. 학교에서 수업을 듣고 좋은 성적을 받았지만 5년 전이라 기억이 가물가물해서 다시 선형대수를 공부하고자 마음 먹었다.

Chap1. Gauss Elimination

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

위 행렬식에서 x, y의 값을 구하기 위해서는 역행렬을 곱하면 된다(우리가 이전까지 주로 알고 있던). 이런 형태에서 기하학적인 측면에서는 두 직선의 교점이라고 생각할 수 있다. 하지만 이제는 column vetor의 linear combination이라는 개념도 생각해야된다.

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

- singular case

1. no solution
2. infinite solution

Gauss elimination

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

이런 방정식이 있다고 하자. 이를 가우스 소거법으로 푸는 방법은 일반적인 연립방정식을 푸는 방법과 동일하다. 다만, 행렬의 모습으로 해결한다. 각 row들을 사칙연산을 통해 아래와 같이 만들어주면 되는 것이다. 아래처럼 U 모양으로 만들어주고 이런 형태의 행렬을 upper triangle U matrix라고 부른다.

<연산 과정>

1. 2th row - 2 * 1th row = 2th row'
2. 3th row + 1 * 1th row = 3th row'
3. 3th row + 1 * 2th row = 3th row''

<결과>

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -12 \\ 2 \end{bmatrix}$$

위에서 각 row들의 첫번째 요소를 pivot이라고 부른다. pivot이 non-zero 인 경우에만 해를 구할 수 있다. 변수의 갯수와 식의 갯수가 같은 경우는 사실 간단하다. 우리는 뒤에 같지 않은 경우에 대해 공부를 할 것이고 이를 표현하기 위해 columns vector의 표현에 익숙해져야 한다.

Gauss elimination을 행렬로 표현

위에서 배운 가우스소거법의 과정을 행렬로 표현해보자.

<연산과정>

1. 2th row - 2 * 1th row : E_{21} matrix를 곱한다 (2 row 1column : 21)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

2. 3th row + 1 * 1th row : E_{31} matrix를 곱한다

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ +1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

3. 3th row +1 * 2th row : E_{32} matrix를 곱한다

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & +1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 8 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

이처럼 행렬곱으로 gauss elimination를 표현할 수 있다.

$$E_{32}E_{31}E_{21}A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Elementary matrix in gauss elimination

일반화하여 생각해보자. 위 연산과정에서

$E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -l_{21} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 을 곱해서 gauss elimination을 하면

$$2th\ row - l_{21} * 1th\ row = 2th\ row'$$

이 되고 이를 이용하면

$$2th\ row = 2th\ row' + l_{21} * 1th\ row$$

으로 표현 할 수 있다. 따라서 E_{21}의 역행렬은 $E_{21}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 이 됨을 알 수 있다. 그러면 $E_{32}E_{31}E_{21}A = U$에서

$$A = E_{21}^{-1}E_{31}^{-1}E_{32}^{-1}U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ l_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & l_{32} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} U = LU$$

여기서 L을 lower triangle matrix라고 하며 이 행렬에는 gauss elimination의 모든 정보가 들어 있다고 할 수 있다.

- Triangluar factors

$A = LU$: 이를 LU factorization(decomposition)이라고 한다. LU 분해는 unique하다. 그리고 U는 아래와 같이 대각행렬로 더 분해할 수 있다.

$$U = \begin{bmatrix} d_1 & x_{12} & ... & x_{1n} \\ 0 & d_2 & ... & x_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & d_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{x_{12}}{d_1} & ... & \frac{x_{1n}}{d_1} \\ 0 & 1 & ... & \frac{x_{2n}}{d_2} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & 1 \end{bmatrix} = LDU$$

- Row exchange(pivoting)

pivoting이라고 불리는 것으로 우리가 위에서 gauss elimination을 할 때, row의 순서를 바꿔야하는 경우가 생긴다. (A를 U모양으로 만드는 과정에서) 이 또한, 행렬로 표현할 수 있는데 Permutation matrix P로 표현한다. P는 항등행렬 I와 같은 row들을 가졌으며 바꾸길 원하는 row를 I에서 바꾼 모습을 취한다. 예를 들어,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

따라서 행렬A를 gauss elimination하려고 할 때, pivoting이 필요하면 $PA = LU$이고 따라서 $A = P^{-1}LU$이다. $P^{-1} = P^T$의 특징을 지닌다.

- Inverse

1. the inverse exists if gauss elimination produces n pivots, all pivots are non-zero
2. the inverse is unique
3. if A^{-1} exists, $A\vec{x} = \vec{b}$ 일 때 $\vec{x}$ is unique
4. assume that there is a non-zero vector x such that $A\vec{x} = \vec{0}$ then, A^{-1} does not exists
5. $det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A^{-1}$ exist
6. diagonal matrix의 역행렬은 대각성분들의 역수를 대각성분으로 가지는 행렬
7. inverse comes in the reverse order. $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

- inverse matrix 구하는 법 : Gauss-Jordan method

이전에 했던 GE의 방법을 그대로 사용하면 된다. 오른쪽에 항등행렬 I, 왼쪽에 A를 놓고 GE의 과정을 그대로 하면 된다. A를 U로 만들고 다시 I로 만드는 과정!

$$AA^{-1} = I$$

$$UA^{-1} = L^{-1}$$

$$A^{-1} = U^{-1}L^{-1}$$

- Transpose

row가 column이 되고 column이 row가 된다.

- Symmetric

$A^T = A$, A가 Symmetric하면 A^{-1}도 Symmetric

- Correlation
  $R = A^T A$