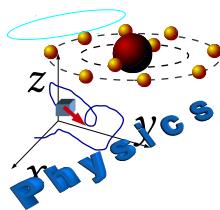


# 物理学ノート 2nd

Min Spark (X)

2024 年 1 月 2 日 更新

(2010 年 8 月 より作製開始)





## このノートについて

### \$1 作成方法

このノートの作成には **p<sup>E</sup>TeX 2ε** を使用させて頂きました。

### \$2 作成動機

このノートを作ることにしたのは、将来の自分のためです。おそらく、今学習している『物理学』の内容を忘れてしまっていると思うので、その記録をしておこうというものです。

### \$3 内容についての重要な注意

このノートの内容は教科書を読んだ直後に書いたものなので、教科書の内容そのままである部分が大半です。つまり、私のオリジナルではなく、様々な教科書をつぎはぎしたもので。しかし、(一部の引用を除いて)教科書の丸写しではなく、私なりにその内容を解釈して記述していますので、その教科書の内容の正確さが失われる可能性があります。何か変な点、矛盾する箇所等があった場合は、すぐにその内容を修正するようにして下さい。

### \$4 言い訳

物理学は教科書がたくさんあり、また、趣味で物理学をなさっていて Website を開いている方々も多いです。このノートの内容はほとんどが教科書や Web によるものです。しかしそれでも、人から聞いたり本で読んだりした知識ではありますが、その知識を自分なりにノートという形でまとめることで自分の中で再定式化できれば、新しいものの見方を発見できるかもしれないと思い本ノートの作成を続けています。

### \$5 補足

このノートは物理学の理論だけを記述しており、その具体的なことは書いていないことが多いです。具体例を考えることで、その法則の意味をより深く理解することができますが、具体例は割愛しています。しかし、書かないからといって、重要でないということでは決してありません。具体的な問題を演習することは、例えば、定義された物理量の直感的な把握や、大体の大きさの見当をつけるのに役に立ちます。また、複数の法則の結びつきを感じ取ることもできます。従って、具体例は必ず演習書等を用いて、考えなければいけません。理論だけ読んでいても、本当にその理論が現実と一致するかどうかは、多くの場合、演習を通してしか確認できません。学校や科学館などでもない限り、実験して確かめるということは難しいことが多いのです。まあ、理論を読んで満足ができるわけがないことは当たり前なのですが(法則の現実性を“実感”しない限り、その法則は私にとって、確かなものではないから)，演習をおろそかにしがちな自分に注意するために、ここに書いておきました。

## \$6 挿入図について

図の多くは、寺嶋容明さんの作られた「EPS-draw」を用いて、私が作図したものです。また、LibreOffice の Draw で作図したものもあります。グラフの作成は、Perl や Python により数値計算をして、LibreOffice の calc で図式化しています。gnuplot で書いたところもあります。曲面の作成にはフリーの数式処理ソフト maxima を使って作成しているところもあります。

## \$7 内容を鵜呑みにしないで下さい

このノートはド素人が書いたものであり、正確である保証はありません。むしろ、間違っている所があることは確実でしょう。特に、計算ミスに不安を感じます。見つけ次第、訂正していきます。

## \$8 これはノートです

このノートは教科書風の体裁を取っていますが、あくまでも学習ノートです。従って、項目の配置は論理的ではありません。メモ書き程度のものです。

## \$9 記載順

物理学の内容を学習する目的で、このノートをはじめから読もうとしても、その内容に行き着くまでは時間がかかることがあります。数学の学習と物理学の考え方などが、物理学の前提知識として、先立って説明されているからです。なので、そういう読み方をしてしまうと、挫折してしまうでしょう。このノートの使い方として、まずは目次を見て、参照したい部分を見つけて読む、という方法が良いと思います。

## \$10 記述精神

できるだけ、詳しく書こうと思います。式変形も省略なしにしたいです。さらにできることなら、将来、このノートを参考に、理解した物理学を論理的に自身の中で再構成した文書を作りたいです。

## \$11 脚注の多さについて

ノートを記載していた時の心境を脚注に書いておく。あとで、なんでそのような記述をしたかを思い起こすヒントになるはず。脚注が多すぎて読みにくくなってしまうが、ノートなのでいくら汚く書いても OK したい。

## \$12 願望

私は、物理学を“習得”しようとは考えていません。私にとって物理学の学習は趣味です。物理学を勉強する理由は、それを使えるようにするためではなく、物理法則を知りたいからで

す。自然はどのように成立しているのか。自分なりに、物理学を実感したいのです。ですので、このノートは単に物理学の表面しか、記述していません<sup>►1)</sup>。

このノートを書くことが生涯の趣味になることを期待しています。

以下、文の読みやすさと文字数のことを考えて、丁寧語による記述をやめます。

---

<sup>►1)</sup> 1) もしかしたら、表面もすらも記述していないかも知れない、という不安があります。

## このノートで使用する記号

このノートで使用する記号について、以下に示しておく。ノートを読んでいて分からくなつた記号があつたら、これを参考にしてもらいたい。もちろん、用語については本文を参照すること。

複数の意味で使われる記号がいくつもあるが、それらについてはスラッシュ / で区切りをいれた。

### アルファベット（太字：大文字）

- $E$  : 電場
- $A$  : ベクトルポテンシャル
- $B$  : 磁束密度
- $I$  : 電流
- $D$  : 電束密度
- $H$  : 磁場
- $P$  : 誘電分極
- $L$  : 角運動量
- $N$  : 回転力（トルク）
- $F$  : 力（合成力）
- $M$  : 磁化

### アルファベット（太字：小文字）

- $r$  : 位置,  $(x, y, z)$  と同じ。
- $v$  : 速度,  $(v_x, v_y, v_z)$  と同じ
- $a$  : 加速度,  $(a_x, a_y, a_z)$  と同じ
- $p$  : 運動量,  $(p_x, p_y, p_z)$  と同じ
- $i$  : 電流密度,  $(i_x, i_y, i_z)$  と同じ
- $f$  : 分解された力

---

アルファベット（細字：大文字）

- $G$  : 万有引力定数、または、重力定数
- $U$  : ポテンシャルエネルギー
- $T$  : 運動エネルギー/張力
- $E$  : 全エネルギー/電場の大きさ
- $U$  : ポテンシャル/内部エネルギー
- $L$  : 角運動量/ラグランジアン
- $I$  : 力積/電流の大きさ
- $S$  : 面積/任意の閉曲面
- $V$  : 体積
- $O$  : 原点
- $H$  : ハミルトニアン/磁場の大きさ

アルファベット（細字：小文字）

- $l$  : 長さ/任意の閉曲線
- $m$  : 質量（慣性質量と重力質量）

アルファベット（添字付き）

- $m_i$  : 慣性質量
- $m_g$  : 重力質量
- $S_l$  : 任意の閉曲線  $l$  を縁とする曲面
- $k_B$  : ボルツマン定数

アルファベット（立細字：大文字）

- $K$  : 任意の慣性系
- $K'$  :  $K$  とは別の任意の慣性系

花文字

- $\mathcal{L}$  : ラグランジアン密度
- $\mathcal{H}$  : 量子論ハミルトニアン演算子
- $\mathcal{F}$  : 一般化された力
- $\mathcal{E}$  : 起電力

ギリシア文字（大文字）

- $\Sigma$  : 総和の記号
- $\Omega$  : 任意の領域の内部

**ギリシア文字（小文字）**

- $\gamma$  : ローレンツ因子  
 $\nu$  : 周波数  
 $\rho$  : 電荷密度/電気抵抗率  
 $\sigma$  : 電気伝導率  
 $\phi$  : 電気的なポテンシャルエネルギー

**ギリシア文字（添字付き）**

- $\Omega_S$  : 任意の閉曲面の内側の領域

**数式記号の意味**

$A$ ,  $B$  は一般の（特に意味を与えない）ベクトルであるとする。 $r$  は位置ベクトル,  $t$  は線素ベクトル,  $S$  は面素ベクトルとする。また,  $f(x)$  は  $x$  を独立変数とする一次関数であり,  $f(x, y, \dots)$  は  $(x, y, \dots)$  を独立変数とする多変数関数である。

- |                                              |                     |
|----------------------------------------------|---------------------|
| $A \perp B$                                  | : $A$ は $B$ に 垂直    |
| $A \parallel B$                              | : $A$ は $B$ に 平行    |
| $A_{\perp B}$                                | : $A$ の $B$ に 垂直な成分 |
| $A_{\parallel B}$                            | : $A$ の $B$ に 平行な成分 |
| $\int f(x) dx$                               | : 積分                |
| $\oint f(r) \cdot dt$                        | : 線積分               |
| $\iint f(r) \cdot dS$                        | : 面積分               |
| $\iiint f(r) dV$                             | : 体積積分              |
| $df$                                         | : 微分/全微分            |
| $\frac{d}{dx} f(x)$                          | : 導関数               |
| $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, \dots)$ | : 偏微分               |

---

行内に書く場合の演算子の形

$ab/cd$	: $\frac{ab}{cd}$ を文中で記す場合.
$(a/b)(c/d)$	: $\frac{a}{b} \frac{c}{d}$ を文中で記す場合.
$\sum_{n=1}^N$	: $\sum_{n=1}^N$ を文中で記す場合.
$\prod_{n=1}^N$	: $\prod_{n=1}^N$ を文中で記す場合.
$\bigcup_{n=1}^N$	: $\bigcup_{n=1}^N$ を文中で記す場合.
$\int$	: $\int$ を文中で記す場合.
$\iint$	: $\iint$ を文中で記す場合.
$\iiint$	: $\iiint$ を文中で記す場合.

## 記述する内容（予定）

学習の内容（予定）は、以下の通りである。

### 第1部「古典力学」

古典力学とは、ニュートン力学と解析力学の総称である。第1章のニュートン力学では、物体の運動法則とその記述方法、推論方法を学ぶ。第2章の解析力学は、ニュートン力学を数学的に整理したものである。

### 第2部「電磁気学」

電磁気学は、その名の通り、電気と磁気に関する学問である。電気と磁気の関係は深い。このことについて学習する。

### 第3部「特殊相対性理論」

自分が光の速さで動けるとしよう。このとき、どのような世界が待っているだろうか。

### 第4部「熱・統計物理学」

熱とは何か。熱をどのように捉えるべきか。

### 第5部「量子力学」

原子のスケール( $10^{-10}[\text{m}]$ )で物理法則を考えると、古典力学では扱えない現象が生じる。原子レベルの世界の物理法則をここで確認する。

### 第6部「一般相対性理論」

特殊相対性理論では慣性系を仮定しているが、実際は重力の存在のために、完全な慣性系は存在しない。重力の存在する場を扱う理論。

なお、参考にした教科書等については、このノートの最後にまとめて書いておく。

## 記述方法についての諸注意

**コメント** ノートの記述に先立つて、数式の記述についていくつか注意しておきたい。意味が分からなければ、先に進んでも構わないが、この部分に数式表現の注意があることは覚えておいてもらいたい（必要な場合に、ここを参照できるように）。

### (1) 括弧の扱いについて

このノートでは、多くの教科書と同様に、関数の独立変数を表す括弧「例: $\phi(x)$ 」と式中の括弧「例: $a(b + c)$ 」は同一のものを使用している。

しかし、この表記は、ときには、誤解をまねく。というのも、例えば、関数  $\phi(x)$  と  $a + b$  の積を記述する場合、

$$\phi(x)(a + b)$$

と書く。これは見方によっては、実数  $\phi$ ,  $x$ ,  $a + b$  の積であると解釈することもできる。まあ、この場合は  $x$  が 1 つであることから、「 $x$  は関数  $\phi$  の独立変数であり、 $\phi(x)$  は関数を表すのだな」と読まれることだろう。しかし、上の独立変数  $x$  に定数  $a + b$  を代入することには、曖昧にな記述になってしまう。つまり、

$$\phi(a + b)(c + d)$$

これは、著者の意図としては、「関数  $\phi$  の独立変数  $x$  に、 $a + b$  を代入したものと、実数  $c + d$  の積」を表現したつもりだろう。しかし、読者が分からしてみれば、単に式を見ただけでは、「3 つの実数  $\phi$ ,  $a + b$ ,  $c + d$  の積」と解釈するのが妥当である。もちろん、著者は、このような式を記述する前後で、文字の意味に対する説明を行っているので、通常なら、誤解されることはない。しかしながら、意味が曖昧な式であることには変わりはない。それゆえに、何かストレスを感じてしまう。

ちなみに、「関数  $\phi$  の独立変数  $x$  に、 $a + b$  を代入したものと、実数  $c + d$  の積」を表現したい場合には、

$$\phi(a + b) \cdot (c + d) \quad , \text{あるいは}, \quad (c + d)\phi(a + b)$$

などと書かき、区別を強調するかもしれない。何れにしても、教科書に記述されていることを理解するのは読者の仕事であり、臨機応変に適切に読み込まなければいけない。それでも尚、複数の意味として捉えられてしまうようであれば、もしそれが重要

な部分であると感じるなら、著者に直接質問すべきだ。しかし、著者と直接対話できることは容易ではなく、また、趣味で物理学を学んでいるので実害はなく、直接質問することを躊躇してしまうことだと思う。そういった場合は、手っ取り早い方法として、他の著作も参照して見ることである。大概の場合は、この方法で解決することだろう。

## (2) 積分記号

おそらく、一般的な積分の表現は、

$$\int f(x) dx$$

のように、関数  $f(x)$  をインテグラル  $\int$  と微分記号  $dx$  で囲んだ形だろう。このノートでも、積分を表す記述方法として、上記を採用する。

しかし、別の表記方法を採用している教科書も多い。次のような書き方がされることがあるのだ。

$$\int dx f(x).$$

この書き方は、演算子 という考え方をもとにした表現方法である。

演算子とは何かを、考えてみよう。微分を例にとろう。関数  $f(x)$  を  $x$  で微分することを、次のように表現する。

$$\frac{df(x)}{dx}.$$

上の表現とは別に、教科書には次のようにも表現されることが、書かれている<sup>2)</sup>。

$$\frac{d}{dx} f(x).$$

微分は、関数  $f(x)$  に対するひとつの操作である。具体的に見てみよう。例えば、 $f(x) = x^2$  であれば、 $f(x)$  を微分した結果  $f'(x)$  は  $2x$  となる。 $f(x) = x^5$  であれば、 $f'(x) = 5x^4$  だし、 $f(x) = \sin x$  だったら、 $f'(x) = \cos x$  である。こうしてみると、微分するということは、元となる関数  $f(x)$  に対して、「微分するという操作」を与えることで、あたらな関数（導関数： $f'(x)$ ）を作り出していると、捉え直すことができ

---

<sup>2)</sup> 微積分の教科書であれば、どのようなものでも記述されている。もっと強い言い方をすれば、この記述を紹介していないものは、微積分の教科書とは言えない。

る。こう考えた場合、上に書いた記号で、 $d/dx$  の部分と、 $f(x)$  の部分に分けてみて、「 $x$  に関する微分するという操作  $d/dx$  を、関数  $f(x)$  に対して行う」と読むことで、 $d/dx$  に、「 $x$  に関する微分する」という意味を与えることができる。つまり、以下の記号

$$\frac{d}{dx}$$

が、微分の操作を象徴する記号になる。 $d/dx$  は、関数  $f(x)$  に対して微分するという作用をほどこすことから、微分作用素 とよばれる。

積分に関しても、微分と同様に考えて、一般的な記号  $\int f(x) dx$  を書き換えて、

$$\int dx f(x)$$

とすることにより、積分という操作  $\int dx$  を、関数  $f(x)$  に関して行う、といった意味を強調できる。

### (3) 三角関数の表現

ここで上げる問題は、上記の括弧の使い方に関するものだが、三角関数に関する括弧の扱いについて、誤解を生みやすいので、ここで特別に取り上げることとする。

三角関数は、 $\sin x$  のように記述される。 $x$  は位相とよばれ、この関数の独立変数をなっている。問題は、この位相  $x$  の書き方である。例えば、物理学では、位相として、角周波数  $\omega$  と時間  $t$  の積  $\omega t$  が使われることが多い。つまり、 $x = \omega t$  として、

$$\sin \omega t$$

と記述されることがある。ここまででは、特に問題がない。しかし、例えば、 $\omega = \omega_0 + \omega_1$  というような場合、上式は

$$\sin(\omega_0 + \omega_1)t$$

と書かれる。さて、この式はどう見えるだろうか。一般的な解釈では、位相が  $(\omega_0 + \omega_1)t$  の  $\sin$  関数だろう。しかし、式だけを見る限り、 $\sin(\omega_0 + \omega_1)$  と時間  $t$  の積であるようにも、解釈ができる。つまり、

$$\{\sin(\omega_0 + \omega_1)\} \cdot t$$

のようにも見えてしまうのである。しかし、このように見てしまうのは、暗黙の了解を知らないものだけである。三角関数を記述するまでの暗黙の了解とは、 $\sin$  の直後

に記述されるものが位相である、ということである。つまり、

$$\{\sin(\omega_0 + \omega_1)\} \cdot t$$

と解釈してはいけない。あくまでも、位相は  $\sin$  の直後に書かれているもじであり、この例では、 $(\omega_0 + \omega_1)t$  がその位相にあたる。ただし、 $\sin x$  全体が括弧に囲まれていて、例えば、

$$\{\sin(\omega_0 + \omega_1)t\}x$$

と書かれていたら、 $\sin(\omega_0 + \omega_1)t$  と  $x$  の積であると解釈すべきだ。

三角関数の記述には、別の問題もある。例えば、

$$\sin x \sin y$$

という記述である。これは間違っても以下のように解釈してはいけない。

$$\sin(x \sin y). \quad \text{この解釈は間違い}$$

正しくは、

$$(\sin x)(\sin y)$$

と読むべきだ。

三角関数の変数を表すとき、 $\sin(x)$  のように記述すべきなのだが、なぜか、いちばん外側のカッコが省略されてしまい、 $\sin x$  とかかれてしまう。おそらく、カッコが多いすぎると、式が読みづらくなってしまうからだろう。たしかに、カッコは少ないほうが、式は簡潔になり、読みやすくなる。しかし、その代償として、式の意味するところが曖昧になってしまう。慣れている人ならば、上に書いた暗黙の了解を会得しているので、なんの誤解もなく読めてしまうのだが、不慣れなものは、よく読み間違えをしたり、どう解釈して良いかわからなかつたりする。話の流れから理解できることが大半ではあるが、混乱をさせないように、予め、この暗黙の了解について記述しておいた。

#### (4) 「一般に」という記述

なんの根拠の記述もなしに、「一般に …」と書かれていたら、注意が必要である。つまり、著者が独断的に一般的であるとしているからである。なんの資料や調査もなしに、「一般に」という語彙を使用しているのであれば、著者の経験上のものであり、実際には一般ではないかもしれない。

著者が専門家であれば、信頼できる単語だが、こんにちでは、非専門家による物理学の Web サイトや、解説本などがはびこっている。そういった場合には、ある程度疑ってかかってみたほうが良い。このノートでも、「一般に」という語彙は頻出語彙の 1 つであるが、これも、その意味は「(私の経験上) 一般に」ということである。このノートを読む際には、特に注意しておいてもらいたい。

## ギリシア文字

数学や物理ではギリシア文字 ( $\alpha, \beta, \dots$ ) がよく使われる。単に記号として使われる。ギリシア語が使われるわけではない。読み方を含め、一覧を示しておく。日本語の読みが複数のものがあるので注意。人やコミュニティによって発音が違う。

表 1 ギリシア文字一覧

大文字	小文字	英語	日本語読み
$A$	$\alpha$	alpha	アルファ
$B$	$\beta$	beta	ベータ
$\Gamma$	$\gamma$	gamma	ガンマ
$\Delta$	$\delta$	delta	デルタ
$E$	$\epsilon, \varepsilon$	epsilon	イプシロン
$Z$	$\zeta$	zeta	ゼータ
$H$	$\eta$	eta	イータ, エータ
$\Theta$	$\theta, \vartheta$	theta	シータ, テータ
$I$	$\iota$	iota	イオタ
$K$	$\kappa$	kappa	カッパ
$\Lambda$	$\lambda$	lambda	ラムダ
$M$	$\mu$	mu	ミュー
$N$	$\nu$	nu	ニュー
$\Xi$	$\xi$	xi	グサイ, クシー, クサイ
$O$	$o$	omicron	オミクロン
$\Pi$	$\pi, \varpi$	pi	パイ
$P$	$\rho, \varrho$	rho	ロー
$\Sigma$	$\sigma, \varsigma$	sigma	シグマ
$T$	$\tau$	tau	タウ
$\Upsilon$	$\upsilon$	upsilon	ウプシロン
$\Phi$	$\phi, \varphi$	phi	ファイ
$X$	$\chi$	chi	カイ
$\Psi$	$\psi$	psi	プサイ, プシー
$\Omega$	$\omega$	omega	オメガ

# 目次

このノートについて	i
このノートで使用する記号	iv
記述する内容（予定）	viii
記述方法についての諸注意	ix
(1) 括弧の扱いについて . . . . .	ix
(2) 積分記号 . . . . .	x
(3) 三角関数の表現 . . . . .	xi
(4) 「一般に」という記述 . . . . .	xii
ギリシア文字（ギリシャ文字）	xiv
<b>第Ⅰ部 古典力学</b>	<b>1</b>
<b>第1章 物理学への導入</b>	<b>3</b>
1.1 物理学を勉強する理由 . . . . .	3
1.1.1 科学を勉強する . . . . .	3
1.1.1.1 科学とは何か . . . . .	3
1.1.1.2 科学活動の原動力は好奇心だ . . . . .	4
1.1.1.3 科学的活動の手順 . . . . .	5
$\sharp$ memo No.1: 科学するために必要な能力 . . . . .	5
1.1.1.4 まずは、教科書を読むことから . . . . .	6
1.1.2 学問と専門用語 . . . . .	7
$\sharp$ memo No.2: 専門用語を使うとカッコよくみえる？ . . . . .	7

1.2	物理学の思想 . . . . .	8
1.2.1	物理学を学ぼう . . . . .	8
‡ memo No.3: 「なぜ」と「どうのように」の違い . . . . .	8	
1.2.2	因果関係 . . . . .	9
1.2.3	経験, 仮説, 実験, 解釈 . . . . .	10
1.2.3.1	科学的活動 . . . . .	10
1.2.3.2	経験 = 現象を観察する . . . . .	11
1.2.3.3	仮説 = 現象の説明の試み . . . . .	11
1.2.3.4	実験 = 仮説の検証 . . . . .	11
1.2.3.5	解釈(考察) = 仮説の肯定, 否定 . . . . .	12
1.2.4	自然現象の発生とその解釈 . . . . .	12
‡ memo No.4: 偶然と必然 . . . . .	13	
‡ memo No.5: 相対主義と絶対主義/蓋然性の蓋然性 . . . . .	14	
‡ memo No.6: 真偽と確実性 . . . . .	14	
1.2.5	論理的な飛躍 . . . . .	15
‡ memo No.7: 例: ハッブルの法則 . . . . .	15	
1.2.6	推論の種類 . . . . .	16
1.2.6.1	演繹的推論 . . . . .	17
1.2.6.2	帰納的推論 . . . . .	17
1.2.6.3	発想的推論 . . . . .	17
1.2.6.4	科学的推論 . . . . .	18
1.2.7	再現性 . . . . .	18
‡ memo No.8: 「科学の方法」(中谷宇吉郎:岩波新書) より . . . . .	19	
1.2.8	単純性: オッカムの剃刀 . . . . .	20
‡ memo No.9: 「オッカムの剃刀」は正しいのか . . . . .	21	
1.2.9	客観と主観 . . . . .	22
1.2.9.1	客観性 . . . . .	22
1.2.9.2	"客観"と"主観"の違い . . . . .	24
1.2.10	法則 . . . . .	24
1.2.10.1	還元主義 . . . . .	24
‡ memo No.10: 科学的思想の根本? . . . . .	25	
1.2.10.2	規則性の発見 . . . . .	25
1.2.10.3	法則は理論の土台である . . . . .	26
1.2.10.4	法則の正しさ . . . . .	27

---

1.2.10.5	法則は適用範囲が存在する	27
1.2.10.6	法則であるための条件	28
# memo No.11:	ヘンペルのパラドクス	29
1.2.10.7	実験誤差と法則の実証	29
1.2.10.8	法則に含まれる暗黙の前提	29
1.2.10.9	厳密な法則は得られない	30
1.2.10.10	本当の "世界の規則" は知り得ない	31
1.2.10.11	本当に知りたい規則と "等価" な規則	32
1.2.10.12	法則を捉えるということ	32
1.2.10.13	物体は自然法則を知っているか	33
1.2.10.14	物理法則を表現する言葉	35
1.2.10.15	科学法則だけが自然のすべてではない	36
# memo No.12:	科学的根拠	36
1.2.11	定義	37
# memo No.13:	「定義」の定義	38
1.3	物理学の基本概念	39
1.3.1	物理量	39
1.3.2	物体	39
1.3.3	系	40
1.3.4	文字・数式・式変形	40
# memo No.14:	$a + b = b + a$ ?	46
<b>第 2 章 力学の基本概念</b>		49
2.1	力とその性質	49
2.1.1	力（ちから）	49
2.1.2	力の重ね合わせの原理	50
# memo No.15:	和の記号: $\sum$	51
2.1.3	作用	53
2.1.4	外力	55
2.2	基本単位 $([s]/[m]/[kg]/[A])$	55
2.2.1	単位と測定	55
2.2.2	4つの基本単位	55
2.2.3	組立単位	56
2.2.4	測定の方法	57

2.2.5	単位	58
2.2.6	時間	58
	# memo No.16: “時間”と“時刻”的違い	58
	# memo No.17: 飛ぶ矢のパラドクス	59
	# memo No.18: 時間とは何か	59
	# memo No.19: 「今」見ている世界はいつの世界か	61
	# memo No.20: 空間化された時間	61
	# memo No.21: 時間の非実在性	62
	# memo No.22: 時間が逆行しない	62
2.2.7	長さ	63
2.2.8	重さと質量	64
	# memo No.23: 定量的な説明	65
	# memo No.24: お肉の重さ	66
	# memo No.25: 質量は「何」からできているか	67
2.2.9	基本単位のまとめ	67
	# memo No.26: 各基本単位の関係	68
2.3	物理学における、数学の扱い方	68
2.3.1	道具としての数学	68
2.3.2	物理学の考え方	70
2.3.3	物理学の式の解釈	70
	# memo No.27: 恒等式	71
	# memo No.28: 方程式	71
2.4	対称性 — 物理学の基本要請 —	71
2.4.1	空間の対称性	71
2.4.1.1	並進対称性	72
2.4.1.2	回転対称性	72
2.4.2	時間の対称性	73
2.4.3	対称性 — まとめ —	74
2.4.4	対称性と保存則（ネーターの定理）	75
第3章	運動学	77
3.1	「物体の運動」の表現方法	77
3.1.1	位置	77
3.1.2	速度	78

---

3.1.3	加速度 . . . . .	78
	# memo No.29: 加加速度, 躍度, jerk . . . . .	78
3.1.4	運動軌道 . . . . .	79
3.1.5	「運動の軌道」の表現に必要な情報 . . . . .	79
3.2	位置の記述方法 . . . . .	80
3.2.1	1 次元（直線）上の位置 . . . . .	81
3.2.2	2 次元（平面）上の位置 . . . . .	82
3.2.3	3 次元（空間）内の位置 . . . . .	84
	# memo No.30: 次元とは何か . . . . .	85
	# memo No.31: 座標の張り方 . . . . .	86
3.3	速度・速さの表現方法 . . . . .	88
3.3.1	「速度・速さ」の表現方法 . . . . .	88
	# memo No.32: 「速度」と「速さ」の使い分け . . . . .	89
3.3.2	「変化」の数式化 . . . . .	89
3.3.3	位置の時間変化の図示 . . . . .	90
3.3.4	1 次元（直線）上の速度 . . . . .	90
3.3.5	2 次元（平面）上の速度 . . . . .	95
3.3.6	3 次元（空間）内の速度 . . . . .	96
	# memo No.33: 速度のを表す他の記号 . . . . .	96
3.3.7	速度の合成 . . . . .	97
	# memo No.34: 数式と実際の現象 . . . . .	97
3.4	加速度の表現方法 . . . . .	98
3.4.1	1 次元（直線）上の加速度 . . . . .	98
	# memo No.35: 速度・位置・加速度の関係 . . . . .	100
3.4.2	2 次元（平面）上の加速度 . . . . .	100
3.4.3	3 次元（空間）内の加速度 . . . . .	101
	# memo No.36: 変化の記述 . . . . .	101
3.5	躍度（加加速度, jerk） . . . . .	104
第 4 章	3 つの運動法則 と 万有引力の法則	105
4.1	運動の 3 法則 . . . . .	105
4.1.1	(第 1 法則) 慣性の法則 . . . . .	105
4.1.2	(第 2 法則) 運動方程式 . . . . .	107
4.1.3	(第 3 法則) 作用・反作用の法則 . . . . .	109

4.1.4	慣性質量 . . . . .	111
	‡ memo No.37: 慣性の法則と運動方程式の関係 . . . . .	111
4.2	万有引力の法則 . . . . .	112
4.2.1	法則のイメージと数式による定義 . . . . .	112
	‡ memo No.38: 万有引力法則とケプラーの法則 . . . . .	113
4.2.2	重力質量 . . . . .	114
	‡ memo No.39: この世界にある「力」の種類 . . . . .	114
4.2.3	重力加速度 . . . . .	114
第 5 章	保存則 . . . . .	117
5.1	等価原理 . . . . .	117
5.1.1	原理 . . . . .	117
5.1.2	実験による確認 . . . . .	118
5.2	運動量保存の法則 . . . . .	118
5.2.1	運動量の定義 . . . . .	118
5.2.2	運動量を用いた運動方程式 . . . . .	119
	‡ memo No.40: 運動量を用いた運動方程式の必要性 . . . . .	120
5.2.3	運動量保存の法則 . . . . .	121
5.2.3.1	2 つの物体間の運動量保存の法則 . . . . .	121
5.2.3.2	$N$ 個の物体間の運動量保存の法則 . . . . .	121
	‡ memo No.41: 現象全体を見ることで、保存則が成立する .	122
	‡ memo No.42: 運動方程式と運動量保存則 . . . . .	123
	‡ memo No.43: 高校物理における運動量保存則 . . . . .	123
5.2.4	運動量の変化と力積 . . . . .	124
5.3	角運動量保存の法則 . . . . .	125
5.3.1	角運動 . . . . .	125
5.3.2	てこの原理 . . . . .	125
5.3.3	釣り合いの式 . . . . .	126
5.3.4	物体の回転の表現 と ベクトルの外積 . . . . .	126
5.3.5	角運動量 . . . . .	128
5.3.6	角運動の方程式 . . . . .	129
5.3.7	角運動量保存則 . . . . .	130
5.4	力学的エネルギー保存の法則 . . . . .	131
5.4.1	仕事 . . . . .	131

---

5.4.1.1	1次元上の仕事	131
5.4.1.2	3次元内の仕事	132
5.4.1.3	仕事の単位	133
5.4.1.4	一般的な仕事の定義	134
# memo No.44:	注意	134
5.4.2	エネルギーについて	135
5.4.2.1	エネルギー	135
5.4.2.2	エネルギーの種類	137
5.4.2.3	「エネルギー」のイメージ	137
5.4.3	ポテンシャル・エネルギー	138
5.4.3.1	高さ（位置）によるエネルギーの違い	138
5.4.3.2	エネルギーの値が負であるのはなぜか	140
5.4.3.3	ポテンシャル・エネルギーの定義	140
5.4.3.4	一般的なポテンシャルエネルギー	141
5.4.4	運動エネルギー	141
5.4.4.1	物体を高いところから落とす	141
5.4.4.2	位置エネルギーから運動エネルギーへ	142
5.4.4.3	運動エネルギーの定義	143
5.4.4.4	運動量と運動エネルギーの関係式	143
5.4.5	力学的エネルギー保存の法則	144
5.4.5.1	高校生向けの説明	144
5.4.5.2	微分の知識を使う方法	145
# memo No.45:	注意	150
5.4.6	万有引力によるポテンシャル・エネルギー	151
5.4.7	保存力	152
5.4.8	勾配	156
5.4.9	保存力と $\text{grad}$ の図的イメージ	157
# memo No.46:	$\partial/\partial r$ という表現について	158
5.4.10	保存力と周回積分	159
5.5	エネルギーと運動量	160
第 6 章	座標変換	163
6.1	座標のとりかた	163
6.1.1	座標とは	163

6.1.2	直交座標 . . . . .	164
6.1.3	斜交座標 . . . . .	164
6.1.4	極座標 . . . . .	165
6.1.5	円筒座標 . . . . .	166
6.2	異なる座標同士の関係 . . . . .	167
6.2.1	座標による違い . . . . .	167
6.2.2	直交座標 → 斜交座標 . . . . .	168
6.3	座標変換 . . . . .	169
6.3.1	座標系の表現の仕方 . . . . .	169
6.4	座標変換と運動方程式 . . . . .	169
6.4.1	ガリレイ変換 . . . . .	170
6.4.2	加速度系における物体の運動 . . . . .	171
6.4.3	見かけの力 . . . . .	173
6.4.4	AINSHUTAINの等価原理 . . . . .	173
	# memo No.47: 例 1 : 電車の加速度運動 . . . . .	174
	# memo No.48: 例 2 : エレベータ . . . . .	174
	# memo No.49: 「慣性質量」と「重力質量」の等価性とは意味が違う . . . . .	175
6.4.5	極座標と運動方程式 . . . . .	175
第 7 章	物体の運動の解析 . . . . .	177
7.1	運動の解析方法 . . . . .	177
7.2	重要な例 . . . . .	178
7.2.1	等速直線運動 . . . . .	178
7.2.2	等加速度運動 . . . . .	179
7.2.3	等速円運動 . . . . .	181
7.2.3.1	はじめに . . . . .	181
7.2.3.2	角速度 . . . . .	182
	# memo No.50: 速度と加速度は直交する（図形的説明） . . . . .	183
7.2.3.3	角速度と円の方程式 . . . . .	184
7.2.3.4	等速円運動の速度と加速度の導出 . . . . .	186
7.2.3.5	等速円運動の位置と速度と加速度の関係 . . . . .	187
	# memo No.51: 速度と加速度は直交する（演繹的説明） . . . . .	190
7.2.3.6	円運動の周期と角速度 . . . . .	191

---

	7.2.3.7 等速円運動の運動方程式 . . . . .	192
7.3	地球重力下での運動 . . . . .	192
	7.3.1 理想的な地球の形 . . . . .	192
	‡ memo No.52: 計算で使う記号 . . . . .	192
	7.3.2 地表の重力加速度 . . . . .	193
	‡ memo No.53: 地表の重力加速度 . . . . .	194
	‡ memo No.54: エベレスト頂上の重力加速度 . . . . .	194
	7.3.3 放物運動 . . . . .	195
	7.3.4 宇宙速度 . . . . .	198
	7.3.4.1 第一宇宙速度 . . . . .	198
	7.3.4.2 第二宇宙速度 . . . . .	200
	‡ memo No.55: 補足 . . . . .	201
	7.3.4.3 第三宇宙速度 . . . . .	201
	7.3.5 躍度 (jerk) と運動方程式 . . . . .	202
	7.3.6 円錐振り子 . . . . .	203
	7.3.7 調和振動 (単振動) . . . . .	203
	7.3.7.1 弾性力 . . . . .	203
	7.3.7.2 フックの法則 . . . . .	203
	7.3.7.3 単振動の種類 . . . . .	204
	7.3.7.4 調和振動の運動解析 . . . . .	205
<b>第 8 章</b>	<b>惑星の運動</b>	<b>209</b>
8.1	はじめに . . . . .	209
8.2	ケプラーの法則 . . . . .	210
	8.2.1 楕円の方程式 . . . . .	210
	8.2.2 極座標での運動方程式 . . . . .	210
	8.2.3 第 1 法則；楕円軌道の法則 . . . . .	211
	8.2.4 第 2 法則；面積速度一定の法則 . . . . .	211
	8.2.5 第 3 法則；調和の法則 . . . . .	212
<b>第 9 章</b>	<b>解析力学</b>	<b>213</b>
9.1	はじめに . . . . .	213
	9.1.1 教科書 . . . . .	213
	9.1.2 解析力学とは . . . . .	213

9.1.3	解析力学の目的 . . . . .	214
9.2	速習：解析力学 . . . . .	215
9.2.1	時間微分の省略記号 . . . . .	215
9.2.2	ラグランジュ形式の解析力学 . . . . .	216
9.2.2.1	ニュートン方程式の復習 . . . . .	216
9.2.2.2	力とポテンシャル・エネルギーの関係式 . . . . .	216
9.2.2.3	運動エネルギーと運動量 . . . . .	217
9.2.2.4	ラグランジアンの導入 . . . . .	218
9.2.2.5	ラグランジュの運動方程式 . . . . .	218
# memo No.56:	式 (9.13) と式 (9.10) の等価性 . . . . .	220
9.2.3	一般化された運動量 . . . . .	221
9.2.4	一般化された力 . . . . .	222
9.2.5	ハミルトン形式の解析力学 . . . . .	223
9.2.5.1	ハミルトニアンの導入 . . . . .	223
9.2.5.2	ハミルトニアンのもつ意味 . . . . .	224
9.2.6	正準方程式 . . . . .	225
9.2.6.1	汎関数 . . . . .	225
9.2.6.2	変分 . . . . .	228
9.2.6.3	汎関数の微分 . . . . .	230
9.2.6.4	汎関数の変分 . . . . .	231
9.2.6.5	正準方程式の導出 . . . . .	231
# memo No.57:	変分と微分の可換性 . . . . .	232
9.3	変分原理 . . . . .	234
9.3.1	学習マップ . . . . .	234
9.3.2	ダランベールの原理 . . . . .	234
9.3.3	仮想仕事の原理 . . . . .	235
9.3.4	ラグランジアン と 最小作用の原理 . . . . .	235
# memo No.58:	ラグランジアンの定義について . . . . .	238
# memo No.59:	最小作用の原理のイメージ . . . . .	238
9.3.5	ラグランジュの運動方程式の導出 . . . . .	239
# memo No.60:	共変性 . . . . .	241
9.3.6	一般化座標 . . . . .	241
9.3.7	運動方程式の共変性 . . . . .	242
9.4	ハミルトンの運動方程式 . . . . .	245

---

9.4.1	ハミルトニアンの導入 . . . . .	245
9.4.1.1	ルジャンドル変換 . . . . .	246
9.4.1.2	ハミルトニアンの定義 . . . . .	247
9.4.2	ポアソン括弧 . . . . .	250
9.4.3	正準方程式 . . . . .	250
9.4.3.1	正準運動方程式 . . . . .	251
<b>第 II 部 電磁気学 1st</b>		<b>255</b>
<b>第 10 章 電磁気学が対象とする現象</b>		<b>257</b>
10.1	はじめに . . . . .	257
10.1.1	電気と磁気 . . . . .	257
10.1.2	電気と磁気の伝わり方 . . . . .	258
10.1.3	電気・磁気の研究の歴史（ダイジェスト） . . . . .	259
10.2	電気的現象 . . . . .	260
10.3	磁気的現象 . . . . .	260
10.4	電磁気的現象 . . . . .	260
	# memo No.61: 非接触的な力 . . . . .	261
<b>第 11 章 電荷 — 電磁気現象の根源 —</b>		<b>263</b>
11.1	電荷 . . . . .	263
11.1.1	電荷の存在 . . . . .	263
11.1.2	電荷は 2 種類しかないのか . . . . .	265
11.1.3	荷電粒子, 点電荷 . . . . .	266
11.1.4	電荷は実際に存在するか . . . . .	267
	# memo No.62: 電子の存在と電磁気学 . . . . .	267
11.1.5	電気量 . . . . .	268
11.1.6	電気素量 . . . . .	269
	# memo No.63: 電気素量をどう見つけたか . . . . .	269
11.1.7	電荷密度 . . . . .	270
	# memo No.64: 電荷密度の表現上の問題 . . . . .	271
11.1.8	電荷密度と全電気量の関係 . . . . .	271
	# memo No.65: 微小体積 . . . . .	273
	# memo No.66: 体積分の表示方法 . . . . .	273

11.1.9	$\delta$ 関数	274
11.1.9.1	$\delta$ 関数の定義	274
11.1.9.2	1 次元の $\delta$ 関数	276
11.2	電流	278
11.2.1	電流のイメージ	278
11.2.2	電流の定義（仮）	279
	# memo No.67: 注意	279
11.2.3	電流密度	280
11.2.4	電流密度と電流の関係	281
	# memo No.68: 微小面積と単位法線ベクトル	282
	# memo No.69: 面積分の表示方法	282
11.3	電流と電荷の関係	283
11.3.1	大局的な電荷保存則	284
11.3.2	局所的な電荷保存則	285
	# memo No.70: ガウスの定理（復習）	287
<b>第 12 章 クーロンの法則</b>		289
12.1	クーロン力	289
12.1.1	法則	289
12.1.2	定量化	290
12.1.3	まとめ	294
	# memo No.71: (例) 2 つの点電荷同士のクーロン力	294
12.2	力の重ねあわせの原理	297
12.3	クーロンの法則 ( $N$ 個の点電荷)	299
	# memo No.72: 和の記号: $\sum_{j=1, j \neq i}^N$ の注意	301
12.4	クーロンの法則（電荷の連続分布）	302
12.5	クーロン力（電気的な力）と力学的な力	303
<b>第 13 章 電場</b>		305
13.1	作用の伝わり方	305
13.1.1	遠隔作用	305
13.1.2	近接作用	305
13.2	電場（1 個の点電荷）	306
	13.2.1 2 つの点電荷間のクーロン力	306

---

13.2.2 定量化 . . . . .	307
13.2.3 単位電荷が及ぼすクーロン力 . . . . .	308
13.3 電場 ( $N$ 個の点電荷) . . . . .	309
13.4 電場 (電荷の連続分布) . . . . .	309
13.5 電場 (一般化) . . . . .	311
‡ memo No.73: (例) 点電荷の作る電場 . . . . .	312
13.6 時間変化する電場 . . . . .	312
13.7 電場の定性的なイメージ . . . . .	314
13.7.1 イメージ . . . . .	314
13.7.2 電気力線 (電場の可視化) . . . . .	314
<b>第 14 章 磁束密度</b>	<b>317</b>
14.1 磁束密度に関するローレンツ力 . . . . .	317
14.2 電流が受ける力 . . . . .	320
14.3 ビオ = サバールの法則 . . . . .	321
14.3.1 実験則 . . . . .	321
14.3.2 一般化 . . . . .	322
14.3.3 点電荷の場合 . . . . .	324
<b>第 15 章 電磁気力 (ローレンツ力)</b>	<b>327</b>
15.1 ローレンツ力 (電磁気力) . . . . .	327
15.2 ローレンツ力と観測者 . . . . .	328
‡ memo No.74: 電荷自身から発する磁束密度 . . . . .	328
<b>第 16 章 マクスウェル方程式概観</b>	<b>331</b>
16.1 4 つの基本法則 . . . . .	331
16.1.1 はじめに . . . . .	331
16.1.2 電場に対するガウスの法則 . . . . .	333
16.1.3 磁束密度に対するガウスの法則 . . . . .	334
16.1.4 ファラデーの電磁誘導の法則 . . . . .	334
16.1.5 アンペール = マクスウェルの法則 . . . . .	335
16.2 マクスウェル方程式を見てみよう . . . . .	335
16.2.1 「マクスウェル方程式」とは . . . . .	336
16.2.1.1 マクスウェルが電磁気学を確立する . . . . .	336
16.2.1.2 数式で表現してこそ、基本法則と言える . . . . .	337

16.2.1.3 マクスウェル方程式の2種類の表現 . . . . .	337
16.2.2 約束：独立変数の記述の省略 . . . . .	337
16.2.3 マクスウェル方程式（微分形） . . . . .	338
16.2.3.1 電場に対するガウスの法則の式：微分形 . . . . .	338
16.2.3.2 磁束密度に対するガウスの法則の式：微分形 . . . . .	339
16.2.3.3 アンペール＝マクスウェルの法則の式：微分形 . . . . .	340
16.2.3.4 フアラデーの電磁誘導の法則の式：微分形 . . . . .	342
16.2.4 マクスウェル方程式（積分形） . . . . .	342
16.2.4.1 電場に対するガウスの法則の式：積分形 . . . . .	342
16.2.4.2 磁束密度に対するガウスの法則の式：積分形 . . . . .	343
16.2.4.3 アンペール＝マクスウェルの法則の式：積分形 . . . . .	344
16.2.4.4 フアラデーの電磁誘導の法則の式：積分形 . . . . .	344
<b>第 17 章 電場に対するガウスの法則</b>	<b>345</b>
17.1 電場の定義 . . . . .	345
17.1.1 クーロンの法則（復習） . . . . .	345
17.1.2 電場に対するガウスの法則の導出 . . . . .	346
17.1.2.1 クーロンの法則から見えてくること . . . . .	347
17.1.2.2 1つの点電荷のみが存在する場合 . . . . .	348
17.1.2.3 $N$ 個の点電荷のみが存在する場合 . . . . .	350
17.1.2.4 電荷が連続的に分布する場合 . . . . .	353
17.1.3 法則の意味（定性的なイメージ） . . . . .	354
17.1.3.1 法則のイメージ . . . . .	354
17.1.3.2 近接作用するクーロン力 . . . . .	355
17.2 電位 . . . . .	355
17.2.1 クーロン力より生じるポテンシャル・エネルギー . . . . .	355
17.2.2 電位の定義 . . . . .	359
17.2.3 電位の定義の意味 . . . . .	359
17.2.4 電場と電位の関係 . . . . .	360
$\sharp$ memo No.75: ポテンシャルを基礎に、電場を定義する場合	361
17.2.5 等電位面 . . . . .	361
17.2.6 等電位面と電場の向き . . . . .	361
17.2.7 ポアソン方程式 . . . . .	363
17.2.8 ラプラス方程式 . . . . .	364

---

# memo No.76: 次の計算のための準備 . . . . .	364
# memo No.77: $\nabla^2$ の計算 . . . . .	365
# memo No.78: $\operatorname{div} \operatorname{grad}$ の計算 . . . . .	365
# memo No.79: $\Delta = \nabla^2 = \operatorname{div} \operatorname{grad}$ . . . . .	366
17.2.9 静電場/電位の特徴 . . . . .	366
17.2.9.1 特徴 1 . . . . .	367
17.2.9.2 特徴 2 . . . . .	368
17.2.9.3 特徴 3 . . . . .	369
17.2.10 アーンショーの定理 . . . . .	369
17.3 導体 . . . . .	370
17.3.1 導体とは . . . . .	370
17.3.1.1 導体, 半導体, 絶縁体 . . . . .	370
17.3.1.2 理想的な導体 . . . . .	372
17.3.2 導体と電場の関係 . . . . .	373
17.3.2.1 静電誘導 . . . . .	373
17.3.2.2 静電遮蔽 . . . . .	374
# memo No.80: 導体内部に電場は生じない . . . . .	375
17.3.2.3 電場と導体表面 . . . . .	375
17.3.3 導体と電位の関係 . . . . .	375
<b>第 18 章 磁束密度に対するガウスの法則</b>	377
18.1 ピオ = サバールの法則（復習） . . . . .	377
18.2 磁束密度に対するガウスの法則の導出 . . . . .	378
18.2.1 公式の確認 . . . . .	378
# memo No.81: 公式の変形 1 . . . . .	378
# memo No.82: 公式の変形 2 . . . . .	379
18.2.2 導出 . . . . .	379
18.2.3 まとめ . . . . .	381
18.3 法則の意味（図的イメージ） . . . . .	381
<b>第 19 章 アンペール = マクスウェルの法則</b>	383
19.1 アンペールの法則 . . . . .	383
19.1.1 エルステッドの実験 . . . . .	383
19.1.2 ピオ = サバールの法則（復習） . . . . .	384

19.1.3	アンペールの法則の導出 . . . . .	384
19.1.3.1	定常電流 . . . . .	384
19.1.3.2	導出 . . . . .	385
19.1.4	法則の意味（図的イメージ） . . . . .	387
19.2	アンペール＝マクスウェルの法則 . . . . .	388
19.2.1	アンペールの法則と電荷保存則との矛盾 . . . . .	388
19.2.2	変位電流 . . . . .	389
19.2.3	アンペール＝マクスウェルの法則の導出 . . . . .	390
19.2.4	法則の意味（図的イメージ） . . . . .	391
19.3	静電容量 . . . . .	391
19.3.1	キャパシタンス . . . . .	391
	# memo No.83: 「キャパシタ」と「キャパシタンス」の違い .	391
19.3.2	変位電流とキャパシタ . . . . .	391
19.3.3	平行平板型のキャパシタ . . . . .	391
19.4	電流の SI 単位に基づく定義 . . . . .	391
19.4.1	直線電流が作る磁束密度 . . . . .	391
	# memo No.84: 積分経路を円にとる . . . . .	392
19.4.2	電流が受ける力 . . . . .	393
19.4.3	電流の定義 (1[A] の定義) . . . . .	394
第 20 章	ファラデーの電磁誘導の法則	397
20.1	ファラデーの実験 . . . . .	397
20.1.1	起電力 . . . . .	397
20.1.2	磁束 . . . . .	398
20.1.3	電磁誘導の法則 . . . . .	398
20.1.4	法則の意味（図的イメージ） . . . . .	399
20.2	自己誘導 / 相互誘導 . . . . .	401
20.2.1	自己インダクタンス . . . . .	401
	# memo No.85: 磁束は電流に比例する . . . . .	402
	# memo No.86: ソレノイドが作る磁束密度 . . . . .	402
	# memo No.87: 「インダクタ」と「インダクタンス」の違い .	403
20.2.2	相互インダクタンス . . . . .	404
20.2.3	結合定数 . . . . .	404
20.2.4	変圧器の原理 . . . . .	404

---

<b>第 III 部 特殊相対性理論</b>	<b>405</b>
<b>第 21 章 電磁気学の不満な点</b>	<b>407</b>
21.1 導入 . . . . .	407
21.2 ローレンツ力 . . . . .	408
21.3 電磁誘導 . . . . .	408
21.4 ローレンツ力と電磁誘導 . . . . .	408
<b>第 22 章 2 つの基本原理</b>	<b>411</b>
22.1 特殊相対性原理 . . . . .	411
22.1.1 物理法則と座標変換 . . . . .	411
‡ memo No.88: 慣性系の存在とガリレイ変換(復習) . . . . .	411
22.1.2 特殊相対性原理 . . . . .	412
22.2 光速不変の原理 . . . . .	413
22.2.1 エーテル(電磁波と光) . . . . .	413
22.2.2マイケルソンとモーレイの実験 . . . . .	413
‡ memo No.89: 式(22.3)の解説 . . . . .	417
‡ memo No.90: 式(22.7)の近似式の解説 . . . . .	417
22.2.3 光速不変の原理 . . . . .	418
<b>第 23 章 特殊相対論的な現象</b>	<b>421</b>
23.1 特殊相対論的な現象 . . . . .	421
23.1.1 同時刻 . . . . .	421
23.1.2 ローレンツ変換式 . . . . .	425
23.1.3 ローレンツ因子 . . . . .	433
23.1.4 方程式の変数 . . . . .	434
23.1.5 ローレンツ変換とガリレイ変換 . . . . .	435
23.1.6 棒の長さの収縮 . . . . .	437
‡ memo No.91: 座標の収縮 . . . . .	438
‡ memo No.92: 例 . . . . .	439
23.1.7 運動する時計の、時間の遅れ . . . . .	440
23.1.8 複数の時計の、時刻の合わせ方 . . . . .	441
23.1.9 速度の合成 . . . . .	442
‡ memo No.93: 例 1 . . . . .	444
‡ memo No.94: 例 2 . . . . .	445

23.1.10 相対性 . . . . .	445
23.1.11 光のドップラー効果 . . . . .	447
23.1.12 アインシュタインの理論と、他の物理学者の理論 . . . . .	447
<b>第 24 章 特殊相対論的力学</b>	<b>449</b>
24.1 目標 . . . . .	449
24.2 ローレンツ変換式の行列表示 . . . . .	450
24.3 時空座標の導入 . . . . .	452
24.3.1 時空座標の次元 ( $ct$ の導入) . . . . .	452
24.3.2 時空座標の組み上げ . . . . .	453
24.4 四元位置ベクトル . . . . .	454
24.5 世界間隔 . . . . .	454
$\sharp \text{ memo No.95: } -(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0$ だから常に $s = 0?$	455
24.6 固有時間 . . . . .	457
$\sharp \text{ memo No.96: }$ 光の固有時間 . . . . .	460
24.7 四元速度ベクトル . . . . .	460
24.8 四元加速度ベクトル . . . . .	460
24.9 $\eta_{\mu\nu}$ の導入 . . . . .	460
$\sharp \text{ memo No.97: }$ 行列表示とその成分表示? . . . . .	462
24.10 4 元運動量の定義 . . . . .	464
24.11 相対論的運動方程式 . . . . .	465
24.12 4 元運動量の時間成分 . . . . .	469
24.13 運動する物体の質量 . . . . .	469
<b>第 IV 部 電磁気学 2nd</b>	<b>471</b>
<b>第 25 章 電磁気学の再構築</b>	<b>473</b>
25.1 もう一度はじめから . . . . .	473
25.1.1 帰納的な考え方 . . . . .	473
25.1.2 演繹的な考え方 . . . . .	474
25.1.3 “帰納”から“演繹”へ . . . . .	474
25.1.4 演繹的な電磁気理論の組み立て方 . . . . .	475
25.2 クーロンの法則 . . . . .	476
25.3 ローレンツ変換 . . . . .	478

---

25.4	電場と磁束密度の定義	478
25.5	マクスウェル方程式	478
25.5.1	ファラデーの電磁誘導の法則	478
25.5.2	アンペール = マクスウェルの法則	478
25.5.3	電場に対するガウスの法則	478
25.5.4	磁束密度に対するガウスの法則	478
25.6	電荷保存の法則	478
25.7	マクスウェル方程式の解	479
<b>第 26 章 真空中の電磁波</b>		483
26.1	波動方程式	483
26.1.1	波動関数	483
26.1.2	波動方程式の導出	484
26.2	真空中のマクスウェル方程式	484
26.2.1	マクスウェル方程式の確認	484
26.2.2	真空中であることの仮定	484
26.2.3	電場の波動方程式	485
26.2.4	磁束密度の波動方程式	488
26.2.5	光速	489
26.2.6	電磁波の伝搬	489
	# memo No.98: 波動方程式	490
26.2.7	電場と磁束密度の伝搬関係	492
26.2.8	電磁場のエネルギーとポインティング・ベクトル	494
<b>第 27 章 その他の電磁気学的現象</b>		499
27.1	電気双極子	499
27.2	熱電効果	499
27.2.1	はじめに	499
27.2.2	トムソン効果	500
27.2.3	ベルチエ効果	500
27.2.4	ゼーベック効果	500
27.3	ゼーマン効果	500
27.4	電子の実験的発見	500
<b>第 28 章 共変形式のマクスウェル方程式</b>		503

28.1	ポテンシャルの導入 . . . . .	503
28.1.1	スカラーポテンシャル: $\phi$ . . . . .	503
28.1.2	ベクトルポテンシャル: $\mathbf{A}$ . . . . .	504
28.1.3	ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ の形 . . . . .	504
28.1.4	磁束密度のポテンシャル表示 . . . . .	506
28.1.5	電場のポテンシャル表示 . . . . .	506
28.2	マクスウェル方程式のポテンシャル表示 . . . . .	507
28.2.1	アンペール = マクスウェルの法則の変形 . . . . .	507
28.2.2	電場に対するガウスの法則の変形 . . . . .	508
28.2.3	ゲージ変換 . . . . .	510
28.2.4	ローレンツ条件 . . . . .	511
28.2.5	ポテンシャル表記の利点 . . . . .	513
28.3	マクスウェル方程式のガリレイ変換 . . . . .	514
28.3.1	マクスウェル方程式に対してガリレイ変換は適用できない . . . . .	514
28.3.2	ガリレイ変換と偏微分演算子 . . . . .	515
28.3.2.1	時間微分の計算 . . . . .	515
28.3.2.2	空間微分の計算 . . . . .	516
28.4	ローレンツ変換 . . . . .	517
28.5	共変形式にむけて . . . . .	517
28.5.1	4元電流 . . . . .	517
<b>第 V 部 熱・統計物理学</b>		<b>519</b>
<b>第 29 章 熱力学</b>		<b>521</b>
29.1	熱力学的な系 . . . . .	521
29.1.1	平衡状態/非平衡状態 . . . . .	521
29.1.2	熱平衡状態 . . . . .	522
29.1.2.1	熱平衡 . . . . .	523
29.1.2.2	相平衡 . . . . .	524
29.1.2.3	化学平衡 . . . . .	525
29.1.3	準静的過程 . . . . .	525
29.2	状態量 . . . . .	526
29.2.1	熱力学で扱う変数（状態量） . . . . .	526

---

29.2.2 示強変数と示量変数 . . . . .	526
29.3 環境と拘束 . . . . .	528
29.3.1 孤立系（孤立した系; isolated system） . . . . .	528
29.3.2 断熱系 . . . . .	528
29.3.3 閉鎖系（閉じた系; closed system） . . . . .	528
29.3.4 開放系（開いた系; opened system） . . . . .	528
29.3.5 外界 . . . . .	528
29.3.6 環境 . . . . .	528
29.3.7 拘束 . . . . .	529
29.3.8 環境と拘束 . . . . .	529
29.3.9 可逆変化・非可逆変化 . . . . .	529
29.3.10 断熱環境：断熱ポットの中の熱湯 . . . . .	530
29.3.11 透熱環境：シリングの中に封入された気体 . . . . .	530
29.3.12 热源：浴槽ないの大量の熱湯の中に置かれた鉄球 . . . . .	531
29.3.13 半透膜：半透膜でしきられた希薄溶液 . . . . .	531
29.4 絶対温度（気温計による定義） . . . . .	532
29.4.1 热力学第0法則 . . . . .	532
29.4.2 温度 . . . . .	533
29.4.3 絶対温度 . . . . .	534
<b>第 30 章 気体の状態方程式</b>	<b>535</b>
30.1 ボイルの法則 . . . . .	535
30.2 シャルルの法則 . . . . .	536
30.3 ボイル＝シャルルの法則 . . . . .	537
30.4 理想気体 . . . . .	539
30.5 状態方程式 . . . . .	540
30.5.1 理想気体の状態方程式 . . . . .	540
30.5.2 气体の濃度 . . . . .	540
30.5.3 実在気体の状態方程式 . . . . .	541
30.5.3.1 ビリアル方程式 . . . . .	541
30.5.3.2 ファンデルワールスの状態方程式 . . . . .	541
30.6 分圧の法則 . . . . .	544
<b>第 31 章 気体分子運動論</b>	<b>549</b>

31.1	仮定 . . . . .	549
31.2	分子の速度とその平均 . . . . .	550
	$\sharp memo$ No.99: $N$ 個の分子の速度の 2 乗平均 . . . . .	551
31.3	分子 1 つが壁に衝突するときに, 壁に与える平均の力: $\bar{f}_x$ . . . . .	551
31.4	分子 $N$ 個が壁に衝突するときに, 壁に与える平均の力: $\bar{F}_x$ . . . . .	554
31.5	気体の圧力: $P$ . . . . .	554
31.6	分子 1 つの並進運動エネルギーの平均値 . . . . .	555
31.7	単原子分子からなる理想気体の内部エネルギー . . . . .	556
<b>第 VI 部 量子力学</b>		<b>559</b>
<b>第 32 章 原子論</b>		<b>561</b>
32.1	原子, 分子の概念の導入 . . . . .	561
	32.1.1 定比例の法則 . . . . .	562
	32.1.2 倍数比例の法則 . . . . .	562
	32.1.3 ドルトンの原子説 . . . . .	563
	32.1.4 気体反応の法則, アヴォガドロの分子説 . . . . .	563
32.2	原子模型 . . . . .	564
	32.2.1 電子の発見 . . . . .	564
	32.2.2 ラザフォードの原子模型 (原子核の発見) . . . . .	565
	$\sharp memo$ No.100: トムソンの原子模型 . . . . .	566
	$\sharp memo$ No.101: 長岡の原子模型 . . . . .	566
	$\sharp memo$ No.102: 原子は本当に存在するのか . . . . .	567
32.3	原子核の構造 . . . . .	568
	32.3.1 ウランの発見 . . . . .	568
	32.3.2 X 線の発見 . . . . .	568
	32.3.3 ウランから生じる放射線の発見 . . . . .	569
	32.3.4 $\alpha$ 線と $\beta$ 線, $\gamma$ 線の発見 . . . . .	569
<b>第 33 章 量子力学への道のり</b>		<b>571</b>
33.1	古典物理学の限界 . . . . .	571
	33.1.1 黒体 . . . . .	571
	33.1.2 黒体輐射 . . . . .	572
	33.1.3 レイリー = ジーンズの公式 . . . . .	573

---

33.1.4 ウィーンの公式 . . . . .	573
33.1.5 理論式と実験値の不一致 . . . . .	574
33.1.6 プランクの式 . . . . .	575
33.1.6.1 $1/(e^x - 1)$ の極限 . . . . .	576
33.1.6.2 レイリー＝ジーンズの式との関係 . . . . .	576
33.1.6.3 ウィーンの式との関係 . . . . .	577
33.2 光の粒子性、電子の波動性 . . . . .	577
33.2.1 光は粒子としても振る舞う . . . . .	577
33.2.2 アインシュタインの光量子 . . . . .	578
33.2.3 光電効果 . . . . .	578
33.2.4 振動現象と等速円運動 . . . . .	580
<b>第 34 章 量子力学</b>	<b>583</b>
34.1 量子力学の教科書 . . . . .	583
34.1.1 説明方法 . . . . .	583
34.1.2 歴史的記述から入る教科書 . . . . .	583
34.1.3 いきなり体系から入る教科書 . . . . .	584
34.1.4 このノートの学習方針 . . . . .	584
34.1.5 使用する教科書 . . . . .	585
34.2 量子力学での運動方程式 . . . . .	586
34.2.1 はじめに . . . . .	586
34.2.2 量子力学での運動方程式 . . . . .	586
34.2.2.1 運動方程式は 2 種類の表現方法がある . . . . .	586
34.2.2.2 シュレーディンガー方程式の導入 . . . . .	587
34.3 対応原理 . . . . .	591
34.4 電子の速度 . . . . .	593
34.4.1 間違った考察 . . . . .	593
34.4.2 電子の群速度 . . . . .	594
34.4.3 電子の有効質量 . . . . .	594
34.5 トンネル効果 . . . . .	596
34.6 Fermi-Dirac 分布関数 . . . . .	596
<b>第 35 章 相対論的量子力学</b>	<b>599</b>
35.1 量子力学と相対性理論との矛盾の原因 . . . . .	599

35.2 クライン＝ゴルドンの方程式 . . . . .	600
35.3 クライン＝ゴルドンの方程式の欠点 . . . . .	601
<b>第 VII 部 電子物性</b>	<b>603</b>
<b>第 36 章 バンド理論</b>	<b>605</b>
36.1 結晶構造 . . . . .	605
36.1.1 結晶 . . . . .	605
36.1.2 単位格子 . . . . .	606
36.1.3 ミラー指数 . . . . .	606
36.1.4 ブラックの回折条件 . . . . .	606
36.1.5 逆格子 . . . . .	606
36.1.6 結晶構造因子 . . . . .	606
36.2 エネルギーバンドの導出 . . . . .	606
36.2.1 トンネル効果のおさらい . . . . .	606
36.2.2 1 次元結晶 . . . . .	606
36.2.3 ベニー＝クローニヒのモデル . . . . .	606
36.2.4 プロツホ関数 . . . . .	606
36.2.5 プロツホの定理 . . . . .	606
36.2.6 バンドの導出 . . . . .	606
<b>第 37 章 半導体</b>	<b>607</b>
37.1 半導体とは . . . . .	607
37.2 半導体の種類 . . . . .	607
37.3 キャリア（電荷担体） . . . . .	608
37.3.1 電子（electron） . . . . .	609
37.3.2 正孔（hole） . . . . .	609
37.3.3 電子の移動速度と正孔の移動速度 . . . . .	609
37.4 真性半導体の電導機構 . . . . .	609
37.4.1 Si 原子の古典的イメージ . . . . .	609
37.4.2 電導機構の説明 . . . . .	610
37.5 外因性半導体の電導機構 . . . . .	611
37.5.1 外因性半導体の構成 1(donor 注入) . . . . .	611
37.5.2 電導機構の説明 1(donor 注入) . . . . .	612

---

37.5.3 外因性半導体の構成 2(acceptor 注入) . . . . .	612
37.5.4 電導機構の説明 2(acceptor 注入) . . . . .	612
37.6 ホール効果 . . . . .	612
37.6.1 ホール効果の概要 . . . . .	612
37.6.2 ホール効果発生の機構 . . . . .	612
37.6.3 ホール効果におけるキャリアの運動 . . . . .	613
37.7 Schottky ダイオード . . . . .	614
37.7.1 Schottky 障壁ダイオード ダイオードの $I - V$ 特性 . . . . .	614
37.7.2 p-n 接合ダイオードのエネルギー-band図 . . . . .	615
37.7.3 Schottky 障壁ダイオードのエネルギー-band図 . . . . .	616
37.7.4 オーミック接触のダイオードのエネルギー-band図 . . . . .	616
37.8 電子親和力 . . . . .	616
37.9 MOSFET . . . . .	617
37.9.1 ピンチオフ効果 . . . . .	617
 第 VIII 部 電気回路/電子回路	619
 第 38 章 電気回路/電子回路の構成要素	621
38.1 電気回路/電子回路とは何か . . . . .	621
38.1.1 導線（導体）と絶縁体 . . . . .	621
‡ memo No.103: 導体/半導体/絶縁体の違い . . . . .	623
38.1.2 起電力・電源 . . . . .	624
38.1.2.1 起電力 . . . . .	624
38.1.2.2 電源 . . . . .	625
‡ memo No.104: 起電力と電源の違い . . . . .	625
38.1.3 電気回路 . . . . .	626
‡ memo No.105: 理論が先か、経験が先か . . . . .	626
38.1.4 電子回路 . . . . .	627
38.1.5 電気回路と電子回路の違い . . . . .	627
38.2 電気回路の構成要素 . . . . .	628
38.2.1 素子 . . . . .	628
38.2.2 抵抗とオームの法則 . . . . .	628
38.2.2.1 抵抗の定義 . . . . .	628

38.2.2.2	抵抗の回路図記号	629
38.2.3	キヤパシタ	630
38.2.3.1	キヤパシタの物理的構成	630
38.2.3.2	キヤパシタンスの定義	630
38.2.3.3	キヤパシタの回路図記号	631
38.2.3.4	キヤパシタの電気回路中の動作	631
38.2.4	インダクタ	633
38.2.4.1	インダクタの物理的構成	633
38.2.4.2	自己インダクタンスの定義の準備	633
38.2.4.3	自己インダクタンスの定義	634
‡ memo No.106:	ソレノイドのつくる磁束密度	635
38.3	電子回路の構成要素	636
38.3.1	ダイオード	636
38.3.1.1	ダイオードとは	636
38.3.1.2	ダイオードの回路図記号	637
38.3.1.3	ダイオードの特性	637
38.3.2	トランジスタ	638
38.3.3	受動的な素子/能動的な素子	638
‡ memo No.107:	回路が「記憶」できるようになった	638
38.4	電磁気学とのつながり	638
38.4.1	コンダクタンス	638
38.4.2	抵抗	640
38.4.3	オームの法則	641
38.4.4	オームの法則は物理法則ではない	642
38.4.5	オームの法則の導出1：高校生への標準的な説明	643
38.4.6	オームの法則の導出2：微分方程式	646
38.4.7	オームの法則の導出3：電子移動度	650
38.4.8	ジュール熱と電力	653
38.4.9	電流と電球の発光との関係	656
38.4.10	電気抵抗率	657
38.4.11	電気伝導率	657
38.4.11.1	キヤパシタンスの形と容量の関係	659
‡ memo No.108:	電気力線と等電位線は直交する	662

---

第 39 章 代表的な電気回路	665
39.1 抵抗のみの回路 . . . . .	666
39.2 インダクタと抵抗の回路（直列） . . . . .	666
39.3 キャパシタと抵抗の回路（直列） . . . . .	666
39.4 抵抗, インダクタ, キャパシタの直列回路 . . . . .	666
39.5 インダクタと抵抗の回路（並列） . . . . .	666
39.6 キャパシタと抵抗の回路（並列） . . . . .	666
39.7 抵抗, インダクタ, キャパシタの並列回路 . . . . .	666
39.8 積分回路 . . . . .	666
39.9 微分回路 . . . . .	666
39.10 変圧器 . . . . .	666
第 40 章 代表的な電子回路	667
40.1 整流回路（インバータ） . . . . .	667
40.2 増幅回路 . . . . .	667
40.2.1 「増幅」の意味 . . . . .	667
第 41 章 コンピュータの物理学的基礎	669
41.1 考え方と方針 . . . . .	669
‡ memo No.109: 注意 . . . . .	670
41.2 電磁気学の復習 . . . . .	670
41.2.1 電子の存在 . . . . .	670
41.2.2 「ホール (hole)」という考え方 . . . . .	670
‡ memo No.110: 炭酸の泡 — ホールに似た現象として — .	671
41.2.3 電荷保存則 . . . . .	672
41.2.3.1 電場に対するガウスの法則 . . . . .	672
41.2.3.2 アンペール = マクスウェルの法則 . . . . .	672
41.2.3.3 電荷保存の法則 . . . . .	673
41.2.4 電位（電圧）の定義 . . . . .	673
41.3 トランジスタの動作概要 . . . . .	673
41.3.1 半導体 . . . . .	673
41.3.1.1 半導体の分類 . . . . .	673
41.3.1.2 真性半導体 . . . . .	673
41.3.1.3 n 型半導体, ドナー . . . . .	673

41.3.1.4 p型半導体, アクセプタ . . . . .	673
41.3.2 ダイオード . . . . .	673
41.3.3 ダイオードの電流電圧特性 . . . . .	673
41.3.4 トランジスタの物理構成 . . . . .	673
41.3.4.1 バイポーラトランジスタの物理構成 . . . . .	673
41.3.4.2 電界効果型トランジスタ (FET) の物理構成 . . . . .	673
41.3.4.3 MOSFET トランジスタ (MIS 構造) の物理構成 . . . . .	673
41.3.4.4 CMOS の物理構成 . . . . .	673
41.3.5 トランジスタの動作 . . . . .	673
41.3.5.1 バイポーラトランジスタの動作原理 . . . . .	673
41.3.5.2 MOSFET トランジスタ (MIS 構造) の物理構成 . . . . .	674
41.3.5.3 トランジスタの動作 (これだけを覚えていれば十分) . . . . .	674
41.4 コンピュータの構成概要 . . . . .	674
41.4.1 コンピュータの定義 . . . . .	674
41.4.1.1 コンピュータとは何か . . . . .	674
41.4.1.2 コンピュータの構成方法 . . . . .	676
41.4.1.3 ノイマン型コンピュータ . . . . .	676
41.4.1.4 ハーバードアーキテクチャ . . . . .	676
41.4.2 CPU (中央処理装置) . . . . .	676
41.4.2.1 制御装置 . . . . .	676
41.4.2.2 主記憶装置 (メモリ) . . . . .	676
41.4.2.3 ALU (算術論理演算装置) . . . . .	676
41.4.3 入出力装置 . . . . .	676
41.4.3.1 入力装置 . . . . .	676
41.4.3.2 出力装置 . . . . .	676
41.5 コンピュータの基本構成回路 . . . . .	677
41.5.1 NOT 回路 . . . . .	677
41.5.2 AND 回路 . . . . .	677
41.5.3 OR 回路 . . . . .	677
41.5.4 NOR 回路 . . . . .	677
41.5.5 NAND 回路 . . . . .	677
41.6 制御回路 . . . . .	677
41.6.1 クロック . . . . .	677

---

41.6.2 リセット . . . . .	677
41.6.3 制御用選択回路（マルチプレクサ） . . . . .	677
41.7 記憶回路（簡易的なメモリの作成） . . . . .	677
41.7.1 コンピュータにおける「記憶」の意味 . . . . .	677
41.7.2 メモリの構成 . . . . .	677
41.7.2.1 メモリとは . . . . .	677
41.7.2.2 アドレスデコーダ . . . . .	677
41.7.2.3 メモリセル . . . . .	677
41.7.3 メモリセルの基本素子 . . . . .	677
41.7.3.1 ラッチ（Latch） . . . . .	677
41.7.3.2 記憶回路の要素 . . . . .	677
41.7.3.3 D-ラッチ . . . . .	678
41.7.3.4 D-フリップフロップ . . . . .	678
41.7.4 メモリの動作 . . . . .	678
41.8 計算回路（簡易的な ALU の作成） . . . . .	678
41.8.1 コンピュータが行う計算 . . . . .	678
41.8.1.1 10 進法 . . . . .	678
41.8.1.2 2 進法 . . . . .	678
41.8.1.3 16 進法 . . . . .	678
41.8.1.4 2 の補数（負の数の表現） . . . . .	678
41.8.1.5 2 進法による足し算 . . . . .	678
41.8.2 簡易 ALU の構成 . . . . .	678
41.8.2.1 加算器 . . . . .	678
41.8.2.2 乗算器 . . . . .	678
41.8.2.3 アキュムレータ . . . . .	678
41.8.3 簡易 ALU の動作 . . . . .	678
<b>第 IX 部 数学の勉強ノート</b>	<b>679</b>
<b>第 42 章 はじめに</b>	<b>681</b>
42.1 物理学と数学 . . . . .	681
42.2 「数学的準備」の学習マップ . . . . .	682
<b>第 43 章 関数</b>	<b>685</b>

43.1	集合 . . . . .	685
43.1.1	集合を定義するとは . . . . .	685
43.1.2	集合の直感的定義 . . . . .	688
43.1.3	集合の要素 . . . . .	689
43.1.4	空集合の存在 : $\emptyset$ . . . . .	690
43.1.5	ある集合を定義する . . . . .	691
43.1.5.1	特別な集合の定義の表現方法 . . . . .	691
43.1.5.2	集合の内包的定義 . . . . .	692
# memo No.111:	注意 . . . . .	692
43.1.5.3	集合の外延的定義 . . . . .	693
43.1.6	集合の性質 . . . . .	693
43.1.6.1	集合の共通部分 . . . . .	694
43.1.6.2	合併集合（または、和集合） . . . . .	697
43.1.6.3	補集合 . . . . .	700
43.1.6.4	差集合 . . . . .	702
43.1.6.5	直積（または、積集合） . . . . .	703
43.1.6.6	商集合 . . . . .	704
43.1.6.7	幂集合 . . . . .	704
43.2	写像 . . . . .	704
43.2.1	写像とは . . . . .	704
43.2.2	関数 . . . . .	706
43.2.3	関数のイメージ . . . . .	706
43.2.4	三角関数 . . . . .	709
43.2.4.1	三角比 . . . . .	709
43.2.4.2	三角関数の定義 . . . . .	711
43.2.4.3	三角関数の図形的イメージ . . . . .	712
43.2.4.4	三角関数の性質 . . . . .	714
第 44 章	三角関数	717
44.1	三角関数の公式 . . . . .	717
44.1.1	加法定理 . . . . .	717
44.1.2	倍角公式 . . . . .	718
44.1.3	三倍角公式 . . . . .	718
44.1.4	半角公式 . . . . .	718

---

44.1.5 積和公式 . . . . .	718
44.1.6 和積公式 . . . . .	719
<b>第 45 章 微分積分学</b>	<b>721</b>
45.1 極限 . . . . .	721
45.1.1 数列とは . . . . .	721
45.1.2 等差数列 . . . . .	721
45.1.3 等比数列 . . . . .	721
45.1.4 等比級数 . . . . .	721
45.1.5 無限等比級数 . . . . .	721
45.1.6 数列の極限 –「限りなく 0 に近づける」とは – . . . . .	721
45.1.7 関数の極限 – $\varepsilon$ - $\delta$ 論法 – . . . . .	725
45.2 積分 . . . . .	727
45.2.1 長方形の面積公式に対する疑問 . . . . .	727
45.2.2 長さとは何か . . . . .	728
45.2.3 長方形の面積とは何か . . . . .	729
# memo No.112: 一般的な形の面積 . . . . .	732
# memo No.113: 「直角」とは何か . . . . .	733
45.2.4 関数と、図形の面積 . . . . .	735
# memo No.114: 一般的な図形の例 . . . . .	736
45.2.5 「関数 $f(x)$ と $x$ 軸の間の面積」とは . . . . .	737
45.2.6 関数 $f(x)$ に与える条件 . . . . .	737
45.2.7 変数 $x$ のとりうる値の制限 . . . . .	738
45.2.8 「近似的な面積」という考え方 . . . . .	738
# memo No.115: 和の記号 $\sum$ . . . . .	739
# memo No.116: 番号 $i$ を用いた表現（例 $x_i$ ） . . . . .	740
45.2.9 面積確定の図形 . . . . .	741
45.2.10 積分可能 . . . . .	741
45.2.11 定積分の定義 . . . . .	742
# memo No.117: 「無量大」とはどういうことか . . . . .	744
# memo No.118: 記号 $dx$ の意味 . . . . .	744
45.3 微分 . . . . .	745
45.3.1 変化の割合 . . . . .	745
45.3.2 「変化の割合」を拡張する . . . . .	745

45.3.3	導関数の定義（「微分する」ということ）	747
45.3.4	微分（ $dy$ の形式的定義）	748
	# memo No.119: 独立変数 $x$ の微分	750
	# memo No.120: 導関数の式	750
45.3.5	（関数 $f(x)$ の）接線の方程式	750
45.3.6	$dy$ の図形的イメージ	751
45.3.7	1 次関数 $f(x) = ax + b$ の増加量	751
45.3.8	1 変数関数 $f(x)$ の増加量	752
45.3.9	偏微分	753
45.3.10	全微分	754
45.4	よく使う公式	755
45.4.1	和の微分	755
45.4.2	積の微分	756
45.4.3	商の微分	757
45.4.4	合成関数の微分	758
45.4.5	部分積分	760
第 46 章	微分方程式	761
46.1	微分方程式とは	761
	46.1.1 微分方程式の概要	761
第 47 章	ベクトル	763
47.1	ベクトルの定義	763
	47.1.1 図形的（幾何学的）なベクトル	763
	# memo No.121: ベクトルの位置は不問である	763
47.1.2	代数的なベクトル	765
	47.1.2.1 横ベクトル	765
	47.1.2.2 縦ベクトル	766
47.1.3	ベクトルの大きさ	766
47.1.4	ベクトルの次元	768
	# memo No.122: $n$ 次元の三平方の定理	768
47.1.5	ベクトル空間の定義	769
47.1.6	ベクトルの定義	769
47.2	ベクトルの性質	770

---

47.2.1	ベクトルの転置	770
47.2.2	ベクトルの四則演算	771
47.2.2.1	ベクトルの加法	771
47.2.2.2	実数とベクトルの積	772
47.2.2.3	ベクトルの減法	773
47.2.3	ベクトルの内積（図形的）	774
47.2.4	ベクトルの内積（代数的）	775
47.2.5	図形的内積と代数的内積の関係	776
47.2.6	ベクトルの内積の性質	777
47.2.7	ベクトルの外積	778
47.2.7.1	外積の定義	778
47.2.7.2	外積の成分表示	781
47.2.7.3	外積の成分表示の検算	782
# memo No.123:	右手系とは何か	785
47.3	特殊なベクトル	786
47.3.1	単位ベクトル	786
# memo No.124:	具体例	788
47.3.2	基底ベクトル	789
# memo No.125:	注意	790
第 48 章	ベクトル解析	791
48.1	ベクトル関数	791
48.1.1	ベクトル変数（あるいは、変数ベクトル）	791
48.1.2	ベクトル関数	791
48.1.3	ベクトル関数の微積分	793
48.1.3.1	極限	793
48.1.3.2	導関数	793
48.1.4	使用用語	793
48.1.4.1	導線(曲線)	794
48.1.4.2	閉曲線	795
48.1.4.3	曲面	795
48.1.4.4	閉曲面	796
48.1.4.5	領域	796
48.1.5	線積分と面積分のイメージ	797

48.1.6 ベクトル空間 . . . . .	797
48.1.7 ベクトルとスカラーの区別の仕方 . . . . .	798
48.1.8 線積分 . . . . .	798
‡ memo No.126: 詳細 . . . . .	799
48.1.9 面積分 . . . . .	801
48.1.10 ベクトルの発散・回転・勾配 . . . . .	802
48.1.10.1 ベクトルの発散 (div) . . . . .	802
48.1.10.2 ガウスの定理 . . . . .	804
‡ memo No.127: 整理 . . . . .	806
‡ memo No.128: 「ガウスの法則」と「ガウスの定理」 . . . . .	806
48.1.10.3 ベクトルの回転 (rot) . . . . .	806
48.1.10.4 ベクトルの勾配 (grad) . . . . .	809
48.1.10.5 ベクトル解析の公式 (演算子) . . . . .	809
48.1.10.6 ストークスの定理 . . . . .	809
<b>第 49 章 行列</b>	<b>811</b>
49.1 行列とは . . . . .	811
<b>第 X 部 思想</b>	<b>813</b>
<b>付録 A 感覚・思考・表現</b>	<b>815</b>
A.1 根拠なしに、確信できること . . . . .	815
‡ memo No.129: 言葉と思考の順序 . . . . .	816
‡ memo No.130: 言葉の習得 . . . . .	816
‡ memo No.131: 意思疎通 . . . . .	817
A.2 表現 . . . . .	818
A.3 「科学」の思想 . . . . .	818
‡ memo No.132: 基礎がない、考えが循環する . . . . .	818
<b>付録 B 論理</b>	<b>821</b>
<b>第 XI 部 思うこと、思ったこと</b>	<b>823</b>
<b>付録 C 素朴な疑問</b>	<b>825</b>

---

C.1	最も基本的なこと	825
C.2	私の思想の根本	826
C.3	思考の道具	826
C.4	言語の曖昧さ	827
C.5	日常言語	827
<b>付録 D</b>	<b>論理学とか、数学とか</b>	<b>829</b>
D.1	論理	829
D.2	論理学	830
D.3	数学	830
D.4	物理学	831
<b>付録 E</b>	<b>他愛のない、思ったこと</b>	<b>833</b>
E.1	生まれ変わる？	833
E.2	教科書に書かれていること	834
E.3	心配レベル	835
E.4	"分からぬこと" と "知らないこと"	835
E.5	故事成語	836
E.5.1	華胥 <small>かしょ</small> の國 <small>くに</small>	836
E.5.2	胡蝶 <small>こちょう</small> の夢 <small>ゆめ</small>	836
E.5.3	上善 <small>じょうぜん</small> は水 <small>みず</small> のごとし	836
E.5.4	驥足 <small>きそく</small> を伸ばす	836
E.5.5	驥尾 <small>きび</small> に付す	837
E.5.6	木 <small>き</small> に縁りて魚 <small>よ</small> を求む <small>さかな</small> もと	837
E.5.7	人間 <small>じんかん</small> 到る所 <small>いた</small> に青山 <small>せいざん</small> 有り <small>あ</small>	837
E.5.8	過ぎたるは及ばざるがごとし <small>およ</small>	837
<b>参考図書・教科書等</b>		<b>839</b>



第Ⅰ部

古典力学



# 1

## 物理学への導入

### 1.1 物理学を勉強する理由

コメント これから物理学を勉強していく。だけどその前に、勉強とはどういった活動かを明確にしておきたい。このノートでの理由は、簡単に言ってしまえば、"知りたい"という衝動にかられて書物などを読み、それを理解することで満足感を得ることだが、もう少し一般的な視点で記述しておく。

#### 1.1.1 科学を勉強する

##### 1.1.1.1 科学とは何か

物理学は科学の基礎となる分野である。全ての他の科学は、究極的には、物理学によって説明できるはずである<sup>1)</sup>。物理学のノートを作成するにあたり、最初に、科学的活動についてのイメージを記述しておくべきだろう。

科学に対するイメージとして有名なのは、次の 2 つであろう。

---

<sup>1)</sup> 1) 根拠はない。大袈裟かもしれない。この見解は間違っているかもしれない。でも、すべての科学理論が物理学に帰着できると信じている。

- (1) 科学とは、世の中の複雑な現象を解析し、理解するための活動である。  
(2) 科学とは、世の中の複雑な現象に対して、最も単純な説明を与える活動である。

(1) のイメージは、「真の自然法則を追い求めることが科学である」という主張である。これに対し、(2) のイメージは、「科学は自然現象の良い説明の探求」である。要するに、(1) の考え方では、科学によって真の自然の姿を見出すことが可能であると信じるのだが、翻って(2) の考え方によると<sup>2)</sup>、科学では自然の真の姿を見出すことではなく<sup>3)</sup>、それに限りなく近づくことである、ということである。(1) の考え方をとると、自然の姿そのものの探求となるが、(2) の考え方では自然現象の"説明"の探求ということになる。この2つの考え方はどちらも間違ってはいないように思える。科学を熱く語る場合には(1) の立場になりがちだが、それを冷静に反省している時には(2) の立場になることだろう。

科学とは何かとか、どういった活動かを考える学問分野に、科学哲学がある。科学哲学は人間が行う科学的な活動について研究する分野で、法則の信頼性であるとか、科学的推論の妥当性だとかを見直す必要があることを示してくれる。

実は「科学とは何か」という疑問は奥が深い。実際、未だに万人が賛成するような結論がない。ここでは、科学とは何かという問題は思ったよりも難しいものであることを認識してもらって、学習を先に進めよう。学習をすすめる過程で、科学とはどういったことかを体験できるであろう<sup>4)</sup>。

とりあえず、やってみること。そして、それをやり続けること。そうする中で、一度立ち止まり、今までやってきたことを反省してみる。そうすることで、科学とは何かを悟るしかない。もともと、科学という活動基準があったのではない。ある活動を後から反省すると、その中に、特別な思想に従った活動であることを見出し、その活動に科学という名前を与えたのだ。これはきっと、科学だけではなく、他の学問に対しても、同じことが言えるだろう。

### 1.1.1.2 科学活動の原動力は好奇心だ

なぜ、自然現象を理解したり、それを説明しようとするのか。その理由は、別に大した理由ではなく、単に、"知りたいから"という知的好奇心によるものであろう。工学的な仕事をしている私にとっては、「世の中の原理を解明して、それを利用すること

<sup>2)</sup> 翻る（ひるがえる）：態度・説などが、急に変わって反対になる

<sup>3)</sup> (2) の考え方では、科学は真の自然の姿を見出すことはできないという立場である。

<sup>4)</sup> ただし、言葉で説明するのではなく、実際に物理学の学習を通して、その感覚を覚えるということである。

とで、より暮らしが豊かになるような装置を作ることができる」ときれいごとを言うことができるかもしれないが、これは建前であり本心ではない。

日常生活で不思議に感じる現象やモノについて、その性質や特徴を調べて、整理する。もしその複雑な現象を人間が理解し、更に制御できるようになれば、その現象を利用した、よりよい世界を構築できる。本当にそうなのだろうか。科学的活動を行う動機や理由は人それぞれで、絶対的な答えはないかもしれない。それでも、次のことは言えると思う。

「世の中には不思議な現象がたくさんある。人間は不思議なことをそのまま放つておくことができない。自分が納得し不思議がなくなるまで追求し続けなければ、気が済まない」

#### 1.1.1.3 科学的活動の手順

具体的に科学的活動をするには、どうすればよいのだろうか。いや、そもそも、私は科学的活動が行えるだろうか。結論から言うと、残念ながら、私のような人間には科学的活動はできない。理由は簡単で、私が理解力に乏しく、発想力もないからだ。科学的活動に必要なのは、認識力や観察力や発想力であり、更に加えて行動力、忍耐力なども大事だ。

現象を解析するには、その現象を詳細に観察し、その特徴を見抜かないとならない。安易に観察すると言ってしまったが、そんな簡単にできるものではない。観察するための環境作りが必要なのだ。現象を観測するためには、確実にその現象を起こすことができ、その現象を多角的<sup>5)</sup>に見ることができる環境が必要とされる。そもそも観測の方法すら思いつかないことも多々ある<sup>6)</sup>。

努力して観測環境が整えたとしても、その観測作業は単調な場合が多く、忍耐力も必要だ。単純作業の繰り返しはつまらないから、飽きてしまいがちなのだ。だけど、それに耐えて必死に観測して、十分に考察できるためのデータを集めないといけない。データがたくさん集まったら、そのデータを解析してその特徴をつかむ。これには、奇抜な発想力が必要だ。ときには大胆な仮説をたてる精神力も必要とされる。大胆な仮説は、反感をいだかせることが多く、多くの人の反対意見を浴びることだろう<sup>7)</sup>。

<sup>5)</sup> 多角的：いろいろな考え方という意味。1つの現象を異なった観点から見つめなおすことは大切なこと。「相手の立場になって考えてみなさい」とか言われるでしょう？

<sup>6)</sup> UFO や幽霊を科学的に扱うことは難しい。その確実な観測方法がわからないし、人によって見えたり見えなかったりするからだ。

<sup>7)</sup> 無限集合論の立役者であるカントールや、統計物理学の生みの親であるボルツマンは有名だ。

### # memo No.1: 科学するために必要な能力

だらだらと書いてしまったので、まとめておこう。科学とは、世の中に存在する複雑な現象を解析し、理解するための活動である。そして、科学を行う上で必要とされる能力は下記の通り。

- 認識力：現象を見逃してはならない
- 觀察力：現象を詳細に見ないといけない（現象を深く理解するため）
- 行動力：探求の遂行する力
- 忍耐力：単調なデータ収集作業にも耐えること（データなくして考察はできない）
- 発想力：困難なことでも、それを解決するために
- 読解力：先人の研究成果は、文書によりまとめられている
- 文章力：研究成果を明確に記録する必要がある
- 注意力：計算ミス、記述漏れ、論理的矛盾がないように
- 精神力：奇抜な仮説を、相手に理解してもらうために

もちろん上記だけでは十分でないが、少なくともこうした能力は必要とされている<sup>8)</sup>。

#### 1.1.1.4 まずは、教科書を読むことから

教科書で物理学を学習するということは、科学的活動ではない。確かに、それは科学を始める第一歩ということかもしれないが、単なる準備段階でしかない。教科書で物理学を学習するということは、すでに解析済みの現象に関する知識を得るということである。すでに解決されていることを、未知の現象として問題にすることは馬鹿げているだろう。単に自分が知らないだけで、過去の偉人がその現象を解明しているのであれば、その知識をありがたく受け入れるべきだ。つまり、先人の行った研究とその結果を知っておく必要がある、ということだ。その為に、教科書を読むのであり、教科書はそのために書かれている。科学者の仕事は、現在でも未解決である問題に取り組み、それを解き明かすべく模索を行うことである。ただし、教科書に書かれていることを鵜呑みにしてはならない。納得しながらその内容を吸収することが大事だ。

このノートで行なうことは、上記のうち、先人たちが行なってきた研究とその結果を学習することにある。しかし、その理由は科学のさらなる発展のためではなく、単に"知りたい"という欲求を満たすためである。

---

<sup>8)</sup> 上記は、科学を行う者に要求される必要条件であり、十分条件ではないということ。

### 1.1.2 学問と専門用語

学問的に意味のある現象には、それを指すための語彙があり、そのような語彙のことを 専門用語 という。

専門用語には日常的に使う語彙を用いる（流用している）こともあるが、その意味は日常言語の意味とは異なることが多い。もちろん、日常言語と意味が一致することもある。学問的に意味のある語彙が日常言語に存在する場合、それを使うこともある。「力」とかは、その有名な例だ。日常言語が専門用語として使われる場合でも、詳細に意味づけ（定義）されている。

専門用語は議論を簡潔にするために、使用される。分かりきったことを何度も書くのは、紙面や時間の無駄なので、何か特別な単語をつくって、それを簡略的に表現するのである。決して、わざと難解な言い回しでをして、格好をつけているのではない。専門用語を使うことで、論理の流れを明確にし、議論の妥当性の判断を容易にできるのだ。

#### # memo No.2: 専門用語を使うとカッコよくみえる？

「『知』の欺瞞」という、有名な本がある。著者はソーカルとブリクモンという科学者の二人である。内容を簡単にいうと、次の通り。

哲学者が、科学的成果を自説の根拠として引用するようになった。しかし、その引用される科学的成果は、誤解されていたり、単に自身の議論の妥当性を強く見せかけるためであったりと、間違った解釈で乱用されることが多く、正式な哲学論文でもこのような状況が頻発するようになった。論文の査読者がいるにもかかわらず、科学的成果の間違った解釈が、論文として流布するようになっていたのである。著者二人は、この状況を見過ごしてはならないと決意し、1つの論文を書きあげる。その論文の内容は、科学的成果を"意図的に"誤用しているものであった。そしてそれを、哲学の論文として雑誌に掲載してもらうべく、学術機関に提出した。本来であれば、論文の内容が明らかに誤っているから、査読の段階でそのことを指摘されるはず。しかし実際は、正式な哲学論文として認められ、実際に哲学論文雑誌に掲載されてしまった。これにより、哲学論文の査読者が科学的成果を正確に把握していないことが、明らかになった<sup>9)</sup>。

著者らは、この論文の雑誌掲載の後に、その内容がなんの根拠もない無意味な文の羅列であることを告白した。それは、科学者から、科学的成果を乱用する哲学者に向けた否定的な批判であり、その後、様々な言い争いが展開されることになる。

<sup>9)</sup> 科学的成果を語ることは格好が良いことであり、論文もそれっぽく仕上がりがついているように錯覚されてしまうのだろうか。

## 1.2 物理学の思想

### 1.2.1 物理学を学ぼう

物理学の、その第一の目的は、私たちの生きるこの世界は、どのように作られているかということを調べることである<sup>10)</sup>。だから、物理学を始めるには、何よりも先に、この世界の現象を体験しないとならない。当たり前のことだけど、この点に関しては、物理学に関心がない人でも行っている。そして、次の段階には、この世界の現象に興味を抱くことが必要だ。世界の現象に興味を抱けば、それを把握したいという欲求は、どんな人でも感じることだと思う。この、世界を把握したいという気持ちが、物理学を学ぶ上で大きな動機につながることだろう。さあ、世界がどのように構成されているかを調べるために第一歩として、物理学を学んでいこう。

#### # memo No.3: 「なぜ」と「どうのように」の違い

物理学の目的は、なぜこの世界は存在するのかとか、なぜこの世界はこんな風になっているのかとか、「なぜ」を調べるのではない。「どうなっているか」を調べることが、物理学である。物理学の教科書には、こう書かれていることが多い。物理学は「なぜ」を探るのではなく、「どのように」を探る学問だというのだ。しかし、最初に思い浮かぶ疑問は「なぜ」だろう。"なぜ空は青いのか", "なぜ鳥は空を飛べるのか"という疑問がはじめにあるはずである。このような「なぜ」の疑問に対する答えを得るべくして最初に行なうことが、「どのように」を探ることなのだと思う。なぜ空が青いのかを調べるために、空が青く見える仕組みを探るということである。

物理学を始めとする科学を学習していくうちに、「なぜ」という質問に答えることができないことを悟っていくことだろう。逃げの言葉に聞こえるかもしれないが、実際にできないのだからしかたがない。だけど、面白いことに、「どのように」という疑問を推し進めていくと、「なぜ」という疑問の答えに近づいていくのである。

なぜこれがそうなっているのか。まずは、これがどういう仕組みなのかを調べてみよう。そしてその仕組みがわかったら、更にその疑問を深めて、なぜその仕組みになっているのかを考えてみよう。より基本的な原理を見出すことができるだろう。そのより基本的な原理とは、どのような原理なのだろうか。もっと詳しく調べてみよう——科学はこうして進展する。

---

<sup>10)</sup> 先にも書いた通り、自然の真理そのものを求めるのか、それとも、自然の真理の説明を求めるのか、というような考え方の違う立場あるが、いずれにしても、自然現象の振る舞いについて調べることが、第一の目標である。

### 1.2.2 因果関係

例えば、普段の生活で、事件が発生した時、その原因があるはずという確信の下、原因を追究する。この原因と事件（事実）の関係を **因果関係** という。例えば、ポケットに入れておいたはずの財布が無くなっていた場合、原因是落としてしまったか、もしくは、盗まれたかであろう。ここでは、落としてしまったとしよう。財布がポケットから無くなったという事件は、財布を落としたという原因により、発生したのである<sup>11)</sup>。

一般に、事件（財布がない）とその原因（財布を落とした）は何らかの関係があると感じられる。財布を落としたから手元にない、というように、財布がない理由として、落としたことを関連付けることは当たり前であると思われる所以である。しかし、突き詰めて考えると、事件と原因の関係を関連付ける理由はどこにもない。わかっているのは、「財布が手元にないこと」と「財布を落としてしまった」という2つの事実だけである。この2つの関連は人間が勝手に想像しているに過ぎない。因果関係は人が勝手に想定しているだけで、実際にその関係自体を観測できるわけではない。実験的にわかることは相関関係であり、因果関係は実験で確認することはできない。しかし、物理学では因果関係を実験的に検証しようとする。

物理学は、宇宙の起源や物体の構成を研究する学問であり、現在の私たちの身の回りで起きている事件とその原因の因果関係を研究することで、それを探っている。因果関係には厳密な根拠はないけれども、私たちにはそれに対して強い確信をもつてゐる。因果関係を厳密に説明できないけれど、実験でわかる様々な事象の相関関係を総合的に考慮することで、事件とその原因を合理的に関連づけることができ、因果関係が成立していると信じることにしよう。ほんとうに因果関係というものがこの世に存在するのかはわからないが、その存在を認めるならば科学的考察が可能になる。たまに因果関係を疑って哲学をしてもよいが、少なくとも物理学を学習しているときには、因果関係の成立は論理の土台として根拠なしに認めることにしよう。

---

<sup>11)</sup> ふつうは事件と原因の順を入れ替えて、財布を落としてしまったので、財布がポケットから無くなってしまったのだ、と考えるだろう。

### 1.2.3 経験, 仮説, 実験, 解釈

#### 1.2.3.1 科学的活動

自然現象の発生原因とその機構を実験により解明し, 整理し理解しようとする行為を, 科学的活動 という。現象の規則性を見出し, 言葉によって書き表すことが, 目的である<sup>12)</sup> 科学的活動を行うにあたって, いくつかの段階がある。特徴的なものを大まかにあげると,

- (1) 経験, (2) 仮説, (3) 実験, (4) 解釈

となるだろう。

自然現象を経験し, その現象の説明する仮説をたて, その仮説を実証するために実験をして, 結果を考察する。そして, 考察して得た情報から, その意味を解釈して仮説を支持するか否かを判断するのだ。以下で, この各段階で行われることについて, 考える。

#### 【疑問】体で感じる現象は, 本当に“生じている”のだろうか?

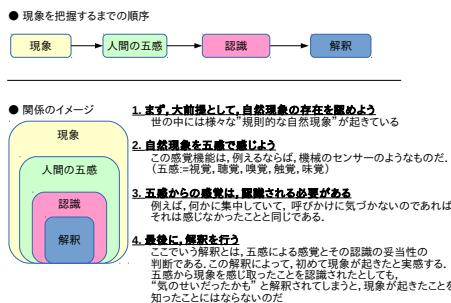


図 1.1 科学的活動

▶ 12) その原動力は単なる知的好奇心であったり、自然災害などの被害を最小限に抑えるための手段の探求だったりと、様々な動機があるだろう。

### 1.2.3.2 経験 = 現象を観察する

物理学は実験や経験を基に構成される。この経験というのは、私たちの五感で感じる経験のことである。この点で、経験を排除しようとする数学とは異なる<sup>13)</sup>。

### 1.2.3.3 仮説 = 現象の説明の試み

自然を感じたことを、ノートに書き取る。いろいろ書いていくうちに、自然現象に共通点があることに気づく。そして、その共通点を元に、ある仮説をたてる。そして、その仮説を確かめるべく、実験をする。結果が正しければ、その仮説が立証させられたことになる<sup>14)</sup>。

### 1.2.3.4 実験 = 仮説の検証

何度も言うが、実験により確かめるということが重要であり、これを怠ってはならない。物理学の基本的な作業工程は、経験を元に、仮説を立て、実験をしてその仮説の正しさを確かめることである。立てた仮説が多くの<sup>15)</sup>自然現象を説明できるのであれば、それはいつしか「法則」と呼ばれるようになる。

実験の大まかな手順は次の通りだ。まず、仮説を検証するために妥当な実験をしないとならない。仮説と全く関係のない実験をしても無意味だ<sup>16)</sup>。そのためには、実験計画を立てる必要がある。適切な実験方法を考えるのだ。そして、実験器具を揃え、注意深く実験を遂行する。実験データはノートに書き残しておく<sup>17)</sup>。実験中の異変も記録しておくべきだ。実験が終わったら、結果を整理し、計画通りの実験が行えたかどうかを見直す。間違いがなければ、これで実験の終了である。後は考察するだけだ。

- ▶ 13) 数学は、論理と算術のみによって、構成される。数学の構成には、怪しげな経験などは含まれない。数学で仮定されるのは、ごく少数の、それも誰もが正しいと認めるような、約束（公理と呼ばれる）だけである。数学は、まず公理を構成し、その公理を満たす対象の性質（定理、命題など）を研究する。
- ▶ 14) 仮説が否定される結果を得ることも多いが、仮説に対して肯定的な結果を得たときには、さぞうれしいことだろうこんな経験をしてみたい。
- ▶ 15) 「多くの」というのは、"これまで知られている法則から導出される現象よりも、多くの現象が説明できる"という意味で用いた。といふことは、古い法則が新しい法則によって上書きされるのであるが、決して古い法則が間違っていたとは解釈されない。それは、法則が"拡張された"と言い訳されるのだ。このへんの考え方には、おそらく物理学の学習を進めていく段階で、自ずと、身につくてしまうものだ。
- ▶ 16) 体重を測ろうとしているのに、身長を測っても仕方ないだろう。
- ▶ 17) 個人的には、紙のノートにペンで記録したい。

実験から統計学や論理的推論により、実験で何が得られたかを考えることを 考察 という。実験が終わったら、必ず考察をして、実験による得られたことを明確にすべきだ<sup>18)</sup>。実験結果は、多くの場合、仮説の実証や反証よりもさらに深い知識を、私たちに提供する。考察をすることにより、実験結果から最大限の情報を引き出すのだ。

#### 1.2.3.5 解釈(考察)= 仮説の肯定、否定

さて、忘れがちなことだが、実験により得られたデータがその仮説を支持するか否かを判断することが必要である。このような行為を 解釈 という。仮説が物理法則になるための最後の閂門が、この解釈である。多くの人々がその実験データが仮説を有力に支持すると判断したとき、その仮説は、法則と呼ばれるようになる。

#### 1.2.4 自然現象の発生とその解釈

残念ながら、自然現象を人間が把握するには限界がある。いや、限界ではなく、制約という表現のほうがよいかもしれない。いずれにせよ、自然界で起こるすべての現象を正確に把握することは不可能である<sup>19)</sup>。理由は、人間の五感<sup>20)</sup>と、その情報を処理する脳が絶対に正確であると言い切れないところにある。

自然現象が発生したと人間が知る場合、まずそれは 五感 という感覚を通して通知される。そして、その感覚は脳へと渡り、初めて 認識 される。しかし、認識されるだけでは、まだ不安がある。"気のせいだ"という判断したことがない人は、おそらく、いないはず。感覚を脳が認識したにもかかわらず、気のせいとしてしまい、片づけられたら、それは、認識されなかったことと同じである。自然現象が起きたことを確信するためには、解釈 することによる妥当性の保証が必要である。この解釈には、根拠ない自信であってもよいが、その現象を示す複数の感覚や証拠があるともっとよい。複数の人間が同じように認識したのであれば、それは有力であろう。とにかく、機能性ではなく、何かが絶対に起きたという解釈がなされることによって初めて、そ

▶ 18) 考察を怠ることは、実験をしなかったことにするということである。実験の目的は、仮説の妥当性を実証もしくは反証することである。その判断を行うための前段階として、実験結果から何が言えるかを考えないとならない。

▶ 19) ここでは、立場を明確するために、不可能であると断言してしまったが、実際のところ、こう断言するための根拠はない。主張を弱めて、自然現象そのものを感じ取ることはできない、といったほうが無難なのかもしれない。

▶ 20) 「自然現象を感じ取るためのセンサー的機能」のことを指す。人間が自然に対して直接的に干渉する部分は、この五感である。

の現象がほんとに起こったこととして認識されるのである。

現象を五感で感じ取り、それを脳で認識し、その妥当性を解釈によって判断することによって、自然現象をとらえることができるるのである。

人間には、ウィルスを直接みることはできないし、超音波も聞こえず、紫外線も赤外線も見ることはできない。つまり、五感には限界があるということだ。先人はこれを克服すべく、顕微鏡を発明したり、現象を電圧や電流に変換するような装置を作ったりした。これによって、五感では感じ取れなかつたことも"見える"ようになった。どうやら、五感に関する限界は、それにとってかわる装置を発明さえすれば、突破できるようだ。しかし、人間の思考（脳）については、今のところ、どんなに頑張っても、その正確性を保証することはできないようだ。

"科学活動とは人間から見た自然現象の把握である"と考える人間原理的な立場では限界でも何でもないが、人間原理は新しい考え方を生まないために生産的ではなく、議論しても無駄だという結論しか導かれない。

#### # memo No.4: 偶然と必然

科学では、偶然という考えは極力避けるべきである。自然現象は必然的に発生することであり、発生したすべての自然現象が総じて現実である。実際に発生していないことは必然的に発生していないのである。起きることも起きないことも必然であり、偶然ではない。

しかし、必ず起きることとか、起きるかもしれないこととかの、判別の方法がない。偶然に起きたことだと思っていても、実はその発生は必然だったかもしれない。発生が必然的なものであったと思っていても、実はそれは偶然発生しただけかもしれない。

例えば、ガラスのコップがテーブルから床へと落ちた場合を考えよう。仮に、コップが割れたとする。このとき、コップが割れたことは必然であろうか。一般的にガラスは落したら割れると言われるので、コップが割れたことは必然であったとするのがしぜんであろう。しかし、もし、コップが割れなかった場合はどうか。コップが割れなかったことは、偶然であったと考えるのが妥当だと思うのだが、そう考えると、コップが割れることが必然であるという考えに矛盾する<sup>21)</sup>。

この矛盾を回避するために、可能性という概念を持ち出すことがある。コップが落ちたとき、コップが床に到達する直前では、コップが割れる場合と割れない場合の2があるが、どちらになるかの判別は全くつかない。コップが床に衝突した後になってからそれがわかるのだが、割れるにせよ割れないにせよ、それは偶然的に起きたこととして認識される。つまり、可能性という概念を導入すると、現象の発生は偶然的であるということになる。だが、科学ではそうは考えない。床の硬度とコップの材料や形や強度とか落下速度などの必要な情報が全てそろえ

► 21) 「落ちれば"必然"的に割れるガラスのコップが、"偶然"にもわれなかつた」とはどういうことか。偶然と必然は相反するものであり、必然的に起きることが偶然起きなかつたなんてことは考えられない。

ば、実際に落下しなくとも、そのようなことが起きた場合を仮に想定して、割れるか割れないかの判別は計算によって判別することが可能であると信じるのである<sup>22)</sup>.

#### # memo No.5: 相対主義と絶対主義/蓋然性の蓋然性

絶対に正しい真実はあるか。もしかしたら、あるかもしれない。でも、ないかもしれない。少なくとも、いままで見つかったことはない。答えは人それぞれであり、絶対的な答えはないとする立場を 相対主義 という。他方、絶対に正しいという答えがあるという立場は 絶対主義 とよばれる。相対主義は正しいか、いや、もっと強く表現して、相対主義は絶対に正しいか。あれ、相対主義が絶対に正しいとすると、絶対に正しいとする考えが存在するという立場にあるので、これは絶対主義である。矛盾だ。相対主義が正しいと主張する立場は絶対主義となる。ならば、相対主義も相対的に正しいのだと考えればどうか。だめだ。これでは、何も主張していないのに等しい。困った。これが相対主義のパラドクス。

科学は仮説を実験的に検証することは可能だが、絶対に正しいとは言い切れない。そうかと言って、実験結果は人それぞれだというわけではないので、相対主義でもない。そうなると、「ある程度正しいだろう」という意味の 蓋然性<sup>23)</sup> という考え方が浮上してくる。仮説が間違っているかもしれないという、譲歩的な気持ちがあらわれてくるのだ。でも、ちょっと待てよ。『「ある程度正しいだろう』という考え方』はどの程度正しいのか。つまり、蓋然性という考え方の正しさはどの程度か I (蓋然性の蓋然性)。正しさの根源を探ろうとすると、深みにハマる。答えが見つからない底なし沼だ。このあたりで、やめておこう。

#### # memo No.6: 真偽と確実性

「A であることは真実か」(真偽の問題) という質問と、「A であることは確実か」(確実性の問題) という質問。両者は似ているようで異なる。真偽はあらかじめ決まっているものであり(我々が知らないだけ)、実質的に根拠はいらない。他方で、確実性を考えるには根拠が必要である。「真であること」はありうるが、確実に真である保証はない。言葉と意味と論理に注意しておきたい。「『その事実が確実である』ことは確実ではない」といっているのではない。これは矛盾だ。

例えは、未解決問題が解けたという主張があり、その主張が検証段階にある場合、その主張が真であるということは、確実ではない(いま、まさにこの検証をしているのだから)。その主張が確実であるということは、真ではない(だからといって、確実でないことはない)。確実性を問う場合には、確実ではない可能性が想定されている。真偽を問う場合には可能性は皆無である。

真であることは真か、偽であることは真か、真であることは偽か、偽であることは偽か、真

<sup>22)</sup> 量子的な現象の場合には断定することができないのだが、それでも統計的(確率的)にいうことはできる。

<sup>23)</sup> 読み方は「がいぜんせい」である。正しさの程度を意味する。「蓋然性が高い」といった場合、そうである可能性が高い。「蓋然性が低い」といった場合、そうでない可能性が高い。

または偽であることは真か、同じ語彙を使う場合、メタレベルで考えないと矛盾に陥る。もっと、シックリくる説明はできないものか。

### 1.2.5 論理的な飛躍

科学的な説明を聞いて、"もっともらしい"と感じたことはないだろうか。そして、それを論理的だと思ってしまったことはないだろうか。しかし、この感覚は間違っている。科学は論理的ではないのである。確かに、論証は論理的であるが、科学の根源的な法則は、論理的に導かれたものではない。先に説明したように、科学法則は経験や実験から推察することによって、得ているものであることを忘れてはいけない。この推察の部分に論理的飛躍があるのだ。

#### # memo No.7: 例：ハッブルの法則

しばしば、仮説を表す命題の前提と結論を逆にすることにより一般化し、法則として捉えなおされることがある。

具体的な例で考えてみよう。「ハッブルの法則」と言われている法則がある<sup>24)</sup>。この法則が示すのは、宇宙が膨張していることである。その根拠は実験（観測）結果による。地球から見える天体が、遠ざかる速さとその距離が正比例する、というのが実験事実である。そして、そこから、宇宙が膨張していることが示されるという。論旨を追ってみると、まず、天体同士の距離が時間が経つごとに開くという観測事実がある。この現象は地球から見える宇宙のどの方向でも例外なく起こっていて、天体が近づくことはないという。つまり、宇宙のある所では天体間の距離が小さくなりつつあり、別の所ではその距離が開きつつあるというのではなく、宇宙のいたるところで、天体間の距離が同じように開いているというのである。宇宙の広がりに関する状態として考えられるのは3種類あり、(1) 静止状態<sup>25)</sup>、(2) 広がりつつある状態、(3) 縮まりつつある状態、である。この宇宙の3つの状態のうちでハッブルの法則に矛盾しないのは、(2) 広がりつつある状態である。さらに、天体間には重力という引力が働いているので、天体同士が反発するということはありえない。つまり、宇宙は膨張していると結論できる、という。以上の論旨を整理しよう。

- (1) 天体間の距離は、宇宙の至る所で、広がりつつある（前提1=観測事実）
- (2) 天体同士は重力が働いていて、斥力はない（前提2=観測事実）
- (3) 宇宙が膨張しているとしないと、矛盾が生じる（論理的整合性の考慮）
- (4) だから、宇宙は膨張している（結論）

前提が実験事実である天体間の距離の拡大であり、結論が宇宙の膨張であるということに注意してほしい。ここまで論理的な推論である。

しかし、科学的解釈を加えると、ここから話が飛躍する。天体間の距離の拡大と宇宙の膨張

► 24) ハッブル [著]、戎崎 俊一 [訳]、『銀河の世界』、岩波文庫

► 25) 広がったり縮まったりしておらずに定常状態を保っている、ということ。

を比べると、宇宙の膨張の方が根源的事実であり、天体間の距離の拡大は宇宙が膨張していることにより生じる1つの現象である、と考えるのが妥当だろう。要するに、天体間の距離が広がりつつあるのは宇宙が膨張しているからである、という命題が立てられるのである。この命題は、さっきの論旨の逆である。以下のように記号化してみよう。

A：天体間の距離は、宇宙の至る所で、広がりつつある

B：宇宙は膨張している

法則を探り当てた段階では、 $A \rightarrow B$  だったが、一度宇宙の膨張が導かれると、 $B \rightarrow A$  に置き換えられてしまった。論理的には、逆は必ずしも真にはならないのに。

ここからは、 $B \rightarrow A$  を法則として捉えてみよう。事実として現実に現れているのは、A の天体間の距離の拡大である。そしてその根拠として、B の宇宙の膨張が主張されている。しかし、この論理 ( $B \rightarrow A$ ) からは、A から B を導くことはできない。B は A を引き起こすことのできる1つの現象であると言えるが、それが唯一であるとは限らない。実際は何か別の現象 C があって、 $C \rightarrow A$  が成立していることも可能性として考えられるのだ。しかし、現在 C という可能性は提唱されておらず、 $B \rightarrow A$  の妥当性が極めて高いため、これを法則といっているのだ<sup>26)</sup>。

科学的推論は論理的ではない。頻繁に使われる帰納的推論やアブダクションは必ずしも正しい結論に到達するわけではない。また、意図的に前件否定、後件肯定などが行われる。だから、科学には実験的検証という作業が欠かせない。科学には実験がつきものである理由がここにある。そして数学との違いも、ここにある。

数学的推論は、人間のうっかりミスなどがない限り、必ず正しい結論に到達する。ABC 予想、「リーマン予想」など予想があるが、これらは証明されていないので、「予想」とされている。科学であれば、現状観測し得るすべての場合で、その予想に反する事実がなければ、「正しい」とされる。しかし、数学は論理的推論によりその結論に達しない限りは、正しいとみなされない<sup>27)</sup>。

### 1.2.6 推論の種類

科学は、実際の現象を感じ、その規則性を推論し、仮説を立てて、実験によりその仮説を検証してその正しさを確かめることで、知識を増やしていく。その過程で行われる推論は大きく分けて3つある。ここで、推論という行為について、少し考えて

▶ 26) 論理的には、A と  $B \rightarrow A$  が与えられた場合、"B の可能性がある" としか言えない。A と  $B \rightarrow A$  から、これを科学法則に仕立てあげるには、B 以外の原因 C が起こり得ない（現実的に考えにくく/起こりにくく）ことを示さなければならない。

▶ 27) 数学は科学ではない。数学は科学の重要な道具であるが、科学ではない。数学の方が論理的に厳密である。数学は現実を反映しない。現実を離れて抽象化される。現に、物理学的には、この世界は空間3次元と時間1次元の世界であるが、数学では次元は無限にさえなり得る、科学は世界に忠実であろうとするが推論や論理に穴がある。数学は誤りはないが、必ずしも現実世界に忠実であるとは限らない（現実を離れた抽象化できる）。

おこう。一言で推論といつても、その方法はいくつもある。しかし、共通して言えることは、すでに得られている知識から、新しい知識を導き出すことである。その方法は、演繹的推論、帰納的推論、発展的推論がある。

### 1.2.6.1 演繹的推論

演繹的推論は、例えば、数学の定理証明で使われる推論であり、三段論法を駆使して行われる行為である。この演繹的推論では常に正しい結論を得ることができる<sup>28)</sup>。

### 1.2.6.2 帰納的推論

帰納的推論とは、いくつかの現象から共通な部分を抜き出し、法則性を導き出す行為である。例えば、ケプラーの天体の運動に関する3つの法則は、帰納的推論により導き出されたものである。膨大な天体観測記録から、天体の運動の仕方に規則性を見出したのである。

### 1.2.6.3 発想的推論

発想的推論とは、過去の経験や知識を基に、因果関係を探る行為である。例えば、ニュートンが発見した万有引力は、発想的推論により導き出されたものである。手で持った物体を、ある高さから静かに手を放すと、地面に落ちる、という現象が目の前で起こっているとする。物体が落ちるという現象は見ることができる明らかな事実であるが、その落ちる原因は直感的にはわからない。なので、推論によってその原因を探る必要がある。ものが落ちるという現象を引き起こす、もっともらしい原因を見つけ出す行為こそが、発想的推論なのだ。形式的に言えば、現象 X が知られていて、その原因として、仮説 Y が成立していれば、現象 X が起こることが必然だとすると<sup>29)</sup>、仮説 Y が成立しているという結論が有力に支持される。もちろん、現象 X を説明できるのは、複数の仮説が考えられるはずである。この複数の仮説から真の原因を選び出すためには、実験と推論を繰り返す必要がある。発想的推論を短くいうならば、"X であるという事実" を目にしたとき、"Y ならば X であるという必然的因果関係" があるならば、"Y かもしれない" という結論を得る推論ということになる。

▶ 28)もちろん、ケアレスミスなどの、人的な誤りがなければ、ということだ。人的な誤りはミスは必ず見つける。

▶ 29)今までの例で言うと、X：物体の落下、Y：万有引力の法則となる。

#### 1.2.6.4 科学的推論

##### ¶ 長所と短所

帰納的推論と発想的推論の長所は、新しい知識を生み出すことができるところだ。欠点は、人の経験や思いつきなどが絡み合い、間違った結論を導き出すという危険な副作用があるということ。更に欠点をいうと、これらの推論で得た結論は、将来起る未知なる現象により、覆される可能性があるということだ。実際に起きていないことや過去に経験のないことに対しては、何も手が出せないのである。

これに対し、演繹的推論は常に正しい結論を導くことはできるが、新しい知識を作り出すことはできない。しかしその代わりに、一度導き出された知識は、未来永劫にわたって真であり、覆される可能性は全くない。

##### ¶ 科学的推論

科学と数学と違いは、帰納的推論と発想的推論にある。これらの推論には間違いが含まれるかもしれないというリスクはあるが、それを補つてあまりある新しい知識を創造できるのである。対して、数学は演繹的推論のみを採用しており、帰納的推論と発想的推論は禁止されている。それが故に、数学はいつなん時でも正しい結論が得られる。

科学的推論とは、帰納的推論や発想的推論で得られた知識を、演繹的推論によって洗練させて、実際に起来ている（あるはこれから起きるだろう）現象に対する有力な説明を与えることである。

#### 1.2.7 再現性

経験より得られた仮説は、実験を行って、その正しさを確かめないといけない。けれど、全ての仮説に対して、実験が行えるわけではない。実験不可能な仮説も存在するのである。

実験不可能な仮説の有名な例として、「幽霊の存在」がある。なぜ、幽霊の存在を実験的に確かめることができないのだろうか。ここには、実験の再現性がかかわっている。

実験に要求されることのひとつとして、再現性がある。再現性とは、同じ環境で同じように実験を行うと、同じ結果を得ることだ。全く同じ条件で、全く同じ方法で実験を何回か行って、それぞれで異なった結果を得るのでは意味がない。もし、毎回結果が異なるのであれば、検証すべきその仮説は間違いであったと結論されるか、実

験が正しく行われなかつたか、原因は様々であるが、いずれにしても、何も得られなかつたことになる。

幽霊の存在の話に戻ろう。幽霊が存在することを実証できないのも、再現性のある実験方法がわからないからである。突如として現れる幽霊は、その発生条件すらもわからず、おまけに、目で見えたり見えなかつたりする。心霊写真といわれるものがあるらしいが、それも幽霊の存在の実証にはならない。こうすれば絶対に幽霊の写る写真が取れる、という方法が確立されればよいが、成功例はなく、難しいようである。

再現性が要求されるのは、誰でも確かめられるということが重要だからである。客観的に自然現象を捉えるには、再現性は非常に重要な要請である。

実をいうと、現在の物理学の実験は多くの場合非常に難しい実験であり、何度でも誰でも気軽に行えるものではない。それでは再現性があるとはいえないのではないか、と考えてしまうかもしれないが、物理学者は再現性をもっと緩くとらえているようである。すなわち、物理学者は、再現性がある実験かどうかを判断し、再現性があるだろうことが認められれば、それで良しとするのである。このことについて、中谷宇吉郎<sup>30)</sup>の易しい説明があるので、これを次に引用しておこう。

#### # memo No.8: 「科学の方法」（中谷宇吉郎：岩波新書）より

科学について、何かを論じようとする場合に、まず取り上げるべき問題は、科学の限界の問題である。今日われわれが科学と称しているものは、その取り扱い得る問題、限界があるか否かといううを、まず検討してみる必要がある。

今世紀（20世紀）に入って、科学が非常に進歩し、特に自然科学が最近になって、急激な発展をとげたことは、いまさら言うまでもない。いわゆる、人工頭脳のような機械ができたり、原子力が解放されたり、人工衛星が飛んだりしたために、まさに科学ブームの世の中になった観がある。そしてこの調子で科学が進歩を続けていくと、近い将来に人間のあらゆる問題が、科学によって解決されるであろう、という異様な錯覚に陥る人が、かなりあるように思われる。

もちろん科学は、非常に力強いものではあるが、科学が力強いということは、ある限界の中での話であって、その限界の外では、案外無力なものであることを、つい忘れがちになっている。いわゆる、科学万能的なものの考え方が、この頃の風潮になっているが、それには、科学の成果に幻惑されている点が、かなりあるように思われる。これは何も人生問題というような高尚な話ではなく、自然現象においても、必ずしも全ての問題が、科学で解決できるとは限らないのである。今日の科学の進歩は、いろいろな自然現象の中から、今日の科学に適した問題を抜き出して、それを解決していると見たほうが妥当である。もっとくわしくいえば、現代の科学の方法が、その実態を調べるのに非常に有効であるもの、すなわち自然現象の中のそういう

<sup>30)</sup> 中谷宇吉郎（1900–1962、日本）：物理学者。雪についての研究が一般的に有名。「雪は天から送られた手紙である」という有名な文句でも知られる。

う特殊な面が、科学によって開発されているのである。

それはどういう面かというに、まず第一に、一番重要な点をあげれば、科学は再現可能な問題、英語でリプロデューシブルといわれている問題が、その対象となっている。もう一度繰り返して、やってみることができるという、そういう問題についてのみ、科学は成り立つものである。

なぜ再現可能の問題だけしか、科学は取り扱い得ないかといえば、科学というものは、あることをいう場合に、それがほんとうか、ほんとうでないかということをいう学問である。それが美しいとか、善いとか悪いとかということは、決していわないし、またいふこともできないものである。

それでは科学で、ほんとうであるというのは、どういうことかということを、まず考えてみる必要がある。ごく簡単な場合についていえば、いろいろな人間が同じことを調べてみて、それがいつでも同じ結果になる場合には、それをほんとうというのである。最も同じことを同じ方法で調べることができない場合もある。しかし人間が自然界を見るときには、いつも人間の感覚を通じてみるわけだが、この感覚を通じて自然界を見ることによって、ある知識を得る。その得た知識と、他の人がその人の感覚を通じて得た知識との間に、互いに矛盾が無い場合には、われわれはそれをほんとうであるという。そうでない場合には、それはまちがっているというわけである。

(中谷宇吉郎 [著]、『科学の方法』、岩波書店(岩波新書)、1998より<sup>31)</sup>.)

### 1.2.8 単純性：オッカムの剃刀

理論はできるだけ複雑にならないように組み立てるべきだ。この考え方を、オッカムの剃刀<sup>32)</sup>といいう。何かを説明するのに、必要以上の仮定を避けるべきだ、という考え方である。必要以上の仮定が含まれている理論を、カミソリによってそぎ落とし、より単純化するイメージ。

但し、初めて人に説明するときは、これを正直に実行してしまうと、簡潔すぎて正しく伝わらないことだろう。概念をわかりやすく説明するためには、初めは多少遠回りをして、物事を考えることも必要である。その場合、概念を理解した後に、単純性を満たすように整理すればよい。

そうかといって、最も単純な理論がどのようなものなのかはわかりようもない。単純さという感覚はどうにも曖昧だからだ。つまり、これには答えがない。「おお、単純だ。美しい!!」という直感が大事だ。

<sup>31)</sup> 初版は1958年。

<sup>32)</sup> William of Ockham (13世紀後半-14世紀前半、イギリス)：英語表記をそのまま訳すと、「オッカムのウェリアム」となる。「オッカム」というのは、当時のイギリスの地名。ウェリアムという名前ではなく、地名であるオッカムのみがその表現に残っているのかは不明。

もちろん、最初からできるはずもない。最初は何もわかっていないのだから、論理的に不完全な推論しかできない。しかし、その推論がどうも正しい方向にあると感じたら、その足りない部分を補って、理論を構成していく。理論を構成していく上で、それまでに必要だと思っていたことが、実際には無駄なことであったというような部分も、見つかるかもしれない。そうした無駄な部分は削除される。こうして、単純な理論が構築されていく。時間をかけて無駄な部分を省き、シンプルにしていくのだ。

単純性を追求してしまうと、それと同時に、「理論を作り上げるまでの考え方」も、削除されてしまう。どのようにして、その理論を作り上げたのかが、わからなくなってしまうのである。いま学習している物理学は、既に単純化された理論である。この単純化された理論は、初めて物理学を学習する場合、とてもとっつきにくいものになっているだろう。なぜなら、単純な理論を構築するときに、その構築方法までも削除されているからだ。理論を受け入れる場合は、単純な理論ではなく、理論に無駄部分はあっても、受け入れやすい形であることも大事である。理論の受け入れ方として、まず無駄な部分を含むが受け入れやすい形で、それを理解し、その後に単純化された理論を再度学ぶという方法がよい。

ちなみに、このように、できるだけ理論を単純化しようとする動きを「思考経済」とよんだりする<sup>33)</sup>。できるだけシンプルに考えるという思考方法である。思考経済は物理学に限ったことでなく、学問であるならば必ず採用されている。学問体系を構成する理論が冗長であっては格好が悪いし、できるだけシンプルにまとまっていた方がわかりやすいのだから。

#### # memo No.9: 「オッカムの剃刀」は正しいのか

オッカムの剃刀は全面的に正しいとは限らない。単純な理論ほど良い理論であると、必ずしも言えないのだ。最も単純な理論は、神を持ち出すことである。どんな複雑な現象でも、神を理由にすれば、その説明はとても単純になる。少なくとも、いま知られている物理法則から現象を説明するよりは単純になる。しかし、これでは本末転倒だ。物理学の目標は、神を持ちださないで物理現象を説明することなのだから。つまり、オッカムの剃刀という考え方にも、適用限界があるということだ。どこに限界があるかを考えるべきだが、簡単には答えは見つかりそうもない。とても難しい。

ここでは、オッカムの剃刀と言う考え方は不完全であることを気に留めておくことにし、難しい議論は避けよう。

► 33) オッカムの剃刀と同じことを主張する、別の言い方。いろんな言われ方があるくらいに、重要な考え方なのだ。

Everything should be made as simple as possible, but not simpler. (A. アインシュタイン)

## 1.2.9 客観と主観

### 1.2.9.1 客観性

物理は客観的であるべきだ。しかし、物理学は本当に客観的に構成されているのだろうか。物理学に要求される客観性とは、どういったものなのだろうか。ここで、少し考えてみたい。

世の中に存在するヒトの人数は、数十億人と言われる。物理で扱われる事柄は、これら数十億人のヒトにとって、共通でなければならない。言い換えれば、解釈がヒトによって異なってはならない。この客観性が、物理に課せられた条件の1つである。

しかし、実際のところ、物理学を少し学習していくと、あるいは、物理学の啓蒙書を読みあさってみると、物理の解釈が人それぞれで異なっているように、感じられる<sup>34)</sup>。つまり、物理は、完全には客観的ではないということである。おそらくこれは、物理が経験に基づいていることがあると思う。

物理は数学とは違い、人間の経験を基に理論構築される。その理論の正しさの確認も、実験という経験を通してなされるものである。もちろん、経験といつても、一人の人間しか経験できないようなものではなく、すべての人ができる経験である。

物理学に課せられている客観性とは、全ての人が経験できる事柄である。そして、その経験はすべての人に共通でないといけない。しかし、経験は人間ひとりひとりが感じるものであり、その感じ方（解釈）は人によってことなる。だから、物理学ではこのような解釈の違いを排除すべく、基本単位を定義することにより、客観性を作り上げている。例えば、温度などは、"熱い"や"冷たい"などと表現するのではなく、セ氏度という表現をしている。温度計を用いて、温度を測定する事により、熱いや冷たいなどと表現するのではなく、「セ氏20度」などと、万人に共通であるようにしているのだ。これにより、温度が客観的に表現されたということになる。

もう少し、温度の例を考え続けよう。よく考えてみると、客観的に表されたと思った温度であるが、本当に客観的なのだろうか。ここでいう「客観的」という語彙の意味は、すべての人にとって、同じであるという意味である。つまり、「セ氏20度」はすべての人に共通なのだろうか。共通であれば、客観的であるといえよう。しかし、それを知る術はないし、さらに言えば、そうではありえない。なぜなら「セ氏20度」はすべての人に共通"ということは、「セ氏20度」という温度を経験する全

<sup>34)</sup> 「物理の」と曖昧に書いている。具体的には、「物理法則の」と読み替えてもらえると、話が通じるはず。

ての人が、全く同じように暖かさを感じるということになるからである。これは、今までの私達の経験に反している。北海道などの北部に住む人々にとって、セ氏 20 度は、暖かく感じられ、沖縄などの南部の地方に住む人々にとって、涼しく感じられるのではないか。更に言うと、一人の人間でも、季節の違いにより、温度の感じられ方はことなる。夏のセ氏 20 度は涼しく感じられるし<sup>35)</sup>、冬であれば暖かく感じる。セ氏温度により、客観的に温度を表現はできるものの、温度を感じるのは人間であり、つまり、そこに主観が入り込んでいて、客観性が失われる。では、「セ氏温度の導入が、物理に客観性を生むのに失敗しているのだろうか」といえば、それは違う。現に、温度計を用いて温度を測ることには、客観性があることは、明らかである。いつでもどこでも、セ氏 20 度が変わることはない。

ここに、温度の客観性に関して、矛盾が感じられる。大げさに言えば、宇宙のどこで測っても、セシ温度は共通であり、つまり、温度が客観的に表現されている。一方で、温度とは、人間が感じるものであり、その感じ方は、人それぞれ違うものであり、また、時期によってもその感じられ方は異なるので、客観性がないように思われる。どこが間違っているのだろうか。答えは簡単で、人それぞれの感じる温度を客観的に示すべくセ氏温度が導入されたのだから、温度を感じる人間を持ち出したことが、間違いであったのだ。要するに、人間の体験の排除をすることにより、客観性を産み出しているのである。セ氏 20 度の感じ方は、人それぞれ違うのは当たり前。それを統一すべくセ氏温度が導入されたのだ。

別の例を上げてみよう。色に関する経験を考えてみる。「青」という色は、全ての人間に全く同じように感じられるのだろうか。答えはあからかに No である。「青」という色を感じ取るのは、人であり、個体差があつて当然である<sup>36)</sup>。では、物理では色を客観的に示すことはできないのだろうか。もちろん、そんなことはない。色は光であり、光は電磁波という波の一種であることがわかっている。物理で言う色の違いとは、この波の波長<sup>37)</sup>の違いである。色を波長という数値で定義することができ、これにより、人間の体験の排除が実現されるのである。色を感じるのは確かに人

►35) むしろ寒いくらいだ。

►36) 目の作り、目で感じた光を脳に伝える神経の作り、脳の作りなど、色を感じるための機構が同じである二人以上の人間がいるとは考えにくい。色の感じ方は、人によって違うと考えたほうが自然である。まあ、人によって同じかどうかということを考えることそのものが、無意味である。なぜなら、確認のしようがないのだから。

►37) 周波数といつても同じことだ。 $\nu T = 1$  ( $\nu$  は波の周波数、 $T$  は波の周期) の関係式が成立しているはずである。周波数とは、一秒間で振動する波の回数であり、周期とは、一回の振動にかかる時間のことである。つまり、 $T = 1/\nu$  が成り立つ。一秒間に  $\nu$  回振動するのだから、1 を  $\nu$  で割ることにより、周期を計算できる。

間であるが、色を客観的に表現するには、人間の経験を排除しなければならない。その代わりに、番人に共通である波の波長という数値を導入するのである。

長々と書いてしまったが、話を元に戻そう。何が言いたかったかというと、物理学における客観性とは何かということである。その答えは、もう既に書いてしまったが、人間の体験の排除である。数値は万人にたいして客観的事実を伝えるのであるから、人間の体験を数値で置き換えることすることにより、客観性を保とうとしているのである。

### 1.2.9.2 "客観" と "主観" の違い

物理、あるいはもっと範囲を広げて、科学とは客観的に構成される。しかし、客観的な科学はそのままでは、使いものにはならない<sup>38)</sup>。科学は解釈しなければ、使うことができない。解釈するということは、そこに解釈者の主観が交じるということである。この解釈するという行為は、勘違いしやすく、矛盾に陥りやすいところなので、特に注意しないといけない。

科学を解釈するということは、客観的に記述されている科学的事実を解釈するということであり、科学が客観的でなくなるわけではない。

科学の理論構築は、始めは人間の経験や体験によるものであるが、それを数値化することで、客観性をつくり出している。科学理論は客観的である。それを解釈するのは人間であり、この時に科学の客観性が失われ、主観が生じる。

科学のおける客観性と、その解釈により生じる主観性は区別して考えなければならぬ。

### 1.2.10 法則

#### 1.2.10.1 還元主義

科学は還元主義という思想が強く反映されている。還元主義とは、どんなに複雑に見える現象でも、それらを詳細に分析することで、複数の簡単な問題に捉えなおすことができる、という考え方だ。

物理学の目的の1つに、「少数の規則を議論の出発点として、現実に起こっている

<sup>38)</sup> 物理法則の理論的な側面だけを追求しようとする人には、それで十分だと思われるかもしれないが、それにしても、その物理法則の捉え方は人それぞれ解釈が異なる。（式の解釈が万人に共通であるとは考えにくい。法則を表す式は一般的に表現されるものであり、完全に意味付けされていない。具体的に意味づけしようとする際に、解釈の違いが生まれてくる。これから、学習するニュートンの法則もそれに同じ。図書館などで多くの教科書を探ってみよう。様々な説明のされ方がなされることを知るだろう。）

現象を説明すること」というものがある。しかし、実際の全ての現象が、少數の規則<sup>39)</sup>で説明できるという保証はない。人がそう信じているだけだ。しかし実際のところ、この考え方によって物理学は発展している。もちろん、説明できない現象も多いが、それらについても、将来の物理学の発展によって、説明可能であるとされている。要するに、何の根拠もない考え方だけど、今までこの考え方で成功してきてているのだ。

還元主義は、今まで大成功を収めているので、根拠がないという理由で捨てることはできない（もったいない）。足元が不安定に感じるかもしれないが、信じるしかないようだ。

#### # memo No.10: 科学的思想の根本？

還元主義に根拠がないなど、科学の思想的土台はとても不安定だ。そもそも経験に根拠があるはずがなく、それ基にした学問だから仕方ない。科学とは、多くの人間の様々な経験の中から、"いつもそうなる"というものを抜き出して、それらを整理して体系立てることである<sup>40)</sup>。科学に対して、論理学や数学のような強い理論的土台を求めてはならない。間違いに気が付いたら見直す、というくらいの構えが必要だ。

こう言ってしまうと、「科学的に立証された」という表現に対して、少々不信感が出てきてしまうかもしれない。それは正しい。科学には潜在的な間違いが含まれていることを、承知しておくべきだ。しかし、だからと言って、科学を過渡に拒否するのはもったいない。先人の多くの経験や実験による成果によって、現在の科学技術を駆使した生活があることも事実である。

科学は間違っている部分もあるけれど、だからと言って、それを捨てるのは得策ではない。もし、間違っているかもしれないと感じた部分があれば、それを確かめるための実験を繰り返し行うことで、信頼性を高めることが可能だ。科学を安易に信頼するのも、過渡に拒絶するのもよくない。科学の性質を理解して、適切な認識をもつことが理想である。

##### 1.2.10.2 規則性の発見

実験や経験を基にして物理学を構成するには、まず、それらを言葉で表現する必要がある。例えば、「落とした消しゴムは、拾わないと机には戻らない」とか、「破れた紙は、元の状態に戻すことはできない」とかといった具合に。ときには、数式で表現

▶ 39) 少數の規則："少數"と曖昧に表現したのは、個数には特にこだわらないからである。しかし、規則の個数は有限個である必要があることを要求する。

▶ 40) いろんなところで、"科学とは"といった説明を聞くだろう。実際、このノートでも複数箇所に、そのような表現がある。しかし、そこで表現されていることが唯一ではなく、科学という活動には、そのといった一面もある、ということを言いたい。

されることもある<sup>41)</sup>.

いろいろと、経験・実験を繰り替えていき、それを言葉によって書き留める。多くを経験したり、多くの実験を行えば、書き留められる言葉もそれだけ多くなる。このたくさんの言葉による経験・実験の記述を読み返し、吟味してみると、何かそれらの間で共通する部分を見出すことになる。

例えば、「『鉛筆』は机の上から床に落ちる。拾わないと机の上には戻らない」という記述と、「『教科書』は机の上から床に落ちる。拾わないと机の上には戻らない」という記述があったとしよう。鉛筆だろうが教科書だろうが、落ちたものは拾わないと元の位置には戻らない。当たり前のことがだが、このことに気づくことが大事である。これが「法則」を得る第一歩だからである。

ニュートン<sup>42)</sup>は、たった3つの記述によって、どんな「もの」運動でも記述できることを示した。このような3つの記述のことを 法則 という。法則とは、どんな「もの」でも、もっている性質である。

規則を発見したところで、これからもその規則が成り立つという保証はどこにもない。これを補うためには、反例を立証できないとあきらめの雰囲気が出るくらい、何回も実験を繰り返すことしかできない。

### 1.2.10.3 法則は理論の土台である

物理学にはいくつかの 法則 がある。法則とは、実験によって確認される現象である。法則は論理的に説明されるものでもなければ、他の概念から定義されるものでもない。法則は理論の最も基本的な土台であり、実験のみによって実証されるべき仮説である。「なぜ法則が成り立つか」を考えることは大事なことだが、それはとても難しい問題<sup>43)</sup> であって、そう簡単には答えは出せない。

▶<sup>41)</sup> 数式によって表現されても、その根底には、言葉による表現がある。言い換えれば、言葉による表現を数式として表すということだ。物理は記号の羅列ではない。あくまでも、肌で感じた経験と、実際に得た知識を前提にして、物理学は構成される。

▶<sup>42)</sup> Sir Isaac Newton (1643–1727, イギリス) : 物理学の創始者。ケプラー (Johannes Kepler, 1571–1630, ドイツ) が唱えた「天体の運動の3つの法則」を含む、物体の運動に関する3つの法則を提唱した。天体の運動と、地上ある「もの」の運動を同一視（同じように見るということ）し、力学（「ニュートン力学」）を作り上げたのである。「Philosophiae Naturalis Principia Mathematica」（和訳名：自然哲学の数学的諸原理、もしくは、プリンキピア）によって、現在に伝わっている。この過程で、微積分学を生み出した。数学においても大きな貢献があるので、二項定理の証明も行っている。また、物理学の他の貢献として、冷却の法則や光学に関する考察も有名である。

▶<sup>43)</sup> 「難しい問題」とは、「解くのにものすごく時間がかかる」という意味であり、「解けない問題」や「答えのない問題」とは異なる。そもそも、解法や答えがない問題は、もはや問題ではなくなる。

#### 1.2.10.4 法則の正しさ

法則は実験によって確認されるべきことである。だから、実験の誤差がその法則の1つの限界条件を与えていた。例えば、光速を測るにしても、無限大桁の数値を測することは实际上において不可能であり、従って人間の知り得る光速の値は有限桁の値となる。

だから、なぜ法則が成立しているのかと問うことはできない。法則が成立していることの論理的説明ができないからだ<sup>44)</sup>。

#### 1.2.10.5 法則は適用範囲が存在する

法則は何らかの条件のもとに成り立つものである。この何らかの条件は物理学の発展の段階で示されるものである。例えばニュートンの運動の法則は、物体の速度が光速<sup>45)</sup>に比べて、とても小さい場合に成り立つものである。物体の速度が光速に近い場合は特殊相対性理論に頼らねばならない。しかし、ニュートンの法則は光速に比べてかなり遅いという条件は考慮されていない。光の速度が物体の運動に関係していることが確認されていなかったので当然のことだと言える。そもそも、ニュートンの時代には光の速度を測る技術がなかった。物体の運動が光速にも関係するという認識に至るには、アインシュタインの特殊相対性理論を待たねばならない。ニュートンは光速という条件は全く知らずに、ニュートン力学を作り上げた。物理学が発展していくと、そのような条件が見えてくるのである。人間の見出す法則には、限界があると頭の片隅に置いておくとよい<sup>46)</sup>。

また、物理学の発展に伴ってこれまで成り立っていた法則が間違っていると判明したならば、その法則はもはや法則ではないと考えるべきだが、その法則が成立しない条件Aが明らかになれば、条件Aの否定(Aでない)が成立するという条件の下では、そのまま古い法則を扱えると考えてもかまわない。

▶ 44) ただし、物理学の発展により自然に関する知識が深り、より基礎的な法則が発見され、これまで法則されていたことが、その基礎的な法則から導かれることはあり得る。

▶ 45) 光速：光の速さのこと。その値は  $3 \times 10^8$  [m/s] である。

▶ 46) 物理理論は発想的推論により構築される。発想的推論による理論構築は、現在知られていない現象に対する考慮が弱い。これらが、科学的思考の限界なのではなかろうか。科学理論の建設目標は、"現在知りうる現象"をすべて説明できる最も単純な理論をつくることである。新しい現象が現れて、その現象が理論と矛盾する可能があるにせよ、それはその時にならないと分からぬことなのだから、都度修正、改変、差し替えを行えばよいのだ。

### 1.2.10.6 法則であるための条件

#### ¶ 経験あるいは実証に基づくものであること

「法則」とは、具体的には、どのようなものなのだろうか。何をもってして「法則」といわれるのだろうか。「法則」について、もう少し詳しく考える。

法則を見出すまでの過程を、具体的に考えてみよう。まず、自然を観察したり、経験や実験によって得た多くの結果を吟味して、それらに共通の性質を見つけ出す。例えば、「鉛筆は落ちる」とか、「消しゴムは落ちる」といったことをより一般的に考えて、「『もの』は落ちる」という1つ記述にまとめることができる。これにより、記述が減る<sup>47)</sup>。これを繰り返していくと、少数の記述で、「もの」のもつ性質を表現することができることに気づく<sup>48)</sup>。

#### ¶ 正しさを示せること

こうして少数の記述を得たとして、今度は、その少数の記述によってどんな「もの」の性質も導き出すことができるかを、確認する。確認ができれば、それらの少数の記述は、法則とよばれるようになる。逆に言えば、正しさを確認できない主張は法則ではない。法則は、実験によってその正しさを確認できなければならない。実験により、正しいか否かを判定できるような性質を法則はもつべきなのだ。このような性質をもつとき、反証可能であるという<sup>49)</sup>。また、このような性質を反証可能性という。短く言うと、法則は反証可能であるべきだ、ということになる。

#### ¶ 可能な限り単純であること

法則とは、全ての物理現象の基礎になる性質を表した、少数の記述のことである。もし、今まで法則といっていたものを、より簡単に記述できるがわかった場合、今までの法則に取って代わって、新しい記述が法則といわれるようになる。ここには単純性が隠れている。単純性とは、自然是元来少数の記述によつて表現できる、という思想により求められる性質である。複雑な理屈を立てるよりも、簡明な理屈の方がスッキリしているという感覚に由来するのだろう。

► 47) 今の例だと、2つの記述が、1つ記述にまとめられている。このように、具体的な現象の共通な部分を抜き出し、より広範囲にわたる言い回しにすることを、一般化するという。

► 48) いや、昔の多くの学者さんがそうできることに気づいた、といった方がより正確な表現だろう。

► 49) 「実証可能性」と言わないのは、法則が正しいことを示すことはできないからである。示せるのは、間違っていないことである。ここで言う「間違っていない」というのは、法則（仮説）と実験結果が矛盾することがないということである。

少數の記述により多くの現象を説明できる、ということを物理学は目指しているのである。

#### # memo No.11: ヘンペルのパラドクス

反証可能であるだけでは、法則であるために十分ではない。ヘンペルのパラドクスという有名な問題がある。簡単に紹介しておこう。

「すべてのカラスは黒い」という法則<sup>50)</sup>は反証可能である。すべてのカラスを観察し、それらがすべて黒いことを確認すればよい。しかし、実際問題として、すべてのカラスを見ることは不可能であろう<sup>51)</sup>。

はどうするかというと、その対偶をとってみるのだ。「すべてのカラスは黒い」の対偶は「黒くないものはすべてカラスではない」である。この対偶ならば簡単に示せる。手当たりしだいに、身の回りの黒くないものをとて、カラスでないことを確認すればよいのだ。対偶は論理的に同値であり、対偶を確認するということは、「すべてのカラスは黒い」という主張を確認することと同じなのだ。何かおかしいと思われるかもしれないが、この考え方には論理的には誤りはない。それがパラドクスと言われる理由で、このもどかしさが簡単に解決できないことを暗示している。未だに明確な解決案が見出だせないでいる。

#### 1.2.10.7 実験誤差と法則の実証

法則は適用範囲が存在する。というのも、法則は実験を当てその正当性を確かめられるものだからである。実験には測定誤差がつきもので、測定物を厳密な数値で表すことができない。例えば、鉛筆の長さを測るとき、手元にある定規を使って測るのが手取り早い。しかし、定規には、ミリ単位の刻みでしか、メモリが書かれていない。つまり、鉛筆の長さは、ミリ単位の精度以上に詳しく測ることができないのである。これが、実験に伴う、測定の限界である。

#### 1.2.10.8 法則に含まれる暗黙の前提

法則は経験や実験に基づいているので、経験や実験に付随する条件が、必然的に法則にも付加される。実験の状況が当たり前すぎて、前提条件として考え落してしまうことがある。

実際に起こった例で考えてみよう。ニュートンは、物体の運動の仕方には、3つの基本的な規則に従っていることを発見した。今日では、ニュートンの運動の3法則

<sup>50)</sup> 法則とは言いがたく、単なる命題や主張と言いたいところだが、法則と捉えることも可能である。

<sup>51)</sup> 仮にすべてのカラスを見ることができたとしても、それは現在存在するカラスについての観察結果であり、今はすでに死んでしまったカラスについての確認はできない。同じように、これから生まれてくるであろうカラスに対する観測は絶対に不可能だ（存在すらしていない）。

と呼ばれている。日常生活で起こるほとんどの物体の運動は、この3つの法則で説明できる。しかし、この3つの法則には、暗黙のうちに、ある前提条件が含まれていた。その前提条件とは、「光の速さに比べて、無視できるくらいの速度で運動している物体」というものである。ニュートンが運動の3法則を発見した時代には、当然、光の速さを測定する技術はなかった。だから、この条件を見逃してしまうことは必然的であった。現在では、光の速さを考慮した運動の法則として、修正を加えられている<sup>52)</sup>。このように、法則には予想もしない、暗黙的な前提条件が含まれてしまっているのである。注意のしようがないことであるが、このことは、頭の片隅に入れておくべきだ。

#### 1.2.10.9 厳密な法則は得られない

自然には、何か規則がある<sup>53)</sup>。にもかかわらず、その規則の具体的な内容は、人間にとって明らかではない。しかし、規則が存在していることは、疑いようのないことである。そこで、様々な実験を通して、その規則を知ろうと試みる。そしてその試みは、先を生きた偉大な学者達が、成功している。そして、それは今日、私たちは「教科書に書かれた物理法則」として、学んでいる<sup>54)</sup>。

しかし、ここで立ち止まって、次のようなことを考えてみる。

疑問 私たちの知りたい規則とは、本当に今得られている物理法則であるのか。

明らかに、答えは否定的である。なぜなら、上にも書いたように、実験で得られる数値は測定技術上の誤差があるし、その実験結果を解析するにしても、暗黙の前提を見逃してしまいがちだからだ。つまり、いま知られている物理法則は、あくまでも近似的な規則なのである。

では、私たちが本当に知りたいと願う厳密な規則は一体、どうしたら得られるのだろうか。答えは簡単だ。そんなものは“得られない”のである。少なくとも、実験証拠に基づいた科学的理論の構築方法にを採用している限り、厳密な規則を得ることは不可能である。

では、今知られている法則は、私たちにとって、何を教えてくれているのだろうか。確かに、いま知られている物理法則は、近似的ではあるが、一般性の高い規則で

▶ 52) 特殊相対性理論を学習するときに、もう一度、触れることになる。

▶ 53) 本当は断言できないが、経験的に、この世界に存在する物体は、ある一定の決まった動きをしているように見える。

▶ 54) 学ばされている、というべきか。別に好きで小学校、中学校で勉強したわけではない。

ある<sup>55)</sup>. だけど、完全ではない<sup>56)</sup>. では、何なのか. その答えは、少し視点を変えることで、得られる. 私達が本当に知りたいと思っている、自然界の厳密な規則が得られたとして、それを確かめる方法はあるのか、と考えてみるのだ. 当然、確かめる方法など存在するはずがない. なぜなら、それが実験結果だからである. 実験結果そのものが、答えだからである. つまり、どうあがいても、自然界の厳密な規則は得られないである. 諦めるしかなさそうである.

#### 1.2.10.10 本当の "世界の規則" は知り得ない

前項目で、「どうあがいても、自然界の厳密な規則は得られない」と書いた. しかし、人間は経験や実験を通して、その規則を“推測”することができる. 自然の規則はブラックボックス<sup>57)</sup>の内側にあるものだ、と捉え直すのである. 実験を通して、このブラックボックスの仕組みを推測するのである. 分かるのは、原因とその結果であって、ブラックボックスの仕組みは完全には分からない. あくまでも、経験や実験はブラックボックスの仕組みを推測させることしかできない. ブラックボックスの仕組みを完全に解明することは不可能である. 例えば、石ころを投げてみたとき、石ころは地面に落ちる. 分かるのは、石ころを投げる行為(原因)と、石ころが地面に落ちる(結果)ということである. なぜ石ころを投げると、それは地面に落ちるのか. いや、石ころに限ったことではない. 他の物体でも投げれば必ず地面に落ちてくる. なぜ、落ちてくるのか. ニュートンはその天才的な発想で万有引力の法則を提案し、物が落ちるという現象を説明した. 物体Aには他の物体Bを引き寄せるという性質をもつという. 地球も石ころも物体であるからこれらは引き寄せ合っていて、われわれの目から見たときに、石が落ちるというように見えるのである. 万有引力の法則の提案によって、物体の落下という現象を完全に説明できるようになった.

しかし、万有引力は自然の規則であると完全にいうことはできない. この法則はいろいろな現象を説明することにできる大変重要なものだが、あくまでも、実験や経験を通して万有引力というものを“推測した”にすぎない.

“法則”を考えるとき、これは絶対的な物であるとは考えてはいけない. 法則はあ

<sup>55)</sup> それゆえに、「法則」とよばれているのである。

<sup>56)</sup> ニュートンの3つの運動法則が、光の速度を無限大と見なした場合の近似理論であったことが、理論が確立した後に示されたように。

<sup>57)</sup> ブラックボックスとは、その名の通り、中身の分からない箱のことである. ただ、入力とそのときの出力を見ることはできる. 例えば、多くの人々にとってパソコンはブラックボックスだろう. キーボードから文字を入力したときに、その文字がテキストエディター等で出力される. キーボードからの入力によって、パソコンは何らかの計算をして、そして文字を出力しているが、パソコンの計算方法は分からない. ブラックボックスとは、入力と出力を見ることのできるものである。

くまでも実験・経験を通して得たものである。自然の規則はブラックボックスであり、このブラックボックスに様々な入力をしてその出力を見る。法則とは、この入力と出力の関係であり、推測されるものである。

#### 1.2.10.11 本当に知りたい規則と "等価" な規則

自然界の厳密な規則がブラックボックスの内側に隠れている以上、私たちは、それを見ることはできない。しかし、自然（実験対象）に対し、何か刺激を与えれば、その対象は何らかの反応を起こすことは確かめられる。この対象に対する刺激とその反応を記録していくことが実験するということであり、法則はこのような実験を通して得るものである。要するに、何度も書いているが、物理学は"本当の"自然の姿を記述することはできない。では、今得られている法則は何だろうか。法則は、厳密な規則を表したものでもないが、そうかといって、全般的はずれでもない<sup>\*58)</sup>。法則とは何かを考えると、このような曖昧さを感じ、捉えにくい。

開き直って、考える。「自然界の厳密な法則は絶対に得られない」、これはよしとしよう。そして、「実験を通して得られた規則が、自然界のそれと同じかどうかを確かめる方法はない」、これも認めよう。さらに、「自然界の法則を見ようとしても、その真の姿を見ることは不可能である」、これもまた認めよう。これらを考慮した上で、次のように、「法則」というものを捉え直す。物理学の理論を組み立てるということは、「実験を通して『法則』を得ることで、世界の本当の規則と等価な理論をつくることである」ということである。

物理法則の本当の姿を見られない以上、それと等価な法則をつくり上げることしかできない。しかし、そうして得られた法則が、嘘であるということではない。なぜなら、"等価"なのだから。等価であるから、これが自然法則であるといっても、なんの間違いもない。

もっとスケールを大きくしていようと、物理学の理論建設の目標は、この世界の真の物理に等価な物理法則を築くことである。さらに言うなら、この世界と等価な世界を作り上げられるだけの、理論を構築することが、その究極の目標である。

#### 1.2.10.12 法則を捉えるということ

自然には、何か規則がある。その規則は人間にとて明らかではない。しかし、人間は経験や実験を通して、その規則を“推測”できる。いわば、自然の規則はプラッ

---

\*58) むしろ、私達が十分満足できる程度に正確である。

クボックス<sup>59)</sup> のようなものである。実験を通して、このブラックボックスの仕組みを推測するのである。分かるのは、原因とその結果であって、ブラックボックスの仕組みは完全には分からない。あくまでも、経験や実験はブラックボックスの仕組みを推測させることしかできない。ブラックボックスの仕組みを完全に解明することは不可能である。例えば、石ころを投げてみたとき、石ころは地面に落ちる。分かるのは、石ころを投げる行為(原因)と、石ころが地面に落ちる(結果)ということである。なぜ石ころを投げると、それは地面に落ちるのか。いや、石ころに限ったことではない。他の物体でも投げれば必ず地面に落ちてくる。なぜ、落ちてくるのか。ニュートンはその天才的な発想で万有引力の法則を提案し、物が落ちるという現象を説明した。物体Aには他の物体Bを引き寄せるという性質をもつという。地球も石ころも物体であるからこれらは引き寄せ合っていて、われわれの目から見たときに、石が落ちるというように見えるのである。万有引力の法則の提案によって、物体の落下という現象を完全に説明できるようになった。

しかし、万有引力は自然の規則であると完全にいうことはできない。この法則はいろいろな現象を説明することにできる大変重要なものだが、あくまでも、実験や経験を通して万有引力というものを“推測した”にすぎない。

“法則”を考えるとき、これは絶対的な物であるとは考えてはいけない。法則はあくまでも実験・経験を通して得たものである。自然の規則はブラックボックスであり、このブラックボックスに様々な入力をしてその出力を見る。法則とは、この入力と出力の関係であり、推測されるものである。

#### 1.2.10.13 物体は自然法則を知っているか

##### ¶ 予定調和

物体は定められた規則に忠実である。決してその規則を破ることはない。物体は例外なく規則に従って運動しているのだ。これは少々気持ちがわるい。物体が法則を知っているかのように見えるからだ。

このような物体の運動の規則性の捉え方に関して、ライプニッツ<sup>60)</sup>は予定調和

► 59) ブラックボックスとは、その名の通り、中身の分からない箱のことである。ただ、入力とそのときの出力を見ることはできる。例えば、多くの人々にとってパソコンはブラックボックスだろう。キーボードから文字を入力したときに、その文字がテキストエディター等で出力される。キーボードからの入力によって、パソコンは何らかの計算をして、そして文字を出力しているが、パソコンの計算方法は分からない。ブラックボックスとは、入力と出力を見ることのできるものである。

► 60) Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716, ドイツ) 数学者であり哲学者。ニュートンと同時期に、独立に、微分積分学を提示した人としても有名。

という自然の考え方（捉え方）を示している。それは、「すべての物体が今こうして動いるのは、予めそのように動くように設定（予定）されているからそう動くのであって、これは必然的なことなのだ」という考え方だ。例えば、通常の科学的視点からは、二つの物体が衝突（完全衝突）すると運動量保存の法則を満たすように振る舞うのであるが、予定調和という考え方によれば、物体は予めそのように振る舞うことが決定されているのであって、運動量保存の法則はその振る舞いの1つの捉え方にすぎないので<sup>61)</sup>。

すべての物体の運動は予め決められて（予定されて）いるにもかかわらず、そのことを人間が全く知らないがために、勝手そこに規則性を見出し、物体がある規則に従って動くと主張し始める。物体にしてみれば、規則よりも運動が根源的であり、規則はその1つの捉え方でしかないのだ。

通常の認識だと、物体の運動の背景に規則があり、物体はその規則に忠実に従っていると考える。この考え方是最も自然な考え方であろう。しかし、ライプニッツの予定調和のように、物体の運動の1つの結果が規則であるとも考えられる。どちらが正しいかを判定することはできない。

#### ¶ 予定調和は科学的に検証できない

規則を前提にして物体の動きを見るのであれば、物体を規則を知っているということになる。他方、物体の動きそのものを基礎として見るならば、その規則性は偶然の結果であって、物体が規則に従っているわけではない、ということになる。予定調和という考え方には、論理的には正しく、それを否定することはできにない。しかし、論理的に正しいからという理由で、それが真実である理由にはならない。むしろ、物理学では予定調和という考え方には、否定的だ。想定が空想的すぎて、現実感がない。そもそも、実験で実証できない以上、科学的な検証ができない仮説だ。

#### ¶ 結論

物体は物理法則に従って運動し、決してそれに反することはない。しかし、だからと言って、物体が法則を「知っている」と結論することはおかしい。なぜなら、私たちは、物体の運動見ることで、物理法則を推論しているからだ。物体の動きから規則性を見つけ、法則として一般化することが物理学の方法であるから、物体が法則に

► 61) うまく説明できない。同じことを繰り返すようだが、別の言い方を試すと、次のように考えてもいい。人間が勝手に運動量という概念を創り上げ、それが保存しているように物体が振る舞ってしまうから、運動量保存の法則が成立してしまっていると認識してしまうのである。

従っているのはあたりまえだ。むしろ、物体が物理法則に従っているのは必然だ。物体の運動こそが物理法則の発見の基礎なのだ。

実は、物体の運動が物理法則に従っていないことは、過去にもある。量子力学が知られていなかった時代には、光（電磁波）の周波数と熱輻射の関係が、それまで知られていた物理法則と矛盾していた。原子の構造も古典物理学の法則だけでは説明がつかない。光電効果も同じだ。相対性理論が提唱される前までは、ニュートン力学と電磁気学は、互いに矛盾した理論体系であった。

結論は、予定調和という考え方とは、物理学の方法的な観点から見ると、間違いである。そもそも、物体の運動の観測を基礎として築き上げられている学問であり、物体の運動が物理法則に従っているというのが大前提である。予定調和によれば、もしかしたら、この大前提是間違いなのかもしれない、という可能性を示してはいるが、物理学の信念から真っ向から対立する考え方である<sup>62)</sup>。

#### 1.2.10.14 物理法則を表現する言葉

物理法則に限らず、あらゆる学問を記述する際には、言葉を用いて記述する。この事実に気づくことは、次の様な、重要な科学哲学的問題に気づくことになる。

(問題) 完全な物理的法則を得ることは可能か

この問題を楽観視に捉えて<sup>63)</sup>、科学的探求を続けていれば、時間はかかるとも、いずれは完全な物理法則を得ることができると信じることも、ひとつ的方法である。しかし、突っ込んで考えると、自分たちが無意識に用いている推論方法が浮き彫りになってきて、その曖昧さに気づくことになる。いかなる物理学用語の定義も、すべて言葉によってなされる。しかも、数学とは異なり、直感的に定義される。物理学的説明も、帰納的な説明であり、論理的な飛躍を避けられない<sup>64)</sup>。

論理的な飛躍を伴う思考から、完全な法則が得られるとは考えにくい。

- 
- ▶ 62) こう考えていくと、人間には、世界の本当の姿を捉えられない、と思えてくる。しかし、完全にわからなくても、世界の一部の法則は捉えることができていて、実際に、電子機器はその法則を"利用した"ものである。
  - ▶ 63) この問題には答えがないので深く考える事はない、ということ。哲学的問題なので、この問題の解決は先送りにし、目の前にある、もう少し簡単に答えの見つかりそうな問題を考えたほうが、生産的である。ただ、問題を無視してしまうのはよくないのだけども。
  - ▶ 64) ニュートン力学が、特殊相対性理論に置き換えられたが、特殊相対性理論がニュートン力学の拡張である、ということではない。特殊相対性理論はニュートン力学とは独立に作られた理論であり、偶然にも、特殊相対性理論が、その理論的内部にニュートン力学を包括していたに過ぎない。

### 1.2.10.15 科学法則だけが自然のすべてではない

科学的な考察による結論は説得力がある。それは注意深い自然観察や論理的な推論によるところが大きい。しかし、科学というのは自然の捉え方の1つの方法であり、これ自然のすべてではない。人の心の安らぎは科学だけでは満たせない。音楽や絵画などの芸術作品の鑑賞なども必要だし、神話や宗教も不可欠である。

何が正しいかは、今自分のいる立場によって変わってくる。神話や宗教は、科学的な視点から見ると、実証不可能性や事実と不整合があるという点で、誤りとみなされる。逆に、宗教的観点から科学をみると、それは強力に論理的であるがゆえに乾燥した世界観であり、また、数式で扱えるよう世界を勝手に単純化してしまっているように見える。要するに、宗教からみた科学は、世界を必要以上に簡単化してしまっているし、他方、科学からみた宗教的自然観はあまりにも漠然としている上に、人間の勝手な想像が入り込んでいて、現実に即していないようにみえる。

世界はどのようにあるのかとか、なぜ世界は存在するのかといった疑問に対し、納得できる論理的な答えを見つけることが科学という活動である。科学すべてが説明できると信じたいが、根拠がない。科学全盛の現代に、自然現象の説明を宗教や神話に求めるのは後ろ向きな行動かもしれないが、残念ながらが間違いであると示すことは不可能である。

この節で言いたかったのは、トピックに書いた通り、科学だけが自然を説明する唯一の方法ではないということだ。科学的に説明できることだけが事実だと考えてしまうと、自然を一面的にしか見れなくなってしまうだろう。

#### # memo No.12: 科学的根拠

科学的根拠があるという信念は哲学であって、科学ではない。科学的活動は、世の中に起こるすべての現象は説明可能であるという信念に支えられているのである。科学は非科学的な哲学の上に築かれているのだ。科学といえども、オカルトや占星術などと同じように、そのよりどころは人間の心理なのだ。ただ、オカルトや占星術と違うところは、原因と結果の因果関係がはっきりしているということである。逆を言えば、因果関係が確立されていなければ、それは科学的であるとは言えない。

よく、「科学的根拠がないから信じない」とか、「科学的根拠に基づいて行動せよ」という人がいるが、これは科学を過信しそぎているように思う。科学者は科学的根拠のないことに対して、科学的根拠を作り上げることが仕事だ。ものを作る工学者も同じことが言える。製品を開発するにあたり、製品を創りあげたら、それ正しく動作するか<sup>65)</sup> を確認する必要が出てくる

<sup>65)</sup> 「正しく動作する」という言葉の意味を問われると、言葉が詰まる。さしあたり、以下のことが心

(作ったものが安全であることを保証しなければならない). その段階で, ある不具合<sup>66)</sup>を見つけたとしよう. 不具合が発覚したその時点では, この不具合の科学的根拠はない.しかし, 工学者は「この不具合には科学的根拠があるはずだ」という信念のもとに, 不具合を説明する科学的根拠を示そうと努力する. 不具合が起こる原因を突き止めるのである. この行動は科学的な行動であるが, その動機は非科学的な信念である.

要するに, 非科学的であるという理由だけで, 信頼できなとか信用しないとかいうのはおかしい. むしろ, 未知の非科学的な現象に対して, "科学的に説明可能だ"という非科学的な信念を元に, 科学的根拠を求めつきとめることが大事なのだ. 科学的根拠は非科学的な信念の上に成り立つのである. 人間にとって, 世の中に起こる全ての科学的現象は, 最初は非科学的なのである. だからこそ, 科学という活動を行うことで現象に科学的根拠を求め, 因果関係を見つけようと努力するのだ.

### 1.2.11 定義

ある概念に名前を付ける行為を 定義 するという. 場合によっては直感に反する定義があるが, そのような量が仮にあるとすると理論が簡単になるのであれば, これを受け入れるべきだ.

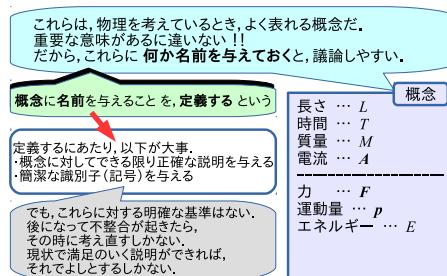


図 1.2 定義しよう!!

もちろん, 定義した物理量が妥当でなかったと分かった場合, その定義を見直さなければならない. 妥当でないというのは, 実験事実と矛盾することや, あるいは, 全

の中にみると, 思っておいて欲しい.

- (1) 意図した通りの動作を行うこと
- (2) 意図しないことに対して, 安全に振る舞うこと
- (3) 想定外のことに対して, 誤動作しないこと

<sup>66)</sup> 不具合とは, 開発しているものが意図しない動作のことである.

く的外れな定義等である。このようなことは、理論を作っていく上で必ず生じることであり、やむを得ない。

このノートで定義される物理量は昔からその正しさが確認されているものであり、従って、このノートで定義される物理量は今後も変化することがないだろう<sup>67)</sup>。

このノートでは「…と定義する」とは書かずに、「…という」と書くこともあるだろうが、これも定義のうちに入ると考えてもらいたい。

また、物理量の定義を把握するためには演習が必要である。新しい概念が定義されたときは、演習書を用いてより感覚的に捉えられるようにしておくとよい。先ほども書い通り、このノートで演習するようなことはない。

#### # memo No.13: 「定義」の定義

「定義」という言葉の意味を、説明した。しかし、「定義」という語彙の定義をしたわけではない。単に、「定義」という難し言い回しを、噛み砕いて、言い直したに過ぎない。ならば、「定義」という語彙の定義は、どうなされるのだろうか、という疑問が浮かび上がってきたかも知れない<sup>68)</sup>。

しかし、実は、この疑問は意味のない疑問である。ゲーデールの定理などで有名な、自己言及が含まれていて、矛盾がおこるからである。「定義」という言葉を知らないと<sup>69)</sup>、「『定義』の定義とは何か」という疑問も起りえない。一方で、「定義」という言葉の意味を知っているならば、そもそもこの疑問は起りえない。<sup>70)</sup>

しかし、わからない。何をもって「定義」であると言えるのか。定義であるための基準とは何なのか。判断基準は定義と同じ意味であり、確かに、「『定義』の定義とは何か」という疑問と変わりなく思えるのだが、この疑問は自己矛盾を含んでいて、意味がないものである。

私が今まで見てきた数学の解説書や参考書には、定義という言葉の意味を説明はされているものはあったが、定義であるための満たすべき基準が書かれたものは、見たことがない。

どういうことだろうか。私の現在の解釈は、「定義」という語彙は名詞としてではなく、「定

▶ 67) 万が一、理論や実験技術の発展によって変更されることが余儀なくされても、それは特殊な状況であるようなときに限って、定義しなおされる。例えば、運動量  $p = mv$  をもつ物体はその速度が光速(光の速さ)に近いとき、相対性理論によってこの定義は見直される。詳細は、相対性理論の章を参照。

▶ 68) あるいは、ここでの記述を読んで、疑問が提示され、不思議に思ったかもしれない。

▶ 69) ここでいう、「知る」という言葉は、「定義」という語彙を、自分の頭で了解し、言葉で表せなくとも、感覚的に定義されているということを、念頭において使用した。

▶ 70) 「『定義』の定義とは何か」とは何かという疑問をするためには、「定義」という言葉を予め知っていないといならない。例えば、上の『定義』を一般的な語彙に拡張し、「Xの定義とは」と置き換えてみるとわかりやすい。「Xの定義とは何か」と問うということは、すでに「定義」という語彙を使用して疑問を投げかけているのであり、「定義」という語彙を了解した上での疑問ということになる。そうなれば、X=「定義」とした時の、「『定義』の定義とは何か」という疑問を投げるためには、やはり、予め「定義」という語彙を知っていないとなければならない。

義する」という動詞として存在している、というものである。「定義する」という動詞は、ある語彙を、曖昧さなく<sup>71)</sup>、より明確に意味づけを行う行為である、と考えるのだ。

## 1.3 物理学の基本概念

### 1.3.1 物理量

物理的に意味のある量<sup>72)</sup>を物理量という。例えば、速度や加速度、重さ、長さ、時間などだ。運動量や力積、エネルギーや仕事量なども物理量である。実験により観測できる量は、すべて物理量であると思ってよい。

### 1.3.2 物体

今まで、「もの」という表現を使っていたが、これからはもっとかっこよく、物体ということにしよう。こっちのほうが、なんだか畏まってして、学問をしている感じになる。何でも難しく言えばいいということではないのだけども、暗黙の了解をその言葉に含めるにはちょうどよいのである。

ここで、「物体」と表現したときに、暗黙の了解とされている性質を説明しよう。  
「もの」には、さまざまな性質がある。形、色、硬さ、におい等。また、その「もの」が食べ物であったなら、食感や味、風味もある。動物であれば、暖かさとか、おとなしいとか落ち着きがないとかなどの性格も、考えられるはずだ。一口に「もの」といつてしまえば、こういう性質を全て考えなければならなくなる。けれど、これではあまりにも広い範囲の対象を相手にしなければならず、一度に相手にするにはとても難しい<sup>73)</sup>。そこで、考える「もの」に制限を与えて、対象の範囲を狭くするのである。その制限とは、色とか、におい、味、食感、性格等は無視するということである。主に考えるのは、重さ、形、硬さである。どれに着目するかは、そのつど異なる

▶ 71) 「曖昧」という語彙の意味も曖昧だ。ここでは、後の議論に論理的に相反する結果を起こさない程度、と認識してもらいたい。

▶ 72) 物理的に意味のある量とは、「そのような量を導入することで現象がうまく説明できる」という量である。

▶ 73) 難しい：不可能なことではない。「難しい」と表現されたときには、原理的には可能なのであるが、実際にに行うととても時間がかかる、ということを意味している。例えば、「難しい問題」という表現がある。難しい問題とは、とくに非常に時間がかかる（どれくらい時間がかかるかは問題による）問題のことである。決して解けない問題ではないのだ。まあ、そもそも「解けない問題」は問題ではない。だって、答えがないということがわかっているのだから（哲学できに難しい問題といわれたら、「“答え”のない問題」なのかも知れないが）。

が、とにかく全ての性質を同時に扱うことは、難しいのでやらない。

特に、物体と言われたときには、「もの」の大きさと形しか考えず、においとかの他の性質は全く考慮しないことを、暗に主張する。物理学でいう「物体」とは、日常生活で使用する言葉の“物体”とは異なる<sup>74)</sup>。

### 1.3.3 系

考える対象全体のことを系という。例えば、 $N$  個の物体の運動について考えるときに、「系全体」といわれたならば、それは、「 $N$  個の物体に関わるもの全て」ということと同じ意味である。

例えば、積み木が積まれている台車が運動しているとしよう。この台車がどのような動きをするのかを考えるとき、この積み木と台車の両方について考える必要がある。このときの系全体とは、「台車と積み木」である。太陽に対する地球の自転を考えるときの系全体とは太陽と地球のことである。より正確には周囲の他の惑星も系とすべきだ。要するに、今何を対象に考えているかとか、何に注目しているだとかの、そのような対象（もの）を総じて系というのだ。

### 1.3.4 文字・数式・式変形

コメント 物理学において、数式とは推論の道具に過ぎない。しかし、それは途方もなく有用な道具である。数式の持つ意味について、考える。

#### ¶ 文字

数式は文字で表現される。そして、文字は互いに関係付けられている。具体例で考える。ここに一冊の本があるとする。本には色々な性質が備わっている。重さや色、紙の質、書かれている文字、匂い等、色々とある。物理学では、これら本のもつ諸性質のうち、特に关心があるのが、重さである。そこで、ここでは本の重さのみについて考えることにし、その他の性質（匂いやその記述されている内容）は全く無視してしまおう。それで、本の重さについての記述をしたいのだが、どうすればよいだろう。なんて問うまでもなく、「重さを  $W$  とおく」と表現すれば良い。「重さを  $W$  とおく」と表現したことにより、現実にある本の重さが、文字  $W$  で表現され、重さを数学的に扱うことが可能になった。視点を数式目線に変更して考えて見れば、文字  $W$  に重

► 74) 日常生活で使用する“物体”と同じ意味で、今まで「もの」と表現していた。

さという意味が与えられたとも考えることもできよう。

### ¶ 数と数字

ものの個数<sup>75)</sup> や物の値段などで使われる、概念を抽象化したものをお **数** という<sup>76)</sup>。

"数" を文字で表したものを **数字** という。同じ数に対して、いろいろな字が割り当てられていて、例えば、以下はすべて同じ数を示す文字である：

4, 四, IV

数を表す文字は複数種類あり、どれを使っても良い。一般的に、アラビア数字と呼ばれる以下の数字が便利であり、多く使用される：

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

数式内の数字はアラビア数字を使う。文章内の数字はアラビア数字も使用するが、漢数字も使用する。漢数字とは、以下のような数字である：

一, 二, 三, 四, 五, 六, ...

他にも、ギリシア数字 (I, II, III, IV, V, VI, ...) も数字だし、「正」の字を使って数えるときの途中段階の文字（記号？）も数字である。まあ、色々とあるが、物理学を勉強していく上では、上記のような常識的な範囲の数字の扱い方ができていれば十分である。

### ¶ 変数

具体的な数 (1, 2, 3, ...) ではなく、"全ての数に対しての記述"をしたい場合がある<sup>77)</sup>。そういう場合、**変数** という考え方を使う。全ての数に当てはまるということは、どんな数にも変わり得るということ。変数を表す記号は、様々である。中学や高校数学では、 $x$  や  $y$  や  $z$  が使われる。また、 $\theta$  や  $\phi$  などのギリシャ文字を使うことが多い。

<sup>75)</sup> 例えば、りんごの個数だと、鉛筆の本数だと、本の冊数だと、家の件数だと、

<sup>76)</sup> 「スウ」と読む。「カズ」と読んでも間違いではないが、数学をしている時には「スウ」と言う方が一般的。

<sup>77)</sup> 数全般の性質を表したい場合は、具体的な数字を使って表現するわけにはいかない。具体的な数字を使ってしまうと、その数にしか成り立たない記述になってしまふ。

もっと高度な数学になると、変数が無限に多く欲しい場合があり。その場合は、アルファベットでは対応できない。だから、以下のように、アルファベットの右下や右上にアラビア数字を添えて、

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \dots$$

と言った感じで、無限に変数を増産できる<sup>78)</sup>。添字は無限に増やせるからだ。だが、それでも、変数を無限に列挙することなどはできない。そこで、「 $i$  は任意の自然数であるとする」という文言を添えて、

$$x_i$$

の一文字で済ますことが可能である<sup>79)</sup>。

変数の例を上げると、 $f(x) = ax + b$  や  $g(\theta) = \sin \theta$  と書かれた時の、 $x$  と  $\theta$  がそれに当たる。この場合の  $x$  と  $\theta$  は関数の定義域の全ての実数値を取りうることを意味付けられている。

<sup>78)</sup> あるいは、

$$x^1, \quad x^2, \quad x^3, \quad \dots$$

でもよい。添字は右上でも右下でもどちらでも構わない。今のところは、添字の位置には特に意味を与えていないが、後々（相対性理論を勉強する段階）では、この添字の位置に意味を与えるので、注意が必要だ。

<sup>79)</sup>  $i$  には 1 でも 2 でも 99 でも何でもよく、とにかく全ての自然数が順に与えられて、整列させられているイメージを持って欲しい。そのイメージを具体的に書くと、 $x_i$  と書かれた場合、

$$x_i \leftrightarrow (1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, i, \dots, \infty)$$

ということである。 $\leftrightarrow$  はその左側と右側で同じ意味を持つことを示すものである。

また、ここで、無限について定義せずに使用しているが、普段の生活の意味の無限として捉えていて問題ない。無限を真面目に考え始めると、深みにハマってしまい、議論が終わらなくなってしまう。無限についての理解はこの程度で十分であろう：

無限大 とは、全ての数よりも大きい ということである。

無限小 とは、全ての数よりも小さい ということである。

"ということ" と表現したのには意味がある。"という数" と書いていしまうと、自己言及して矛盾になってしまう、「全ての数」よりも大きい"数" なんて文は矛盾。だって、"全ての数"って言っているんだから、これよりも大きい数って、全ての数以外の数だということになって、つまり、「全ての数」以外の数」があることになる。「全ての数」以外の数 なんてものは矛盾。要するに、無限を数として扱ってはならないということである。

### ¶ 定数

ある特定の数（固定された値）であるが、それが特別な数ではない場合、これを **定数** という。読み方は、「ジョウスウ」または「テイスウ」である<sup>\*80)</sup>。

低すを表す記号として、アルファベットの最初の文字  $a, b, c, d$  などが使われる。大文字の  $A, B, C$  が使われることも多い。変数に比べると、様々な文字が定数を表す記号として使われる傾向にある。ただ、教科書にはその都度、それが定数であるか変数であるかを説明しているので、どっちかわからずに混乱することはないだろう。

先にも上げた例だと、 $f(x) = ax + b$  とした場合の、 $a$  や  $b$  が定数である。

### ¶ 整数（自然数、負の数）、有理数

このノートでは、0 を含めた以下を **自然数** とよぶ：

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$$

負の数とは、ある定数  $A$  に対して  $A + x = 0$  となるような  $x$  のことをいい、 $x := -A$  と書く慣習がある。例えば、 $A = 1$  の時は、 $x = -A = -1$  だし、 $A = 100$  だったら、 $x = -100$  である。

自然数と負の数を大きさ順に具体的に並べてみると、以下のようになる（右にあるほど大きい）：

$$\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \dots$$

記号  $-$  のことを、マイナス とう。「負の数」という新たらしの数が作られたことで、今まであった0以外の自然数のことを 正の数 とよぶこともあり、記号は  $+$  を使う。記号  $+$  はプラス という。「マイナス」と「プラス」は英語の plus と minus であり、"正"と"負"はこの英語に対して割り当てられた日本語語彙である。自然数と負の数を総称して、**整数** という。

整数を2つ用意して（用意した2つが同じ整数でもいい）以下のように表した時、これを **有理数** という：

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{-9}{123}, \quad \frac{4}{-5}, \quad \frac{-9}{-177}$$

上記のように、真ん中に短い線を引いて2つの数を上下に記述した有理数の表現手法

<sup>\*80)</sup> 普通は「テイスウ」と読む。年齢を重ねた人が「ジョウスウ」と読む、という勝手なイメージがある。

を 分数 という<sup>81)</sup>。0 は下に書くことはできない<sup>82)</sup>。また、上の数のことを 分子 といい、下の数のことを 分母 という。分子と分母の両方が負の数の時は、その両方のマイナスを取り去っても同じ分数としてあつかう：

$$\frac{-9}{-177} = \frac{9}{177}.$$

分母と分子のどちらか一方のみが負の数の場合は、負の分数として扱い、マイナス記号を分数の左真ん中へ移動させて書く：

$$\frac{-9}{123} = \frac{9}{-123} = -\frac{9}{123}.$$

分数の具体的なイメージは、割合だろう。全体の数を分母とし、分子には今注目している部分の数を書く。こうしてあらわされた分数は、注目している箇所は全体のどれくらいかを示す量となる<sup>83)</sup>。

#### ¶ 等号、不等号

2つの数を比較して、どちらが大きいか（あるいは小さいか）を文字で書きたいことがある。その場合、2つの数  $a, b$  を比較して、 $a$  が  $b$  よりも大きい場合は  $a > b$  または  $b < a$  と書く。 $b$  の方が  $a$  よりも大きい場合は  $a < b$  または  $b > a$  とかく。 $a$  と  $b$  が等しい場合は  $a = b$  とかく。記号にも名前があり、= を 等号 といい、<, > の2つを 不等号 という。不等号が2種類あると思われるかもしれないが、向きをどうするかの（ $a$  と  $b$  の並べ方）違いであり、实际上、1種類記号である。

<sup>81)</sup> 分数を一行で記述したい場合もある。こういう時は、 $1/2$  とか  $-9/123$  などと書く。記号"/"を数の間に入れて分数を表現するのである。

<sup>82)</sup> 0 を下に書くと、四則演算で論理的に不整合な計算ができてしまい、体系に矛盾が生じる。例えば、 $\frac{1}{0}$  という数を書いてみる。どんな数でも 0 をかければ、0 になるので（これは 0 元の公理で、有無を言わずに認めることである）、 $\frac{1}{0} \times 0 = 0$  となるのだが、この式の左辺は  $\frac{1}{0} \times 0 = 1$  とも計算できる。すると、 $1 = 0$  となって論理的に不整合（矛盾）になる。矛盾が生じた理由は、そもそも  $\frac{1}{0}$  という数が存在すると仮定したからである。要するに矛盾を起さないためには、 $\frac{1}{0}$  というような分母に 0 を置くような有理数（分数）を考えていけないということだ。

<sup>83)</sup> あくまでも、分数を現実と対比させたい場合の例である。数学では、このような具体的なイメージから発展させ、より抽象化される。この例にとらわれると、マイナスの数が分母に書かれたときに、全体の数がマイナスになるがどういうことだろうかと、無駄な考えに陥るかもしれない。数は現実の世界から必要に迫られて人間が生み出したものであるが、数学ではそれを抽象化して数の性質を探求する学問である。現実との具体的な対比に悩むのはナンセンスだ（物理学では大事なことだが）。

### ¶ 演算, 演算器号

演算には、「加算」と「乗算」がある。加算は記号 $+$ で表され、乗算は記号 $*$ で表される。加算と乗算はどういった計算かを一般的に示すことはできないので、以下に具体例を書くに留める。

$$\text{加算: } 1 + 1 = 2, \quad 12 = 6 + 3 + 2 + 1$$

$$\text{乗算: } 1 * 1 = 1, \quad 36 = 6 * 3 * 2 * 1$$

加算と乗算以外にも、減算と除算があると思われるかもしれないが、減算と除算は加算と乗算の一部として含めることができる。減算の場合には、加算に対して負の数を導入することで、実現できる。つまり、

$$\text{減算: } 1 - 1 = 1 + (-1), \quad 4 = 6 + (-3) + 2 + (-1)$$

のように、減算ではなく負の数との加算だと解釈すれば、減算は加算のとみなせる。除算の場合には少し強引に聞こえるかもしれないが、分子を1とする分数と整数の除算、つまり、

$$\text{除算: } 1 \div 2 = \frac{1}{2} = 1 * \frac{1}{2}, \quad 5 \div 6 = \frac{5}{6} = 5 * \frac{1}{6}$$

と考えることで、除算を乗算の一部とみなせる。

### ¶ 数式

世の中には非常に多くの本がある。本だけではない。鉛筆、ボールペン、コンパス、定規、机の上にあるものだけ上げても、非常に多くのものが存在している。話を簡単にするために、机の上には、鉛筆と消しゴムと本がそれぞれ一つずつ存在し、これ以外のものは置いていないとしよう。やはりこの3つのモノにも重さがあり、それを $W_{\text{鉛筆}}$ ,  $W_{\text{消しゴム}}$ ,  $W_{\text{本}}$ と表現することにしよう。これら3つの重さについて関心があるのは、それらの「関係」だろう。「関係」といったのは、どれが最も重いかとか、軽いかといったことである。この「関係」を数学的に扱うには、数式を使うと非常に簡単に表現できる。例えば、鉛筆の重さと消しゴムの重さが全く同じ時には、

$$W_{\text{鉛筆}} = W_{\text{消しゴム}}$$

と表現できることは、周知のことであると思う<sup>84)</sup>。数式とは、文字と文字の「関係」を表現できるものである。

---

<sup>84)</sup> 哲学的な疑問はここでは考えないことにしよう。数式は文字の羅列である。ここで言うと、

## ¶ 式変形

文字と数式には意味があり、特に物理学において文字と数式は、現実世界と強く結びついている。現実に起きている現象を数式で表すことが、物理学のひとつ的方法なのだから。では、「式変形」に意味はあるのだろうか。結論から言えば、「式変形」それ自体にはなんの意味もない。単に、数学的に定義された文字の操作を行っているに過ぎない。にもかかわらず、「式変形」は非常に重要なである。実際、式変形を行うことにより、いろいろと推論を行うことができるし、また、それによって物理学が発展しているのである。意味が無いのに重要であるとは、いったいどういう事なのか。答えは、式変形を行うことにより、論理的必然性を確かめることができることにある。何らかの意味をもった数式に式変形を施すことで、別の意味の数式を導出する。これにより、正しい推論を行うことができるのである。世の中には論理的に矛盾したことは起こりえないから<sup>85)</sup>、論理立てて考えることで、間違った結論を出すことは、ぐっと少なくなるはずである。式変形を行うということは、論理的推論を行うということであり、そうして得た結論は、論理的に必然性を持つものであり、実験して確かめる価値は十分にあると言える。ちなみに、ここで言う必然性とは、物理学的に考えて必然ということであり、論理的に厳密に必然であることをいうのではない。物理学における論理的推論とは、「物理学的に考えてもっともらしい仮定」をもとにするため、この点において多少の厳密性が犠牲にされている。

### # memo No.14: $a + b = b + a$ ?

$4 + 3 = 7$ という足し算を考えよう。当然、3と4を入れ替えて書いて、 $3 + 4 = 7$ と書いても同じ。また、等号の右と左を入れ替えて、 $7 = 4 + 3$ あるいは、 $7 = 3 + 4$ としても、等式は成り立つ。本当にそうだろうか。 $3 + 4$ は $4 + 3$ に同じなのか。実際のところ、違うだろう。3つのイチゴと4つのリンゴは、4つのイチゴと3つのリンゴとはことなる。確かに、個数だけに着目すれば $3 + 4 = 4 + 3$ になるが、イチゴとリンゴの個数としての数字であると考える場合には、この等式は成り立たない。また、 $3 + 4 = 7$ という式を言葉にすると「3足す4は7である」と表現するのが自然であり、他方、 $7 = 3 + 4$ は同じように言い表すと「7は3足す4である」となる。両者の意味は全く違う。「7は3足す4である」は間違ってはいないが、決め

$W$ ,  $=$ , 鉛, 筆, 消, し, ゴ, ム

という記号の羅列と捉えられる。文字の羅列になぜ意味を感じるのか。うーん、難しい。とりあえず、この疑問は保留にしておこう。

► 85) そもそも、論理的に矛盾していることを想像することもできない。「ここに本があり、かつ、その同じ場所に本がない」という状況を思い描くことが可能だろうか。

ついているような表現であり、抵抗を感じる<sup>86)</sup>。 $3 + 4$  も  $4 + 3$  も  $5 + 2$  も  $10 - 3$  も数式として考えれば、計算結果はすべて等しく、7 である<sup>87)</sup>。式計算する場合に、数や式に意味を考えてしまうと、余計なことを考え出してしまう（「 $4 + 3$  と  $3 + 4$  は同じか」とか）。式計算時には数を抽象化してとらえなければならない<sup>88)</sup>。

一方で、物理学では単位という概念がある<sup>89)</sup>。物理学で扱う数字には意味が込められており、計算時に単位を意識する必要がある。単位が違う数字の足し算は認められていない<sup>90)</sup>。掛け算は認められている<sup>91)</sup>。単位は数学にはない概念である<sup>92)</sup>。物理学で数式を扱う場合、数学と全く同じように扱ってしまうと、単位の違う数字の足し算をしてしまうという誤りをしがちである。

▶ 86)  $7 = 5 + 2$  でも、 $7 = 1 + 6$  でも、 $7 = 10 - 3$  でもよいのである。

▶ 87)  $3 + 4$  という計算結果と、 $4 + 3$  という計算結果が等しく、両者とも互いに置き換えることができるということ。

▶ 88) きっとこれら辺に数学の素晴らしさがあるのだろう。こういう抽象化が興味深い体系的の数学を構成する基礎になっていくのだと感じる。

▶ 89) 長さ [m]、時間 [s]、質量 [kg]、電流 [A] など。

▶ 90) 長さ 1[m] + 質量 1[kg] という計算は全く意味不明だ。

▶ 91) だからこそ、新しい概念を作ることができる。エネルギーの単位 [J] は、力 1[N] と長さ 1[m] の積として定義されている。( $[J] := [N \cdot m]$ .)

▶ 92) ここにも、科学と数学の違いが表れている。



# 2

## 力学の基本概念

### 2.1 力とその性質

#### 2.1.1 力（ちから）

世の中には、力といわれる現象がある。この「力」は様々な意味合いで使用される。視力、脚力、握力などの身体能力に関する「力」、計算力、想像力などの思考に関する「力」。ほかにも、技術力、接客力、情報収集力、対応力など、人の性格や能力に関する「力」などいろいろ考えられる。

物理学で対象とする力は、弾性力や反発力、物体を変形させる力、物体の運動方向を変化させる力などである。以下、「力」と表現される場合には、特に断りのない限り、このような力を想定する。

力とは、捕らえ所がなく、非常に曖昧である。現に、ニュートン力学では、力とは何かを説明することはできない。では、どのように力というものを考えるのか。結論から言うと、力の存在を、なんの根拠もなしに認めることがある。力という物理現象の発生原因が分からぬのだけれど、実際に、私たちは日常的に、力が存在していると

いうことに関して、疑いを持つことはない<sup>1)</sup>.

しかしながら、力は重要な概念である。力学の最大の目標の一つは、物体の運動の軌道を求めることがある。それには、物体にかかっている力を、考えないとならない。物体の運動の原因は力であり、力は物体の運動を解析する上で、非常に重要なものである。

これだけ重要な概念である“力”なのだけど、「力とは何か」と問われると、回答するにはとてもむづかしい<sup>2)</sup>。とりあえずの力の説明として、物体を変形させる、あるいは、物体の位置を変化させる原因としておこう。言い換えると、物体が変形すれば、その物体に力が加えられたということになるし、物体の位置が変化したならば、この場合にも物体に力が加えられたということになる。

物体の変形や変位を説明する概念として、力の存在が要請されるとしてもよい。

### 2.1.2 力の重ね合わせの原理

複数の力が物体に働いているとき、その力を合計することを、力の合成という。合成された力のことを合力という。力の合成は、ベクトル和で表現できる。すなわち、物体に  $N$  個の力が加わっているとき、その合力は、

$$\mathbf{F}_{\text{合力}} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_N \quad (2.1)$$

である。和の記号を用いると

$$\mathbf{F}_{\text{合力}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \quad (2.2)$$

のようにかける。

また、逆に、1つの力を、複数の力の合力である<sup>3)</sup>。力の分解は、よく行われる。

<sup>1)</sup> 力の存在に疑問をもつこともあることだろう。しかし、ここでは哲学について語っているのではない。力とは何か、もっと言うと、力という現象を感じる私たちとは何なのか、これはひどく難しい問題である。なので、こういう問題には目を閉じておくことにしよう。今の私の興味は、世界がどのように構成されているかということであり、こんなところで、足を止めてしまってはならない。知りたいことはもっと先にある。そのため、力という現象の存在を素直に認めることにしよう。ただし、この問題を忘れてはならない。ノートの端の方に、「力とは何か」という疑問をメモしておこう。

<sup>2)</sup> 素粒子物理学の教科書などでは、(ゲージ粒子を介绍了)「相互作用」と説明されるが、詳細は、素粒子物理を考えるときに説明しよう。

<sup>3)</sup> 式 (2.2) は等式であり、左右が等しいのだから明らかではあるが、少しだけ気付きにくいかと思われたので書いておいた。すなわち、1つの力を複数の力に 分解 することもできる。

例えば、 $x - y$  平面上における力を表現するのに、力を  $x$  方向と  $y$  方向に分けて考えることが多い。

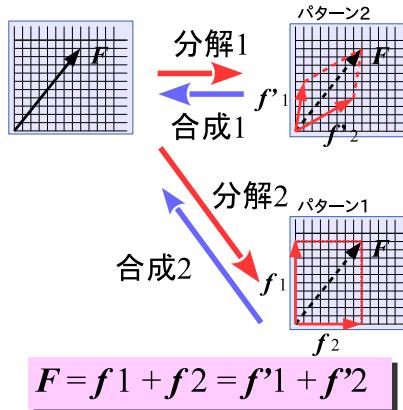


図 2.1 力の合成、力の分解

力学では、力が重ね合わせの原理を満たす理由は問わない。この原理は、実験的に確かめられる法則として扱われている<sup>4)</sup>。

別称として、平行四辺形の法則、力学の第 0 法則とかと表現されることもある。重ね合わせの原理が成り立つことを、数学的に表現すると、「力には 線形性 がある」ともいえる。もっと物理学の学習を続けていけば、力の重ね合わせの原理を説明できるようになるのかもしれない。しかし、ここではその理由はわからないので、とりあえず、重ね合わせの原理を認め、学習を先に進めるべきだ。

# memo No.15: 和の記号:  $\sum$

例えば任意の 4 つの実数  $a_0, a_1, a_2, a_3$  が与えられたとする。この時、 $a_0$  から  $a_3$  までの和  $S$  を書き表すとき、

$$S = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$$

<sup>4)</sup> もしかしたら、将来、このことを説明できる日が来るかもしれないが、今はこれを説明できるだけの知識がない。ただ、電磁気力に関していえば、電磁場の線形性に帰着できる（問題を先送りしただけ、かもしれないが）。

のように書き表せる。しかし、項数が9999個になった場合 ( $a_1, a_2, \dots, a_{9999}$ )、書き表すことはできない<sup>5)</sup>。そこで、 $a_0$ から $a_{9999}$ までの数の合計を計算することを示す記号を導入したくなる。和の記号として、 $\sum$ を新たに導入し、以下のように記述することにしよう。

$$\sum_{i=0}^{9999} a_i := a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{9999}.$$

$\sum$ は「シグマ (Sigma)」と発音する。今の例だと上限が9999の場合に限ってしまうが、上限を任意の数 $N$ として場合には、次のように書く<sup>6)</sup>。

$$\sum_{i=0}^N a_i := a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_N.$$

さらに、この例だと最初の数字は0であるが、もちろん任意でよい。最初の数を $m$ と文字で置き換えて ( $m < N$ であるはず)<sup>7)</sup>

$$\sum_{i=m}^N a_i := a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_N.$$

これで、項数が多くなっても和を書き表せるようになった。

ちなみに、 $a_i$ の添え字 $i$ は和の具体的な計算（和の記号の展開）の時に、失われてしまう数でダミーの数字と言われることがある。別に $i$ ではなく、 $j$ を使っててもよい。その場合は以下のようになるが、 $i$ の場合と意味は同じである。

$$\sum_{j=m}^N a_j := a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_N.$$

項数を無限大 $\infty$ にした場合でも、

$$\sum_{j=m}^{\infty} a_j := a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots$$

と形式的に表現することもできる<sup>8)</sup>。

<sup>5)</sup> 原理的には可能であるが、実際に書くのに時間がかかるため現実的ではない。

<sup>6)</sup> 前の例だと具体的な数字だった9999を $N$ という文字に変更する。

<sup>7)</sup> 例えば、 $a_0, a_1$ がべつと定まっていて、この2つの数にさらに $a_2$ から $a_N$ までの数の合計を足したいこともあります。

<sup>8)</sup> 「形式的に」といったのは、 $\infty$ が数ではないために、正式な和の手続きになっていないからである。しかし、この表現により、無限にある項数を順に足し合わせるという行為をイメージさせることができある。

### 2.1.3 作用

力のことを、場合によっては、作用 ということもある。例えば、「2つの物体間に働く相互作用」と書かれていたら、これは、2つの物体に働く力という意味である<sup>9)</sup>。

宇宙論や素粒子理論の教科書などでは、その冒頭に「力には4つの種類ある」と紹介されることが多く、図2.1が掲げられる<sup>10)</sup>。この4つの力は、それぞれで従っている物理法則や性質が異なる。つまり、少なくとも4つの物理法則があるということであり、だけどこれは、物理法則はただひとつであるという物理学の精神に反する。物理学の理論構築の目標の一つは、この4つの力を自然に説明することである。要するに、4つの力を説明できるような、もっと大きな理論的枠組みを構成し、その枠組みの中で4つの力が自然に導かれるような理論を作りたいのだ<sup>11)</sup>。

表 2.1 4種類の力

名称	別称
万有引力	重力
電磁気力	ローレンツ力
弱い相互作用	$\beta$ 崩壊
強い相互作用	核力

<sup>9)</sup> 量子力学や素粒子理論、あるいは、一般相対性理論の教科書でよく使われる表現だ。ニュートン力学でも、「作用・反作用の法則」のように使用される。

<sup>10)</sup> 当然ながら、この力の分類は、物理学の発展により得られたものであり、最初から知られていた事実ではない。

<sup>11)</sup> 今では、電磁気力と弱い相互作用と強い相互作用の3つの力を説明できる統一理論が知られていて、これを 標準模型 という。しかし、標準模型には人為的な定数が多く含まれており、また、万有引力も説明できないので、私達が知りたい力の統一理論ではない。

当然ながら、力を統一的に説明できるという保証はどこにもない。統一理論の確立は可能であると信じて、理論を作り上げる努力をするしかない。超弦理論は、現状での最も有力な理論の1つであるが、超弦理論を実験的に検証されていない。他の候補にもループ量子重力という理論も提案されているが、こちらも実験検証ができない。一般に周知される理論の確立にはまだ時間がかかるようだ。もしかしたら、その過程で、力を統一的に説明できない、という結論に至る可能性もある。

### ¶ 万有引力（重力）

万有引力はどんな物質も持っている性質で、その強さは、4つの内で最弱。重力とはが物を引っ張る力のことで、それは万有引力の一部であるが、重力という表現のほうが実感があり馴染み易いせいか、万有引力と同義的に使われることが多い。一般的に、万有引力と重力は同義であると考えてよい<sup>12)</sup>。

重力を説明する理論は一般相対性理論である。重力があまり強くない場合は、ニュートンの力学で十分精度よく説明される。

### ¶ 電磁気力（ローレンツ力）

電磁気力は、ローレンツ力と言われることもある。ローレンツは電磁気現象の解明に貢献した物理学者の名前である。電磁場中を運動する電荷が受ける力のことである<sup>13)</sup>。

電磁気力は電磁気学、あるいは、電弱統一理論によって説明される。電弱統一理論は電磁気力と次に説明する弱い相互作用の両方を説明できる理論である。ただ、電磁気力のみを考える際には、マクスウェルの古典的な電磁気学で十分な場合が大半。

### ¶ 弱い相互作用

弱い相互作用とは、原子が $\beta$ 崩壊するときに使われる力である。原子核や素粒子を扱う場合に、重要な力だけれど、力学では対象範囲外の概念である。量子力学や特殊相対性理論（場の理論）によって説明される力である。電弱統一理論によって説明される。

### ¶ 強い相互作用（核力）

強い相互作用とは、原子核を構成する陽子と中性子を結びつける力である。陽子と陽子、中性子と中性子も強い相互作用によって引き合っている。電磁気力を考えると陽子同士は反発しあって安定しないのだが、この強い相互作用によって引き合うために、原子核が安定して存在できるだから、当然、強い相互作用は電磁気力よりも強い力である。しかし、単純にそう考えると、電磁気力は強い相互作用に隠されてしまう（表だって電磁気力を感じなくなってしまう）はずだが、実際はそうではない。その理由は、有効範囲の違いで説明される。原子核よりも狭い領域では強い相互作用が優

▶ 12) ただし、両者を区別して考えたい場合もあるので、文脈により判断したい。

▶ 13) 詳しくは電磁気学の部分で学習する。

勢であるが、原子核以上の範囲では強い相互作用は電磁気力よりも弱くなるのだ。各力は、量子色力学によって説明される。

### 2.1.4 外力

系の外から生じる力が系に影響を及ぼすこともあろう。対象とするもの以外から受ける力のことを **外力** という。例えば、重力に逆らって物体を持ち上げるときに、人間による力が必要である。物体が勝手に重力に逆らって宙に浮いたりすることはありえないからである。このように、人間による力を想定して、外力という言葉を使うこともある。

## 2.2 基本単位 ( $[s]/[m]/[kg]/[A]$ )

### 2.2.1 単位と測定

物理学は経験・実験結果がその基礎であることは前に書いた通りである。実験とは、実験すべき対象に何か刺激を与えて、その反応をみることである。このとき、対象の持っている何らかの量を測る必要が出てくる。ここで、「**測定とは何か**」ということを考え直さないといけない。答えは簡単だ。測定とは、基準値に対して何倍であるかを調べる行為であると言える。言い方を変えれば、測定基準と測定対象の大きさを比較することである。測定対象は色々とあるが、例えば、音の大きさだったり、気圧、紐の長さ、ものの色、糖度、… etc.、と色々ある。この比較対象となる基準値は、**単位** と呼ばれる。「**基準値**」という語彙は意味が広く、合格基準点とかのボーダーライン的な意味でつかわれることも多い。単位という特別な名称を与えたのは、基準値の意味を狭めるためである。単位とは、測定対象の大きさや量を数字で示すため、最も基本的な大きさを規定するものである。

### 2.2.2 4つの基本単位

物理学では、以下の4つを、測定可能な最も基本的な量としている（図 48.1）<sup>14)</sup>。

この4種類の単位が、現在の物理学の **基本単位** である。これらは、国際単位系で

<sup>14)</sup> 逆に言うと、この4つの単位は、他から導くことのできない単位である。いわば、単位系におけるもっとも素朴な要素となる。単位の素粒子的な役目を担っている。他の単位は、これらの単位から組み立てることができる、というか、そのように定義される。

表 2.2 基本単位（物理学の基本 4 単位）

名称	記号	英字表記	読み
時間	[s]	second	セカンド
長さ	[m]	meter	メートル
質量	[kg]	kilo-gram	キログラム
電流	[A]	ampere	アンペア

ある SI 基本単位に指定されている。ちなみに、SI 単位系には、これら 4 つほかに、以下の 3 つが挙げられている（図 2.3）。

表 2.3 他の基本単位

名称	記号	英字表記	読み
熱力学温度	[K]	kelvin	ケルビン
物質量	[mol]	mol	モル
光度	[cd]	candela	カンデラ

しかし、熱力学を考える場合の熱力学温度 [K] を除き、物理学的観点からは、この 3 つは基本単位とは考えない。物質量の [mol] は化学における重要な単位であるが、これは、統計物理学から定義できる量である。また、光度 [cd] は光の強さを表している。電磁気学により、光は電磁波であることが示されており、その強さは電磁波の波長（もしくは周波数）で表せる。さらに言うと、実は熱は現実には存在しない。熱は、統計物理学によって、多数の分子の乱雑な運動であると説明される。つまり、日常で感じている熱とは、分子集団の持つ運動エネルギーであると言えられる。なので、これらの 3 つの単位は、他から導くことができるという点で、物理学の基本単位としては、扱われていない。もちろん、基本単位でないからと言って、無意味ということではない。現象を簡潔に説明できる場合には、この 3 つの単位も積極的に使用される。

### 2.2.3 組立単位

その他の単位として、例えば、角度を表現する [rad] や、光の強さを表現する [cd] などがある。角度は長さと同じに扱えるが、実際のイメージに即して考える場合に、欠くことのできない単位である（非常に便利であるという意味で）。

また、力やエネルギーの単位は、基本単位で構成される 組立単位 である。例えば、力の単位は [N]（「ニュートン」と読む）であり、これを基本単位に分解すると、

$$[N] = [\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2]$$

となる<sup>15)</sup>。エネルギーの単位 [J]（「ジュール」と読む）は、

$$[J] = [\text{Nm}] = [\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2]$$

<sup>16)</sup>。力やエネルギーの性質などについては、後で学習する。ここで覚えておくべきことは、後の学習で現れる全ての物理量は、4種類の基本単位から組み立てられているということである。

#### 2.2.4 測定の方法

測定とは、測定対象の大きさを知るための行為である。物体が大きいとか、小さいとかという判断は、どのように行うべきだろうか。例えば、単に大きな消しゴムとか、小さい鉛筆とかと言ったところで、具体的な大きさを思い描くことは不可能である。確かに、これまでの経験から常識的な大きさを思い描いて、これと比較することで、大きいだと小さいいだとある。しかし、これは日常生活でののはなしであって、物理学においては、このような曖昧さは避けるべきだ。常識的な大きさと言われても、その思い描く大きさは人それぞれだし、ましてや常識的な大きさよりも大きいと表現されてしまっては、具体的な大きさは全く想像がつかない。

では、物の大きさを具体的に、しかも誰にとっても同じような大きさが想像できるように表現するには、どうしたら良いだろうか。答えはもう出てしまっている。単位という概念を導入するのである。単位という概念を導入することで、物体の大きさを具体的に表現できるようになるのだ。

例えば、ここに2つの異なる長さの棒があるとしよう。簡単のため、この2つの棒はまっすぐであるとする。2つの棒は長さの違いで区別することができて、長い方をA、短い方をBとしよう。今、何も考えずに“長い方”あるいは“短い方”と書いてしまったが、どのように長さを測ったのだろうか。

<sup>15)</sup> 日本語による読み方は、「キログラム メートル 每秒毎秒（まいびょうまいびょう）」である。

<sup>16)</sup> 日本語による読み方は、「ニュートン メートル」である。基本単位に戻ると、「キログラム メートル 二乗 每秒毎秒（まいびょうまいびょう）」となる。

## 2.2.5 単位

単位とは、測定の基準のことである。物理学は、物体の長さや重さ、時間、電流値を最も基本的であるとしている。そして、力学では、この内の三つ、すなわち、時間・長さ・重さを特に重要視する。これらはすべて実験的に観測されるものである。単位の重要性について、より具体的に「大きい」という言葉を例に取り、以下に説明してみよう。

## 2.2.6 時間

時間の進みは、あらゆる空間において、一定である。時間を  $t$  で表す。時間の単位を [s] で表す。「second」又は「秒」と読む。時間は 過去 → 現在 → 未来と進むと考える<sup>17)</sup>。

### Point 1: 単位時間 (1[s]) の定義

「 $^{133}\text{Cs}$  原子が出す電磁波が 9192631770 回振動する時間」が 1[s] と定義される。原子の振動回数を数えることで 1 秒を測るということである。

### # memo No.16: “時間”と“時刻”的違い

ここで、「時間」と「時刻」の違いを確認する。言葉よりも、図で示したほうが早い（図 2.2）。

例えば、「1 時から 3 時までの時間は 2 時間である。」という主張をするとき、この“2 時間”が 時間 であり、1 時とか 3 時は 時刻 である。時刻は幅がなく、時間を直線で表現にしたときには、点で表現される。それに対して、時間はある時刻と別の時刻の間の間隔である。

勘違いを起こしがちなことがある。それは、すべての時刻を集めたものが時間である、という考え方である。しかし、これは間違いだ。時間は数直線で表すことができ、よく、時間軸という言葉で表現される。時刻とは、時間軸の一点を表す語彙であるが、その一点には幅はない。つまり、時刻の時間は 0 である。0 をいくらたくさん足しあわせたところで、結果は 0 である

<sup>17)</sup> ここで注意しておく。今までのところ、未来 → 現在 → 過去という風に、私達が実感している時間の向きとは逆の向きに時間が進んでも、物理法則が矛盾するようなことはない。但し、熱力学の第 2 法則（「エントロピー増大の法則」：← 後述）は、この限りではない。



図 2.2 時間と時刻

ことは言うまでもない。

#### # memo No.17: 飛ぶ矢のパラドクス

エレアのゼノン<sup>18)</sup>は、次の4つのパラドクスを考えだしたこと、有名な人物である。

- (1) 二分割のパラドクス
- (2) アキレスと亀のパラドクス
- (3) 飛ぶ矢のパラドクス
- (4) 競技場のパラドクス

この内、3番目の「飛ぶ矢のパラドクス」が時間に関するパラドクスである。このパラドクスは、次のようなものである。動いている物体といえども、ある瞬間に、定まった1つの位置に位置しているはずである（写真をとるとその一点に位置している）。定まった位置に存在するということは、静止しているのと同じ。ということは、動いている物体は、瞬間的には静止しているということになる。つまり、動いている物体は、すべての瞬間で静止状態にあるということになる。明らかに、矛盾だ。この矛盾を「飛ぶ矢のパラドクス」という。

#### # memo No.18: 時間とは何か

時間とは、一体、どこから生じているのか。いや、言い方を変えよう。なぜ私には時間という感覚があるのか。人間の知覚は五つあり、五感といわれる。それは、視覚、聴覚、嗅覚、触覚、味覚であるが、どれも直接的に時間を感じ取る器官ではない。それもそのはずで、「時間」という概念は外から与えられるものではなく、頭の中で作られるものだからだ。物の変化を感じ取るとき、頭の中で時間という感覚が生まれるので。

自動車が走っているのを見て（視覚）、時間を感じる。音楽を聴いているとき（聴覚）、時間を感じる。部屋に芳香剤を置いて、周囲の匂いの変化を感じ、時間を感じる。その他いろいろ。

<sup>18)</sup> *Zηνων* (B.C.490 – B.C.430, 古代ギリシア)：ギリシャ文字をそのままアルファベットに変換すると「Zenon」。しかし、英語表記で「Zeno」（ラテン語、フランス語でも同じ）で、ドイツ語表記では「Zenon」と表される（ドイツ語の場合、「ツエノン」と発音するのかな）。「エレアのゼノン」とも言われる。古代ギリシャ人。ちなみに、「キプロスのゼノン」と呼ばれる、同名の人物がいるが、その人とは別人。「エレアのゼノン」と書いたのも、それと区別するため。キプロスのゼノンも、大哲学者であり、ストア派と言われる禁欲的な態度や特を重んじる思想や態度を唱えた。

しかし、時間という感覚を作り出すには、五感だけとは限らない。考えるという行為自身が、時間概念を作り出す。

時間は温度などのように、人間が感じる二次的な概念なのだろうか<sup>19)</sup>。人間が勝手に時間という概念を作り出しているだけなのか。もしそうだとしたら、時間というパラメータのない物理理論が作れるはずである。現在の物理学において、時間という概念は問答無用に押し付けられる、基本パラメータである。基本パラメータであるから、その性質は理論の内でわかるのかもしれないが、そもそも時間とは何かを追求することは不可能である。「時間とは何か」という問いに答えるには、時間以外の何かから時間が生成されることを説明しないとならない。現状の物理学では、そもそも時間ありきの理論であり、これを満たすことができない。物が変化できるのは時間があるからであり、物の変化があるから時間を感じるのだ。論理が循環してしまう。

こう考えることはできないか。「記憶」という能力と「比較」という能力があることを仮定すると、物体の前の位置と後の位置を記憶し比較できる。比較の結果、前と後で違いを感じることで、時間が生まれるのだ、と。すると、記憶や比較とはどういう行為かという問題になってくるし、また、違いを感じ取るという感覚も説明してもらいたくなってくる。たとえ、記憶や比較についての説明があつたとしても、その説明に使う概念の説明をもとめることになるだろう。結局、この論理では説明の無限後退になってしまう。

論理を組み立てるには、初めに有無を言わざずに押し付けられる公理がその基礎に必要だ。ユークリッド幾何学では、点や線の存在は何の説明もなしに提示される。今の物理学も、点や線と同じように、時間は何の説明もなしにその存在が認められている。公理に対して、それはなぜ成り立つかを問うても、答えは返ってこない。時間についても同じことだ。時間は物理学的な公理として導入されているので、時間と何かを物理学の中で答えることは不可能なのである。

しかし、相対性理論などにより、物理現象に対する時間の性質を考えることはできる。つまり、観測者の運動と時空の関係を、理論的に考察することは可能ということだ。一方で、量子力学的視点に立つと、因果律がなくなってしまう<sup>20)</sup>。因果律とは、原因と結果の関係であり、現象の前後関係を示すもので、その根底には時間がある。要するに、量子力学的現象を考えると時間という概念が邪魔になってくるのだ。もっとはつきり言うと、時間の存在が否定される

<sup>19)</sup> 今の物理学では、温度は多数の分子の運動で説明される（気体分子運動論）。温度は物理的な存在ではなく、分子集団の運動の激しさで説明される。温度が高いとは、分子集団の持つ運動エネルギーの平均が高いということである。逆に温度が低いとは、分子集団の持つ運動エネルギーの平均が低いことなのだ。温度の本質は、分子集団の持つ運動エネルギーの平均値である。人間が感じる温度とは、この分子の集団の運動をマクロで見た場合に生じる、二次的な概念なのだ。

<sup>20)</sup> 有名な光子の二重スリットの干渉実験では、光子の経路を特定（観測）することはできず、実験結果を最もよく説明する仮説は、光子の取りうるすべての経路を通ったとするのが、有力である。複数の経路を分裂せずに、1度に通ったというのだ。因果律もあったものではない。あくまでも仮説なのだが、こう説明する以外に良い説明ができないでいる。考えられるのは2通りだ。1) 因果律という概念は人間が勝手に作り出したものだが、これは絶対に成り立っていて、まだ知らない事実がある。2) 因果律という感覚自体が錯覚であり、自然の本質には因果律という性質はない。

かもしれない。ここを足掛かりとして時間理論を構築することが、目前の目標であろう。熱素（カロリック）やエーテルが否定されたように、時間の存在も否定されてしまうのだろうか。

#### # memo No.19: 「今」見ている世界はいつの世界か

「今」という感覚は、何の根拠も必要としない、人間の持っている最も基本的なものだ。何の前置きもなしに使われる概念である。しかし、少し考えてみると、奇妙なものもある。例えば、「今」自分が見ている世界の出来事は、いつ起きたのであろうか。光の速度が有限であることが疑いようのない事実として受け入れられている現在、目に同時刻に入ってくる光景が、本当は同時に発生したものではないことを受け入れざるを得ない。例えば、夜空の星の光は何万年も前に発せられた光で、太陽の光は数分前のもので、目の前の景色からの光はほんの一瞬前に発生したものだ。何万年も前に発生した光と、さっき発生した光を同時に見ているということである。だから、同時に見えたから同時に発生したとは言えないのだ。

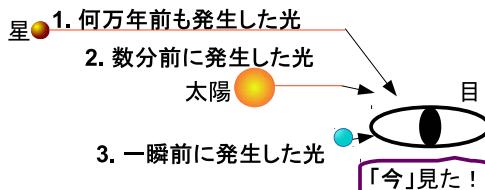


図 2.3 「今」見ている世界

今見ている現象は、いつの現象なのか。光の発生した場所により、観測者までの到達時間がばらつくので、観測者が同時にとらえた現象でも、実際に発生した時刻は異なるのである。では、私は今、いつの世界を見ているのか。「今」という感覚は主観的な感覚であり、他人と共有することはできないことは、相対性理論の主張するところであるが、相対論を持ち出すまでもなく、「今」という感覚は観測者個人のものでしかない。観測者の数だけ異なる「今」がある。

更に言うなら、目からの視覚情報<sup>21)</sup>を自分が把握するには時間が必要だ。脳科学の教えるところによると、「見た」という感覚は、目からの情報を脳に伝えて、さらにその情報を脳が処理した結果である。ものを「見た」と感じるまでには、目からの情報を脳に伝える時間と、その情報を脳が処理して「見た」と感じさせるまでの時間が必要なのだ。ということは、今見ていると思っている目の前の光景は過去の光景ということになる。つまり、自分自身で感じている「今」も本当の現実世界での今ではなくなってしまう。

「今」とは、いつのことなのだろうか。

<sup>21)</sup> 視覚情報: 目で見た目の前の光景のこと。

### # memo No.20: 空間化された時間

時間を計るという行為は、本当に時間を計っているのだろうか。フランスの哲学者ベルクソン<sup>22)</sup>は、この問に対して、否定的に答えている。時間を直接的に計れない、というのだ。時間を計るには、振り子（振動）にしても、アナログ時計にしても、デジタル時計にしても、最終的には、目に見える形で表現されたものを読み取る必要がある。目に見えるということは、空間的なものであり、つまり、時間の変化を空間の変化に変換して、時間の変化を捉えているのだ。確かに、アナログ時計で時間を計る場合、時間を示す針の位置を見ている。時間の変化分を、時計の針の位置の変化分に変換して、計っているのだ。

### # memo No.21: 時間の非実在性

時間について面白い主張がある。その主張とは、「時間という概念に矛盾が存在するので、時間は存在しない」というものだ。イギリスの哲学者、マクタガート<sup>23)</sup>は、1908年において、時間の非実在性 (The Unreality of Time) を唱えた。時間は論理的に存在しないと主張したのだ<sup>24)</sup>。マクタガートよれば、私達が普段使っている「時間」という概念は、少なくとも2通り存在する。一つ目は、時間には、過去・現在・未来の区別があること（この性質をA-系列という）。二つ目は、時間の進む向きが過去から未来に向かうこと（この性質をB-系列という）。この2つの性質を見てみると、B-系列を考えれば、時間に関して十分な考察ができると思われる。B-系列が、その内部にA-系列を含んでいるように見えるからだ。しかし、マクタガートは時間の性質を考える上ではB-系列だけを考えただけでは、時間を十分に捉えることができず、結局、A-系列も前提としなければならないという。ところが、このA-系列は、その内部に自己矛盾を含んでおり、とのつまり、時間は存在しないと結論される。

上記説明は、超概略的な説明でほとんど正確ではない。主張の雰囲気を記述しただけである。正確には、脚注に上げた参考図書を読んでもらいたい。

---

<sup>22)</sup> Henri-Louis Bergson (1859–1941, フランス) : フランスの哲学者。著書(=論文)「時間と自由」、「物質と記憶」で有名。

<sup>23)</sup> John McTaggart (1866 – 1925, イギリス) : イギリスの哲学者。ラッセル (Bertrand Russell:1872–1970, イギリス) の先生でもある。

<sup>24)</sup> 「時間の非実在性 (The Unreality of Time)」は、1908年に雑誌 Mind で掲載された論文である。もちろん、私はこの論文を読んでいない。以下の本を興味本位で読んだのみである。しかし、この本は、時間の非実在性に関するマクタガートの主張を噛み砕いた、丁寧な説明がなされている。一冊を割いて、この問題を解説している。時間について考えるのであれば、この本を読まないわけにはいかない。ただし、物理学と直接関係したような、重大な問題ではない。私は、こういう考え方もありだな、という程度に捉えている。

(参考図書) 入不二基義 [著], 『時間は存在するか』, 講談社現代新書, 2002

### # memo No.22: 時間が逆行しない

時間は逆行するか。私が今まで生きてきて、時間が逆行したことはない。もっと正確に言うと、そう感じたことがない。もしかしたら、実際に時間は逆行しているが、私達がそう感じていないだけなのかもしれない。しかし、それは、私達にとって、時間の逆行したとは言えない。自分自身が、時間が逆行していると感じていないと、時間の逆行していることを観測したとはいえない。

私たちは時間の逆行を感じることはできるのだろうか。もし、時間逆行を感じ取るには、何か対象となる現象が必要である。例えば、コップからこぼれた水がひとりでにコップに戻るとか、道路を行き交う車や人々が後ろ向きに動いているとかといった、日常で起こりうる現象と反対の動きをする現象を見ないといけない。また、その時に時計の針<sup>25)</sup>も逆行していることもみないといけない。ここまで見れば、時間が逆行しているとみなしてよいだろう。本当によいだろうか。周囲が偶然に逆向きに運動していただけ、ということは起こり得ないのだろうか。今の物理学では、時間の逆行を完全には否定することができない。つまり、厳密には、時間が逆行していることの確認は不可能なのである。何が足りないのか。時間の定義に何か問題があるのか。それとも、何か基本的なことを考え逃しているのか、見逃しているのか。現在の物理学が時間の逆行を許しているにもかかわらず、なぜ、私たちは時間の逆行という現象を体験したことがないのだろうか。時間の逆行が今までに起こっていないのはなぜか。

こう考えていても、結論を見いだせそうにない。そこで、発想を変えて、時間の逆行を観測したと自分が感じたと仮定してみる。この時の、時間逆行の観測者の状況を考えてみよう。時間逆行の観測者は、周囲の物体が逆向きに動いているのを観測している。見る物体すべてが逆に運動しているのだ。では、自分自身はどう観測されるのだろうか。自分自身の動きも逆向きに運動していないと、矛盾する。しかし、自分の体が逆向きに運動している状況を、観測するという状況を想像することは、難しい。少なくとも、それを感じている観測者の脳は、時間逆行していてはならない。なぜなら、観測者の脳が時間逆行しているとすると、記憶状態が逆向きに変化するということであり、記憶が消えて行くということになるからである。記憶が消えてくのにもかかわらず、時間の逆行という、新しい現象を記憶することは不可能に思われる。こう考えると、時間の逆行を人間が感じ取ることは不可能なのでは不可能であることを、強く信じさせられる。時間の逆行を、本当に観測することは不可能なのだろうか。

### 2.2.7 長さ

私達は「長さ」という概念は直感的に捉えることができる。しかし、単に「長い」だと「短い」だとかといつても曖昧である。そこで、長さに基準 1[m] をもうけて、試料の長さをこれの何倍かで表そう。ここで、長さの単位は [m](「メートル」と読む) で表す。現在、単位長さ (1[m]) 長さの定義は、下のようになされている。

► 25) デジタル時計であれば、時計に表示される、時間を示す数値。

**Point 2: 単位長さ（1[m]）の定義**

1[m] は「真空中で光が  $1/299792458$  秒間に進む距離」と定義される。

この分数の分母の 299792458 という数字は光の進む速さに由来する<sup>26)</sup>。

少し唐突な定義だが、今はとりあえずこれを受け止めてもらいたい。この定義を理解できるのは、電磁気学で電磁波について学習し終わった頃だろう。今すぐに理解できないからといって、あせらないでほしい。

実は、長さの基準 1[m] の定義も、時間の定義と同様に、時代とともに変化する。その原因は観測技術の進歩であったり、新しい理論的発見が為されることによる。従つて、このような定義は、いつかは改変されるだろう。しかし、長さの基準が変わったからといって、物体の運動法則が変わってしまうかといえば、そのようなことは全く起こりえない。単位は人為的に導入するものであり、人間が自然を見つめるための 1 つの道具のようなものに過ぎない。

現在は、特殊相対性理論が確立しており、この理論によると、光の進む速さはどのような速度をもった観測者から見ても一定であるということがわかる。これについては特殊相対性理論の部分で確認することだが、今はこの事実をそのまま（正しいかどうかは後まわとして）受け入れておく。このような理由（光の速さが一定であること）から、光を基準に取るべきではないかという、これまた直感によって規定された定義である。

### 2.2.8 重さと質量

**コメント** 「重さ」と「質量」は 万有引力の法則 ニュートンの運動の法則と等価原理を考えることによって区別されるものである。つまり、今の段階では、前提となる知識が不足していて、その違いを説明することができない。質量とは、運動方程式によって、明確に規定される量である。また、重さとは、質量の概念と、万有引力の法則によって、定義される量である。しかし、質量や重さのイメージが説明できないわけではない。そこで、ここでは、その概要のみだけど、紹介しておく。

<sup>26)</sup> 光速は、 $2.99792458 \times 10^8$  [m/s] の速度で伝播する。速度の定義は 3.3 節を参照。

万有引力の法則によると、質量をもつものは互いに引き合うという性質をもっている。例えば、2つのボールが存在すれば、その2つのボールは互いに引き合っている。実際には引き合っていないように見えるが、それは力がとても小さいからである。実際に引き合うことを説明するために、この2つのボール一方を、地球としてみる。当たり前だが、他方のボールは地球に引っ張られて地球に落ちるだろう。地球がボールを引っ張っているからである。また、ボールも微力ながら地球を引っ張っている。質量が引力を引き起こすのである。

普段、私達の考えている「重さ」というのは、地球が物体を引っ張る力のことである。そこで、この「重さ」というものを基本単位にしようと思ってしまうところだが、そうしてしまうとある問題が生じてしまう。例えば、「地球で自身の体重を測った値」と「別の惑星で自身の体重を測った値」とを比較すると、全く異なった値になる。それは、地球と別の惑星の質量の差によっている。人間自身は全く同一人物であるから、質量は変化していないはずである。一人の人間が色々な惑星にいったとき、その人間を構成する原子や分子の量が極端に変化するようなことは理想的にはありえない<sup>27)</sup>。それにもかかわらず、“重さ”は測る場所によって変化する。従って、重さを基準とすることはできない。重さを基準として扱うとなると、いちいち“どこで測ったか”ということを問題にしなければならなくなってしまう。

重さに対して、質量は場所によって変化することない。そこで、重さの変わりに、質量を基本単位として扱うのである。基準は現在も「キログラム原器」を用いている。単位を [kg] で表現する。単位の k は  $10^3$  を意味する。

#### # memo No.23: 定量的な説明

コメント この内容は読み飛ばしてもかまわない。上の説明で、納得がいかなかった場合に読めばよい。詳しいことは後で考えることにして、概略を書く。

物体 A が物体 B から受ける万有引力  $\mathbf{F}_{AB}$  は以下のように表現される。

$$\mathbf{F}_{AB} = -G \frac{m_{gA} m_{gB}}{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B|^2} \frac{\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B}{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B|} \quad (2.3)$$

ここに、 $m_{gA}$ 、 $m_{gB}$  は2つの物体 A と B のそれぞれの重力質量である。 $\mathbf{r}_A$ 、 $\mathbf{r}_B$  は、それぞれ  $m_{gA}$  と  $m_{gB}$  の位置である。「重力質量」とは、万有引力を生じさせる質量のことである。 $G$  は万有引力定数である。

---

<sup>27)</sup> 理想的にというのは、体調の変化や精神的ストレスなどを無視できるとした場合をいう。

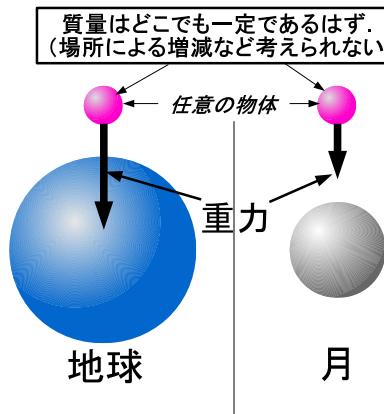


図 2.4 「質量」と「重さ」の違い

式(2.3)で、物体Bを地球であるとすると、物体Aは地球から

$$\mathbf{F}_{A-\text{地球}} = -G \frac{m_{gA} m_{g\text{ 地球}}}{|r_A - r_{\text{地球}}|^2} \frac{\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_{\text{地球}}}{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_{\text{地球}}|} \quad (2.4)$$

の力を受ける。ここで、添え字の「地球」は地球に対する質量や位置を表している。地球の質量  $m_{g\text{ 地球}}$  と物体Aの位置  $\mathbf{r}_A$  は一定であるから、

$$\mathbf{g}_{\text{地球}} := -G \frac{m_{g\text{ 地球}}}{|r_A - r_{\text{地球}}|^2} \frac{\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_{\text{地球}}}{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_{\text{地球}}|} \quad (2.5)$$

と置けば、式(2.4)は

$$m_{gA} \mathbf{g}_{\text{地球}} = \mathbf{F}_{A-\text{地球}} \quad (2.6)$$

と書ける。 $\mathbf{g}_{\text{地球}}$  は 地球の重力加速度とよばれる。

重さとは、式(2.6)の右辺の  $\mathbf{F}_{A-\text{地球}}$  のことであり、これは地球に引っ張られる力を意味している。対して、質量とは、式(2.6)の左辺の  $m_{gA}$  のことである。重さが測る場所で変化するというのは、式(2.5)の質量部分  $m_{g\text{ 地球}}$  が惑星ごとに異なるためである。従って、重さが変化するのは  $\mathbf{g}_{\text{地球}}$  が変化することが原因であって、 $m_{g\text{ 地球}}$  は何ら関係がない。質量とは、重さに含まれる力を取り除いた概念である。以上が重さと質量の違いである。

## # memo No.24: お肉の重さ

質量と重さのもっと身近な例をあげよう。例えば、那覇で 1[kg] の牛肉を買ったとしよう。那覇の重力加速度を  $9.80[m/s^2]$  とすると、

$$\text{重さ } W = \text{質量 } m_i \times \text{重力加速度 } g$$

だから、 $W = 1[kg] \times 9.80[m/s^2] = 9.80[kgf]$  である。ここに、[kgf] は重さの単位で、“kilogram-force(キログラム・フォース)”といふ<sup>28)</sup>。この  $9.80[kgf]$  の牛肉を、札幌にもっていくとどうなるだろうか。札幌の重力加速度は約  $9.79[m/s^2]$  だから、つまり札幌でのこの牛肉の重さは  $W = 1[kg] \times 9.79[m/s^2] = 9.79[kgf]$  である。この那覇からもってきた  $9.80[kgf]$  の牛肉は札幌では  $9.79[kgf]$  になってしまうのである。別に質量が減ったのではない。那覇でも札幌でも  $1[kg]$  の牛肉である。それにもかかわらず、重さが  $0.01[kgf]$ 、つまり  $10[gf]$  も変わってしまうのである。実際はこのようなことが起こらないように、札幌と那覇でのばかりは重力加速度の違いを考慮して作られている。重さと質量の違いを感じるのでないだろうか。

## # memo No.25: 質量は「何」からできているか

力学を勉強するときには、「質量」という概念は有無を言わざずに、受け入れさせられるはずである。しかし、この質量とはいって何かを考えたくなるものである。実際、物理学者はこの問題を考え、原子というものを発見したし、さらには、電子や陽子、中性子を発見している。現在では、さらに素粒子、クオークとどんどん詳細なことが見つかっている。では、質量は素粒子から生じているのか。いや、実はそうではない。素粒子は質量をもたない。では、質量はどこから生じているのか。この問題は「素粒子物理学」が解決してくれるものだと思う。大統一理論だと、超ひも理論だと有名であるが、まだ完全には説明しきれていないようである<sup>29)</sup>。そんなわけで、今は質量の発生源を探ることはせず、まずは質量ありきの理論を学習しよう。

「質量」はニュートン力学では当たり前のように使われる概念であり、物理学の基本中の基本であるが、その詳細は分かっていない。油断すると、質量というものは存在して当たり前だと思い、見過ごしてしまうかもしれない。頭の片隅に、この問題を記憶しておこう。

## 2.2.9 基本単位のまとめ

以上で、基本単位の説明が終わった。この他にも電磁気学では電流の単位 [A](アンペア)があるが、力学では電流という概念は扱わないでここでは省略する。電磁

<sup>28)</sup> [kgw] と書いて、“kilogram-weight(キログラムウェイト)”ということもある。この場合は日本語では「キログラム重(—ジュウ)」とよくいわれる。

<sup>29)</sup> 私は啓蒙書を読んだ程度の知識なので、質量が現在どのように説明され、その説明がどのように不完全なのかを握っていない。この理解についても、生涯の目標にしたい。ただ、とても難しい数学的演算を必要とするみたいなので、これは、難しいかも…

気学の部分で電流の単位を確認することにしよう。さて、力学の基本単位はSI系で[s], [m], [kg]である。それぞれ時間、長さ、質量の単位である。単位の定義についてもう一度確認しておきたい。

まず、時間の基本単位1[s]を定義した。それは「 $^{133}\text{Cs}$ 原子が9192631770回振動する時間」を1[s]とするというものであった。次に、この時間の単位を踏まえたうで、長さの基本単位1[m]を定義した。1[m]の定義は、「真空中で光が1/299792458秒間に進む距離」であった。これは光速を基とした定義である。そして、この2つの基本単位とは独立して、質量の基本単位1[kg]を定義した。といっても、質量の基本単位はキログラム原器である。キログラム原器の重さ1[kgf]を基にしている。

#### # memo No.26: 各基本単位の関係

ニュートンの運動方程式は  $ma = F$  である。ここに、 $m$  は質量、 $a$  加速度、 $F$  は力である。高校でも学習したように、質量  $m$  の単位は [kg]、加速度  $a$  の単位は [ $\text{m}/\text{s}^2$ ] である。従って、力  $F$  の単位は [ $\text{kg}\cdot\text{m}/\text{s}^2$ ] である。力の単位としては [N](ニュートン)を用いることが多い、従って、

$$1[\text{N}] = 1[\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2]$$

である。

先走って書いてしまえば、電流の基本単位 [A](アンペア)の定義はこの1[N]を元にして定義されている。どのように定義するかは電磁気学の部分で確認しよう。アンペアの定義が確認できたとして、物理学におけるSI系の基本単位の構成図を書いておくと、明瞭になると思う<sup>30)</sup>。

最初に、原子の出す光の振動回数から、1[s]が定義される。そして、1[m]を光が1[s]で進む距離の $1/c$ ( $c$ は光速の数値)と定義される。また、質量は、これらとは独立に、キログラム原器を基準に1[kg]が定義される。ちなみに、この1[s], 1[m], 1[kg]から力の単位[N](=[ $\text{kg}\cdot\text{m}/\text{s}^2$ ])が定義され、この1[N]を用いて、電流1[A]が定義される。電流の単位については電磁気学の項目を参照のこと。

## 2.3 物理学における、数学の扱い方

### 2.3.1 道具としての数学

先に、物理学では数学を道具として扱うと説明した。道具として扱うとは、数学的厳密性を適宜無視して、式を扱うということである。物理学の目的は自然現象を数

<sup>30)</sup> 電子情報通信レクチャーシリーズ B-13, 電子情報通信学会編, 岩崎俊[著], 『電磁気計測』, page 23, 2006 から。

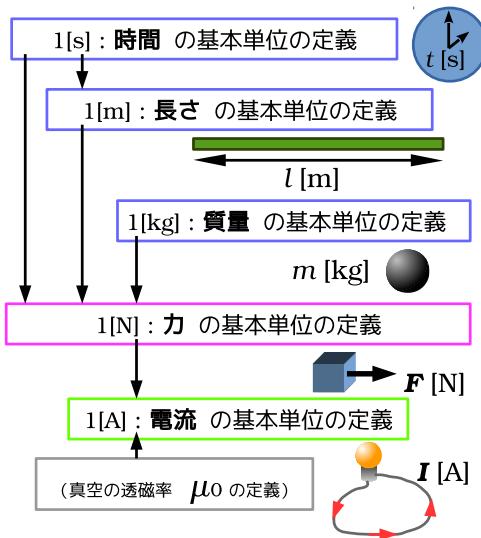


図 2.5 単位の構成

式で表現することであり、重要なのは数式ではなく自然現象である。だから、物理学の教科書を読んでいて、数式が出てきた場合に、注意が必要なのである。

数学を学習する上で大切なことのひとつに、厳密な証明の理解がある。だけど、数学を厳密に扱うとは、物理学ではあまり行わない。むしろ、厳密性を無視していることが多い<sup>31)</sup>。

物理学における数学は、あくまで道具なので、そんなに厳密に考える必要はない。大切なのは、そのイメージできることである。研究者になるのでない限り、数学的厳密性に敏感になるよりも、数学を図形的にイメージできるようになることの方が大事である。言うまでもなく、私は研究者を目指しているわけではないので、このノートでも数学的厳密性は全く気にしていない。このノートでは、数学を直感的に扱える程度で十分である。

<sup>31)</sup> 例えば、ティラー (Sir Brook Taylor, 1685–1731, イギリス) 展開の高次の項は無視するということがある。

### 2.3.2 物理学の考え方

数学の命題や定義は絶対に不变である。後になって「間違いでした」なんてことは起こらない。しかし、物理では間違いは起こる。そのたびに、修正がなされる。物理は実験や経験を基にしているからである。物理学ではある問題に対して、その原因をいろいろ仮説を立てて、実験的に仮説の正しさを確かめる。ここに人間の直感が介入してくる。この「人間の直感」こそが、数学と物理の大きな違いである。

物理学は、感覚的なひらめきを基に構成される。だから、このひらめきが正しいかどうかを確認すべきだ。そのためには、ひらめきを数式で表現して、実際に実験して検証する必要がある。物理学は、ひらめきとイメージに重点が置かれているといつてもよい。

数学では考えられないことだろう。数学でも、問題を解くときにはひらめきはとても重要だ。そうなのだけど、物理学との違いはその検証の方法である。数学での検証は、数と論理のみで行う。そこには、実験や経験といった、人間の直感は含まれない。数学ではこの検証のことを「証明する」という。証明は数と論理で構成され、一度正しさが確認されれば<sup>32)</sup> 後になって、間違いでしたということはない。数学に対して、物理学では、実験を行って、その検証を行う。実証するしかないのである。物理学では、証明はありえない。

この実験が物理学の醍醐味なのだろう。自然を肌で感じ、数式で表現しさまざまな予測を立てて、検証を行う。これが楽しいから、物理学があるのである。

### 2.3.3 物理学の数式の解釈

物理法則を表す数式において、等号は「近似的に等しい」という意味で使われる。

数学における等号は、その右辺と左辺が全く同等であるという意味である。しかし物理では、例えば法則を数式で書き表すときに、右辺と左辺は本来は別々な概念であるのに、それらが等しいと書き表す。このようなときに使われる等号は、「近似的」というような意味での等号であると考えるべきだ。この近似的という言葉も正確ではないが、なんというか、物理学独特の等号の使い方である。この原因是、物理学では、数学のような理論的厳密性よりも、実験結果、経験が重視されるというところにある。というのも、実験で得られる数値の桁は有限の桁であり、それはもう既に近似である。だから、実験で得られる各法則も近似的であるし、物理の理論はこの近似の上

▶ 32) (証明の) 正しさの確認：論理に間違いがないことを確認すること。

で成立している。

また、等号は定義するときに用いられることがある。

もちろん、数学的な式変形のときの等号は、数学における等号の意味と同じである。これは、**恒等式**といわれる。

#### # memo No.27: 恒等式

**恒等式**とは、変数  $x$  にどのような数を代入しても成立する式のことである。例えば、因数分解の公式

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \quad (2.7)$$

がある。この式の  $x, y$  にどのような数を代入しても、“恒に” 成立する式である。

#### # memo No.28: 方程式

式には、恒等式の他にも、**方程式**もある。方程式とは、例えば、変数  $x$  がある特別な数のときのみに成立する式のことである。その例として、以下の方程式を挙げよう。

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \quad (2.8)$$

この式は、 $x = 1$  の場合のみにしか成立しない。このような特定の数値のみで成立する式が、方程式である。

## 2.4 対称性 — 物理学の基本要請 —

**コメント** ここで、物理学の最も基礎となる考え方である、**対称性**について説明する。物理学には、その思想の基礎に、**対称性**という考え方を持っている。対称性とは、その名通り、「どちらを見ても同じ」ということである。対称性という言葉は、実は、中学生の頃から使用している。例えば、点対称な図形は  $180^\circ$  回転しても形を変えないという性質を持っている。また線対称な図形とは、左右あるいは上下で鏡を写したような形のことである。物理学で言う所の対称性は、点対称や線対称と同じような意味である。ただ違う点は、対象が図形ではなく、空間と時間に関する法則の性質であることだけである。空間や時間の対称性とはどういうことをかを、この節で説明していく。

### 2.4.1 空間の対称性

**コメント** 空間の対称性には 2 種類あり、次の通りである。

- 並進対称性
- 回転対称性

これらについて、以下で説明する。

#### 2.4.1.1 並進対称性

空間の並進対称性とは、どの方向に並行移動しようが、物理法則は全く変化しないということである。

具体例で説明しよう。ある場所 A で実験していて、ある結果を得たとしよう。この実験結果は間違いがないものと、裏付けられたとする。この実験を別の場所 B で、全く同様の条件と方法で実験を行ったとき、実験結果はどうなるだろうか。全く同じ結果<sup>33)</sup>になるはずである。そうならなくては、その実験は正しいとは言えない。“どんな場所で、実験しても、実験条件と方法が同じであれば、同一の結果を得る”という考え方方が、空間の並進対称性である。空間の並進対称性を信じているからこそ、正しい実験とその結果を受け入れることができるのである。ただし、並進対称性は、並進と言っているからには、実験している方向に関しては、していない。つまり、“同一の向きを向いて”という仮定が含まれているのである。

もう一度言おう。空間の並進対称性は、場所 A で実験しても、場所 A から平行移動した場所 B でも、条件と方法が同じであれば、得られる結果も同じになるということを保証する。

つまり、「どこで実験しても得られる結果は同じ」ということである。言い換えれば、物理法則は場所により不変であると言える。

#### Point 3: 空間の並進対称性

空間の並進対称性は、物理法則は場所によって不変であることを主張するものである。

#### 2.4.1.2 回転対称性

並進対称性では、並進移動しても物理法則に何ら変化がないということが保証される。これに対して、回転対称性は、その名の通り、回転しても物理法則が変わらない

► 33) 実験誤差は当然考慮した上で。

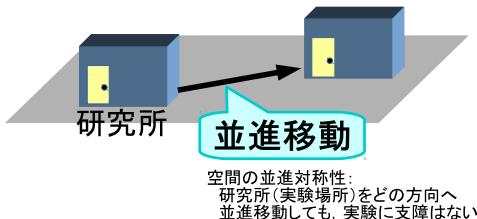


図 2.6 研究所の並進移動

ことを保証している。ある向きで実験を行ったとし、その後、同じ場所で別の向きで実験しても、向きを変える前と実験結果は同一になるということである。

つまり、空間の回転対称性は、ある場所において、ある向きで実験する場合と、その場所で別の向きで実験する場合とで、同じ結果を得ることを保証する。

つまり、「どの向きで実験しても、得られる結果は同じ」ということである。言い換えると、物理法則は向きに対して不変であると言える。

#### Point 4: 空間の回転対称性

空間の回転対称性は、物理法則が向きに対して不変であることを主張するものである。

#### 2.4.2 時間の対称性

時間の対称性が意味するところは、とても単純で、物理法則が時間に対して不変であることを主張するものである。要するに、いつ実験しようが実験結果は変わらないということ<sup>34)</sup>。朝に実験しようが、夜中に実験しようが、実験結果は全く同じ。朝の実験の方が良い結果を生むということは決して無い。

<sup>34)</sup>もちろん、条件、方法は同じである必要がある。

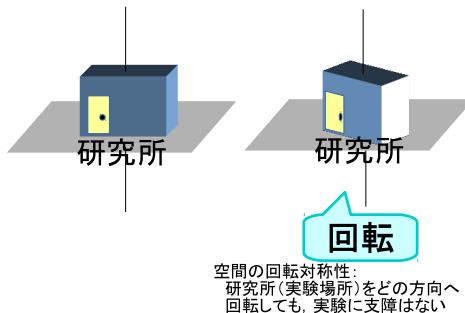


図 2.7 研究所の回転

#### Point 5: 時間対称性

時間の対称性は、物理法則が時間に対して不変であることを主張するものである。

### 2.4.3 対称性 —まとめ—

対称性という専門用語を使うと、いかにも難しい概念だと思われるが、その意味はとても単純であり、私たちには暗黙の了解として体に染み付いているものである。対称性のおかげで、研究所を建てる場合に、場所や向きや時代を考えることは必要がなくなる。いや、そもそも、物理法則は場所や向き、時間に対して不変でなければならぬという要請がなされているものである、といった方が正確だ。

つまり、物理法則というからには、対称性を備えていなければならないのである。物理法則は、場所にかかわらず、向きにかかわらず、時間（時代）にかかわらず、不变性を保つものである。

**Point 6: 対称性**

対称性は、物理法則に要請される性質の1つである。物理法則は、場所や向き、時間にかかわらず不变でなければならない、という要請である。対称性により、物理法則が不变であることを保証するのである。

**2.4.4 対称性と保存則（ネーターの定理）**

対称性からとても大切な性質が導かれる。詳細は、解析力学を学習するときに確認することだが、ここでは簡単に紹介しておこう。

唐突で申し訳ないが、下表（2.4.4）をみて欲しい。この表を見ながら、以下の説明を読んでもらうと、幾らかはわかりやすいと思う。

表 2.4 対称性と保存則の関係

対称性	保存則
時間の対称性	エネルギー保存の法則
空間の並進対称性	運動量保存の法則
空間の回転対称性	角運動量保存の法則
ゲージ対称性	電荷保存の法則

物理学を学習していくと、場所や向きや時間に影響されない法則を見つけることができる。これは保存則と言われる。例えば、中学生の頃からおなじみの、力学的エネルギー保存の法則がある。これも、保存則の1つである。更にこれを一般化して、単に、エネルギー保存の法則とされるが、このエネルギー保存則は時間の対称性から数学的に導かれるのである<sup>35)</sup>。つまり、数学の定理であるネーターの定理に時間の対称性を照らし合わせると、エネルギーがいつでも一定値をとる<sup>36)</sup>ことが結論されるのである。

同様に、空間の並進対称性からは、運動量保存の法則が得られる。また、空間の回転対称性からは、角運動量保存の法則が得られる。また、ゲージ対称性からは、電

▶ 35) “導けてしまう”と言ったほうが、実際的かもしれない。感覚は人それぞれだけども……

▶ 36) いつでも一定値をとることを、保存するという。詳細は後述する。

荷保存の法則 が導かれる。ネーターの定理の具体的な意味と保存則に関する詳細は、後に改めて考えることとし、ここでは紹介程度にとどめる。

# 3 運動学

## 3.1 「物体の運動」の表現方法

**コメント** 物理学、特に力学の主な目的は、物体の運動軌道を（数学的に）推測することにある。これから学習する力学は、スペースシャトルを地球から宇宙へ飛ばす際に実際に使われる理論でもある。また、アメリカの人類初の月面着陸（1969）を実現するにも、この力学理論が使われている<sup>1)</sup>。

物体の運動を表すには、どのような概念があるとよいのかを、この節で説明していこう。

### 3.1.1 位置

物理学の、ここでは特にニュートン力学の重要な目的の1つに、物体の運動を記述することがある。記述の仕方はどのようにあってもよいが、最もよく表現できる道

---

<sup>1)</sup>もちろん、力学だけではない。スペースシャトルや宇宙服などに使われる装置を作る際に用いられる理論は、電磁気学、物性理論、電子回路論、材料工学など様々なものが使われている。しかし、スペースシャトルの打ち上げ方向を決めるのには、力学理論以外には、何も使用していない。摩擦や、宇宙での人間の行動を考えずに、単に宇宙に飛び出して月に行くことだけを考えれば、250年前にニュートンが創り上げた力学理論さえあればよいのである。

具として、数式が有力である。実際に、物理学では物体の運動を数式を用いて表現している。数式で表現すれば、曖昧さ無しに、誰にでも全く同一のイメージを与えることができる。

物体の運動は数式を用いて行なうことはわかった。では、実際に数式で表現するにはどうすればよいだろうか。物体の運動を記述したいのであるから、まず“物体がどこに存在するかを示す指標”が必要になる。この指標のことを、位置という。物体はいつも同じ場所に存在しているとは限らない。時々刻々と、その位置を変化させている物体のほうが一般的である<sup>2)</sup>。

### 3.1.2 速度

物体の位置が記述できれば、それだけで物体の運動を記述でるだろうか。否、明らかに不可能である。物体が“どのように”運動しているかということも、記述すべきだ。つまり、物体の速度も知っておかないといけない情報の1つである。速度とは、単位時間あたりに、物体がどの程度移動したかを示す指標である。

### 3.1.3 加速度

さらに言うと、物体の速度は常に一定であることは珍しく、速度も位置と同様に、時々刻々と変化している方が一般的である。この速度の時間変化のことを、加速度という。

#### # memo No.29: 加加速度、躍度, jerk

「速度」、「加速度」とくれば、「加加速度」というものも考えられるのではないか。実際、その通りで、加加速度という概念は存在している。これは、「躍度（やくど）」とも言われる。英単語では、jerkがそれに相当する。加速度が急激に変化すると、機械におおきな負担がかかることになる。この負担を数値で示すのが、躍度である。

ニュートンの運動の第2法則（運動方程式）で、加速度と力は比例関係にあることが分かっているので、躍度とは力の時間変化であると言い換えることもできる。

なお、ニュートン力学を学ぶにあたり、躍度という概念は使うことはない。

---

<sup>2)</sup> 少なくとも、地球上の物体（私たちの体を含めて）は、時々刻々とその位置を変化させている。なぜなら、地球は太陽に対して公転しているのであるから、地球の外側（宇宙）から見れば、地球上の物体はすべて動いているのである。

### 3.1.4 運動軌道

物体が、ある位置で突然と消えてしまい、次の瞬間に全く別の場所から突然現れることはない<sup>3)</sup>。つまり、言い方を変えれば、時間的に位置が変化する物体について、その位置を時刻ごとに記録していけば、物体の 軌道を得られるということである。実はこの物体の軌道こそが、ニュートン力学で興味ある事なのである。物体の運動の記述をするということは、物体の運動軌道を記述するということなのである。

では、物体の軌道を記述するには、どうしたらよいだろうか。観測できるのは、物体の持つ今この瞬間の性質であり、一瞬にして運動軌道を得ることはできない。もちろん、時間をかけて観測すればその軌道は明らかになるが、この観測でわかるのは、観測の対象としている物体の軌道のみであり、一般的の物体についてのものではない。知りたいのは、「現在の物体のもつ運動状況」から物体の軌道を推測する方法である。

### 3.1.5 「運動の軌道」の表現に必要な情報

物体の運動を記述するということは、物体の動く道筋である運動の軌跡を記述することである。そして、物体の運動の軌跡を記述するには、物体の位置・速度・加速度の 3 つが必要である。さらに、物体の位置や速度は時間的に変化するものなので、当然、「時刻」も必要である。この 4 つの要素を基に、数式を用いた推論を行うことで、物体の軌道を表現できる。

ここに挙げた 4 つの概念、つまり、時刻・位置・速度・加速度は、数式で扱う以上、何らかの文字で表す必要がある。そこで、これら 4 つに次のように文字を割当てることする。

---

<sup>3)</sup> 実は、このことは後で考える エネルギー保存の法則 に関連したことである。

**Point 7: 運動の軌跡の表現に必要なもの**

物体の運動を数式で表現するには、次の4つの要素が必要である。

- (1) 時刻 :  $t$
- (2) 位置 :  $r$
- (3) 速度 :  $v$
- (4) 加速度 :  $a$

なぜ時刻を表す  $t$  は普通の太さなのに、他の3つの位置  $r$ 、速度  $v$ 、加速度  $a$  は太文字で表現されるかという、疑問があることと思う。これについては、この後に説明する。ここでは、このような文字が割当てられているということを、知ることができれば十分である。

ちなみに、このようなアルファベット ( $t, r, v, a$ ) を割当てる強い理由はない。大切なのは、文字に意味を割当てるということであり、文字が何を意味するかではない。どのような文字を割当ても、全く同じように議論できることは明白である。ここでは、単に慣習に従って<sup>4)</sup>、時刻  $t$ /位置  $r$ /速度  $v$ /加速度  $a$  と割当てただけである。英単語を見てみると、時間は time、点（位置）は respect、速度は velocity、加速度は acceleration である。その頭文字をとっているのかもしれない。

## 3.2 位置の記述方法

**コメント** 物体の存在する位置（場所）を表現することを考えてみよう。例えば、物体が「ここにある」とか「あそこにある」といっても、見る人によって見える方向は違ってくる。例えば、二人の人間の真中に静止しているポールがあるとして、そのポールは一方の人から見れば「右側」にあるというだろうし、もう一人は「左側」にあるというだろう。この場合、ポールが静止しているのにもかかわらず、二人のポールの位置に関する主張は異なっている。これではどうにもこうにも話が進まない。ここでは、この問題を解決することを考える。

<sup>4)</sup> 私は単に多くの教科書で採用されている記号を流用しているに過ぎない。偉そうなことを書いたが、教科書でなぜこのように文字を割当てているのかは分かっていない。

### 3.2.1 1次元（直線）上の位置

まず、最も簡単な直線上の位置を表すことを考えてみよう。その方法とは、直線の各点に数字を貼り付けて、その数字によって位置を表すというものである。図3.1参照。このように直線上で表される位置を、**1次元**という。

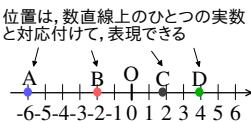


図3.1 1次元（直線上）での位置

位置を指定したいときは、まず、「基準」とする位置を決める必要がある。この基準の位置は直線上であればどこでもよいが、一度基準の位置を決めたら絶対にこの基準を変更してはいけない。基準はOと表記される。この基準から左右の直線上に、数字を貼り付けていく。そして、直線上的物体の位置をその実数で表すのである。ここで大切なことは、位置と実数が**1対1**に対応していることである<sup>5)</sup>。図3.1で、点Bの位置を示すときには、-2といえばよい。同様に、点Aを示すには-6を、点Dを示すには3.9をいえばよい。つまり、「点の位置は-2である」とか、「点の位置は3.9である」とかといって、位置を表現するのである。数式的に書けば、例えば点Bの位置が-2であるならば

$$\text{点Bの位置} = -2$$

のように書けるだろう。“点の位置”という日本語ではこれから式を扱っていく上で不都合があるのであるから、これを記号で表現しようと思う。すなわち位置を表す記号を導入し、これをrと書くことにすることだ。すると上の「点Bの位置=-2」は

$$r = -2$$

---

<sup>5)</sup> “1対1に対応している”ということは、『位置を1つ指定したならば、それに対応する実数が1つだけに決まり、逆に数字を1つ指定したならば、それに対応する位置が1つだけに定まる』ということである。

のように表現できる。しかし、点があるのは  $-2$  という位置だけとは限らず、どのような場所にも存在する。そこで、この  $-2$  とか  $3.9$  とかという具体的な位置を表現する記号が必要となる。そこで、位置の代表を文字  $x$  で表現する。すると、

$$r = x \quad (3.1)$$

というように位置を指定できる。 $r$  は単に位置を表現する記号であって、 $x$  はその位置の“任意のどこか”を示している。 $x$  には何か特定の実数を入れる余地がある。例えば  $r = 5$  と書いたならば、実数が  $5$  という位置を指定したことになる。 $r = 8.15$  と書いたならば、実数が  $8.15$  と書かれた位置を指定したことになる。このように、 $x$  は何らかの数を代表していて、様々な実数を入れることができる。 $x$  に入る実数をいろいろ変えることができると考えて、 $x$  のことを **変数** という。

位置を表す実数の絶対値  $|x|$  は原点  $O$  からの **距離** を表現している。このように考えれば、位置の単位として [m] が用いられるのも納得がいくだろう。以上が 1 次元（直線）上における位置の表現の仕方である。

### 3.2.2 2 次元（平面上）上の位置

次に、平面上（2 次元）の位置の表現方法を考える。位置を考えるには 2 つの数字を用いる必要がある。1 次元のときは 1 方向だけを考えればよかつたが、2 次元の時には、2 方向（ $x$  方向と  $y$  方向）について考えられるからである。図 3.2 参照。

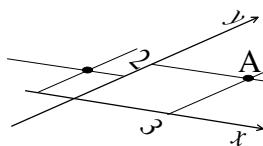


図 3.2 2 次元（平面上）での位置（2 次元直交座標）

$x$  方向と  $y$  方向の軸が直交しているので、**2 次元直交座標** とよばれる。2 次元上で位置を表現したい時には、数字を 2 つ指定する必要がある。この 2 つの数の代表は

$x, y$  で表されることが多い<sup>6)</sup>. 例えば、図 3.2 で点 A の位置を示したいときは、

$$x = 3, y = 2$$

と表現されるが、これでは少し見づらい. そこでここでも、位置を表現する記号として、 $r$  を用いる. ここで  $r$  のように細い文字で書かないで、 $r$  のように太字で書いたのは、複数の数の組であることを強調したいからである. 具体的な数の組は  $(x, y)$  と表現され、すなわち、図 3.2 の紫色の点の位置は

$$\mathbf{r} = (3, 2) \quad (3.2)$$

のように書かれる. これは、 $x$  方向が 3 という数字のところで、かつ、 $y$  方向が 2 という数字であるような位置を指定していることになる. 一般には、

$$\mathbf{r} = (x, y) \quad (3.3)$$

というように表現される. 2 つの変数を使って、任意の平面上の位置を表現するのである.

また、図形的なイメージとして“矢印”が導入される. この矢印の始点は必ず原点 O にとるとし、終点は指定したい点にとる. 自分が原点 O に立って、指定したい点を指で差していると考えればよい. この矢印のことをベクトル といいう. もっと一般的にいえば、座標のように複数の数の組で表現されるものをベクトル といいう. 平面上のベクトルは 2 つの数で表現でき、これを 2 次元ベクトル といいう. 一般に、 $n$  個の数で表現されるベクトルを  $n$  次元ベクトル といいう.

1 つのベクトルは 向き と 大きさ をもつ. 原点を始点にもつベクトルの向きは、終点の座標によって表される. 例えば、原点 O を始点として、点  $(x_1, y_1)$  を終点とするベクトル  $\mathbf{r}$  のむきは、 $(x_1, y_1)$  といえばよい. 「北に何歩、東に何歩」というイメージをすればよい. また、ベクトルの大きさ  $r$  は<sup>7)</sup>、三平方の定理によって、以下のように定義される

$$r := \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}. \quad (3.4)$$

<sup>6)</sup> 他の表現として、 $x_1, x_2$  というように書かれることもある. これは数の個数が多くなった時に有効な表現である. しかしここでは、馴染みの深い  $x, y$  で書くことにしている.

<sup>7)</sup> 一般にあるベクトル  $a$  の大きさを表現したい場合は、細字にして  $a$  と表現されることが多い. つまり、 $a := \|a\|$  である.

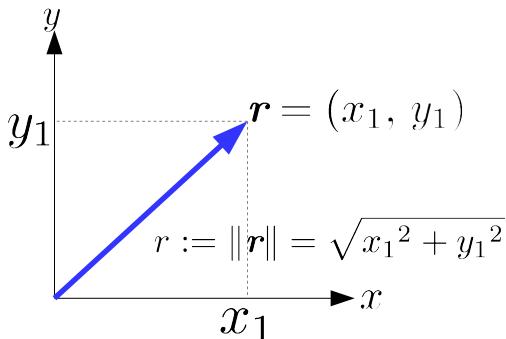


図 3.3 ベクトルの大きさ (2 次元)

もちろん上記は、 $(x_1, y_1)$  に限らず、任意の点  $(x, y)$  で成立するので、以降では、 $(x, y)$  と書くことにしよう。ベクトルの向きのみを示したい場合は  $(x, y)$  と示す以外に、 $(x/2, y/2)$  とか、 $(1, y/x)$  とかといった表現方法も可能である。しかし、向きを指定するのにこのような方法をとってある記述を見たことがない。具体的な位置  $(x, y)$  が指定されれば、この座標から大きさ  $\sqrt{x^2 + y^2}$  が計算でき、さらに向きも指定できるということから、この座標表現によって、ベクトルが記述される。しかし、この表現は少し長つたらしくなったり、式に複数のベクトルがあつたりすると見づらくなってしまうので、 $\mathbf{r}$  というような太字でベクトルを表すことが多い。

### 3.2.3 3 次元（空間）内の位置

ここまで説明すれば、3次元（空間）内の点の位置の表現の仕方は明らかだろう。空間には平面の場合に加えて、“高さ”があると考えられる。この“高さ”に対する変数を  $z$  と表現する。そうすると、空間内の位置を表現するには  $x, y, z$  の3つの変数が必要になることがわかる。2次元上の位置を表現するのに  $\mathbf{r}$  という記号を導入したが、3次元空間以上の次元でもこの記号  $\mathbf{r}$  を使用しする。3次元空間内の点の位置を表現するには

$$\mathbf{r} = (x, y, z) \tag{3.5}$$

と表現される。 $x$  方向と  $y$  方向と  $z$  方向の3つの軸が直交しているので、3次元直交座標 という。これ以後、位置を考えるときは3次元空間内の位置であるとする。

「座標を決める」ということは「 $(x, y, z)$  の 3 つの実数の組を決める」ということである。この式の意味するところは、位置と座標が 1 対 1 で対応しているということである。すなわち、座標が決定されると位置が確定される。逆に位置が決定されると、座標が決まる<sup>8)</sup>。

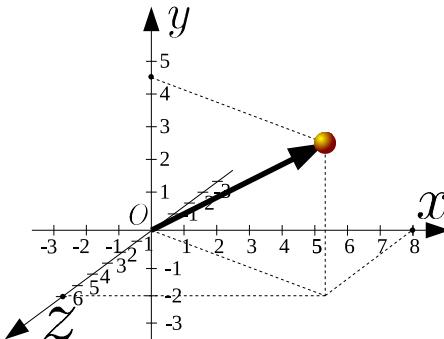


図 3.4 3 次元直交座標

一般に、点の位置は各時刻によって異なる。しかし時刻を指定すると、1 つの決まった位置を示す。従って、位置は時刻の関数である。これを、 $\mathbf{r}(t)$  と書く。すなわち、時刻  $t$  のときの座標を  $x(t), y(t), z(t)$  と表すと、

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad (3.6)$$

の関係を表せる。全ての時刻で点の位置を記録すれば、その点は曲線を描く。これを物体の 軌道 という。

また、位置の図形的なイメージとして、3 次元の場合も“矢印”が導入される。この矢印の始点は必ず原点  $O$  にとるとし、終点は指定したい点にとる。自分が原点  $O$  に立って、指定したい点を指で差していると考えればよいと思う。空間内の位置は 3 つの数で表現できるから、空間内の位置は 3 次元ベクトルである。

---

<sup>8)</sup> ここで 1 つ注意しておく。位置が  $\mathbf{r}$  が  $(x, y, z)$  の組み合わせを決めることでその位置を指定できるからといって、位置  $\mathbf{r}$  が  $(x, y, z)$  の関数であると考えてはいけない。なぜなら、「位置を決める」と  $(x, y, z)$  の組み合わせを決めることは、全く同じことであるからである。

## # memo No.30: 次元とは何か

物理学的に考えて、線上の位置は1つの数値で表せる。また、面上の位置は順序付けされた二つの数値を用いて表現する<sup>9)</sup>。この考え方は空間内の点の表現にまで同じように拡張されて、空間内の点は順序付された三つの数値で表される。

しかし、だからと言って、面上の点の位置を示すのに、絶対に二つの数が必要かと問われれば、必ずしもそうとは限らない。例えば、面を適當な大きさの区画に区切り、そのうちの任意の一箇所を原点として0という数値を割当ててみる。そして、その周りを囲む区画に対して、順に自然数を割当ててみよう（図3.5）。こうすれば、面上の任意の区画を1つの自然数で表せる。この区画を無限に小さくしていくと、面上の一点を1つの数値に対応させることができそうな気がする。

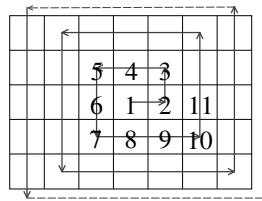


図3.5 次元とは何か

もちろん、こんなに簡単に上手くいくはずはない。だけど、ただ漠然と考えていただけでは、面上の点の位置を表現するには二つの数値が絶対必要だと、思い込んでしまいがちである。「本当にそうだろうか」と常に疑いの精神を持ちながら、教科書を読み進めることも大切な事である<sup>10)</sup>。

<sup>9)</sup> 「順序付けされた」という言い方は、次のようなことを意味する。

$$[a, b] \neq [b, a].$$

つまり、ベクトル  $[a, b]$  の成分  $a, b$  には順番があって、この順番を入れ替えてしまうと、全く別のベクトルになってしまうということである。これは  $a$  と  $b$  の記述順序にも意味が含まれていることを説明してくれる。数学では、このような数の組みのことを、順序対 という言葉で表現される。ベクトルは順序対のひとつの例であると考えることができよう。

<sup>10)</sup> 場合によっては、鵜呑みすることが理解への近道であることもあるが、そんな場合でも、あとで確認することを怠ってはいけない。というか、いつの間にかその鵜呑みが体に染み付いて、当たり前のように感じるようになってしまい、確認することを忘れてしまってはいけない。

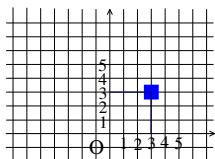
## # memo No.31: 座標の張り方

座標を張ると言っても、いろいろな張り方がある。なので、同じ物体の位置を表現するにしても、その座標の張り方によって、その位置を示すベクトルも異なってくる<sup>11)</sup>。具体例を描くと、図 3.6(A,B,C,D) のようである。

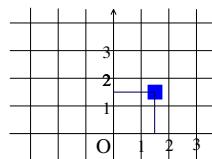
もちろん、この 4 つの例以外に限ったことではなく、あくまで一例である。

図 3.6(A) を基準に話すと、(B) は座標の間隔を大きめにとっているし、(C) は斜めにとっていて、(D) は (C) と同様だが原点の位置を変えている。

要するに、座標の張り方は無数に存在するということである。だから、二人の観測者が同じ物体を見ていたとしても、座標の張り方が異なっていれば、当然ながら、物体の位置を表すベクトルが異なる。これは、一見してみると、大問題に見えるかもしれない。座標の張り方によって物体の位置が変わってしまうからである。しかし、これは別に大した問題ではないのだ。むしろ、この方が好都合なのである。大事なのは、“観測者に対する物体の位置”だからである。いいかえれば、万人に共通の物体の位置<sup>12)</sup>を示す必要はない、ということである。知りたいのは、それぞれの観測者から見た物体の位置であり、すべての観測者から見た物体の位置ではない。そもそも、すべての観測者は同じ位置に立つことはありえないから<sup>13)</sup>、観測者が個々に、自身のいる場所が原点となるように座標を取ることで、補正が必要なくなり、計算が楽になるのだ<sup>14)</sup>。



(A)



(B)

しかし、いいことばかりではない。二人の観測者間で、同じ物体の位置が異なるため、互いに相手の目線に立ちたい場合には、位置ベクトルに変換を施さないといけない。といっても、難しい変換をするのではなく、単に、自分から見た相手の位置  $V$  を、相手から見た物体の位置  $U$  に加えてやらないといけないということ。すると、 $W (= V + U)$  により、他の観測者から見た物体の位置を把握できるようになる（図 3.7）。

<sup>11)</sup> 原点 O から見た物体の位置を示す矢印が変わってくるということ。

<sup>12)</sup> この考え方は、後に説明する 絶対空間 に関するものである。ニュートン力学は、この絶対空間の存在は、暗黙の内に前提とされている。

<sup>13)</sup> 同じ場所に二人の人間が立てるはずがない。

<sup>14)</sup> 自分の位置を原点にとることで、自身の場所を意識することなく計算ができるようになる。もし、万人に共通な座標を取らないとならないならば、自分のいる位置を把握し、物体と自分の相対的な位置関係も考慮して計算をしないといけなくなる。

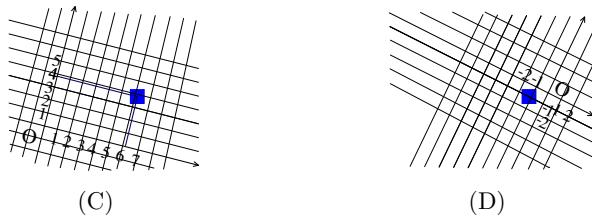


図 3.6 座標の張り方

まとめておこう。座標の張り方は様々であり、どう取るかは、観測者自身が自由に選べる。これにより、観測者は計算が楽になるように座標を設定できる。しかし、その欠点として、複数の観測者間で、物体の位置が異なってしまう。この欠点は、座標の変換という手段で解決する必要がある。

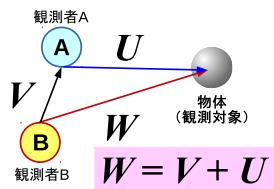


図 3.7 相対的な位置の関係

### 3.3 速度・速さの表現方法

#### 3.3.1 「速度・速さ」の表現方法

速さとは何か。当たり前すぎて、問うまでもないかもしれない。だけど、これを定量的に（数学的に）扱うために、速さという感覚を整理しておきたい。

世の中には、いろいろな速さがある。例えば、人間の歩く速さ、自転車の速さ、自動車の速さ、電車の速さ、新幹線の速さ、飛行機の速さ。これらは、順をおつっていくほど速さが増すことは、誰でも承知している。日常生活ではこのくらいの感覚で支障はないが、数学的に扱うには、このままでは不十分だ<sup>15)</sup>。物理学は速度を数学的に

<sup>15)</sup> 速さという概念を、こんな適当な感じだけで捉えて、自動車の速度制御装置を作られているはずがない。速さを定量的に扱い計算できるようにすることで、初めて速さを制御できるようになる。

扱うために、計測できる量を基に、速度<sup>16)</sup>を定義する。速度を定義するのに必要な量は、位置と時間である。もっと詳しく言うと，“位置の変化量”と“位置の変化に必要とした時間”である。これらを用いて、速度は言葉を用いて書くと次のように定義される。

$$\text{速度} := \frac{\text{位置の変化量}}{\text{位置の変化に必要とした時間}} \quad (3.7)$$

やはり、言葉で書いたのでは見難いし、数式的に扱うことでもできない<sup>17)</sup>。なので、上の速度の定義を、文字による表現に書き換えないといけない。物体の運動方向は3つ(3次元)だけど、最初から3方向の速度を定義するには、おそらく、難しいことだろう。そこで、段階を分けて、1方向/2方向/3方向と順に考えることにしよう。

話が長くなるので、ここで一度、節を区切ろう。

#### # memo No.32: 「速度」と「速さ」の使い分け

日常生活において、私たちは「速度」と「速さ」という2つの語彙を意識して使い分けることはしていない<sup>18)</sup>。しかし、物理学において、「速度」と「速さ」という言葉は意味のことのなるものとして、下のように区別して使用される。

- 速度とは、向きを含む、ベクトルである
- 速さとは、向きを含まない、スカラーである

口頭で話すときには、両者を意識せずに混同てしまいがちだが、大抵の場合、話の流れからどちらを意味しているかを判断できる。しかし、文書に著す場合には、両者を区別して記述したい。

### 3.3.2 「変化」の数式化

**コメント** 速度とは、位置の時間的な変化で表せることが分かった。では、変化をどのように表現すべきか。変化を定量的に扱えるようにするために、数式による変化の扱い方を学習する。

物理学で主に行われることは、物体の構造解析と、物体の運動規則の探究である。物体の構造解析で今までに分かっていることは、いま私たちが目にしている物体は、

▶ 16) さっきまで、「速さ」と言っていたところを、「速度」と言い換えてしまった。以降では、語彙「速さ」、「速度」は物理学の専門用語として扱うこととする。物理学では、この2つの語彙は、それぞれ異なる意味が与えられている。その違いはこの節の最後に記述した。

▶ 17) できなくはないが、非常に面倒くさい。記述も煩雑になり、読みづらい。

▶ 18) 少なくとも、私は使い分けていない。

すべて素粒子で構成されているということだ<sup>\*19)</sup>. しかし、しばらくの間は、物体の構造ではなく、運動規則を考えていこう. 物体の構造を解析するためには、物体の運動規則を知っている必要があるからだ<sup>\*20)</sup>.

運動規則を定量化するには、変化を数式で表現する必要がある. 物体の運動を調べるというとは、物体の動く軌跡を把握するということであり、その軌跡は物体の位置が変化することによって描かれるからだ.

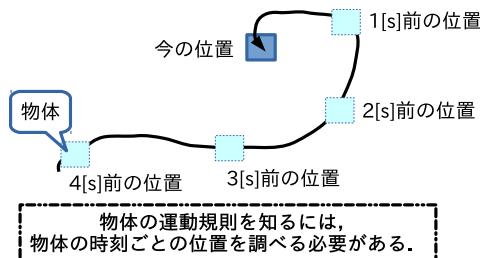


図 3.8 軌跡 = 時刻ごとの位置の記録

### 3.3.3 位置の時間変化の図示

物体の位置の時間変化を 1 つの図で表現する場合、次のように書ける.

最初の位置を  $r_1$  として、次の位置  $r_2$  に移動したという場面を考える.  $r_1$  から  $r_2$  に変化したのであるから、位置の変化分  $r$  は

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

とかける.

### 3.3.4 1 次元（直線）上の速度

最初に、直線上を動く物体の様子について考えてみる. 物体が直線上を運動するとき、物体は様々な速さで動くだろう. また、物体は直線上を右から左へ、もしくは左

<sup>\*19)</sup> 素粒子とは何かとか、それがどうのように構成されているのか等の疑問は、このノート全体を通して探っていくことである。

<sup>\*20)</sup> 生の原子や分子は顕微鏡ですら見ることはできない。運動規則から推察し想像するしかないのだ。

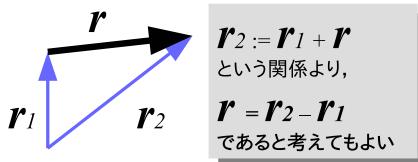


図 3.9 ベクトルの引き算

から右へ気まぐれに動くだろう。このような物体の運動を記述するにはどうすればよいだろうか。

物体は直線上を動くと仮定しているので、物体は必ず直線上に存在し、 $x(t)$  という 1 つの数で表現できる。物体が“動く”ということは、時刻変化に伴って位置を変えるということである。従って、時刻の変化と位置の変化を考えれば物体の速さを表現できると考えられる。では、時刻の変化と位置の変化をどのように用いれば、速度を表現できるだろうか。その解決方法は、時刻の変化に対してどの程度の位置が変化するかということを表現すればよい。具体的に、2 秒間で 5[m] 進む時の速さと、3 秒間で 8[m] を進むときの速さを考えてみよう。どちらが速いだろうか。これを考える場合、1 秒間にに対する移動距離を計算すればよい。2 秒間で 5[m] を進むのであれば、1 秒間に 2.5[m] 進んでいて、3 秒間で 8[m] を進むのであれば、1 秒間に  $2.6\dots\cong 2.67[m]$  進んでいることになる。すなわち、3 秒間で 8[m] を進む方が速いと結論される。この具体的な計算で、距離を時間で割ることで 1 秒間に進む距離を計算し、その大きさによってどちらが速く動くかの結論を下した。これを一般の場合に拡張して、時間  $\Delta t$  の間に、物体の位置が  $\Delta x$  だけ変化したとき、その速さは  $\Delta x / \Delta t$  で表現されると見える。これ以降では速さを表現する記号として  $v$  を用いることにする。すなわち、

$$v := \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (3.8)$$

である。

この式を見れば、同じ距離でも、より短い時間でその距離を変化するほうが速さが大きいと言える。また、同じ時間でもより大きな距離を移動したほうが早いともいえる。

この速さの式をもう少し考察していこう。例えば、最初の状態で物体が位置  $x_1$  にあって、このときの時刻が  $t_1$  であったとする ( $x_1 = x(t_1)$ )。その後、物体が位置  $x_2$

へ動き、このときの時刻が  $t_2$  であるとする ( $x_2 = x(t_2)$ ). とすると、物体は時刻が  $t_1$  から  $t_2$  へ変化したとき、位置が  $x_1$  から  $x_2$  に変化したことになる.

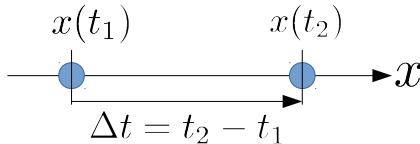


図 3.10 速度 1

$t_1$  と  $t_2$  の時間間隔を  $\Delta t$  と書いたとき、

$$\Delta t = t_2 - t_1 \quad (3.9)$$

と書ける. また同様に、位置も変化しているので、この位置の変化分は

$$\Delta x = x_2 - x_1 \quad (3.10)$$

と書ける. すると、物体の位置  $x_1$  から位置  $x_2$  へ向かうときの速さ  $v$  は

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \quad (3.11)$$

となる. さらに、速さの式を次のように変形してみる.

$$\Delta x = v \Delta t \quad (3.12)$$

この式は、1次方程式の形をしている. 変数は  $\Delta t$  であり、この変化に伴って  $\Delta x$  も変化する. そして  $v$  は変化の割合である. このように見れば、速さを図示して考えられる. 1次方程式の変化の割合は、図で表現すれば、傾きとして現れることになる. しかしこれには少々問題がある. これによって、速さ  $v$  はわかるが、これは物体が位置  $x_1$  から位置  $x_2$  へ向かうときの平均的な速さでしかないものである. 図 3.11 を見てほしい.

実際の物体の速度は、各時刻で赤線の傾きであるのにもかかわらず、上の速さの式は、緑色の線の傾きというようにみなされる. すなわち、位置  $x_1$  から位置  $x_2$  まで、速さが一定であるとみなされているのである. そのため、このままでは、ある特定の時刻における物体の速さが知りたいときには、速さの式は役に立たない. 平均の速度だけしか考えることしかできないからである.

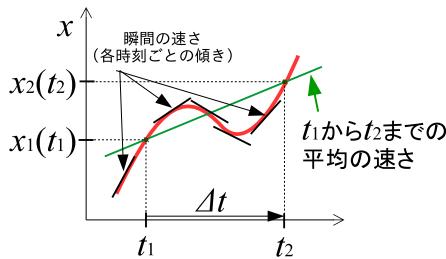


図 3.11 速度 2

そこで、次のように速さの式をいじってみる。例えば、時刻  $t_1$  をにおける物体の速度を知りたいとする。このとき、時刻  $t_2$  を時刻  $t_1$  に近づけていけば、時刻  $t_1$  における物体の速度を得られる。 $\Delta t = t_2 - t_1$  の関係式から、 $t_2$  について解けば、

$$t_2 = t_1 + \Delta t \quad (3.13)$$

である。従って、時刻  $t_2$  を時刻  $t_1$  に近づけるとは、 $\Delta t$  を 0 に近づけることと同じである。ところで、 $\Delta t$  を 0 に近づけると、それに伴って位置も変化してしまう。位置の変化分は、 $\Delta x = x_2 - x_1$  であった。時刻を含めて詳しく書くと、

$$\Delta x = x(t_2) - x(t_1) \quad (3.14)$$

である。さらに、 $t_2 = t_1 + \Delta t$  であるから、

$$\Delta x = x(t_1 + \Delta t) - x(t_1) \quad (3.15)$$

のように書ける。以上により、平均の速さの式は

$$\begin{aligned} v &= \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \\ &= \frac{x(t_1 + \Delta t) - x(t_1)}{t_1 + \Delta t - t_1} \\ &= \frac{x(t_1 + \Delta t) - x(t_1)}{\Delta t} \end{aligned} \quad (3.16)$$

のように変形できる。一般には、時刻  $t_1$  は任意の時刻で捉えることができるので、添え字の 1 をおとし、任意性を強調し、

$$v = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \quad (3.17)$$

と書ける。この式で、 $\Delta t$  を 0 にもっていくのである。これを次のように表現する。

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \quad (3.18)$$

この式の右辺を以下のように略記する。

$$\frac{dx}{dt} := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \quad (3.19)$$

この記号を用いて、速度は

$$v = \frac{dx}{dt} \quad (3.20)$$

のようく表現する。但し注意することは、 $\Delta t \neq 0$  を必ず満たしておくということである。

図形的に考えると図 3.12 のようになる。

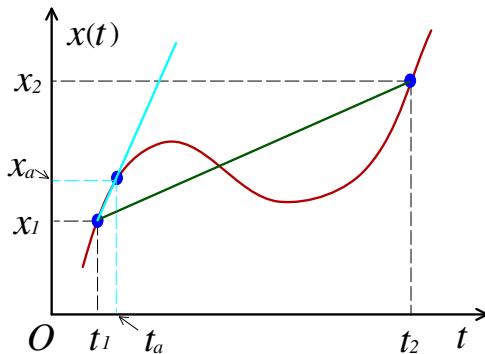


図 3.12 速度 3

このような図を“ $x - t$  グラフ”といふ。時刻  $t_2$  を時刻  $t_1$  に近づけると、直線の傾き  $v$  はある一定の値になる。この直線は水色の線で描いた。 $t_a$  を  $t_1$  へ近づいてい

くと、それに伴って  $x_a$  も位置  $x_1$  へと近づいていく。但し、 $x_a$  は  $x_1$  に重ならないようにならなければならない。この直線が時刻  $t_1$  における瞬間の速さとなるのである。

ここで注意しておく。それは、物体の位置と時刻の組  $(x(t), t)$  が 2 つ分かっていないと、速さはわからないということである。このことを考慮しないと、パラドクスを生んでしまうことになる。そのパラドクスとは、「飛ぶ矢のパラドクス」として有名である。次のようなものである。

### 飛ぶ矢のパラドクス

動いている矢は、ある時刻を指定すれば、それに対応してある特定の位置で静止しているはずである。

簡単にいえば、ある時刻に撮った飛ぶ矢の写真を見ると、その矢は静止しているように見えるということである。しかし、2つの時刻で2つの位置の飛ぶ矢の写真をとれば、飛ぶ矢の平均の速度が求まる。もちろん、シャッターを押す速さが非常に速ければ、瞬間の速度を求められる<sup>21)</sup>。

さて、今まで速度の方向について何も考えてこなかったが、これは、正と負で表現できる。すなわち、左から右へ物体が移動するときに、物体は正方向に速度をもつといい、逆に右から左に物体が移動するときには物体は負の向きに運動するという。

### 3.3.5 2 次元（平面）上の速度

2 次元上、すなわち平面上における物体の位置は 2 つの方向で考える。この物体の位置は  $\mathbf{r} = (x, y)$  のように表現される。その速度についても 2 つの方向を考える必要がある。 $x$  方向の速度を  $v_x$  また、 $y$  方向の速度  $v_y$ としたとき、 $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$  である。これらはそれぞれ 1 次元における速度と同じように考えられて、

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \\ v_y &= \frac{dy}{dt} := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \end{aligned} \tag{3.21}$$

である。

ところで、位置が  $\mathbf{r} = (x, y)$  と表せるので、速度は以下のようにも表せる。すな

<sup>21)</sup> 実際はそのようなことをせず、ビデオカメラを使うだろうが。

わち,

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y) = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) \quad (3.22)$$

である。

### 3.3.6 3次元（空間）内の速度

3次元への拡張は容易だろう。3次元における物体の位置を  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  として、速度を  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  とすればよい。復習を兼ねてもう一度、形式的に速度について確認していく。

時間が  $t$  から  $\Delta t$  だけ時間が経過したとき、位置は  $\mathbf{r}(t)$  から  $\mathbf{r}(t + \Delta t)$  に変化する。すなわち、平均の速度  $\bar{\mathbf{v}}$  は

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{v}} &= \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{t + \Delta t - t} \\ &= \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \end{aligned} \quad (3.23)$$

である。知りたいのは「瞬間の速度」である。「瞬間の速度」を考えるために  $\Delta t$  を 0 近づける。すると、

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \quad (3.24)$$

となる。従って、

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (3.25)$$

である。これが 瞬間の速度 である。速度の単位は、[m/s] である。

ところで、位置が  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  と表せるので、速度は以下のようにも表せる。すなわち、

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \quad (3.26)$$

である。

## # memo No.33: 速度のを表す他の記号

速度は、 $dv/dt$  と表現した。しかし、これを簡略化をして、以下のように書くこともあるので注意すべきだ。

$$\dot{r} := \frac{dv}{dt}. \quad (3.27)$$

## 3.3.7 速度の合成

今、人間  $A$  が速度  $v_A$  の等速で運動をしているとする。このとき、 $A$  は 物体が速度  $v_{\text{物体}}$  をもって運動しているのを見たとする。自分から見た物体の速度  $V$  はどうになるかを計算する。これは、ガリレイの 速度の合成則 によると、

$$V = v_{\text{物体}} - v_A \quad (3.28)$$

の関係がある。この関係は、速度のベクトル和として考えられることによる。このように、 $A$  から見た相手の速度  $V$  のことを 相対速度 という。自分の速度を基準に、 $v_A = 0$  としたとき、 $V = v_{\text{物体}}$  となる。すなわち、自分は静止していて、動いているのは物体である主張できる。

逆に、別の人  $B$  が物体の上から  $A$  を見るときを考える。 $B$  は物体と共に運動していることから、 $v_{\text{物体}} = 0$  とみなす。従って、動いているのは、 $A$  であると主張できる。つまり、観測者によって 観測者自身の速度 が異なるので、物体の速度は観測者によって 異なって見えるのである。(ここでは、観測者の立場によって、物体が動いていたり、止まっていたりしていた。) 観測者の立場によって、互いの速度の主張は逆である。これが相対速度といわれる理由である。とすると、このままでは“絶対に正しい”とできる速度が存在しないことになる。従って、今まで、「速度」とか「加速度」とかという言葉を使ってきたが、何に対する 速度 または 加速度 であるのかを全く断っていなかった。この「何に対する」の『何』にあたるもののが、速度や加速度の基準である。

## # memo No.34: 数式と実際の現象

いよいよベクトルや微分、さらにはベクトルの微分と、数式が出てきはじめた。最初に戸惑うのは、数式と数式で表現されている現象との関係だろう。あたりまえのようだが、これについては問題を解くなりしていくしかない。物理学は実際の現象を数式で表す。逆にいえば物理における数式は何らかの物理現象を表現していると言える。式を見て、その式の内容を具体的な例でイメージできるようになるとよい。例えば、位置  $r$  と表現されていたら、この具体的な

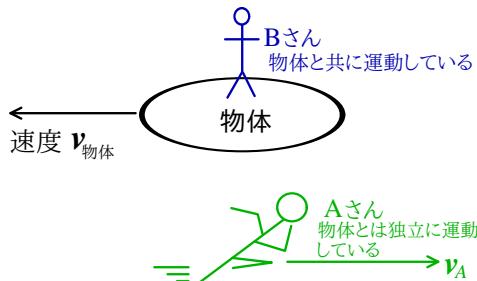


図 3.13 相対速度 (A から見た物体の速度と B から見た物体の速度)

イメージは、自分が原点に立っていて、その位置を指で示していることを考えればよい。速度  $v$  といわれたら、一定の速度で走る自転車を思い浮かべればよい。一定の速度で走るということは、常に時間変化  $\Delta t$  に対する自転車の変位  $\Delta r$  が一定であることから、

$$\frac{\Delta r}{\Delta t} = \text{const(一定)} = v$$

ということである。時間微分は、ある量 (ここでは変位  $\Delta r$ ) 時間変化に対する変化の割合を表現している。このように、式と現象が自身の中で、具体例を持って認識できるようになるとよい。

### 3.4 加速度の表現方法

**コメント** 加速度とは、速度の時間変化具合を表す量である。速度を考えた時と同様に、加速度も 1 次元の場合から 3 次元の場合と、順を追って考えてくことにしよう。

#### 3.4.1 1 次元（直線）上の加速度

一次元、つまり、直線的に運動する物体の速度  $v_x(t)$  は位置  $x(t)$  の時間変化  $d/dt$  として定義された。定義された。定義式は次の通りであった。

$$v_x(t) := \frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}. \quad (3.29)$$

ここでは更に，“速度の時間変化”を考える。この速度の時間変化を **加速度** という。以下に加速度を定義していこう。

ある時刻  $t_0$  における物体の速度を  $v_{x0}$  としたとき、

$$v_{x0} = v_x(t_0)$$

という式が成り立つ。そして、次の時刻  $t_1$  における物体の速度  $v_{x1}$  は、

$$v_{x1} = v_x(t_1)$$

と書ける。つまり、時刻  $t_0$  から  $t_1$  までの間に、物体の速度は  $v_{x0}$  から  $v_{x1}$  に変化したことになる。時刻の変化（時間）を  $\Delta t$ 、速度の変化を  $\Delta v$  とし、

$$\Delta t = t_1 - t_0$$

$$\Delta v = v_{x1} - v_{x0}$$

と置けば、加速度  $a_x$  は以下のように定義できる。すなわち、

$$a_x := \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (3.30)$$

である。これにより、加速度が速度の時間変化で定義されることが、示せた。

もう少し、加速度の定義式を具体化していこう<sup>22)</sup>。

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{\Delta v}{\Delta t} \\ &= \frac{v_{x1} - v_{x0}}{\Delta t} \\ &= \frac{v_x(t_1) - v_x(t_0)}{\Delta t} \\ &= \frac{v_x(t_1) - v_x(t_0)}{\Delta t} \\ &= \frac{v_x(t_0 + \Delta t) - v_x(t_0)}{\Delta t}. \end{aligned}$$

ここで、 $\Delta t = t_1 - t_0$  から  $t_1 = t_0 + \Delta t$  を使った<sup>23)</sup>。最後に、右辺に対して、 $\Delta t \rightarrow 0$  の極限をとろう。

$$a_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_x(t_0 + \Delta t) - v_x(t_0)}{\Delta t}. \quad (3.31)$$

<sup>22)</sup> 今まで置いた文字を展開していくことになる。効率の悪い説明だが、気にしない。

<sup>23)</sup> 書くまでもないか……。

時間  $t$  による微分の記号  $d/dt$  を使うことで、速度が正確に定義できるようになつた。すなわち、

$$a_x := \frac{dv_x(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_x(t_0 + \Delta t) - v_x(t_0)}{\Delta t}. \quad (3.32)$$

更に一般化しよう。今まででは、時刻  $t_0$  における物体の加速度を求めていたが、これを任意の  $t$  で置き換えよう。そして、改めて、今度は正式に、加速度を次式で定義しよう。

$$a_x(t) := \frac{dv_x(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_x(t + \Delta t) - v_x(t)}{\Delta t}. \quad (3.33)$$

上式で、左辺の加速度の表現に、時刻  $t$  が独立変数であることを、明記するようにした。

#### # memo No.35: 速度・位置・加速度の関係

速度  $v_x(t)$  が、 $v_x(t) := dx/dt$  と定義されるので、次の関係が成立している。

$$a_x(t) := \frac{dv_x(t)}{dt} := \frac{d^2x(t)}{dt^2}. \quad (3.34)$$

加速度の表現として、

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

というものが、最もよく用いられる。

「加速度は、位置に関する二階微分で定義される」という（見たまんまだ）。

### 3.4.2 2次元（平面）上の加速度

二次元の場合の加速度も、次元が増えただけで、考えることは一次元の場合と同じ。違いは、一次元の場合は1方向（ $x$ 軸）のみで考えればよかつたところを、二次元の場合は、2方向（ $x, y$ ）を考慮する点のみ。

2つの方向を  $x$  軸、 $y$  軸とする。 $x$  と  $y$  軸はそれぞれ独立だから、2つを別々に考えれば良い。どの方向を向いても、加速度の定義を変更する必要はない<sup>24)</sup>。つまり、1方向で考えたことが、そのまま残りの方向にも成立するということ<sup>25)</sup>。

<sup>24)</sup> 空間の等方性より。空間の方法性とは、どの向きに運動しようが、その物体に対する物理法則は不变である、という仮説のことを言う。

<sup>25)</sup> してもらわないと困る。というか、成立するものとして、定義される。

なので、上で考えた 1 次元の場合の式を、2 方向に適用するだけで良い。次のように 2 方向の場合の加速度が定義できる。

$$\mathbf{a}(t) := \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \left( \frac{d^2x(t)}{dt^2}, \frac{d^2y(t)}{dt^2} \right). \quad (3.35)$$

ただし、表記上の問題として、位置・速度・加速度をベクトル表記（太字）にした。

### 3.4.3 3 次元（空間）内の加速度

3 次元にならうが、やることはこれまでと同じ。3 次元空間内における加速度を  $\mathbf{a}$  と表すと、

$$\mathbf{a} := \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (3.36)$$

である。考え方は速度のときと同じである。つまり、加速度とは速度の時間変化のことである。速度が時間の経過とともに速くなったり、逆に遅くなったりしたとき、その変化の具合が加速度である。

また、速度の定義式から、以下のようにも加速度を表せる。すなわち、

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (a_x, a_y, a_z) \\ &= \left( \frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt} \right) \\ &= \left( \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2} \right) \\ &= \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \end{aligned} \quad (3.37)$$

とも表現できる。加速度が正の場合は、速度が上がっていくことを意味する。また、加速度が負の場合は、速度が下がっていくことを意味する。もちろん、加速度が 0 であれば、速度変化はないということである。

加速度の単位は [m/s<sup>2</sup>] である<sup>26)</sup>。

#### # memo No.36: 変化の記述

上に、「数式と物理現象は互いに関連している」というようなことを書いた。そして、数式を見たときに、「それを現象を具体的な例で想像できることが大切である」とも書いた。し

<sup>26)</sup> [m/s<sup>2</sup>] はメートル毎秒毎秒とよむ。

かし、具体的に式をイメージする方法を示していなかった。そこで、ここではこの例<sup>27)</sup>として、また、今までの復習を兼ねて、いまの私の考える微積分と物理現象を考えたい。

物体は大きさをもっているが、この物体の運動を考えるときには物体の大きさを無視したほうが計算上都合がよい。物体の重心の運動を追うことで、物体の運動の軌跡を得ることができる。物体をこの重心部分にギュギュ!!と押しつぶして大きさをなくした点を考える。このような点のことを **質点** という。力学では、剛体の場合を除いて、物体の運動を考えるときは、質点の運動のことを考える。以下では、「物体」と書かれていたのなら、それは、特に断りのない限り、質点と同義であるとする。

物体の運動を語るには、最初に、物体の **位置** を表現しなければならない。物体の位置は **座標** を用いて表現される。簡単のために、自身の居る点を原点 O にとろう。位置を表す記号として、 $r$  と表現する。つまり、物体の位置は

$$\mathbf{r} = (x, y, z)$$

のように表現される<sup>28)</sup>。位置については、そのイメージをすることは容易だと思う。自分が原点にいて、その点を指でさしている、というイメージをすればよい。

次に、物体の **速度** を考える。物体の速度とは、位置の時間変化を表す量である。まず、“変化”をどのように数式で表現すればよいかを考える。量の変化を表すには、その変化の前と後で二つの量の差を考える必要がある。量の変化は、

$$[\text{量の変化分}] = [\text{変化後の量}] - [\text{変化前の量}]$$

と計算される。上の式をもう少し格好をつけて書いて、量の変化分を表すときには、その量を表す記号の前に  $\Delta$  をつける。変化する量を、例えば  $x$  としたとき、変化分は  $\Delta x$  と表現する<sup>29)</sup>。従って、変化前の量を  $x_{\text{変化前}}$ 、変化後の量を  $x_{\text{変化後}}$  と表現すれば、

$$\Delta x = x_{\text{変化前}} - x_{\text{変化後}}$$

となる。

また、「A に対する B」を考えるとき、これは比で表現できて、

$$\frac{B}{A}$$

と数式表現できる。例えば、二人の子どもに、3 つのクッキーを配るとしよう。子ども一人に対して、クッキーはどれくらい与えられるかを考えれば、3/2 個であることは容易に計算され

<sup>27)</sup> 当然、ここで紹介するのは、その単なる一例であり、これが全てではない。むしろ、人それぞれで、想像の仕方が異なっているはずである。従って、想像できるようであれば、この節を読みとばしてかまわない——むしろ混乱するだろうから、読み飛ばすべきかも知れない。

<sup>28)</sup> 座標としては直交座標でないといけないという制約はないが、ここでは一番わかりやすいと思われる座標としてこの座標をとった。

<sup>29)</sup>  $\Delta$  は、デルタと読む。

る。この  $3/2$  は、

$$\frac{3[\text{個}]}{2[\text{人}]}$$

という意味である。式の意味は、「子ども二人に対して、クッキーが 3 つ」である。これは、子ども一人あたりのクッキーの個数でもある ( $3/2[\text{個}/\text{人}]$ )。

変化を考えるとき、基本となるのはこの引き算と割り算であり、後はこの組み合わせである。変化の基準となるものを分母にし、変化の対象となるものを分子におく。具体的に表現するならば、

$$\frac{\Delta A}{\Delta x} = \frac{A(x_2) - A(x_1)}{x_2 - x_1}$$

のようである。 $x$  の関数である  $A(x)$  を考えるとき、 $x$  の変化  $\Delta x$  に対する  $A$  の変化  $\Delta A$  が上式で表現されている。現象の変化を表す一般的な形は、この式のようになる。

やっと速度について考えられるが、速度の定義は、時間変化  $\Delta t$  の間にどの程度位置の変化  $\Delta x$  が起こるかを表現する。つまり、時間変化  $\Delta t$  に対する位置の変化  $\Delta x$  であるから、

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

と表現される。この式は、次のように考えるとよい。まず、時間  $\Delta t$  を 1 秒で一定としてみよう。このとき、一秒で進む距離が大きければ大きいほど速度が速くなることをこの式は表現する。私達の経験上においても矛盾はないだろう。また、逆に、位置の変化  $\Delta x$  を 1 メートルで一定にして考えてみよう。この場合、1 メートルを進む時間が短ければ短いほど速度が速くなる。1 メートルを 1 秒で進みのと、1 メートルを 0.1 秒で進むのでは、完全に後者の方が速い。

実際の速度の変化は、直交座標でいうところの、 $x$ ,  $y$ ,  $z$  の 3 方向で変化する。これは、位置が 3 方向であることから、当然のことである。従って、速度も 3 つの向きをもつ。つまり、速度もまたベクトルである。

式で速度に意味をもたせる時には、それに対応した文字を割当てるといよ。そこで、速度を表現する記号として、 $v$  を使うことにしよう。このノートでは、「定義する」という意味をこめて、 $\coloneqq$  を使う。その使用方法は、例えば、記号  $A$  に  $B$  という意味をもたせたい時に、「 $A$  を  $B$  というように定義する」というとき、 $A \coloneqq B$  のように書く。今の速度の定義の場合、記号  $A$  に対応するのが  $v$  であり、意味  $B$  に対応するのが  $\Delta r / \Delta t$  であるから、速度の定義は次のように書き表される。

$$v := \frac{\Delta r}{\Delta t}. \quad (3.38)$$

しかし上の式では、前の項目で定義した速度の定義と記号が異なる。小さい変化という意味をこめて、 $\Delta$  を使っている点である。この記号  $\Delta$  は有限の個数の範囲でたくさん分割したときの、その 1 つの区間というイメージで使用される。しかし、これはあくまでも近似的な考え方である。理想的には分割個数を無限大にし、分割された区間を無限小にしたい。そこで、微積

分という手段を使う。微積分を用いることで、無限小の変化を扱うことができる。有限分割から無限分割にしたので、当然、用いる記号も変えないといけない。すなわち、 $\Delta$  を  $d$  に変えるということである。

$$\mathbf{v} := \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (3.39)$$

式(3.38)と式(3.39)の違いは、位置の変化を有限分割にして表すか、無限分割にして表すかの違いである。速度の定義は、無限分割の概念で定義するほうが適当であるから、式(3.39)が正式な速度の定義になる。

上記はベクトルで書かれているが、これは、単なる以下の式の省略である。

$$(v_x, v_y, v_z) = \left( \frac{dr_x}{dt}, \frac{dr_y}{dt}, \frac{dr_z}{dt} \right) \quad (3.40)$$

### 3.5 躍度（加加速度、jerk）

理論構築には直接的に関係がないためか、力学の教科書では見かけないけど、加加速度(jerk)についても書いておこう。現実的には、加速度も時間変化する。この加速度の時間変化を 加加速度 という。躍度ともいう。個人的には、躍度という方を好み<sup>30)</sup>。英語だと jerk(ジャーク)。躍度は、工学的な匂いが強い。

一応式も書いておこう。加速度がベクトルであるから、躍度もベクトルになる。躍度を現す記号を  $j$  としよう<sup>31)</sup>。定義式は以下。

$$\begin{aligned} j &:= \frac{da}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{dv}{dt} \right) \\ &= \frac{d^2v}{dt^2} \\ &= \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{dx}{dt} \right) \\ &= \frac{d^3x}{dt^3}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

<sup>30)</sup> 加加速度だといい間違えたと思われて誤解されそうなので。

<sup>31)</sup> jerk からとった  $j$  である。後に使う仕事の記号  $j$  とは無関係。電気数学の虚数単位とも無関係。

# 4

## 3つの運動法則と万有引力の法則

**コメント** ニュートン力学は、4つの法則により成立している。4つの法則のうち、3つは物体の運動に関する法則（運動の3法則といわれる）であり、残りの1つは万有引力の法則である。物体は、この4つの法則を満たすように運動する。この章では、ニュートンの運動の3つの法則、万有引力の法則を説明していく。

### 4.1 運動の3法則

#### 4.1.1 （第1法則）慣性の法則

力を与えられていない物体は、その動き方に変化は生じない。外力が加わらなければ、等速直線運動している物体は等速直線運動を続けるし、静止している物体は静止し続ける。このような性質を物体の運動の根本原因と考え、法則と捉える。この法則の名前を **慣性の法則** という<sup>1)</sup>。

慣性の法則は実験によってのみ確かめることができ、どのような原理でこの法則が

---

<sup>1)</sup> 「…し続ける」という性質を、**慣性** という。

成立しているのかということを問題とはしない<sup>2)</sup>.

まとめておこう.

### Point 8: 慣性の法則

物体の運動に関する次のような性質を、慣性の法則 という。

- 座標系  $S$  に対して静止している物体は、外力が加わらない限り、 $S$  に対して静止し続ける。
- 座標系  $S$  に対して速度をもっている物体は、外力が加わらない限り、 $S$  に対してその速度を保ち続ける。

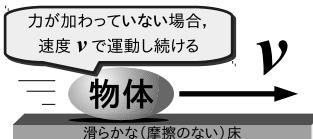


図 4.1 慣性の法則

この法則によって、慣性系の存在が暗黙的に仮定される<sup>3)</sup>。「速度をもつ」とか「加速度をもつ」とかという場合、基準となる慣性系が必要だからである。相対速度の項目で確認したように、観測者の見る物体の速度は、観測者と物体間の相対速度である。すなわち、同じ物体を見ているのもかかわらず、別の速度で運動している観測者にとって、物体は全く異なった速度として観測される。極端な例では、物体と同じように等速直線運動する座標系から物体を見た場合は、その物体は静止しているとみなされる。つまり、座標系によって物体の速度が異なってしまう。そこで、等

<sup>2)</sup> 問題にすることはできない、と言ったほうがよい。物理学は自然現象を論理的に説明する学問である。論理的説明をするには、説明なしに受け入れなければいけない約束事を設ける必要がある。これを数学では 公理 というが、物理学でこの公理に対応するものが 法則 と言われるものである。慣性の法則は、このような説明なしに受け入れるべき法則の 1 つである。

<sup>3)</sup> もっとストレートに「慣性系が一つ存在する」と表せばよいのだが、どの教科書を見ても、何故か、そう書かれていません。このノートもその例に従っている。確かに、等速運動を続けるとか静止し続けると書いたほうが、直感的にわかりやすい。

速直線運動する全座標系から一つ基準となる慣性系を選び、この座標系を特別な座標系として扱うのが最も自然である。選び出された1つの座標系は速度をもっていないとみなされ<sup>4)</sup>、これは絶対静止系とよばれる。

上記の慣性の法則で言っている座標系  $S$  とは、絶対静止系のことである。力学は絶対静止系を、速度や加速度、力の基準として構築されている<sup>5)</sup>。

以下では、単に速度とか加速度とかと書いた場合は、それは系  $S$  に対するものであると考える。ちなみに、車や電車の速度の基準は、地球を基準（絶対静止系）とした場合のものである<sup>6)</sup>。

絶対静止系は等速直線運動している全座標系から任意にひとつだけ選びとった座標系であるので、等速度運動状態と静止状態が全く同等である。

逆に、物体の動き方が変わった時（加速度が生じた場合）には、力が作用したと考える具体的には運動の第2法則（運動方程式）として記述される。物体に力が加わった場合、その物体は加速度が生じる。

#### 4.1.2 （第2法則）運動方程式

運動の第2法則は実際に動いている物体に対するものである。具体的には、重い物体は動かしにくく、軽い物体は動かしやすい。このようなイメージを式で表現する。

物体の運動は以下の式によって記述できる。

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = k \frac{\mathbf{F}}{m_i} \quad (4.1)$$

ここで、 $k$  は定数、 $m_i$  は慣性質量であり、 $\mathbf{F}$  は力である。言葉でいうと、

『物体の加速度は慣性質量に反比例し、力に比例する』

である。これを運動方程式という。

おそらく、歴史的には紆余曲折があって、最終的にこの形に落ち着いたのである

<sup>4)</sup> 基準となる座標系に速度がなければ、理論的に整った（補正項のいらない）説明ができる。他の座標系は、この基準となる座標系に補正項を加えた形で表現することができる。

<sup>5)</sup> 相対性理論によると、絶対静止系  $S$  の存在は否定されるが、ニュートン力学を考える範囲では系  $S$  の存在を仮定したうえで成立する理論である。認めてもその理論に支障はない。

<sup>6)</sup> 地球は太陽の周りを公転しているので静止していないではないか、という反論があるかもしれないが、実際には私達は地球が静止しているように感じており、こう考えても実使用上は問題はない（物理理論的には問題だが、工学的には有効な考え方である）。絶対静止系を任意に取れることを身近な例によって示したかったので、地球を例にした。

う。ニュートンが提示した最初の式は、微分積分学が整っておらず<sup>7)</sup>、当然ながらこのような微分方程式の記述にはなっていなかったはず。式の形がこうなるまでの経緯は歴史的には重要かもしれないが、このノートでは興味のないことである。すでに数式的に整った形になっているのだから、これを積極的に受け入れるべきである。同じニュートンの運動法則を意味しているのには変わりないのである。

運動方程式をもう少し整理し、わかりやすく書き換えよう。力の単位 [N] を  $[N] = [\text{kg}(\text{m}/\text{s}^2)]$  すると、定数  $k$  は  $k = 1$  になって、以下のように書ける。

### Point 9: 運動方程式

ニュートンの運動方程式は、以下のように表現される。

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} \quad (4.2)$$

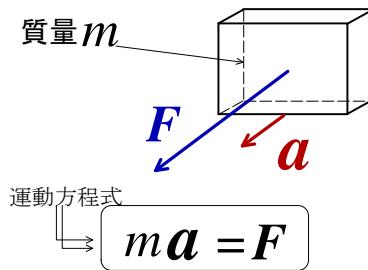


図 4.2 運動方程式

加速度は力に比例するので、その比例係数を慣性質量  $m_i$  と見るのである<sup>8)</sup>。そ

<sup>7)</sup> ニュートンのこの力学の提示で、微分積分学が始まったとすれば、当然だ。微分方程式という考え方にはニュートンの力学以降に発展するのであり、また、よりよい式表現のための記号法が整備されることになる。

<sup>8)</sup> もともとあった比例定数  $k = 1$  の記述は省略するが、その理由が力の単位の取り方にあるということは覚えておくべきである。これ以降でも様々な物理法則を表す式を見ていくが、比例定数が現れ

うすれば「物体の質量が大きいほど、その物体に加速度をもたらせるために必要な力は、大きくなる」と読み取れる。(力と加速度に具体的な数値を代入して確認してみるとよい。) すなわち、慣性質量は、「物体の動きにくさ」を表現していると考えられる。以下では、運動方程式として、式(4.2)を用いることにする。

運動方程式(4.2)は、慣性質量と加速度と力の3つの概念の関係を示しているだけであり、力の定義をなしているわけではないことに注意する。ここでは、とりあえず、「力」というものの存在を仮定しているのである。

この法則で使われる等号は数学的に厳密な等号ではない。この法則は実験によって得られるものだからである。例えば、実験で加速度や慣性質量や力を測定するとき、必ず測定限界となる桁数が存在する。つまり、無限桁だけの測定はできないのだから、「ニュートンの運動方程式は小数点第〇位の桁で正しい」としかいえない。すなわち、ニュートンの運動方程式(ニュートン方程式)における等号は、細かくいえば、近似を表すものである。しかし、物理では等号のようにして扱う。これによる不都合はほとんどない。不都合が現れるのは量子力学や相対性理論で考える状況下においてである<sup>9)</sup>。そのときはニュートン方程式を書き換えてやればよい。このニュートン方程式は私達の目に見える物体の動きをかなりの精度で正確に記述できる方程式である。

#### 4.1.3 (第3法則) 作用・反作用の法則

2つの物体をもってき、それぞれ名前をA, Bとする。このとき、作用反作用の法則とは以下のようない法則のことである。

---

ないことが多い。これは理論的説明を簡潔に表現するべく、物理量の単位の定義を人為的に都合よく行っているからである。

単位の取り方によって、数値は変わってしまう(時には次元そのものも変わりうる)が、これは物理的現象の本質ではない。物理現象を人間が説明しようとするときには、ある視点からその現象を観測する必要がある。観測するということは、その対象となる物理現象を偏った考え方の下で見ることである。こうなると当然ながら、同じ現象でも、観測方法の違いによって、測定結果がことなる場合が起こる。しかし、間違いはどこにもない。どちらも正しい。同じ現象なのに、測定方法によって異なる結果が出るのはおかしな気がするかもしれないが、受け入れるしかない。1つの物理現象に対して、複数の物理学的説明があつてもよいではないか。理論は1つだけとは限らないの(人間は本当の物理法則を知ることはできない)と考えるほうが健全な思考である。このことは、学習を進めていくうえで忘れがちなので、ここで注意を促しておいた。

<sup>9)</sup> 相対性理論; 光速に近い速度で動く物体を考える(特殊相対性理論)。一様でない重力が存在する空間を考える(一般相対性理論)。量子力学; 原子レベルの大きさの粒子の運動の記述を考える。

### Point 10: 作用反作用の法則

『物体Bが物体Aに力 $F_{AB}$ を与えていたとき、物体Aも物体Bに $F_{AB}$ と大きさが同じで逆向きの力 $-F_{BA}$ を受けている』

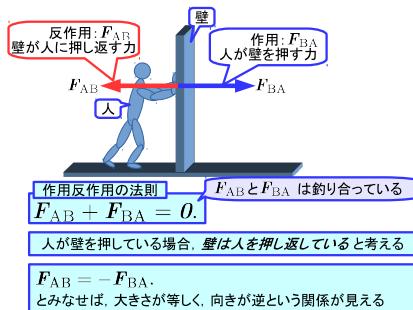


図 4.3 作用・反作用の法則

これを式で表すと、

$$F_{AB} = -F_{BA} \quad (4.3)$$

である。この式を変形すると、

$$F_{AB} + F_{BA} = 0 \quad (4.4)$$

となって、作用とその反作用で生じる力からの合計は 0 になることがわかる。作用とは、ここでは、力のことをいう。

力いっぱい押してもピクともしない壁を、力いっぱい押してみよう。しかし、壁は動かない。壁に力を加えているのにその壁が動かないということは、ニュートン方程式に反していると、一見して見まちがえ得る。しかし、作用反作用の法則による、壁に押し返されていることを考えれば矛盾でもなんでもない。

この法則は、「力」のもつ性質を記述している。この法則の対象は「力」そのものである。しかし、今までに「力」を明確に定義していないので、少々曖昧に聞こえてしまうかもしれない。実際、その通りである。この作用反作用の法則は他の 2 つの法

則よりも、何か違った雰囲気がある。この法則は「力とは何か」が分かったときに、削除されるものなのかもしれない。しかし、ここではそんな高度な質問に答えることは不可能であり、さしあたってはこの法則を受け入れていくことにしよう。

そういうものの、この法則は大切な法則である。この法則によって、物理学で重要な概念の 1 つである、保存則が導かれるからである。「保存する」とは時間に関係なく一定の値をとることをいう。保存則については後ほど詳しく考えていきたい。ここでは、作用反作用の法則は捨ててはならない重要な法則であるということをわかればそれでよい。

#### 4.1.4 慣性質量

運動方程式（第 2 法則）で現れた質量を **慣性質量** という。これは、すぐ後に説明する万有引力の法則に現れる質量<sup>10)</sup> と区別するための名前である。慣性質量の大きさの比べ方について、ここで学習しておこう。

2 つの質量があるとしよう。これらを  $m_{i1}$ ,  $m_{i2}$  とおく。この 2 つの質量に全く同じ力  $F$  を加えて、それぞれに加速度を与える。向きはあまり本質的ないので省略する。加速度が生じることは式 (4.1) によって保証されている。このときの各質点の加速度は、加わる力が一定でも質量が異なるので、互いに異なったものとなる。簡単のために、二つの質点は同一方向に運動するとしよう。各質点の加速度の大きさを  $a_1$ ,  $a_2$  とする。ここで加速度の向きも省略する。運動方程式 (4.1) によって、各質点の運動は以下のように記述される。

$$a_1 = k \frac{F}{m_{i1}}, \quad a_2 = k \frac{F}{m_{i2}}$$

この 2 つの式から共通の  $F$  を消去すると以下の関係を得る。

$$(kF =) a_1 m_{i1} = a_2 m_{i2}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_{i1}}{m_{i2}}$$

慣性質量はこのように測定される。何か基準となる質量を 1 つ定めることによって、他の質量を決定できる。キログラム原器の 1[kg] が、その基準である。

---

<sup>10)</sup> こっちは **重力質量** とよぶことになるが、詳細は後に述べる。

‡ memo No.37: 慣性の法則と運動方程式の関係

運動方程式(4.2)は、慣性質量と加速度と力の3つの概念の関係を示しているだけであり、力の定義をなしているわけではないことに注意する。ここでは、とりあえず、「力」というものの存在を仮定しているのである。

この法則で使われる等号は数学的に厳密な等号ではない。この法則は実験によって得られるものだからである。例えば、実験で加速度や慣性質量や力を測定するとき、必ず測定限界となる桁数が存在する。つまり、無限桁だけの測定はできないのだから、「ニュートンの運動方程式は小数点第〇位の桁で正しい」としかいえない。すなわち、ニュートンの運動方程式(ニュートン方程式)における等号は、細かくいえば、近似を表すものである。しかし、物理では等号のようにして扱う。これによる不都合はほとんどない。不都合が現れるのは量子力学や相対性理論で考える状況下においてである<sup>11)</sup>。そのときはニュートン方程式を書き換えてやればよい。このニュートン方程式は私達の目に見える物体の動きをかなりの精度で正確に記述できる方程式である。

## 4.2 万有引力の法則

### 4.2.1 法則のイメージと数式による定義

万有引力の法則は、ニュートンの運動の3法則とは独立したものである。その内容は「2つの重力質量が存在しているとき、その両者は引き合う」というものである<sup>12)</sup>。これはすなわち、2つのうちの一方の重力質量( $m_{gA}$ としよう)が他方の重力質量( $m_{gB}$ としよう)を引っ張るのである。もちろん、反対を考えれば、重力質量 $m_{gB}$ が重力質量 $m_{gA}$ を引っ張っていることになる。

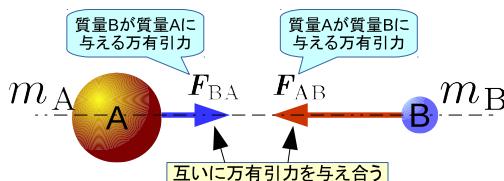


図 4.4 万有引力

<sup>11)</sup> 相対性理論；光速に近い速度で動く物体を考える(特殊相対性理論)。一様でない重力が存在する空間を考える(一般相対性理論)。量子力学；原子レベルの大きさの粒子の運動の記述を考える。

<sup>12)</sup> 「重力質量」といったのは、先ほどニュートン方程式の部分で確認した慣性質量とは別に定義される質量であることを示したかったからである。

以上のことと、もう一度もう少しあこまつた言い方で確認しておこう。2つの重力質量  $m_{gA}$ ,  $m_{gB}$  が存在すると、その重力質量同士が互いに引き合う。これが 万有引力の法則 である。以下の式は 重力質量  $m_{gA}$  が、重力質量  $m_{gB}$  に引っ張られる力を表す。力と重力質量 の添え字に注意すること。

### Point 11: 万有引力の法則

万有引力（重力質量  $m_{gA}$  が、重力質量  $m_{gB}$  に引っ張られる力）は次式で定義される。

$$\mathbf{F}_{AB} = -G \frac{m_{gA} m_{gB}}{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B|^2} \frac{\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B}{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B|}. \quad (4.5)$$

ここに、 $\mathbf{r}_A$ ,  $\mathbf{r}_B$  は、それぞれ  $m_{gA}$  と  $m_{gB}$  の 位置である。

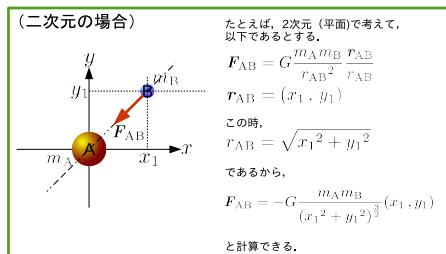


図 4.5 万有引力（例：2次元）

### # memo No.38: 万有引力法則とケプラーの法則

ニュートンが万有引力の法則を見つけたのは、ケプラーの惑星の運動の 3 法則を説明するためであった。たしかに、万有引力をニュートンの運動の 3 法則を用いると、ケプラーの法則が満たされる。逆に、ケプラーの法則から万有引力を導ける。どちらを基本法則としてもよいと思われるが、ここは万有引力を基本法則としたほうが無難だろう—ケプラーの法則は 3 つであり、万有引力は 1 つであるから…これも思考経済だ—

### 4.2.2 重力質量

万有引力の法則で表される質量のことを、**重力質量** という。重力質量は、運動方程式で表される慣性質量とは、別の概念である。重力質量は物体の「重さ」を表現していると考えられる<sup>13)</sup>。また、重力質量  $m_{gB}$  が重力質量  $m_{gA}$  に引っ張られる力  $\mathbf{F}_{BA}$  は

$$\mathbf{F}_{BA} = -G \frac{m_{gB} m_{gA}}{|\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A|^2} \frac{\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A}{|\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A|} \quad (4.6)$$

である。 $\mathbf{F}_{AB}$  と  $\mathbf{F}_{BA}$  の関係は、明らかに ( $\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$  の部分に注目)

$$\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA} \quad (4.7)$$

であることがわかり、作用反作用の法則が成立していることも確認できる。

**# memo No.39:** この世界にある「力」の種類

万有引力は基本的な力の1つである。基本的な力はこの他に3つあって、それは「電磁気的な力」、「弱い力」、「核力」である。力のことを相互作用ということもある。

古典力学でいう力とは、主に、電磁気的な力と万有引力である。

### 4.2.3 重力加速度

万有引力の法則は、2つの物体間にに関する法則である。ここで、違う視点から、万有引力の法則を眺めてみる。物体の一つを惑星、もう一方を任意の物体と考えてもらいたい。物体が惑星に引っ張られているイメージ。

惑星の質量を、 $M_P$ 、惑星の位置を  $\mathbf{r}_P$  とする。<sup>14)</sup> また、惑星上の物体の質量を  $m_g$ 、位置を  $\mathbf{r}$  とする。

すると、物体が惑星から受ける力は、以下の式で表せる。

$$\mathbf{F} = -m_g \left( G \frac{M_P}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_P|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_P}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_P|} \right).$$

ここに、 $\mathbf{r}$ 、 $\mathbf{r}_P$  はそれぞれ、質点の位置と惑星の位置を表す。

<sup>13)</sup> 慣性質量とは、物体の動きにくさを表すものであった。

<sup>14)</sup> 添字の  $P$  は Planet の頭文字。

今基準としているのは惑星だから、惑星の位置を基準にすれば ( $\mathbf{r}_P = \mathbf{0}$ ),

$$\mathbf{F} = -m_g \left( G \frac{M_P}{|\mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \right).$$

ここで、重力加速度を以下で定義する。

**Point 12:** 重力加速度の定義

次式で、重力加速度を定義する。

$$\mathbf{g} := G \frac{M_P}{|\mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}. \quad (4.8)$$

万有引力の法則に、惑星の質量  $M_P$ 、惑星の位置  $\mathbf{r}_P = \mathbf{0}$  を代入している。この定義において、重力加速度の向きは惑星から質点に向かう方向である。従って、鉛直上向きを正とする。この重力加速度は惑星の近くではほぼ一定であるとみなせる。従って、惑星の表面付近から受ける力は、重力加速度を用いて、

$$\mathbf{F} = -m_g \mathbf{g} \quad (4.9)$$

と書ける。すなわち、質点は地表よりも上に存在するとき<sup>15)</sup>、質点は惑星に向かう方向に重力を受けることになる。負の符号が付いている理由は、惑星から質点に向かう方向を正方向にとっているため。

---

<sup>15)</sup> 地表：地球の表面のことをいう。



# 5 保存則

## 5.1 等価原理

### 5.1.1 原理

運動方程式で定義される 慣性質量 と、万有引力から定義される 重力質量 は全く別の概念である。慣性質量は「物体の動きにくさ」を表していて、重力質量は「物体の重さ」を表現しているのであって、両者が等しい必要性は全くない。しかし、経験的に、慣性質量と重力質量は等価であることが知られている。「重い物体ほど動かしにくくなる」ということは、誰しもが経験していることと思う。そして、Eötvös という人が実験で確認している。そこで、慣性質量と重力質量は等価である ということを認めて、これを式で書くと次のようになる。

#### Point 13: 等価原理

等価原理を表す式は、次の通り。

$$m_i := m_g. \quad (5.1)$$

この式が 等価原理 の根本を表す式である。この原理に従って、以下では、重力質量や慣性質量の区別なしに、単に「質量」ということにする。

### 5.1.2 実験による確認

エトヴェシュ<sup>1)</sup> の行った実験は、多くの物質の、慣性質量の重力質量の比を測定し、その比が等しいことを確かめる実験を行い、その結果、どの物質でも慣性質量と重力質量の比はある一定の値に一致することが示された。多くの物質でその比が一定値をとるということは、慣性質量と重量質量は等価であると考えられる。しかし、絶対に等価であるとは言い切れない。つまり、この等価原理は実験的に正しいと推測されているだけだ。“本当に”両者が等価であることが説明されたわけではない。もしかしたら、わずかな違いがあるのかもしれない。

この原理を受け入れる 1 つの理由として、この等価原理を仮定しその上で理論を組み立て、多くの物理現象を説明できるなら、この等価原理は正しいと認識してよいだろうと考える。実際、AINSHUTAIN はこの等価原理の考えをさらに発展させ、相対性理論を作り上げた。相対性理論は、ニュートン力学をその理論の内部に包括し、さらにより一般的に物理現象を説明できている。等価原理を認めることで、多くの物理現象を説明できていることから、等価原理は採用すべきもだと言える。本当に正しいかどうかは別にして、とりあえず、この原理を仮定して理論を組み立てていくことにしよう。

## 5.2 運動量保存の法則

### 5.2.1 運動量の定義

物体の質量  $m$  と質点の速度  $v$  の積を 運動量  $p$  と定義する。

$$p := mv. \quad (5.2)$$

このように定義された運動量は、物体の運動の「力強さ」を表現している。質量が大きいほど、また、速度が大きいほど運動量が大きくなる。また、同じような言い方で

---

<sup>1)</sup> Vásárosnamènyi Báró Eötvös Loránd (1848 – 1919, ハンガリー) : ここに記載している通り、重力質量と慣性質量が等価であることを、実験的に確かめた。

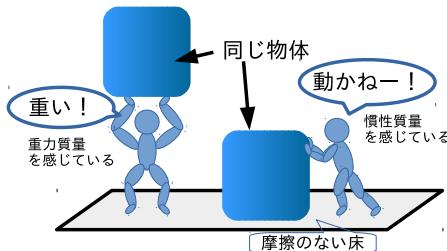


図 5.1 等価原理

はあるが、運動量は他の物体にぶつかったとき、与えるダメージの程度を表すのものともいえる。

### 5.2.2 運動量を用いた運動方程式

ニュートンの運動方程式は式(4.2)で示したように、

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} \quad (5.3)$$

である。この式は速度  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  を用いて表すと、

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \quad (5.4)$$

である。

さて、今まで考えてきたニュートンの運動方程式は、暗黙のうちに“質点の慣性質量は時間変化しない”という約束されている式である。従って、慣性質量が時間変化するときには、上式のような運動方程式では現象を正確に記述できない。どうすればよいかといえば、当たり前のことだが、質点の慣性質量の時間変化を考慮に入れた式に書き直せばよい。そのような式を作ることは簡単で、慣性質量  $m_i$  を時間変化するとして、つまり  $m_i = m_i(t)$  と考えて、微分記号の中に入れてしまえばよい。慣性質量  $m_i$  を微分記号の中に入れると、

$$\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{F} \quad (5.5)$$

となる。ここで運動量  $\mathbf{p} := m\mathbf{v}$  を用いると、次を得る。

**Point 14: 運動量表示の運動方程式**

運動量  $\mathbf{p}$  を用いた運動方程式は、次のように表現できる。

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}. \quad (5.6)$$

これが、運動量を用いた運動方程式である。この表記もよく用いられる。この式は、慣性質量が時間変化しない場合と時間変化する場合の両方で、成立する式である。念のために、それを示しておく。運動量の時間微分は、積の微分公式<sup>2)</sup>を用いると以下のようになる。

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v}\frac{dm}{dt} \quad (5.7)$$

慣性質量が時間変化していると考えていることに注意すること。これを用いると運動方程式は

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v}\frac{dm}{dt} = \mathbf{F} \quad (5.8)$$

と書ける。慣性質量が時間変化していなければ、左辺2項は0になって、式(5.4)に帰着する。

**# memo No.40: 運動量を用いた運動方程式の必要性**

この運動量を用いた運動方程式の表記は、特に相対性理論を学習するときに必要となる。とはいっても、もっと身近な所にも、この運動量を用いた運動方程式を考えることは多い。例えば、車はガソリンを燃料にして動くが、このガソリンは時間と共になくなっていく。つまり、車の質量が、時間変化しているのである—実際はこの質量の変化は、車本体の質量に対して、無視できる程度だが。

また、宇宙ヘロケットを打ち上げる場合も、燃料の燃焼による質量の変化を考える必要がある。物体の運動中に、その質量が時間変化するので、運動量でかかれた運動方程式が必要になる。

<sup>2)</sup> 積の微分公式とは、以下のようなものであった。

$$\frac{d}{dt}(f(x)g(x)) = g(x)\frac{df(x)}{dx} + f(x)\frac{dg(x)}{dx}$$

質量を定数扱いできない場合には、運動量表記による運動方程式を使わないといけない。

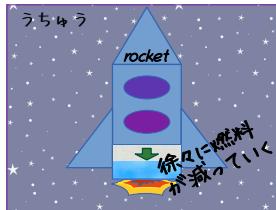


図 5.2 運動量を用いた方程式の適用例

### 5.2.3 運動量保存の法則

#### 5.2.3.1 2つの物体間の運動量保存の法則

2つの物体が衝突したとき、衝突前の2つの物体の運動量の和と衝突後の2つの物体の運動量の和は同じ値をとる。つまり、2つの物体の運動量の和は、衝突が起ころうとも、時間によらずに一定値をとるのである。この法則を、運動量保存の法則という。または略して、運動量保存則ともいう。この法則を式で表すことを考える。衝突前の2つの物体の運動量をそれぞれ、 $p_1$  前、 $p_2$  前とする。これらにより、衝突前の運動量の和は  $p_1$  前 +  $p_2$  前である。衝突後の2つの物体の運動量をそれぞれ、 $p_1$  後、 $p_2$  後とする。これらにより、衝突後の運動量の和は  $p_1$  後 +  $p_2$  後である。運動量保存の法則によると、“衝突前の運動量の和”と“衝突後の運動量の和”は同じ値をとるので、

$$p_1 \text{ 前} + p_2 \text{ 前} = p_1 \text{ 後} + p_2 \text{ 後} \quad (5.9)$$

の関係があることになる。

#### 5.2.3.2 $N$ 個の物体間の運動量保存の法則

物体が  $N$  個だけ存在する場合に拡張しても、この法則は成り立つ。これを式で書くと、

$$\sum_{i=1}^N p_i \text{ 前} = \sum_{i=1}^N p_i \text{ 後}. \quad (5.10)$$

となる<sup>3)</sup>.

但し、これは  $N$  個の物体が同時に衝突する場合についての式である。これが運動量保存の法則を表現する式である。この式をさらに見やすい形にしよう。衝突前と衝突後で各物体の運動量の総和が同じ値をとるので、

$$\mathbf{P} := \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \text{ 前} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \text{ 後} \quad (5.11)$$

とおける。衝突時には 1 つ 1 つの物体は力を受けるわけだが、全ての物体が受ける力を合計すると 0 になる。このことは、作用反作用の法則を思い出せば納得できる。1 つの物体が、別にもう 1 つ物体に力を与えるとき、作用反作用の法則により、与えた力と逆向きで大きさの等しい力を受けるからである。作用反作用によって生じる力の合計は 0 になることは前に確認した。従って、運動量を用いた運動方程式 (5.6) をおもい起こせば、次を得る。

### Point 15: 運動量保存の法則

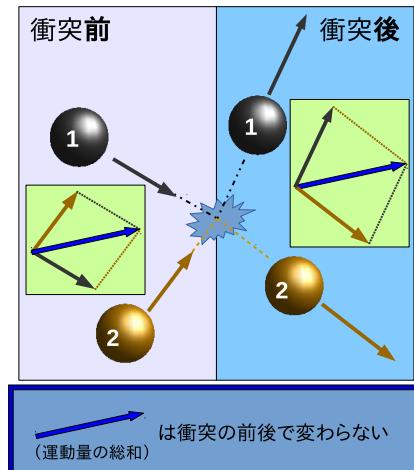
運動量保存の法則は、次式で表せる。

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0. \quad (5.12)$$

$\mathbf{P}$  が時間によらずに一定値をとることからも、この式は正しいと言える。従って、この式 (5.12) も運動量保存の法則を表現しているのである。

<sup>3)</sup> 和の記号を展開すると、以下のようになる。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \text{ 前} &= \mathbf{p}_1 \text{ 前} + \mathbf{p}_2 \text{ 前} + \cdots + \mathbf{p}_N \text{ 前}. \\ \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \text{ 後} &= \mathbf{p}_1 \text{ 後} + \mathbf{p}_2 \text{ 後} + \cdots + \mathbf{p}_N \text{ 後}. \end{aligned}$$



# memo No.41: 現象全体を見ることで、保存則が成立する

運動量保存の法則は、系の全ての物体について見渡すことで、成立している法則である。例えば、衝突に関係する物体全体の中の、一部の物体だけを見ているならば、この法則は成り立たない。1つの物体が運動量を増加させれば、別の物体は運動量を減少させるのである。この法則が意味していることは、この増加量と減少量の和が0になるということである。

# memo No.42: 運動方程式と運動量保存則

運動量保存の法則を次のように考えることもできる。すなわち、運動方程式  $dP/dt = \mathbf{F}$  で、 $\mathbf{F} = 0$  のとき、 $dP/dt = 0$  である。従って、運動量保存の法則は運動方程式から導かれる。

# memo No.43: 高校物理における運動量保存則

高校の物理学では、2つの物体の衝突を考えて、運動量保存の法則を説明した。より具体的な式で表現すれば、

$$m_a \mathbf{v}_a \text{ 前} + m_b \mathbf{v}_b \text{ 前} = m_a \mathbf{v}_a \text{ 後} + m_b \mathbf{v}_b \text{ 後} \quad (5.13)$$

である。

### 5.2.4 運動量の変化と力積

ある1つの物体の運動量が時間変化した場合について考える。物体が壁に当たって、運動方向を変化させる現象を想像するとよい。変化前と変化後の運動量をそれぞれ、 $p_{\text{前}}$ ,  $p_{\text{後}}$ と書く。そして、このときの運動量の変化を  $I$  と書くことになると、

$$I = p_{\text{後}} - p_{\text{前}} \quad (5.14)$$

である。

ところで、物体が運動の方向を変化させたのだから、物体は力を受けたはずである。なぜなら、慣性の法則によると、物体に力が働かない限り、物体は等速直線運動をするからである。しかし、物体の運動量が変化したということは運動量の定義  $p := m_i v$  から、速度が変化したことになる。すなわち、加速度を生じたわけであり、力が加わったと解釈できる<sup>4)</sup>。その力を  $\mathbf{F}$  とすると、運動方程式 (5.6) から、

$$\frac{dp}{dt} = \mathbf{F} \quad (5.15)$$

をたてられる。この式の両辺を、衝突前の時間  $t_{\text{前}}$  から衝突後の時間  $t_{\text{後}}$  で定積分すると、

$$\begin{aligned} & \int_{t_{\text{前}}}^{t_{\text{後}}} \frac{dp}{dt} dt = \int_{t_{\text{前}}}^{t_{\text{後}}} \mathbf{F} dt \\ & \Leftrightarrow \int_{t_{\text{前}}}^{t_{\text{後}}} dp = \int_{t_{\text{前}}}^{t_{\text{後}}} \mathbf{F} dt \\ & \Leftrightarrow p(t_{\text{前}}) - p(t_{\text{後}}) = \int_{t_{\text{後}}}^{t_{\text{前}}} \mathbf{F} dt \end{aligned} \quad (5.16)$$

となる。この式の左辺は、 $p_{\text{後}} - p_{\text{前}}$  と全く同じことであるので、式 (5.14) と式 (5.16) を見比べると、

$$I = \int_{t_{\text{前}}}^{t_{\text{後}}} \mathbf{F} dt \quad (5.17)$$

の関係を得る。この  $I$  のことを、力積 という。つまり、運動量変化は力積  $I = \int_{t_{\text{前}}}^{t_{\text{後}}} \mathbf{F} dt$  によって生じたと考えられる。

---

<sup>4)</sup> 「加速度が生じること」と「力が加わること」は、運動方程式から、同じことを意味すると言える。

## 5.3 角運動量保存の法則

**コメント** 回転している物体に共通する性質はあるだろうか。回転する物体としてよく例に上がるのがコマである。また、車輪の例もよく見かける。回転するコマが倒れずに回転を続けられる理由や、走行中の自転車が安定している理由に、これから説明する角運動量保存の法則が絡んでいる。

### 5.3.1 角運動

物体が一直線上を運動していても、ある固定された点からその物体の運動を眺めると、その点を中心として回転しているように見える。例えば、車が走っているのを見るとき、その車を1つの決まった場所から目で追うためには、首(あるいは目)を回転させる必要がある。このような回転運動のことを**角運動**という。(回転を表すのに角度を用いるからだろうか?)このような状況を思い浮かべつつ、角運動について考える。角運動量を記述するには、ベクトルの**外積**の知識が必要である。

### 5.3.2 てこの原理

物体の回転の最も基本的な原理は、**てこの原理**である。そのままでは簡単には持ち上げられない程、重い物体があるとしよう。この物体を持ち上げたいとき、てこの原理が役に立つ。もはや、説明するまでもないだろう。図5.4を見れば、分かるはずである。直接的に力を加えている部分を**力点**、棒の回転の支えになっている点を**支点**、重い物体に力がかかっている点を**作用点**という。

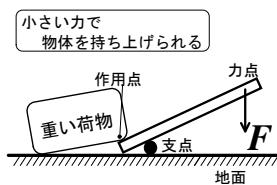


図5.4 てこの原理

てこの原理は、重い物体を小さな力で持ち上げることを、可能にする。てこの原理

を数式で表現してみよう。力点にかかる力を  $F$  とし、持ち上げたい物体にかかる力(重力)を  $W$  とする。てこの原理を使わずに、物体を持ち上げようとしても、加える力よりも物体の方が重く、すなわち

$$F < W$$

となるので、物体を持ち上げられない。

てこの原理を使うと、上式が成り立っていても、物体を持ち上げることができる。支点と力点との距離を  $l_1$ 、支点と作用点との距離を  $l_2$  としよう。このとき、物体が持ち上がったとすると、てこの原理は

$$Fl_1 > Wl_2 \quad (5.18)$$

のよう表現される。この式が成立するときに、物体を持ち上げられるの物体の重さ  $W$  は一定であり、力  $F$  には限界値があることから、自由に動かせるのは  $l_1, l_2$  しかない。支点から力点までの距離 ( $l_1$ ) を長くし、支点から作用点までの距離 ( $l_2$ ) を短くすることで、より小さい力で物体を持ち上げることが可能になる。

### 5.3.3 釣り合いの式

てこの原理の式の不等号を等号に置き換えた式を、釣り合いの式という。

$$F_1l_1 = F_2l_2. \quad (5.19)$$

$F_1$  を物体の重さによってかかる力とし(力点)、 $F_2$  を棒が傾かないように支える力とする(作用点)。 $l_1$  は支点と力点との距離で、 $l_2$  は支点と作用点との距離である。

### 5.3.4 物体の回転の表現とベクトルの外積

物体が回転しているということを表現するのに、ベクトルの外積という概念を導入する。ここでは、このベクトルの外積について考える。

物体が回転するということは、その軌道は円であるから、回転には必ずこの軌道円の中心を通る“回転の軸”が存在する。この回転の軸は直線であることは当たり前であって、確認するまでもない。この軸を用いて、回転の方向を表現するのである。回転の方向をこの軸方向にとって、回転の強さを適当に定義すれば、その回転の特徴を表現できる。さて、以下では回転の具体的な表現の仕方について考えていくことにしたいと思う。

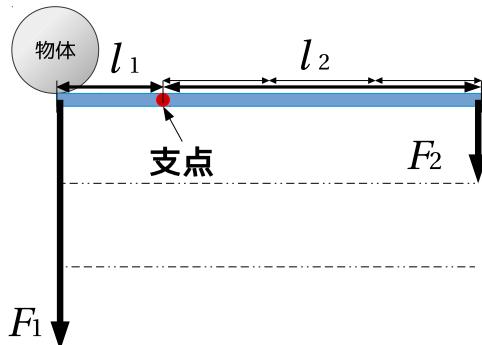


図 5.5 鈎り合い

まず、回転の方向の決定方法である。これには回転の軸を用いることは先ほど書いたところである。その方向には正方向と負方向の 2 つがあるが、その取り決めは次の約束に従うものとされる。すなわち、回転の向きを「速度の方向  $v$  の方向から、物体から軸へ垂線を下ろした向き ( $k$  の方向) に右ねじを回して進向き」と決めるのである。これを **右ねじの法則** という。回転の強さについてはもう少し後で考えるこにする。

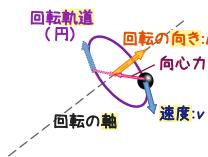


図 5.6 物体の回転

右ねじの法則によって方向を定義されたベクトルを  $L$  と書くこととする。これを、

$$\mathbf{L} = \mathbf{k} \times \mathbf{v} \quad (5.20)$$

のように表現する。この式の解釈の仕方は、「ベクトル  $\mathbf{k}$  をベクトル  $\mathbf{v}$  方向へ右ねじ回して進む向き」のベクトルと読む。

しかし、向きを設定したのではまだ不十分である。この  $L$  の大きさを考える必要がある。そこで、大きさの定義として、「物体の速度ベクトル  $v$  と垂線ベクトル  $k$  のなす平行四辺形の面積」を用いる。このような、ベクトルの大きさの定義の理由については後回しにして、ここではそのようなものであると考えておいてもらいたい。式でこの定義を表現すれば、

$$L := \|L\| = \|\mathbf{k} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{k}\| \|\mathbf{v}\| \sin \theta \quad (5.21)$$

である。

さて、ベクトルの大きさの具体的な定義を見てもらったところで、次にこの定義の意味の説明である。

覚え方は、内積を定義したときには  $\cos$  関数を用いて定義したことと比べると、今回はこの部分は  $\sin$  関数となっていることに注意すればよいということだろうか。

大体、物体の回転をベクトルを用いて表現すると以上のような感じだが、しかしこれでは感覚的過ぎる。そこで、この物体の回転を、ベクトルの成分を通してもう少し詳しく考えていくことにしたい。

### 5.3.5 角運動量

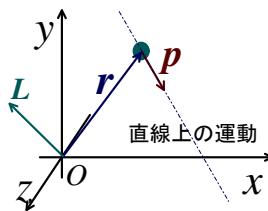


図 5.7 (a) 直線運動

物体が位置  $r$  において、運動量  $p$  をもっているとき、

$$L := \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (5.22)$$

で定義される  $L$  を原点の周りの 角運動量 という。物体の角運動量  $L$  が 0 でない値をとるとき、その物体は回転運動をしていると言える。

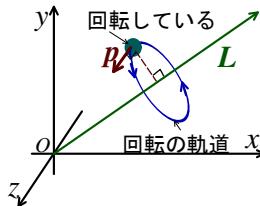


図 5.8 (b) 回転運動

### 5.3.6 角運動の方程式

回転運動している物体の運動方程式を考えてみよう。

角運動量  $\mathbf{L}$  を時間微分すると,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (5.23)$$

となる。ここで、式 (5.23) の第 1 項の運動量  $\mathbf{p}$  は

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (5.24)$$

である。これを用いて,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (5.25)$$

となるが、ベクトルの外積の性質(任意のベクトル  $\mathbf{A}$  に対して  $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0$  が成り立つ)を考慮すると,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m \frac{d\mathbf{r}}{dt} = m \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = 0 \quad (5.26)$$

となってしまうので、式 (5.25) の第 1 項は 0 になってしまい、結局、

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (5.27)$$

と計算される。さらに、運動量を用いた運動方程式 (5.6) の関係から、

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (5.28)$$

を得る。ここで、原点の周りの 力のモーメント  $\mathbf{N}$  を

$$\mathbf{N} := \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (5.29)$$

と定義すると、式 (5.28) は

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (5.30)$$

と書ける。式 (5.30) は、運動量を用いた運動方程式 (5.6) と同じ形の式になっている。 $(\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{F}, \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{p}$  とするとわかる。) 従って、式 (5.30) は角運動についての運動方程式であると言える。力のモーメント  $\mathbf{N}$  は、角運動を引き起こす力である。すなわち、 $\mathbf{N}$  は回転運動を引き起こす力であると言える。このように回転力を起こす  $\mathbf{N}$  はトルクともよばれる。

### 5.3.7 角運動量保存則

運動量保存則を考えたときに、「外部から力  $\mathbf{F}$  が加わらない限り、全物体の運動量の総和は一定である」ということを確認した。角運動量についても同様な法則が成り立っていて、これを 角運動量保存の法則 という。または略して、角運動量保存則 という。では、角運動量保存則を式で表すことを考える。外力が働くないところから、 $\mathbf{F} = 0$  であって、これを力のモーメントの定義式 (5.29) に代入することで、 $\mathbf{N} := \mathbf{r} \times \mathbf{0} = 0$  を得る。よって、この  $\mathbf{N} = 0$  を角運動についての運動方程式 (5.30) に代入して、

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0$$

となる。この式は、外力が働くなければ、角運動量の時間変化がないことを示している。つまり、時間によらずに一定値をとることを意味する。従って、式 (5.31) は角運動量保存則を表現した式であると言える。

#### Point 16: 角運動量保存則

位置ベクトル  $\mathbf{r}$  にある物体に外力が働いていない場合 ( $\mathbf{F} = 0$ )、角運動量  $\mathbf{L}$  は時間経過にかかわらず、一定に保たれる。

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \quad (5.31)$$

角運動量保存則を積分すれば、定ベクトルを得る。実際に確かめてみよう。角運動量保存則は式(5.31)により  $d\mathbf{L}/dt = 0$  である。この角運動量  $\mathbf{L}$  は  $\mathbf{L} := \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  で定義される量であった。従って、角運動量保存則は

$$\frac{d(\mathbf{r} \times \mathbf{p})}{dt} = 0 \quad (5.32)$$

と表現しても同じことである。そして、両辺を時間で積分して、

$$\int \left( \frac{d(\mathbf{r} \times \mathbf{p})}{dt} \right) dt = \mathbf{C} \quad (5.33)$$

ここに、 $\mathbf{C}$  は定ベクトルである。よって、

$$\mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{C} \quad (5.34)$$

を得る。この式は、位置  $\mathbf{r}$  が原点から遠くなるほど、運動量は小さくなることを意味している逆にいえば、原点に近いほど、運動量は大きくなるのである。

例えば、スケーターの回転を考えてみる。この場合の座標原点は体の重心にとる。スケーターが自身の腕を大きく広げたときほどゆっくりと回転しているのは、手の位置  $\mathbf{r}$  が体の重心からより遠くなるためである。すなわち、これは  $\mathbf{r}$  が大きくなることを意味する。しかし、特に外力が働かないでの、(氷との摩擦は無視する) 角運動量保存の法則  $\mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{C}$  が成立している。従って、運動量  $\mathbf{p}$  が小さくなるのである。というか、運動量を小さくすることで、角運動量保存則を満たそうとするのである。

腕を縮めると回転が速くなるのは、この逆で、手の位置  $\mathbf{r}$  が体の重心に近づくからである。従って、角運動量保存則を満たすために運動量  $\mathbf{p}$  を大きくするのである。

## 5.4 力学的エネルギー保存の法則

### 5.4.1 仕事

#### 5.4.1.1 1次元上の仕事

まず簡単に、一方向のみに限定して考える。その一方向を、 $x$  方向とする。さて、物体に外力  $F_x$  を加えて、 $x$  方向に  $\Delta x$  だけ変位させたとしよう。物体の移動は、物体に与えた外力  $F_x$  とその変位の大きさ  $\Delta x$  できる。この移動は、物体が「仕事をされたから、生じたものであると考える。仕事は、記号  $W$  で表され、次式よって

定義される。

$$W := F_x \Delta x.$$

単位は上の定義式から、[Nm]である。仕事の単位を表す記号は[J]が使われる。つまり、[J] = [Nm]である。単位については後で改めて、記述しよう。

「仕事」という概念を導入することで、物体の移動を考えやすくなる。物体が移動したということは、物体に外力が働いて、変位したということであるが、その力の方向と変位の方向を考慮する必要がない場合、

物体は「仕事」 $W$ をされた。

あるいは、視点を変えて、

「仕事」 $W$ をした。

と表現できる<sup>5)</sup>。一方向だけで考えられるならば仕事の定義は上の式で十分である。

#### 5.4.1.2 3次元内の仕事

物体に力を加えたときの物体の変位の方向は、必ずしも、その力の方向であるとは限らない。変位も3次元を考えることができて、一方向だけではない。例えば、重い荷物を引っ張るとき、真横に力を加えるのではなく、少し上向きに引っ張ることが多い。このとき物体は地面から離れず、ただ地面に引きずられるという場合が起こり得る。そのとき、力が物体にした仕事は、その力の全てではなく、地面に対して平行な力の成分しか仕事をしていない。上向きの成分は、物体が上に上がってないので、仕事はしていないのである。このような場合でも仕事を定義できるように導入されるのが、「なす角」である。ここでは、なす角を導入し、 $\theta$ で表すことにしよう。「なす角」と聞いて、すぐにベクトルの内積が頭に浮かぶと思う。そうベクトルの内積を用いて、仕事を定義するのである。

なす角 $\theta$ を導入すると、力を加えた方向と異なる向きに物体が移動したときにも、仕事を定義できるのである。

少しかこまつた形で、なす角を導入しよう。物体が一定の力 $\mathbf{F}$ で、直線距離 $\Delta s$ だけ変位したとき、仕事 $W$ を次式で定義する。

$$W := \mathbf{F} \cdot \Delta s = F \Delta s \cos \theta \quad (5.35)$$

---

<sup>5)</sup> もう少し学習を進めると、「エネルギー」という概念が導入される。この「エネルギー」を説明するために、「仕事」が使われるのであるが、実は後で記述するように、仕事とエネルギーには、表と裏のような関係がある。「エネルギー」は、物理学で最も重要な概念の1つである。

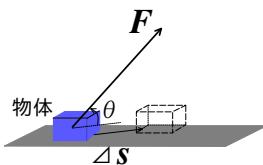
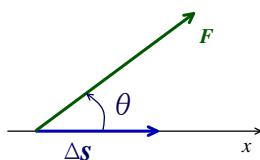


図 5.9 力と仕事 (3 次元)

ここに,  $\theta$  は  $F$  と  $\Delta s$  のなす角 (図 5.10 参照) である.

図 5.10 力  $F$  と変位  $\Delta s$  のなす角  $\theta$ 

#### 5.4.1.3 仕事の単位

仕事の単位は  $[J]$ <sup>6)</sup> が用いられる. 上の仕事の定義からわかるように, 仕事の単位は SI 単位系<sup>7)</sup> で,

$$[J] = [Nm] = [kgm^2/s^2] \quad (5.36)$$

である.

<sup>6)</sup> ジュールと読む. 仕事と熱量の関係を研究した物理学者 Joule の頭文字である.

<sup>7)</sup> SI 単位系: 基本単位として  $[m]$ (メートル),  $[Kg]$ (キログラム),  $[s]$ (セコンド),  $[A]$ (アンペア) を用いる単位系のこと. 現在, SI 単位系は国際標準となっている. → 昔は cgs 単位系 ( $[cm]$ (センチメートル),  $[g]$ (グラム),  $[s]$ ) もよく使われていたみたいである. 古い教科書を見てみると, cgs 単位系で書かれているもの多い.

#### 5.4.1.4 一般的な仕事の定義

次に、物体が位置によって異なる力  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  で、曲線  $\mathbf{r}$  に沿って変位したときの仕事を考える。曲線の微小部分  $d\mathbf{r}$  では力は一定と考えられる。よって、この微小部分  $d\mathbf{r}$  における仕事は  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$  と書ける。すなわち、微小部分での仕事を積分すると、求める仕事  $W$  を得る。従って、位置  $\mathbf{r}_A$  から位置  $\mathbf{r}_B$  変位が曲線をとるときの仕事は

$$W := \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (5.37)$$

と定義できそうである。しかし、これでは不十分である。なぜなら、位置  $\mathbf{r}_A$  から位置  $\mathbf{r}_B$  までの曲線は無限に作れるからである。というのもそのような曲線によって、仕事が異なるからである。これは当たり前のだろう。曲線が変わってしまえば、物体の変位する“道のり”が長くなったり、短くなったりするのだから、当然、仕事もこの曲線によって異なると考えられる。そこで、位置  $\mathbf{r}_A$  から位置  $\mathbf{r}_B$  までのこの曲線を指定する。それを経路といいう。位置  $\mathbf{r}_A$  から位置  $\mathbf{r}_B$  までの経路  $C$  に沿って、変位したときの仕事は、次のように書く。

#### Point 17: 仕事の定義

経路  $C$  に沿って物体を動かす際の仕事  $W$  を、次式で定義する。

$$W = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}. \quad (5.38)$$

特に、この経路が閉曲線である場合、

$$W = \oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (5.39)$$

と書かれることがある。5.4.10 節も参照。

#### # memo No.44: 注意

もう一度書いておくが、仕事を計算するときは、最初に経路を指定することが必要である。今までの話だと、仕事が経路によって異なってしまうのだから、このような定義では十分でない。

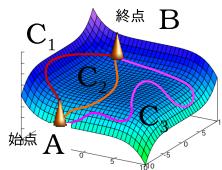


図 5.11 点 A から点 B まで

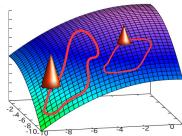


図 5.12 始点と終点が同じ

いと思われるかもしれないが、ここで仕事という概念を定義したのは、この仕事が経路によらないような力を導入したいためである。そのような力の例として、最も簡単な例に、地表付近の物体が受ける力  $mg$  がある。どのように示されるかは以下で考えることである。

## 5.4.2 エネルギーについて

### 5.4.2.1 エネルギー

物体が外部から仕事を受けたとき、その物体は エネルギー を与えられたという。例えば、人間が物体を高さ  $h$  だけ上にあげれば、物体は人間による外力から仕事されたことになり、従ってエネルギーを外力から与えられたということになる。

数式っぽく表現すれば以下のようなるだろう。すなわち、

『外力が物体に仕事をする=物体は外力を受けることにより、エネルギーを与えられる。』

つまり、「エネルギーをもつ」ということは「仕事ができる状態にある」ということと同じである。従って、仕事とエネルギーは同じ単位をもつ。エネルギーと仕事の関係は視点の違いこそあるけれど、同等なものであると言える。「仕事」という時は外

力を主眼と考えるときであり、「エネルギー」という時には物体を主眼として考へていると言える。

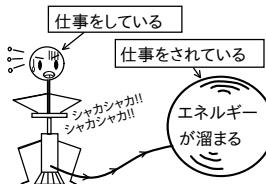


図 5.13 仕事とエネルギー

仕事をする側はエネルギーが減り、仕事をされる側はエネルギーが増えるのである。これを式で表現してみよう。摩擦などの外的要因はない理想状態で考える。

まず、仕事をする側に着目する。 $W$ だけ仕事をした場合、もともと持っていたエネルギーを  $E_{a0}$  とすると<sup>8)</sup>、仕事をした後のエネルギー  $E_{a1}$  は、

$$E_{a1} = E_{a0} - W.$$

一方で、仕事をされた方は  $W$ だけのエネルギーが入ってくる。仕事をされる側のもともと持っていたエネルギーを  $E_p$  とすると、仕事をされた後のエネルギー  $E_{p1}$  は、

$$E_{p1} = E_{p0} + W.$$

つまり、

$$\begin{aligned} E_{a1} + E_{p1} &= (E_{a0} - W) + (E_{p0} + W) \\ &= E_{a0} + E_{p0} \end{aligned} \tag{5.40}$$

と計算され、仕事をする前後では、"する側"と"される側"の全系で考えた場合、全体的なエネルギーの変化はないことがわかる。実験的にも、摩擦などを極力小さくした場合、上式に反した結果はない。こうなると、これを逆手に取り、「物体の運動状態が変化しても、総エネルギーは変化しない」という仮説を立てたくなる。実際、エネルギー保存の法則として、この仮説は物理法則の重要な1つに格上げされる。

<sup>8)</sup>  $E_{a0}$  の  $a$  は「仕事する」側で、能動を意味する英単語 active の頭文字を使った。0 は「仕事する前を示すもの」とし、1 を「仕事した後を示すもの」として使う。「仕事される」側は、受動を意味する英単語 passive の  $p$  を使う ( $E_{p0}$ ,  $E_{p1}$ )。

ただ、エネルギーと言っても、運動やポテンシャルに関するもの、熱に関するもの、電磁気に関するものなどと、様々な形態がある。すごいことに、どんな形態でも、エネルギー保存の法則が成立することが確かめられている（実験事実）。この法則が各エネルギー形態でどう表現されるかは非常に興味のあることである。以下では、特に力学に関するエネルギー（運動エネルギーと位置エネルギー）を中心に、エネルギーという概念について少し詳しく勉強していくことしよう。

#### 5.4.2.2 エネルギーの種類

先にも書いたが、物体のもつエネルギーには、様々な形態がある。例えば、運動エネルギー、ポテンシャル・エネルギー、熱エネルギー、電磁気的エネルギー等がある。これらは全てエネルギーである。

なぜこういうことが言えるかということは、一言で言うと、そう考えると意味のある理論が作れるからということになる。最初は、物体の運動に関する事、熱に関する事、電気に関する事、磁気に関する事、と言ったように、物理分野の別々の側面から現象が観測されていて、そもそもエネルギーという抽象的な概念はなかった。各分野の発展に伴い、それらに共通部分が見出されることも多い。その1つに、エネルギーがある。各分野がエネルギーという概念により有機的につながることがわかったのである。しかし、エネルギーとは人が様々な物理現象の研究から炙りだした抽象概念であり、"エネルギーそのもの"というものはない。エネルギーを見るには、電気や熱などの具体的な現象を見るしかない。

なので、勉強する際も、様々な現れる具体的なエネルギー形態を一つずつ確かめながら、エネルギーという概念の把握に努めたい。抽象的なエネルギーとはこうだ、と定義してから各分野でエネルギーがどう現れるかを議論したいところだが、まず現象を知らないとエネルギーについてのイメージを持ちようがないのだ。面倒だが、具体例を逐一見ていくしかない。

どの形態のエネルギーも等しく重要な概念であり、全てのエネルギー形態について調べる必要があるが、以下ではその最も基本であるとされる、運動エネルギーと位置エネルギーについて考える。

#### 5.4.2.3 「エネルギー」のイメージ

とはいっても、何のイメージもなしにエネルギーについて勉強するのはつらい。ジレンマだ。ここでは、その概念の重要さについて記述することで、学習意欲を少しでも高めたい。

エネルギーの概念は簡単につかめるものではない。少しもどかしいかもしれない

が、とりあえずはエネルギーとはこんなものだと思って、先に進んでしまうことである。その進んだ先で、違った形の色々なエネルギーを見ることになるだろう。これらの色々な形のエネルギーをみて、初めて、エネルギーという感覚がつかめていくことだろう。ここは先人の知識を信じて先に進もう。エネルギーという概念はもうとっくに定着しているものであり、覆ることはできないのだから…

いや、むしろエネルギーそのものを、具体的に想像することはできない。エネルギーを知っているというかもしれないが、それは熱だとか電気だとか、何か物理的な現象となって生じているので、そのものを見てはいない。ではなぜ、エネルギーという概念が生まれたのだろうか。物理学には 保存則 というキーワードがある。保存則とは、例えば、ある現象の前後で変化しない量が存在するとき、この量は保存するといい、この法則のことを保存則という。また 保存量 とは、時間的に増えたり減ったりしない、何か本質的な量のことをいう。昔の人々は、物理法則を考えるにあたって、保存量を見つけ出すことにも力を注いでいた。この保存量の一つがエネルギーである。つまり、エネルギーは保存量として導入されたものである。

実をいうと、エネルギーが保存することを実験で確かめる必要があるのだが、実験には誤差がつきものであるので、厳密にはわからない。それにもかかわらず、エネルギーは保存すると言えるのは、他の実験との矛盾がなく、むしろエネルギーが保存することでいろいろな現象を説明することができるからである。

### 5.4.3 ポテンシャル・エネルギー

#### 5.4.3.1 高さ（位置）によるエネルギーの違い

地表面を位置の基準に取る。 $z$  座標を鉛直上向きを正にとる。質量  $m$  の物体を地表面から、高さ  $h$  のところまで、垂直にではなく、クネクネと曲がった経路  $C$  でもち上げられたときの仕事を考える。図 5.14 を参照。

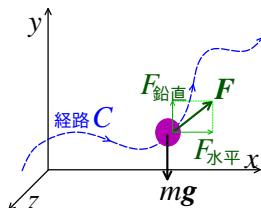


図 5.14 物体の移動のある瞬間

このとき、持ち上げるのに要する力  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  は必ずしも鉛直上向きではない。力に負の符号をつけたのは、鉛直下向きを正したことによる。鉛直下向きの重力に逆らって物体を持ち上げるのだから、負の符号がつくのである。この力を鉛直な成分  $\mathbf{F}(\mathbf{r})_{\perp}$  と地面に水平な成分  $\mathbf{F}(\mathbf{r})_{\parallel}$  に分解する。

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}_{\perp}(\mathbf{r}) + \mathbf{F}_{\parallel}(\mathbf{r}) \quad (5.41)$$

この力を経路に沿って線積分する。

$$\begin{aligned} W &= \int_C (\mathbf{F}_{\perp}(\mathbf{r}) + \mathbf{F}_{\parallel}(\mathbf{r})) \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int \mathbf{F}_{\perp}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int \mathbf{F}_{\parallel}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (5.42)$$

地表付近における、物体の地球から受ける力は、 $m\mathbf{g}$  である。これを上式に代入するのだが、重力加速度の向きは鉛直方向を向いているので、水平方向との内積は 0 になる。（力の鉛直成分と変位の水平移動方向のなす角は  $\frac{\pi}{2}$  である。）従って、第 1 項のみが残って、

$$W = - \int m\mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} \quad (5.43)$$

となる。さらに、外力の鉛直方向と重力加速度とのなす角は  $\pi$  であることを考慮し、 $\mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} = g dr \cos \pi = -g dr$  の関係から、

$$W = -mg \int dr. \quad (5.44)$$

内積計算を行ったので、ベクトル演算が消え、スカラー積となったことに注意。ここで、垂直方向は 0 になっていたために、上の  $dr$  は鉛直成分を考えよう、 $h = \int dr$  であるので、

$$W = -mgh \quad (5.45)$$

を得る<sup>9)</sup>。この計算結果から、いかなる経路でも、物体を高さ  $h$  まで持ち上げるの

<sup>9)</sup> 意味を強調するのであれば、 $W = m(-g)h$  と書いたほうがよい。質量  $m$  は常に正であるし、高さ  $h$  は地表から空へと向かう向きを正としているから、この場合は正の値をとるはずである。重力加速度  $\mathbf{g}$  の向きは逆向きの外力  $\mathbf{F}_{\text{外力}} = -m\mathbf{g}$  を加えることにより、距離（ここでは高さ） $h$  だけ移動させ ( $W = m(-g)h$  の仕事をしたことになる)、物体にポテンシャル・エネルギー  $U = m(-g)h$  を与えたのだ。与えたエネルギーは仕事と等しく、 $W = U$  である（ポテンシャル・エネルギーの定義）。物体に仕事  $W$  を与えたことにより、物体にエネルギー  $U$  が溜められたというイメージだ。見方を変えれば  $W - U = 0$  で、物体に与えた仕事  $W$  と溜まったエネルギー  $U$  の正味の和は 0 であり、物体のエネルギーは勝手に湧きだしたものではなく、外力のみによって与えられたと捉えることもできる。

に必要な仕事は、 $W = -mgh$  であることがわかる。なぜなら、力がどんな方向に向いていようが、地面に垂直な成分と地面に平行な成分に分割することができ、地面に平行な成分は全く仕事には関与せずにいるからである。力の鉛直成分と変位の水平移動方向の内積がいつも 0 であることからこのことがいえる。力が位置に依存するにしても、高さが決まってしまえば、上の計算からどんな場合でも  $-mgh$  の結果を得てしまうことは明らかである。

#### 5.4.3.2 エネルギーの値が負であるのはなぜか

ポテンシャル・エネルギーには負の符号が付いている。これは、負の値をもつエネルギーを意味するのだろうか。答えは否。エネルギーが負の値を取るなんて考えられないのだから<sup>10)</sup>。では、この負の符号はどういうことかというと、単に重力加速度  $g$  の向きの定義によるものである。物体を持ち上げるには、重力加速度に逆らって仕事を加えないとならないが、重力加速度の向きを鉛直下向きを正方向としたので、仕事をする方向が負になってしまうのである。

高さ  $h$  に位置する物体は、仕事  $W = -mgh$  を受けて、地上から上がったのである。重力に逆らって、高さ  $h$  までもち上げたのだから、重力は物体を元も位置（地表）に戻そうとする。従って、この物体は、 $-mgh$  の仕事をし得る状態にある。 $-mgh$  を、地表付近の重力のポテンシャル・エネルギーという。または位置エネルギーともよばれる。地表から高さ  $h$  にある物体は「潜在的に」 $-mgh$  の仕事をし得ると考えるのである<sup>11)</sup>。

#### 5.4.3.3 ポテンシャル・エネルギーの定義

改めて、地表付近における重力のポテンシャル・エネルギー  $U$  を定義する。

$$U := -mgh \quad (5.46)$$

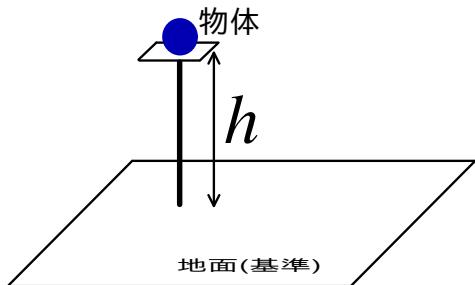
ここに、 $m$  は質量であり、 $g$  は重力加速度であり、 $h$  は高さである。

<sup>10)</sup> ただし、量子力学を学習していくと、量子力学と特殊相対性理論とを統一すると（最初にディラックが成功した）、負の値をとるエネルギーが生じることを発見した。実際に、負のエネルギーを認めると、陽電子の存在が予言され、これは実際に実験的に確かめられている（ディラックはノーベル賞を得ている）。

ここで言う負の符号と、ディラックの負値のエネルギーとは全く概念が異なる。負値のエネルギーについては、相対論的量子力学を学ぶ際に、出会うことになる。

まあ、細かいことは後回しにして、話を先に進めよう。

<sup>11)</sup> 「負の仕事をし得る」という表現は何か不可解であるならば、「正の仕事をされる」と表現しても同じことである。これは単に言葉による表現の仕方の違いであって、その内容は全く同等なものであ

図 5.15 高さ  $h$  でのポテンシャル・エネルギー

#### 5.4.3.4 一般的なポテンシャルエネルギー

実は今までではポテンシャル・エネルギーとして地表付近の重力によるものを想定してきたが、ポテンシャル・エネルギーとはこれだけではなく、電気的なポテンシャル・エネルギーというのも考えられる。これを **電位** というが、詳細は電磁気学の部分で確認することとする。とりあえず、ここでは、そのような概念もあるのだと思ってくれればよい。ここで言いたかったことは、ポテンシャルが位置エネルギーだろうが電位だろうが、エネルギー保存の法則を満たすということである。エネルギー保存の法則をもっと一般的に捉えられるということを理解してほしい。

#### 5.4.4 運動エネルギー

**コメント** 運動エネルギーをいきなり定義してもわけがわからないと思うので、とりあえず感覚的に理解できるような形で説明する。

##### 5.4.4.1 物体を高いところから落とすと…

前の項目において、地表付近のポテンシャル・エネルギーは  $-mgh$  であることが分かった。ここで、 $m$  は質量を表し、 $h$  は高さを表す。今、高さ  $h$  に存在する物体

が静に落下し(初速度は0), 高さ  $h - \Delta h (< h)$  に変化したとする. このときの位置エネルギーは  $-mg(h - \Delta h)$  である. 高さが  $h$  から  $h - \Delta h$  に変化したことで, 位置エネルギーがどれだけ変化したかを考えれば,  $-mg\Delta h$  である.  $-mg\Delta h$  のエネルギーはどこにいったのだろうか. 実は, 運動エネルギーに変わったのである. つまり速度をもつたのである. 図5.16参照.

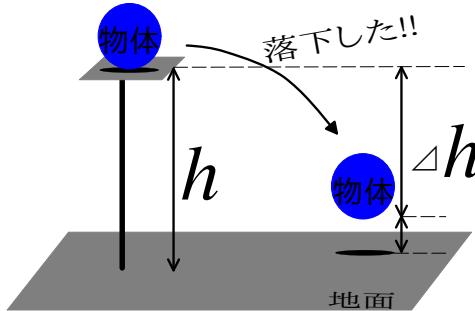


図5.16 運動エネルギーの説明

#### 5.4.4.2 位置エネルギーから運動エネルギーへ

以下では, この運動エネルギーについて考える. 位置が変位して速度が生まれたのだから, 位置と速度の関係式が使える. 位置と速度の関係式は,

$$2a(r - r_0) = v^2 - v_0^2 \quad (5.47)$$

のように表現される. 但し, ここでは鉛直方向を考えているので, 大きさだけを考えている. この式に, 今の条件(初速度  $v_0 = 0$ , 初期位置  $r_0 = h$ , 重力加速度  $a = g$ , 現在の位置  $r = h - \Delta h$ )を代入して,

$$2g \cdot (-\Delta h) = v^2 \quad (5.48)$$

となる. 従って,

$$\Delta h = -\frac{v^2}{2g} \quad (5.49)$$

を得る。これを位置エネルギーの変化量  $-mg\Delta h$  に代入すると、

$$-mg\Delta h = -mg \left( -\frac{v^2}{2g} \right) = \frac{1}{2}mv^2$$

すなわち、

$$-mg\Delta h = \frac{1}{2}mv^2 \quad (5.50)$$

を得る。これはつまり、位置エネルギーの変化が鉛直下向きの速度をもつ運動エネルギーに変換されたことを意味する。この量はポテンシャル・エネルギーと等価な量である。

#### 5.4.4.3 運動エネルギーの定義

上の説明から、物体の持つポテンシャル・エネルギーが、落下等の現象によって、速度に関するエネルギーに変換されることがわかった。落下によって、ポテンシャル・エネルギーが失われ、速度に関するエネルギーに変わったので、この新しいエネルギーに名前を付けないとならない。

そこで、運動エネルギー  $T$  を定義する。

$$T := \frac{1}{2}mv^2 \quad (5.51)$$

ここで、このように定義した運動エネルギーはエネルギーの単位 [J] をもつかどうかを確かめておく。質量の単位は [kg]、速さの単位は [m/s] であるから、

$$\begin{aligned} [\text{kg} \cdot (\text{m}/\text{s})^2] &= [\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2] \\ &= [(\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2) \cdot \text{m}] \\ &= [\text{N} \cdot \text{m}] = [\text{J}] \end{aligned} \quad (5.52)$$

となって、確かにエネルギーの単位をもつことがわかる。「エネルギーを得る」ということは仕事をされるということであり、エネルギーの単位は仕事の単位と等しい。つまり、エネルギーの単位も [J] である。確かに運動エネルギーの単位は [J] であることが確かめられた。

#### 5.4.4.4 運動量と運動エネルギーの関係式

当たり前ではあるが、運動エネルギーについては、ここで定義したものしか存在しない。運動エネルギーが運動量を用いて  $T = p^2/2m$  と書かれることもあるだろう

が、これは、 $p = mv$  の関係式を思い出せば、 $T = mv^2/2$  全く同じことを言つていいとわかる（代入してみればよい）。

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{m}{2m}mv^2 = \frac{(mv)^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}. \quad (5.53)$$

運動エネルギーは、運動量と速度のどちらでも表現可能だが、その違いは単に表記の違いだけであって、2種類の運動エネルギー存在するわけではない。

## 5.4.5 力学的エネルギー保存の法則

### 5.4.5.1 高校生向けの説明

ポテンシャル・エネルギー  $U$  と運動エネルギー  $T$  の和を 力学的エネルギー という。力学的エネルギーを  $E$  で表現する。

#### Point 18: 力学的エネルギーの定義

力学的エネルギー  $E$  を、次式で定義する。

$$E := T + U \quad (5.54)$$

このように定義された力学的エネルギーをもつ物体は、外力が働くない限り、保存する。「保存する」というのは「ある一定の値を保つ」ということである。このことを 力学的エネルギー保存の法則 という。力学的エネルギー保存の法則を表す式を導出する。そのために、もう一度、式(34.38)を使う。簡単のために、運動を一方向にかぎって考える。最初の状態（速度  $v_1$ 、位置  $h_1$ ）から、後の状態（速度  $v_2$ 、位置  $h_2$ ）に変化しとする。すると、

$$2g(h_2 - h_1) = v_2^2 - v_1^2 \quad (5.55)$$

という式が立てられる。この式の両辺に、質量  $m$  を掛けて整理すると、

$$\begin{aligned} 2mg(h_2 - h_1) &= mv_2^2 - mv_1^2 \\ \Leftrightarrow 2mgh_2 - 2mgh_1 &= mv_2^2 - mv_1^2 \\ \Leftrightarrow mgh_2 - mgh_1 &= \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 - mgh_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 - mgh_2 \quad (5.56)$$

この式は、始めの状態の力学的エネルギーの和と後の状態の力学的エネルギーの和が等しいことを意味している。すなわち、力学的エネルギーは、一定値を取り、力学的エネルギー保存の法則が成立していることを確認できた。

#### 5.4.5.2 微分の知識を使う方法

##### ¶ 理論的な導き方とは

もっと高度<sup>12)</sup>に導出してみよう。力学的エネルギー保存の法則は、ニュートンの運動方程式から数学的に導ける。更に、この導出の段階で、ポテンシャル・エネルギーと運動エネルギーが現れてくる<sup>13)</sup>。

##### ¶ 方針

仕事とエネルギーの関係式を導くのが目標。先に結論を軽てしまうと、物体に一定期間の仕事を与えると、その物体にはエネルギーが蓄積するということである。なので、式変形方針としては、仕事の定義である、力と移動変位の積( $\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$ )を時間 $t$ で積分する。ニュートンの運動方程式をもとにする。

##### ¶ 導出

ニュートンの運動方程式  $m_i(d^2\mathbf{r}/dt^2) = \mathbf{F}$  の両辺に、 $d\mathbf{r}$  を掛ける<sup>14)</sup>。

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \cdot d\mathbf{r} \quad (5.57)$$

左辺は仕事の定義そのものである。左辺がこのままだと意味不明なので、計算を進めてみよう<sup>15)</sup>。

次のように、右辺を移行しておく<sup>16)</sup>。

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

<sup>12)</sup> 「高度」という単語に深い意味はない。ただ単に、格好良くとか、そういう感じのニュアンスで使っただけ。

<sup>13)</sup> 力学的エネルギー保存の法則が導かられるのだから、当然として、その過程で、ポテンシャル・エネルギーと運動エネルギーが現れてこないとおかしい。

<sup>14)</sup> 要するに、「仕事の形を作っていく」ということである。

<sup>15)</sup> 左辺が仕事だから、右辺も仕事と言っても間違いはないのだが、計算を進めると面白い結果が得られる。統合で結ばれているので、仕事と同じ次元の物理量が導かれる。先にも触れている通り、運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーがみえてくる。

<sup>16)</sup> そうすると、エネルギー保存則に近い形になるから。

$$\Leftrightarrow m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \cdot d\mathbf{r} - \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (5.58)$$

まず、第1項について以下のような計算をする。

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \cdot d\mathbf{r} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \frac{d}{dt} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt$$

計算が簡単になるように速度に置き換えて、

$$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$$

とすれば、

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \cdot d\mathbf{r} = \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} \right) dt.$$

ここで、

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}^2}{dt} &= \mathbf{v} \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}}{dt} \mathbf{v} = 2\mathbf{v} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \\ \Leftrightarrow \mathbf{v} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{v}^2}{dt} \\ \Leftrightarrow \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \cdot d\mathbf{r} &= \left( \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{v}^2}{dt} \right) dt \\ \therefore \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \cdot d\mathbf{r} &= d \left( \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right). \end{aligned}$$

以上より、速度の表記を元に戻せば、

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \cdot d\mathbf{r} = d \left( \frac{1}{2} \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 \right)$$

と計算でき、これを用いると、

$$\begin{aligned} m d \left( \frac{1}{2} \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 \right) - \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= 0 \\ \Leftrightarrow m \int d \left( \frac{1}{2} \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 \right) - \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= C \\ \Leftrightarrow \frac{m}{2} \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 - \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= C \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} m v^2 - \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= C. \end{aligned} \quad (5.59)$$

見慣れた形をした項が現れた。

### ¶ 解釈

式 (5.57) の右辺は仕事であった。そして、仕事の時間積分を計算した。そしたら、左辺には速度に関する項  $(1/2)mv^2$  と、位置に関する項  $-\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  があらわれた。これらには特別な意味があり、両方とも、エネルギーの一種である。以下で定義を与えよう。

### ¶ ポテンシャル・エネルギーの定義

式 (5.59) の左辺第1項  $mv^2/2$  は運動エネルギーを表している。式 (5.59) の左辺第2項  $-\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  はポテンシャル・エネルギーを表している。この式で表れるポテンシャル・エネルギーは、先の項目で考えたポテンシャル・エネルギーを一般的に表したものである。先の例では実際に、 $-\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  から  $U = mgh$  を導いていた。そこでまた改めて、この式 (5.59) の左辺第2項  $-\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  によってポテンシャル・エネルギー  $U$  を定義する。

#### Point 19: ポテンシャル・エネルギーの定義

ポテンシャルエネルギー  $U$  を次式で定義する。

$$U := - \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (5.60)$$

これをなぜポテンシャル・エネルギーというかは、この式がエネルギーの単位をもち、かつ、位置だけによってその値が決まるため考えればよいと思う。

このように、ベクトル<sup>17)</sup>に対して実数値に写す関数のことをスカラー関数、または、スカラー場という。

ポテンシャル・エネルギーには地表付近の重力による位置エネルギー  $mgh$  のほかに、もっと一般的な万有引力による位置エネルギーとか、電気的なポテンシャル・エネルギーがある。ポテンシャル・エネルギーといった時はこれらを総称している時もあり、注意が必要である。

<sup>17)</sup> ここでは位置ベクトル  $\mathbf{r}$ 、位置ベクトルと同時に時間  $t$  を与える場合もある ( $U(\mathbf{r}, t)$ )。

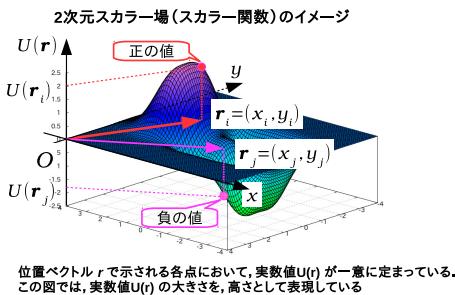


図 5.17 二次元のスカラー関数のイメージ

#### ¶ 運動エネルギーの定義

運動エネルギー  $T$  についても、改めて定義する。

#### Point 20: 運動エネルギーの定義

運動エネルギー  $T$  を、次式で定義する。

$$T := \frac{1}{2}mv^2 \quad (5.61)$$

なぜ運動エネルギーというかについては、この式がエネルギーの単位をもち、かつ、速度だけによってその値が決まるからと考えればよいと思う。

#### ¶ エネルギー関数 $E$ の独立変数

運動エネルギーは速度の関数として捉えられる<sup>18)</sup>。これを、 $T = T(\dot{r})$  と表す。また同様に、ポテンシャル・エネルギーは位置座標の関数として捉えることができ、これを  $U = U(r)$  と書く。従って、力学エネルギーは速度と位置の関数である考え

<sup>18)</sup> 上で運動量表示もできることを示したが、ここでは速度表示の運動エネルギーを考える。

られる。なぜなら、

$$E(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}) = T(\dot{\mathbf{r}}) + U(\mathbf{r}) \quad (5.62)$$

と書けるからである。

#### ¶ エネルギー保存則

さて、力学的エネルギー保存の法則を式(5.59)のように書いてもよいが、「保存則」というからには、時間に依存していないということを式で表現しておきたい。そこで、上式の力学的エネルギー  $E$  を時間微分して、その結果が 0 であるというように表現する形に書き換えておく。

#### Point 21: 力学的エネルギー保存の法則

力学的エネルギー保存の法則は、次式によって表される。

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad (5.63)$$

このように考えられる理由は、物体の運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーの和  $E$  が時間変化しないという前提があるからである。物体の運動エネルギーと位置エネルギーが時間変化するとき、すなわち、 $T = T(\dot{\mathbf{r}}, t)$ ,  $U = U(\mathbf{r}, t)$  であるときは、一般には保存則は成り立たない。物体のエネルギーが時間変化するということは、物体は外から仕事を受けてエネルギーをもらう（とられる）からである。仕事とは外力が引き起こすものであり、つまり、「物体に外力が働くときには、力学的エネルギー保存の法則は成り立たない」といえる。式で書けば以下の通り。

この場合の力学的エネルギーは時間  $t$  を変数に含み、

$$E(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t) = T(\dot{\mathbf{r}}, t) + U(\mathbf{r}, t) \quad (5.64)$$

と書かれる。時間  $t$  で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ T(\dot{\mathbf{r}}, t) + U(\mathbf{r}, t) \right\} \\ &= \frac{\partial T(\dot{\mathbf{r}}, t)}{\partial t} + \frac{\partial U(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \end{aligned}$$

この式の最右辺は 0 ではなく、時間  $t$  を変数に含む関数である。これを簡単に  $\alpha(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t)$  と書くことにしよう。すると式は、

$$\therefore \frac{\partial E(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t)}{\partial t} = \alpha(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t) \quad (5.65)$$

というように、エネルギー保存則の時間微分は、時間に依存することがはっきりわかる。

この関数  $\alpha(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t)$  の具体的な形は、運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーがどのように時間に依存しているかによる。この関数  $\alpha(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t)$  が物体のエネルギーの変化量である。

従って外力が物体に働くとき、力学的エネルギーは保存しないということになる。しかし、もっと広く考えて、外力を含んだ系を考えるならば、エネルギーは保存している。これを エネルギー保存の法則 という。この法則は経験的事実によって、与えられる法則であり、この法則が破られた現象はないとされる。(この場合、力学的エネルギーが保存するわけではない。外力によって生じた熱力学的エネルギーや電磁気的エネルギーのことをいう。)

## ¶ まとめ

説明が長くなってしまったが、以上によって、ニュートンの運動方程式から、力学的エネルギー保存の法則を導いたことになる。整理しよう。まず、ニュートンの運動方程式を認めた ( $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ )。これは力学の出発点となる方程式である。その次に、仕事という概念を導入し ( $W = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{s}$ )、そこから力学的エネルギーという概念を、運動エネルギーと位置エネルギーの 2 種類のエネルギーの和であると定義した ( $E = T + U$ )。そして、力学的エネルギーは時間によらず一定値を保つことを発見した。

従って、ニュートンの運動方程式から、力学的エネルギー保存の法則を見出したことになる。

### # memo No.45: 注意

但し、この  $\mathbf{F}$  は 保存力 であるとしていることを忘れてはならない。保存力については後の 5.4.7 で確認することだが、ここでは、「力のする仕事が経路によらず、始端と終点によってだけ決定されるならば、この力は保存力である」と考えてもらいたい。

### 5.4.6 万有引力によるポテンシャル・エネルギー

ポテンシャル・エネルギーの定義を得たので、それを具体的に計算してみる。その例として、万有引力によるポテンシャル・エネルギーを考える。ただ単に、ポテンシャル・エネルギーの定義式(5.60)に、万有引力を代入すればよいだけである。では、早速計算する。

万有引力は、式(4.5)によって

$$\mathbf{F}_{AB} = -G \frac{m_A m_B}{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B|^2} \frac{\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B}{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B|} \quad (5.66)$$

と書かれた。ここでは、質量  $m_A$  によるポテンシャル・エネルギーを考える。式変形が煩雑にならないように、

$$\mathbf{r} := \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$$

とおく。

$$\mathbf{F}_{AB} = -G \frac{m_A m_B}{|\mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \quad (5.67)$$

これを、ポテンシャル・エネルギーの定義式(5.60)に代入すると、

$$\begin{aligned} U &= - \int \mathbf{F}_{AB} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int G \frac{m_A m_B}{|\mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \cdot d\mathbf{r} \\ &= G m_A m_B \int \frac{1}{|\mathbf{r}|^2} d\mathbf{r} \\ \therefore U &= -G m_A m_B \frac{1}{|\mathbf{r}|} \end{aligned} \quad (5.68)$$

と計算される。 $\mathbf{r} := \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$  を思い出せば、次のようになる。

#### Point 22: 重力ポテンシャル

重力ポテンシャルは次式で定義される。

$$U = -G \frac{m_A m_B}{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B|} \quad (5.69)$$

この式 (5.69) が質量  $m_A$  がその周りに生じさせるポテンシャル・エネルギーである。このようなポテンシャルを **重力ポテンシャル** いう。

### 5.4.7 保存力

今まででは、力の存在を仮定して、エネルギーを考えていた。しかし、あくまで仮定しているだけであって、決してはつきりとした概念ではない。ならば逆に、エネルギーを仮定して力を導くことを考えてもよいだろう。力とエネルギーのどちらを基礎とするかは、理論がスマートになる方をとるべきだ。エネルギーを仮定して、力を導出する方が現代的な考え方である。ポテンシャル・エネルギーの定義式を力  $\mathbf{F}$  について解く。 $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$  とする。また、 $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$  とする。

$$\begin{aligned} U &= - \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= - \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \end{aligned} \quad (5.70)$$

ここで、 $\partial U / \partial x$  を計算すると、

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -F_x \quad (5.71)$$

となる。ここで記号  $\partial U / \partial x$  の  $\partial / \partial x$  は、( $U$  を) “ $x$  について微分する” ということである。その際、その他の変数 ( $y, z$ ) は定数とみなすと約束する。 $x$  方向の関数の変化度を知りたいときに、用いる概念である。このような微分の仕方を **偏微分** という。

$y, z$  方向についても同様に考えて、

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -F_y \quad (5.72)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -F_z \quad (5.73)$$

以上より、

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right) &= (-F_x, -F_y, -F_z) \\ \therefore \quad \mathbf{F} &= - \left( \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (5.74)$$

を得る。ここで、次の微分演算子を定義する。

$$\text{grad} := \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (5.75)$$

(この記号の図形的なイメージは次項目で説明する。ここではとりあえず、記号として受けいれてほしい。)

この微分演算子は、 $U$  の  $x, y, z$  の 3 方向の傾きを求める演算子である。つまり、空間の 勾配<sup>19)</sup> を求める演算子と言える。grad を「グラディエント」と読む。式 (5.74) を

$$\mathbf{F} = - \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) U \quad (5.76)$$

と変形する。そして、grad を用いて、

$$\mathbf{F} = -\text{grad } U \quad (5.77)$$

と書ける。この式より、ポテンシャル・エネルギーを仮定して力を導出するという意味として捉え直せる。

なので、ここで思い切って、保存力が生じている理由は、その周囲にポテンシャルエネルギーがあるからである、と考えなおそう。保存力がポテンシャルエネルギーを周囲に作るというイメージよりも、そもそも最初はポテンシャルエネルギーがそこにあり、我々は、ポテンシャルエネルギーそのものを見ることはできないが、その一端を保存力として観測していると考える方が、自然である。力を仮定してポテンシャルエネルギーを導く場合には、試験用の質点を用意して至るところに置き、ポテンシャルエネルギーの分布を得るとなる<sup>20)</sup>。しかし、ポテンシャルエネルギーを仮定すれば、ポテンシャルエネルギーの勾配 (grad) を取るだけで、保存力がえられるのだ。

こう考えなおすと、保存力  $\mathbf{F}$  は、以下のように、ポテンシャルエネルギー  $U(\mathbf{r})$  の勾配で与えられる。

$$\mathbf{F} = -\text{grad } U(\mathbf{r}) = -\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}.$$

<sup>19)</sup> 「勾配」とは、面の傾斜の度合いのことをいう。例えば、道路の坂が急であるとき、「この坂は急勾配である」といった使い方がされる。

<sup>20)</sup> 保存力を線積分するイメージ。

両辺を始点  $r_a$  から終点  $r_b$  で積分すると,

$$\begin{aligned}
 \int_{r_a}^{r_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{r_a}^{r_b} \left( -\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial r} \right) d\mathbf{r} \\
 &= - \int_{r_a}^{r_b} dU(r) \\
 &= -(U(r_b) - U(r_a)) \\
 &= -U(r_b) - (-U(r_a)) \\
 &= (\text{一定})
 \end{aligned} \tag{5.78}$$

最初の位置  $r_a$  でのポテンシャルエネルギー  $-U(r_a)$  と移動後の位置  $r_b$  のポテンシャルエネルギー  $-U(r_b)$  の差のみで表せるという結果を得た。つまり、経路に依存していない。どのような経路をとっても、始点と終点を指定するだけで、線積分が計算できるのだ、この線積分は位置と力の内積に関するものであり、すなわち、始点から終点までになした仕事にほかならない、とどのつまり、の式は、物体を  $r_a$  から  $r_b$  まで移動させるのに必要なエネルギーを表しているということだ。

ただこのままでは、位置  $r$  のポテンシャルエネルギーを  $-U(r)$  と書いた場合、終点は  $-U(r)$  だが始点が定まっていないため、値が定まらない。そこで、基準点を設けて、それに対するポテンシャルエネルギーを定義しよう。

一般に、 $A - B$  という式を見た場合、 $A$  は  $B$  を基準とした値であると解釈できる。例えば、 $A = 5$ ,  $B = 3$  とした時、 $A - B = 2$  であり、 $A$  は絶対値 5 だけど  $B$  から見ればその差は 2 である。<sup>21)</sup> 同様に、 $-U(r_b) - (-U(r_a))$  は  $-U(r_a)$  を基準にしたときの、 $-U(r_b)$  の値と解釈できる。そこで、 $-U(r_a) = 0$  となるような点<sup>22)</sup> を基準点にとると、定義する。こうすることで、始点を暗黙裏に仮定することにより、毎回基準点を示すことなく、ポテンシャルエネルギーを考えることができる。ただし、基準点を示さないのが当たり前になってくると、ポテンシャルエネルギーがそもそも基準点をとるということを忘れがちであるので、この点は注意が必要だ<sup>23)</sup>。こ

<sup>21)</sup> このような見方を、 $B$  を基準にしてみると表現する

<sup>22)</sup> このような点が現実にあるわけではない。人間が勝手に基準となる点を設定しなければいけない。 $-U(r_a) = 0$  ができる点を適宜用意する必要がある。多くの場合は、無限遠点を基準点に取ることが多い。無限遠点とは、これまた曖昧な概念だが、ここから遠ざかって見えなくなつた先の更に先というイメージで十分だ。実際、無限遠点はここだと示すことはできず、想像するより他にない。問題によっては基準点を別の点にとったほうが計算しやすい場合がある。その場合は、基準点を最も計算しやすい適切な点に再設定すれば良い。どうせ基準点は計算結果に影響しないのだから（基準点を決めないと不定積分になり不定性が残るが、基準点があれば定積分となり不定性はなくなる）。

<sup>23)</sup> 簡略化した記述は効率的だが、記述しないがゆえに見えなくなつてしまうというジレンマがある。

のように、より簡略化した記述では、ポテンシャルエネルギーと保存力の関係式は以下のようになる<sup>24)</sup>。

$$\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -U(\mathbf{r})$$

一般には、全ての力がポテンシャル・エネルギーから導出されるわけではない。つまり、非保存力であるものもある。この場合には、非保存力  $\bar{\mathbf{F}}$  のする仕事を  $W$  として、

$$\bar{\mathbf{F}} = -\frac{\partial W}{\partial \mathbf{r}} \quad (5.79)$$

と書ける。もちろん、保存力と非保存力の両方を含む場合は、力の重ね合わせの原理から、

$$\mathbf{F} + \bar{\mathbf{F}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial W}{\partial \mathbf{r}} \quad (5.80)$$

である。

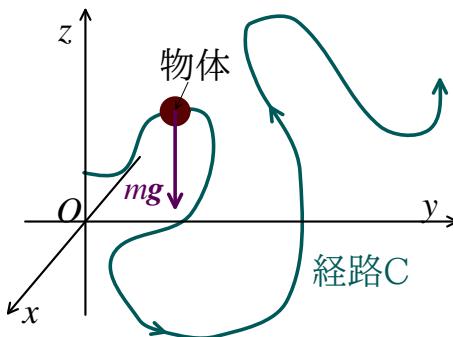


図 5.18 重力から受ける仕事は鉛直方向のみ

慣れれば（当たり前になれば）当然のこととして捉えられるが、なかなか難しい。

<sup>24)</sup> まず、式 (5.78) で、始点は  $-U(r_a) = 0$  となる基準点を選ぶのであった。また、終点  $-U(r_b)$  の添字 b も明示しなくても、常に終点を示すものであると読み取ることが可能なので、記述省略してしまおう。

### 5.4.8 勾配

演算子  $\text{grad}$  は、以下のように定義される量であることを、前項目で確認した。

$$\text{grad} := \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (5.81)$$

この定義式をイメージすることが、この項目の目標である。

唐突ではあるが、まず、連続でなめらかな 1 変数関数  $f_1 = f(x)$  のグラフの接線の傾き  $f'_1$  考える。 $f'_1$  は  $f_1$  の  $x$  に関する微分であり、

$$f'_1 = \frac{d}{dx} f_1 \quad (5.82)$$

のように与えられる。(図 5.4.8 参照) これが 1 変数関数の場合である。

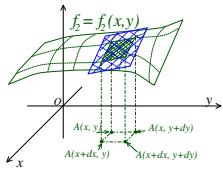


図 5.19 傾き

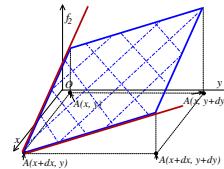
この考えを、2 変数関数  $f_2 = f_2(x, y)$  の場合について拡張してみる。関数  $f_2 = f_2(x, y)$  は図 5.4.8 のように描くことができる。もちろん、関数  $f_2 = f_2(x, y)$  は連続でなめらかであることを仮定している。関数  $f_2 = f_2(x, y)$  を、点  $(x, y)$  を代入したときの高さを表していると考えれば、このような点を全て集めると、それは曲面をなしていると言える<sup>25)</sup>。1 変数関数における曲線が、2 変数関数になると、曲面になるのである。従って、2 変数の場合には、直線の接線の傾きを考えるのではなく、面の勾配を考えなければならない<sup>26)</sup>。そこで、図 5.4.8 の青い線で描いたような、接面の勾配を考えるのである。この接面の勾配を考える。図 5.4.8 では説明しにくいので、改めて、図 5.4.8 に必要な部分だけ書き改めることにする。(若干異なっているが許してほしい。)

<sup>25)</sup> つまり、 $f(x, y)$  は幾何学的には、曲面を表す関数としてイメージされる。

<sup>26)</sup> 「勾配」とは面の傾き具合を表す語彙。1 次元の場合は「傾き」という表現を使ったが、2 次元の場合には「勾配」と言い表す。2 次元以上の場合でも「勾配」という。



(A) 2変数関数の傾き



(B) 接面の勾配

図 5.20 面の傾き

図の緑の太線で示した曲面部分に接する平面を考える。図の  $A$  は  $x-y$  平面上の点を表している。そのような平面のことを **接面** ということにする。この接面の勾配を示すには、 $x$  方向の接面の傾きと、 $y$  方向の接面の傾きを考えればよい。従って、それぞれの方向に偏微分すればよい。前項目では偏微分の定義には触れなかったので、ここでは簡単に偏微分の定義式を示しておこうと思う。

#### 5.4.9 保存力と $\text{grad}$ の図的イメージ

偏微分は、グニヤグニヤ曲がっている面のある一点における傾きを計算する場合に役に立つ。面の傾きを考えるには、2つの方向の傾きを考える必要がある。しかし、2方向の傾きを同時に考えることは難しい。そのため、一方向ずつ傾きを計算する。一方向の傾きを計算するには、曲線の傾きと同じように考えられる。そのとき、残りのもう1方向は定数として扱う。

例えば、接面の  $x$  方向の傾きを考える場合、 $y$  座標を一時的に固定して定数として扱い、 $x$  方向のみに着目し微分する。偏微分の記号は通常の微分と区別するために、 $\partial$  という文字が使われる。具体的には、以下の通り。

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}. \quad (5.83)$$

接面の  $x$  方向の傾きも同様に考えて、

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) := \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}. \quad (5.84)$$

これらを用いて、曲面  $f$  上の点  $(x, y)$  の接面は

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} f(x, y), \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right)$$

と表現できる。ただ、 $f$  の独立変数をいちいち書いていると煩雑なので、省略する場合が多い<sup>27)</sup>。

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} f, \frac{\partial}{\partial y} f \right)$$

もっと省略して、以下のように書かれることもある ( $f$  をカッコの外に出した)。

$$\left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) f$$

こうすると、式に意味を与えやすい<sup>28)</sup>。こうすると、表現上、 $f$  に対して操作  $\left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$  を施すことで、接面が現れると読むことができる。物理学では、

$$\text{grad } := \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

として、単に

$$\text{grad } f$$

と書かれる。ポテンシャルエネルギーを考える場合には、 $f = -U(\mathbf{r})$  とすればいい。

ポテンシャルエネルギーの関数  $U(\mathbf{r})$  が与えられている時、保存力  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  は以下のように計算できる。

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}) &= -\text{grad } U(\mathbf{r}) \\ &= -\left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) U(\mathbf{r}) \\ &= \left( -\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial x}, -\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial y}, -\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

上式で表されるポテンシャルエネルギーと保存力のイメージを、以下に表現しておこう。

この図で注意してみて欲しいのは、ポテンシャルエネルギーを 2 次元で表していることである。実際の空間は 3 次元だが、これだと図に表すことができない<sup>29)</sup>。

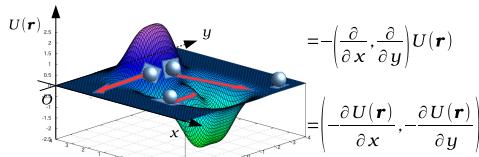
<sup>27)</sup> 偏微分の対象となる方向は分母でわかるし、他の変数は定数扱いなので無理して明示する必要もない。問題になるとしたら、独立変数の個数がわからなくなってしまうことだが、前もって明記しておけば覚えていられるだろう。

<sup>28)</sup> ただし、注意したいのは、 $\left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$  と  $f$  の積と解釈してはいけない、ということである。

<sup>29)</sup> 関数の取る値をグラフで示すための次元が 1 つ必要になるからである。ここでは、本来の 3 次元の内から 1 次元減らし、代わりに関数のとる値を山として表現している。

## 2次元スカラー場（スカラー関数）と保存力

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad} U(\mathbf{r})$$



★この図自体は、二次元のスカラー関数(※1)を  
3次元で立体的に表している。高さ方向はスカラー関数  
の大きさを表しているだけで実際に山があるわけではない。  
→ 実際の力は、 $x$ - $y$ 平面内のベクトルで表される  
→ 向きと大きさは  $\operatorname{grad}$  を取ることでわかる  
(※1)ここでは、ポテンシャルエネルギーを表す関数  $U$

図 5.21 ポテンシャルエネルギーと保存力

# memo No.46:  $\partial/\partial \mathbf{r}$  という表現について

上で使ってしまったが、便利でよく使われてしまう表現に、

$$\frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}$$

というものがある。

ベクトル  $\mathbf{r}$  で割り算しているように見えるが、そうではない<sup>30)</sup>。本当は、

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} &= \left( \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial x}, \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial y}, \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial z} \right) \\ &= \left( \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}, \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \right)\end{aligned}$$

という意味で使われるものである。紛らわしいが、よく見かける表現なので注意しておきたい。こういう表現は、疑問や誤解を招くので、避けたほうが良い<sup>31)</sup>。

## 5.4.10 保存力と周回積分

ポテンシャルエネルギー  $U(\mathbf{r})$  のみの場合などのように、外力が働くない時、始点 A と終点 B の 2 つの位置ベクトルを定めると、A から B までの経路 C は無数に存在

<sup>30)</sup> "ベクトル除算" なんてものはない。

<sup>31)</sup> 勾配演算子  $\operatorname{grad}$  や後で紹介する数学記号  $\nabla$  を使って表現すべき。

するが、A から B まで物体を移動させる仕事はその経路に依存せず、一定値をとる。

$$\oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{r}_b) - U(\mathbf{r}_a).$$

このような性質を持つ関数で表される力のことを、保存力 と言うことはすでに記述した。特に注目すべきことは、B=A とした時（始点と終点を同じ点にした場合）、

$$\oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{r}_a) - U(\mathbf{r}_a) = 0$$

となることである。

ポテンシャルエネルギー値  $U(\mathbf{r})$  がベクトル  $\mathbf{r}$  に対して一意に定まる場合、 $U$  により生じる力は保存力となる。

各点でスカラー値が定義されている場（スカラー場）では、この曲面上にどんな閉曲線をとっても、周回積分は常に0。

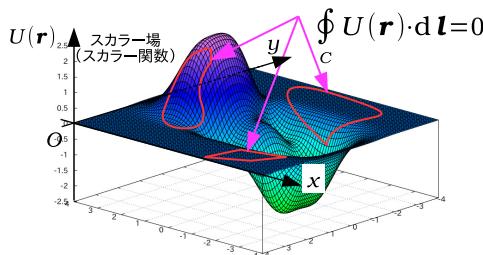


図 5.22 保存力の性質

しかし、例えば下図のように、ポテンシャルエネルギー値  $U(\mathbf{r})$  がベクトル  $\mathbf{r}$  に対して一意に定まらない場合、 $U$  により生じる力は保存力ではない。

## 5.5 エネルギーと運動量

エネルギーと運動量は似たような概念だ。この 2 つの間には大切な関係がある。特に、量子力学を学習するとこの関係が顕著に現れてくる。運動量  $\mathbf{p}$  をもつ物体に関

保存力でない例

$$\int_{C_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = U(\mathbf{r}_B) - U(\mathbf{r}_A) \neq 0$$

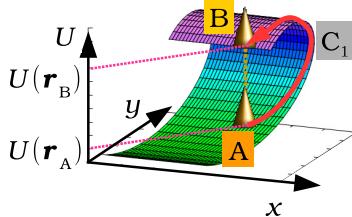


図 5.23 保存力でない場合

与する力を保存力とし,  $\mathbf{F}$  とする.<sup>32)</sup> 運動量表示の運動方程式は

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}.$$

であった.  $t$  は時間である. ところで, 保存力である  $\mathbf{F}$  はポテンシャルエネルギー  $U(\mathbf{r})$  を導入すると,

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}.$$

ここで,  $E(\mathbf{r}) = -U(\mathbf{r})$  と置いてしまおう.

$$\mathbf{F} = \frac{\partial E}{\partial \mathbf{r}}.$$

要するに,  $\partial U / \partial \mathbf{r}$  と  $\partial E / \partial \mathbf{r}$  は共に力の次元を持っている,  $\mathbf{F}$  を消去して, それぞれの次元を考えると,

$$\left[ \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right] = \left[ \frac{\partial E}{\partial \mathbf{r}} \right]$$

微分記号と偏微分記号は不要.

$$\frac{[\mathbf{p}]}{[t]} = \frac{[E]}{[\mathbf{r}]}$$

<sup>32)</sup> ここでは保存則について考えているのであった. 保存力以外の外力が働く場合は, 運動量保存則とエネルギー保存則は成立しないの.

これを以下のように書きなおす.

$$[\mathbf{p}] \cdot [\mathbf{r}] = [E][t]. \quad (5.85)$$

もしかしたら,  $\mathbf{r} = (x, 0, 0)$ ,  $\mathbf{p} = (p_x, 0, 0)$  としたほうがわかりやすいかもしない.

$$p_x x = Et.$$

# 6

## 座標変換

### 6.1 座標のとりかた

#### 6.1.1 座標とは

空間内の点の位置を指定する手段として、座標はとても重要であり、座標なくしては位置を数学的に表すことはできない<sup>1)</sup>。今まで主に使ってきた座標は、縦・横・高さの3つの数字であらわされる、3次元直交座標を使っていた。しかし、点の位置を指定するのに、この座標系しか考えられないということはない。3次元空間内の点を表すには、適当に決めた“3つの互いに独立な変数”を用いればよい。座標の取り方は3次元直交座標以外にも、例えば、極座標とか、斜交座標がよく取り上げられる。座標によって位置の示し方は異なるが、異なるのは示し方だけであって、どの座標を採用しても示される位置に違いはない。極座標を使おうが斜交座標を使おうが、それらを使ってあらわされる位置の特性に違いが出るわけではない。

下手な例えかもしれないが、座標の違いは言葉の違いに似ている。現象を英語で表現しようが、日本語で表現しようが、その表現される現象が変わるわけではない。た

---

<sup>1)</sup> これ以上に簡潔なものはない、という意味で。

だ、同じ現象を日本語で説明された時と、英語で説明された時のイメージ（ニュアンス）は異なるように、採用する座標によって主張する部分が変わってくる。極座標は角運動（回転運動）を表現するのに簡潔であることが多く、惑星の運動やコマの回転運動などを扱うときは、極座標がよく用いられる。

以下では、座標の種類をいくつか見た後、それらの相互の関係について、考える。座標の相互関係は、**座標変換** とう考え方を使って表現される。座標変換によって、ある座標から別の座標へ切り替えることが可能になる。特に、相対性理論は、座標変換による計算地獄だ。ここでは、将来学習する相対性理論も視野に入れつつ、座標そのものに対するイメージを習得していこう。

### 6.1.2 直交座標

**直交座標** については説明するまでもない。今まで考えてきた  $x$ ,  $y$ ,  $z$  を直線軸とし、これらの軸が互いに直交するようになつた座標のことである。

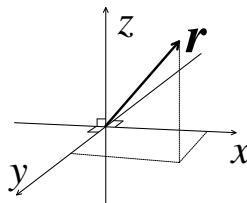


図 6.1 直交座標

### 6.1.3 斜交座標

直交座標は各直線軸同士の交わりが、互いに直交していた。しかし、直交していない——つまり、斜めに交わっていても、座標として成立する。直交していない直線軸で表される座標は、**斜交座標** とよばれる。

まず、2次元で考えてみよう。直交座標  $x-y$  と、斜交座標  $x'-y'$  の関係を考えてみよう。図を描けば図 6.2 のようになる。

まず  $x'$  を、 $x$  と  $y$  で表現することを考えよう。つまり、直交座標  $x-y$  から見た、直線  $x'$  の式を考えるのである。直線の式は簡単に書くと、 $y = ax + b$  である。 $a$  は直線の傾きで、 $b$  は直線が  $y$  軸と交わる切片である。直線の傾きを知るには、直

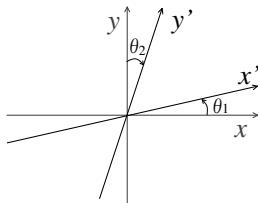


図 6.2 斜交座標

線の式を微分すればよい.

$$(直線の傾き) \quad a = \frac{dy}{dx}.$$

また、今回は、簡単のために<sup>2)</sup>、 $b = 0$  としよう。すると、関係式は次のように簡単になってしまう。

$$x' \text{の式} : y = \frac{dy}{dx} x \quad (6.1)$$

#### 6.1.4 極座標

極座標の場合の座標変数の取り方は、自分の位置する場所を座標原点  $O$  としたとき、自分からの距離  $r$  と、水平方向のある 1 方向を基準にしたときの角度  $\phi$ 、そして、鉛直方向の上向きを基準としたときの角度  $\theta$  の 3 つの変数を用いる。図でイメージするならば図 6.3 のようである。但し、直交座標との対応関係がわかるように、直交座標も点線で描いている。

図 6.3 のように、極座標の 3 つ独立な座標変数は  $(r, \theta, \phi)$  で表現される。それらのとり方は、書いた通りである。これらの変数には一応名前がついており、 $r$  を 動径、 $\theta$  を 天頂角、 $\phi$  を 方位角 という。

---

<sup>2)</sup> 「簡単のために」とは、説明が複雑にならないように、条件を簡単に考えて考えたいということである。一般的に考えてしまうと、それ説明するときに式が複雑になり、要点がつかみにくくなってしまう。簡単化してしまうと、一般的な議論ができない。しかし、要点をつかむことが大事であるので、一般的な議論を犠牲にするのである。

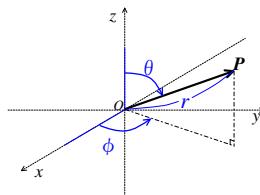


図 6.3 極座標

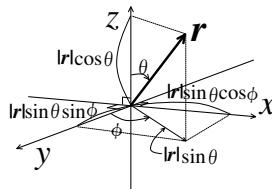


図 6.4 直交座標との対応

直交座標との関係は、図より

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (6.2)$$

となることがわかる。

### 6.1.5 円筒座標

円筒座標の場合の座標変数の取り方を説明する。そのイメージを図 6.5 に描いておくので、この図を参照しながら読んでほしい。まず、自分の位置する場所を座標原点  $O$  とする。そして、この座標原点  $O$  を含むような 1 つの平面を選ぶ。この平面の選び方は複数存在するが、そのうちの 1 つを任意に選ぶとする。図 6.5 では  $x-y$  平面に相当するものである。さて、示したい点  $P$  から、先に指定した平面に垂線を引き、垂線の足を  $H$  とする。ここでまず一つ目の座標  $z$  を、点  $P$  から  $H$  へ引いた線分の長さとする。 $\rho$  については座標原点  $O$  から、 $x-y$  平面に沿って点  $H$  まで引いた線

分の長さというようにとる。残りの 1 つの変数,  $\phi$  については、極座標の場合と同様なとり方をする。

従って、円筒座標で点の位置を示したいときは、 $(\rho, \phi, z)$  という座標を用いることになる。

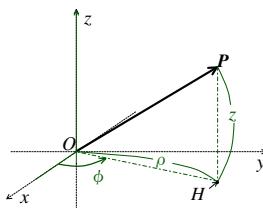


図 6.5 円筒座標

直交座標との関係は、図より

$$\begin{cases} x = \rho \cos \phi \\ y = \rho \sin \phi \\ z = z \end{cases} \quad (6.3)$$

となることがわかる。 $z$  座標は同じである。

## 6.2 異なる座標同士の関係

### 6.2.1 座標による違い

1 つの同じ物体（質量 :  $m$ ）の運動をみて、二人の観測者がその物体の運動方程式を正しく記述したとしよう。運動方程式を書くときには、どのような座標をとるかを決める必要がある。座標には、直交座標、極座標など、いろいろな表し方があるが、そのどれをとってもよい。

さて、二人のがそれぞれ書いた運動方程式を比べてみると、使用した座標が違っていたとしよう。運動方程式の記述の仕方は、使用する座標によって変わってしまう。しかし、2 つの運動方程式が表す物体の軌跡は、正しく記述されているので、全く同じになるはずである。しかし、その関係は、一見してわかりにくいものになるだろう。

例として、一方の運動方程式を直交座標でかかれたものとし、もう一方を極座標で

かかれているとしよう。簡単のために、2次元で考え、さらに、物体に加わる力は保存力（ポテンシャルは  $V(x, y)$ ）であるとしよう。直交座標で書かれた運動方程式は、

$$\begin{cases} m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\partial V(x, y)}{\partial x} \\ m \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\partial V(x, y)}{\partial y} \end{cases} \quad (6.4)$$

である。同じ運動方程式を、極座標で表すと、

$$\begin{cases} m \left\{ \frac{d^2r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right\} = -\frac{\partial V(r, \theta)}{\partial r} \\ m \left( r \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial V(r, \theta)}{\partial \theta} \end{cases} \quad (6.5)$$

となる。

運動方程式を直交座標で表そうが、極座標で表そうが、結果として得られる軌道は全く変わらない<sup>3)</sup>。

座標は人間が勝手に決められるもので、そのとり方はいろいろある。どの座標を選んでも運動の法則を満たし、同じ結果を得ることができる。となると、この座標同士の関係はどうなっているかが気になってこよう。

座標のとり方には、色々な方法があることを確認した。次に、それぞれの関係を考えてみよう。

### 6.2.2 直交座標 → 斜交座標

直交座標と斜交座標の関係を考えよう。これは、座標同士の関係の中で、最も理解しやすいものである。そしてまた、この関係は物理学ではとても重要な関係である。なので、この関係はどうしても理解したい。感覚的に分かるように、できるだけ細かいステップを踏んで、考えていこう。

---

<sup>3)</sup> 確かに、勝手に選択した座標によって運動方程式を記述しても、結果として得られる物体の運動の軌跡は、1つである。これはこれで、大変驚くべき事だと思う。しかし、不満もあるだろう。運動方程式の形が、座標系によって異なるのである。人間が勝手に決めた座標系によって、運動方程式の形が違うのである。実はこの不満は、解析力学を見てみることで、解決をすることである。ここではしばらく我慢して、異なる座標同士の関係について見ていくことにしたい。

## 6.3 座標変換

今まででは具体的な 2 つの座標同士の関係を見てきた。実用的には、これまでの具体的な関係式のほうが、役に立つことだろう<sup>4)</sup>。しかし、理論物理学の目指すところは、一般的に通用する式を記述することである。この目標を満足させるためには、任意の 2 つの座標間の、変換関係式を記述すればよい。今までに得た、具体的な関係式を参照しながら、一般的に通用する関係式を導いてみよう<sup>5)</sup>。

### 6.3.1 座標系の表現の仕方

さて、任意の 2 つの座標系を文字で表さないといけない。この 2 つの座標系をそれぞれ、 $x$  座標系と  $X$  座標系のように、小文字と大文字で区別することにしよう。そして、座標変換を考えるには、基準とする座標系を  $x$  座標系と  $X$  座標系のどちらかに設定すると楽である。ここでは、 $x$  座標系を基準の座標系としよう。基準の座標系とは、もちろん、私に対して静止している座標系のことである。

## 6.4 座標変換と運動方程式

**コメント** ある慣性系で、物体の運動方程式をたてる。そして、その慣性系とは別の慣性系に移り、同じ物体の運動方程式を立てたとき、その運動方程式は形を変えてしまうのだろうか。結論をいうと、形を変えないのである。それを説明していく。慣性系から別の慣性系に移ることを、ガリレイ変換 という。ここでいう変換とは 座標変換 のことである。座標変換をするということには、「物体の観測をする立場を変えてみる」といった意味がある。観測する立場というのは、例えば、別の速度（等速度）で運動している状況での観測とか、加速度運動している状況での観測とかということである。

<sup>4)</sup> 実際の現象を解決するに当たっては、式は具体的に書かれているほうが、使いやすい。多くの関係式から、使いやすい式を選択すればよい。

<sup>5)</sup> 発見的方法で、一般的な座標変換式を導くことになる。この方法をとると、「どんな 2 つの座標系間でも必ず成り立つかどうか」を示す必要が出てくる。しかし、このノートではその証明は省略する。明らかに成立することが、わかるだろうから。いや、面倒臭いから。知りたい場合は、座標変換に関する数学の教科書や、物理学の教科書を参照しよう。

### 6.4.1 ガリレイ変換

ある慣性系  $S_a$  から別の慣性系  $S_b$  に移ることを、**ガリレイ変換** という。このガリレイ変換について考える。系  $S_a$  の速度を  $\mathbf{v}_a$  とし、系  $S_b$  の速度を  $\mathbf{v}_b$  とする。また、系  $S_a$  の位置を  $\mathbf{r}_a$  とし、系  $S_b$  の位置を  $\mathbf{r}_b$  とする。このとき、系  $S_b$  を系  $S_a$  から見たときの相対速度  $\mathbf{V}_{ba}$  は

$$\mathbf{V}_{ba} = \mathbf{v}_b - \mathbf{v}_a \quad (6.6)$$

である。系  $S_a$  も系  $S_b$  も両方とも等速直線運動しているので、 $\mathbf{V}_{ba}$  も一定の値をとる。この式を

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_b + \mathbf{V}_{ba} \quad (6.7)$$

のように変形して、両辺に時間  $t$  を掛けることによって、

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_a t &= \mathbf{v}_b t + \mathbf{V}_{ba} t \\ \Leftrightarrow \mathbf{r}_a &= \mathbf{r}_b + \mathbf{V}_{ba} t \end{aligned} \quad (6.8)$$

という式が成り立つ。 $(\mathbf{v}_a t, \mathbf{v}_b t$  は絶対静止系に対する位置である。) 上式は系  $S_a$  の位置  $\mathbf{r}_a$  から見た式である。ここで物体の運動方程式を作つて、 $m(d^2\mathbf{r}_a/dt^2) = \mathbf{F}$  とする。このとき、系  $S_b$  から物体を見ると運動方程式がどうなるかを考える。別の慣性系に移つて、系  $S_b$  の位置  $\mathbf{r}_b$  から見れば、

$$\mathbf{r}_b = \mathbf{r}_a - \mathbf{V}_{ba} t \quad (6.9)$$

である。この式が、系  $S_a$  から系  $S_b$  に移ったときの**ガリレイ変換**を表現する式である。

この  $\mathbf{r}_b$  について、運動方程式をたてると、

$$\begin{aligned} m \frac{d^2\mathbf{r}_b}{dt^2} &= m \frac{d^2\mathbf{r}_a}{dt^2} - m \frac{d^2\mathbf{V}_{ba}}{dt^2} \\ &= m \frac{d^2\mathbf{r}_a}{dt^2} \\ &= \mathbf{F} \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$\Leftrightarrow m \frac{d^2\mathbf{r}_b}{dt^2} = \mathbf{F} \quad (6.11)$$

である。この方程式は  $m(d^2\mathbf{r}_a/dt^2) = \mathbf{F}$  と同じ形をしている。すなわち、系  $S_a$  から運動を見ようが、系  $S_b$  から運動を見ようが、運動方程式は全く同じ形になることがわかる。このことを、ニュートンの運動方程式はガリレイ変換に対して不変であるという。

今までは 2 つの慣性系が両方とも、速度をもつとして考えてきたが、これら 2 つの慣性系のうちどちらか一方が静止している場合を考えても、このガリレイ変換の式が変わることはない。なぜならガリレイ変換は、慣性系間の相対速度が重要なのであって、それら慣性系の絶対的な速度には関係がないからである。そこで、以下では基準となる慣性系の速度を 0 として考える。

以上のことを見て、ガリレイ変換を以降で使いやすい形にまとめておく。

### Point 23: ガリレイ変換

慣性系  $S$  と、 $S$  に対して速度  $\mathbf{v}$  で等速直線運動している慣性系  $S'$  を考える。ここに慣性系  $S$  の速度を 0 とし、基準の慣性系とする。基準慣性系  $S$  の位置座標を  $\mathbf{r}$  で表現し、 $S'$  の位置座標を  $\mathbf{r}'$  で表現する。このとき、これらの 2 つの慣性系  $S$ 、 $S'$  の座標間には以下の関係がある。

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v}t \quad (6.12)$$

ここに  $t$  は時刻を表現するものである。

#### 6.4.2 加速度系における物体の運動

2 つの直交座標系を用意する。これらの座標系に名前を付けて、それぞれ系  $S_1$ 、系  $S_2$  とする。系  $S_1$  は等速直線運動しているとする。両方の座標系の原点が一致したとき、時刻を  $t = t_0$  とする。また、各系は自転しないとする。今から、系  $S_1$  での物体の運動を、系  $S_2$  から見ることを考える。系  $S_2$  は系  $S_1$  に対して正方向に動いているとする。この変換に重要なのは位置である。座標と位置は全く同じことである。位置を得れば、それを時間微分することによって、速度を得ることができると、さらに時間微分することによって、加速度を得ることができる。

「加速度をもった座標系」の図で、 $\mathbf{r}_1$  と  $\mathbf{r}_2$  の関係を見てほしい。 $\mathbf{r}_1$  が系  $S_1$  から

見たときの物体の位置であり、 $\mathbf{r}_2$  が系  $S_2$  から見たときの物体の位置である。 $\mathbf{R}$  は系  $S_1$  から見た、系  $S_2$  の原点の位置である。もちろん、系  $S_2$  から系  $S_1$  の原点を見るならば、 $-\mathbf{R}$  となる。

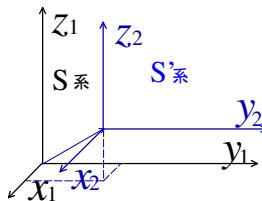


図 6.6 加速度をもった座標系

「加速度をもった座標系」の図、以下の式が成り立つ。

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 + \mathbf{R} \quad (6.13)$$

この式を、 $\mathbf{r}_2$  での位置  $\mathbf{r}_2$  について解くと、

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R} \quad (6.14)$$

となる。この座標  $\mathbf{r}_2$  について、質量  $m$  をもつ物体の運動方程式をたてると、

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = m \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} - m \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} \quad (6.15)$$

と变形される。すなわち、系  $S_2$  では、 $-m(d^2 \mathbf{R} / dt^2)$  の力を受けていることになる。

ガリレイ変換との違いは、ガリレイ変換が慣性系から慣性系への変換であったのに対して、今度の変換は、慣性系から加速度系への変換である ということである。すなわち、 $\mathbf{R}$  が加速度をもっているために、 $-m(d^2 \mathbf{R} / dt^2)$  という力が生じてしまったのである。この力のことを、見かけの力 という。

見かけの力は普段の生活でも経験している。例えば、電車の中にいるとき、電車が動き始めるときや止まるときに「何か」に引っ張られる感覚がある。この「何か」が、見かけの力である。

電車の中に固定された物体の動きを考える。電車の外にいる人から物体を見れば、「電車の中の物体は、電車と共に加速度運動している」として、物体の動きを

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} \quad (6.16)$$

と書くだろう。しかし、電車の中にいる人に言わせれば、「物体は電車に対して静止している」から、物体の運動方程式は、

$$0 = \bar{\mathbf{F}} \quad (6.17)$$

と主張する。この違いは、両者の立場が違うために生じている。電車の外にいる人は慣性系の立場であり、電車の中にいる人は加速度系の立場にいるのである。電車の外にいる人が書く運動方程式を

$$\mathbf{F} - m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = 0 \quad (6.18)$$

と変形すると、式(6.16)、式(6.17)は

$$\mathbf{F} - m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \bar{\mathbf{F}} \quad (6.19)$$

の関係があることがみえる。この式の  $-m(d^2\mathbf{r}/dt^2)$  が見かけの力を表現しているのである。

### 6.4.3 見かけの力

加速度系で現れる見かけの力と、慣性系で現れる通常の力の差異はほとんどない。この二つの力の違いは、見かけの力には作用反作用の法則が成立しないということだ。これ以外には、見かけの力は、慣性系における力と全く同じ働きをする。

では、作用反作用の法則が成立しない、見かけの力とは、いったい何なのか。アインシュタインは一般相対性理論の構築の際に、見かけの力と重力は等価であるを主張した。これは アインシュタインの等価原理 とよばれている。この見かけの力について、簡単に触れておこう。

ある基準となる座標系を設定し、系 S と名付ける。系 S は等速運動しているとする。この系 S に対して加速度運動している座標系を想定し、これを系 T と名付ける。

### 6.4.4 アインシュタインの等価原理

アインシュタインは、慣性質量と重力質量の等価原理  $m_i = m_g$  から、非慣性系における見かけの力と重力は本質的に同じことであるという考えを指摘する。実際に自分が力を受けたときには、重力によるものなのか、それとも見かけの力によるものなのかを区別することはできないというのである。このことは、一般相対性理論という分野で語られる。

簡単に具体例で触れておこう。ここでは、地球上で落下する物体について考えてみよう。地球上にある物体はもちろん、地球から引力を受けていて、物体の運動方程式は

$$m_g \mathbf{g} = \mathbf{F} \quad (6.20)$$

と書ける。ここに、 $m_g$  は重力質量である。一方で、あらゆる物体は慣性質量をもつていて、つまりこの物体も慣性質量があり、これを  $m_i$  と書けば、物体の運動方程式は、

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} \quad (6.21)$$

である。

式 (6.20) と式 (6.20) の両式における右辺の力  $\mathbf{F}$  は地球が物体に及ぼす力であるから、同一のものである。従って、

$$m_g \mathbf{g} = m_i \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \quad (6.22)$$

の関係が成立している。ここで等価原理、すなわち重力質量と慣性質量が等しいということを考えれば、 $m_i := m_g$  は両辺で打ち消すことができて、

$$\mathbf{g} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \quad (6.23)$$

となる。

式 (6.23) を解釈すれば、重力加速度と慣性質量によって生じた加速度は等しいということになる。「重量によって生じた加速度と、慣性質量の運動方程式による加速度は全く同一である」というのだ。もっと具体的にいって、慣性力と重力は同等であると表現できる。この式 (6.23) を アインシュタインの等価原理 という。この等価原理は、ニュートン力学での等価原理  $m_i := m_g$  からの考察で得たものだから、両等価原理は同じことを主張するということなる。

#### # memo No.47: 例 1: 電車の加速度運動

例えば、駅で停車している電車が走り出すときには加速度が生じる。電車の中にいる人にとっては、加速度と反対方向の力を感じることになる。この力のことを特に、見かけの力 あるいは 慣性力 という。アインシュタインの主張する等価原理によれば、この見かけの力を重力と認識しても間違いではない。現実には、電車は目標の速度に達したときには加速を止めて等速運動に至るので、見かけの力だったのだと思いつつもできる。しかし、もし、電車が加速を止めなければ、電車の中にいる人には加速による慣性力なのか新たに生じた重力なのかの見分けがつかないはずだ。

## # memo No.48: 例 2: エレベータ

また別の例では、人の乗ったエレベータの自由落下というのがある。エレベータが自由落下しているときに、この中にいる人は“無重力”を感じるのである。地上にいる人からエレベータとその中のを見れば、当然、「エレベータと人は同じ加速度で自由落下している」と主張する。しかし、エレベータとともに自由落下する人にとっては事情が違う。エレベータの加速度と、自身の落下加速度が等しいので、結局その速度同士が打ち消されて、加速度が 0 となる。ニュートンの運動方程式によれば、加速度が 0 であるということは力が加わっていない状態であるから、つまり無重力を感じるということだ。

## # memo No.49: 「慣性質量」と「重力質量」の等価性とは意味が違う

もう一度、確認しておこう。エトヴェシュの行った実験は、慣性質量  $m_i$  と重力質量  $m_g$  は等価であることを確かめたものである。これに対して、インシュタインの等価原理は、重力加速度と見かけの力が等価であることを主張するものである。重力質量と慣性質量の等価原理から、インシュタインの等価原理が導かれるのだが、両者の意味は異なる。

## 6.4.5 極座標と運動方程式

ここでは極座標  $(r, \theta, \phi)$  での質点の運動方程式を求める。これは簡単であって、直交座標の  $(x, y, z)$  を極座標の  $(r, \theta, \phi)$  に書き換えればよい。

$$\begin{cases} m \frac{d^2 r}{dt^2} = F_r \\ m \frac{d^2 \theta}{dt^2} = F_\theta \\ m \frac{d^2 \phi}{dt^2} = F_\phi \end{cases} \quad (6.24)$$

問題となるのは、直交座標における運動方程式と極座標における運動方程式の関係である。一般に両者の形は異なった形をとる。もちろん、一方の方程式から得る解と、もう一方から得る解は同じである。これは、式 (6.2) の関係式を考慮することで確認できる<sup>6)</sup>。

具体的に考えてみる。自由に運動できる<sup>7)</sup> 質点の運動方程式を、直交座標系と極座標系の両座標系でそれぞれ立ててみて、各座標系で立てた運動方程式の解を求めて

<sup>6)</sup> どちらの座標をとろうが、得られる解は同じであるので、最初に設定する座標系は後の具体的な計算のことを考えれば、その計算が楽になるほうをとるべきだ。

<sup>7)</sup> 「自由に運動できる」とは、ポテンシャルが存在しないことを意味する。

みる。そして、式式(6.2)の関係式から、得られた解が等しいかを考える。

直交座標系  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  での質点運動方程式は、各座標成分に分割して書けば

$$\begin{cases} m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x \\ m \frac{d^2y}{dt^2} = F_y \\ m \frac{d^2z}{dt^2} = F_z \end{cases} \quad (6.25)$$

であった。

# 7

## 物体の運動の解析

**コメント** 物体の運動を解析するとは、物体の運動軌跡や速度変化など数値的に把握するために計算することをいう。そのためには、ニュートンの運動方程式をつかう。この章では、運動方程式を使った運動の解析方法を、典型的な具体例を通して学習する。

### 7.1 運動の解析方法

物体の運動を解析するには、以下の手順で行う。

- (1) 解析対象となる物体にかかるすべての力を書き出す
  - 物体の運動方向が予めわかっているなら、垂直方向と平行方向に分解もする
- (2) 物体の質量を測る
- (3) 物体の位置を未知変数として、ニュートンの運動方程式をたてる
- (4) 運動方程式を解く
- (5) 解をグラフ化、あるいは映像化して、具体的な運動のイメージを得る

## 7.2 重要な例

### 7.2.1 等速直線運動

ニュートンの運動の第一法則である 慣性の法則 によれば、物体には、力が働くかないときは、速度を変化させることなく動き続ける、という性質がある。速度を変化させることができないことを、等速度 という<sup>1)</sup>。速度は、向きと大きさ（速さ）をもったベクトルである。だから、等速度で運動し続けるということは、向きと速さが常に一定であるということだ。向きが変わらないという事は、直線的な運動を続けるということ。このような運動を 等速直線運動 という。また、等速直線運動は、物体の慣性のみで運動していることから、慣性運動 ということもある。

ニュートンの運動の第二法則である、運動方程式からもこの性質を導ける。運動方程式は、以下のような形をしていた。

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}.$$

$m$  は質量、 $\mathbf{r}$  は位置、 $t$  は時間、 $\mathbf{F}$  は力である。

慣性の法則の仮定から、物体には力が働いていないので、 $\mathbf{F} = \mathbf{0}$  である。よって、慣性運動している物体の運動方程式は、

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{0}. \quad (7.1)$$

この運動方程式を質量  $m (> 0)$  で割れば、等速直線運動の加速度を得る。

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{0}. \quad (7.2)$$

等速直線運動では、加速度は  $\mathbf{0}$ 、つまり、加速していないという結果が出た<sup>2)</sup>。言い方をええれば、力が全く加わっていない物体は加速しない、とも言える。

加速度を時間  $t$  で積分（不定積分）すると、速度  $\mathbf{v}(t)$  が得られる。

$$\mathbf{v}(t) = \int \left( \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right) dt$$

<sup>1)</sup> 速度が変化しないということは、ずっと同じ速度を保っているのと同じこと。

<sup>2)</sup> 当たり前な結果で、何の面白みもないが、経験と理論の一致をここで見ることができる。

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{d}{dt} \left( \frac{dr}{dt} \right) dt \\
 &= \int \mathbf{0} dt \\
 &= \mathbf{v}_0.
 \end{aligned}$$

改めて書きなおして,

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0. \quad (7.3)$$

ここで, 左辺の積分定数を  $\mathbf{v}_0$  とした.  $\mathbf{v}_0$  は速度を示す一定のベクトルである. この値は, 物体に力が働くようになった瞬間の速度とみなせる. 等速直線運動が開始された時刻の速度であり, 特にこの速度を, 初速度 とよばれる. このことから, 力の加えられていない物体は, 一定速度で運動し続けることが確認された.

さらに式 (7.3) を  $t$  で積分して, 位置  $x(t)$  を示す式を導出しておこう.

$$x(t) := \int \mathbf{v}_0 dt = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{x}_0.$$

清書して,

$$x(t) = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{x}_0. \quad (7.4)$$

ここで,  $\mathbf{x}_0$  は位置を示す一定のベクトルである. この値は, 物体に力が働くなくなった瞬間の位置とみなせる. 等速直線運動が開始された時刻の位置であり, 初期位置 という.

### 7.2.2 等加速度運動

物体に一定の力を与え続けると, 物体はどうのように運動するだろうか. この場合の運動方程式は, ニュートンの運動方程式そのもので,

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}.$$

この式の質量  $m$  はスカラ一定数であり, 力  $\mathbf{F}$  は一定ベクトルである. 両辺を  $m$  でわって, 定数を右辺に集中させておこう.

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{\mathbf{F}}{m}.$$

時間  $t$  で積分すれば、速度  $v(t)$  が求まる。式変形が煩雑にならないように、右辺と左辺を別々に計算しよう<sup>3)</sup>。

$$\begin{aligned} \text{(左辺)} &= \int \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} dt \\ &= \int \frac{d}{dt} \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) dt \\ &= \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(右辺)} &= \int \frac{\mathbf{F}}{m} dt \\ &= \frac{\mathbf{F}}{m} t + \mathbf{v}_0. \end{aligned}$$

右辺の計算で、最後に現れた  $\mathbf{v}_0$  は積分定数である。これは  $t = 0$  における物体の速度である（すぐ後で、右辺の次元を確認する）。よって、

$$\mathbf{v}(t) := \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\mathbf{F}}{m} t. \quad (7.5)$$

念の為、左辺の次元が速度 ([m/s]) になる確認しておこう。 $[F] = [\text{kg m/s}^2]$ ,  $[m] = [\text{kg}]$ ,  $[t] = [\text{s}]$  であるので、

$$\frac{\text{kg}}{\text{kg}} \frac{\text{m/s}^2}{\text{s}} \text{s} = \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

よって、上式の最右辺は速度の次元である。 $\mathbf{F}/m$  は加速度であるから<sup>4)</sup>、

$$\mathbf{a} := \frac{\mathbf{F}}{m}$$

上記から、加速度が時間によらず一定であることが見て取れる。それゆえ、このような物体の運動を、等加速度運動 という。

以上から、等加速度運動の速度の式が得られた。

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{at} + \mathbf{v}_0. \quad (7.6)$$

<sup>3)</sup> 本当のところは、左辺の式変形はあまり興味がない。左辺の計算は、この積分計算で、速度を計算できることを確認するためだけに計算される。この計算の本命は、右辺の計算で、速度がどのように表されるかがわかる。

<sup>4)</sup> 次元を確認するまでもない。 $ma = \mathbf{F}$  から、直ちに  $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$  がわかる。

位置の式は、この速度の式をさらに  $t$  で積分することで得られる。

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{at} + \mathbf{v}_0 \quad (7.7)$$

を基にして、

$$(左辺) = \int \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \mathbf{r}.$$

$$\begin{aligned}(右辺) &= \int (\mathbf{at} + \mathbf{v}_0) dt \\&= \int \mathbf{at} dt + \int \mathbf{v}_0 dt \\&= \frac{1}{2}\mathbf{at}^2 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{x}_0.\end{aligned}$$

右辺の計算で、最後に現れた  $\mathbf{x}_0$  は積分定数であり、 $t = 0$  での位置（初期位置）を示す。以上から、等加速度運動の位置の式は、以下となる。

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{2}\mathbf{at}^2 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{x}_0. \quad (7.8)$$

### 7.2.3 等速円運動

#### 7.2.3.1 はじめに

運動方程式の使い方の別の例として、等速円運動を考えてみよう。等速円運動とは、速さが一定で、軌道が円であるような物体の運動のことである。

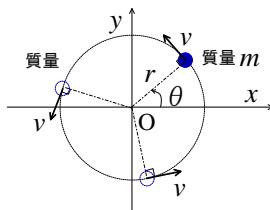


図 7.1 等速円運動

軌道円は 2 次元で表現できるので、軌道円の存在する面に  $x-y$  座標をとろう。軌道円の中心に、座標の原点  $O$  にとる。軌道円の半径を  $r$  とし、物体の質量を  $m$ 、速さ（速度ではない）を  $v$  とする。

本来は、運動方程式を記述し、これを解くことで軌道がわかるのであるが、今から行おうとしていることは、その逆である。今回は軌道と、その他のパラメータ（速度  $v$  の仮定など）を先に決めてしまい、これを満たすような運動方程式を探すということをすることになる。今は円運動を記述するような運動方程式を知らず、わかっているのは、結果である。結果から原因を探るのは何かおかしい気がするが、どのような運動方程式になるかを知るには、これが一番の近道であると思う。以下の学習で得られる等速円運動の方程式は、惑星の運動<sup>5)</sup>など、一般にも通用するものである。ということで、円運動の方程式はどのような形で表されるのか、以下で、導いていくことにしよう。

さて、運動方程式を記述したいのだが、それには物体に働く力と、物体に生じている加速度を知る必要がある。以下で、順を追って確認していこう。

### 7.2.3.2 角速度

ニュートンの運動方程式の一般的な形は  $m(d^2\mathbf{r}/dt^2) = \mathbf{F}$  である。 $m$  は単なるスカラーであることから、加速度  $d^2\mathbf{r}/dt^2$  の方向と、力  $\mathbf{F}$  の方向は同じである。つまり、加速度と力のどちらか一方の方向が分かれれば、他方も同じ向きであると言える。今回は、加速度の方向を調べていこう。

加速度の方向は、図形的に見つけることができる。加速度は、速度の時間変化によって定義されるから、速度の変化を見てみればよい。速度が微小変化したとき、その変化の方向を考えればよいのだ。図を描いて考えてみよう。



図 7.2 等速円運動の加速度の向き

物体の速度の変化を考えて、2つの異なる時刻の速度ベクトルを描いた（ $v$  と  $v'$ ）。この2つの速度ベクトルを平行移動して、始点を重ねて見ると、物体が等速円運動するときに変化しているのは、図の  $\theta$  であることがわかる。いま、等速運動を考えて

<sup>5)</sup> 惑星は橿円軌道を描く事が知られられないので、これは近似になってしまうが、地球など、太陽に近い惑星は、ほとんど円軌道を描いていると考えても大した間違いではない。

るので、この  $\theta$  は時間  $t$  に比例している、と考えられる。

$$\theta \propto t.$$

ここで比例定数  $\omega$  を用いると、

$$\theta = \omega t \quad (7.9)$$

と書ける。回転の速さは、角  $\theta$  の変化によって、記述できる。ということは、この式の  $\omega$  によって、回転の速さを表していると見ることができる<sup>6)</sup>。そこで、 $\omega$  は角速度とよばれる。実際、 $\theta$  を時間微分すると、

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (7.10)$$

となり、これは、ちょうど位置の時間変化

$$v = \frac{dx}{dt}$$

と同じ形をしている。

改めて、角速度を定義しておく。

#### Point 24: 角速度の定義

角速度  $\omega$  は、次式で定義される。

$$\omega := \frac{d\theta}{dt} \quad (7.11)$$

#### # memo No.50: 速度と加速度は直交する（図形的説明）

等速ということを仮定しているので、速度ベクトルの大きさは常に一定である。従って、図の三角形は、二等辺三角形である。この二等辺三角形の底辺の角を、 $\phi$  で表すことにしよう。この角度  $\phi$  は、一時的に使用するもので、物理的に特に意味のあるものではないので、特別な名前はない。しかし、この  $\phi$  は速度ベクトルと加速度ベクトルとが作る角であり、これから考察で、重要な結果を導く。

<sup>6)</sup> 時間の変化は測定する事ができず、常に一定であると考えるしかないので、 $\theta$  の時間変化が大きいということは、 $\omega$  が大きいということになる。

三角形の内角の和は、 $180^\circ$  であるから、

$$\phi + \phi + \omega t = 180^\circ$$

である。この式の左辺の ( $\theta = \omega t$ ) は微少時間を考えれば、 $t \rightarrow 0$  のようになり、微少時間の間に、次式が成立する。

$$\lim_{t \rightarrow 0} \{\phi + \phi + \omega t\} = 2\phi$$

つまり、 $2\phi = 180^\circ$  となって、

$$\phi = 90^\circ \quad (7.12)$$

である。

先に指摘した通り、この  $\phi$  は速度ベクトルと加速度ベクトルとが、交わって作る角である。つまり、

等速円運動では、速度と加速度は直交する。

のである。加速度が生じているのは、速度ベクトルの始点の部分と同じなので、加速度ベクトルを平行移動して、図 7.3 のようにする。

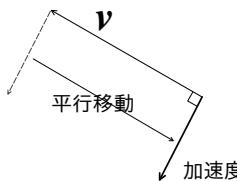


図 7.3 等速円運動における、速度と加速度の関係

速度ベクトルと直交することと、これまでに描いた図から分かるように、加速度の向きは、物体から円の中心に向うかう向きである。物体は軌道円上を常に移動しているので、加速度も向きも絶えず変化している。

### 7.2.3.3 角速度と円の方程式

等速円運動のもう 1 つの仮定を思い出そう。軌道が円を描くことである。円を表す方程式を思い起こそう。それは、

$$x^2 + y^2 = \text{const} (= r^2)$$

である<sup>7)</sup>. 図 7.1 をもう一度見て、確認のこと。もちろん用いている座標は、2 次元直交座標である。これは三平方の定理を考えれば、当然のことである。今回は半径として  $r$  をとっているので、軌道円の方程式は

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (7.13)$$

となる。

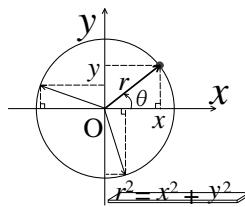


図 7.4 円の方程式

さて、三角関数の公式に次のようなものがある。

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1.$$

少し唐突に感覚かもしれないが、実は、これは、円と関係がある。この公式は、图形的に解釈すると、半径が 1 で、 $x = \sin \theta$ ,  $y = \cos \theta$  の円の方程式と、考えられるからである。この公式を、(7.13) に形を近づけてみよう。両辺に  $r^2$  をかけて、 $\theta$  を  $\omega t$  に書き換える。

$$r^2 \sin^2(\omega t) + r^2 \cos^2(\omega t) = r^2.$$

つまり、

$$(r \sin(\omega t))^2 + (r \cos(\omega t))^2 = r^2 \quad (7.14)$$

である。この式は

$$\begin{cases} x(t) = r \cos(\omega t) \\ y(t) = r \sin(\omega t) \\ (\text{半径}) : r \end{cases} \quad (7.15)$$

<sup>7)</sup> const は constant の省略で、一定値をとるという意味。今の場合、半径の二乗 ( $r^2$ ) に相当する。ここで言いたいのは、一定値を取るということなので、 $r^2$  を括弧書きにした。あくまで参考と考えて欲しい。

の「円の方程式」である。これが、今回考える軌道円の方程式である。

#### 7.2.3.4 等速円運動の速度と加速度の導出

さて、軌道円の方程式が得られ、物体の軌道を直交座標で表すことができた。速度の定義は、直交座標では位置  $x(t)$  の時間微分  $dx/dt$  であった。従って、上で得た位置  $x(t)$ ,  $y(t)$  の式を時間  $t$  で微分すれば、各方向の速度を求められる。やってみよう。ただし、三角関数の微分は、ここでは、既に知っているものと、仮定する<sup>8)</sup>。

まず、 $x$  座標の速度  $v_x(t) = dx/dt$  は ( $r$  は半径 (定数))

$$\frac{d}{dt} r \cos(\omega t) = r \frac{d(\omega t)}{dt} \frac{\cos(\omega t)}{d(\omega t)}$$

$$\therefore v_x(t) = -r\omega \sin(\omega t)$$

$y$  座標の速度  $v_y(t) = dy/dt$  は

$$\frac{d}{dt} r \sin(\omega t) = r \frac{d(\omega t)}{dt} \frac{\sin(\omega t)}{d(\omega t)}$$

$$\therefore v_y(t) = r\omega \cos(\omega t)$$

また、加速度は、速度の微分であり、まず、 $x$  座標の速度  $a_x(t) = dv_x/dt$  は

$$\frac{d}{dt} \{-r\omega \sin(\omega t)\} = -r\omega \frac{d(\omega t)}{dt} \frac{\sin(\omega t)}{d(\omega t)}$$

$$\therefore a_x(t) = -r\omega^2 \sin(\omega t)$$

<sup>8)</sup> 三角関数の微分公式

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

合成関数  $f\{g(x)\}$  の微分 ( $f(y)$ ,  $y = g(x)$  とおく)

$$\frac{d}{dx} f\{g(x)\} = \frac{dg(x)}{dx} \frac{df(y)}{dy}$$

$y$  座標の速度  $a_y(t) = dv_y/dt$  は

$$\frac{d}{dt}\{r\omega \cos(\omega t)\} = r\omega \frac{d(\omega t)}{dt} \frac{\cos(\omega t)}{d(\omega t)}$$

$$\therefore a_y(t) = -r\omega^2 \sin(\omega t)$$

結果をまとめておこう.

### Point 25: 等速円運動の速度と加速度の公式

等速円運動は平面上の運動なので、2次元で表現できる。等速円運動をする物体の位置  $\mathbf{r}(t)$  速度  $\mathbf{v}(t)$ 、加速度  $\mathbf{a}(t)$  は次の通りである<sup>a</sup>。

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= (x(t), y(t)) \\ &= (r \cos(\omega t), r \sin(\omega t)) \end{aligned} \tag{7.16}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= (v_x(t), v_y(t)) \\ &= (-r\omega \sin(\omega t), r\omega \cos(\omega t)) \end{aligned} \tag{7.17}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) &= (a_x(t), a_y(t)) \\ &= (-r\omega^2 \cos(\omega t), -r\omega^2 \sin(\omega t)) \end{aligned} \tag{7.18}$$

---

<sup>a</sup> 記号が紛らわしくなってしまった。ここでいう位置  $\mathbf{r} = (x(t), y(t))$  と半径  $r$  は全く別のものであるので注意してほしい。

#### 7.2.3.5 等速円運動の位置と速度と加速度の関係

今得られた等速円運動の位置  $\mathbf{r}(t)$  速度  $\mathbf{v}(t)$ 、加速度  $\mathbf{a}(t)$  は、見るからに、互いに関係があることが察せられる。ここで次に、その関係を整理しよう。

まず、位置  $\mathbf{r}(t)$  と加速度  $\mathbf{a}(t)$  の関係を調べる。位置を表す式

$$\begin{cases} x(t) = r \cos(\omega t) \\ y(t) = r \sin(\omega t) \end{cases}$$

と加速度を表す式

$$\begin{cases} a_x(t) = -r\omega^2 \cos(\omega t) = -\omega^2(r \cos(\omega t)) \\ a_y(t) = -r\omega^2 \sin(\omega t) = -\omega^2(r \sin(\omega t)) \end{cases}$$

を見比べよう。加速度の式の中に、位置の関数が現れている。つまり、位置と加速度の間に、以下の関係式を得る。

#### Point 26: 等速円運動の位置と加速度との関係

等速円運動する物体の位置と加速度の関係は、次式で表される。

$$\begin{cases} a_x(t) = -\omega^2 x \\ a_y(t) = -\omega^2 y \end{cases} \quad (7.19)$$

特に、加速度の大きさだけが知りたい場合、

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}| = a &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \\ &= \sqrt{(-\omega^2 x)^2 + (-\omega^2 y)^2} \\ &= \sqrt{\omega^4 x^2 + \omega^4 y^2} \\ &= \omega^2 \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= r\omega^2, \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2}) \end{aligned}$$

と計算される。

**Point 27:** 等速円運動の位置と加速度の大きさとの関係

等速円運動する物体の、加速度の大きさをだけを考える場合、以下の式が成立している。

$$a = r\omega^2. \quad (7.20)$$

次に、位置と速度の関係を調べる。位置を表す式

$$\begin{cases} x(t) = r \cos(\omega t) \\ y(t) = r \sin(\omega t) \end{cases}$$

と速度を表す式

$$\begin{cases} v_x(t) = -r\omega \sin(\omega t) = -\omega r \sin(\omega t) \\ v_y(t) = r\omega \cos(\omega t) = \omega r \cos(\omega t) \end{cases}$$

を見比べよう。つまり、位置と速度の間に、以下の関係式を得る。

**Point 28:** 等速円運動の位置と速度との関係

等速円運動する物体の位置と速度の関係は、次式で表される。

$$\begin{cases} v_x(t) = -\omega y. \\ v_y(t) = \omega x. \end{cases} \quad (7.21)$$

$x$  座標と  $y$  座標が入れ替わっていること注意しよう。

特に、速度の大きさだけが知りたい場合、

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}| &= v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ &= \sqrt{(-\omega y)^2 + (\omega x)^2} \\ &= \sqrt{\omega^2 y^2 + \omega^2 x^2} \\ &= \sqrt{\omega^2(x^2 + y^2)} \\ &= \omega \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

$$= r\omega, \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2})$$

と計算される。

### Point 29: 等速円運動の位置と速度の大きさとの関係

等速円運動する物体の、加速度の大きさをだけを考える場合、以下の式が成立している。

$$v = r\omega. \quad (7.22)$$

等速円運動の特徴は、後に確認する「単振動」という現象にも現れる。単振動は波動現象の解析の基礎である。量子力学によれば、原子レベルの微小なスケールで考えれば、物質には“物質波”という波動の性質をもっていることを、受け入れざるを得なくなる。これは素粒子理論にもつながる重要な現象である。

#### # memo No.51: 速度と加速度は直交する (演繹的説明)

最後に速度と加速度の関係を求めよう。速度と加速度の関係は特に重要である。この関係から、等速円運動において、速度ベクトルと加速度ベクトルが直交することが導かれるのである。次の計算を見て欲しい。

今までに計算して位置と加速度、位置と速度の関係をもう一度書くと、

$$\begin{cases} a_x(t) = -\omega^2 x \\ a_y(t) = -\omega^2 y \\ v_x(t) = -\omega y \\ v_y(t) = \omega x \end{cases}$$

である。

ベクトルの内積を思い出そう。ここでは、成分が分かっているので、代数的な内積の計算方法を使う。

速度ベクトル  $\mathbf{v}(t)$  と加速度ベクトル  $\mathbf{a}(t)$  の内積をとると、

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{a}(t) &= v_x(t)a_x(t) + v_y(t)a_y(t) \\ &= (-\omega y)(-\omega^2 x) + (\omega x)(-\omega^2 y) \\ &= \omega^3 xy - \omega^3 xy \end{aligned}$$

$$\therefore \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{a}(t) = 0. \quad (7.23)$$

つまり、ベクトルの内積の性質より、速度ベクトル  $v(t)$  と加速度ベクトル  $a(t)$  は直交すると言える。これは上で図を用いて確認したことと、同じ結果を得る。

### 7.2.3.6 円運動の周期と角速度

等速円運動する物体が一回転する時間を、**周期** という。周期の記号は大文字の  $T$  がよく用いられる。このノートでも  $T$  をつかう。角速度  $\omega$  を用いて、周期  $T$  を表そう。

半径  $r$  の円の、周囲の長さは  $2\pi r$  である。つまり、円を一周するということを、 $2\pi r$  だけ変位すると言い換えられる。物体はこの円の上を速さ  $v$  で運動するから、 $2\pi r$  だけ移動するのに掛かる時間、つまり、物体の周期を  $T$  とすれば、

$$vT = 2\pi r.$$

つまり、

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

である。等速円運動の場合、 $v = r\omega$  が成立していることを上で確認している。これを上式に代入すると、

$$T = \frac{2\pi r}{r\omega} = \frac{2\pi}{\omega}$$

となる。

以上をまとめておこう。

#### Point 30: 速度と周期と角速度の関係

等速円運動の周期  $T$  と角速度  $\omega$  のには次の関係式が成立する。

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (7.24)$$

### 7.2.3.7 等速円運動の運動方程式

加速度を得ることができたので、これで等速円運動を表現する運動方程式をつくれる。運動方程式は、成分で書くと、

$$\begin{cases} m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x \\ m \frac{d^2y}{dt^2} = F_y \end{cases}$$

だから、これに今得られた加速度を代入して、

$$\begin{cases} mr\omega^2 \cos(\omega t) = -F_x \\ mr\omega^2 \sin(\omega t) = -F_y \end{cases} \quad (7.25)$$

## 7.3 地球重力下での運動

### 7.3.1 理想的な地球の形

以下でそれぞれの速度を計算するんだけど、その際に注意すべきことは、現実の地球そのものを想像してほしくない、ということ。表現の簡略化するために、「地球」という言い方をするが、この場合の地球は、現実の地球と同じ半径で、同じ質量をもった球をイメージしてもらいたい。ここで考える地球は大気の存在しない、のっぺらぼうな球である。

#### # memo No.52: 計算で使う記号

計算の際に使用する記号を、書いておく。

$G$  [Nm<sup>2</sup>/s<sup>2</sup>] : 万有引力定数 ( $6.673 \times 10^{-11}$ )

$R_E$  [m] : 地球の半径 ( $6.378 \times 10^6$ )

$M_E$  [kg] : 地球の質量 ( $5.974 \times 10^{24}$ )

$M_S$  [kg] : 太陽の質量 ( $1.989 \times 10^{30}$ )

$D_{E-S}$  [m] : 太陽と地球の距離 ( $1.496 \times 10^{11}$ ) 上記の添字で、 $E$  は地球 (Earth),

$U_E$  : 地球の重力の位置エネルギー

$m$  : 物体の質量

$h$  : 地表からの鉛直方向の距離

$S$  は太陽 (Sun) の頭文字である。括弧内の値は、それぞれの具体的な数値。

### 7.3.2 地表の重力加速度

式(4.8)にて、惑星の重力加速度を定義した。

$$\mathbf{g} := G \frac{M_P}{|\mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \quad (\text{(式(4.8)と同じ)}).$$

この式に、惑星の質量  $M_P$  に、地球の質量  $M_E$  を当てはめれば、そのまま地球の重力加速度となる。

$$\mathbf{g} := G \frac{M_E}{|\mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}.$$

地球の重力加速度の方向は、常に物体から地球の中心へ向いている。地とする。球

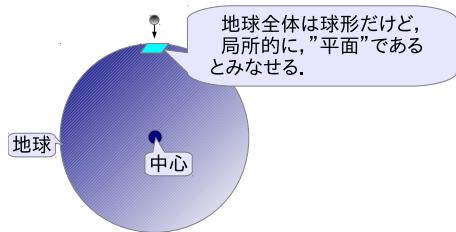


図 7.5 地表付近は平面とみなしてよい

表面付近では、重力加速度は鉛直下向きと近似できる<sup>9)</sup>。

重力方向のみを考える場合、いちいち重力加速度をベクトル表記するのは面倒くさいし、読み手にしてみても式が煩雑で読みにくい。なので、重力加速度の向きが鉛直下向きであるという暗黙の了解をもたせて、方向の記述を省略することがほとんどである<sup>10)</sup>。方向を省略すると、地球の重力加速度は

$$g = G \frac{M_E}{r^2}$$

<sup>9)</sup> 「鉛直下向き」とは、地表に垂直で、地表に向かう向きをいう。鉛の球が重力で下向き（地球の中心に向かう向き）に引っ張られる状況を描いたもの。物理学では、この表現がよく使われる。

<sup>10)</sup> "省略" という言い方に躊躇するところがあるなら、大きさのみに着目すると考えても同じことである。要するに、重力加速度の定義の絶対値だけに着目して、議論するということ。

となる。ここで、分母の  $|r|^2$  も、 $r^2$  と略記した<sup>11)</sup>。

さらに、ここで定義した地球の重力加速度に、地表からの高さ（いわば、標高）も組み込んで置きたい。方法は簡単で、地表からの高さを  $h$  としたとき、 $r$  に  $r+h$  を代入してやればいい。

$$g = G \frac{M_E}{(r+h)^2}. \quad (7.26)$$

$r$  は地球の中心から地球表面までの距離である。地表からの高さを考慮したい場合は、地球の半径が大きくなつたとして考えても同じ事で、 $r$  に  $h$  を加えるだけで済む。

#### # memo No.53: 地表の重力加速度

地表なので、 $h = 0$  として、計算しよう。地表の重力加速度  $g_{\text{地表}}$  は、

$$\begin{aligned} g_{\text{地表}} &= (6.673 \times 10^{-11}) \times \frac{(5.974 \times 10^{24})}{(6.378 \times 10^6)^2} \\ &= 9.799802275794 \\ &= 9.799 [\text{m/s}^2] \quad (\text{有効桁数を考慮}) \end{aligned}$$

である。

地球の重力加速度は大抵の場合、 $g = 9.80[\text{m/s}]$  とされる。現実の地球は球形ではなく、楕円体である。だから、実際には地球の重力加速度は、場所ごとに違う。しかし、大まかな計算をする場合、 $g = 9.8[\text{m/s}]$  として計算してよいだろう。

#### # memo No.54: エベレスト頂上の重力加速度

エベレスト頂上の標高は、 $8.848[\text{km}]$  であるという。なので、エベレスト頂上の重力加速度  $g_{\text{エベレスト頂上}}$  は、

$$\begin{aligned} g_{\text{エベレスト頂上}} &= (6.673 \times 10^{-11}) \\ &\times \frac{(5.974 \times 10^{24})}{((6.378 \times 10^6) + (8.848 \times 10^3))^2} \\ &= 9.77266883... \\ &= 9.773 [\text{m/s}^2] \quad (\text{有効桁数を考慮}) \end{aligned}$$

<sup>11)</sup> ベクトルを表す際の約束事として、ベクトル  $r$  の大きさは、文字を細くして、 $r$  と表す習慣がある。細かいことを言うと、ベクトルの内積の公式のひとつに、 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = r^2 = |\mathbf{r}|^2 = |\mathbf{r}|^2 = r^2$  がある。

である。

地表の重力加速度よりも小さい値となった。標高が  $h = 8.848[\text{km}]$  の分、重力が弱まる。一般に、 $h$  が大きいほど式の分母が大きくなり、重力が小さくなることは、容易にわかる。地球上で最大級の高さを誇る標高でも、 $g = 9.773[\text{m/s}^2]$  で、 $g = 9.80[\text{m/s}^2]$  と大差ない感じ<sup>12)</sup>。

### 7.3.3 放物運動

#### ¶ 概要

放物運動は、二次元的な（平面内の）運動である。つまり、2つの方向に対して運動方程式を考える必要がある。2方向として、垂直方向と水平方向を考える。ここで表現される水平とは、地上に対するものという。座標系は、垂直方向を  $y$  とし、水平方向を  $x$  とした直交座標とする。

この2方向の運動は、互いに独立させて考えられる<sup>13)</sup>。なので、垂直方向の運動と水平方向の運動を別々に考えた後、この2つの運動を重ねあわせることで放物運動を見ていこう。

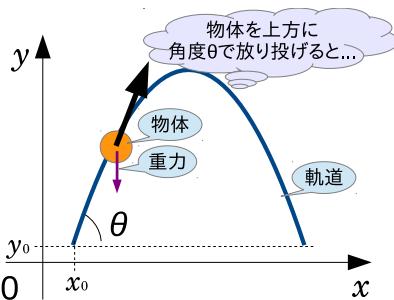


図 7.6 放物運動

#### ¶ 初期設定

初期設定を与えるところから、考察をはじめよう。

- 開始時刻:  $t = t_0$

<sup>12)</sup> まあ、この差を大きいとみるか、小さいとみるかは、状況によるのだけど。

<sup>13)</sup>  $x$  方向の運動に、 $y$  方向の運動が影響することはない。逆も同じ。

- 初期位置:  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0) = (x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$
- 初速度:  $\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0$

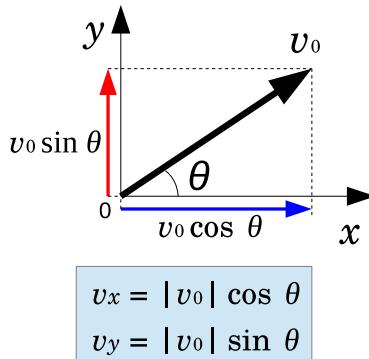


図 7.7 放物運動開始

初期条件から、垂直方向 ( $y$  軸方向) と水平方向 ( $x$  軸方向) の初速度  $v_{x0}$ ,  $v_{y0}$  を求める。まず、図 7.7 をみて、図形的イメージを覚えてもらいたい。やることは簡単で、三角関数を用いて、初速度  $\mathbf{v}_0$  を  $x$ ,  $y$  の各成分へ分解するだけだ。

$$(水平方向) \quad v_{x0} = |\mathbf{v}_0| \cos \theta. \quad (7.27)$$

$$(垂直方向) \quad v_{y0} = |\mathbf{v}_0| \sin \theta. \quad (7.28)$$

#### ¶ 水平方向の運動方程式

水平方向の運動方程式の形は、

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x.$$

運動中は水平方向に力が働くないので、 $F_x = 0$ 。よって、

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0. \quad (7.29)$$

この方程式は、等速直線運動の方程式であり、以前に解いたことがある。速度は初速度のままで一定で、

$$v_x(t) = |\mathbf{v}_0| \cos \theta \quad (7.30)$$

となる<sup>14)</sup>。位置は、

$$x(t) = v_x(t)t + x_0 = (|\mathbf{v}_0| \cos \theta)t + x_0. \quad (7.31)$$

### ¶ 垂直方向の運動方程式

垂直方向の運動方程式は、

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = F_y. \quad (7.32)$$

垂直方向は、重力が働いていることによる、等加速度運動である ( $F_y = -mg$ )<sup>15)</sup>。重力を運動方程式に代入し、整理しよう。

$$\begin{aligned} m \frac{d^2y}{dt^2} &= -mg \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -g. \quad (m \text{ で両辺を割った}) \end{aligned}$$

等加速度運動についても、前に計算してあるので、ここではその結果を使う。加速度が  $g$  の場合、等加速度運動の速度は、

$$v_y(t) = -gt + v_{y0} = -gt + |\mathbf{v}_0| \sin \theta.$$

位置は、

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{y0}t + y_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + (|\mathbf{v}_0| \sin \theta)t + y_0.$$

<sup>14)</sup> 速度の関数に、独立変数として時間  $t$  を明示しているが、左辺には時間は含まれていない。これは時間に無関係であることを意味する。しかし、ここではあえて、時間によらず一定であることを示すために、時間を独立変数として記載することにしている。理由は、垂直方向の速度は時間変化することと、対比したいからだ。

<sup>15)</sup> 1つ注意してほしい。重力加速度はベクトル量である。だから、地球の重力加速度もベクトル表記して、 $\mathbf{g}$  と記述すべきだ。だが、ここで考えているのは、垂直方向の1次元なので、ベクトル表記はしていない。

### ¶ まとめ

以上の結果をまとめておこう。放物運動する物体の位置と速度は、

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (|v_0| \cos \theta)t + x_0 \\ -\frac{1}{2}gt^2 + (|v_0| \sin \theta)t + y_0 \end{bmatrix}. \quad (7.33)$$

$$\begin{bmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |v_0| \cos \theta \\ -gt + |v_0| \sin \theta \end{bmatrix}. \quad (7.34)$$

## 7.3.4 宇宙速度

宇宙空間で運動するために必要な速度のことを、**宇宙速度** という。宇宙速度とは、慣性運動のみで宇宙空間へ到達するために、最初に与える最低初速度をいう<sup>16)</sup>。宇宙速度には3つの段階があって、それぞれ、第一宇宙速度、第二宇宙速度、第三宇宙速度 とよばれる。各宇宙速度は、下のように定義される。

### 第一宇宙速度

地表ギリギリで、等速円運動を続けるために必要な最小初速度。地球と同じ大きさ、同じ質量の球体を地球に見立てて計算される値。なので、空気抵抗や、建築物の有無は考慮しない。地球の人工衛星になりたい場合に、必要な速度。

### 第二宇宙速度

地球の重力を振り切り、地球圏外へ脱出するために必要な最小速度。脱出速度といわれることも多い。太陽の人工惑星になりたい場合に、必要な速度。

### 第三宇宙速度

太陽圏外へ脱出するために必要な最小速度。太陽系にいるのが嫌になったときに、太陽系から脱出するためには少なくともこの速度をもっていなければならぬ。

#### 7.3.4.1 第一宇宙速度

第一宇宙速度、要するに、地球の人工衛星になるために最低必要な速度、を計算しよう。何より最初に、運動方程式をたてよう。人工衛星になるためには、地球の周り

<sup>16)</sup> 宇宙速度は、宇宙空間に飛びたすために、絶対に書かせない速度ではない。地球の重力以上の力を対象物に与え続けられるのであれば、どんなに遅くとも、宇宙空間に到達させることができる。宇宙速度という概念は、慣性によって、宇宙へ到達するための初速度である。

を等速円運動しないといけない。人工衛星にしたい物体の速度を  $v$  としたとき、半径  $R_E$  の地球の表面に軌道を描くには、万有引力と向心力を用いて、以下の方程式を満たす必要がある。向心力と万有引力は次の通り。

$$\begin{aligned} \text{(向心力)} &= \frac{mv^2}{R_E + h}. \\ \text{(万有引力)} &= G \frac{mM_E}{(R_E + h)^2}. \end{aligned}$$

よって、満たすべき方程式は、

$$\frac{mv^2}{R_E + h} = G \frac{mM_E}{(R_E + h)^2}. \quad (7.35)$$

式を整理して、 $v$  について解こう。

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{R_E + h} &= G \frac{mM_E}{(R_E + h)^2} \\ v^2 &= G \frac{M_E}{R_E + h} \end{aligned}$$

以上から、

$$v = \sqrt{G \frac{M_E}{R_E + h}}. \quad (v < 0 \text{ の解は除外}) \quad (7.36)$$

$h = 0$ (地表すれすれを想定) のとき、上記の値  $G$ ,  $M_E$ ,  $R_E$  を代入してみよう。  
計算すると、

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{(6.67 \times 10^{-11}) \times \frac{(5.97 \times 10^{24})}{(6.37 \times 10^6) + 0}} \\ &= \sqrt{\frac{6.67 \times 5.97}{6.37} \times \frac{10^{-11} \times 10^{24}}{10^6}} \\ &= \sqrt{\frac{6.67 \times 5.97}{6.37} \times 10^7} \\ &= 7906.42..... \\ &= 7.91 \times 10^3 \text{ [m/s]} \text{ (有効桁数を考慮)} \end{aligned}$$

となつた<sup>17)</sup>。

以上から、第一宇宙速度は、 $7.91 \times 10^3$  [m/s] であることがわかつた。

---

<sup>17)</sup> Python(2.7.3) を使って計算した。import math で数学関数をインポートした後、math.sqrt((6.67\*5.97/6.37)\*10\*\*7) を実行し、出力 7906.428836995505 を得た。

### 7.3.4.2 第二宇宙速度

第二宇宙速度は、地球の重力圈外に脱出するのに、最低限必要な初速度である。つまり、重力から生じる位置エネルギーを振り払うだけの速度（運動エネルギー）を与えてやらないといけない。言い換えると、運動エネルギーと地球の位置エネルギーの和が0以上になるように、初速度を与えるということだ<sup>18)</sup>。

地球の重力の位置エネルギー  $U_E$  は

$$U_E = -G \frac{mM_E}{R_E + h}$$

である。ここで、上式は、地表から  $h$  だけ上方の位置エネルギーを表している。よって、この位置エネルギー以上の運動エネルギーを与えるべきだ。

$$\frac{1}{2}mv^2 + U_E \geq 0,$$

すなわち、

$$\frac{1}{2}mv^2 - G \frac{mM_E}{R_E + h} \geq 0 \quad (7.37)$$

を満たす  $v$  であればよい。

$v$  について解くと、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 - G \frac{mM_E}{R_E + h} &\geq 0 \\ \frac{1}{2}v^2 - G \frac{M_E}{R_E + h} &\geq 0 \\ \frac{1}{2}v^2 &\geq G \frac{M_E}{R_E + h} \\ v^2 &\geq 2G \frac{M_E}{R_E + h} \\ v &\geq \sqrt{2G \frac{M_E}{R_E + h}}. \end{aligned}$$

最後の変形で、 $v < 0$  を除外した。第二宇宙速度は上式を満たす最小の  $v$  であることから、

$$v = \sqrt{2G \frac{M_E}{R_E + h}}. \quad (7.38)$$

<sup>18)</sup> 重力による位置エネルギーは負であるから、合計が正になるような運動エネルギーが必要とされる。

で計算できる。

これに具体的な数値を代入してみよう ( $h = 0$  として、地表すれすれを想定)。すると、

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{2 \times (6.67 \times 10^{-11}) \times \frac{5.97 \times 10^{24}}{6.37 \times 10^6 + 0}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \times 6.67 \times 5.97}{6.37} \times \frac{10^{-11} \times 10^{24}}{10^6}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \times 6.67 \times 5.97}{6.37} \times 10^7} \\ &= 11181.37\dots\dots \\ &= 11.2 \times 10^3 \text{ [m/s]} \text{ (有効桁数を考慮)} \end{aligned}$$

となった<sup>19)</sup>。

以上から、第二宇宙速度は、 $11.2 \times 10^3$  [m/s] であることがわかった。

#### # memo No.55: 補足

第一宇宙速度と第二宇宙速度には、簡単な数値関係が知られている。というのも、

$$\text{"第二宇宙速度"} = \sqrt{2} \text{"第一宇宙速度"}$$

という関係があるのだ。実際に、

$$\begin{aligned} \text{"第一宇宙速度"} &= \sqrt{G \frac{M_E}{R_E + h}} \\ \text{"第二宇宙速度"} &= \sqrt{2G \frac{M_E}{R_E + h}} \end{aligned}$$

であり、

$$\sqrt{2G \frac{M_E}{R_E + h}} = \sqrt{2} \sqrt{G \frac{M_E}{R_E + h}}$$

が成立している。

この規則を知っていると、第一宇宙速度と第二宇宙速度のどちらか一方が計算済みなら、他方を計算するのが楽になる。単に、 $\sqrt{2}$  倍、あるいは、 $1/\sqrt{2}$  倍すればいいのだ。

#### 7.3.4.3 第三宇宙速度

計算中。

---

<sup>19)</sup> Python(2.7.3) を使って計算した。import math で数学関数をインポートした後、math.sqrt((2\*6.67\*5.97/6.37)\*10\*\*7) を実行し、出力 11181.378891216778 を得た。

### 7.3.5 躍度 (jerk) と運動方程式

躍度  $j$  の定義式は以下であった<sup>20)</sup>.

$$j := \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{d^3\mathbf{x}}{dt^3}.$$

これと運動方程式を関連づけてみよう. 運動方程式は

$$m \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{F}.$$

であった. この式の両辺を時間微分すると, 左辺に  $j$  が現れる.

$$\begin{aligned} m \frac{d^3\mathbf{x}}{dt^3} &= \frac{d\mathbf{F}}{dt}. \\ \therefore \quad m\mathbf{j} &= \frac{d\mathbf{F}}{dt}. \end{aligned}$$

この式から, 力の時間変化によって躍度 (jerk) を発生させると解釈してよいだろう.

人が物体を手で引っ張っている状況を想像してみると, 常に正確に一定の力で引っ張ることは不可能である. 機械に頼ったとしても, ブレはあるはず. それに, 摩擦があることも想定できて, この場合は凸凹加減に場所によって物体にかかる合力が変わってくる.

乗り物（車/電車/飛行機など）に乗っているとき, 躍度が生じると不快感を感じる. 車の停止状態からアクセルを踏む強さを急激に変えると, 加速度が  $\mathbf{0}$  の状態から急に大きくなるため大きな躍度が生まれる. また, 減速時もおなじである. 等速直線運動していたとして, 急にブレーキを踏めば, 進行方向と逆向きの大きな加速度が生じる.

躍度は実際には毎日ごく当たり前に感じている間隔を説明する大事な概念である. だけど, 力学の教科書には躍度の紹介がないのはなぜだろうか.

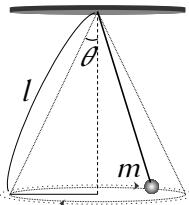


図 7.8 円錐振り子

### 7.3.6 円錐振り子

### 7.3.7 調和振動（単振動）

#### 7.3.7.1 弾性力

物体に対して、破壊しない程度の力を与えて、物体に歪を与えると、もとの形に戻ろうとする力が生じる。この力を **弾性力** という。

#### 7.3.7.2 フックの法則

バネになんの力も加えられていない場合、その自然の長さを  $l_0$  とする。バネの一端を固定し、他方を指でつまんで長さ  $l$  となるように力  $\mathbf{F}$  で引っ張ってみる。このとき、バネからは縮もうとする向きに力が働く。このバネの力を  $\mathbf{S}$  で表そう。 $\mathbf{S}$  は弾性力の一種である。もとに戻ろうとする力というイメージから、復元力とも呼ばれる。バネを伸ばす力  $\mathbf{F}$  と復元力  $\mathbf{S}$  は互いに作用反作用の関係にある。よって、

$$\mathbf{S} = -\mathbf{F} \quad (7.39)$$

の関係にある。

バネの種類によって、その復元の力の置きさはことなる。その指標を **バネ定数** と名付けて、 $k$  とかくことにする。復元力の大きさは、バネの自然の長さからの変位  $l - l_0$  に比例することが知られていて、バネ定数  $k$  はこの比例定数である。式にすると、

$$S = -k(l - l_0) \quad (7.40)$$

<sup>20)</sup> 3.5 節の式 (3.41) を参照。

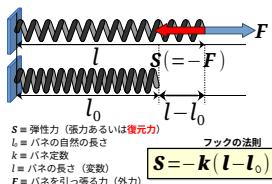


図 7.9 フックの法則

である。ただし、バネが伸びる方を正の向きとする。バネが伸びるとき  $S$  は正の値をとり、バネが縮んでいるときは、 $S$  は負の値となる。自然の長さのとき、つまり、 $l = l_0$  の場合は  $S = 0$  であり、復元力は生じない。しかし、慣性の法則により、 $S = 0$  のときにも運動は止まることはない。止まらなかった結果、バネが伸びる（あるいは縮む）ので、復元力が再び生じて延々と運動を繰り返す。

バネの長さ  $l$  が自然長の長さ  $l_0$  より長いとき（バネを引っ張っているとき）は

$$\begin{aligned} l &> l_0 \\ \Leftrightarrow l - l_0 &> 0 \\ \therefore S &= -k(l - l_0) < 0 \end{aligned}$$

となり、 $S$  が負になるので、バネを引っ張る場合は縮む向きに復元力が働くことが式で表現できている。バネの長さ  $l$  が自然長の長さ  $l_0$  より短いとき（バネを縮めているとき）は

$$\begin{aligned} l &< l_0 \\ \Leftrightarrow l - l_0 &< 0 \\ \therefore S &= -k(l - l_0) > 0 \end{aligned}$$

となり、 $S$  が正になっていて、バネが伸びる向きに復元力が生じる。

### 7.3.7.3 単振動の種類

バネにくついた物体が上下あるいは左右などに揺れている様子を **単振動** という。上下/左右ではなくても一方向の定常的な揺れであれば単振動である。摩擦などがあって徐々に振動が弱くなっていく場合は **減衰振動** という。物体がついていないもう片方の端っこ部分を振動させた場合は、**強制振動** という。教科書でよく例題として取り上げられるのはこれくらいかな。

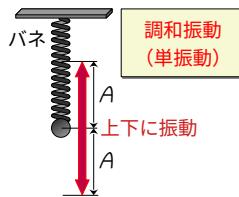


図 7.10 調和振動（単振動）

## 7.3.7.4 調和振動の運動解析

## ◀ 例題設定

バネ定数  $k$  のバネにつながった物体の動きを物理的に解析する。物体にかかる力は、重力  $mg$  とそれに対応する床からの垂直抗力  $N$ 、バネから受ける弾性力  $F$  の 3 つである。今から考える状況はバネは水平にして、重力に対して垂直に運動するような場合を想定する。外力を与えない、バネのみの力による運動とする。図 7.11 にそのイメージを描く。図の上部が伸びが最大、図の下部が伸びが最小、それらの中間がバネが自然な長さにある瞬間を描いた。

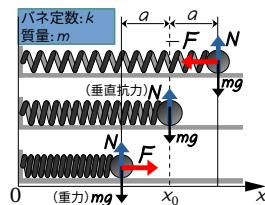


図 7.11 調和振動の運動解析

## ◀ 座標の設定

真横に振動する 1 次元の調和振動についての現象を解析することだ。3 次元座標のうち、 $y$  座標と  $z$  座標は常に 0 であるように座標を張ると、運動方程式が簡単

になるので<sup>21)</sup>、物体の位置  $\mathbf{r}$  は次のように設定する。

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) [= (x(t), 0, 0)]. \quad (7.41)$$

ここで、カッコ [] でくくった部分  $(x(t), 0, 0)$  は次の初期値によって計算される結果であり、仮定ではない。逆に以下で、このようになるように、初期値を設定する。

#### ¶ 初期値

- バネが自然の長さにあるときの物体の位置を  $x_n$  とする
- $t = 0$  のときの物体の位置  $\mathbf{r}(0)$  を以下のようにとる

$$\mathbf{r}(0) = (x(0), y(0), z(0)) := (x(0), 0, 0). \quad (7.42)$$

- 初速度  $\mathbf{v}(0)$  はどの方向にも与えず、どの方向も 0 であるとする

$$\mathbf{v}(0) = (v_x(0), v_y(0), v_z(0)) := (0, 0, 0). \quad (7.43)$$

- 摩擦はなく、空気抵抗もなく、重力は至るところで均一で、外力も全く加えず、電場や磁場もないし、当然、素粒子レベルの強い力や弱い力なんかは想定の範囲外

#### ¶ 方向成分の解析 (1): $y$ 成分と $z$ 成分

まず簡単な、 $y$  軸方向と  $z$  軸方向の運動を解析する。ここで設定した状況は、 $y$  方向へも  $z$  方向へも運動しない（位置を変えない）ように初期値設定と座標設定をしたはずである。そのことを確認しよう。

バネから受ける弾性力  $\mathbf{F}$  を成分表示すると、

$$\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z) = (F_x, 0, 0). \quad (7.44)$$

となる。3次元ベクトルのまま考えてもよいが、この場合、 $y$  方向と  $z$  方向については位置の変化はない。例えば、 $y$  方向の位置と速度は、時間を独立変数として、位置を  $y(t)$ 、速度を  $v_y(t)$  とすると次のように計算される。

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = F_y$$

<sup>21)</sup> 教科書のような理想的な状況設定だと、調和振動は一方向のみの振動なので、全方向に成分を持つように座標を張ることは、座標設定ミスである。座標は計算しやすいように考えてから設定すべきだ。

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow m \frac{d^2y(t)}{dt^2} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{dy(t)}{dt} = 0 \\
 &\therefore \frac{dy(t)}{dt} = v_y(0). \\
 &\therefore y(t) = v_y(0)t + y(0).
 \end{aligned}$$

初期値  $v_y(0) := 0$ ,  $y(0) := 0$  だから,

$$y(t) = 0. \quad (7.45)$$

よって,  $y$  方向には微動だにしない.

$z$  軸方向も  $y$  軸方向と同じ条件なので,

$$z(t) = 0. \quad (7.46)$$

である.

#### ¶ 方向成分の解析:(2) $x$ 成分

$x$  軸方向にはバネの伸び縮みによる復元力が生じているので, フックの法則が使える.  $x$  方向に働く力  $F_x$  は, バネ定数を  $k$ , バネの自然の長さを  $x_n$  としたとき,

$$F_x = -k(x(t) - x_n) \quad (7.47)$$

で与えられる. よって, 運動方程式は

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -k(x(t) - x_n) \quad (7.48)$$

である. ここで,

$$X(t) := x(t) - x_0 \quad (7.49)$$

とおくと,

$$\frac{dX(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}, \quad \frac{d^2X(t)}{dt^2} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

であるから,

$$m \frac{d^2X(t)}{dt^2} = -kX(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2X(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m}X(t) \quad (7.50)$$

となる。微分方程式を解くと、

$$\begin{aligned} X(t) &= A \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t + B \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t \\ \Leftrightarrow x(t) - x_0 &= A \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t + B \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t \\ \therefore x(t) &= A \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t + B \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t + x_0 \end{aligned} \quad (7.51)$$

を得る。角周波数  $\sqrt{k/m}$  を  $\omega$  でとおいてやると、見やすくなる。

$$\omega := \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (7.52)$$

$$x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t + x_0. \quad (7.53)$$

## ¶ 結果

一次元の調和振動の解析結果。

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= (x(t), y(t), z(t)) \\ &= (x(t), 0, 0) \\ &= (A \sin \omega t + B \cos \omega t + x_0, 0, 0) \end{aligned} \quad (7.54)$$

# 8

## 惑星の運動

### 8.1 はじめに

ニュートンはデカルトやガリレイらの先人の考えに影響を受けながら、力学を構築した。この先人の中にはケプラー<sup>1)</sup> の名前もあり、万有引力の法則は、ケプラーの法則を説明するために考え出されている。と言っても、万有引力の法則は、惑星だけの性質ではなく、世の中に存在する全ての物体が持つべき性質であると、理解が拡張されている。ニュートンは、惑星の運動と地上の物体の運動は同じ運動法則に従っている、と主張するのである。

惑星の軌道に関する情報は、ケプラーよりも前の時代に、ティコ・ブラーエ<sup>2)</sup> が膨大な観測データを残していた。ケプラーは、このデータに規則性を見出し、惑星の運動に関する3つの法則を見つけ出した。今日では「ケプラーの法則」と呼ばれる、さらにその後、ニュートンはケプラーの3つの法則を包括するような、力学体系を築いた。これが現在のニュートン力学と呼ばれるものである。地上の物体の運動と、惑星の運動は同じ法則に従っていることを示したのである。

<sup>1)</sup> Johannes Kepler ( 1571 - 1630, ドイツ )

<sup>2)</sup> Tycho Brahe ( 1546 - 1601, デンマーク )

惑星の運動の記述は、このように、ニュートン力学の1つのクライマックスでもある。惑星の運動が分からずに、ニュートン力学を学んだとは言えない。

この章では惑星の運動の記述を考えていこう。

## 8.2 ケプラーの法則

ケプラーはティコ・プラーエの残した、膨大な惑星の観測データから、惑星の運動軌道は、次の3つの法則によって、説明できることを発見した。

### Point 31: ケプラーの法則（惑星の運動に関する3つの法則）

惑星の運動は、以下の3つの法則に従っている。

#### 第1法則（楕円軌道の法則）

惑星は太陽を1つの焦点とする、楕円軌道を描く。

#### 第2法則（面積速度一定の法則）

一定時間に、太陽と惑星を結ぶ動径が掃く面積は一定である。

#### 第3法則（調和の法則）

惑星の公転周期の2乗と、惑星の太陽からの距離の3乗の比は、どの惑星でも一定である。

まずこれらを数式で表現してみよう。

### 8.2.1 楕円の方程式

楕円を数式で表そう。

### 8.2.2 極座標での運動方程式

惑星の運動は角運動であるから、極座標を採用する。水平方向の角度を $\phi$ 、高さ方向の角度を $\theta$ 、原点からの直線距離を $r$ とする。点Pは $(r, \theta, \phi)$ と表現される。

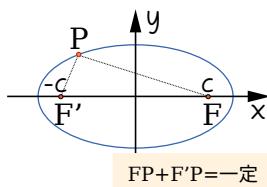


図 8.1 楕円と座標・方程式

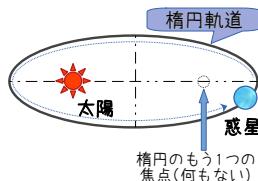


図 8.2 惑星の椭円軌道

## 8.2.3 第1法則；椭円軌道の法則

## 8.2.4 第2法則；面積速度一定の法則

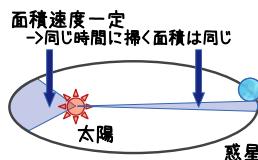


図 8.3 面積速度一定

### 8.2.5 第3法則；調和の法則

# 9

## 解析力学

### 9.1 はじめに

#### 9.1.1 教科書

使用する教科書は、下記の通り。

- 早田 次郎 [著], 『現代物理のための 解析力学』, サイエンス社
- 小出 昭一郎 [著], 『物理入門コース 解析力学』, 岩波書店

#### 9.1.2 解析力学とは

解析力学とは、ニュートン力学を数学的に一般化し、整理しなおしたものである。要は、力学を数学的に扱うのである。そうすることで、そのままのニュートンの運動方程式では解きにくかった問題を、容易に解けるようになる。また、とても不思議なことだが、量子力学の定式化をはじめとし、現代の物理学では解析力学がその土台となっている。

ただ、表現が数学的であるため、物理的意味をイメージすることは難しい。なの

で、解析力学を学ぶにあたって、その物理的意味を考えないようにしたい。解析力学を学ぶ理由は、現代物理学の土台を学ぶことであり、物理学の体系的な理解をすることであり、力学的な問題の解決をいくらか容易にすることである。ニュートンが運動の法則を数式で表現してくれたのだから、これを数学的に解析し、計算しやすく一般化しないのではもったいない。

だから、これからしばらくは、物理的イメージがどうのこうのというよりも、ニュートンの運動方程式を数学的にどのように解くかに注目していきたい。物理を離れて、数学を学習している気分になってしまふかもしれないが、これは仕方ないだろう。

解析力学とは、物理学的な問題をとくための数学的な手法であり、現代物理学の目標の1つである、統一理論<sup>1)</sup>を見つけ出すための基礎である。解析力学なしに、現在の物理学は成り立たない。

### 9.1.3 解析力学の目的

解析力学の學習目的は、ニュートン力学では解くのに難しかった問題<sup>2)</sup>を、数学的手法を駆使することで、比較的簡単に解けるようになることである。これが、最初に解析力学を學習する最も一般的な目標だろう。しかし、解析力学の學習は、上にも書いたように、別のもっと重要な目的がある。それは、物理学の各分野の統合に使われるということに、注目される。物理学を統一的に扱うには、より一般的に通用する<sup>3)</sup>ことが必要である。物理学の各分野を統一するような、数学的表現方法が欲しいのである。そして、解析力学は、その要求を満たす。

解析力学は、ニュートンの運動方程式のままでは解くのに難しい問題を簡単化することができ、さらに加えて、現代の物理学の最も基本的な考え方となっている。

とはいいうものの、解析力学は数学ではなく、物理学である。だけども、物理学を数学っぽく扱うので、物理っぽくない。おそらく、初学者は、解析力学のどっちつかずの性格に戸惑うはず。しかし、ここは割り切って、「超便利ツールの習得」と考えて、

<sup>1)</sup> 物理学の目的は、世界に存在する物質が従う、最も根源的な法則の発見である。その目的の達成似必要な情報の1つに、重力、電磁気力、弱い相互作用、強い相互作用の、4つの力を一気に説明するような、1つの方程式をみつけることがある。そのような理論を、(力の)統一理論とよんでいる。正確には、超大統一理論といわれるのだが、細かいことは気にしない。簡単な概念については、そのへんの啓蒙書をあさってみるとよい。

<sup>2)</sup> 例えば、2つのおもりが直列につながっているふりことか。

<sup>3)</sup> 一般的といったのは、ニュートン力学や電磁気学、熱力学、相対性理論、量子力学といった分野にまたがるという + 意味で使った。解析力学的表現は、不思議なことに、すべての物理学を統一的に表現するのに都合が良いみたいだ。

解析力学を学んでほしい。少々数学的に無理な仮定や考え方を含んでいたり、物理的に考えて意味のわからない概念の導入があるが、気にならない。とにかく学習してみよう。学習を終えたら、あるいはその途中で、解析力学の凄さ、恐ろしさを感じるだろう。

## 9.2 速習：解析力学

**コメント** 解析力学のその核心は、いかにも数学的で、いきなりその理論に挑んでも、おそらく挫折してしまうだろう。挫折しないのは、数学がとても好きな人か、直ぐに鵜呑みにする人か、もしくは、ご聰明なお方だけであり、たいていの人は混乱し、諦めがちだ。

なので、はじめに、解析力学とはどのようなものであるかを、今までの知識からわかるように、変分原理を用いずに解析力学の主要方程式を導く。この過程で、解析力学で扱う方程式について、おおよそのイメージをつかんでもらいたい。

もちろん、変分原理の理論も大事なので、その後改めて、解説する。

### 9.2.1 時間微分の省略記号

時間に関する微分、つまり時間微分の記号の省略記号を導入しよう。これから、時間微分を多用するからである。もちろん今までの時間微分の記号  $d/dt$  も使用する。式表現が複雑になる場合に<sup>4)</sup>、省略記号を使う。

省略記号は、次のようなものである。

$$\dot{r} := \frac{dr}{dt}. \quad (9.1)$$

時間微分の対象となる関数の上にドット記号「.」をつけるだけである。

この例の場合、時間微分したいのは位置  $r := r(t)$  である。位置を時間微分したものが速度なので、速度を  $v(t)$  とすれば、

$$v = \dot{r} := \frac{dr}{dt}.$$

である。

更に、2階微分をしたい場合には、ドットを2つ付ける ( $\ddot{r}$ )。

$$a = \dot{v} = \ddot{r} = \frac{d^2r}{dt^2}.$$

---

<sup>4)</sup> または、単に記述が面倒な場合でも。

同様に、3階以上の微分でもその分だけドット「」をつければいい。ただし、見難くなるし、あまり使われない。

このように、時間微分を植え付きのドットで表す記法を、ニュートン記法と呼んだりする。ちなみに、今までの微分記号  $d/dt$  はライプニッツ記法という。

以降では、ニュートン記法とライプニッツ記法を混合して使うが、その使い分けに特別な規則はない。単に、式を綺麗に書きたいというだけである。あまり気にしないで欲しい。

## 9.2.2 ラグランジュ形式の解析力学

**コメント** ニュートンの運動方程式をいじくって、数学的に扱いやすくする。その結果として得られる方程式はラグランジュ<sup>5)</sup>の運動方程式とよばれる。これから、ラグランジュの運動方程式を、簡略的に、導出してみよう。

話が長くなるので、段階を追って節を区切る。

### 9.2.2.1 ニュートン方程式の復習

まずはニュートンの運動方程式がないと話が始まらない。物体の運動方程式は、次のようにあった。

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}} = m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \quad (9.2)$$

ここに、 $m$  は物体の質量、 $\mathbf{r}$  は物体の位置、 $\mathbf{F}$  は物体の受ける力であり、 $t$  はもちろん時間を表す。

### 9.2.2.2 力とポテンシャル・エネルギーの関係式

ニュートン力学によると、力はポテンシャル・エネルギーの勾配と考えられる。そしてそれは、位置  $\mathbf{r}$  で偏微分することである。すなわち、

$$\mathbf{F} = \text{grad } U = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}. \quad (9.3)$$

この場合、力は保存力であるという条件がつく。以降では、力は保存力であるとして、話を進めよう。

---

► 5) www

力とポテンシャル・エネルギーの関係式、すなわち、

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}$$

を、ニュートンの運動方程式の左辺に考慮すると、

$$-\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = m\ddot{\mathbf{r}} = m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \quad (9.4)$$

次に、右辺  $m\ddot{\mathbf{r}}$  に注目しよう。運動量  $\mathbf{p} := m\mathbf{v} = m\dot{\mathbf{r}}$  を導入すると、

$$\begin{aligned} -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} &= m\frac{d}{dt}\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) \\ &= \frac{d}{dt}(m\dot{\mathbf{r}}) = \frac{d}{dt}\mathbf{p} \\ &= \dot{\mathbf{p}} \end{aligned} \quad (9.5)$$

式変形して、

$$\dot{\mathbf{p}} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = 0. \quad (9.6)$$

### 9.2.2.3 運動エネルギーと運動量

運動エネルギー  $T$  と速度  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$  の関係式を思い起こそう。

$$T(\dot{\mathbf{r}}, t) = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2. \quad (9.7)$$

上式で、運動エネルギーは速度と時間の関数であるということを強調するために、独立変数を明記した。両辺を、速度  $\dot{\mathbf{r}}$  で微分する<sup>6)</sup>。

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}} &= \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{r}}}\left(\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2\right) = m\dot{\mathbf{r}} \\ &= \mathbf{p} \end{aligned} \quad (9.8)$$

<sup>6)</sup> 初学者は、この辺りで消化不良を起こす。速度で微分するということの物理的意味がわからないからだ。しかし、ここにはさほど深い意味はない（単に私が気づいていないだけかもしれないが）。ここでは、機械的な式操作と考えて欲しい。数学的に矛盾がないのかどうかという不安も、大きいだろう。しかし、数学的なことについては、このノートでは考えることはしない。詳細は、数学の教科書や数理物理学の教科書を参照して欲しい。ただし、趣味の範囲で物理を行うには、数学的保証がなくともあまり気にならないことだろうと思うが。

運動方程式には、 $\dot{\mathbf{p}}$  が現れているので、両辺を微分し、 $\dot{\mathbf{p}}$  としよう。

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \dot{\mathbf{p}}. \quad (9.9)$$

これを式 (9.6) に代入する。すると、

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = 0. \quad (9.10)$$

となる。式を見てみると、運動方程式がエネルギーで表現されている。

#### 9.2.2.4 ラグランジアンの導入

さて、唐突だが、次のような量を導入しよう。

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) := T(\dot{\mathbf{r}}) - U(\mathbf{r})$$

このように定義された量  $L$  を ラグランジアン という。

#### Point 32: ラグランジアン

ラグランジアン  $L$  とは、以下の式で定義されるものである。

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) := T(\dot{\mathbf{r}}) - U(\mathbf{r}) \quad (9.11)$$

ここに、 $T$  は運動エネルギー、 $U$  はポテンシャル・エネルギーである。

ラグランジアン  $L$  を用いると、運動方程式をもう少しきれいに表現できる。

#### 9.2.2.5 ラグランジュの運動方程式

式 (9.10) の運動エネルギー  $T$  とポテンシャル・エネルギー  $U$  の部分を、ラグランジアン  $L$  で置き換えると、ラグランジュの運動方程式を得る。単純に置き換えられることを確認しておこう。

読みやすさを考えて、式 (9.10) をもう一度書いておく。

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = 0. \quad (9.10) \text{ の再掲}$$

式 (9.10) の第 1 項の  $T$  を  $L(:= T - U)$  に書き換えると同じことである。なぜなら、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial(T - U)}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}},\end{aligned}$$

つまり、

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}$$

となるからである<sup>7)</sup>。

式 (9.10) の第 2 項の  $U$  も、符号は異なるが、同じように、 $-L$  に置き換える。なぜなら、

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} &= \frac{\partial(T - U)}{\partial \mathbf{r}} \\ &= \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \\ &= -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}},\end{aligned}$$

つまり、

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial(-L)}{\partial \mathbf{r}}.$$

となるからである<sup>8)</sup>。

要するに、式 (9.10) の  $T$  を  $L$  に、また、 $U$  を  $-L$  に形式的に置き換えると、式は等価なままである。実際に書いてみると、 $T$  と  $U$  が  $L$  に統一され、少しスッキリとした形になる。

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = 0. \quad (9.12)$$

<sup>7)</sup> 位置エネルギー  $U$  は速度  $\dot{\mathbf{r}}$  の関数でないことから、 $U$  を  $\dot{\mathbf{r}}$  で微分すると 0 になることを考慮した ( $\partial U(\mathbf{r})/\partial \dot{\mathbf{r}} = 0$ )。

<sup>8)</sup> 運動エネルギーは位置  $\mathbf{r}$  の関数でないことから、 $T$  を  $\mathbf{r}$  で微分すると 0 になることを考慮した ( $\partial T/\partial \mathbf{r} = 0$ )。

まとめておこう。

### Point 33: ラグランジュの運動方程式

以下の式はニュートンの運動方程式と等価であり、ラグランジュの運動方程式という。または、単にラグランジュ方程式ともいう。

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0. \quad (9.13)$$

ここに、 $L$  はラグランジアンである。

### # memo No.56: 式 (9.13) と式 (9.10) の等価性

先ほどは  $T$  と  $U$  を別々に計算したが、以下のように、 $T$  と  $U$  を同時に式変形させたほうが、見通しがよいかもしれない。

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} \\ 0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial (T(\dot{r}) - U(r))}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial (T(\dot{r}) - U(r))}{\partial r} \\ 0 &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T(\dot{r})}{\partial \dot{r}} + \frac{\partial (-U(r))}{\partial r} \right) \\ &\quad - \frac{\partial T(\dot{r})}{\partial r} - \frac{\partial (-U(r))}{\partial r} \end{aligned}$$

左辺第2項と第3項は 0 であるから、結局第1項と第4項が残り、

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} + \frac{\partial U}{\partial r} = 0.$$

よって、式 (9.13) は、式 (9.10) と等価であることが確かめられた。式 (9.10) は式変形を施す前はニュートンの運動方程式であったことから、式 (9.13) はニュートンの運動方程式と等価である。

### 9.2.3 一般化された運動量

運動エネルギーを速度で微分すると、運動量が導かれる。これは、前にも計算した。もう一度確かめておくと、

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial}{\partial \dot{r}} \left( \frac{1}{2} m \dot{r}^2 \right) = m \ddot{r}.$$

ここで、運動エネルギー  $T$  を、ラグランジアン  $L$  に置き換えてみよう。すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= \frac{\partial(T(\dot{r}) - U(r))}{\partial \dot{r}} \\ &= \frac{\partial}{\partial \dot{r}} \left( \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - U(r) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \dot{r}} \left( \frac{1}{2} m \dot{r}^2 \right) - \frac{\partial}{\partial \dot{r}} U(r) \\ &= m \ddot{r} - 0 \\ &= m \ddot{r} \end{aligned}$$

となって、やはり、運動量が導出される。

そこで、思いつきって、「運動量  $p$  はラグランジアン  $L$  を速度  $\dot{r}$  で微分したものである」と定義てしまおう。すなわち、

$$p := \frac{\partial L}{\partial \dot{r}}.$$

こうして定義される運動量のことを、今までの運動量と区別して、一般化運動量という。

あまりに突拍子も無く定義され、また、一見して不可解な一般化運動量だが、解析力学を構築するためには、大変重要な概念である。しかし、この定義式の意味をあまり深く考えてはいけない。一般化運動量は形式的に定義されるものであり、物理的な意味は含まれない。物理的意味は、その定義式により演算されて出てくる結果にある。

**Point 34: 一般化運動量**

一般化運動量を以下で定義する.

$$\mathbf{p} := \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}. \quad (9.14)$$

### 9.2.4 一般化された力

ラグランジュ方程式:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = 0$$

を次のように変形する. 単に第2項を移項するだけなんだけど.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}.$$

ここで, 左辺の  $\partial L / r d\dot{\mathbf{r}}$  は, 先ほど定義したばかりの一般化運動量  $\mathbf{p}$  である. ということは,

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}.$$

と書いてしまおう.

この式を見て, 何か気づいただろうか. ニュートンの運動方程式と式の形が同じなのである<sup>9)</sup>. そのように見たとき, 右辺の  $\partial L / \partial \mathbf{r}$  は, 力  $\mathbf{F}$  に相当する量と見なせる. そこで,  $\partial L / \partial \mathbf{r}$  を一般化された力と解釈してしまおう.

**Point 35: 一般化力**

一般化力を以下で定義する.

$$\mathbf{F} := \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}. \quad (9.15)$$

<sup>9)</sup> ニュートンの運動方程式: ニュートン力学の意味での運動量  $\mathbf{p}$  と, 力  $\mathbf{F}$  は,

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$$

を満たす.

これも大胆で、最初は受け入れづらいが、とりあえず、鵜呑みしてもらいたい。学習していくうちにその凄さが理解できるだろう<sup>10)</sup>。

### 9.2.5 ハミルトン形式の解析力学

コメント ニュートン形式の運動方程式から、ラグランジュ形式に変換した。ここでは更に、先に勧めて、ハミルトン形式の運動方程式を導く。ハミルトン形式の運動方程式のことを、正準運動方程式という。この方程式は、座標変換を拡張した正準変換という考え方に基づいている。正準変換についても、あとで改めて取り上げよう。<sup>11)</sup>

正準運動方程式は2つの方程式の組みである。ラグランジュの運動方程式は2階の偏微分方程式であったが、正準運動方程式に書き換えると1階の偏微分方程式になる。ただし、先にも言ったとおり、方程式は2つに増えるのだが。このハミルトン形式の方程式は、量子力学を学ぶのに非常に役に立つ。というか、量子力学がハミルトン形式の解析力学を下敷きにして作られている。

量子力学は、物理学の大黒柱の一つで非常に重要な分野であり、現在の生活に深くかかわっている理論である<sup>12)</sup>。

趣味で物理学を学習するとはいえ、量子力学は避けて通れない<sup>13)</sup>。話がどんどん抽象的になってしまふが、どうにかそれをこらえて、学習して欲しい。

#### 9.2.5.1 ハミルトニアンの導入

ある関数の変数を別の新たな変数に置き換える変換方法がある。その1つに、ルジャンドル変換と呼ばれる変換がある。この変換は、熱力学でもおなじみのものである。その詳細は後で説明することにして、ここでは天下り的に、与えよう。数学の教科書ではないんで、いきなり実践的に使っててしまおう。

<sup>10)</sup> 何度も見していくうちに、いつの間にか当たり前のように感じてしまうようになるのは少々怖いところである。しかし、当たり前のではなく、あくまで理論形式的なもので、理論の構築に不可欠な定義であるということである。

<sup>11)</sup> 「正準変換」、変な単語だ。正準ってなんだ？ 英語だと "canonical transformation" だそうだ。"transformation" のほうはそのまま「変換」でわかる。じゃあ、"canonical" はなんだろう。「正典的、教会法に基づく、規準的な、標準的な」という意味らしい。やっぱりわからんので、ザックリと、「どの系でも使用できる普遍的な」という程度の意味としてとらえておこうと思う。

<sup>12)</sup> USB フラッシュメモリや SD カードなど、気軽に扱える小型の記憶媒体は量子力学で説明されるトンネル効果という現象を利用している。

<sup>13)</sup>もちろん、趣味なので、難しいから勉強しないという選択もできるかもしれないが、それではあまりにも中途半端だ。

どう使うかというと、ルジャンドル変換により、ラグランジアン  $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$  の独立変数である速度  $\dot{\mathbf{r}}$  を運動量  $\mathbf{p}$  に変換して、新たにハミルトニアン  $H(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  という関数を導入するのだ。

具体的には、次のように変換され、ハミルトニアン  $H(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  が定義される。

### Point 36: ハミルトニアン

ハミルトニアンを、ラグランジアンのルジャンドル変換を用いて、次式で定義する。

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) := \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}} - L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}). \quad (9.16)$$

#### 9.2.5.2 ハミルトニアンのもつ意味

ハミルトニアンのもつ意味を考える。もう一度、ハミルトニアンを記述してみよう。

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) := \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}} - L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}).$$

運動量  $\mathbf{p}$  と速度  $\dot{\mathbf{r}}$ 、ラグランジアン  $L$  をすべてエネルギーを使って表してみよう。まず、右辺第1項から見ていこう。

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}} &= (m\dot{\mathbf{r}}) \cdot \dot{\mathbf{r}} = m\dot{\mathbf{r}}^2 \\ &= \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 = T + T \\ &= 2T. \end{aligned}$$

第2項は定義通りで、 $L := T - U$  である。これらをハミルトニアンの定義式に当てはめてみよう。

$$\begin{aligned} H &= \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}} - L \\ &= 2T - (T - U) \\ &= 2T - T + U \\ &= T + U. \end{aligned}$$

つまり、

$$H = T + U \quad (9.17)$$

であり、ハミルトニアンは全エネルギーを表している。ただし、ハミルトニアンはエネルギーそのものではなく、エネルギーという概念を抽象化したものである<sup>14)</sup>。

## 9.2.6 正準方程式

### 9.2.6.1 汎関数

コメント 汎関数は関数の拡張概念として、関数のアナロジーで説明されることが多い<sup>15)</sup>。そこで、汎関数の説明の前に、関数とは何だったかを考え直してみようと思う。

#### ¶ 関数

今まで扱ってきた関数を改めて、言葉で言い表すと、ある実数  $x$  から別の実数  $y$  へ写す変換  $f$  のことであった<sup>16)</sup>。 $x$  から  $y$  に写すことを  $x \rightarrow y$  とかくことにし、この写すという行為を変換と捉えて、この変換に  $f$  という名前を与えるとき、 $f$  を関数という。記号で表すと、

$$f : x \rightarrow y$$

となる。意味を日常言語に近い形で表せば、

$$x \text{ を } y \text{ に写す関数 } f$$

といったところだろう。言い換えると、実数  $x$  を関数  $f$  に与えれば 実数  $y$  が決まる、という意味で、

$$y = f(x)$$

と書くことも多い。物理学では、ほとんどの場合、この  $y = f(x)$  の表記が用いられる。

<sup>14)</sup> ハミルトニアンが時間に依存しない場合、ハミルトニアンはエネルギーと同等である。言い換えると、いつも同じ値をとる場合、つまり、エネルギー保存が成り立つ系であれば、ハミルトニアンはエネルギーに一致する。ハミルトニアンが時間依存する場合には、それはエネルギーと同意移しすることはできない。ハミルトニアンは、数学的に導入された概念だから、物理学的な意味を与えようとしても無理がある。今のところは、深くは追及せずに勉強を進めよう。量子力学や場の理論を学習するころには何か思いつくかもしれない。

<sup>15)</sup> というか、そういう説明しか見たことがない。

<sup>16)</sup> ここで、別のと言ってしまったが、自身に写すことも許される。この時に注意したいのは、"自身に写したもの" と "自身それ自体" は別物ということである。

### ¶ 汎関数

関数を与えた時、実数が決まるような変換のことを **汎関数** という<sup>17)</sup>。関数の場合に倣った表現にすると、関数を  $f(\bullet)$  と表して

$$I : f(\bullet) \rightarrow y$$

と書ける。 $\bullet$  は、ここに独立変数が入る余地があることを示すものである。いつもの数式的に書くならば、

$$y = I[f(\bullet)]$$

となろう<sup>18)</sup>。 $f(\bullet)$  はどんな関数かはわからないが、この関数  $f(\bullet)$  に対して、具体的な形を与えることで実数が決まる関数  $F$  が、汎関数といわれる。

汎関数で特に着目すべき点は、汎関数  $I[f(\bullet)]$  が関数  $f(\bullet)$  の独立変数に依存しないという点である。

例えば、独立変数を  $\bullet = x$  として、 $f(\bullet) := f(x)$  を汎関数  $I$  の引数として考えた場合、汎関数  $I[f(x)]$  を見ても  $x$  はどこにも見当たらないということである。

種明かしをしよう。汎関数は一般的には、以下のような積分として表される。

$$I[f(x)] = \int \phi(f(x)) \, dx$$

$\phi$  は、実数から別の実数へと写す関数であり、つまり、今まで扱ってきた関数である。何度も書くが、汎関数  $I[f(x)]$  の変数としての関数  $f(x)$  はその形に意味がある、 $x$  に具体的な値を入れて数値にしたものではない（合成関数ではない）。 $x$  は  $x$  という変数として扱われる。しかし、汎関数にはこの  $x$  は直接的には依存しない。上に書いたように、 $\phi(f(x))$  が  $x$  で積分されてしまい、見えなくなってしまうのである。この  $x$  は積分パラメータである。非常にややこしいが、理論構築のために重要な数学的概念だから、理解したい。

### ¶ 汎関数の例

抽象的な説明だけだとわからないと思うので、汎関数を具体的に作ってみよう。

$$I[y] := y(3) - 2y(1)$$

<sup>17)</sup> 数学に慣れている場合、関数空間を定義域として持つ関数を汎関数という、と表現した方がわかりやすいかもしれない。

<sup>18)</sup> 汎関数を表す場合、関数と汎関数の書き分けのために、 $I[ ]$  といったように、 $[ ]$  で独立変数を囲って表すことが多い。

という汎関数  $I$  を作ってみる。汎関数  $I$  に代入する  $f(x)$  は、計算を簡単にするため、例えば、

$$y = f(x) := x + 1$$

としておく。この  $f(x)$  を自由に変えることが、今までの関数の独立変数を変化させることに対応している。こうしたとき、 $I[f(x)]$  は以下のうように計算できる。

$$\begin{aligned} I[y] &= I[f(x)] \\ &= f(3) - 2f(1) \\ &= (3+1) - 2(1+1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

関数  $y$  を定めることによって、実数が定まることが実感できただろうか。

別の例で、もう少し遊んでみるか。

$$y = g(x) := (x-1)^2$$

としてみよう。すると、

$$\begin{aligned} I[(y)] &= I[g(x)] \\ &= g(3) - 2g(1) \\ &= (3-1)^2 - 2(1-1)^2 \\ &= 2^2 - 2 \times 0 \\ &= 4. \end{aligned}$$

次のような汎関数  $H[y]$  を作っても良い。

$$H[y] := \int_0^1 y \, dx.$$

$y$  に対して、今使った  $f(x) := x + 1$ ,  $g(x) := (x-1)^2$  をそれぞれ適用すれば、

$$\begin{aligned} H[f(x)] &= \int_0^1 (x+1) \, dx \\ &= \left[ \frac{1}{2}x^2 + x \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H[g(x)] &= \int_0^1 (x-1)^2 dx \\
 &= \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) dx \\
 &= \left[ \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x \right]_0^1 \\
 &= \left( \frac{1}{3}(1^3) - (1^2) + (1) \right) - \left( \frac{1}{3}(0^3) - (0^2) + (0) \right) \\
 &= \frac{1}{3} - 0 \\
 &= \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

### 9.2.6.2 変分

解析力学を数学的に定式化しようとすると、変分法 という数学が必要になってくる。そこで用いられる主な概念が、変分 である。ここでは変分の定義を記述する。

#### ¶ 1 変数関数の場合

話を簡単にするために、1 変数関数で考える。まずは元となる関数を一つ用意し、これを  $f(x)$  としよう。変分とは、この元となる関数  $f(x)$  より少し異なる関数  $F(x)$  を考えた時の、「少し異なる」部分である。これを数式で記述すると、以下の様になる。

$$F(x) := f(x) + \varepsilon\eta(x). \quad (9.18)$$

ここに、 $\varepsilon\eta$  を関数  $f(x)$  の変分という。変分を表す特別な記号として、 $\delta$  を使って、

$$\delta f(x) := \varepsilon\eta(x) = F(x) - f(x) \quad (9.19)$$

と表すことが多い。これを使うと、

$$F(x) = f(x) + \delta f(x)$$

と書ける。こうすると、関数の変化分である雰囲気が数式に合わられてきて、イメージしやすい。また、 $\varepsilon$  は任意のとても小さい実数あり<sup>19)</sup>、 $\eta(x)$  は任意の関数である。 $\varepsilon$  はとても小さい数なので、 $\delta f(x)$  の値もそれにつられて小さくなる。だから、

---

<sup>19)</sup>  $\varepsilon - \delta$  論法の  $\varepsilon$  のイメージに同じ。

$F(x)$  はほとんど元の関数  $f(x)$  に近い形をしているのだが、"微妙に違う関数"ということになる。図 9.1 にそのイメージを示す。

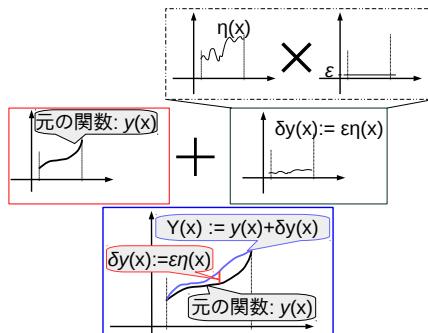


図 9.1 変分のイメージ

#### ¶ 多変数関数の場合

変数が 2 つある場合、すなわち、 $f(x, y)$  に対する変分について、考えよう。1 変数の場合に真似して、以下のような関数  $F(x, y)$  を導入する。

$$F(x, y) = f(x, y) + \varepsilon \eta(x, y). \quad (9.20)$$

ここで、 $\varepsilon$  は任意の小さな実数で、 $\eta(x, y)$  は任意の関数である。さらに 1 変数の場合と同様に、2 変数関数の変分  $\delta f(x, y)$  を以下のように与える。

$$\delta f(x, y) := \varepsilon \eta(x, y) = F(x, y) - f(x, y). \quad (9.21)$$

これを使って、以下のように書き直しておく。

$$F(x, y) = f(x, y) + \delta f(x, y). \quad (9.22)$$

3 変数以上の多変数関数についても、同じように定義できる。

$$\begin{aligned} \delta f(x, y, \dots) &:= \varepsilon \eta(x, y, \dots) \\ &= F(x, y, \dots) - f(x, y, \dots). \end{aligned} \quad (9.23)$$

独立変数の個数にかかわらず、同様に定義できるので、独立変数の記述を省略して一般性を高めた記述にでき、

$$\delta f := \varepsilon\eta = F - f$$

と書かれることになる。この場合、 $F$  や  $f$  が関数であることは前もって定義しておかないといけない。

### 9.2.6.3 汎関数の微分

汎関数は関数をその定義域として持つ関数であり、汎関数の微分と言われると、簡単にはイメージできない。関数  $f(x)$  を独立変数を持つ汎関数  $I[f(x)]$  を関数  $f(x)$  で微分する場合、

$$\frac{\delta I[f(x)]}{\delta f(x)} = \lim_{\delta f(x) \rightarrow 0} \frac{I[f(x) + \delta f(x)] - I[f(x)]}{\delta f(x)}$$

と書かれる。 $\delta f(x) \rightarrow 0$  とかかれても意味がわからないので、非常に小さい実数  $\varepsilon$  と任意関数  $\eta(x)$  を導入し、 $\delta f(x) := \varepsilon\eta(x)$  として置き換えてみよう。

$$\frac{\delta I[f(x)]}{\delta f(x)} = \lim_{\varepsilon\eta(x) \rightarrow 0} \frac{I[f(x) + \varepsilon\eta(x)] - I[f(x)]}{\varepsilon\eta(x)}$$

残念ながら、これではうまく微分を定義できそうにない。しかし、頭のいい人はいるもので、汎関数の微分を定義した人がいる。その人の名前をとって、ガトー微分と言われる<sup>20)</sup>。それは以下のように定義される。

$$\frac{\delta I[f(x)]}{\delta f(x)} := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{I[f(x) + \varepsilon\eta(x)] - I[f(x)]}{\varepsilon}. \quad (9.24)$$

言葉にしてみれば、「汎関数  $I[f(x)]$  の関数  $f(x)$  における  $\eta(x)$  に対する微分」となる<sup>21)</sup>。

<sup>20)</sup> René Eugène Gâteaux (1889–1914, フランス)：ここで紹介している通り、ガトー微分としてその名を残したフランスの数学者。第一次世界大戦で命を落とした。

<sup>21)</sup> いきなりこれを聞いたら、思考停止するだろう。ナンノコッチャ、サッパリわからない。しかし、一度は、ガトー微分の定義式と見比べながら、その意味をゆっくり消化していくって欲しい。ちゃんと意味のあることを言っている（意味不明ではない）。

### 9.2.6.4 汎関数の変分

#### ¶ 1 変数関数の場合

1 変数関数をその引数としてもつ汎関数  $I = I[f(x)]$  を考える。この汎関数  $I[f(x)]$  に対して、関数  $f(x)$  にその変分を加えた  $f(x) + \delta f(x)$  を代入し、 $I[f(x) + \delta f(x)]$  を作る。 $I[f(x) + \delta f(x)]$  と元の  $I[f(x)]$  の差分を汎関数  $I$  の変分といい、同様に  $\delta I$  とかく。

$$\delta I := I[f(x) + \delta f(x)] - I[f(x)].$$

上では、関数  $f$  を 1 変数関数としたが、多変数でもかまわない。なので、引数の記述を省略して、以下のように記述されることが多い。

$$\delta I := I[f + \delta f] - I[f]. \quad (9.25)$$

#### ¶ 多変数関数の場合

独立変数としての関数を複数もつ汎関数に対する変分も、1 変数の場合に真似て定義すればいい。

$$\delta I := I[f_0 + \delta f_0, f_1 + \delta f_1, \dots] - I[f_0, f_1, \dots]. \quad (9.26)$$

### 9.2.6.5 正準方程式の導出

ラグランジアン  $L$  は位置  $\mathbf{r}$  と速度  $\dot{\mathbf{r}}$  の関数であるので、その変分は以下のように書ける<sup>22)</sup>。

$$\delta L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \delta \mathbf{r} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \delta \dot{\mathbf{r}}.$$

この式に対して、一般化運動量  $\mathbf{p} = \partial L / \partial \dot{\mathbf{r}}$  と一般化された力  $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}} = \partial L / \partial \mathbf{r}$  を考慮すると、

$$\delta L = \dot{\mathbf{p}} \cdot \delta \mathbf{r} + \mathbf{p} \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}.$$

ここで、変分の公式

$$\delta(\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{p} \cdot \delta \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{p}$$

<sup>22)</sup> 左辺の  $L$  は独立変数を明示したが、右辺の  $L$  は式の煩雑さを避けるために独立変数表記を省略した。以下、ラグランジアン  $L$  は位置と運動量の関数であるとして、独立変数の表記を省略する。

を考える。この変分公式から、さつき計算した  $L$  を引くと、

$$\delta(\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - \delta L = \dot{\mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{p} - \dot{\mathbf{p}} \cdot \delta \mathbf{r}$$

となる。左辺は  $\delta$  で囲んでおこう。

$$\delta(\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}} - L) = \dot{\mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{p} - \dot{\mathbf{p}} \cdot \delta \mathbf{r}$$

そして、左辺に現れた  $\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}} - L$  に対して、これを ハミルトニアン と定義する。記号は  $H$  とする。

$$H := \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}} - L.$$

ハミルトニアンを使うと、

$$\delta H = \dot{\mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{p} - \dot{\mathbf{p}} \cdot \delta \mathbf{r}. \quad (9.27)$$

この式から、ハミルトニアン  $H$  のもつ独立変数は、 $\mathbf{p}$  と  $\mathbf{r}$  であるといってよい。つまり、一般に、ハミルトニアンの変分  $\delta H$  は以下のように計算される。

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \delta \mathbf{p} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} \delta \mathbf{r}. \quad (9.28)$$

式 (9.27) と式 (9.28) を見比べてみると、以下の関係が成立していることが見て取れる。

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \dot{\mathbf{r}} \quad (9.29)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = -\dot{\mathbf{p}}. \quad (9.30)$$

この 2 つの式はハミルトンの 正準運動方程式 と呼ばれる<sup>23)</sup>。

---

<sup>23)</sup> 本当のことをいうと、この方程式は正式な正準運動方程式とはいえない。という言うのも、一般化座標を定義せずに直交座標で感がてしまっているからである。しかし、一般化座標も直交座標も形 式的には全く同じ形で表現されるので、ここで表れている位置座標を一般化座標と同一視するこ とができる、この式を正準運動方程式と呼んでも差支えない。一般化座標については、後でよ り詳しく解析力学を学習するときに定義する。

## # memo No.57: 変分と微分の可換性

変数  $x$  を独立変数とする関数  $f(x)$  を考える。この関数からほんの少しだけずれた値を持つ関数を仮想的に考えて、これを  $F(x)$  とする。この時、

$$F(x) = f(x) + \delta f(x) \quad (9.31)$$

となるように、 $\delta f(x)$  を導入する<sup>24)</sup>。

ここで確認したいのは、「(1) 微分してから、その微分の変分をとる」ことと、「(2) 変分をとってから、その変分を微分する」ことが、同じ結果を導くということだ。要するに、「微分と変分の順番を入れ替えても結果が変わらない」ということを確認したいのである。式で書けば、

$$\delta \left( \frac{d}{dx} f(x) \right) = \frac{d}{dx} \delta f(x)$$

である。本当にそうなるか。確認してみよう。上の左辺を式変形していく、右辺に帰着させる<sup>25)</sup>。難しいことは何もない。微分と変分の定義に従って式変形していくだけでいい。実際の計算が以下になる。

$$\begin{aligned} & \delta \left( \frac{d}{dx} f(x) \right) \\ &= \delta \left( \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right) \\ &= \left( \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \right) \\ &\quad - \left( \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x) - f(x + \Delta x) + f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - f(x + \Delta x) - F(x) + f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(F(x + \Delta x) - f(x + \Delta x)) - (F(x) - f(x))}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\delta f(x + \Delta x) - \delta f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\delta(f(x + \Delta x) - f(x))}{\Delta x} \\ &= \frac{d}{dx} \delta f(x). \end{aligned}$$

<sup>24)</sup>  $\delta f(x)$  のことを 変分 とよぶのであった。

<sup>25)</sup>もちろん、右辺から左辺へ式変形してもいい。その場合、ここでの計算式を逆にたどったものになる、

## 9.3 変分原理

### 9.3.1 学習マップ

これから、最小作用の原理という考え方を使って、もう一度、ラグランジュの運動方程式を導出する。先ほどの導出方法は、少々強引な所があったが、最小作用の原理を使った導出方法はいくらか自然なものと感じることだろう。

話が長く、その順が把握しづらくなってしまうので、その過程を箇条書きをしておこう。

- (1) ダランベールの原理
- (2) 仮想仕事の原理
- (3) 最小作用の原理
- (4) ラグランジュの運動方程式の導出
- (5) ネーターの定理と対称性の確認
- (6) ハミルトニアンの導入（ラグランジアンのルジャンドル変換）
- (7) 正準運動方程式（ハミルトン形式の運動方程式）

この順番が、話の流れが自然だと思う。解析力学のほとんどの教科書が、この順で説明されている。

以降の話は、少々数学的な話になってしまふが、我慢して学習をしよう。解析力学がとても綺麗に整っている理論であること、一般性が高いということ等を実感できることだろう。

### 9.3.2 ダランベールの原理

$\ddot{r}$  を用いると運動方程式は

$$m\ddot{r} = \mathbf{F} \quad (9.32)$$

と書ける。この式の  $m\ddot{r}$  を右辺に移行して、

$$\mathbf{F} - m\dot{r} = 0 \quad (9.33)$$

となる。ここで、 $\bar{\mathbf{F}} := \mathbf{F} - m\ddot{r}$  とおくと、

$$\bar{\mathbf{F}} = 0 \quad (9.34)$$

とかける。この式は物体に力が加わっていない状態を表す。つまり、以下のように解釈できる。

**Point 37: ダランペールの原理**

運動している物体に  $-m\ddot{r}$  の力が加わると、あたかもそれが力  $\mathbf{F}$  と釣り合って、静止しているようにみなせる。

このような解釈を、ダランペールの原理 という。

### 9.3.3 仮想仕事の原理

静止している物体は、ダランペールの原理により、 $\mathbf{F} - m\ddot{r} = 0$  と表せる。この式の両辺に、仮想的な変位(仮想変位) $\delta\mathbf{r}(\neq 0)$  をかける。

$$(\mathbf{F} - m\ddot{r}) \cdot \delta\mathbf{r} = 0 \quad (9.35)$$

この式は、仮想仕事の原理 とよばれる。

### 9.3.4 ラグランジアンと最小作用の原理

**コメント** 仮想仕事の原理から、物体の運動の規則性を見つけることができる。そのために、ある曲面上で始点 A と終点 B を決める。始点 A は終点 B よりもポテンシャルが高い位置であるとする。このとき、物体を始点 A から離してポテンシャルのみによって終点 B に変位する状況を考える。どのような経路で物体は A から B へ移動するだろうか。実際に、何回も A から B へ物体を移動させたところで、外力が働く限り、経路は変わることはない。つまり何らかの規則があることが予想される。この規則をここで考えてみたいと思う。

仮想仕事の原理の式(9.35)の両辺を時間で積分する。その際、積分範囲は、 $\delta\mathbf{r}(t_1) = \delta\mathbf{r}(t_2) = 0$  を満たす  $t_1$  から  $t_2$  を用意して、 $t_1$  から  $t_2$  で積分する。イメージを言えば、始点 A が  $\mathbf{r}(t_1)$  にあたり、終点 B が  $\mathbf{r}(t_2)$  にあたる。これらを 0 としたのは、始点と終点が固定されているとを仮定するからである。

$$\begin{cases} \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{F} - m\ddot{r}) \cdot \delta\mathbf{r} dt = 0 \\ \delta\mathbf{r}(t_1) = \delta\mathbf{r}(t_2) = 0 \end{cases} \quad (9.36)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r} dt + \int_{t_1}^{t_2} -m\ddot{\mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{r} dt = 0 \quad (9.37)$$

この式の右辺第2項を部分積分して、

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} -m\ddot{\mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{r} dt \\ &= \left[ -m\dot{\mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{r} \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left( -m\dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{d}{dt} \delta \mathbf{r} \right) dt. \end{aligned} \quad (9.38)$$

ここで、 $\left[ -m\dot{\mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{r} \right]_{t_1}^{t_2}$  の項は、 $\delta \mathbf{r}(t_1) = \delta \mathbf{r}(t_2) = 0$  により、0 になる。よって、

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r} dt + \int_{t_1}^{t_2} \left( m\dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{d}{dt} \delta \mathbf{r} \right) dt = 0 \\ & \Leftrightarrow \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r} dt + \int_{t_1}^{t_2} (m\dot{\mathbf{r}} \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}) dt = 0 \end{aligned} \quad (9.39)$$

と計算できる。

ところで、

$$m\dot{\mathbf{r}} \cdot \delta \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2}m\delta(\dot{\mathbf{r}})^2 = \delta\left(\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2\right) \quad (9.40)$$

の関係を用いれば、

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} dt + \delta \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 \right) dt = 0 \quad (9.41)$$

である。ここで、仕事  $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$ 、運動エネルギー  $T = m\dot{\mathbf{r}}^2/2$  を用いて、

$$\begin{aligned} & \delta \int_{t_1}^{t_2} W dt + \delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = 0 \\ & \Leftrightarrow \delta \int_{t_1}^{t_2} (W + T) dt = 0 \end{aligned} \quad (9.42)$$

と書ける。

力がポテンシャルのみにより導かれるならば、この式の  $W$  はポテンシャル・エネルギーと同等であり、 $W = -U$  と書き換えれば、

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0 \quad (9.43)$$

を得る。さらに、ラグランジアン  $L$  を

$$L := T - U \quad (9.44)$$

と定義すると、

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad (9.45)$$

を得る。そして最後に、作用を

$$S := \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (9.46)$$

と定義すると、

$$\delta S = 0 \quad (9.47)$$

となる。これを **最小作用の原理** という。

言葉で言うならば、物体は作用  $S$  の変分  $\delta S$  が最小になるような軌道で運動する、となる。

幾つかの重要な概念が出てきた。まとめておこう。

#### Point 38: ラグランジアン

ラグランジアン  $L$  を次式で定義する。

$$L := T - U \quad (9.48)$$

#### Point 39: 作用

作用  $S$  を次式で定義する。

$$S := \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (9.49)$$

**Point 40: 最小作用の原理**

物体は作用  $S$  の変分  $\delta S$  が最小になるような軌道で運動する。これを **最小作用の原理** といい、次式で表される。

$$\delta S = 0. \quad (9.50)$$

## # memo No.58: ラグランジアンの定義について

ここで定義したラグランジアン  $L$  は、運動エネルギー  $T$  とポテンシャル・エネルギー  $U$  で表され、具体的には  $L = T - U$  である。運動エネルギー  $T$  は速度  $\dot{\mathbf{r}}(t)$  と時間  $t$  だけの関数であり、 $T = T(\dot{\mathbf{r}}(t), t)$  と表現でき、また、ポテンシャル・エネルギー  $U$  は位置  $\mathbf{r}(t)$  と時間  $t$  だけの関数であり、 $U = U(\mathbf{r}(t), t)$  と書ける。すなわち、ラグランジアン  $L$  は  $T(\dot{\mathbf{r}}(t), t)$  と  $U(\mathbf{r}(t), t)$  から定義される量であり、

$$L = L(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t) \quad (9.51)$$

と書けることがわかる。つまり、ラグランジアンは、位置座標と速度、時間の 3 つの独立変数をもつ関数であると言える。

さて、このように定義されるラグランジアンは、速度と位置座標と時間は独立な変数として扱っていることに注意する。速度の定義は位置座標の時間微分であって、従って、位置座標や時間とは独立ではないと考えられるが、ラグランジュ形式の力学では、あたかも位置座標と速度と時間が互いに独立な変数として扱うのである。

## # memo No.59: 最小作用の原理のイメージ

最小作用の原理が意味することは、物体が運動する時には作用が極大または極小になるような軌道を描くということである。ただそれだけのことを記述しているのである。従って、作用とは何かについては、教えてくれない。しかし、この作用という抽象的な概念さえ認めることができれば、力学の理論は“スマート”に記述できるのである。もつといえ、この作用というのは力学だけにとどまるものではなく、物理学全体にかかわるとても重要な概念である。従つて、「作用」という具体的なイメージをつかめなくとも、そのようなものが“存在”すると考えるのである。そうすれば、物理現象を統一的に扱える可能性が見出せるかもしれない..

### 9.3.5 ラグランジュの運動方程式の導出

これ以降の式変形は、単に形式的に考え、物理的または数学的意味は（とりあえず）考えないようにする。

前項目のように定義した  $S$  は関数  $L$  を変数とする汎関数である。このことを  $S[L]$  のように表現する。

ここでは、

$$S[L] = \int L(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t) dt \quad (9.52)$$

と表される汎関数  $S$  について考える。積分方程式と考えることもできる。

$\mathbf{r}$  と  $\dot{\mathbf{r}}$  は独立な変数であるとして扱う。積分区間を、 $t_1$  から  $t_2$  とする。ここで、 $\delta\mathbf{r}(t_1) = \delta\mathbf{r}(t_2)$  となるようにする。

$$\begin{cases} S[L] &= \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t) dt \\ \delta\mathbf{r}(t_1) &= \delta\mathbf{r}(t_2) \end{cases} \quad (9.53)$$

ここで、 $L$  が微小変化して  $L + \delta L$  になったときの、 $S$  の変化  $\delta S$  を考える。 $\delta S$  は次の様に定義される。

$$\delta S := S[L + \delta L] - S[L] \quad (9.54)$$

作用  $S[L]$  は定義そのものであり、

$$S[L] = \int_{t_1}^{t_2} L dt.$$

同じように、 $S[L + \delta L]$  は

$$\begin{aligned} S[L + \delta L] &= \int_{t_1}^{t_2} (L + \delta L) dt. \\ &= \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt. \end{aligned}$$

よって、

$$\delta S := S[L + \delta L] - S[L] = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt.$$

清書して,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L \, dt. \quad (9.55)$$

$\delta L$  はテイラ一展開を使って,

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \delta \mathbf{r} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \delta \dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t \quad (9.56)$$

であるから,  $\delta S$  は

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \delta \mathbf{r} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \delta \dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t \right) dt \quad (9.57)$$

と書ける.

さらに, ラグランジュ関数  $L$  は時間変化しないとし, 右辺第3項の時間積分の項は 0 になると考へて, 次のように変形する.

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \delta \mathbf{r} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \delta \dot{\mathbf{r}} \right) dt. \quad (9.58)$$

さて, この式の右辺第2項の  $(\partial L / \partial \dot{\mathbf{r}}) \delta \dot{\mathbf{r}}$  の  $\delta \dot{\mathbf{r}}$  の部分に注目して,

$$\delta \dot{\mathbf{r}} = \delta \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \delta \mathbf{r} \quad (9.59)$$

であることから, 式 (9.59) を式 (9.58) にこれを代入して,

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \delta \mathbf{r} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \frac{d}{dt} \delta \mathbf{r} \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \delta \mathbf{r} \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \frac{d}{dt} \delta \mathbf{r} \right) dt \end{aligned} \quad (9.60)$$

さらに, この式の右辺第2項に部分積分を適用して,

$$\begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \frac{d}{dt} \delta \mathbf{r} \right) dt \\ &= \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \delta \mathbf{r} \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \delta \mathbf{r} dt. \end{aligned}$$

仮定により  $\delta \mathbf{r}(t_1) = \delta \mathbf{r}(t_2)$  であるから,

$$\left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \delta \mathbf{r} \right]_{t_1}^{t_2} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \delta \mathbf{r}(t_2) - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \delta \mathbf{r}(t_1) = 0$$

となって、以下になる。

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \frac{d}{dt} \delta \mathbf{r} \right) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \delta \mathbf{r} dt.$$

これより、式 (9.60) は次の通り

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \right) \delta \mathbf{r} dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \delta \mathbf{r} dt. \quad (9.61)$$

右辺の 2 つの項の積分範囲は同一であり、1 つにまとめられる。

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right) \delta \mathbf{r} dt. \quad (9.62)$$

最後に、最小作用の原理 ( $\delta S$  が極値をとると考えれば、 $\delta S = 0$ ) を導入して、

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right) \delta \mathbf{r} dt = 0.$$

これが成り立つためには、被積分関数が 0 になる場合であり、

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = 0 \quad (9.63)$$

である。この式が直交座標の ラグランジュの運動方程式 である。

ラグランジュの運動方程式（直交座標系）————

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = 0 \quad (9.64)$$

#### # memo No.60: 共変性

実はラグランジュの運動方程式は、直交座標でなくとも、任意の座標を用いてもその方程式の形を変えない。このようなことを座標変換に対して **共変** であるという。そこで、次の節で、座標系の変換について考え、ラグランジュの運動方程式の座標に対して共変性をもつことを確認する。

### 9.3.6 一般化座標

物体の位置は複数の座標系で表現できることは前に確認している。どの座標系を用いて運動方程式をたてるかは人間が任意に決定するものであって、自然とは本来、人

間とは関係なく存在しているので、座標系を人間が勝手に選ぶということは好ましくない。確かに、どのような座標系を選んでも、物体の運動軌道は一致するが、その表現方法や、運動方程式の形はそれぞれ異なる。自然法則が表現方法によって異なった形になってしまうとは到底考えにくい。そうなってしまうのは、人が都合のよいように座標系を選んでしまうからである。そこで、座標系をより一般的なものに拡張しようと考える。この一般的な座標とは、任意の座標系の代表であり、どのような座標系でもかまわない。そのような座標系を **一般化座標** という。

一般化座標を表現する記号は  $q$  が用いられる。例えば、3次元の一般化座標は番号を  $q$  の右上にそえて、 $(q^1, q^2, q^3)$  のように書く。これは直交座標での  $(x, y, z)$  に相当するものである。 $N$  個の物体を扱うときはこの分だけ変数が増えることになる。具体的には変数は  $3N$  個ということになる。つまり、必要な座標は

$$(q^1, q^2, \dots, q^{3N-1}, q^{3N})$$

ということになる。しかし、これではあまりにも冗長なので、自然数を代表する文字  $i$  を導入して、

$$q^i, (i = 1, 2, \dots, 3N)$$

と表現する<sup>26)</sup>。以後、 $(i = 1, 2, \dots, 3N)$  を省略する場合の多いが、そのときは適宜解釈をしてほしい。

### 9.3.7 運動方程式の共変性

上ではラグランジュの運動方程式を直交座標系で表現したが、実はラグランジュの運動方程式は直交座標系に限らず、極座標系でも円筒座標系でも、一般的な座標系でその形を変えずに成り立つ<sup>27)</sup>。このように、座標変換によって変数変換をしてもその方程式の形を変えないことを、座標変換に対して **共変** であるといい、そのような方程式は座標変換に対して **共変性** をもつという。

<sup>26)</sup> ここでの  $i$  は任意の自然数を表現する記号である。同じ文字を、異なる分野で用いることは多々あるが、それぞれ全く異なるものであり、関係はない。例えば、 $i$  は電磁気学では電流を表現する記号として用いられる。今使用している文字がどのような意味で用いられているかを注意しておく必要がある。 $i$  と書かれていたからといって、自然数であると勝手に思い込んではいけない。また、教科書によって多少の記号の用いられたがが異なっているので、その約束に従って読むことである。

<sup>27)</sup> ニュートンの運動方程式は直交座標系で書いたものと曲座標系で書いたものは形が異なってしまうことが多い。

ここでは、ラグランジュの運動方程式が直交座標系で成り立つときに、一般の座標でも運動方程式の形が変わることなく成立することを確認する。

ある座標系（これを  $q^i$  とする）でラグランジュの運動方程式が書かれているとする。このときのラグランジアンを  $L$  として、

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = 0 \quad (9.65)$$

である。この座標系とは別の座標系に変換するとき、

$$q^i = \phi^i(\bar{q}^i, t) \quad (9.66)$$

で変換されるとする。この変換は点変換とよばれる。ラグランジュの運動方程式はこの点変換に対してその形を変えないのである。これを今から確認する。

座標  $q^i$  の全微分  $dq^i$  は、

$$dq^i = \sum_{k=1}^{3N} \left( \frac{\partial \phi^i}{\partial \bar{q}^k} d\bar{q}^k \right) + \frac{\partial \phi^i}{\partial t}$$

である。ここで、AINSHUTAINの規約を流用し、

$$dq^i = \frac{\partial \phi^i}{\partial \bar{q}^k} d\bar{q}^k + \frac{\partial \phi^i}{\partial t} dt \quad (9.67)$$

のように表現する。すなわち、上式の  $k$  等のように、1つの項で同じ添え字が2度現れている場合には、その添え字について、1から  $3N$  についての和をとると約束する。式(9.67)の両辺を  $dt$  で割って、

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial \phi^i}{\partial \bar{q}^k} \frac{d\bar{q}^k}{dt} + \frac{\partial \phi^i}{\partial t} \quad (9.68)$$

ここで、時間微分をドットで表せば式(9.68)は

$$\dot{q}^i = \frac{\partial \phi^i}{\partial \bar{q}^k} \dot{\bar{q}}^k + \frac{\partial \phi^i}{\partial t}$$

となって、さらにこの両辺を  $\dot{\bar{q}}^k$  で偏微分すれば

$$\frac{\partial \dot{\phi}^i}{\partial \dot{\bar{q}}^k} = \frac{\partial \phi^i}{\partial \bar{q}^k} \quad (9.69)$$

を得る。また、当たり前のことだが、座標変換  $q^i = \phi^i(\bar{q}^i, t)$  によって、

$$q^i = \phi^i, \quad \dot{q}^i = \dot{\phi}^i \quad (9.70)$$

であることも注意しておく。この式(9.69)と式(9.70)による関係は後の式変形で利用する。

元の座標系でのラグランジアン  $L$  は式(9.66)による座標変換に対してその形を変える。座標変換後のラグランジアンを  $\bar{L}$  とすると、これは具体的には

$$\bar{L} = L \left( \phi^i, \frac{\partial \phi^i}{\partial \dot{q}^k} \dot{q}^k + \frac{\partial \phi^i}{\partial t}, t \right) \quad (9.71)$$

である。この変換されたラグランジアン  $\bar{L}$  に対するラグランジュの運動方程式をたてるために、 $\partial \bar{L} / \partial \dot{q}^i$  と  $\partial \bar{L} / \partial \ddot{q}^i$  を計算する。

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial L}{\partial \phi^k} \frac{\partial \phi^k}{\partial \dot{q}^i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}^k} \frac{\partial \dot{\phi}^k}{\partial \dot{q}^i}$$

ここで、右辺第一項に式(9.70)を考慮して、

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \ddot{q}^i} = \frac{\partial L}{\partial q^k} \frac{\partial \phi^k}{\partial \ddot{q}^i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial \dot{\phi}^k}{\partial \ddot{q}^i} \quad (9.72)$$

である。一方、

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial \phi^k}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial \dot{\phi}^k}{\partial \dot{q}^i} \quad (9.73)$$

である。この変形でも式(9.70)を用いた。

式(9.72)と式(9.73)によって、座標変換後の運動方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\dot{q}}^i} \\ = \frac{\partial L}{\partial q^k} \frac{\partial \phi^k}{\partial \ddot{q}^i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial \dot{\phi}^k}{\partial \ddot{q}^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial \dot{\phi}^k}{\partial \dot{q}^i} \end{aligned}$$

となる。右辺の第一項と第三項に注目し、式(9.69)を考慮して、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\dot{q}}^i} \\ = \frac{\partial \phi^k}{\partial \dot{q}^i} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^k} \right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial \dot{\phi}^k}{\partial \dot{q}^i} \quad (9.74) \end{aligned}$$

この式(9.74)の第三項は、

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial \dot{\phi}^k}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \frac{d \phi^k}{dt}$$

$$= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \phi^k}{\partial \bar{q}^i} - \frac{\partial}{\partial \bar{q}^i} \frac{d\phi^k}{dt} \right)$$

となるが、この式の括弧の中は以下のように 0 となる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \phi^k}{\partial \bar{q}^i} &= \frac{\partial}{\partial \bar{q}^m} \frac{\partial \phi^k}{\partial \bar{q}^i} \frac{d\bar{q}^m}{dt} + \frac{\partial^2 \phi^k}{\partial t \partial \bar{q}^i} \\ &= \frac{\partial}{\partial \bar{q}^i} \left( \frac{\partial \phi^k}{\partial \bar{q}^m} \frac{d\bar{q}^m}{dt} + \frac{\partial \phi^k}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial \dot{\phi}^k}{\partial \bar{q}^i} \end{aligned}$$

清書して、

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \phi^k}{\partial \bar{q}^i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial \dot{\phi}^k}{\partial \bar{q}^i}$$

右辺の項を左辺へ移項すれば、

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \phi^k}{\partial \bar{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial \dot{\phi}^k}{\partial \bar{q}^i} = 0. \quad (9.75)$$

結局、座標変換後のラグランジュの運動方程式 (9.74) は

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\bar{q}}^i} = \frac{\partial \phi^k}{\partial \bar{q}^i} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^k} \right) \quad (9.76)$$

となり、この式の右辺は式 (9.65) によって 0 であり、座標変換後も

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\bar{q}}^i} = 0 \quad (9.77)$$

となって、運動方程式の形を変えないことが示された。つまり、ラグランジュの運動方程式は点変換に対して共変性をもつことが確認された。

## 9.4 ハミルトンの運動方程式

### 9.4.1 ハミルトニアンの導入

**コメント** ラグランジアンを元にして、ハミルトニアンを定義したい。ハミルトニアンをラグランジアンとは独立に定義してもよいが、ハミルトニアンとラグランジアンの関係も同時に抑えておきたいため、このよううな方法をとる。

ルジャンドル変換 を使って、ラグランジアンの変数  $\dot{q}^i$  を運動量  $\dot{p}^i$  に置き換えると、ハミルトニアンになる。

### 9.4.1.1 ルジャンドル変換

#### ¶ 2 変数関数の場合

まずは、ルジャンドル変換式について、確認しておこう。最初は話を単純にして論理を追いややすくするために、2変数関数を考えて、そのうちの1つの独立変数の変数変換を考える。

2変数関数  $F(x, y)$  の独立変数  $x$  を  $A$  に変数変換するとしよう。ここで、 $A$  と  $x$  には以下の関係があるとする。

$$A := \frac{\partial F}{\partial x}.$$

変数変換してできた新しい関数を  $G(A, y)$  とし、以下が成立しているとする。

$$G(A, y) := Ax - F(x, y).$$

かなり恣意的な条件だが、これが成立していることが、ルジャンドル変換が成立する条件である。

ちなみに、この時、以下が成立していることも、頭に入れておくべきことである。

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial G}{\partial y}$$

では、実際に、新しい関数  $G$  が  $A$  と  $y$  の関数になっていることを確認しよう。 $G$  の全微分  $dG$  は、

$$dG = d(Ax) - dF$$

である。 $dAx$  は積の微分を考えればよく、

$$d(Ax) = x dA + A dx$$

である。また、 $F$  は  $x$  と  $y$  の関数であったため、その全微分  $dF$  は

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

である。

それぞれを代入すれば、

$$dG = (x dA + A dx) - \left( \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy \right)$$

となる。

括弧に位置を変えて、次のように見てみよう。

$$dG = x dA + \left( A dx - \frac{\partial F}{\partial x} dx \right) - \frac{\partial F}{\partial y} dy.$$

先ほど示した  $A$  の前提条件  $A := \partial F / \partial x$  を思い起こすと、括弧の中は 0 になる。以下が導かれる。

$$dG = x dA - \frac{\partial F}{\partial y} dy.$$

関数  $G$  の全微分が、変数  $A$  と  $y$  で表されていることに気づいてほしい<sup>28)</sup>。つまり、 $G(A, y)$  は、関数  $F(x, y)$  の独立変数  $x$  を  $A := \partial F / \partial x$  に置き換えた関数になっている、ということである。この  $F(x, y)$  から  $G(A, y)$  への変換を ルジヤンドル変換 という。

#### ¶ 多変数関数の場合

多変数の場合へ拡張しよう。

$F(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$  として、そのうちの、 $x_1, x_2, \dots, x_m$  の変数に対しての、ルジヤンドル変換を考える。

$i = 1, 2, \dots, m$  に対して ( $m < n$ ),

$$A_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}$$

として、

$$G = \sum_{i=0}^m A_i x_i - F$$

とすれば、関数  $F(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$  の独立変数  $x_0$  から  $x_m$  までが、 $A_0$  から  $A_m$  に置き換わった関数  $G(A_1, A_2, \dots, A_m, x_{m+1}, x_n)$  を得る。

##### 9.4.1.2 ハミルトニアンの定義

ルジヤンドル変換の方法が分かったので、さっそく、ラグランジアンに適用したいと思う。前回ではハミルトニアンを天下り的に導入してしまったが、ここではラグラ

---

<sup>28)</sup> それ自体に驚く必要はない。そうなるように前提条件を整えて、式変形をしたのだから。うまいこと変数変換を行ったというところに、感心しよう。

ンジアンからの自然な導入としてハミルトニアンを定義したい。また、その際、ベクトル表示で提示したハミルトニアンを成分表示に変更する。

でもその前に、一般化運動量について復習しておこう。

#### ¶ 一般化運動量についての復習

一般化運動量を思い起こしてもらいたい。それは、

$$p^i := \frac{\partial L(q^i, \dot{q}^i)}{\partial \dot{q}^i}.$$

と表現されるのであった<sup>29)</sup>。

また、ラグランジアン  $L$  は、運動エネルギー  $T$  とポテンシャルエネルギー  $U$  から

$$L(q^i, \dot{q}^i) := T(\dot{q}^i) - U(q^i)$$

と定義される量であった<sup>30)</sup>。

質量  $m$  の物体の運動エネルギー  $T$  は速度  $\dot{q}^i$  で以下のように表せる。

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{q}^i)^2$$

そうするとラグランジアン  $L$  は

$$L(q^i, \dot{q}^i) = \frac{1}{2}m(\dot{q}^i)^2 - U$$

と書き直せる。で、両辺を速度  $\dot{q}^i$  で微分すると、

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = m\ddot{q}^i$$

となる<sup>31)</sup>。で、 $p^i = m\dot{q}^i$  なので、以下のように、一般化運動量が定義できる。

$$p^i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}.$$

<sup>29)</sup> 前回は運動量を  $p$  で表し、速度  $\dot{r}$  で表したが、ここでは、 $p \rightarrow p^i$ 、 $\dot{r} \rightarrow \dot{q}^i$  という表現に書き換えた。太字で表そうが、添え字付きで表そうが、意味は同じ。

<sup>30)</sup> ここでも、位置を太字表記から成分表記に書き換えた。 $r \rightarrow q^i$

<sup>31)</sup> 第二項のポテンシャルエネルギーを速度で微分したら、0 になる。 $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}^i} = 0$ 。

¶ ラグランジアンからハミルトニアンへ

ラグランジアン  $L(q^i, \dot{q}^i)$  の独立変数の 1 つである速度  $\dot{q}^i$  を、運動量  $p^i$  に変数変換する。変換にはルジャンドル変換を使う。ルジャンドル変換による新たな関数を、ハミルトニアン とよぶことにし、記号  $H$  を使ってこれを表すことにする。

変換には、ラグランジアンと一般化運動量と一般加速度の関係式：

$$p^i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$$

が使われる。この時、ハミルトニアン  $H$  は、次のように書かれる。

$$H := p^i \cdot \dot{q}^i - L(q^i, \dot{q}^i).$$

先ほど一般の形でルジャンドル変換について確認した時の対応は、 $x$  が  $\dot{q}^i$  に、 $A$  が  $p^i$  に、 $F$  が  $L$  に、 $G$  が  $H$  に機械的に置き変えたものとみてよい。

¶ ハミルトニアンと力学的エネルギー

ハミルトニアンと力学的エネルギーには面白い関係がある。ここで見ておこう。すぐ前に見たように、ハミルトニアンは以下のように定義される量であった。

$$H := p^i \cdot \dot{q}^i - L.$$

ラグランジアン  $L := T - U$  を考慮すれば、

$$H = p^i \cdot \dot{q}^i - (T - U) = p^i \cdot \dot{q}^i - T + U.$$

となる。ここで、第一項  $p^i \cdot \dot{q}^i$  に着目しよう。これは運動エネルギー  $T$  を用いて表そうとすれば、次のように式変形される<sup>32)</sup>。

$$\begin{aligned} p^i \cdot \dot{q}^i &= p^i \cdot \dot{q}^i = (m\dot{q}^i) \cdot \dot{q}^i = m(\dot{q}^i)^2 \\ &= 2 \left( \frac{1}{2} m(\dot{q}^i)^2 \right) = 2T. \end{aligned}$$

清書して、

$$p^i \cdot \dot{q}^i = 2T. \tag{9.78}$$

---

<sup>32)</sup> 質量  $m$  の質点を想定している。

つまり、ハミルトニアンの定義式の第一項が運動エネルギーの2倍と同一視できる<sup>33)</sup>.

また、ラグランジアン  $L$  は

$$L := T - U \quad (9.79)$$

で定義される量であった。

以上から、ハミルトニアン  $H$  は次のようにも表せる。

$$\begin{aligned} H &= (p^i \cdot \dot{q}^i) - L \\ &= (2T) - (T - U) = 2T - T + U, \end{aligned}$$

つまり、

$$H = T + U \quad (9.80)$$

となる。 $T + U$  は力学的エネルギーである。従って、この式によれば、ハミルトニアンは力学的エネルギーに等しいということになる。

より厳密に言えば、 $p^i$  と  $\dot{q}^i$  は、それぞれ一般化された運動量と速度であり、また、 $T$  と  $U$  も一般化された運動エネルギーとポテンシャルエネルギーと考えるべきものであるために、ここで言う力学的エネルギーも一般化されたものと考えなければならない。要するに、ハミルトニアン  $H$  は数学的に抽象化された概念ではあるが、古典力学の視点でハミルトニアンを捉えれば、力学的エネルギーとみなしてよいということである<sup>34)</sup>.

#### 9.4.2 ポアソン括弧

#### 9.4.3 正準方程式

**コメント** ラグランジアンの運動方程式をハミルトニアンを用いた形式に書き換える。ハミルトニアンを使って表現された運動方程式のことを、正準運動方程式 という。ここでは、清純運動方程式の導出を行う。

▶ 33) ただし、 $p^i$  は一般化運動量であり、 $\dot{q}^i$  は一般化速度であるので、 $T$  も一般化された運動エネルギーである。ここでは  $T$  のことを運動エネルギーと言い切ってしまったが、細かいことを言うと、誇張表現である。

▶ 34) ここで強調したかったのは、ハミルトニアンは抽象的概念であり、ハミルトニアンが力学的エネルギーと同一であると考えてはならない、ということである。あくまでも、古典力学の視点で考えた場合に、それが力学的エネルギー同じ形をしているのである。

### 9.4.3.1 正準運動方程式

ハミルトンの正準運動方程式を導出する。まず、ハミルトニアンの摂動<sup>35)</sup>を計算し、2次以上の項を無視すると、

$$\delta H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \delta \mathbf{p} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} \delta \mathbf{r} \quad (9.81)$$

となる。右辺のハミルトニアン  $H$  の変数は左辺と同じだが、式が煩雑になるのを避けるため、記述を省略した。

ハミルトニアン  $H$  をラグランジアン  $L$  について解くと、

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}} - H(\mathbf{r}, \mathbf{p})$$

であり、 $L$  の変分を計算すると以下になる<sup>36)</sup>。

$$\delta L = \delta(\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - \delta H.$$

この式の  $\delta H$  は、先に計算した  $H$  の摂動であり、式(9.81)で書き換えることが可能。

$$\delta L = \delta(\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \delta \mathbf{p} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} \delta \mathbf{r} \right) \quad (9.82)$$

ここで、最小作用の原理を思い起こしておこう。

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0.$$

また、 $t_1$  と  $t_2$  は  $\delta \mathbf{r}(t_1) = \delta \mathbf{r}(t_2) = 0$  を満たすとする。 $\delta S$  とは  $L$  が微小変化して  $L + \delta L$  になったときの、 $S$  の変分である。 $\delta S$  は定義に従って書けば、次の様な量であった。

$$\delta S := S[L + \delta L] - S[L]$$

作用  $S[L]$  は定義そのものであり、

$$S[L] = \int_{t_1}^{t_2} L dt.$$

<sup>35)</sup> 摂動：全微分を汎関数の場合に拡張したもの。まあ、ここでは全微分のように捉えてもらってよい。

<sup>36)</sup> 何度も書くが、記述が煩雑になるので、 $L = L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ ,  $H = H(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  として、独立変数の明記を省略している。

同じように、 $S[L + \delta L]$  は

$$\begin{aligned} S[L + \delta L] &= \int_{t_1}^{t_2} (L + \delta L) \, dt. \\ &= \int_{t_1}^{t_2} L \, dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta L \, dt. \end{aligned}$$

よって、

$$\delta S := S[L + \delta L] - S[L] = \int_{t_1}^{t_2} \delta L \, dt.$$

清書して、

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L \, dt. \quad (9.83)$$

話を元に戻そう。式 (9.83) の  $\delta L$  対して、式 (9.82) を代入する。

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \delta(\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \delta \mathbf{p} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} \delta \mathbf{r} \right\} dt = 0$$

上式の右辺第1項  $\delta(\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}})$  を計算すると、

$$\delta(\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}}) = \delta \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{p} \cdot \delta \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{p} + \mathbf{p} \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}$$

なので（最後の等号は、単に第1項の内積の記述順を入れ替えただけ）<sup>37)</sup>、

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \dot{\mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{p} + \mathbf{p} \cdot \delta \dot{\mathbf{r}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \delta \mathbf{p} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} \delta \mathbf{r} \right\} dt = 0 \quad (9.84)$$

となる。

式 (9.84) の第二項の被積分関数  $\mathbf{p} \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}$  に注目して、この部分に部分積分を施すと、

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{p} \cdot \delta \dot{\mathbf{r}} = [\mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{r}]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{p}} \delta \cdot \mathbf{r} \, dt.$$

---

<sup>37)</sup> この計算の妥当性は、この段階では怪しく感じるだろうが、そんなものかと受け入れてもらいたい。

であり<sup>38)</sup>、さらに、この部分積分の第一項は  $[\mathbf{p} \cdot \delta\mathbf{r}]_{t_1}^{t_2} = 0$  と計算されるため<sup>39)</sup>、結局のところ

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{p} \cdot \delta\dot{\mathbf{r}} = - \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{p}} \cdot \delta\mathbf{r} \, dt.$$

と計算される。この部分積分の結果を式(9.84)に当てはめると、

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \dot{\mathbf{r}} \cdot \delta\mathbf{p} - \dot{\mathbf{p}} \cdot \delta\mathbf{r} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \delta\mathbf{p} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} \delta\mathbf{r} \right\} dt = 0$$

を得る。さらに、 $\delta\mathbf{p}$  に対する項と  $\delta\mathbf{r}$  に対する項に着目すると、

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left( \dot{\mathbf{r}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \right) \cdot \delta\mathbf{p} - \left( \dot{\mathbf{p}} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} \right) \cdot \delta\mathbf{r} \right\} dt = 0. \quad (9.85)$$

式(9.85)が成り立つのは被積分関数が 0 になる場合であるが、 $\delta\mathbf{p}$  と  $\delta\mathbf{r}$  は両方とも 0 ではない<sup>40)</sup>。よって、以下の 2 式が成り立つ。

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \quad , \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}. \quad (9.86)$$

式(9.86)をハミルトンの 正準運動方程式 という。

<sup>38)</sup> この計算で、

$$\delta\dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt} \delta\mathbf{r}$$

と計算できることを利用した。

<sup>39)</sup>  $\delta\mathbf{r}(t_1) = \delta\mathbf{r}(t_2) = 0$  ということを最小作用の原理を導入する時に仮定した。

<sup>40)</sup>  $\delta\mathbf{p}$  と  $\delta\mathbf{r}$  は、ハミルトニアンの摂動を取る際に、運動量の微小変化と位置の微小変化として勝手にとったものであり、この 2 つは 0 にはなりえない。



## 第 II 部

電磁気学 1st



# 10

## 電磁気学が対象とする現象

### 10.1 はじめに

コメント 本節では、以降の電磁気学への導入と、これから電磁気学の学習の段取りを説明する。

#### 10.1.1 電気と磁気

これから学習する電磁気学は、電気と磁気が起こす様々な現象を説明する物理学の分野の1つである。電気とか磁気とかというと、日常的に用いられている使い慣れた言葉であり、そのイメージも多くの人々が共有している。「何を今更」と思われるかもしれないが、今まで日常的に使われてきた「電気」とか「磁気」とかという言葉と、そのイメージを一度整理しておきたい。これから学習する電磁気学は、電気とは何か、あるいは、磁気とは何かを探求するものであり、その疑問となる根本的な現象についてを確認せずに話を進めるには、甚だ滑稽なことだろう。

### 10.1.2 電気と磁気の伝わり方

私達の感じてる電気や磁気は、実際には、静電気の引力（あるいは斥力）というように、力として現れている。つまり、力の伝達の表現方法が必要になってくる。“力の伝達”と聞いて、なんのことだ？と思ったかもしれない。というのも、ニュートン力学では、力の伝播については無視していたからである。そこでは、暗黙の了解として、「力は瞬間に、つまり、時間0で伝わる」ということが仮定されていたのだ。しかし、このような考え方では、無限に遠くに存在する物体にも、近隣に存在する物体にも、力が“同時”に伝わる事になってしまふ。これは直感に反するのではないだろうか。近くにある物体には、すぐに力が伝わり、遠くにあるものほど力の伝わり方が遅いというように、力の伝播に時間がかかるとしたほうが、自然な考え方ではなかろうか。まあ、何れにしても、実験的に確かめないといけないところだが、現在では、一般相対性理論で説明されるとおり、力の伝播には、時間がかかることがわかっている。つまり、力が一瞬で伝わると仮定されているニュートン力学は、この部分において、間違っている。その間違いの修正は追々やっていくとして、ここでは、力の伝播をどうやって式で表現できるかを考えないといけない。そこで、力の伝播を表現するための概念である、場 という考え方が導入される<sup>1)</sup>。

---

<sup>1)</sup> 小言を言っておこう。

「場」という考え方は自然な考え方であるが、概念が抽象的すぎて、なかなか初学者にとって受け入れ難いことだろう。しかし、我慢して欲しい。「場」という考え方は、これからいっそう重要なってくる。現代の物理学は、「場」という考え方方が理論構築の基礎になっているからである。はじめに「場」ありき、という考えが一般的なのだ。理由はわからないが、そういう考え方のもとで、理論構築をし、成功を収めている。

この部分は、"自然だけでも特殊な考え方"なので、最初学習する上でつかえる所だろう。理解するのに、時間がかかってしまうが、悩まずに、学習を進めていってもらいたい。数式とそのイメージをリンクさせようともがきながら（いろいろ考えたり、ヒントとなる本、Webサイトを探したりしよう）学習を進めれば、いつの間にか、「場」という考え方慣れて（毒されて？）しまうものである。

こんなことをここで言うな、と言われるかもしれない。実際そのとおりで、あとでまた同じ事を言うことだろう。ここでは、“この先に困難がありますよ”という案内として記述したまでである。（RPG風に言うなら、「(王様の台詞) 勇者よ、お前はこれから多くの困難に直面することだろう。しかし、それに屈してはならない。どんな困難だろうとも、それに立ち向かい、解決せねばならない。いかなる困難も克服し、壮大な目標に向かって、前進するのだ。行け、勇者よ、そして、いつの日か目的を果たし、帰還するのだ。」といった感じだ。）

### 10.1.3 電気・磁気の研究の歴史（ダイジェスト）

電磁気学で着目する力は、電磁気力と言われる。これは、電気的な力と磁気的な力の両方を指す言い方である。電気的な力や磁気的な力の存在自体は、摩擦時に起る静電気や磁石の存在から、古くから知られていたことだろう。しかし、その力の持つ性質を科学的に扱うことができるるのは、16世紀になってからである。ギルバート<sup>2)</sup>による電磁気現象の研究が、電磁気学の幕開けとするのが通説のようである。しかし、より正確に電磁気現象が扱えるようになるのは、キャベンディッシュ<sup>3)</sup>やクーロンが電気的な力のもつ性質を実験的に解析する18世紀ごろである。アンペール<sup>4)</sup>による電流と力の関係<sup>5)</sup>の発見や、ビオ<sup>6)</sup>とサバール<sup>7)</sup>の磁気と電流の関係の研究もだいたい19世紀初期に行われていている。最終的な電磁気学の確立がマクスウェルによってなされるのが19世紀中頃（1864年）である。

電磁気現象は古くから知られていたのに対し、その現象を科学的に扱えるようになるのは、19世紀中頃になってからであった。そもそも科学という考え方自体が、ルネッサンス期に芽生えたものとされているので、仕方がないのかもしれないが、それでも、電磁気現象を人間が把握するのに、これだけの時間がかかっているのには

▶<sup>2)</sup> William Gilbert (1544–1603, イギリス) : Gilbert と表現されることもある。電磁気現象を近代的な実験方法で研究した、最初の人物のひとりとして有名である。検電器を発明している。医者としての仕事の傍ら、電磁気の研究をしていたらしい。

▶<sup>3)</sup> Henry Cavendish (1731–1810, イギリス) : 化学と物理学の研究で有名。人間嫌いであったり、研究した結果を秘密にしておいたりと、特異な性格を強調されることが紹介される言が多い（あ、ここにも書いてしまった）。地球の比重を測定したことでも有名。これにより、万有引力の存在の裏付け、並びに、地球の重力定数の測定がなされた。また、電磁気学に関して言えば、クーロンの法則をクーロンよりも前に発見したことが、キャベンディッシュ死後に、マクスウェル（※1）より明らかにされている。

（※1）James Clerk Maxwell (1831–1879, イギリス)。16.1.1節の脚注を参照。

▶<sup>4)</sup> André-Marie Ampère (1775–1836, フランス) : 電流に関する実験で有名。電流の単位「アンペア [A]」は彼の名にちなんだものである。

▶<sup>5)</sup> この関係は、アンペールの法則と言われる。詳しいことは、後述する。

▶<sup>6)</sup> Jean-Baptiste Biot (1774–1862, フランス) : 物理学者であり、数学者、天文学者でもある。後に述べる、ビオ = サバールの法則の発見者のひとりとして有名。大気圧の測定も行っていたらしい。

▶<sup>7)</sup> Félix Savart (1791–1841, フランス) : ビオと共に、ビオ = サバールの法則を提唱したことで有名。カタカナ表記では、「サヴァール」と書いたほうが、正確なのかもしれない（だけど、このノートでは「サバール」と書くことにしたい。こっちのほうが見慣れたカタカナなので、つかえることなく読めると思う）。外科医でもあったらしい。また、現在の音程の単位はセント（1 オクターブ = 1200 セント）であるが、それ以前の単位として、サバール (savart) が使われていた。ちなみに、音程 1 サバールはだいたい 4 セントくらいである（なので、だいたい 1 オクターブは 300 サバールということになるのか）。

驚きである<sup>8)</sup>

## 10.2 電気的現象

世の中には、接触していないにもかかわらず、力を受けることがある。この非接触で感じる力の中に、電気的な力がそのひとつとして存在する。

例えば、髪の毛を下敷きでこすり、その後すぐに下敷きを頭の方へゆっくりと持ち上げてみると、髪の毛は下敷きに吸いつけられるかのように持ち上がる。この現象を、一度は、小学生のころに実験や遊びで経験したことと思う。電気的現象の一例として、頻繁に頻繁にあげられる現象だ。この現象を物理学的には電磁気学で説明される。特に、静電気学として語られることが多い。静電気学は、電磁気学でも最も基本となる考え方である。になる。

## 10.3 磁気的現象

非接触的に受ける力の別の例として、磁気的な現象も考えられる。鉄などの特定の金属をひきつける<sup>9)</sup>石がこの世界には存在し、日本では磁石と呼ばれている。これは電気的な現象とは異なる原因から生じる。この磁気的な現象についても、後ほど詳しく考えることになる。

## 10.4 電磁気的現象

電気的現象と磁気的現象は、その発生原因は異なるのだが、それらの振る舞いはとても似ている部分が多い。このことから、電気的現象と磁気的現象は密接な関係があるが容易に想像され、実際にあとで示す通り、この予想は正しい。両者と共に扱う場合、これらの現象をひっくるめて、電磁気的現象とよぶ。

電磁気的現象の例として、電磁波という、物理現象がある<sup>10)</sup>。携帯電話や無線LANに代用される無線通信機器は、この電磁波を利用している。

<sup>8)</sup> 話がそれるが、今日ある私たちの生活環境は、パソコンや携帯電話など、電磁気学を応用して作り出されている。そう、私たちの掌の中には、それだけの研究の重さがのしかかっているのである。ただ持っているだけではなんにも感じないけど、少し学習すると、それらの機器を見たとき、先人の研究努力に対し、感謝の気持ちを懐くことだろう。

<sup>9)</sup> ひきつける：相対的に考えれば、「引き寄せられる」といっても同じこと。

<sup>10)</sup> そして、これの例に尽きる。

第一段階の電磁気学の学習目標は、電磁気的現象を数式で表現することである。

#### # memo No.61: 非接触的な力

物体に触れることなしに与える力を、非接触的な力という。非接触的な力は磁石などでも馴染みがあり、馴染みのある現象だ。しかし、よく考えてみると、不思議な現象だ。触っていないのに力が伝わるのである。このような現象を見て、どのようにこの力の伝達を説明できるだろうか。私達の直感では、物体に触れていないのに力が伝わるということを理解し難い。しかし、現実に磁石は存在して、非接触的な力が目の前で起こっている。どうしたことだろうか。物理学者はこの不可解な非接触的な力を説明すべく、場 という概念を発案した<sup>11)</sup>。物体が力を受けるということの原因はその周囲の場の歪みであると解釈せよ、というのである。

いきなり場という考え方を提示され、わけわからん状態に陥ってるかもしれない。しかし、安心してほしい。場という概念は、誰にとっても、言葉で説明されただけでは理解し難いものだ<sup>12)</sup>。これから物理学の学習（演習）を続けることで、言葉だけでなく、感覚的にも理解できるようになるだろう<sup>13)</sup>。

<sup>11)</sup> 英語で言うと、Field である。

<sup>12)</sup> 物理の教科書を書いている偉い先生も、場という概念を理解するのに苦労した経験があるそうだ。

<sup>13)</sup> 場という概念は非常に抽象的（数学的）であり、実際にその存在を示すことはできない。だから理解し難いし、初めのうちは胡散臭く感じるのだが、学習を進めることでそれなしでは物理学を構築に欠かせない概念であることを悟るだろう。



# 11

## 電荷 — 電磁気現象の根源 —

### 11.1 電荷

#### 11.1.1 電荷の存在

##### ¶ 電磁気現象の根源は電荷である

電磁気学を構築するにあたり、最も重要な要請がある。それは、電荷の存在だ。電荷はすべての電磁気現象の根源である。電荷には、正の電荷と負の電荷の2種類が存在する。電気のもつ2つの性質、すなわち、"引きつける力（吸引力）"と"反発する力（反発力）"を説明するために、導入される概念である<sup>1)</sup>。正の電荷を「プラス(+)の電荷」、負の電荷を、「マイナス(-)の電荷」ということもある。図で表現する場合、+や-で表されることが多い。このノートでも、これに従う。

電気現象や磁気現象を説明するためには、電荷という概念を受け入れないとなら

---

<sup>1)</sup> これは観測事実であり、他から導かれる現象ではない。電気的現象を注意深く観察した結果、電気には吸引力と反発力の2種類があることがわかったのだ。なぜ第3の性質がないのか、という疑問は却下される。電磁気学にとって、電荷の存在の要請こそが理論の土台であり、その存在理由は問わない。もしかしたら、後の物理学の進展により明らかになるかも知れないが、少なくとも電磁気学で説明されることではない。

ない。ここで言う電荷の存在は、仮定なのだが、この仮定を受け入れることにより、電磁気現象を説明できる。存在するかどうかかもわからない概念を受け入れるのには、少々躊躇してしまうことではあるけれど、そこをこらえて 電荷というものが存在すると認めてもらいたい。

#### ¶ 電磁気学の理論体系に電子は不要

電荷というと、現在では、電子の存在が当たり前のように知られているが、電磁気学が成立した時代には、電子は知られていなかった。電子は電磁気学が成立した後に、電磁気学自身の理論を基にした実験により、発見された経緯がある。だから、電子という概念は、電磁気学の理論体系では、表面にはでてこない。電子の発見以前に電荷という概念が確立しており、電磁気学は、この電荷を基礎に組み立てられた理論なのである。よって、電磁気学を学ぶ上で、電子の知識は不要である。これからしばらくの間は、電子という概念をしばらく忘れ、正電荷と負電荷の 2 種類の電荷が存在するとして、話を進めていく。

#### ¶ 吸引力と反発力のイメージ

電荷が存在するという仮定の最も基本的な実験法則に、クーロンの法則 というものがある。電気は反発したり、引き付け合ったりするという性質を主張する法則である。後で詳しく触れることにしよう。

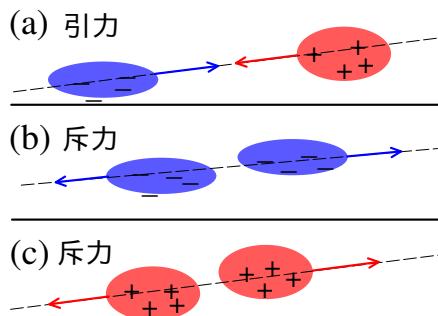


図 11.1 電気現象と 2 種類の電荷

とにかく、ここでは、「電荷が存在すると電磁気現象をうまく説明できる」ということを理解してもらいたい。

### ¶ 電荷を表すのに使う記号 ( $Q$ , $q$ )

電荷を記号で表すときには、 $Q$  や  $q$  が使われることが多い<sup>2)</sup>。ただし、これは後に説明する電気量についての意味も含まれている。

#### 11.1.2 電荷は 2 種類しかないのか

なぜ電荷は 2 種類しかないと言えるのだろうか。もしかしたら、未発見の第 3 の電荷<sup>3)</sup> は実在しているかもしれない、という可能性があるではないか。確かに、この可能性は完全に否定する事はできない。実際、見つかっていない第 3 の電荷を“仮定”し、理論を組み立てるできるだろう。しかし、物理学の教科書には、「電荷は 2 種類である」としか書かれていない。なぜか。これは、理論には単純性が追求されるからである。

確かに、3 種類以上の電荷があると仮定しても理論は組み立てられるかもしれない<sup>4)</sup>。しかしたとえ可能であったとしても、その場合、電荷が 2 種類であるという仮定してつくられた理論よりも、説明に要する仮定が多くなってしまうだろう。理論はより単純な方が採用される<sup>5)</sup>。電磁気の理論を組み立てるのには、最小数でも 2 種類の電荷が必要であり、2 つの電荷を仮定すると、電磁気現象が全て<sup>6)</sup> 導出できる。さらに、3 つ以上の電荷が存在すると仮定した場合の理論よりも、2 種類のみの電荷を仮定した理論の方が、単純である。こうしたことから、電荷は 2 種類だというのである。

物理学は、論理学や数学とは違い、科学である。科学は実験結果が全てであるので、論理的に矛盾がなくとも、実験結果が理論と異なれば、その理論は間違いである<sup>7)</sup>。

<sup>2)</sup>  $Q$  や  $q$ ：電磁気学の内容を記述する場合には、説明なしに暗黙の了解として使用されることもある。物理では、式に現れる文字の意味を常に意識しておくことも大事だ。

<sup>3)</sup> 「正」でも「負」でもない、電荷の働きをするもの。いや、3 つでなくとも、4, 5, 6, …と、もっと種類が存在しもよいのではないか。

<sup>4)</sup> 検討したことはない…

<sup>5)</sup> 単純な理論は 1 つとは限らないだろう。同じ程度、単純な理論をつくることは、不可能ではないと思う。実際、重力を含む統一理論の構築段階で、ループ量子重力理論と超弦理論の 2 つが提案されている。

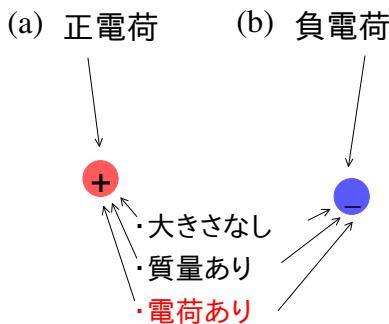
<sup>6)</sup> “全て”とは、言い過ぎかもしれない。未発見の現象がある可能性が否定できないからだ。しかし、電磁気学の歴史は長く、実験も多くなされていてるので、おそらく、理論が覆されるような電磁気的実験結果は得られないだろう。

<sup>7)</sup> ただし、その実験は、本当に正しいことを確かめないといけない。

電磁気学にも、理論と異なる実験結果が得られてしまう恐れがあるかもしれない。科学に絶対はありえない。しかし、今までに、「実験も理論もともに一致して、不一致になったことはない」ということから、電磁気学は“科学思想的に”正しい理論であると言える。

### 11.1.3 荷電粒子、点電荷

電荷を帯びた粒子のことを、荷電粒子 とよぶ。ニュートン力学において、物質を数学的に扱いやすくするために質点という概念を導入した。質点とは、質量をもつ点のことであった。電磁気学でもこれと同じように、点電荷 というものを定義する。点電荷とは、電荷をもつ点のことである。荷電粒子を理想化して、その大きさを無視できる程に小さくしたものとも考えてもよい。とにかく、点電荷とは、大きさのない電荷をもつものと捕らえてもらいたい。ただ、質点も点であるが質量をもつのと同じく、点電荷にも質量はある。



荷電粒子や点電荷を記号で表現するときには、 $q$  が用いられることが多い。

### 11.1.4 電荷は実際に存在するか

あたりまえのことだが、電荷は目で見ることができない<sup>8)</sup>。だから、電荷を直接“肉眼（あるいは顕微鏡）で”確認することは不可能である。しかし、見えないのでから存在しない、と考えてはならない。電荷の存在を考えなければ、説明できない現象が山ほどあるのだ<sup>9)</sup>。

実は、電磁気学を駆使した実験によって、電荷の存在を実証できる（検電器など）。だけど、その実験を理解するには電磁気学の知識が必要である。話が堂々巡りになつていると感じるかもしれないが、そうではない。電磁気学ではあくまでも、電荷の存在は仮定されているだけものに過ぎない。しかし、電磁気学の知識を活用した実験により、電荷の存在を確証するに値する実験結果を得るのである。

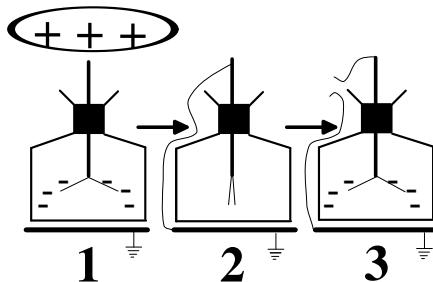


図 11.3 検電器

#### ‡ memo No.62: 電子の存在と電磁気学

荷電粒子は、電磁気現象を説明するために、人間が作り出した仮説に過ぎなかつたが、後にこの荷電粒子が実在されることが、実験的に示された。この実在する荷電粒子のことを、今日我々は電子とよんでいる<sup>10)</sup>。

▶ 8) 見ようとしても、見ることは不可能である。どんなに高性能な顕微鏡を開発したとしても，“電荷そのもの”を見ることは不可能である。この理由は、量子力学で説明されよう。

▶ 9) いや、逆だった。現象を説明するために、「電荷」という概念を導入したのであった。

▶ 10) 電子: 「でんし」と読む。「でんこ」ではないよ。

電子の存在はトムソン<sup>11)</sup>によって発見された。電子の発見は 1897 年であり、マクスウェルによる電磁気学の成立は 1873 年である。つまり、電子の発見よりも電磁気学の成立のほうが早かったのである。

要するに、電磁気学は、電子の存在を認めて作られたものではない。あくまでも、“電荷”を基礎にして、電磁気学は構成されるのである。だから、電磁気学を学んでいく上で、その例として出てくる電子は単なる仮想粒子に過ぎない。存在するかしないかわからないような、粒子なのである。

むしろ、確立された電磁気学によって、電子の存在が認められたのである。電磁気学を学ぶ上では、電子の存在はあまり気にする必要はない。ということで、電子についての詳細は、原子論を学習するときに改めて考える。ここで学習すべきは電磁気学なのだから。

### 11.1.5 電気量

電荷のもつ電気を定量的に扱う場合、これを数値として表さないといけない。電気量とは、電荷のもつ電気を量化したものである。電気量の単位は、「クーロン [C]」が用いられる。この単位は物理学者クーロン<sup>12)</sup>に因んで名づけられている。1[C] の定義（仮）は、以下の通り<sup>13)</sup>。

#### 1[C] の定義（仮）

同じ電気量をもつ点電荷を 2 個用意する。この 2 つの点電荷を 1[m] だけ離して固定したとき、この点電荷に  $8.99 \times 10^9 [\text{N}]$  の力が働くとき、この両点電荷のもつ電気量を 1[C] とする。

なぜこのような定義としているのかという疑問が浮かぶはずだが、これについては「クーロンの法則」のところで明らかになるだろう。ここでは、とりあえず認めてほしい。

<sup>11)</sup> Joseph John Thomson (1856 幹驥 1940, イギリス)

<sup>12)</sup> Charles-Augustin de Coulomb (1736–1806, フランス)：クーロンの法則の発見者として、その名が知られている。電磁気に関する研究が多い。

<sup>13)</sup> 1[C] の定義（仮）：（仮）と書いたのは、現在の国際標準の単位系である SI 単位系による定義ではないためである。この 1[C] の定義は、このノートでは、後ほど SI 単位系に則した定義に改める。しかし、この定義を述べるには、ある程度の電磁気の知識が必要であり（SI 単位系は電磁気学の確立後に制定された）、ここで述べることはできない。だけど、1[C] を無視して話を進めるることは難しいので、ここでは便宜的にこの仮の定義を採用している。

### 11.1.6 電気素量

電荷について、面白いことが分かっている。電荷には最小値が決まっているのである。つまり、現実世界に存在する電気量は、最小値の整数倍でしか存在していないということだ。

重要な事実なので、何度も繰り返す。電気量には最小値が存在し、この最小値を  $e$  と表す。さらにこの時、この世界に実在する電気量は、最小値  $e$  の整数  $n$  倍で存在する。 $(1/2)e$  とか  $(5/3)e$  なんていう電気量は存在しないのである。現実に存在しているのは、 $2e$  とか  $5e$  のように、最小単位  $e$  の整数倍なのだ。

次のように言っても良い。電気量にはこれ以上分割でない最小の単位が存在する。この電気量の最小値  $e$  を、電気素量 という。

電気素量  $e$  の具体的な値は、今日では SI 単位系で、

$$e = 1.602177 \times 10^{-19} [\text{C}] \quad (11.1)$$

とされている。この数値は実験によって得た数値である。また、単位系のとり方により、その数値は異なるので注意<sup>14)</sup>。

以降では、電気量  $q$  (あるいは  $Q$ ) という表現を頻繁に使用する。電気量  $q$  は電気素量の整数倍でしか存在し得ないので、その整数を  $n$  とした時に、 $q = ne$  と表せる。しかし、電気素量の概念は、電磁気学の理論構築には、不要である<sup>15)</sup>。むしろ、電荷の存在自体が重要であり、電磁気学の主役となる量は電気量  $q$  である。電気量  $q$  を、電気素量  $e$  を用いて詳しく書けば、 $ne$  となるのだが ( $n$  は整数)，こう表しても式が煩雑になるだけなので、以降の記述は電気量  $q$  という表現を使うこととする<sup>16)</sup>。

▶ 14) (参考) 1987 年までの電気素量の値は

$$e = 1.60217733(49) \times 10^{-19} [\text{C}]$$

とされている。

▶ 15) 電気素量の発見は、電磁気学が体系化された後でなされている。電気素量の存在理由もわかっていない。

▶ 16) ここからしばらくは、巨視的な（目で見える大きさという意味で）電磁気現象を念頭に置いて、電磁気学を学習する。つまり、電気素量が数えきれないくらいたくさんある（整数  $n$  がとても大きい）場合を中心に考えることになる。この場合は、電気素量は考える必要がない。

ただし、電気素量という概念が重要でないということではない。電磁気学成立後に発見された電子の運動を定量的に考える場合には、電気素量が重要になる。電子 1 つの運動のような、目に見えないくらい微視的な世界を考える場合には、電気素量という考え方が重要になってくる。ただ、ここでは巨視的な電磁気現象がメインなので、電気素量という概念を使う必要がないだけ、ということ。

## # memo No.63: 電気素量をどう見つけたか

驚くことに、電気素量の発見、つまり、電子の発見は、電磁気学の成立以後である。それまでは、上に書いたように、電荷は仮想的なものに過ぎなかった。電子の発見は、電荷という概念をより確かなものにした。

ちょっととてよ。“電荷そのもの”を見ることはできないと、上に書いたではないか。うそをついたのか、いや確かに、“電荷そのもの”を見ることはできない。では、なぜ電荷を発見したと言えるのか。それは、トムソンの陰極線の発見で説明される。この実験で、電荷が、電子として実在することを示した。でも、具体的に、どれくらいの電荷量をもつかは、トムソンの発見からは、分からなかった。電子の電荷量、つまり、電気素量は、ミリカンによる油滴の実験により、明らかになった。

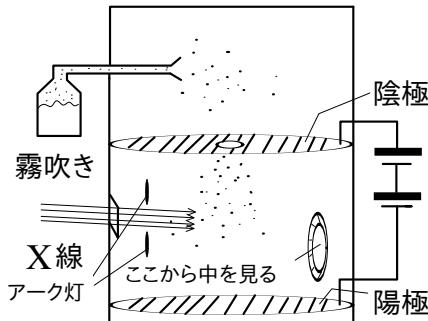


図 11.4 油滴実験

おもしろい話だ。電子の発見は、電磁気学の理論を利用した実験によって発見された、ということになる。電荷の存在を仮定した電磁気学によって、電子が発見されたのだ。何か、一見して矛盾してそうな気がする。電磁気現象の根源である電荷が、電荷を仮定した電磁気学を用いて、発見されたからだ。しかし、少し考えれば、これは矛盾ではない。電磁気学は電荷が実在しなくとも、成立しているのである。もちろん、電荷が存在しないことが発見されてしまったら、それは理論と実験で矛盾が起こる。だけど実際は、電荷が電子として実在することが分かった。だから、矛盾ではない。むしろ、理論と実験の整合性が高まったのだ。

### 11.1.7 電荷密度

非常に多くの点電荷が集まっている状況を考える。このとき、個々の点電荷を区別して考えるよりも、点電荷の集まりそのものを扱うほうが賢明な場合も多い。このと

き、点電荷の集まり具合のことを 電荷密度 とよぶ。

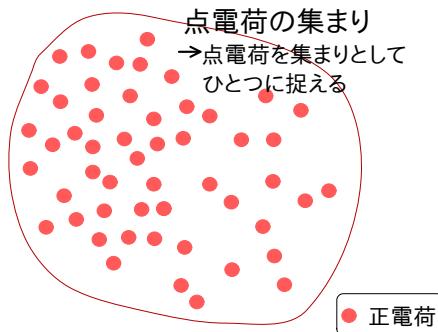


図 11.5 電荷密度（イメージ）

電荷密度を記号で表すときには、 $\rho$  で表すことが多い<sup>17)</sup>。特に、位置によって電荷密度の値が異なるときには、位置ベクトル  $r$  を用いて、 $\rho(r)$  と書かれる。

#### # memo No.64: 電荷密度の表現上の問題

電荷密度  $\rho(r)$  は多数の電子が存在し、その個数を把握することが現実問題として難しく、その必要もない場合に大いに役に立つ。現実世界では、この状況のほうが一般的である。

しかし、何か怪しい部分がある。それは、電荷密度が位置  $r$  の関数として書かれていることがある。一点には広がりなんてものは考えられない。つまり、面積が 0 なので、面積で割ることができず、密度が定義できないのである。0 で割ることは無限大になることを意味している。この問題を同処理すればよいか。いや、上手いこと回避する方法があるのか。実は、この無限大の電荷密度を回避する方法がある。それは、ディラックの デルタ関数  $\delta(r)$  である。このディラックのデルタ関数は後ほど述べる<sup>18)</sup>。

#### 11.1.8 電荷密度と全電気量の関係

系の全電気量  $Q$  と電荷密度  $\rho(r)$  の関係を示しておこう。

<sup>17)</sup> この記号  $\rho$ （「ロー」と読む）は、電気回路を扱う場合、抵抗率として用いられる。 $\rho$  が電磁気学で現れたら、何の断りもなければ、電荷密度であると考えてよいだろう。ただし、電気回路で  $\rho$  が現れたら、何を意味しているのかを注意した方がよい。とりあえず、このノートの電磁気学の部分では、 $\rho$  は電荷密度としての意味で用いる。

<sup>18)</sup> 274 ページの 11.1.9 節を参照。

系の全電気量が分かっている場合、その全電気量を  $Q$  とする。電荷密度  $\rho(\mathbf{r})$  が存在している所に、微小な体積  $dV$  をとる(図 11.6)。この微小体積  $dV$  の内側の電気量を  $dQ$  と書こう。このとき、

$$dQ = \rho(\mathbf{r}) dV$$

当関係が成立している<sup>19)</sup>。全電気量  $Q$  はこの式の両辺を積分すれば良い。積分の範囲は、電荷密度が存在しているすべての領域に対して行う。これは体積分<sup>20)</sup>と呼ばれる計算である。

$$\begin{aligned} \iiint dQ &= \iiint \rho(\mathbf{r}) dV \\ \therefore Q &= \iiint \rho(\mathbf{r}) dV \end{aligned} \quad (11.2)$$

もし、任意の閉曲線  $S$  の内側の領域  $\Omega_S$  にある電気量  $Q_{\Omega_S}$  を計算したい場合は、積分範囲をこの領域にすればよいだけである。

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_S} dQ &= \iiint_{\Omega_S} \rho(\mathbf{r}) dV \\ \therefore Q_{\Omega_S} &= \iiint_{\Omega_S} \rho(\mathbf{r}) dV \end{aligned} \quad (11.3)$$

まとめておこう。

#### Point 41: 電荷密度と全電気量の関係

閉曲面  $S$  の内側の領域を  $\Omega_S$  と表記する。 $\Omega_S$  内に存在する全電気量  $Q_{\Omega_S}$  と電荷密度  $\rho(\mathbf{r})$  には次の関係がある。

$$Q_{\Omega_S} = \iiint_{\Omega_S} \rho(\mathbf{r}) dV \quad (11.4)$$

ここに、 $dV$  は微小体積を表す。

<sup>19)</sup> 次元的にも、

$[C] = [(Cm^{-3}) \cdot m^3]$

が成立している。

<sup>20)</sup> 「体積積分」といわれることもある。

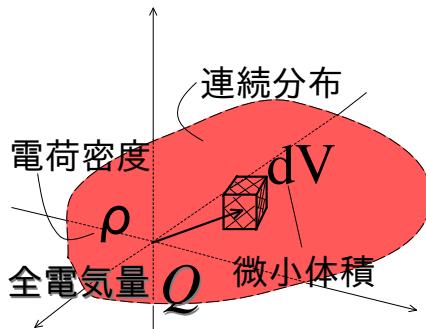


図 11.6 電荷密度と全電気量

‡ memo No.65: 微小体積

微小体積とは、全体積のうちの微小な一部分のことである。

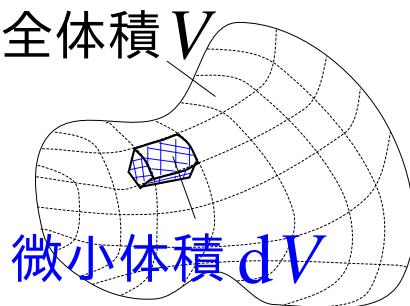


図 11.7 微小体積

## # memo No.66: 体積分の表示方法

体積分は、3 方向にわたる積分である。つまり、2 つの積分変数  $u, v, w$  を考えたとき、これを変数に持つ関数  $f(u, v, w)$  をとし、

$$\int \left( \int \left( \int f(u, v, w) du \right) dv \right) dw$$

を計算することが、体積分を行うということである。

つまり、 $f(u, v, w)$  を最初に  $u$  について積分して、その結果を  $v$  について積分し、さらにその結果を  $w$  について積分するということである。計算方法を示すには、このような表示の仕方が有効であるが、この表現からでは体積分であることをイメージするには、少々難しい。そこで、式を次のように書き換えてみる。

$$\iiint f(u, v) du dv dw$$

括弧をなくしただけである。そして、 $dV := du dv dw$  という量を導入し、さらに、3 回の積分を改て  $\iiint_V$  と表現することで、

$$\iiint_V f(u, v, w) dV$$

となる。これならば、体積  $V$  で体積分するというイメージがしやすい式の表現になった。

ちなみに、 $dV := du dv dw$  は 体積素 とよばれる。

11.1.9  $\delta$  関数11.1.9.1  $\delta$  関数の定義

電気量  $q$  をもつ1つの点電荷の電荷密度  $\rho(\mathbf{r})$  を表すことを考える。点電荷の位置を  $\mathbf{r}_0$  とする。このとき、 $\mathbf{r}_0$  を内部に含む領域  $\Omega$  で体積積分すると、全電荷量  $q$  をしめす。つまり、

$$q = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}) dV , \quad (\mathbf{r}_0 \in \Omega) \tag{11.5}$$

と書ける。しかし、点電荷には大きさがないので、位置  $\mathbf{r}_0$  における電荷密度は  $\rho(\mathbf{r}_0) = \infty$  で無限大に発散する。一方で、位置  $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$  の部分では、電荷が存在しないので、 $\rho(\mathbf{r}) = 0$  である。この問題を解決するために、ディラック<sup>21)</sup> は  $\delta$  関

<sup>21)</sup> P.A.Dirac (1902 – 1984, イギリス) : イギリスの物理学者でありながら、電気工学系出身という経歴を持つ。1933 年に、シュレディンガーと共にノーベル賞を受賞する。特殊相対論に矛盾しない

数<sup>22)</sup> を導入した。

$\delta$  関数は  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$  と書かれ、次の性質をもつ。

$\delta$  関数の性質

- (1)  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$  の部分において、 $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \infty$ .
- (2)  $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$  の部分において、 $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$ .
- (3)  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$  を全領域で積分した値は 1 になる。

もう少し数学っぽく書くと、以下のことだ。

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) := \begin{cases} \infty & , (\mathbf{r} = \mathbf{r}_0) \\ 0 & , (\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0) \end{cases} \quad (11.6)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dV := 1 \quad (11.7)$$

この  $\delta$  関数を用いると、点電荷の電荷密度  $\rho(\mathbf{r})$  は

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (11.8)$$

と表現できる。確かに、位置  $\mathbf{r}_0$  の部分の電荷密度  $\rho(\mathbf{r}_0) = \infty$  で無限大に発散して、さらに、位置  $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$  の部分において、 $\rho(\mathbf{r}) = 0$  となる。点電荷の不都合な点をこの  $\delta$  関数に押し付けるのだ。

すると、確かに  $\delta$  関数を使うと、位置  $\mathbf{r}_0$  を含む領域  $\Omega$  において、

$$\begin{aligned} q &= \int_{\Omega} q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dV , \quad (\mathbf{r}_0 \in \Omega) \\ &= q \int_{\Omega} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dV , \quad (\mathbf{r}_0 \in \Omega) \\ &= q \cdot 1. \end{aligned}$$

が成立する。また、位置  $\mathbf{r}_0$  を含まない領域  $\Omega$  において、

$$0 = \int_{\Omega} q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dV , \quad (\mathbf{r}_0 \notin \Omega)$$

ようにシュレディンガー方程式を書き換える、ディラック方程式と呼ばれる方程式に直した。書き換えた方程式、すなわち、ディラック方程式を解き、正電荷もつ電子（陽電子：電荷の符号が電子と逆で、同じ質量を持つ粒子）の存在を予言した。また、フェルミー-ディラック統計（フェルミ粒子の従う統計物理学）を構築する（フェルミとは独立に行った）。

▶ 22)  $\delta$  関数: 「デルタ関数」と読む。

$$= q \int_{\Omega} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dV , \quad (\mathbf{r}_0 \notin \Omega)$$

$$= q \cdot 0.$$

うまく行きそうな気がする。しかし、 $\delta$  関数は実際に作れるのだろうか。というのも、関数の値が無限だが、積分値が 1 という有限の値をとっているのだ。もしかしたら、定義に矛盾があり、このような関数は定義不可能かもしれない。でも大丈夫。定義に矛盾はなく、実際に関数を作る方法がある。以下ではそのことを簡単に見ていこう。

### 11.1.9.2 1 次元の $\delta$ 関数

1 次元の  $\delta$  関数は以下のように書ける<sup>23)</sup>。

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} \infty & ,(x = x_0) \\ 0 & ,(x \neq x_0) \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) := 1$$

$x_0 = 0$  の場合で考えよう<sup>24)</sup>。このとき、 $\delta$  関数は、図 11.8 のようなグラフである。

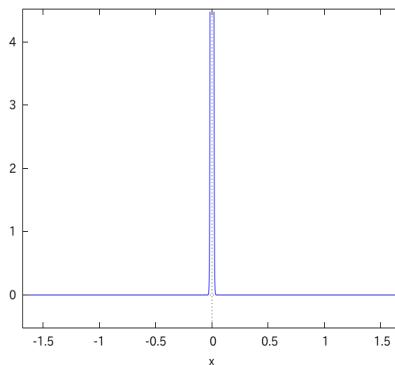
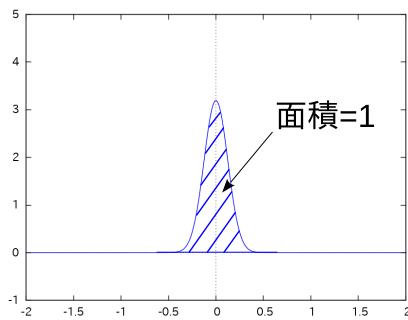


図 11.8 ディラックの  $\delta$  関数 (1 次元) の形

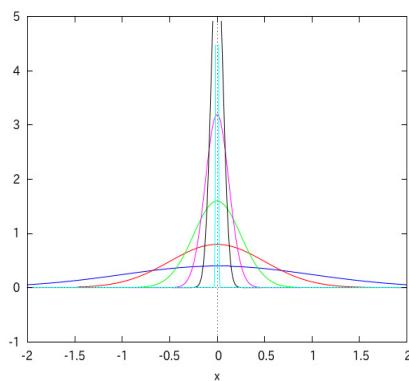
作り方は簡単。まず、面積 1 のグラフを用意する (図 11.9)。

<sup>23)</sup> 3 次元での  $\mathbf{r}$  を  $x$  に変えるだけ。

<sup>24)</sup> 複雑な例を考えることはない。例はできるだけ簡素な方がわかりやすい。

図 11.9 デイラックの  $\delta$  関数の作り方 1

そして、面積 1 を保ちながら無限に細くしていく（図 11.10）。これで、面積が 1 で

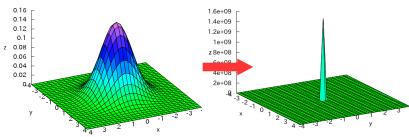
図 11.10 デイラックの  $\delta$  関数の作り方 2

関数値が無限になる関数を作ることができた。

$\delta$  関数には次元があり、 $[x^{-1}]$  である。次元を持っていることを忘れやすいので、要注意。

ついでに、2 次元の  $\delta$  関数のグラフも書いておこう。は図 11.11 下の通り。

残念ながら、現実世界である 3 次元の  $\delta$  関数は図には描けない…

図 11.11 デイラックの  $\delta$  関数(2 次元)の形

## 11.2 電流

### 11.2.1 電流のイメージ

おそらく、電流は説明するまでもないだろう。電気の流れのことである。今までの言葉を使えば、電流とは電荷の運動のことである、といえよう。観測者 A に対して、荷電粒子が速度を持って運動しているとき、観測者 A は荷電粒子を見て、「電流が生じている」と認識するのである。この運動する荷電粒子は、一般に、数え切れないので多くの数であることを想定する場合が多い。特に断りのない限り、電流とは、多数の荷電粒子の運動である。

電気回路に流れる電流も多数の荷電粒子の流れであるが、この荷電粒子は導線中を移動することしかできない。そこでここでは、もう少し電流のイメージを拡張して、任意の空間に流れる電流を認めよう。荷電粒子は導線内部にしか存在できないわけではない。真空中に存在することもある。電流は導線だけに流れるものではない。

電流を記号で表すときには、 $I$  を用いることが多い。

電気回路での電流のイメージは図 11.12(A) のようになろう。導線中の電子をイメージしたら、図 11.12(B) の様になるかもしれない。しかし、実は図 11.12(B) のイメージは物性物理学的に間違っている。実際の電流の発生機構を説明するには原子の構造の解明や量子力学の知識が必要であり、それをここで考えることはできない。しかし、電磁気学では電荷の流れ方がどのようになっているかは説明できない。それとは関係なしに理論が成立している。

電磁気学での電流とは電荷の移動であり、その場所は問われていない（導線内部である必要はない）。具体的なイメージも大事だが、ここではそれにとらわれず、抽象的な電流を考えるべきである。何度も言うが、電流とは空間中を移動する電荷のことである。

ある。どのように移動するかは別問題である。こうした抽象的な電流を考えるならば、図 11.12(B) のイメージは、荷電粒子の通り道を任意の空間と捉えることで、正しいイメージとなる。



図 11.12 電流（イメージ）

### 11.2.2 電流の定義（仮）

電流を数式を用いて定義しておこう。電流とは多数の点電荷の集まりの平均的な移動のことである。この移動を畏まった言い方をすると、次のように言える。

ここに電流の通り道（導線）があるとしよう。このとき、電流を次のように定義する。

#### 電流の定義（仮）

- 電流とは、導線の断面を単位時間  $1[s]$  に通過する電荷の量を、電流 という
- 電流の単位は  $[A]$  という記号で表される
- 電荷の単位はクーロン ( $[C]$ ) があるので、電流の単位  $[A]$  は  $[A]=[C/s]$  という関係がある
- 電流を表す標準的な記号として、このノートでは、 $I$ 、もしくは、 $i$  を用いることにする<sup>a</sup>

<sup>a</sup> 記号  $i$  は数学では虚数単位として用いられる記号であるが、物理学や工学では電流を表すことに用いることが多い（その方が一般的）。なので、物理学では虚数単位として、 $j$  が採用されている。 $i$  の次のアルファベットだからだろうか。おそらく、特別の意味などはないはず。文字の意味に注意しよう。

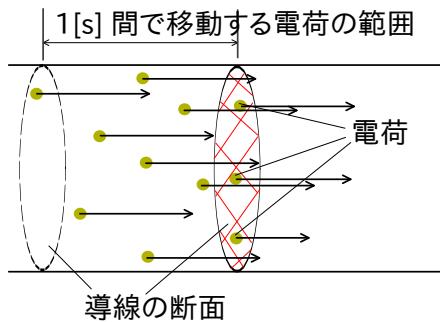


図 11.13 電流（イメージ）

#### # memo No.67: 注意

実は、この電流の単位は現在では採用されていない。正式な単位の定義は、後に必要な知識を説明した上で行う。電流に単位がないと、電流に関する事柄を扱いにくいで、ここではとりあえず、最も直感的で自然な定義を説明した。この節で「(仮)」と表現しているのは、このことによる。

### 11.2.3 電流密度

電流とは、導線の垂直断面を、一秒間に流れる電気量として定義した。さらにここで、単位断面積  $1[m^2]$  を単位時間  $1[s]$  の間に、どのくらいの電流が生じるかを示す電流密度を定義する<sup>25)</sup>。

導線に生じている電流  $I$  が、いかなる場合でも、一様であるならば、電流密度を導入することは無駄である。しかし、現実には、導線に生じる電流は一様ではなく、ある部分に集中的に多く流れていったり、ある部分には電荷の流れが全くないこともある。たしかに導線全体を見渡した正味の電流は一定値をとっているが、その導線の内部を詳細に見ることができるならば、電流にむらがあることを知るだろう。

<sup>25)</sup> 注意しておこう。電流密度の“密度”とは、単位面積当たりの密度のことである。電荷密度では、単位体積当たりの密度のことであり、両者（電荷密度と電流密度）の“密度”という語彙の違いは区別しておく必要がある。（次元解析をしていて、これらの単位を混同してしまって、頭が混乱してしまったことがある。時間の無駄であった。）

<sup>26)</sup> 一様に：“むらなく”とか、“偏りなく”といった意味で使用される語彙。

電流密度を  $i(r)$  と表す。単位は  $[A/m^2]$  である<sup>27)</sup>。

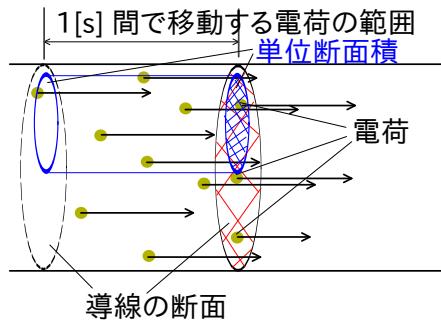


図 11.14 電流密度（イメージ）

#### 11.2.4 電流密度と電流の関係

電流  $I$  と電流密度  $i$  の関係を示そう。まず、電流の大きさ  $I = |\mathbf{I}|$  と電流密度  $i(r)$  の関係を考える。

導線の断面を  $S_l$  とし、また、その一部の微小断面を  $dS_l$  とする<sup>28)</sup>。この微小断面  $dS_l$  の単位法線ベクトルを  $\mathbf{n}(r)$  とかこう。

このとき、電流密度  $i(r)$  の微小断面  $dS_l$  の垂直成分は

$$\mathbf{i}(r) \cdot \mathbf{n}(r) dS_l$$

で表現できる。そして、これを全断面  $S$  で面積分した値は、電流の大きさ  $I$  に等しい。すなわち、

$$I = \iint_{S_l} \mathbf{i}(r) \cdot \mathbf{n}(r) dS_l.$$

まとめておこう。

<sup>27)</sup> 電荷密度  $\rho$  の単位  $[C/m^3]$  との違いに注意。電流密度は単位面積当たりの量で、電荷密度は単位体積当たりの量である。

<sup>28)</sup> 添字の  $l$  は曲面  $S_l$  の縁となる閉曲線を表す。一般に、曲面は縁があるはずで、その縁は閉曲線である。

**Point 42:** 電流密度と電流の関係

閉曲線  $l$  を縁とする曲面  $S_l$  を貫く電流  $I$  と、電流密度  $i(r)$  の関係は、次式で表される。

$$I = \iint_{S_l} i(r) \cdot n(r) dS_l. \quad (11.9)$$

ここに、 $n(r)$  は  $S_l$  における各微小部分  $dS_l$  の単位法線ベクトルである。

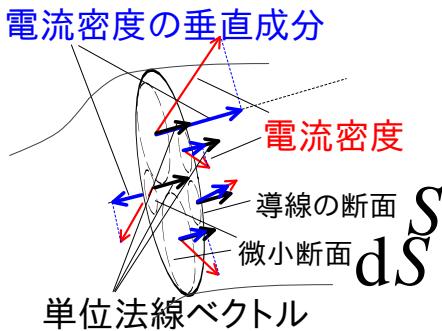


図 11.15 電流と電流密度

## # memo No.68: 微小面積と単位法線ベクトル

微小面積とは、全面積  $S$  の微小な一部分のことである。また、単位法線ベクトルとは、面に垂直方向で長さが 1 のベクトルのことである。

## # memo No.69: 面積分の表示方法

面積分は、2 方向にわたる積分である。つまり、2 つの積分変数  $u, v$  を考えたとき、これを変数に持つ関数  $f(u, v)$  をとし、

$$\int \left( \int f(u, v) du \right) dv$$

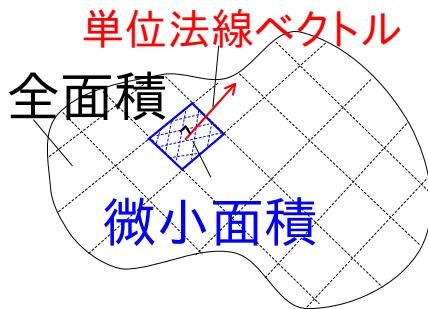


図 11.16 微小体積

を計算することが、面積分を行うということである。

つまり、 $f(u, v)$  を最初に  $u$  について積分して、その結果をさらに、 $v$  について積分するということである。計算方法を示すには、このような表示の仕方が有効であるが、この表現からでは面積分であることをイメージするには、少々難しい。そこで、式を次のように書き換えてみる。

$$\iint f(u, v) \, du \, dv$$

括弧をなくしただけである。そして、 $dS := du \, dv$  という量を導入し、さらに、2回の積分を改て  $\iint_S$  と表現することで、

$$\iint_S f(u, v) \, dS$$

となる。これならば、面  $S$  で面積分するというイメージがしやすい式の表現になった。

ちなみに、 $dS := du \, dv$  は 面積素 とよばれる。

## 11.3 電流と電荷の関係

**コメント** 電荷 とは、電磁気現象の発生原因であり、この存在は有無をいわざず受け入れさせられるものである。電流 とは、一つ、あるいは複数（多数）の電荷が、平均的に一方向に移動しているような現象をいう。従って、電流とは、電荷と観測者の相対的な速度に依存していると考えられる。つまり、観測者が電荷を見ているとき、その観測者の速度により、電流が生じているのか、単に電荷が運動せずにその場に存在しているのかが、変わってしまう。

そこで、以降では、観測者の速度を 0 として、扱うこととする。

### 11.3.1 大局的な電荷保存則

#### ¶ 電荷は突然現れることはない

ある領域に電荷が多数存在していることを想定しよう（図 11.17(A) 参照）。この多数の電荷の電気量の総和を、 $Q(t)$  と書くことにする<sup>29)</sup>。この状態から、ある程度時間が経過して、領域内部の電気量の総和が変化したとしよう。つまり、 $Q$  の時間微分が 0 ではない値をとるということになる<sup>30)</sup>。総電気量が変化したということは、その領域内部の電荷の量が変化したことである。つまり、個々の電荷が領域外部に出て行ったり、あるいは逆に、領域外部から電荷が入ってきたということである。すなわち、

$$\frac{dQ(t)}{dt} \neq 0.$$

ここで、出たり入ったりする電荷の、正味の電気量を  $I(t)$  と書けば、<sup>31)</sup>、

$$\frac{dQ(t)}{dt} + I(t) = 0.$$

となるような  $I(t)$  が存在することになる。要は、領域内部の総電気量  $Q(t)$  の時間変化に、正味の電荷の出入り  $I(t)$  を足し合わせれば 0 であるということである。もっと簡単に言うと、領域内部の総電気量の変化は、外部との電荷のやり取りで生じるのであり、その領域内部でいきなり電荷が現れたり消えたりしない、ということである（図 11.17(B) 参照）。この電荷の出入りを表す  $I(t)$  が電流である。端的に言えば、あ

<sup>29)</sup> 電荷が多数存在するが、その個数は有限であることを想定する。このとき、電荷に番号付けをして、 $q_0, q_1, q_2, \dots$  のように書けば、その総和  $Q(t)$  は  $Q(t) := \sum_i^{N(t)} q_i$  で表せる。左辺の総電気量  $Q(t)$  の独立変数  $t$  は、右辺の電荷の個数が時間変化する場合 ( $N(t)$ ) を表したものである。

<sup>30)</sup> 時間変化がないということは、時間微分して 0 であるということである。例えば、速さ  $v(t)$  は  $v(t) := dx(t)/dt$  ( $x$  は位置、 $t$  は時間を表す) で定義されるが、位置に時間変化がない場合  $x(t)$  は一点に止まっているので、 $x(t) = X_{\text{const}}$  となり、時間によらない定数  $X_{\text{const}}$  で表せる。この時の速度を考えると、 $v(t) := dx(t)/dt = dX_{\text{const}}/dt = 0$  となり、位置の時間微分は 0 である。つまり、位置が時間変化しない（動かない）物体の一の時間微分は 0 になる。これは逆に、位置の時間微分が 0 であれば、その物体は動いていない、と言うこともできる。さらに、物体の位置の時間微分が 0 でない値を取るならば、その物体は動いていると言える。

今回の場合、時間変化するのは領域内の総電気量  $Q(t)$  である。

<sup>31)</sup> ここで記号として  $I(t)$  を書いたのは、電流  $I(t)$  をあとで定義するためである。独立変数として、時間  $t$  を明示したのは、時刻によって生じる電流が、異なる場合を想定したからである。

る領域内の総電気量が変化したことと、その領域に電流が生じていることは、等価である。

#### ¶ 電荷保存の法則

実は、この考え方こそが、電荷保存の法則 であり<sup>32)</sup>、今の場合は、大域的（マクロ）な視点から見た電荷保存則（脚注参照）である。後ほど、一般化して、局所的な電荷保存則も紹介することになる。

改めて、大局的な電荷保存則を記述しておこう。

#### Point 43: (大局的な) 電荷保存則

ある領域内部の総電気量を  $Q(t)$  とし、その内部から外部へ向かって電流  $I(t)$  が生じている場合、

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -I(t). \quad (11.10)$$

という関係式が成立する。これを、大局的な 電荷保存の法則（あるいは略して、電荷保存則）という。

ここで、電流  $I(t)$  を右辺に移項した。この表現の方が、総電気量の時間変化と電流が等価であることを、イメージしやすいからである。また、多くの教科書で、この書き方がなされている。電流の符号は、領域内の総電気量が減る場合には正（電荷が領域内部から飛び出して、それが電流となる）、領域内の総電気量が増える場合には負（領域内に電流が入ってきて、内部の電荷個数が増える）とする<sup>33)</sup>。

#### 11.3.2 局所的な電荷保存則

電荷保存則は、局所的にも成立する法則である。理論物理学では、大局的表現よりも、これから説明する局所的な電荷保存則の表現がよく使われる。大局的表現がすでに得られているので、そこから、局所的表現を導出しよう。

► 32) 略して、電荷保存則 といわれることのほうが、一般的である。

► 33) 簡単に言うと、領域から電流が外向きに生じているときに正、領域に電流が吸収される場合に負とする。



図 11.17 電流と電荷

まず、電流  $I(t)$  と総電気量  $Q(t)$  を、それぞれ電流密度  $\mathbf{i}$  と電荷密度  $\rho$  で書きなおしておこう。

$$I(t) = \iint_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS.$$

$$Q(t) = \iiint_{\Omega_S} \rho dV.$$

電流密度  $\mathbf{i}$  と電荷密度  $\rho$  は、位置と時間の関数であることに注意。

$$\mathbf{i} := \mathbf{i}(\mathbf{r}, t), \quad \rho := \rho(\mathbf{r}, t).$$

ちなみに、電流  $I(t)$  と総電気量  $Q(t)$  の独立変数に位置  $\mathbf{r}$  がないのは、位置で積分してしまうためである<sup>34)</sup>。電流密度  $\mathbf{i}$  と電荷密度  $\rho$  を用いると、電荷保存則は次のように書ける。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \iiint_{\Omega_S} \rho dV \right) = - \iint_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS.$$

ここで、上式の右辺にガウスの定理<sup>35)</sup>を適用する。

$$\iiint_{\Omega_S} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \iiint_{\Omega_S} \operatorname{div} \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dV.$$

<sup>34)</sup> 積分変数は積分後には残らない。大局的視点から見るので、細かな位置を知る必要はなく、この視点で重要なのは、考察範囲全体の電流量や電気量なのである。これから考える局所的な量は、その位置も重要になる。大局的視点と局所的視点の違いは意識しておくべきことだろう。

<sup>35)</sup> 任意のベクトル  $\mathbf{X}$  に対して、

$$\iint_S \mathbf{X} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_{\Omega_S} \operatorname{div} \mathbf{X} \cdot \mathbf{n} dV.$$

後で簡単に復習するので、そこを参照のこと。それでもわからなければ、数学の解説の部分を読むこと。さらにそれでもわからなかったら、ベクトル解析教科書を別途お読みください。

この式変形で、左辺の空間微分と時間微分の可換性<sup>36)</sup>を利用した。この式の両辺を見ると、積分範囲が同じ体積分になっている。この等式が一般的に成り立つのは、両辺の被積分関数が等しいときである<sup>37)</sup>。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{i}.$$

慣習に従って、次のように書き換える。

$$\operatorname{div} \mathbf{i} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (11.11)$$

この式(11.11)が、局所的な電荷保存則である。

ある局所的領域<sup>38)</sup>から電流が湧き出る( $\operatorname{div} \mathbf{i}$ )ならば、その領域内部の電荷密度は減少する( $-(\partial \rho / \partial t)$ )ということを、式で表現できている。

改めて、まとめておこう。

#### Point 44: (局所的な) 電荷保存則

ある局所的領域から電流が湧き出る( $\operatorname{div} \mathbf{i}$ )ならば、その領域内部の電荷密度は減少する( $-\partial \rho / \partial t$ )。

$$\operatorname{div} \mathbf{i} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (11.12)$$

これは、電荷保存則を局所的に表現したものである。

#### # memo No.70: ガウスの定理（復習）

ガウスの定理：ガウスの法則とは別のもの。ガウスの定理は数学上の定理である。この定理により、以下の等式が成立する。

任意のベクトル  $\mathbf{X}$  に対して、

$$\iint_S \mathbf{X} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_{\Omega_S} \operatorname{div} \mathbf{X} \cdot \mathbf{n} dV.$$

▶ 36) 空間にに関する微分と、時間に関する微分は計算順序を入れ替えても、結果は変わらないということ。

▶ 37) 数学的に示すべきことだろうが、ここでは割愛する。

▶ 38) 局所的領域：可能なかぎり小さくした領域のこと。あくまでも、直感的な言葉であり、「可能なかぎり」に特別な意味は込めていない。日常言語的な捉え方をしてもらいたい。

言葉で説明するならば、次のようなイメージになろう。「任意の閉曲面  $S$  で囲まれた領域  $\Omega_S$  より湧き出る  $\operatorname{div} \mathbf{X}$  の総和は、閉曲面  $S$  の表面から抜け出る正味の流出量に等しい」。

# 12

## クーロンの法則

### 12.1 クーロン力

#### 12.1.1 法則

電荷を帯びた物体が受ける、電気的な力というものが、世の中に存在する。これは万人が知っている事実だから、ここで改めて明記することは、バカバカしく感じられる。しかし、この電気的な力の存在は、大変重要なものである。この電気的な力のことを、クーロン力とよぶ。電気量の単位であるクーロンと同じ名前を持っているが、お察しのとおり、同一人物に由来するものである。

クーロン (Coulomb) は、電気的な力の性質を実験的に知ることに成功した<sup>1)</sup>。そして、クーロンは、電気的な力が、次のような性質を持っていることを明らかにした。

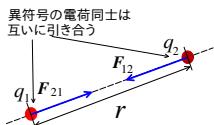
---

<sup>1)</sup> 電気量の定義は、クーロン力を基にしてなされるものである。

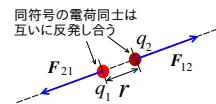
## クーロン力（クーロンの法則）

ここに、電荷が2つあるとしよう。この2つの電荷は区別することができて、 $q_1$ ,  $q_2$  という電気量を持っているとする。電荷  $q_1$  と  $q_2$  との距離を  $r$  としたとき、この2つの電荷が受ける力は、以下のような規則がある。

- 2つの電荷の電気量が互いに異なる符号をもっているならば、両電荷は互いに引き合う向きに力を受ける
- 2つの電荷の電気量が同じ符号を持っているならば、両電荷は互いに反発しあう向きに力を受ける。
- 2つの電荷の受ける力の大きさは等しく、向きは互いに逆向きである
- 2つの電荷が受ける力の大きさは、2つの電荷の電気量の積 ( $q_1 q_2$ ) に比例する。
- 2つの電荷が受ける力の大きさは、2つの電荷間の距離の2乗 ( $r^2$ ) に反比例する。



(A)



(B)

図 12.1 クーロン力

上に書いたような、クーロン力が示す性質のことを、クーロンの法則 という。これは電磁気学の最も基本的な法則であり、大変重要な法則である。あとに説明する 電場 という重要な概念の導入も、このクーロンの法則を基にしている。

言葉で書いてしまうと、ちょっとややこしいかもしれない。しかし、いきなり数式を出してしまうと、それはそれで戻込みしてしまうので、とりあえず言葉で説明してみた。

## 12.1.2 定量化

では、次の段階に進み、クーロンの法則を数式で表現してみよう。数式で表現すると、とても簡潔になることを感じ取ることができるだろう。

図 12.2 のような状態であるとしよう。

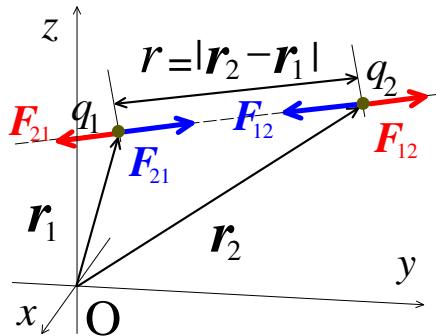


図 12.2 クーロンの法則

2つの区別可能な電荷が存在し、それぞれの電気量が、 $q_1$ ,  $q_2$  であるとする。また今後、これらの電荷自体を表現する場合にも、「電荷  $q_1$ 」などのように記述する<sup>2)</sup>。この2つの電荷がある位置を、それぞれ  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  とする。このとき、電荷間の距離  $r$  は、

$$r = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|.$$

また、電荷  $q_2$  から見た、電荷  $q_1$  の位置  $\mathbf{r}_{12}$  は、

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2.$$

同様に、電荷  $q_1$  から見た、電荷  $q_2$  の位置  $\mathbf{r}_{21}$  は、

$$\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1.$$

「2つの電荷が受ける力は、大きさが同じで、向きが逆である。」これを数式で表すには、まず、大きさと向きを文字で表現すべきだ。同時に考えるのは難しいので、まずはクーロン力の大きさだけを考える。電荷  $q_1$  が受けるクーロン力  $F_{12}$  は、2点電荷の電気量の積  $q_1 q_2$  に比例するので、数式的には、

$$F_{12} = \alpha q_1 q_2$$

<sup>2)</sup> 同じ記号に二つの意味を込めるのはよくないが、そうかと言つて、無意味に記号を増やして読みづらくしたくもない。ここでは、誤解を生むことがないと判断し、同じ記号で“電荷それ自体”と“その電気量”の2つを同じ記号で表すこととする。

とかける。ここに、 $\alpha$  比例定数である<sup>③)</sup>。また同時に、「2つの電荷が受ける力の大きさは、2つの電荷間の距離の2乗( $r^2$ )に反比例する」から、

$$F_{12} = \beta \frac{1}{r^2}$$

ともかける。 $\beta$  も比例定数である。この2つの  $F_{12}$  の式は矛盾なく両立する。この2つの式をまとめて、

$$F_{12} = \alpha \beta \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

となる。ここで、式の見易さのため、比例定数  $\alpha \beta$  を改めて  $k$  とおいて ( $k = \alpha \beta$ )、

$$F_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (12.1)$$

とすれば、この式(12.1)によって、電荷  $q_1$  が受けるクーロン力の大きさを記述できることになる。

残りはその方向であるが、これは簡単だ。単位ベクトルを考えればよい。一般のベクトル  $\mathbf{A}$  に対する単位ベクトルとは、大きさが1で、その方向が  $\mathbf{A}$  と同じ向きのようなものである。このような単位ベクトルが存在したとして、 $\mathbf{n}$  と表そう。この時、 $\mathbf{A}$  は、 $\mathbf{A} = |\mathbf{A}| \mathbf{n}$  と書き表せる。つまり、単位ベクトル  $\mathbf{n}$  について解けば、

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$$

である。

今の場合に当てはめて考えれば、 $\mathbf{A} = \mathbf{r}_{12}$  であるから、単位ベクトルは

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_{12}}{|\mathbf{r}_{12}|} = \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

である。これが、電荷  $q_1$  が受けるクーロン力の向きを表している。

これで、電荷  $q_1$  の受けるクーロン力の大きさと向きの数式的表現を、別々ではあるが、表現できた。あとはこの2つを一緒に表せれば、完了となる。

ここで改めて、電荷  $q_1$  の受けるクーロン力を向きも考慮して  $\mathbf{F}_{12}$  と表すこととすると、 $\mathbf{F}_{12}$  は、その大きさ  $F_{12}$  と単位ベクトル  $\mathbf{n}$  を用いて、

$$\mathbf{F}_{12} = F_1 \mathbf{n}$$

---

<sup>③)</sup> この比例定数  $\alpha$  には全く意味がない。単に比例を表すのに、便宜的に使ったに過ぎない。同じことがすぐ後に使う、 $\beta$  についても言える。しかし、最後に現れる比例定数  $k$  については、重要であるので注意すべきだ。

とかける。これに、上で得た結果を代入すればよい。すると、

$$\mathbf{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \quad (12.2)$$

となる。この式(12.2)が目標としていた、電荷  $q_1$  が受けるクーロン力  $\mathbf{F}_{12}$  を、式で表したものである。

これ同様に、電荷  $q_2$  が受けるクーロン力  $\mathbf{F}_2$  を考えることができると、「2つの電荷の受ける力の大きさは等しく、向きは互いに逆向きである」ということを考慮すれば、直ちに、次式を得る。

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{21} &= -\mathbf{F}_{12} \\ &= -k \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}. \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} -(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \\ |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| &= |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \\ q_1 q_2 &= q_2 q_1 \end{aligned}$$

であることに気付ければ<sup>4)</sup>、

$$\mathbf{F}_{21} = k \frac{q_2 q_1}{r^2} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \quad (12.3)$$

となる。 $\mathbf{F}_{12}$  の式(12.2)と比較すると、添字の1と2が逆になっているだけであることに気づくだろう。

最後に、比例定数  $k$ について記述しよう。この比例定数は、基準とする単位系によって値は変化するが、今日一般的に使用されているSI単位系を採用するならば、

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.989 \times 10^9 \quad (12.4)$$

である。 $\epsilon_0$ は真空の誘電率と言われる物理定数であるが、これについての解説は後回しにする。また、 $\pi$ は円周率である。

---

<sup>4)</sup> 数式を見れば当たり前のように感じるかもしれないが、重要な式である。というのも、この関係式は作用反作用の法則を表す数式にほかならないからである。

### 12.1.3 まとめ

以上の計算より得た結果をまとめよう.

#### Point 45: クーロン力

ある空間に2つの電荷  $q_1, q_2$  が、それぞれ位置  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  に存在するとき、この2つの電荷には、次式で表されるような力が作用する。この力のことを クーロン力 という。

電荷  $q_1$  に対して働く力は以下。

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}. \quad (12.5)$$

ここに、 $\epsilon_0$  は真空の誘電率<sup>a</sup> である。

---

<sup>a</sup> 詳細は後述。

電荷  $q_2$  に対しては、以下の力が働く。

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_1}{r^2} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}. \quad (12.6)$$

#### # memo No.71: (例) 2つの点電荷同士のクーロン力

クーロンの法則を、より感覚的に分かるように、ここで、最も簡単な、2つの点電荷間に働く、クーロン力を考えてみよう。

存在する電荷が点電荷の場合、クーロンの法則は次式で表せる。

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}. \quad (12.7)$$

より考えやすくするために、2次元で考えてみよう。座標系は、直交座標系とする。この場合、

$$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

である。

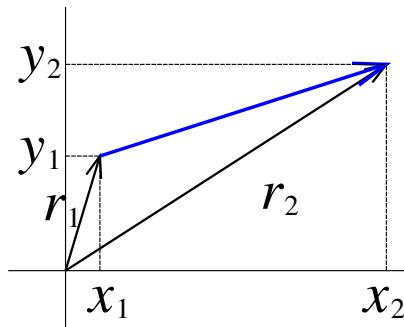


図 12.3 一般の 2 つの点の間の距離

点電荷の配置を,  $x$  軸上にし, 各電荷が  $x = -1/2$ ,  $x = 1/2$  に存在しているとする. そうすると, 2 つの点電荷のそれぞれの位置ベクトルは,  $\mathbf{r}_1 = (-1/2, 0)$ ,  $\mathbf{r}_2 = (1/2, 0)$  となる. そうすると,

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + (0 - 0)^2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

電荷量の大きさは, 両電荷ともに等しく, 1[C] として考える.

すると, クーロンの法則は, 次のようになる. 電荷  $q_1$  が, 電荷  $q_2$  から受けるクーロン力  $\mathbf{F}_{12}$  は

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{12} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{1} \frac{(-1, 0)}{1} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} (-1, 0) \end{aligned}$$

と書ける.

クーロン力の向きは,  $(-1, 0)$  であることが分かった.

以下では, クーロン力の大きさのみ ( $|\mathbf{F}_{12}| := F_{12}$ ) を考えていこう.

$$\begin{aligned} |\mathbf{F}_{12}| &= F_{12} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sqrt{(-1)^2 + 0^2} \end{aligned}$$

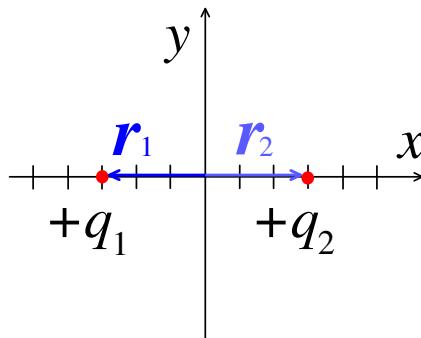


図 12.4 例：2つの点電荷間のクーロン力

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot 1 \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}
 \end{aligned}$$

最後に,  $\epsilon_0$ ,  $\pi$  に具体的な数値を代入する. ここではとりあえず,

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$$

であることが知られているので, この数値を使うことにする. しかし, どのようにして, このような数値が分かるかについては, 後ほど, 電磁気学をさらに学んでから, 考えなおすことにしたい.  $\pi$  は周知のように,

$$\pi = 3.141$$

である.

以上から,

$$\begin{aligned}
 F_{12} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \\
 &= \frac{1}{4 \times 3.1415 \times 8.854 \times 10^{-12}} \\
 &= \frac{10^{12}}{222.483} \\
 &= 0.008989 \times 10^{12}
 \end{aligned}$$

$$\therefore F_{12} = 8.989 \times 10^9$$

を得る.

実は、今までの計算は、単位電荷 1[C] をもつ 2 つの点電荷が、1[m] 離れて位置する場合のクーロン力を計算していた。つまり、

$$\frac{q_1 q_2}{r^2} = 1$$

となるのは、あたり前のことであった。しかし、あえて、座標から丁寧に計算したのは、点電荷がどのような位置に存在しても、同じように計算できることを、示したかったからである<sup>5)</sup>。  
上の計算から、

$$\frac{1}{4\epsilon_0 \pi} \simeq 9.0 \times 10^9 \quad (12.8)$$

が分かる。この数値を用いて、クーロン力を表すと、

$$F = 9.0 \times 10^9 \times \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (12.9)$$

となる。

高校物理では、 $k = 9.0 \times 10^9$  と置いて、

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

と書かれることが多い。

## 12.2 力の重ねあわせの原理

クーロン力は、力学的な力と同様に、重ねあわせの原理が成立していることが、実験的に確認されている。

具体例で示したほうが、分かりやすい。3 つの点電荷が存在する場合を考える。

電気量  $q_1, q_2, q_3$  をもつ 3 つの点電荷の内、任意に 2 つを選ぶ。ここでは  $q_1$  と  $q_2$  をえらぼう。ここでは、例として、点電荷  $q_1$  が、他の点電荷  $q_2$  と  $q_3$  から受けけるクーロン力  $\mathbf{F}_1$  を計算する。計算方法は、最初に点電荷  $q_2$  から受けるクーロン力  $\mathbf{f}_{12}$  を計算する。この時、 $q_3$  はとりあえず存在しないとして考える（図 12.6(A)）。

$$\mathbf{f}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}.$$

その次に、点電荷  $q_3$  から受けるクーロン力  $\mathbf{f}_{13}$  を計算する。この時、 $q_2$  はとりあえず存在しないとして考える（図 12.6(B)）。

$$\mathbf{f}_{13} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3 q_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|^2} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|}.$$

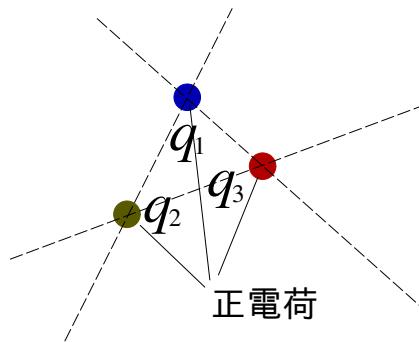


図 12.5 クーロン力（3つの点電荷）



図 12.6 重ねあわせの原理（クーロン力）

最後に、今得た  $f_{12}$  と  $f_{13}$  を足し合わせれば、 $\mathbf{F}_1$  を得る（図 12.7）。

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{f}_{12} + \mathbf{f}_{13} \quad (12.10)$$

同様に、

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{f}_{21} + \mathbf{f}_{23}.$$

$$\mathbf{F}_3 = \mathbf{f}_{31} + \mathbf{f}_{32}.$$

<sup>5)</sup> この例はとても簡単だが、一般性が高い理論であることを認識することはできるはず。

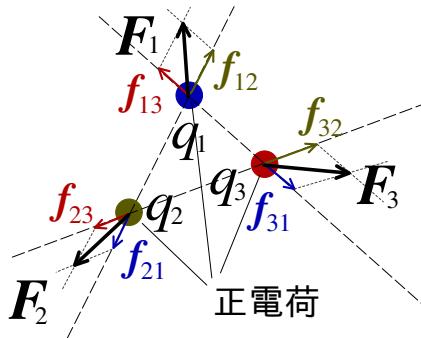


図 12.7 クーロン力の重ねあわせの結果 (3 つの点電荷)

### 12.3 クーロンの法則 ( $N$ 個の点電荷)

まず、一般的に表現する方法についての、説明する。

いま、3つの電荷  $q_1, q_2, q_3$  について考えたが、一般的に表現したい場合には、点電荷の個数を具体的な自然数で表現することはできない。そこで、任意の自然数を表す記号  $N$  を用意する。

さて、 $N$  個ある点電荷のうちで着目したい1つの点電荷を指したい場合を考える。この場合、あらかじめ  $N$  個の点電荷に番号付けをしておく。その上で、例えば「番号1の点電荷に着目して…」などといえば、特定の点電荷に着目できる。しかし、全ての電荷について一度に当たはまる一般的な性質を議論するときには、具体的な番号を指定して一つずつ議論するのは、とても効率が悪い<sup>6)</sup>。そこで、任意の番号を表す記号  $i$  を導入する<sup>7)</sup>。これはよく

$$i = 1, 2, 3, 4, \dots, N-1, N$$

と書かれる。「 $i$  は 1 から  $N$  までの自然数のうちのどれか」といった意味で用いられる書かれ方である。

<sup>6)</sup>  $N$  個の電荷について、すべて同じ議論を繰り返すことになる。

<sup>7)</sup> 電流  $i$  と同じ記号だが、意味はぜんぜん違う。ここで用いられる記号  $i$  は添字である。しかし、文脈で誤解なく判断できるので、特に断りなく使われる。ちなみに、数学の虚数単位  $i$  も同じ記号だけど、コレとも全く違う意味である。

こうすると  $N$  個存在する、番号付けされた点電荷について、一般的に表記できる。つまり、 $q_i$  と書くだけで、 $q_1$  から  $q_N$  の任意の一つを表現できるのである。これは実質的に、番号付けされた全ての点電荷を表していると解釈できる。

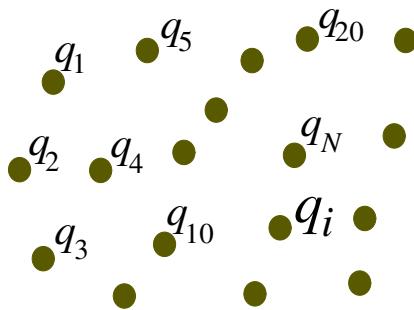


図 12.8  $N$  個の点電荷の番号付け

ようやく本題に入れる。 $N$  個の点電荷が存在するときは、クーロン力についても、力の重ね合わせの原理が成立している。すなわち、位置  $\mathbf{r}_i$  に存在する電気量  $q_i$  を持った点電荷が、各点電荷から受ける力  $\mathbf{f}_{ij}$  の合力  $\mathbf{F}_i(\mathbf{r}_i)$  は次式で表現される。

しかし、ここで注意が必要である。気が付いているだろうか。 $j = i$  の場合に、どうなるかを考えてみただろうか。 $j = i$ 、つまり、クーロン力が  $\mathbf{f}_{ii}$  と表されることになり、これは電荷自分自信から受けるクーロン力を表す。クーロンの法則は、あくまでも 2 つの点電荷からなる系についての法則である。そこには、1 つの電荷がそれ自身に与えるクーロン力というものは、説明されていない。なので、ここでは、 $j = i$  の場合を除くことにしよう<sup>8)</sup>。

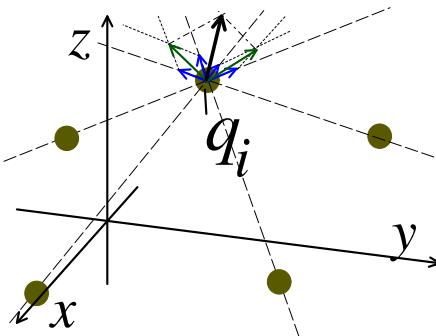
<sup>8)</sup> しかし、クーロンの法則に 1 つの電荷が自身に与えるクーロン力について、何も説明されていないからといって、それが生じないと結論されるわけではない。実際、これは「自己力」として、よく取り上げられる問題である。古典的な電磁気学（量子力学的でない電磁気学）では、この自己力は  $\mathbf{0}$  となることが説明できが、これについては、後ほど考えることにしたい。

**Point 46:** クーロンの法則 ( $N$  個の点電荷)

点電荷が  $N$  個存在するとき、この点電荷に適当に番号付けをする。この時、番号  $i$  の点電荷にかかるクーロン力は、次式で表せる。

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_i) &= \sum_{j=1}^N \mathbf{f}_{ij} \\ &= \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2} \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \end{aligned} \quad (12.11)$$

ここで、 $\sum_{j=1, j \neq i}$  という表現は、 $j = i$  の場合のみを除いた、 $j = 1$  から  $N$  までの総和を意味する

図 12.9 クーロンの法則 ( $N$  個の点電荷)

‡ memo No.72: 和の記号:  $\sum_{j=1, j \neq i}^N$  の注意  
例えば、 $i = 3$  番目を考えると、

$$\sum_{j=1, j \neq i}^N 2j = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + \cdots + 2 \cdots N$$

と展開される。3 番目の項が、無いことに注目してもらいたい。

さらに、計算開始の番号が  $j = 1$  であることが、明らかな場合、省略して、

$$\sum_{j \neq i}^N 2j = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + \cdots + 2 \cdots N$$

のように書かれることもある。

## 12.4 クーロンの法則（電荷の連続分布）

電荷が連続分布しているならば、電荷密度  $\rho(\mathbf{r}^*)$  で考えるほうがよい。このとき、和の記号は積分記号に変わる。また、点電荷が連続分布していることから、その位置  $\mathbf{r}_i$  を示すのではなく、任意の位置を示す必要がある。そこで、添字  $i$  を取り扱って、 $\mathbf{r}$  と表すことにする。以下の式は、位置  $\mathbf{r}$  でのクーロン力を表す。さらに、積分するときの変数記号を、 $\mathbf{r}^*$  で表す。

すると、電荷が連続分布する場合のクーロンの法則は、以下のように表現できる。

### Point 47: クーロン力（電荷の連続分布）

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q\rho(\mathbf{r}^*)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^*|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}^*}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^*|} dV^*. \quad (12.12)$$

ここで、積分はアスタリスク記号「\*」ついたものについて行う<sup>9)</sup>。また、式の  $\Omega$  は任意の領域である。これが、電荷が連続分布している場所における、電気量  $q$  の電荷が受ける力である。

<sup>9)</sup> アスタリスク (Asterisk): 記号の名前。「アステリスカ」とも言われる。「アステリスカ」という呼び方は、コンピュータ関係の技術者によく使われる（そのままローマ字読みすると、そうなる）。本ノートでは、「アスタリスク」と記述していこう。



図 12.10 クーロンの法則(電荷の連続分布)

## 12.5 クーロン力(電気的な力)と力学的な力

クーロンの法則：

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\rho(\mathbf{r}^*)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^*|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}^*}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^*|} dV^*$$

の左辺の力はニュートン力学で導入した力学的な力のことであり<sup>10)</sup>，電気的な力ではない。それに対して、右辺は、クーロンの法則によって示される電気的な力である。要するに、右辺の式で示される力と左辺で示される力は、定義がことなるものである。この式の等号は、右辺と左辺の種類の異なる力が物理学的に等価に扱えることを示すものである。右辺のクーロン力の原因是電荷だから、電気的な力であるが、電気的な力を直接的に測定することはできない<sup>11)</sup>。だから、測定のできる力学的に力に換算して、電気的な力を表現するのである。

クーロンの法則の前提条件として、「固定されてる点電荷にはたらく力」というものがある。この条件は、クーロン力によって点電荷が運動しないように設定した条件である。力を受けている物体は加速度運動するということが、ニュートン運動方程式の意味するところであった。クーロン力を受けている電荷は固定されていなければ加速度運動してしまうのである。だから、固定されているという条件をつけたのである。固定されているということは、クーロン力を受けながら静止しているということである。従って、クーロン力と釣り合う外力が働いていることになる。クーロンの法則を確認するには、電荷の電気量や、電荷間の距離をいろいろ変えてみて、そのときに電荷を固定するのに必要な外力を測定すればよい。

<sup>10)</sup> 力学的な力とは、運動方程式で導入される力を指している。

<sup>11)</sup> ニュートン力学で導入した力は、例えば、天秤やバネ秤を使って測定できる。しかし、クーロン力は直接測定する方法がない。



# 13 電場

## 13.1 作用の伝わり方

### 13.1.1 遠隔作用

2つの点電荷が存在する場合を考える。この2つの電荷は距離  $r$  を隔てて固定されているものとする。このように設定された2つの電荷間には、 $r$  の距離を通してクーロン力が伝わると考えられる。このようなことを、「クーロン力は遠隔作用で伝わる」という。この考え方によると、クーロン力は一瞬にして伝わるとされる。点電荷間の距離がどんなに大きくても、クーロン力は一瞬で伝わるのである。この考え方は納得がいかないことだろう。実際、クーロン力が伝わるには時間が掛かることが示されている。従って、クーロンの法則は、力の遠隔作用という点で問題を抱えていることになる。

### 13.1.2 近接作用

遠隔作用であるクーロン力を、より直感的に馴染む近接作用となるように書き換える。近接作用は、その名の通り、電荷はその隣りの空間から影響を受けるという考

え方で、遠くにある電荷から瞬間にクーロン力が伝わるのではなく、だんだんとクーロン力が伝わってくると考えるのである。しかし、近接作用を採用するとなると、そのクーロン力を伝えるための「何か」が必要になってくる。例えば、音波は空気を通して伝わるように、クーロン力も音波に対する空気のような、それを伝えるための媒質があるとすべきだ。そのために導入するのが電場という概念である。クーロン力は、電場を通して伝達するのである。以下で、この電場という考え方を説明していく。

## 13.2 電場（1個の点電荷）

### 13.2.1 2つの点電荷間のクーロン力

これから、電場という概念を説明したいのだけど、初めて学習する場合に、いきなり一般的な定義を提示してしまっては、数学的な演算のみに思考が傾いてしまいがちだし、もしかすると、「難しい」概念なのだ感じてしまうかもしれない。そこで、このノートでも、他の多くの教科書と同様に、段階を踏んで電場という概念を説明していく。

最初に考えるのは、2つの点電荷のみが存在する場合についてである。

クーロンの法則は、一方の点電荷が他方の点電荷にクーロン力を与える、というものであった。従って、クーロン力とは2つ以上の点電荷が存在して初めて観測される力である。簡単のために、2つの点電荷だけが存在する場合を考える。この2つの点電荷のうちの1つの点電荷を空間に固定して、残りの電荷は人間がいつでも好きな場所におくことができるようとする。この自由に動かせる電荷を固定されている電荷の周りの様々な場所に置いてみると、置く場所によって受けるクーロン力が異なってくる。なぜなら、点電荷間の距離が異なるからである。しかし、自由に動かせる点電荷の場所を1つだけ指定すれば、この点電荷の受けるクーロン力は一意に決まる<sup>1)</sup>。

これが、「電場」という発想の源となる。自由に動かせる点電荷を利用して、『固定された点電荷が、その周りの空間に作る電気的な世界を見よう』というのだ。自由に動かせる点電荷を様々な場所に置いてみて、その場所で固定された電荷から受けるクーロン力を記録していくのである。もちろん、全ての場所に自由に動かせる点電荷を置いていく。実際は無理だが、頭の中では簡単にできることである。一種の思考実験であると考えればよい。このようにして作った記録は、点電荷特有のものになる。

---

<sup>1)</sup> 「一意に決まる」というのは、解が必ずひとつに定まることをいう。

この記録のことを点電荷の電場とよぶことにしようというのである。

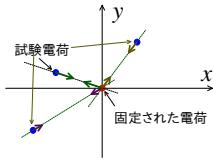


図 13.1 試験電荷の受ける力

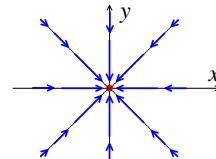


図 13.2 試験電荷の受ける力の記録

### 13.2.2 定量化

定量化してみよう。固定された点電荷の電気量を  $q_0$  とし、位置を  $\mathbf{r}_0$  とする。また、自由に動かせる点電荷の電気量を  $q_x$  とし、位置を  $\mathbf{r}_x$  とする。このとき、自由に動かさせる電荷が 固定された電荷から受けるクーロン力は

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_x q_0}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_x|^2} \frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_x}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_x|} \quad (13.1)$$

と書ける。ここで、 $\mathbf{F}(\mathbf{r}_x)$  と書いたのは、 $\mathbf{r}_x$  が自由に動かせることを強調するためである。ここで、この式を眺めていると、以下のように変形しても示されているよさそうであることに気付く。

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_x) = q_x \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_x|^2} \frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_x}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_x|} \right). \quad (13.2)$$

この式の括弧の中身は  $\mathbf{r}_x$  の関数である。だから、括弧の中身を  $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}_x)$  とおくことができる。

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}_x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_x|^2} \frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_x}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_x|}. \quad (13.3)$$

ここで、関数の添え字に「固定」とつけた理由は、固定された点電荷が作るものであることを忘れないようにするためにである。このように定義された関数は、固定された点電荷特有の関数である。従ってこの関数は、固定された電荷がその周りの空間に作る電気的な世界を記述していると考えられる。このような関数を、点電荷の電場というのである。電場を用いると

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_x) = q_x \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_x) \quad (13.4)$$

とできる。

### 13.2.3 単位電荷が及ぼすクーロン力

$q_x = 1$  とすると,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_x) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_x) \quad (13.5)$$

となって、自由に動かせる点電荷に働く力が、電場に等しくなる。このことは、電荷の単位が [C] であったことを思い出せば、『電場は 1[C] の電荷に働くクーロン力に等しい』と言える。従って、今まで点電荷の作る電場を考えてきたが、たとえ電場の関数の具体的な形が分からなくても、1[C] の電荷を様々な場所に置いてその場所でのクーロン力を測ることによって、電場を知ることができるのである。このように使われる「1[C] の電荷」のことを、試験電荷 という。何となくではあるが、電場のイメージができたところで、以下で一般的な電場の定義を与えることにする。

' が付いた記号は固定電荷についての情報を表し、何も付いていない記号は試験電荷についての情報を表す。すると、次のように表現を改め直せる<sup>2)</sup>。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) := \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

#### Point 48: 電場（1個の点電荷）

1個の点電荷のつくる電場  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  は次式で表現される。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) := \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

ここで、 $\mathbf{r}$  は試験電荷を置く位置（任意の位置）、 $q'$  は固定点電荷のもつ電気量、 $\mathbf{r}'$  は固定電荷の位置である。

<sup>2)</sup> 記号が変わっただけで、書いていることは同じなのだけど、こう表したほうが、カッコイイし、見ためもスッキリとしていて見やすい。

### 13.3 電場 ( $N$ 個の点電荷)

状況を少し一般化させて、 $N$  個の固定された点電荷が作る電場を考える。電場の定義がクーロン力を基にすることには変わらない<sup>3)</sup>。だから、クーロン力が重ね合わせの原理に従う以上、これに付随して電場も重ね合わせの原理に従わねばならない。つまり、点電荷の個数が 1 個から  $N$  個に増えようと、別に新しい考え方を導入する必要はない。単に、試験電荷が一つひとつの固定電荷がつくる電場を計算し、最後にそれらを全て加えあわせればよいだけである。つまり、固定された  $N$  個の点電荷が作る電場は次式で表現できる。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q'_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i|} \quad (13.6)$$

と書ける。それは、クーロン力が重ね合わせの原理を満たしていることからわかる。

#### Point 49: 電場 ( $N$ 個の点電荷)

$N$  個の点電荷のつくる電場  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  は次式で表現される。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q'_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i|} \quad (13.7)$$

ここで、 $\mathbf{r}$  は試験電荷を置く位置（任意の位置）、 $q'_i$  は固定点電荷のそれぞれのもつ電気量、 $\mathbf{r}'_i$  は固定電荷のそれぞれの位置である。

### 13.4 電場（電荷の連続分布）

電荷が連続分布している場所において、電気量  $q$  をもつ電荷が受ける力は、式 (12.12) によって、

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q\rho(\mathbf{r}^*)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^*|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}^*}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^*|} dV^* \quad (13.8)$$

<sup>3)</sup> そもそも、電場はクーロンの法則をより直感できになじむように発展させた概念なのである。

のように書かれる。この  $q$  電荷は 試験電荷 である。試験電荷  $q$  を用意して、この試験電荷が各点で受ける力を考えることによって、周り電気的様子を観測するのである。この式を、以下のように変形する。 $q$  は積分には関係のない定数であるので、で積分記号の前に出せて

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q \int_{\Omega} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\mathbf{r}^*)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^*|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}^*}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^*|} dV^* \quad (13.9)$$

と書ける。ここで、以下の量を定義する。

点電荷が連続的に分布している場合、電場  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  は電荷密度  $\rho(\mathbf{r}^*)$  を用いて、以下の式で定義できる。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) := \int_{\Omega} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\mathbf{r}^*)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^*|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}^*}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^*|} dV^*. \quad (13.10)$$

ここに、上付きのアスタリスク \* が付いている変数について積分を実行する<sup>4)</sup>。

このように電場  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  を定義することで、クーロンの法則は

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r})$$

と書ける。特に、単位電荷  $q = 1[\text{C}]$  の場合、

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

となり、クーロン力  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  がそのまま電場  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  を表す式になる。

### Point 50: 電場（電荷の連続分布）

点電荷が連続的に分布している場合、電場は電荷密度  $\rho(\mathbf{r}^*)$  を用いて、以下の式で定義できる。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) := \int_{\Omega} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\mathbf{r}^*)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^*|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}^*}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^*|} dV^*. \quad (13.11)$$

ここに、上付きのアスタリスク \* が付いている変数について積分を実行する。

<sup>4)</sup> アスタリスクなしの  $\mathbf{r}$  は任意の位置を示す、関数の変数である。上付きのアスタリスクがついた  $\mathbf{r}^*$  は電荷が分布している場所を表す積分変数である（積分変数はどんな記号を用いても結果にはなんの影響も与えないが、位置についての積分であることを強調したいため、 $\mathbf{r}^*$  という書き方をした）。

## 13.5 電場（一般化）

一般に、電気量  $q$  をもつ点電荷は周囲のその他の電荷、あるいは、電荷密度からクーロン力を受ける。このクーロン力  $\mathbf{F}(\mathbf{r}, q)$  は<sup>5)</sup>、

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, q) = q\mathbf{E}(\mathbf{r})$$

と表現できる<sup>6)</sup>。

電場はクーロンの法則を満たすように定義されることに注意する。具体的には、式(13.11)である。クーロンの法則で表せば、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{q} \quad (13.12)$$

である。電荷分布が決定されれば、各位置でのクーロン力は一意に決まる。従って、電場についても同様なことがいえる。

さらに細かいことをいえば、電気量  $q$  の電荷は、自身から生じる電場により周囲の電場を歪ませてしまう。そこで、電気量  $q$  を 0 に近づける。すると、これは以下のように表現できる。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{r}, q)}{\partial q}.$$

ここでは、時間変化しないクーロン力で電場を考えている。クーロンの法則は、点電荷の位置が時間変化しないという条件の下で成り立つ法則である。従って、このクーロン力によって定義された電場もまた、時間変化を考慮していない。時間変化する電場については後述する。

### Point 51: 電場（一般的な定義）

一般に、電気量  $q$  をもつ点電荷が周囲から受けるクーロン力  $\mathbf{F}(\mathbf{r}, q)$  を用いて、次式で電場を定義する。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) := \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{r}, q)}{\partial q}. \quad (13.13)$$

<sup>5)</sup> ここで、独立変数として、点電荷の位置  $\mathbf{r}$  だけではなく、点電荷の電気量  $q$  もすぐ後の都合で、明記しておく（あとで、 $q$  を 0 の極限に持っていく必要が出てくる）。

<sup>6)</sup>  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  は  $\mathbf{r}$  のみを独立変数に持つ関数である。

‡ memo No.73: (例) 点電荷の作る電場

電場の定義の式(13.13)を用いて、点電荷 $q$ の作る電場を定義から求めてみる。試験電荷の電気量を $q'$ とする。すると、クーロンの法則により、クーロン力は

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (13.14)$$

と書ける。ここで、 $\mathbf{r}'$ は試験電荷 $q'$ の位置である。このクーロン力を用いて、電場は以下のように計算される。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{r}, q')}{\partial q'} \\ &= \frac{\partial}{\partial q'} \left( \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ \therefore \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \end{aligned} \quad (13.15)$$

この式(13.15)が、点電荷の作る電場を表す式である。この点電荷の存在する場所に対して、電場は点対称であることが確認できる。

## 13.6 時間変化する電場

例えば、電荷密度が常に均一でなく、時間的に変化して電荷の存在する場所に局所的な偏りが生じる場合、当然として、その電荷分布より生じる電場も時間的に変化する。

クーロン力の時間変化の原因是、電荷密度 $\rho$ の時間変化であり、この他に時間変化の原因となるものはない。従って、電荷密度の独立変数として、時間 $t$ を書き加えてやれば良い。つまり、

$$\rho := \rho(\mathbf{r}, t)$$

とする。このとき、時間変化するクーロン力は、時間を表す変数 $t$ をその独立変数を

明示して、 $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ と書くことすれば、

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = q \int_{\Omega} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho(\mathbf{r}^*, t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^*|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}^*}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^*|} dV^* \quad (13.16)$$

とかける。

すると、時間変化する電場  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  は、自然と以下のように定義できる。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) := \int_{\Omega} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho(\mathbf{r}^*, t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^*|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}^*}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^*|} dV^*. \quad (13.17)$$

この時間変化する電場を使うと、クーロン力は

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = q\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

で表せる。単純に、独立変数に時間  $t$  を書き加えるだけで済む。

電場が時間的に変化する場合でも、上に説明したような、電場の一般的な定義が成立する<sup>7)</sup>。式は、以下のようになる。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) := \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{r}, q, t)}{\partial q}. \quad (13.18)$$

これも単に独立変数に  $t$  を明記しただけにすぎない。

### Point 52: 電場（時間変化する場合）

一般に、電気量  $q$  をもつ点電荷が周囲から受けるクーロン力  $\mathbf{F}(\mathbf{r}, q)$  を用いて、次式で電場を定義する。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) := \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{r}, q, t)}{\partial q}. \quad (13.19)$$

<sup>7)</sup> だから「一般的な」という副詞をつけられる。

## 13.7 電場の定性的なイメージ

### 13.7.1 イメージ

静電場はある特定の位置を指定すると、決まった方向に決まった強さを示す。この性質は、電場を流体のようにイメージすることを可能にする。流体とは、水とか空気とかのことである。つまり、水や空気の流れのように電場のイメージをするのである。電場は目に見えないので、このように考えるより方法がない。また、このイメージで注意することは、「電場には水のような媒質がない」ことである<sup>8)</sup>。これは、電場と流体の大きな違いの1つである。水の流れとは、要するに多くの水分子( $H_2O$ )の移動だが、電場にはこの分子に当るものは存在しないことである。ここが電場のイメージが難しいところである。でも、電荷を電場内に置いたときに、その電場から電荷がクーロン力を受けて運動するのだから、そこには何らかの「流れ的なもの」があると考えてよいだろう。その流れのようなものが、電場であると解釈するのである。

すると、「何が電場を発生させているのか」という疑問が生まれる。この疑問に答えるのが、後の章で考える電場に対するガウスの法則である。

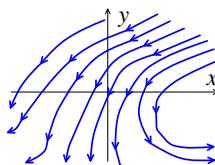


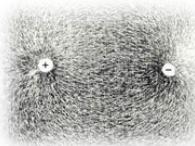
図 13.3 電場の流線(電気力線)のイメージ

### 13.7.2 電気力線(電場の可視化)

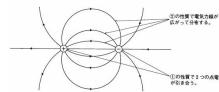
電場は直接見ることのできない、抽象的な概念である。しかし非常に重要な概念であり、この電場という言う概念があるからこそ、電磁気現象を統一的に把握できる。ならば、“どうにかして電場を可視化したい”と思うことだろう。実際に、ファラデーはこれを可視化することを試みていて、これは今日の形で言うと、電気力線とよば

<sup>8)</sup> アインシュタインらによる、「エーテル存在の否定」をこのノートでは受け入れる。今でレこれが当たり前。

れる概念になる。あまりにも複雑な電場を想定しても、ただ話が複雑になるだけなので、1 個の点電荷より生じる電場の電気力線を見てみることにしよう。



(A) 砂鉄を使う

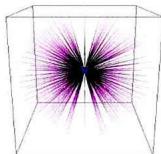


(B) 電気力線

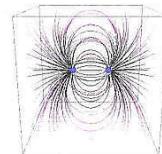
図 13.4 点電荷が作る電気力線（平面）

点電荷が作る電場の平面的イメージは図 13.4(A), (B) のようである<sup>9)</sup>。左の写真では、電場の向きを捉えることはできないが、ここに試験電荷を置いたときに、正電荷から負電荷に向かう方向に力を受けることから、電場には向きがあることが確かめられる。

3 次元ではどうなっているのだろうか。2 次元の例から用意に想像がつくが、確認しておこう。立体的イメージは図 13.5(A), (B) のようになる<sup>10)</sup>。



(A) 点電荷の電気力線



(B) 異極電荷同士

図 13.5 点電荷が作る電気力線（平面）

電気力線はあくまでも、現象を上手く説明するための方法にすぎないことに注意する必要がある。というのも、実際に電気力線が電荷から生じているということを確かめる術はないからである。電気力線は、人間が電気現象を科学的に捉えたときに、はじめて意味をなす。本来の自然の中の電荷は、もしかしたら、電気力線、つまり電場

<sup>9)</sup> 図 13.4(A) は <http://www.kleen-tec.co.jp/elec/elec.htm> より (2008.08.23 現在), 図 13.4(B) は [http://www.keirinkan.com/kori/kori\\_physics/kori\\_physics\\_1\\_kaitei/index.html](http://www.keirinkan.com/kori/kori_physics/kori_physics_1_kaitei/index.html) より (2008.08.23 現在)。

<sup>10)</sup> [http://www15.wind.ne.jp/~Glauben\\_leben/Buturi/Denjiki/Denjikibase1.htm](http://www15.wind.ne.jp/~Glauben_leben/Buturi/Denjiki/Denjikibase1.htm) より (2008.08.23 現在)。

を生んでおらず、何か私達の考えもつかないような機構によって、電気現象を生じているのかかもしれない。今私が分かることは、“電荷が電場を生じていて、それは電気力線によって視覚的に表現できる”ということである。図でイメージすることは大変重要なことだが、このイメージが自然現象そのものであるという、勘違いを起こしやすい。このようなイメージは、実験を理論的に説明しようとしたときに役に立つというものであり、つまりは、あくまでもイメージである。

# 14 磁束密度

## 14.1 磁束密度に関するローレンツ力

コメント 世の中には、電気的な力と似たような、しかし、それとは異なる力が存在する。それは、磁気的な力である。磁石が及ぼす力が、その代表的な例であることは、誰もが承知しているところだ。ここでは、磁気と電荷の関係について説明しよう。

### ¶ 磁束密度の存在を示す現象

磁石付近において、正電荷を帯びた物体がある速度で横切ると、その物体はその速度の方向を曲げられるような力を受ける。イメージは、図 14.1 である<sup>1)</sup>。

磁石に近づく前は、直線的な運動（等速直線運動）をしていたのだけど、磁石に近づいたら、その運動方向が換えられてしまうのである。当然、人間が引っ張ったわけではない。磁石の存在により、運動方向が変化するのである。図 14.1(A) では、下に曲げられている様子を描いた。このような状況であれば、正電荷を帯びた物体な

<sup>1)</sup> 図中の 磁束密度 という語彙があるが、これは磁石の向きを表したものであると、考えてもらいたい。磁束密度の定義などの詳細は、後述する。イメージはこれで十分である。



図 14.1 磁束密度に関するローレンツ力

らば、常に下向きに運動方向が変わる。つまり、磁石から生じる磁界<sup>2)</sup>の向きに対して、右回転するように曲がるのである。ということはもちろん、磁界の向きが図 14.1(A) とは逆向きであれば、物体は上方向に曲げられることになる。

運動する物体が負電荷の場合(図 14.1(B)), 曲げられる方向は、正電荷の場合と逆向きで、上の方に曲がる。

また、図には描いてないが、磁界の向きが逆(S 極付近を通過する場合)の場合、曲げられる向きは、正電荷が曲げられる向きと反対方向である。

以上のように、電気量を帯びた物体が磁極付近を通過するときには、その運動方向が、磁極の向きに対し右回りするように、曲げられる。物体の運動方向の変化は、その速度の変化を意味していて、つまりは加速度が生じたということになる。加速度が生じるのは、物体が何らかの力を受けたということである。このような力のことを、磁束密度に関するローレンツ力とよぶ<sup>3)</sup>。

### ¶ 定量化してみよう

数式で表してみよう。物体の回転を扱うのには、ベクトルの外積が便利である。実際、磁束密度に関するローレンツ力もベクトルの外積を用いて定義できる。

そのために、磁束密度という概念を定義したいのだけど、ここでちょっと発想の転換をしたい。今まで考えやすいように、磁界<sup>4)</sup>が存在する空間付近で、電気量を

<sup>2)</sup> 磁界：後に、磁束密度 という呼び方に言い改める。しかし、ここでは、小学生の頃から使い慣れている語彙を優先して、「磁界」と記述した。イメージすることが最優先であるので。

<sup>3)</sup> Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928, オランダ)：ゼーマン（※1）とともに、ゼーマン効果（500 ページの 27.3 節を参照）を発見し、さらに理論付けを行ったことで、ノーベル物理学賞を授与されている。特殊相対性理論でよく使われる ローレンツ変換 でもその名を残している。

（※1）Pieter Zeeman (1865–1943, オランダ)

<sup>4)</sup> 使用している語彙が安定していないが、容赦してもらいたい。分かりやすく説明するため、未説明の語彙を不意に使いたくない。未説明の語彙は、きちんと説明した後に、使用することとしたい。それまでは、一般的に分かりやすいと思われる語彙や言い回しを使うことを許してほしい。

持った物体が磁束密度に関するローレンツ力を受け、進行方向が変わる、という説明をしてきた。しかし、ここで磁束密度という概念を定義するにあたり、視点をかえてみる。

まず、最初に空間には“何も無い”と認識していると仮定しよう。ここに、わざと電気量をもった物体を適当な速度で等速直線運動させてみよう。本当に何もなければ、この物体は等速直線運動を続けるのみである。しかし、物体がある所から曲がったとしよう。当然、人間が外力を加えてわざと曲げたのではないとする。なぜ物体はそこから進行方向が変化してしまったのか。この疑問に答える為に、ここで**磁束密度**という考え方を導入するのである。最初に仮定していた“何も無い”空間は、実は“何も無い”のではなく、そこには、磁束密度が存在していたとするのである。この磁束密度により、電気量を帶びた物体が磁束密度に関するローレンツ力を受けて、進行方向を変化させられたと説明するのである。

イメージは、図14.2のようである。まず、図14.2(A)を想定して電気量を帶びた物体を投げるのだが、“何もしていないのに”物体の進行方向が曲がってしまう。これを説明するため、そこには、“磁束密度が存在していた”とするのである(図14.2(B))。



図 14.2 磁束密度の存在

ようやく、磁束密度に関するローレンツ力を数式で表す準備が整った。電気量  $q$  をもった物体（以降、電荷  $q$  と書く）が、速度  $v$  で運動しているとしよう。そして、それを観測中に、電荷  $q$  の進行方向が変化した。そこで、磁束密度  $B$  を導入し、 $qv \times B$  の方向へ力を受けて曲がったとできるよう、磁束密度  $B$  を定義する。この力  $qv \times B$  こそが、磁束密度に関するローレンツ力とよばれるものである。

### ¶ まとめ

以下に、これまでの説明をまとめておこう。

**Point 53:** 磁束密度に関するローレンツ力

ある空間に、電気量  $q$  をもった電荷があり（以降、電荷  $q$  と書く）、速度  $v$  で等速直線運動しているとする。それを観測中に、ある所で、電荷  $q$  が突然として、進行方向が曲げられたとしよう。進行方向が変化したということは、力が加わったということである。この力のことを、磁束密度に関するローレンツ力という。

**Point 54:** 磁束密度

ある空間において、速度  $v$  で運動する電荷  $q$  が、磁束密度に関するローレンツ力  $\mathbf{F}_{\text{Lorentz}}$  を受けて進行方向が変化するならば、その空間には、次式を満足する磁束密度  $\mathbf{B}$  が存在する。

$$\mathbf{F}_{\text{Lorentz}} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (14.1)$$

つまり、磁束密度が生じているかどうかが、はっきりとしない場合には、そこに電荷を用意して、いくらかの速度をもつようにポンと弾いてみるとよい。その用意した電荷の電気量は分かっているはずだし（事前に測定しておく）、速度の変化は目に見えて起これば、その変化の仕方から、磁束密度の強さと方向を同時に知ることができるだろう。

## 14.2 電流が受ける力

ローレンツ力を考えたときに、電気量  $q$  をもつ電荷が等速度  $v$  で運動しているとした。電荷が速度をもてば、それは電流であるとも考えられる。電流はそのように定義される量であることは先に確認した。実際の電流は多数の電荷の移動である。そこで、その電荷の個数を  $N$  とおくと、電流  $\mathbf{I}$  は

$$\mathbf{I} = qN\langle \dot{\mathbf{r}} \rangle \quad (14.2)$$

と書ける。速度は点電荷全体の平均速度を考える必要があるので、 $\langle \dot{r} \rangle$  と書いた。ここで、 $qN$  は系全体の電荷の総和であると考えることができて、それを  $Q$  とする。

$$Q = qN$$

これによって、

$$\mathbf{I} = Q\langle \dot{\mathbf{r}} \rangle \quad (14.3)$$

となる。この式の右辺は、電気量  $Q$  の電荷が速度  $\langle \dot{\mathbf{r}} \rangle$  で運動している式であると考えてもよいので、この電荷  $Q$  はローレンツ力をうけて、

$$\mathbf{F} = Q\langle \dot{\mathbf{r}} \rangle \times \mathbf{B} \quad (14.4)$$

の関係がある。この式は、式 (14.3) によって、

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} \times \mathbf{B} \quad (14.5)$$

と書ける。この式が、電流が磁束から受ける力である。

実際の電流は導体内に生じる。従って、電流が受ける力は導体の受ける力となって表れてくる。



図 14.3 磁束密度中の電流が受ける力

## 14.3 ビオ＝サバールの法則

### 14.3.1 実験則

エルステッド<sup>5)</sup> は電流が生じると、その周りに磁束密度が生じることを発見した。この数学的表現を、ビオ＝サバールの法則 という。すなわち、この法則は磁束

<sup>5)</sup> Hans Christian Oersted (1777–1851, デンマーク)

密度と電流の関係を表現するものである。

**Point 55:** ビオ＝サバールの法則

導線  $\Gamma$  に電流  $\mathbf{I}$  が流れているとき、電流の単位接線ベクトルを  $\mathbf{t}_I$  として<sup>a</sup>、 $\Gamma$  上の  $\mathbf{r}'$  部分、その端から測った距離を  $s'$  として、位置  $\mathbf{r}$  に生じる磁束密度  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  は

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 |\mathbf{I}|}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{t}_I(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{s}' \quad (14.6)$$

で表現される。ここで、 $\mu_0$  は真空中の透磁率である。

<sup>a</sup> 電流  $\mathbf{I}$  の単位接線ベクトル  $\mathbf{t}_I = \mathbf{I}/|\mathbf{I}|$ 。

### 14.3.2 一般化

上に書いたビオ＝サバールの法則は、太さのない導線に流れる電流を想定した記述である。しかし、実際には、電流は広がり（面積）をもつ。そこで、電流に広がりをもたせた場合のビオ＝サバールの法則に書き直す。

導線の断面積を  $S$  とする。この導線の微小長さ  $d\mathbf{s}'$  を電流密度  $\mathbf{i}(\mathbf{r}')$  が流れてるとする。このとき電流の大きさ  $I$  は  $I(\mathbf{r}') = i(\mathbf{r}') dS$  である。また、このときの電流の向きは  $\mathbf{t}_I(\mathbf{r}') = \mathbf{i}(\mathbf{r}')/i(\mathbf{r}')$  である。この電流の向きの式を、 $i(\mathbf{r}') = i(\mathbf{r}')/\mathbf{t}_I(\mathbf{r}')$  と変形して、電流の大きさの式に代入すると、

$$\begin{aligned} I(\mathbf{r}') &= \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{\mathbf{t}_I(\mathbf{r}')} dS \\ \Leftrightarrow I \mathbf{t}_I(\mathbf{r}') &= \mathbf{i}(\mathbf{r}') dS \end{aligned} \quad (14.7)$$

となる。この式 (14.7) を式 (14.6) に代入すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}') dS \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{s}' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS' dS \end{aligned}$$

ここで、 $ds' dS = dV'$  と置けば、(  $ds'$  は導線の微小長さ、  $dS$  は導線の面積である)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

を得る。よって、求める式を得た。積分が体積積分になっていることに注意する。この式が電流密度を用いて表した ビオ＝サバールの法則 である。

**Point 56:** ビオ＝サバールの法則（電流密度表示）

電流はその周囲に磁束密度を発生させる。その発生は以下の式に従う。

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \quad (14.8)$$

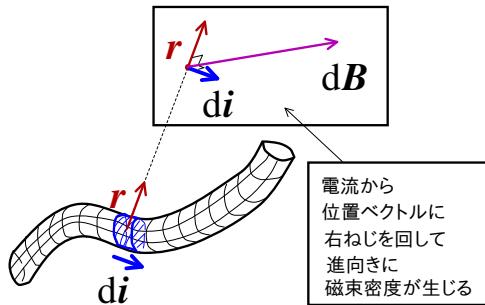


図 14.4 ビオ＝サバールの法則

### 14.3.3 点電荷の場合

最後に、電気量  $q$  をもつ点電荷に関する表示もしておこう。最初に示した式(14.6)を思い起そう。

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 |\mathbf{I}|}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{t}_I(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{s}' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{t}_I(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} |\mathbf{I}| d\mathbf{s}' \\ \frac{d\mathbf{B}(\mathbf{r})}{d\mathbf{s}'} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{t}_I(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} |\mathbf{I}| \\ d\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{t}_I(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} |\mathbf{I}| d\mathbf{s}' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{|\mathbf{I}| d\mathbf{s}' \mathbf{t}_I(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} |\mathbf{I}| d\mathbf{s}' \mathbf{t}_I(\mathbf{r}') \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}\end{aligned}$$

ここで、電流素片という概念を導入しよう。上式の  $|\mathbf{I}| d\mathbf{s}' \mathbf{t}_I(\mathbf{r}')$  に注目する。 $d\mathbf{s}'$  は導線の微小な長さであるから、 $|\mathbf{I}| d\mathbf{s}' \mathbf{t}_I(\mathbf{r}')$  という量は電流の微小な一部分であとみなせる。この  $|\mathbf{I}| d\mathbf{s}' \mathbf{t}_I(\mathbf{r}')$  のことを電流素片とよぶことにしよう<sup>6)</sup>。

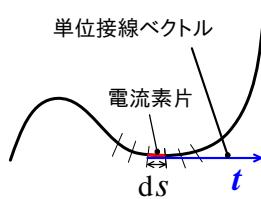


図 14.5 電流素片  $|\mathbf{I}| d\mathbf{s}' \mathbf{t}_I(\mathbf{r})$

電流素片  $|\mathbf{I}| d\mathbf{s}'$  はその極限は、ひとつの点電荷の移動であると考えられる。点電荷の電気量を  $q$ 、その速度を  $\mathbf{v}$  とすると、

$$|\mathbf{I}| d\mathbf{s}' = q\mathbf{v}.$$

<sup>6)</sup> 教科書によっては、電流要素と表現されることもある。

つまり、速度をもった点電荷が作る磁束密度  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  は<sup>7)</sup>,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} q \mathbf{v} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

**Point 57:** ビオ＝サバールの法則（点電荷表示）

速度  $\mathbf{v}$  で運動する、電気量  $q$  をもつ電荷は、次式で表される磁束密度  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  をその周囲に発生させる。

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} q \mathbf{v} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (14.9)$$

---

<sup>7)</sup> ここで、改めて、 $d\mathbf{B}(\mathbf{r})$  を  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  に表示を置き換える。 $d\mathbf{B}(\mathbf{r})$  は電流の微小部分の作る磁束密度というイメージであったが、今考えている点電荷のつくる磁束密度であるので、それを  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  と表現しても間違いではないだろう。いや、むしろこのように書き換えたほうが、式を自然な形にさせることができるとと思う。



# 15

## 電磁気力（ローレンツ力）

### 15.1 ローレンツ力（電磁気力）

クーロン力  $\mathbf{F}_{\text{Coulomb}}$  と磁束密度に関するローレンツ力  $\mathbf{F}_{\text{Lorentz}}$  によって、電気的な力と電荷が磁束密度より受ける力を記述する方法を得た。

$$\mathbf{F}_{\text{Coulomb}} = q\mathbf{E}.$$

$$\mathbf{F}_{\text{Lorentz}} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

ところで、これまで「磁束密度に関するローレンツ力」という表現をしきりに使用してきた。わざわざ“磁束密度に関する”なんていう但し書きのような言い回しをしてきたのには、理由がある。それは、単に ローレンツ力 といったとき、それは

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \mathbf{F}_{\text{Coulomb}} + \mathbf{F}_{\text{Lorentz}} \\ &= q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})\end{aligned}$$

のようなクーロン力と磁束密度に関するローレンツ力の和を指すからである<sup>1)</sup>。

<sup>1)</sup> ちなみに、“電場に関するローレンツ力”なんてものは存在しない。ただ、磁束密度  $\mathbf{B}$  や電荷  $q$  が 0 のときのような場合のローレンツ力は、クーロン力と等しくなり、電場に関するローレンツ力といつても間違いではないとは思うが、一般的に通用する語彙ではない。

**Point 58: ローレンツ力**

ある空間に電場  $\mathbf{E}$  と磁束密度  $\mathbf{B}$  が存在するとき、電気量  $q$  をもつ点電荷（以下、電荷  $q$  と書く）が速度  $\mathbf{v}$  で運動しているならば、この電荷  $q$  には次式で示すローレンツ力  $\mathbf{F}$  を受ける。

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (15.1)$$

## 15.2 ローレンツ力と観測者

このローレンツ力は、不思議な力である。というのも、この力は観測者と電荷との相対的な速度  $\mathbf{v}$  によっているからである。同じ電荷を観測していても、観測者によって電荷との相対速度が異なるのであれば、ローレンツ力の向きや大きさは、観測者ごとに異なったものとなる。なんとも不思議なことであるが、相対性理論を受け入れれば、何の不思議なことではなくなる。しかし、ここでは電磁気学を学ぶことが目標があるので、とりあえず、この不思議さは棚上げにしておき、話を先に進めることにしよう。

**# memo No.74: 電荷自身から発する磁束密度**

電荷が磁束密度中を運動するときには、それにより磁束密度に関するローレンツ力を受け、速度の方向が変化してしまう。しかし、あとで述べるとおり、アンペールの法則によれば、磁束密度の発生源は電流である<sup>2)</sup>。

電荷が速度をもっていれば、それは電流と同一視できることになり、つまり、その物体自身がその周囲に磁束密度を生じさせていることになる。

<sup>2)</sup> アンペールの法則（※1）は次式で表現される。

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \left( \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

言葉で表現すれば、大雑把に、

回転する磁束密度 = 電流 + 時間変動する電場

という感じになろう。詳しいことは、後に考える。

（※1）正確には「アンペール = マクスウェルの法則」というべきだ。

たしかに、はじめに考えたように、速度をもった電荷は、自身が発している磁束密度とは発生源が異なる磁束密度の影響をうけて、その方向が変化する。しかし一方で、電荷から発している磁束密度は、その周囲の磁束密度に影響を与えていていることも事実である。

そうであるとき、その影響はどの程度なのだろうか。それは、磁束密度に関するローレンツ力が  $qv \times \mathbf{B}$  と表されることから、電荷の電気量  $q$  と速度  $\mathbf{v}$  の大きさに依存していることは明らかである。

つまり、電荷を除いた状態での純粋な空間の磁束密度を  $\mathbf{B}_{\text{pure}}$  とし、電荷から生じる磁束密度を  $\mathbf{B}_q$  としたならば、電荷が存在する場合の正味の空間の磁束密度  $\mathbf{B}$  は

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\text{pure}} + \mathbf{B}_q$$

である。だから、電荷が受ける磁束密度に対するローレンツ力は、

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \\ &= q\mathbf{v} \times (\mathbf{B}_{\text{pure}} + \mathbf{B}_q) \\ &= q\mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\text{pure}} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}_q \\ \therefore \quad \mathbf{F} &= q\mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\text{pure}} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}_q \end{aligned}$$

となり、 $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}_q$  という分だけ、周囲の磁束密度を変化させ、それが自分の受ける磁束密度に対するローレンツ力に跳ね返ってくる。

ここで気になるのは、 $\mathbf{B}_q$  である。これは運動している電荷から発している磁束密度である。大きさはどのくらいで、どの方向に磁束密度は生じているのだろうか。これはビオ＝サバールの法則から、位置  $\mathbf{r}$  に発生させる磁束密度  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  は

$$\mathbf{B}_q(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} q\mathbf{v} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

と計算される。ここに、 $\mathbf{r}'$  は磁束密度を観測する固定点である。とすれば、電荷が受ける磁束密度に対するローレンツ力は次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= q\mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\text{pure}} + q\mathbf{v} \times \left( \frac{\mu_0}{4\pi} q\mathbf{v} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \\ &= q\mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\text{pure}} + \frac{\mu_0}{4\pi} \left( q^2 \mathbf{v} \times \mathbf{v} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right). \end{aligned}$$

結果が見えてきた。ここで、ベクトル解析の公式、任意のベクトル  $\mathbf{X}$  に対して、 $\mathbf{X} \times \mathbf{X} = \mathbf{0}$  を思い起こせば、

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= q\mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\text{pure}} + \frac{\mu_0}{4\pi} \left( q^2 \mathbf{0} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \\ &= q\mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\text{pure}} + \mathbf{0} \\ \therefore \quad \mathbf{F} &= q\mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\text{pure}}. \end{aligned}$$

この式の意味するところは、明白である。運動する電荷から発している磁束密度より受けるローレンツ力は、電荷自身に対して影響を及ぼさない、ということである。考えて見れば、簡単にイメージがされることである。速度をもつ電荷がその周囲につくる磁束密度  $\mathbf{B}_q$  は、その速度に対して垂直な方向に生じる。なので、 $\mathbf{B}_q$  は運動する電荷に対して、なんのエネルギーも与えないのだ<sup>3)</sup>。

---

<sup>3)</sup> 仕事の定義  $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$  を思い起こそう。物体に仕事をすると、それはエネルギーとして蓄えられるのだが、垂直成分はそれに寄与しない。なぜなら、

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{r} = |\mathbf{F}| |\mathbf{r}| \cos \theta = |\mathbf{F}| |\mathbf{r}| \cos(\pi/2) = 0.$$

# 16

## マクスウェル方程式概観

### 16.1 4つの基本法則

コメント ここでは、真空中の電磁気現象を想定する。言い換えれば、物質内における電場や磁束密度については想定していない。物質が存在する場合の理論は複雑になり、最初に学習する際には、理論の骨格を捉えにくいものである。理論の筋道を明確に捉えるために、真空中であるという制約を与える。

#### 16.1.1 はじめに

電磁気的現象は4つの基本法則によって説明できる。ニュートン力学で言うところの、ニュートンの運動の3法則に対応する部分である。ついでに、それに対する方程式も記述しておこう。

(1) 電場に対するガウス<sup>1)</sup> の法則

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho. \quad (16.1)$$

(2) 磁束密度に対するガウスの法則

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (16.2)$$

(3) アンペール=マクスウェル<sup>2)</sup> の法則

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (16.3)$$

(4) フアラデー<sup>3)</sup> の電磁誘導の法則

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (16.4)$$

<sup>1)</sup> Johann Carl Friedrich Gauss(Gauß) (1777–1855, ドイツ)：ドイツの数学者、物理学者。整数や代数についての研究、曲面論などに代表される幾何学の研究が有名である。近代数学の大部分にその業績があり、19世紀最大の数学者とも言われる。また、cgs単位系の「ガウス[G]」は磁気の単位として使われている。そのほかにも、「ガウス記号(整数論)」、「ガウス平面(複素関数論)」、「ガウス分布(誤差論)」など彼の名がつけられた概念が多い。

<sup>2)</sup> James Clerk Maxwell (1831–1879, イギリス)：古典電磁気学の理論体系を築いた。この理論より電磁波の予言を行い、ヘルツ(Heinrich Rudolf Hertz, 1857–1894, ドイツ)らによって実験的に実証された。

電磁気学的な自然現象は、4つの法則を基本法則とすることで、説明のつく現象であると提唱する(1865年; A dynamical theory of the electromagnetic field)。その後、マクスウェルは、1873年に、電磁気学を体系的に纏めた教科書を出版し、電磁気学を確立させた(1873年; A treatise on electricity and magnetism)。この教科書は、電磁気学におけるプリンキピアであると言われるようだ(褒め言葉であると同時に、難解であるという意味も込められているらしい)。

また、統計物理学の基本的な考え方である、気体分子運動論にかんする研究も行なっている。「マクスウェル分布(マクスウェル–ボルツマン分布)」としても、その名前を残している。これは今日の統計物理学の基礎をなすものである。

また、マクスウェルはキャベンディッシュ(10.1節の脚注を参照)の仕事を世の中に紹介している。そして、当時新しく設けられた、「キャベンディッシュ研究所」の実験物理学の教授(初代所長)として働いている。なおこの研究所は、上に紹介したキャベンディッシュ(Henry Cavendish)の子孫に当たる、デヴォンシャー第7大公爵が出資して作られた、ケンブリッジ大学の実験物理学施設である。

片仮名表記される場合、「マックスウェル」とかかれることもある。

(参考1) 太田 浩一,『マクスウェルの渦 アインシュタインの時計 現代物理学の源流』, 東京大学出版社

(参考2) William H.Cropper,『物理学天才外伝』, 講談社(ブルーバックス)

<sup>3)</sup> Michael Faraday (1791–1867, イギリス)：電磁誘導の発見、電気力線、磁力線の提唱(電磁気現象の近接作用の考え方)など、電磁気学に大きい貢献をする。また、化学者としての活躍も有名であり、電気分解の法則の発見がその例である。コンデンサの容量の単位「ファラード[F]」や、ファラデー一定数などは、彼の名にちなんだものである。

以下では、これら4つの法則の内容をざっくりと見ていく。その実験的根拠等の細かいことは、次章以降で考えることにする。ここでは、電磁気学は4つの基本法則から構成されているのだということを理解してもらいたい。各法則が意味する現象の詳細は、後で、それぞれ章を立てて説明する。

もう一度注意しておこう。先のコメントの部分にも書いたが、以降で想定するのは、すべて、真空中で起こる電磁気現象である。物質を含む場合については、また別に議論することにしたい。

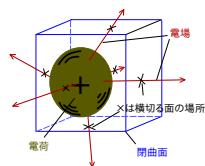
### 16.1.2 電場に対するガウスの法則

電場に対するガウスの法則は、電場の発生と消滅に関する法則である。内容は次の通りである。

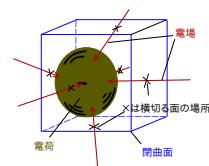
#### 電場に対するガウスの法則

電場の発生源は正に帯電した電荷である。また、電場の消滅源は負に帯電した電荷である。そして、電場の発生と消滅は電荷においてのみ起こり、これ以外では起こらない。

この法則の意味するところは、電場の発生と消滅の原因是電荷にあることの主張である。正に帯電したから電荷から発生した電場は、負に帯電した電荷に吸収（消滅）するのである。そして、電場の発生、消滅は電荷以外では起こりえない。



(A) 正電荷より電場発生



(B) 負電荷で電場消滅

図 16.1 電場に対するガウスの法則

### 16.1.3 磁束密度に対するガウスの法則

磁束密度に対するガウスの法則は、磁束密度の発生と消滅に関する法則である。内容は次の通りである。

— 磁束密度に対するガウスの法則 —

磁束密度の発生源、消滅源は存在しない。

磁束密度がある点から生じて、他の点に吸収されるようなことは起こりえないことを、この法則は主張する。つまり、電場の発生源とはる電荷に対応するような、言わば電荷は存在しないことを意味する。

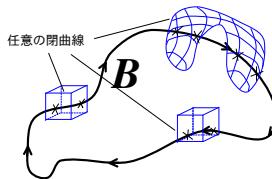


図 16.2 磁束密度に対するガウスの法則

### 16.1.4 フララデーの電磁誘導の法則

フララデーの電磁誘導の法則は、磁束密度の時間的な変化と電場の関係に関する法則である。内容は次の通りである。

— フララデーの電磁誘導の法則 —

磁束密度が時間的に変化すると、その周囲には回転する電場が発生する。

磁束密度とは磁界のことだから、磁界の変化が回転する電場を発生させることになる。具体的な例で考える。磁石は磁界を発生させていることは、中学生ならば誰でも

でも知っている。とすれば、磁界が変化する状況を作るには、磁石を手で持って振ればよい。ファラデーの電磁誘導の法則の法則は、この手で振っている磁石の周りに、電場が生じていると主張しているのである。

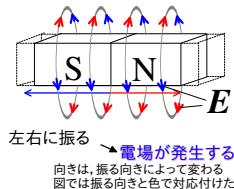


図 16.3 ファラデーの電磁誘導の法則

#### 16.1.5 アンペール = マクスウェルの法則

アンペール = マクスウェルの法則は、電場の時間的な変化と磁束密度に関する法則である。内容は次の通りである。

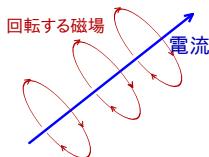
##### アンペール = マクスウェルの法則

電流の周りには、この電流を取り囲むように回転する磁束密度が生じる。またこれに加えて電場の状態が時間的に変化すると、その周囲には回転する磁束密度が発生する。

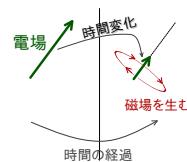
電流が流れていると、その周囲には磁界が発生しているということは、おそらく中学で習うはずだ。この法則では、それに加えて、時間的に変化する電場も、回転する磁束密度を作ることを主張している。

## 16.2 マクスウェル方程式を見てみよう

**コメント** この節では、マクスウェル方程式を実際に見てみよう。だたし、その式をイメージとして捉え、意味することを重視する。数式の本来の性質等は、各法則毎に詳しく調べることにし、ここでは数式の形に慣れることが目的である。徐々にマクスウェル方程式に馴染んで行こう。



(A) 電流による磁場



(B) 電場の時間変化による磁場

図 16.4 電流と時間変化する電場は、その周囲に回転する磁場を生じる

### 16.2.1 「マクスウェル方程式」とは

**コメント** まずは、「マクスウェル方程式」と言われる式について説明する。実は、マクスウェル方程式と言われてはいるが、マクスウェルがその方程式を発見したのではない。勘違いを起こしてしまいがちだが、マクスウェルが発見したという意味での、方程式は存在しないのである。ではどういうことかというと、言うなれば、“マクスウェルが提唱した、電磁気の公理的な4つの連立方程式”がマクスウェル方程式と呼ばれるものである。

#### 16.2.1.1 マクスウェルが電磁気学を確立する

電磁気的な自然現象には、冬場に発生する静電気や、より身近なものとして、磁石がある。携帯電話や無線 LAN も電磁気現象（電磁波）を利用した装置である。電磁気的な現象は、一見すると、その発生機構が複雑であるように感じてしまう。たしかに、マクスウェルにより指摘される以前では、電磁気現象は複雑であると感じることだったろう。しかし、今では、電磁気現象は、たった4つの法則を認めるだけで、説明ができることが分かっている。これを指摘した人物こそマクスウェルである。

マクスウェルの提唱した4つの法則は、それ以前に先人<sup>4)</sup>により発見されていた自然現象をピックアップしたものであり、つまり、マクスウェル自身が4つの法則を発見したわけではない。マクスウェルの偉大なところは、それまで煩雑としていた電磁気現象に関する実験結果（実験法則）を、体系化したことにある。それまでには、色々な電磁気学の実験が行われて、その実験結果も多様にあったはずである。マクスウェルは、この煩雑な実験結果は、4つの自然現象を受け入れることで、すべてが上手く（数学的に）説明できることを示唆した。

<sup>4)</sup> 例えば、アンペール、クーロンなどがある。

### 16.2.1.2 数式で表現してこそ、基本法則と言える

マクスウェルが基本法則として取り上げた4つの実験結果については、定性的には、上で紹介しと通りである（16.1節参照）。しかし、これらの法則は、数式により表現してこそ、意味を成す<sup>5)</sup>。そこで、次に、4つの基本法則を表す数式を紹介する。ただし、その数式に深入りすることはせず、そのイメージを捉えることを第一の目的としたい。より詳しいことは、次章以降で考える<sup>6)</sup>。

### 16.2.1.3 マクスウェル方程式の2種類の表現

マクスウェル方程式は4つであるが、実は、その表現方法が2種類があり、微分を使って表現したものが**微分形**、積分を使って表現したものが**積分形**と言われる。ここでは、この2種類の表現方法を紹介する。微分形と積分形の違いは、視点の違いである。現実に起こっている現象を肌で感じる場合には、積分形の方程式を用いる。そのため、工学の分野では、積分形を使うことのほうが多いと思う。これに対し、微分形で記述されたものは、現象を局所的に見た場合に使われる。微分形は理論的考察を行う場合に使うことが多い。もちろん、積分形で表されようが、微分形で表されようが、その式は全く等価である（当たり前のはずだが、念のために）。

### 16.2.2 約束：独立変数の記述の省略

マクスウェル方程式は、位置  $\mathbf{r}$  と時間  $t$  の4つの独立変数を含む関数の間に成り立つ式であるが、この独立変数をいちいち明記していたら、式が煩雑になり見難くなってしまう。そこで、以下のように、独立変数を省略して記述する。すなわち、電場  $\mathbf{E}$ 、磁束密度  $\mathbf{B}$ 、電流密度  $\mathbf{i}$ 、電荷密度  $\rho$  であり、その意味は次式の通り。

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

<sup>5)</sup> 物理現象を説明するには、数式によりそれを表現すべきだ。数式で表されて、初めて、詳細な推論や論理的思考が可能になるからだ。数式を用いずに、言葉で表現しても論理的推論が不可能というわけではないが、考えにくいし、論理もわかりにくくなる。数式で表現できれば、論理的推論もしやすくなるし、論旨もわかりやすくなる。不慣れな数式を扱うことが億劫かもしれないが、ここは少々なるまで我慢してもらいたい。物理学は数式を扱う学問なので、数式に慣れることは大事だ。4つの法則で電磁気学現象を説明できるといったのは、各法則を方程式で表したときに、電磁気現象が4つの方程式から数学的演算により、論理的必然性をもった結果として導かれることをいう。

<sup>6)</sup> 実は、以下に説明する4つの方程式の理解こそが、初めて電磁気学を学ぶ際の目標なのである。つまり、ここでは、その最終目標を先回りして紹介することになる。これは、学習の目標を明確にすることを考えてのことである。目標が明確になれば、学習の際の不安（何をしているのかが分からなど）も、少しは解消されることと思う。

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$$

$$\mathbf{i} = \mathbf{i}(\mathbf{r}, t)$$

$$\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$$

また,  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$  は, それぞれ, 真空中の誘電率, 透磁率と言われる, スカラーレベルで, 単なる定数である (位置と時間の関数ではない).

ついでに, 他の記号も説明する. 任意の閉曲面を  $S$  で表現する. また,  $S$  で囲まれた内部の領域全体を  $\Omega_S$  と書く. 閉曲面の微小部分は  $dS$  であり,  $dS$  の単位法線ベクトルは  $\mathbf{n} := \mathbf{n}(\mathbf{r}, t)$  で表現する. また,  $l$  は任意の閉経路 (ループしている経路, 輪状の経路のこと) である. そして,  $S_l$  というのは, 経路  $l$  を縁とする閉曲面を表す. そして, 経路  $l$  の単位接線ベクトルを  $\mathbf{t} := \mathbf{t}(\mathbf{r}, t)$  と表現する.

くどいかもしれないが, 演算に関する記述方法の説明もしておこう.  $\iint_S X dS$  は, 関数  $X$  を,  $S$  に対して面積分を行うことを意味する. また,  $\iiint_{\Omega_S} X dV$  は, 関数  $X$  を,  $S$  の内側の全領域  $\Omega_S$  に対して体積分を行うことを意味する.

### 16.2.3 マクスウェル方程式 (微分形)

**コメント** 上では, 現実に起こっている法則のイメージを説明したが, ここではもう一步先に進んで式を眺めてみよう. この節では, 微分形のマクスウェル方程式を確認する. 積分形も, 後で確認する. 何度も言うが, 式そのものを理解することが目的ではなく, 式のイメージを持つことが目的である. 式の詳細は後で述べる. ここではとにかく, 求めるべきマクスウェル方程式がどのようなものかを, 感覚的に把握してもらいたい.

#### 16.2.3.1 電場に対するガウスの法則の式 : 微分形

##### ¶ 数式

電場に対するガウスの法則の, 微分形の式は次式の通り.

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho. \quad (16.5)$$

##### ¶ 法則のイメージ

電場の発生あるいは消滅は, 電荷の存在する場所で生じる. また, 言い換えれば, ある場所において, 電場が発生あるいは消滅していることと, その場所に電荷が存在することは, 同じ意味をなす.

ベクトル  $\mathbf{E}$  は電場で, その前に書かれている  $\operatorname{div}$  は, divergence(発散) を意味す

る。なので、左辺  $\operatorname{div} \mathbf{E}$  は電場の発散を表す。右辺の  $\rho$  は電荷密度<sup>7)</sup>であり、電荷密度の存在が表されている。電場の発散と電荷密度が等号で結ぶことによって意味されること、「電荷密度が存在すれば、その周囲には電場の発散が生じる」ということである。更にその逆もいうことができて、「電場の発散の原因は電荷密度である」ということもできる。電場の発生あるいは消滅は、電荷の存在しない場所では、絶対に発生しない。

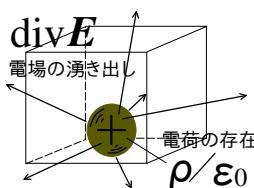


図 16.5 電場は電荷より生じる

### 16.2.3.2 磁束密度に対するガウスの法則の式：微分形

#### ¶ 数式

磁束密度に対するガウスの法則の、微分形の式は次式の通り。

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (16.6)$$

#### ¶ 法則のイメージ

この式は、磁束密度はどこからも湧き出しがないことを表現している。見方を変えれば、ある部分で湧き出す磁束密度の量と、その部分で消滅する磁束密度の量が等しいから、正味として湧き出しがないとみなされる。

つまり、磁束密度の発生場所を特定することはできないということである。こういう言い方すると、“磁束密度は存在して、その発生原因は電流にあることを、先に説明している。つまり、発生している場所を示すことができるではないか”という疑問を持たれてしまうかもしれない<sup>8)</sup>。しかし、これは言葉の意味の捉え方（あるいは

<sup>7)</sup>  $1/\epsilon_0$  がかかるっているが、単なる比例定数である。これは単位系として SI 単位を採用していることによって現れた定数であり、式の表す物理的イメージにはあまり関係がないと思って良い。

<sup>8)</sup> 少なくとも、私はそう思った。

記述の仕方) の問題であり、磁束密度の存在場所が特定できないことを言っているのではない。この法則は、あくまでも、発生源を特定することができないということであり、発生している場所を示せないということではない。現に、磁石の周囲には磁束密度が存在していることは、すでに知っていることである。たしかに、磁石から磁束密度が湧き出していると考えても、間違いではないが、この法則の言っている「湧き出し」とは意味がことなる。先にも書いたとおり、ここで言う「湧き出し」とは、磁束密度の生じる量と消滅する量の、“正味の湧き出し”ということである。この正味の湧き出しが 0 であるというとは、この世界のどの場所を見ても磁束密度の正味の湧き出しがないということを意味しているのである。この「正味の」という部分に、注意すべきだ。

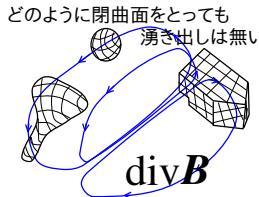


図 16.6 磁束密度の湧き出しじゃない

### 16.2.3.3 アンペール＝マクスウェルの法則の式：微分形

#### ¶ 数式

アンペール＝マクスウェルの法則の式の、微分形の式は次式の通り。

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 i + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (16.7)$$

#### ¶ 法則のイメージ

右辺に項が 2 つあるが、これらはそれぞれ、意味することが異なる。右辺の第一項は、電流が磁場を作るということを主張するものである。これは、アンペールの法則とよばれる<sup>9)</sup>。そして、第二項が意味するのが、変位電流 という概念である。詳細

---

<sup>9)</sup> アンペールの法則とは、上式の第二項が常に 0 である場合のことである。すなわち、次式がアンペールの法則を表す式である。

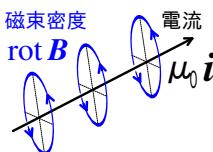
$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 i. \quad (16.8)$$

は後述するが、ここでは、およそのイメージとして、電場の時間変化がその周囲に磁束密度を生じさせる、と解釈して欲しい<sup>10)</sup>。

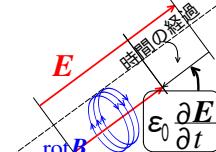
なぜ、「変位電流」を導入する必要があるのかというと、単なるアンペールの法則が電荷保存則に矛盾してしまうからである。つまり、アンペールの法則と電荷保存則のどちらかが、間違っている（不完全である）可能性があるということである<sup>11)</sup>。マクスウェルによる回答は、アンペールの法則が不完全である、ということだった。そして、マクスウェルはアンペールの法則を完全な形にすべく、「変位電流」という新しい概念を考案し、アンペールの法則にそれを組み込むことで、電荷保存則との矛盾を解消したのである。

あとに分かることだが、この変位電流は、ファラデーが発見する電磁誘導の法則に対をなす現象である、と見ることもできる。この変位電流と電磁誘導とにより、電磁波という現象が起るのである。電磁波についても、後ほど考えることにしたい<sup>12)</sup>。

もう一度改めて、この法則の内容を確認しておこう。電流はその周囲に磁束密度を発生させる。さらに、それに加えて、電場の時間変化が起きた際にも、その電場の変化にともなって、その周囲に、磁束密度が生じるのである。



(A) 電流による磁場



(B) 変位電流による磁場

図 16.7 電流、変位電流と磁束密度の関係

アンペールの法則の意味するところは、式を見れば明らかである。口うるさく意味を説明すれば、「回転している磁束密度が存在するということは、その内側の領域に電流が生じていることを意味する」ということだ。

<sup>10)</sup> 式をそのまま言葉にしただけである。その真意の程は後の記述を参照。

<sup>11)</sup> あるいは、どちらとも間違いなのかもしれない。しかしこの可能性は、あとに記述する、マクスウェルの修正によってなくなる。

<sup>12)</sup> マクスウェル方程式の偉大さの一つは、電磁波の存在を予言したことである。

### 16.2.3.4 ファラデーの電磁誘導の法則の式：微分形

#### ¶ 数式

ファラデーの電磁誘導の法則の式の、微分形の式は次式の通り。

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (16.9)$$

#### ¶ 法則のイメージ

左辺は回転する電場を表している。右辺は負の符号がついて入るが、磁束密度の時間変化が記述されている。渦を巻くように電場が生じているならば、その周囲に磁束密度の時間変化が起こっているということを示している。また、言い方を変えれば、磁束密度が時間変化するとき、その周囲に渦を巻くようにして電場が生じるということでもある。磁束密度の時間変化とは、現実的に言えば、例えば磁石を左右に振った場合のことである。このとき左右にふった磁石の周りには、その磁石を取り囲むように、渦電場が生じるのである。

### 16.2.4 マクスウェル方程式（積分形）

#### 16.2.4.1 電場に対するガウスの法則の式：積分形

#### ¶ 数式

電場に対するガウスの法則の、積分形の式は次式の通り。

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\Omega_S} \rho dV. \quad (16.10)$$

#### ¶ 法則のイメージ

この式の言っていることは、微分形のそれと同じだが、次のようなイメージを連想させる。すなわち、ある領域  $S$  から電場が湧き出ているならば、その内部領域  $\Omega_S$  に電荷が存在しする。そして、このとき湧き出す電場の量は、 $\Omega_S$  内に存在するすべての電荷の電気量の総和を  $\epsilon_0$ （真空中の誘電率；詳細は後述する）で割った値に等しい。

要するに、ある領域から電場が生じているのであれば、その領域には必ず電荷が存在するということである。

### 16.2.4.2 磁束密度に対するガウスの法則の式：積分形

#### ¶ 数式

磁束密度に対するガウスの法則の、積分形の式は次式の通り。

$$\iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (16.11)$$

#### ¶ 法則のイメージ

この式の意味は、微分形のそれと全く同様である。

この表現のほうが、イメージしやすいかもしれない。任意の領域  $S$  を設定しても、そこから生じる正味の磁束密度の量は 0 であることを、表現している。つまり、磁束密度の湧き出し場所が、 $S$  内部ではないということである。といっても、湧き出しあるところ別の場所 ( $S$  の外側) にあるということではない。 $S$  は任意に設定できる閉曲面であるから、 $S$  をどんな風にとっても、磁束密度の発生源は  $S$  の内部ではないということになる。つまり、この世界の至る場所で、磁束密度の湧き出し量が正味 0 であるということだ。

電場に対するガウスの法則は、電場の発生原因を電荷に押し付けているのに対し、磁束密度に対するこの法則は、いわば「磁荷」が存在しないということを意味する。磁束密度に対して、なぜ「磁荷」がないのだろうかといった疑問も強いことと思う。実際、物理学者の中でもその存在を信じ、探している人もいるらしい。しかし、このノートでは、この現象を実験事実として認め、深入りは避けることとしたい<sup>13)</sup>。

---

<sup>13)</sup> 実は、特殊相対性理論を学習すると、磁束密度は、光速不変の原理と特殊相対性理論から導かれるローレンツ力と、クーロンの法則から導出することができてしまう。電場の発生原因是電荷にあり、電荷はクーロンの法則に従った動きをする。他方、物体が光の速さで運動するさいには、ローレンツ変換に従う。などの詰まりは、電荷が光速で運動する際に、静止している観測者には、その周囲に磁束密度が分布しているようにみえてしまうのである。これは、ローレンツ力に関連する。先に、ローレンツ力は、観測者と電荷との相対速度  $v$  が関係していることを見た。この相対速度こそが、磁束密度の存在を支えているのである。磁束密度は、観測者と電荷の相対的な関係により、生じるものであると、考えることもできるのである。このことを定量的に考えることは、相対論を学習した後で行うことしよう。

### 16.2.4.3 アンペール = マクスウェルの法則の式：積分形

#### ¶ 数式

アンペール = マクスウェルの法則の式の、積分形の式は次式の通り。

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot \mathbf{t} \, dl = \iint_{S_l} \left( \mathbf{i} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} \, dS_l. \quad (16.12)$$

#### ¶ 法則のイメージ

この式の意味するところは、ある閉曲線  $l$  の内側を観察したとき、磁束密度が生じているのであれば、 $l$  を境界とする曲面  $S_l$  を電流が貫いているか、もしくは電場の時間変化が生じているということである。電場の時間変化と電流は、その周囲に磁束密度を発生させるのである。

この積分形の式の左辺により、生じる磁束密度の総量が計算される。右辺は、閉曲面  $S_l$  に生じている全電流と電場の時間変化の総量が計算される。つまり、全電流と電場の時間変化の総量を計算することで、生じる磁束密度の総量がわかるのである。

### 16.2.4.4 フラーデーの電磁誘導の法則の式：積分形

#### ¶ 数式

フラーデーの電磁誘導の法則の式の、積分形の式は次式の通り。

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} \, dl = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_l} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS_l. \quad (16.13)$$

#### ¶ 法則のイメージ

磁束密度の時間変化は、その周囲に回転する電場を発生させることを、この式は意味している。

微分形の式は、生じているか否かを判定するものであるが、この積分形の式は、生じる電場の総量が計算できる。閉ループ  $l$  に導線を重ねあわせて導線の輪を作り、その導線の輪の内側において磁束密度を変化させると、導線に起電力が生じる。この起電力の大きさは、どの程度磁束密度を変化させたかによって決まる。その計算式が、積分形の電磁誘導の法則の式である。

# 17

## 電場に対するガウスの法則

### 17.1 電場の定義

#### 17.1.1 クーロンの法則（復習）

コメント クーロンの法則についての詳細は、12.1 節を参照。以下は、そこからの抜粋である。

ここに、電荷が 2 つあるとしよう。この 2 つの電荷は区別することができて、 $q_1$ ,  $q_2$  という電気量を持っているとする。電荷  $q_1$  と  $q_2$  との距離を  $r$  としたとき、この 2 つの電荷が受ける力は、以下のような規則がある。

- 2 つの電荷の電気量が互いに異なる符号をもっているならば、両電荷は互いに引き合う向きに力を受ける
- 2 つの電荷の電気量が同じ符号を持っているならば、両電荷は互いに反発しあう向きに力を受ける。
- 2 つの電荷の受ける力の大きさは等しく、向きは互いに逆向きである
- 2 つの電荷が受ける力の大きさは、2 つの電荷の電気量の積 ( $q_1 q_2$ ) に比例する。
- 2 つの電荷が受ける力の大きさは、2 つの電荷間の距離の 2 乗 ( $r^2$ ) に反比例

する。

図12.1をもう一度載せておこう。



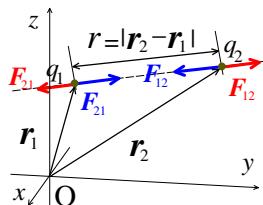
次の式によって、クーロンの法則は表現される。

電荷  $q_1$  に対して働く力は、以下。

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}. \quad (17.1)$$

電荷  $q_2$  に対して働く力は、以下。

$$\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_1}{r^2} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}. \quad (17.2)$$



### 17.1.2 電場に対するガウスの法則の導出

**コメント** ガウスの法則は、言っていることは単純だが、式を用いて説明されると、慣れないうちは何のことだかサッパリわからないことだろう。なので、どの教科書でも取られている手段だが、まずは単純な場合から考えて、徐々に一般化していこう。まず、点電荷1個より生じる電場の満たす法則を考える。次に、電荷の個数を増やし、 $N$ 個の点電荷にする。最後に、最も一般的な連続分布する電荷より生じる電場の満たす法則を考える。また、電場のみが存在し、磁束密度は存在しないとして、議論が煩雑になるのを避けることとする<sup>1)</sup>。

<sup>1)</sup> このような仮定をすることに、注意しておこう。時間的に変動する電磁場についてはこのように考えることはできない、ということである。理由は、判例を示すのが手取り早い。中学生のときに、

## 17.1.2.1 クーロンの法則から見えてくること

クーロンの法則によって定義された電場が満たしている法則を考える。2つの点電荷における、クーロンの法則を書き下そう。

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (17.3)$$

ここに、 $q_1, q_2$  は電荷の電気量であり、 $r$  は2つの点電荷間の距離である。ここでは、大きさのみを考える。さてこの時、電気量  $q_1$  をもつ電荷が作る電場を考えると、

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{r^2}. \quad (17.4)$$

いま、興味があるのは、この電場  $E_1$  が満たす法則である。次のように書き変えてみよう。

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{r^2} = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{q_1}{\varepsilon_0}$$

さて、この式の  $4\pi r^2$  の部分に注目する。これは、球の表面積の公式と同じである。そこで、これを球の表面積としてみなし、記号  $S$  で置き換えてみよう。

$$E_1 = \frac{1}{S} \frac{q_1}{\varepsilon_0}$$

両辺に  $S$  をかける。

$$E_1 S = \frac{q_1}{\varepsilon_0}$$

ところで、球の面積  $S$  は、積分記号を用いて面積分の形で表現すると、

$$S = \int_S dS$$

である。 $S$  は球の表面全体を表すと同時に、その表面積でもある。球の表面である  $S$  を微小分割して、かき集めたものが、球の面積である。これを用いると、電場の式は

$$E_1 \int_S dS = \frac{q_1}{\varepsilon_0}$$

電磁誘導の法則によって、『磁石を動かしたときに、電流が生じる』という現象を観測した(はずである)。磁石を動かすことは磁束密度を変化させることを意味し、電流が発生するということは導体内に電場が生じたということになる。つまり、磁束密度が時間的に変化すると、電場が発生するのである。このことを考えると、動電磁場の場合は電場と磁束密度を分けて考えることはできないのである。電磁誘導の法則についての詳しいことは、動電磁場の部分で確認する。

となる。さて、球の面の法線ベクトルと点電荷が作る電場の向きは、球のどの部分でも一致する。しがって、上式の電場  $E_1$  は、球の面積積分の中に入れてさしつつ変えない。つまり、

$$\int_S E_1 dS = \frac{q_1}{\epsilon_0}$$

とできる。

実は、この式が求めている式なのである。すなわち、上式が電場が従う法則である。言葉で表せば、次のようになる：点電荷  $q_1$  が球面  $S$  の内部に存在するとき、その周囲につく電場  $E_1$  を球面  $S$  で面積分すると、 $q_1/\epsilon_0$  という値になる。

この法則を、ガウスの法則 という。しかし、今得られたガウスの法則を、さらに一般化することができる。次の項目で、このガウスの法則を一般化しよう。

#### 17.1.2.2 1つの点電荷のみが存在する場合

点電荷が1個しかない状況を想定し（図17.1）、この1個の点電荷から生じる電場が満たす法則について考える。

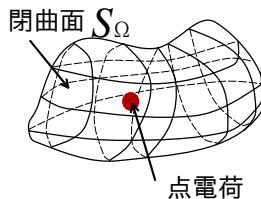


図17.1 閉曲面  $S$  の中に1つの電荷を含む場合

1つの点電荷が作る電場を書き下すと、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega_S} \frac{q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^*)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^*|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}^*}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^*|} dV^* \quad (17.5)$$

である。（電場の定義式（13.11）で  $\rho(\mathbf{r}^*) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^*)$  と置けばよい。）ここで、 $1/4\pi\epsilon_0$  は定数であるので積分記号の前に出した。点電荷の位置を  $\mathbf{r}^*$  として、 $\mathbf{r}^* = 0$  と原点を定める。すると、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\int_{\Omega_S} q\delta(\mathbf{r}) dV}{|\mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega_S} q\delta(\mathbf{r}) dV \frac{1}{|\mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

と書ける。この式の両辺を、 $\Omega_S$  の表面である閉曲面  $S$  で面積分する。

$$\begin{aligned} & \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) dS \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \left( \int_{\Omega_S} q\delta(\mathbf{r}) dV \right) \frac{1}{|\mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) dS. \end{aligned}$$

この場合、右辺の体積積分と面積分は関係がないので<sup>2)</sup>、体積積分を面積分の外に出すことができる。この式の体積積分の部分は、系の電気量の総和を計算するものであり、定数であると考えられるのである。

$$\begin{aligned} & \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) dS \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \int_{\Omega_S} q\delta(\mathbf{r}) dV \right) \left( \int_S \frac{1}{|\mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) dS \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \int_{\Omega_S} q\delta(\mathbf{r}) dV \right) \left( \int_S \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) dS \right). \end{aligned}$$

ここで、公式

$$\int_S \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) dS = 4\pi \quad S \supset 0 (= \mathbf{r}^*) \quad (17.6)$$

を用いると  $4\pi$  が消えて、

$$\int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Omega_S} q\delta(\mathbf{r}) dV \quad (17.7)$$

を得る。

点電荷が閉曲面  $S$  の内側である場合、すなわち、点電荷が領域  $\Omega_S$  内に存在する場合、 $\delta$  関数の性質によって、

$$\int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) dS = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (17.8)$$

---

<sup>2)</sup> 体積積分を先に計算する必要があり、この体積積分の部分は定数になる。

である。もし点電荷が領域  $\Omega_S$  内に存在しない場合、

$$\int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) dS = 0 \quad (17.9)$$

である。

ここで特に不安になるのは、点電荷が閉曲面  $\Omega_S$  に含まれていない場合に、果たして本当にガウスの法則を満たしているかということである。というのも、閉曲面  $\Omega_S$  を任意にとることができるので、もしかしたら、この閉鏡面のとり方によってはガウスの法則を満たさない場合が生じてしまうかもしれないからである。しかし、この不安は不要である。上で導出したガウスの法則は公式

$$\int_S \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) dS = 4\pi \quad S \supset 0 (= \mathbf{r}^*) \quad (17.10)$$

により、どのような閉曲面をとっても満たすということが保証されているからである。といっても、直感的にわかるはずないので、以下で、このことを説明してみよう。まず、任意に閉曲面  $\Omega_S$  をとる。このとり方で、複雑な形にとる場合には図 17.3 が当てはまるだろう。図 17.3 以外のより複雑に、閉曲面  $\Omega_S$  をとったとしても、この図のとり方を発展させたものとして考えれば理解できるだろう。図では任意の閉鏡面を水色で描いた。

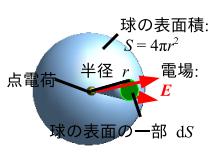


図 17.2 ガウスの法則 (1)

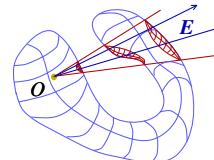


図 17.3 ガウスの法則 (2)

### 17.1.2.3 $N$ 個の点電荷のみが存在する場合

もう少し一般化して、電荷の数を複数にしよう。電荷の個数を 2 個とか、3 個とかの具体的な数にせず、 $N$  個として、少し一般性をもたせて考える。複数の点電荷が存在する場合の電場は式 (13.7) から、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \quad (17.11)$$

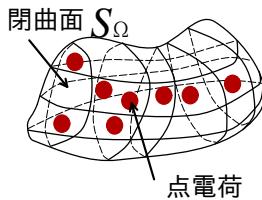


図 17.4 閉曲面 \$S\$ の中に複数の電荷を含む場合

と書ける。すなわち、一つひとつの点電荷が作る電場を足し合わせればよい。この式の両辺を任意の閉曲面 \$S\$ で面積分すると、

$$\begin{aligned} & \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) dS \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}_i) dS \end{aligned}$$

各点電荷について、

$$q_i = \int_{\Omega_S} q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) dV \quad (17.12)$$

であるから、

$$\begin{aligned} & \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) dS \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \sum_{i=1}^N \frac{\int_{\Omega_S} q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) dV}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}_i) dS \end{aligned}$$

右辺の  $\int_{\Omega_S} q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) dV$  に注目する。\$N\$ 個の点電荷のうち、領域  $\Omega_S$  の外側に存在する点電荷はこれらこの積分に関与しない。なぜなら、そのような点電荷を領域  $\Omega_S$  で体積積分したところで、その値は  $\delta$  関数の性質によって、0 になるからである。従って、領域  $\Omega_S$  内の点電荷だけについて考えればよいことになる。逆に考えれば、領域  $\Omega_S$  の外側の点電荷については、全く存在しないものとして扱うということである。

では、式変形に戻る。この場合も、右辺の体積積分と面積分は関係がないので<sup>3)</sup>、体積積分を面積分の外に出すことができる。この式の体積積分の部分は、系の電気量の総和を計算するものであり、定数であると考えられる。

$$\begin{aligned} & \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) dS \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \left\{ \left( \int_{\Omega_S} q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) dV \right) [A] \right\} \end{aligned}$$

ここで、面積積分に相当する  $[A]$  の部分は式が長くなるたびに一時的に導入した文字で、以下のとおりである。

$$[A] = \int_S \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}_i) dS \quad (17.13)$$

この面積積分  $[A]$  については、前にも確認したように、公式

$$[A] = \int_S \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}_i) dS = 4\pi \quad (17.14)$$

が成り立つので、

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) dS &= \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_S} \frac{1}{\epsilon_0} q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) dV \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Omega_S} \sum_{i=1}^N q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) dV \end{aligned} \quad (17.15)$$

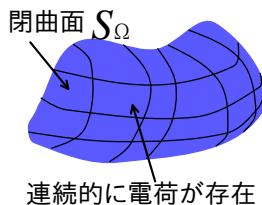
を得る。さらにわかりやすくすると、 $\Omega_S$  内に存在する電荷  $Q_{\text{内}}$  と書けば、

$$Q_{\text{内}} = \int_{\Omega_S} \sum_{i=1}^N q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) dV \quad (17.16)$$

となることから、

$$\int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) dS = \frac{Q_{\text{内}}}{\epsilon_0} \quad (17.17)$$

と表現することも可能である。

図 17.5 閉曲面  $S$  の中に点電荷が連続的に分布している場合

## 17.1.2.4 電荷が連続的に分布する場合

電荷が連続的に分布しているときは、 $N$  個の電荷が存在するときの  $Q_{\text{内}}$  を各点電荷の電気量の和ではなく、電荷密度  $\rho(\mathbf{r})$  の積分に変更すればよい。すなわち、

$$Q_{\text{内}} = \int_{\Omega_S} \rho(\mathbf{r}) \, dV \quad (17.18)$$

とすればよい。これを式 (17.17) 代入することにより、以下の式を得る。

## Point 59: 静電場のガウスの法則 (積分形)

$$\int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) \, dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Omega_S} \rho(\mathbf{r}) \, dV \quad (17.19)$$

この式が求めるべき 静電場に対するガウスの法則 である。

電場に対するガウスの法則は、クーロンの法則の上に成り立つものである。なぜなら、電場はクーロンの法則から定義される量であるからである。従ってガウスの法則は、今の立場からは、法則とはいえない。しかし、電磁場を考えるときには、ガウスの法則を基礎とした方が都合がよい(場の近接的な作用など)。だから、「法則」と呼ばれるのである。(ガウスの法則は、力学と電磁気学の関連を考える上でも重要な法

►3) 体積積分を先に計算する必要があり、この体積積分の部分は定数になる。

則の1つとなる。)

### 17.1.3 法則の意味（定性的なイメージ）

#### 17.1.3.1 法則のイメージ

何度も述べてきた法則のイメージだが、ここで再度、確認したい。

結論の式を言葉で表現すれば、領域  $\Omega_S$  の表面  $S$  から流出する電場  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  は領域  $\Omega_S$  内部の電気量の総和の  $1/\epsilon_0$  に等しいと解釈できる。

ガウスの法則の具体的なイメージは、微分形の方程式を導くことによって、よりよく得られる。しかし、先に述べた指針（積分形の導出を優先すること）により、ここでは微分形の方程式を考えることは控える。とはいえ、イメージできなければこのような法則などは頭に入ってこない。そこで、ここではそのイメージを先取りして書いておく。具体的な式については、微分形の導出のところで確認する。

微分形のガウスの法則は、『正の電気量をもつ電荷から電場が生じ、負の電荷にその電場が吸収される』といったことを表す。正の電荷から電場が湧き出して、負の電荷で電場が消えていくといったほうがイメージしやすい。とにかくここでは、「電場というものは、正の電荷から発生し、負の電荷で吸収される」と理解しておく。そして、電場の流出量（もしくは吸収量）について語ってくれるのが積分形のガウスの法則である。

積分形のガウスの法則は、前にも言ったように、系全体を眺めた時の式である。例として、正の電気量をもつ電荷1つを考える。この電荷が内側に入り込むように閉曲面  $S$  をとる。この電荷から、電場が湧き出ているイメージをする。どの程度の電場が流出しているのだろうか。積分形のガウスの法則の示すところによると、この閉曲面  $S$  から流出する電場は、どんな閉曲面をとろうが電荷がその閉曲面の内側に入っていれば、一定の値を示すのである。その値は閉曲面に包まれた電荷の電気量の  $1/\epsilon_0$  倍である。もちろん、その閉曲面内に電荷が入っていないければ、電場の流出量は0であることもいえる。

とりあえずここでは、「電場の流出量が 積分形のガウスの法則によって計算できる」ということを頭に入れておく。

注意しておく。静電場とは、固定された電荷による電場の流出量が一定で時間変化しないということである。絶えず電場を発生させてるのであるので、電場が止まっているわけではない。電場は流れ続けているのである。ただ、全ての位置において、電場の流れの方向が時間変化しないということから、静電場というのである。具体的にいえば、位置  $\mathbf{r}_1$  を指定すると、いつでも時間に関係なく、 $\mathbf{E}(\mathbf{r}_1)$  の電場が流れてい

いるということである。

### 17.1.3.2 近接作用するクーロン力

さて、これでようやく遠隔作用のクーロン力を近接作用として受け入れができる。もう一度、状況を確認すると、2つの点電荷が距離  $r$  を隔てて固定されているとしたのであった。このとき、一方の電荷  $q_1$  から生じた電場が、徐々にもう一方の電荷  $q_2$  の位置に伝わって、クーロン力を及ぼす。強調しておきたいことは、電荷  $q_1$  が直接的にもう一方電荷  $q_2$  にクーロン力を及ぼすのではなく、 $q_1$  から生じる電場を介して、電荷  $q_2$  にクーロン力が伝わるということである。クーロン力の伝わる速さは光速である。それは後に示すように、電場は光速で伝わることからいえることである。さて、この時点での「クーロン力が伝わる」という表現が“何かおかしい”と感じるだろう。実際、伝わるのは電場であって、クーロン力そのものが伝わるわけではない。電場が伝わるのである。電場を主役にするために実験法則であるクーロンの法則が、電場に対するガウスの法則に書き換えられたのは当然であると考えてようだろう。しかし、電場の存在の裏には、クーロンの法則が隠れていることを忘れてはいけない。あくまでも、電場は試験電荷が受けるクーロン力として定義されるものである。

ちょっと混乱したかもしれない。念のため、補足しておこう。電場の存在を確認するには試験電荷が必要だが、電場がどのように伝わるかを考えるときには試験電荷を持ってくる必要はない。電磁気学の基本方程式を考えるという視点から考えれば、電場に対するガウスの法則を考えればよく、クーロン力は補助的な式として捉えるべきだ。

## 17.2 電位

### 17.2.1 クーロン力より生じるポテンシャル・エネルギー

おそらく、電位の定義をいきなり述べても、理解が難しいことだろう。なので、ここで導入として、簡略化した話を記述しておく。詳細は、この節のあとに記述する。まずは、イメージをもってもらいたい。

一次元で考える。クーロンの力の大きさは、クーロンの法則から、

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

である<sup>4)</sup>. ここに,  $q_1$ ,  $q_2$  は点電荷のもつ電気量であり,  $r$  は 2 つの点電荷間の距離である.

このクーロン力より生じる, ポテンシャル・エネルギーを計算しよう. 2 つの点電荷のうち, 一つを固定して, この固定された電荷がつくるポテンシャルを考える. もう一方の点電荷は自由に動けるようにしておく. 添字に意味もたせたいので, 以下のように付け替えておこう.

$$q_1 := q_0, \quad q_2 := q_x$$

こうすると, クーロンの法則は,

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q_0 q_x}{r^2}$$

と書かれる.  $q_x$  を動かすことで,  $q_0$  がつくるポテンシャルを計算する.

$q_0$  の位置を  $r_0$  とし,  $q_x$  の位置を  $r_x$  と書いたとき, 距離は  $r = |r_x - r_0|$  とかけるが, 固定する電荷の位置を原点にすれば ( $r_0 = 0$  とすれば)

$$r = r_x$$

とできる. クーロンの法則は, 次のようになる.

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q_0 q_x}{r_x^2}.$$

基準点を無限遠 ( $\infty$ ) にとり,  $q_0$  が  $q_x$  に及ぼすクーロン力の仕事を計算することで, ポテンシャルが計算できる<sup>5)</sup>. つまり,  $r_x$  で無限遠から任意の位置  $x$  まで積分(広義積分) するということである.

計算は以下のように実行できる.

$$\begin{aligned} & \int_{\infty}^{r_0} \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q_0 q_x}{r_x^2} dr_x \\ &= \frac{q_0 q_x}{4\pi\varepsilon} \int_{\infty}^{r_0} \frac{1}{r_x^2} dr_x \end{aligned}$$

<sup>4)</sup> 方向をつけて書くと

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

である. 一次元であっても, 正方向と負方向があるので, 方向も記述すべきだ. ここでは, 大きさのみを考えるので, 方向を示す単位ベクトル  $\mathbf{r}/r$  は考慮しない.

<sup>5)</sup> これがポテンシャルのエネルギーの定義なのだから.

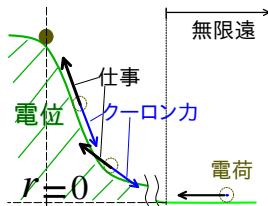


図 17.6 電位と仕事

$$\begin{aligned}
 &= \frac{q_0 q_x}{4\pi\varepsilon} \left[ -\frac{1}{r} \right]_{\infty}^{r_0} \\
 &= \frac{q_0 q_x}{4\pi\varepsilon} \left[ -\frac{1}{r_0} - \left( -\frac{1}{\infty} \right) \right].
 \end{aligned}$$

ここで、 $1/\infty \rightarrow 0$  として<sup>6)</sup>,

$$\begin{aligned}
 &\frac{q_0 q_x}{4\pi\varepsilon} \left[ -\frac{1}{r_0} - \left( -\frac{1}{\infty} \right) \right] \\
 &= \frac{q_0 q_x}{4\pi\varepsilon} \left( -\frac{1}{r_0} \right) \\
 &= -\frac{q_0 q_x}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{r_0}.
 \end{aligned}$$

よって,

$$\int_{\infty}^{r_0} \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q_0 q_x}{r_x^2} dr_x = -\frac{q_0 q_x}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{r_0}.$$

計算は以上で終了。

最後に、 $r_0$  に一般性をもたせておこう。固定する位置を、改めて、任意の位置  $r$  とし、

$$r = r_0$$

<sup>6)</sup> 次式を計算していることと同じ。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = 0.$$

と置き換える。すると、任意の位置  $r$  に存在する点電荷のポテンシャルを表現できるようになる。また、今まで  $q_x$  に及ぼす仕事を考えてきたが、これを単位電荷にすると、つまり、

$$q_x = 1[\text{C}]$$

とすれば、単位電荷あたりの仕事をなる。

この電気的なポテンシャルを表す記号として、 $\phi$  を用いると、以下のようなになる。

$$\phi := \int_{\infty}^{r_0} \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q_0 q_x}{r_x^2} dr_x = -\frac{q_0}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{r}. \quad (17.20)$$

これが、求めたかったポテンシャル・エネルギーである。

この式の、右辺に注目しよう。今まで積分をしてきたわけであるが、今度は逆に微分してみよう。すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r} \left( -\frac{q_0}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{r} \right) \\ &= \frac{q_0}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{r^2}. \end{aligned}$$

この右辺は固定されている点電荷より生じる電場  $E_0$  に他ならない<sup>7)</sup>。すなわち、

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = E_0$$

となる。これは、次のように書いても同じことである。

$$\phi = \int_{\infty}^r E_0 dr.$$

まとめておこう。まず、クーロン力によるポテンシャル・エネルギーを計算した<sup>8)</sup>。

$$\phi := -\frac{q_0}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{r}. \quad (17.21)$$

<sup>7)</sup>

$$E_0 = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{r^2}.$$

<sup>8)</sup> 実は、電場からも計算できるのだが、ポテンシャルは力から導いた方が定義に沿っているので、今回はこの導出方法を記述した。

そして、このポテンシャルから、微分を使って、電場との関係を導いた。

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = E_0, \quad \text{or}, \quad \phi = \int_{\infty}^r E_0 dr.$$

### 17.2.2 電位の定義

力学でポテンシャル・エネルギーは重力によるものであった。それと同じように、電場によるポテンシャル・エネルギーを考える。以下では、ポテンシャル・エネルギーのことを、単に「ポテンシャル」と省略して書くことにする。このノートでは、電場のポテンシャルを表す記号として  $\phi$  を用いることにする。ポテンシャルは、位置  $\mathbf{r}$  の関数であるから、 $\phi(\mathbf{r})$  と書くこともある。

電気的なポテンシャルを 電位 と定義する。以下の通り。

#### Point 60: 電位の定義

電位  $\phi(\mathbf{r})$  を、下式で定義する。

$$\phi(\mathbf{r}) := - \int_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (17.22)$$

### 17.2.3 電位の定義の意味

電気量  $q' [C]$  をもつ電荷が、電場が 0 である位置  $\mathbf{r}_0$  に固定されているとする。この電荷を、電場の存在する位置  $\mathbf{r}$  まで変位させることを考える。まず、この電荷が電場  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  から受ける力  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  を考えると、それはクーロン力であり、

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q' \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (17.23)$$

と書ける。よって、この力  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  に抗して、外力  $-\mathbf{F}(\mathbf{r})$  で電荷を変位させることになる。このとき、外力のする仕事  $W$  は

$$\begin{aligned} W &= \int_C -\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_C -q' \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (17.24)$$

である。従って、単位電荷（つまり  $q = 1[C]$ ）当りに、

$$W_{q'=1[c]} = \int_C -\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (17.25)$$

だけの仕事をすることになる。この式は電位の式に他ならない。

#### 17.2.4 電場と電位の関係

電場と電位の関係を導出する。この関係は静電場の基本法則の導出につながるものである。

$$\phi(\mathbf{r}) := - \int_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (17.26)$$

ここで、 $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ ,  $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$  のように成分表示すると、上の定義式は

$$\phi(\mathbf{r}) = - \int_C E_x dx + E_y dy + E_z dz \quad (17.27)$$

と書ける。従って、

$$E_x = -\frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial z} \quad (17.28)$$

とかける。ベクトルとしてまとめれば、

$$\mathbf{E} = \left( -\frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial x}, -\frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial y}, -\frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial z} \right) \quad (17.29)$$

この式を以下のように変形する。

$$\mathbf{E} = - \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \phi(\mathbf{r}) \quad (17.30)$$

ここで、力学のときにも確認したように、

$$\text{grad} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (17.31)$$

という勾配を導出する演算子を考えれば、

$$\mathbf{E} = -\text{grad} \phi(\mathbf{r}) \quad (17.32)$$

の関係を得ることができる。

**Point 61:** 静電場と静電ポテンシャルの関係

電場とは電位の勾配でもある。

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi(\mathbf{r}). \quad (17.33)$$

この式は、静電場の場合だけに成り立つ関係である。

**# memo No.75:** ポテンシャルを基礎に、電場を定義する場合

今日では、ポテンシャルの概念より電場を定義することが多い。これは解析力学などによつて、ポテンシャルの重要性が浮かび上がったことからも想像できることだろう。従つて、次のように考えることになる。

電気的なポテンシャル、すなわち電位  $\phi$  が存在するとき、電場は以下のように定義される。

$$\mathbf{E} := -\operatorname{grad} \phi = -\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}} \quad (17.34)$$

電位の存在するかどうかを調べるには、空間に試験電荷を置いて見ればよい。電位が存在していれば、点電荷は電位勾配によって運動し始めるはずである。そしてこのとき、電位勾配とは逆向きの電場が生じていると考えるのである。

### 17.2.5 等電位面

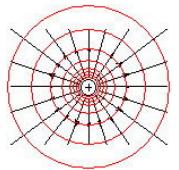
電位の等しい値の点をつなぐと、それは 1 つの曲面をなす。1 つの点において、電位を 2 つ以上もつことはないからである。そのような曲面を **等電位面** という。式で表現すると、電位の値を  $\phi_0$  として、

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_0 \quad (17.35)$$

である。等電位面のイメージは下図のようである。

### 17.2.6 等電位面と電場の向き

等電位面内にベクトル  $\mathbf{r}$  をとる。このベクトルが位置する等電位面の電位は  $\phi(\mathbf{r})$  である。同じ等電位面において、ベクトル  $\mathbf{r}$  より少しだけずれた  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$  をとる。も

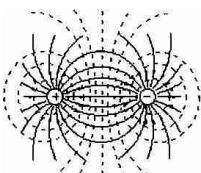


(a) 平面的



(b) 立体的

図 17.7 単一電荷の作る等電位面



(a) 平面的



(b) 立体的

図 17.8 異種の 2 電荷がつくる等電位面

もちろん、ベクトル  $\mathbf{r}$  と  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$  は同じ等電位面に存在しているので、

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = \phi_0 \quad (17.36)$$

の関係がある。 $\phi(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r} + d\mathbf{r})$  の両辺を位置  $\mathbf{r}$  で泰ラー展開して、

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}) + \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{r} + \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{r} + \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} dz \quad (17.37)$$

である。ここで、右辺については 2 次以上の項は無視した。従って、

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} dx + \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} dy + \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} dz = 0 \quad (17.38)$$

となる。ここで、

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \text{grad} \quad , \quad d\mathbf{r} = (dx, dy, dz) \quad (17.39)$$

であることに注意すると、

$$\text{grad } \phi(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (17.40)$$

となる。最後に、電場と電位の関係式から、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (17.41)$$

を得る。この式の  $d\mathbf{r}$  は初めに考えた等電位面内のベクトルである。このベクトルと電場の内積が 0 であるという結果かが得られたのである。すなわち、『電場と等電位面は直交する』ということを表現している。

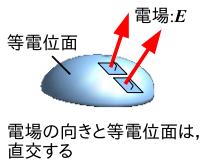


図 17.9 等電位面と電場

### 17.2.7 ポアソン方程式

電荷分布が与えられれば、電位や電場が計算できるはずである。その計算に用いる方程式が、ポアソン方程式である<sup>9)</sup>。ガウスの法則：

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$

の  $\mathbf{E}$  に、電場と電位の関係：

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi(\mathbf{r})$$

を代入して、 $\mathbf{E}$  を消去すると、

$$\operatorname{div} (\operatorname{grad} \phi(\mathbf{r})) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}.$$

ここで、以下を定義する。

$$\nabla := \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (17.42)$$

<sup>9)</sup> Siméon Denis Poisson (1781–1840, フランス)：数学者。ポアソン方程式、ポアソン分布、ポアソン括弧など、物理学に寄与する数学を築き上げた人。

この記号  $\nabla$  は ナブラ とよばれる微分演算子である。 $\nabla$  を用いると、上式は、次のようにも表現できる。

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}.$$

さらに、 $\Delta$  を以下で定義する。

$$\Delta := \nabla^2. \quad (17.43)$$

この微分演算子  $\Delta$  を ラプラスアン という。 $\Delta$  を用いると、

$$\Delta \phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}. \quad (17.44)$$

を得る。この式 (17.44) を ポアソン方程式 という<sup>10)</sup>。

### 17.2.8 ラプラス方程式

ポアソン方程式の定数項を 0 とおいた式を、ラプラス方程式 という<sup>11)</sup>。つまり、ラプラス方程式とは、次式のことを指す。

$$\Delta \phi(\mathbf{r}) = 0. \quad (17.45)$$

これは、物理的に解釈すると、電荷密度  $\rho(\mathbf{r})$  を 0 とした式とみなせる。ラプラス方程式は、電荷の存在しない領域について考えるときに、用いられる方程式である<sup>12)</sup>。

**# memo No.76:** 次の計算のための準備

ベクトル  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  としたとき、

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \mathbf{X}$$

を計算する。コレはすぐに計算できる、と思う。

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \mathbf{X} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{X}(\mathbf{r}) \right)$$

<sup>10)</sup> 「ポアソンの方程式」と表現されることも多い。

<sup>11)</sup> Pierre-Simon Laplace (1749–1827, フランス)：數学者。確率論の立役者として有名。ラプラス方程式、ラプラス変換、ラプラスの悪魔などに、その名前が残っている。物理学にも有用な数学を築き上げた人。

<sup>12)</sup> 単に、ポアソン方程式の定数項を 0 としただけの式だが、「ポアソン方程式」、「ラプラス方程式」の両方ともに、その名が広く知れ渡っている。

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial y} (X_x(\mathbf{r}), X_y(\mathbf{r}), X_z(\mathbf{r})) \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} (X_x(y), X_y(y), X_z(y)) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} (0, 0, 0) \\
&= (0, 0, 0).
\end{aligned}$$

当たり前だね。ベクトルを  $y$  で微分した後に、さらに  $x$  で微分するっていう問題だけど、 $y$  で微分した時点で、 $x$  成分は 0 になっている。

念の為に、具体的な関数で計算してみようか。

$$\mathbf{X} = (x^3 + y^3 + z^3, x^2 + y^2 + z^2, x + y + z)$$

としてみよう。すると、

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \mathbf{X} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{X} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (3y^2, 2y, 1) = (0, 0, 0).$$

だね。3 次元空間のベクトル関数だったら、上式は成り立つ<sup>13)</sup>。

### # memo No.77: $\nabla^2$ の計算

$\nabla^2$  を計算しよう。 $\nabla$  は以下で定義される微分演算子であった。

$$\nabla := \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

よって、

$$\nabla^2 = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

ここで、第一項 ( $x$  成分) に着目して、

$$\left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 0 + 0$$

と計算されることから ( $y, z$  も同様)、

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

を得る。

---

<sup>13)</sup> ただし、連續でかつなめらかな関数であることが必要。さらに加えて、関数は、少なくとも 2 以上微分が可能であることも必要。ココらへんはベクトル解析の教科書で勉強してもらおう。このノートで考えるベクトル関数は、特に断りのない限り、この条件を満たしているとする。

## # memo No.78: div grad の計算

上記の計算で端折った  $\operatorname{div} \operatorname{grad} =$  を計算しておこう。まずは、 $\operatorname{div}$  と  $\operatorname{grad}$  を座標成分表示に戻そう。

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} = \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

ここで、第一項 ( $x$  成分) に着目して、

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 0 + 0 \end{aligned}$$

と計算されることから ( $y, z$  も同様)、

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

を得る。

# memo No.79:  $\Delta = \nabla^2 = \operatorname{div} \operatorname{grad}$ 

上の計算からすでにわかっている通り、

$$\nabla^2 = \operatorname{div} \operatorname{grad}$$

が成り立つ。ここに、ラプラシアンの定義  $\Delta := \nabla^2$  を加えると、

$$\Delta = \nabla^2 = \operatorname{div} \operatorname{grad} \tag{17.46}$$

である。これはベクトル解析の基本的な公式の1つである。

## 17.2.9 静電場/電位の特徴

ポアソン方程式を解くことで、静電場から生じる電位分布を計算できる。ポアソン方程式の解には以下の特徴があり、それは取りも直さず静電場の性質である<sup>14)</sup>。

- (1) 電荷が存在しない領域では、電位は極大値（あるいは極小値）をとらない
- (2) 等電位の閉曲面内に、電荷が存在しない場合、その内部領域全体の電位は、閉曲面の電位に等しく、一定である
- (3) 任意の閉曲面において、閉曲面の内側の電荷分布と、閉曲面自体の電位が与えられれば、その領域内部の電位は、一意に決まる

<sup>14)</sup> (参考) 伊東 俊雄 [著], 朝倉物理学選書2『電磁気学』, 朝倉書店, 2008

## 17.2.9.1 特徴 1

電荷が存在しない領域では、電位は極大値（あるいは極小値）をとらない。背理法を使って説明しよう。

## ¶ 極大値をとらないことの説明

もし、極大値をとる、と仮定した場合、<sup>15)</sup>、その部分の電位勾配は 0 である：

$$\text{grad } \phi(\mathbf{r}) = 0.$$

さらに、極大値を取ることから、その部分での変曲点（位置の 2 階微分）は負であるはずだ。つまり、 $x, y, z$  の 3 方向に関して、

$$\frac{\partial^2 \phi(\mathbf{r})}{\partial x^2} < 0, \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{r})}{\partial y^2} < 0, \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{r})}{\partial z^2} < 0.$$

よって、この 3 つの合計は負の値となる。

$$\frac{\partial^2 \phi(\mathbf{r})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{r})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{r})}{\partial z^2} < 0. \quad (17.47)$$

ここで、ポアソン方程式 (17.44) を思い起こそう。

$$\Delta \phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}.$$

仮定より  $\rho(\mathbf{r}) = 0$  として、電荷がない領域を設定すれば、ラプラス方程式：

$$\Delta \phi(\mathbf{r}) = \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{r})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{r})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{r})}{\partial z^2} = 0$$

が成立しているはずである。しかし、先の計算式 (17.47) に矛盾する。この矛盾は、極大値が存在するという仮定の誤りが原因で生じるものである<sup>16)</sup>。

以上から、電荷が存在しない領域では、電位は極大値をとらないこと示された。

<sup>15)</sup> 極小値でも同様に説明可能。ただし、条件の正負が逆転することに注意。

<sup>16)</sup> 極大値の存在は、議論のはじめで、故意に設定した仮定であり、それ以外に議論で使用したことの正しさは、すでに確認済みである。

¶ 極小値をとらないことの説明

極小値をとらないことも、同じように説明できる。極小値をとると仮定すると、3方向の電位の変曲点がすべて正になり、式(17.47)ではなく、

$$\frac{\partial^2 \phi(\mathbf{r})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{r})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{r})}{\partial z^2} > 0. \quad (17.48)$$

が成立する。しかし、この場合も、ラプラス方程式と矛盾している。よって、電荷が存在しない領域では、電位は極小値をとらない。

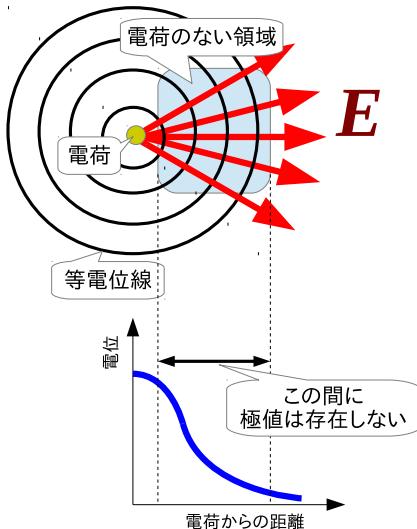


図 17.10 電荷が存在しない領域では、電位は極値をとらない

### 17.2.9.2 特徴 2

等電位の閉曲面内に、電荷が存在しない場合、その内部領域全体の電位は、閉曲面の電位に等しく、一定である。これも、背理法で説明する。

閉曲面の内部の電位が一定でない、と仮定する。閉曲面が等電位であることから、

閉曲面上には電荷は存在しないので、この閉曲面の内側に、極値<sup>17)</sup>が存在するはずである。極値が存在するということは、上記の特徴 1 の対偶から、閉曲面内に電荷が存在するはずである。<sup>18)</sup>しかし、これは、電荷が存在しないという前提に矛盾する。この矛盾は、閉曲面内の電位が一定でないという仮定からの帰結である。以上から、本特徴 2 を示した。

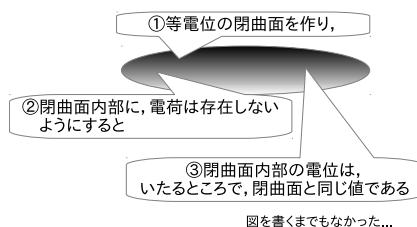


図 17.11 等電位の閉曲面内の電位（内部に電荷を含まず）

### 17.2.9.3 特徴 3

任意の閉曲面において、閉曲面の内側の電荷分布と、閉曲面自体の電位が与えられれば、その領域内部の電位は、一意に決まる。

### 17.2.10 アーンショーの定理

静電場中（ただし、電荷が存在しない領域に限る）では、荷電粒子は安定して存在できる位置がない。これをアーンショーの定理<sup>19)</sup>といふ。この定理は、電場に限ったことではなく、磁場でも重力場でも成り立つ。距離に関する逆自乗の法則が成り立つならば、この定理が成立する。

実は、この定理は、すでに、上記の静電場の性質として、説明済みである。静電場に関するポアソン方程式からの帰結である。上記の性質をただ言い換えただけだけど、この性質には「アーンショーの定理」とも呼ばれる別表現があることを明記して

<sup>17)</sup> 極値：極大値あるは極小値のどちらかを指す総称。

<sup>18)</sup> 特徴 1 の論理をかいづまむと、「極値が存在しない、ならば、電荷が存在しない」となる。この対偶は、「電荷が存在する、ならば、極値が存在する」である。一般に、「A⇒B」が成立するとき、その対偶「¬B⇒¬A」も同時に成立する。

<sup>19)</sup> Samuel Earnshaw (1805–1888, イギリス) : 聖職者で数学者であった人らしい。

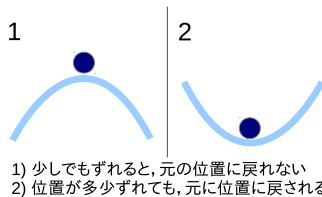


図 17.12 「安定な点」のイメージ

おきたかった。

## 17.3 導体

**コメント** 導体といわれると、まず想像するのが、金属だろう。その他にも、炭素も有名だ。電解液（イオン溶液）も導体である<sup>20)</sup>。なので、導体と言わざるも、想像される物質は色々と想像されてしまう。そこで、この章で考える導体の範囲に制限を与えることにしよう。ここで「導体」とよぶのは、金属や炭素などの個体で、その内部に自由電子をもつ物体を指すこととする。イオン溶液は確かに電気を通す導体ではあるが、除外する。

### 17.3.1 導体とは

#### 17.3.1.1 導体、半導体、絶縁体

世の中には、様々な物体がある。石、木、水、葉、…など、逐一例を上げていったのではきりがないほどだ。そして物体は、形、大きさ、硬さ、匂い、色、等、色々な性質をもっている。こういった性質の中で、電磁気学で特に興味がある性質に、"電気の通しやすさ"がある。電気の通しやすさは、物体を構成する物質そのものや、その構成に左右されるが、電磁気学ではそこまで細かいことは考えない<sup>21)</sup>。目で見える範囲の物体を想像すれば十分である。とにかく、物体の塊を持ってきて、電気を通すか否かを判別するだけだ。物体の種類によって、電気の通しやすさは異なる。極

<sup>20)</sup> ちなみに、純水は電気を通さない。水が電気を通るのは、その中にイオンを含んでいる時のみであり、水道水が電気を通すのも、それが完全な純水ではなく、不純物や塩素などのイオンを含んでいられるからである。

<sup>21)</sup> ここで学習する電磁気学は、現象論的なものである。物性などを含めて考えるときには、より詳細に、微視的な電磁気学を学習することも有用だが、内容が高度であるので、割愛する。

端な例を上げると、ゴムは電気を通さないが、金属は電気を通す。様々な物体に対して、電気の通しやすさを調べると、それを順に並べることができる<sup>22)</sup>。そうしてできた物体の順列で、電気を通しやすい部分に位置する物体のことを、導体という。反対に、電気を通しにくい部分に位置する物体のことは、不導体あるいは絶縁体という。簡単に言えば、導体とは電気を通しやすい物体のことである。また絶縁体は、電気を通しにくい物体のことを指す。

ここで、"電気を通しやすい?"と表現した理由を説明しておこう<sup>23)</sup>。世の中には、様々な物体が存在するが、不思議な事に、「電気を（完全に）通さない物体」は存在しないのである。全ての物体が、電気を通すのである。ゴムなどの一般に電気を通さないとされる物体でも、詳細に測定すると、電気が流れることを確認できる。ただ、その流れる電気の量が非常に小さいので、電気を通していないとみなされるだけなのである。だから、電気を「通す/通さない」ではなく、「通しにくい/通しやすい」と書くべきなのである。

とはいいうものの、導体と絶縁体を明確に区別するような基準は存在しない。というか、定義すること困難なのである。導体と絶縁体とは、お互いに相対的な関係であり、状況によって変わりうるのである。例えば、紙は通常では絶縁体として扱われるが、高电压を紙にかける場合、電気を通すので、紙は導体として扱わないとならない。人間も、乾電池程度の電圧に対しては絶縁体だが、家庭用コンセントほどの電圧(100[V])に対しては導体となる<sup>24)</sup>。では、導体と絶縁体の区別が全くできない程に曖昧かと言われば、そうではない。抵抗という概念を使えば<sup>25)</sup>、ある程度区切りを入れることができる。抵抗による区切りも明確ではないが、抵抗は電気の通しやすさの1つの指標となる。抵抗は、電気物性を考えるときに重要な役割を果たす概念だが、電磁気学の理論的枠組を考える場合には、必要ではない<sup>26)</sup>。さしあたり、導体の例として金属をイメージすれば、十分である。また、絶縁体の例は、紙でも石でもゴムでもなんでもいい。

▶ 22) 電気の通しやすさを測定するには、対象となる物体の大きさを揃えたり、周囲の実験環境を揃えたりと、条件を一致させないといけない。ここでは、理想的に測ったと仮定しておこう。

▶ 23) こんな回りくどい言い方をしないで、"電気を通す?"と表現したほうが、簡潔であると思われるかもしれない。

▶ 24) 電化製品には、感電の恐れがあるという警告が大きく表示されているはず。特に、洗濯機において、アース（電気を体に通さないようにする仕組み）は絶対に欠かせない。

▶ 25) オームの法則でお馴染みの、抵抗である。

▶ 26) しかし、大切なことで、後ほど解説をすることになるのだが……。

## ～導体と絶縁体～

- 導体 … 電気を通しやすい物体
- 絶縁体 … 電気を通しにくい物体

### □導体と絶縁体の区別

- 明確に区別する基準はない
- **抵抗** である程度の区別は可能

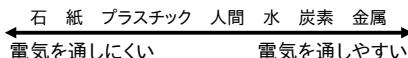


図 17.13 導体と絶縁体

### 17.3.1.2 理想的な導体

上記は、現実に存在する導体をイメージして記述した。これは、「物性物理学」よりの現実的な導体の説明である。しかし、多くの電磁気学の教科書で説明される「導体」は、少々異なる。電磁気学では、理論を考えやすくするために、理想化された導体を用いる。特に浸透している呼び方は無いようなので、このノートでは、理想的な導体と表現する。理想的な導体が、現実の導体と違う点を、いくつか上げておこう<sup>27)</sup>。

#### Point 62: 理想的な導体の性質

理想的な導体が持つ性質は、次の通り。

- (1) 電荷には大きさがない（これは電磁気学全体をとおして同じ）
- (2) 正電荷と負電荷は導体中を自由に移動できる
- (3) 無限に多くの電荷をもっている（電荷の数に上限を与えない）
- (4) 導体中の電荷は、導体の外に出ることはできない
- (5) 連続分布している（原子レベルの不連続状態は考えない）

<sup>27)</sup> 全部を上げることはできない。というか、思いつく限り上げたところで、それで十分かどうかを判断することができないから。いや、「理想的な導体」を理論的に整合性を保つように定義してやれば、可能なのだけど、興味がない（そんなことに時間をかけたくない、ってのが本音）。

考えればいくらでも出てきそうだ<sup>28)</sup>. この辺りで列挙を止めておこう. あとは, 気が向いたら追記することにして, 話をすめよう.

上記の箇条書きに対して, 補足しておきたい. 理想的な導体を考える場合, それは原子で構成されていると考えてはいけない. 確かに, 正電荷と負電荷を持っているが, 正電荷も導体内を自由に移動できるからだ. 現実には, 導体は原子で構成されていて, 正電荷は動けない. 正電荷も導体内を自由に移動できるという点が, はじめは違和感を感じるかもしれない.

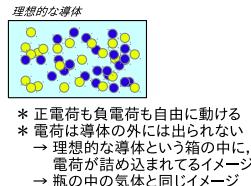


図 17.14 理想的な導体のイメージ

### 17.3.2 導体と電場の関係

#### 17.3.2.1 静電誘導

電場には,面白い性質がある. 導体で囲まれた空間内部には電場は存在不可能なのである. 導体はその内部に自由電子を含んでいる. この自由電子が, 導体の外側の電場を打ち消すのである. 自由電子は, 導体中で移動できるため, 導体の外側の電場から, クーロン力を受ける. 自由電子は導体中に多数存在し, クーロン力に釣り合うように分布し, 静止する. こうして静止した自由電子は, 導体の外側の電場を完全に打ち消すように分布する.

導体内部の自由電子が, 外側の電場によって園分布が変わる現象を, 静電誘導 という. 電子が電場に誘導されるイメージ.

<sup>28)</sup> 教科書には, 大抵の場合, こういったことは暗黙の了解として, 明記されていない. 紙面がもつたないからだろうか. まあ, こんな約束なら, 読めば簡単に悟れるから書くまでもないか. 書き始めるときりがないし.

さらに言うと、電場は導体の表面で吸収され、導体中には浸透しない。導体内部が空洞だろうとなかろうと、導体の内部では一切電場は発生しない。

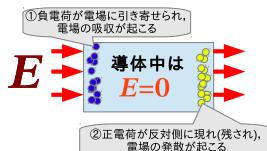


図 17.15 静電誘導

もちろん、電場を与えた<sup>29)</sup>直後は電荷の移動が起こるため、この間、導体内部にも電場が生じている。電荷がどのようにして導体中を移動するかも、興味のあるところだけど、ここでは、静電場内の現象を考えたいので、電荷の移動のことは後回しにしておこう。ここで考えたいことは、電荷の移動が完了したの、導体周辺に生じる静電場である。

### 17.3.2.2 静電遮蔽

上記の静電誘導の見方を変えると、導体の内部まで電場が突き抜けることはない、と言っても同じことだ。こうした立場からは、この現象を 静電遮蔽<sup>30)</sup>といいう。導体が電場を遮蔽するのだ。

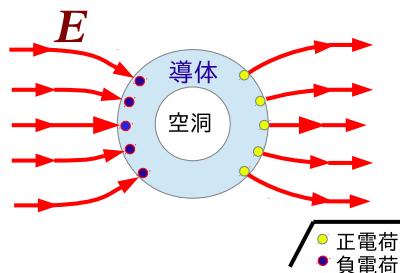


図 17.16 静電遮蔽

<sup>29)</sup> あるいは、電場の状態を変更しても同じこと。

<sup>30)</sup> あるいは、静電シールドとよばれることもある。

電場の影響を極力少なくした実験を行う場合、この静電遮蔽が有効である。導体に完全に囲まれていれば、その中には電場は侵入してこないのだ。

#### # memo No.80: 導体内部に電場は生じない

背理法を使って説明しよう（エネルギー保存則との矛盾をつかう）。もし導体中に電場が発生すると仮定する。この時、導体内部の自由電子が、静電誘導を受け移動が始まる。しかし、これはエネルギー保存則に反する。なぜなら、エネルギーを与えていないにもかかわらず（電場はエネルギーではない）、電流が生じるはずがないからだ。

というか、そもそも、導体である条件の1つに、数え切らないくらいの自由電子をもっているという性質が要請されていて、電子は電場を吸収するのであるから、導体内部に電場が発生しないことは、導体の定義から直接的に示されるとも考えられる。

##### 17.3.2.3 電場と導体表面

電場が導体の表面で吸収される場合、電場は導体表面に直交する。導体の形状がどんなに複雑でも、電場は表面に直角に交わる。

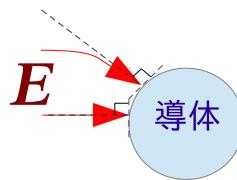


図 17.17 電場は導体表面に直交する

斜めに交わることはない。もし、斜めに交わってしまうと、導体表面に平行な電場成分が発生する。しかし、これは、先に示した導体の性質「導体内部に電場は生じない」と反する。だから、道内の内部に電場が生じないように交わるには、直角に交わるしかないのだ。

##### 17.3.3 導体と電位の関係

導体の表面は等電位面である。導体がどんな形をしていても、等電位面になる。電場が導体に垂直に交わることから、簡単に説明できる。17.2.6節を参照。

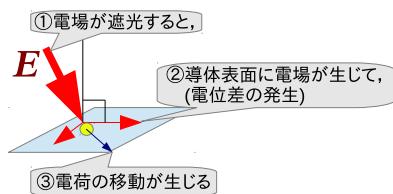


図 17.18 もし、電場が導体に直交しなかったら…

# 18

## 磁束密度に対するガウスの法則

### 18.1 ビオ = サバールの法則（復習）

コメント ビオ = サバールの法則についての詳細は、14.3.2 節を参照。以下は、そこからの抜粋である。

ビオ = サバールの法則は、磁束密度に関する法則である。

#### Point 63: ビオ = サバールの法則（電流密度表示）

電流はその周囲に磁束密度を発生させる。その発生は以下の式に従う。

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'. \quad (18.1)$$

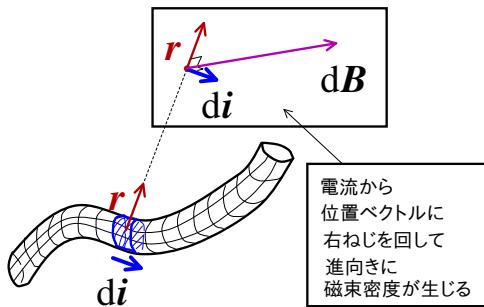


図 18.1 ビオ = サバールの法則

## 18.2 磁束密度に対するガウスの法則の導出

### 18.2.1 公式の確認

ビオ = サバールの法則から、磁束密度に対するガウスの法則を導出する手順を示す。まず、導出の際に以下のベクトル解析の公式を使用する。

$$\operatorname{grad} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (18.2)$$

$$\operatorname{rot}(a\mathbf{X}) = (\operatorname{grad} a) \times \mathbf{X} + a(\operatorname{rot} \mathbf{X}). \quad (18.3)$$

ただし、 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  である。また、 $a$  は任意のスカラー関数であり、 $\mathbf{X}$  はベクトル関数である。

# memo No.81: 公式の変形 1

この公式を使うのだけど、このまま適用するわけではない。適用しやすいように、形を変えておこう。上段の式から見ていく。

$$\operatorname{grad} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

の  $\mathbf{r}$  に注目する。任意の定ベクトル  $\mathbf{C}$  を考えて、 $\mathbf{r}$  を

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} - \mathbf{C}$$

と置き換えてやる。すると

$$\operatorname{grad} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{C}|} \right) = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{C}}{|\mathbf{r} - \mathbf{C}|^2}$$

となる<sup>1)</sup>。

*# memo No.82: 公式の変形 2*

任意の定ベクトル  $\mathbf{X}$  に対して,

$$\operatorname{rot} \mathbf{X} = 0$$

が成立するとき,

$$\operatorname{rot} (a\mathbf{X}) = (\operatorname{grad} a) \times \mathbf{X}$$

が成り立つ。

### 18.2.2 導出

ベクトル解析の公式  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{X}) = 0$  を念頭に置き、ビオ＝サバールの法則の式を変形していこう。

まず、ビオ＝サバールの式を書き下す。

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'. \quad (18.4)$$

この式の

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

の部分の注目すると、公式

$$\operatorname{grad} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{C}|} \right) = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{C}}{|\mathbf{r} - \mathbf{C}|^2}$$

から

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{i}(\mathbf{r}') \times \left\{ -\operatorname{grad} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right\} dV'. \quad (18.5)$$

---

<sup>1)</sup> 計算是合成微分を繰り返し。面倒だが、 $x$  成分の計算だけでよいので、手で計算してほしい。ここでは、記述が面倒なので、結果のみとする。

さらに、公式 ( $\mathbf{U}$  は定ベクトル,  $a$  はスカラー関数)

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(a\mathbf{U}) &= (\operatorname{grad} a) \times \mathbf{U} \\ &= -\mathbf{U} \times (\operatorname{grad} a) \\ &= \mathbf{U} \times (-\operatorname{grad} a)\end{aligned}$$

により、

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{i}(\mathbf{r}') \times \left\{ -\operatorname{grad} \left( \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) \right\} dV' \\ &= \int \operatorname{rot} \left( \mathbf{i}(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) dV' \\ &= \int \operatorname{rot} \left( \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) dV'.\end{aligned}$$

積分と微分の順番を変更して、

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \int \left( \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) dV'. \quad (18.6)$$

ここで、次のようなベクトル関数を定義する。

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) := \int \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV'. \quad (18.7)$$

これは後で ベクトル・ポテンシャル と呼ばれる量と同じものである<sup>2)</sup>。この  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  をにより、ビオ＝サバールの法則は以下のようになる。

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}). \quad (18.8)$$

ここまで計算すれば、明らかだ。両辺に  $\operatorname{div}$  をとろう。

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \operatorname{div} (\operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r})). \\ \therefore \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= 0.\end{aligned} \quad (18.9)$$

この計算で、公式  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{X}) = 0$  を使った。これは、磁束密度に対するガウスの法則に他ならない。

以上の計算から、ビオ＝サバールの法則に従って生じる磁束密度は、ガウスの法則  $\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$  を満たすことが示された。

---

<sup>2)</sup> ここでは、あくまでも形式的に導入するものであり、その正式な導入は後で行う。

### 18.2.3 まとめ

以上の結果をまとめよう。

#### Point 64: 静磁束密度のガウスの法則（微分形）

時間変化のない磁束密度に対する、局所的なガウスの法則は、以下の微分形の式により表される。

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (18.10)$$

#### Point 65: 静磁束密度のガウスの法則（積分形）

時間変化のない磁束密度に対する、大局的なガウスの法則は、以下の積分形の式により表される。

$$\int_S \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) \, dS = 0. \quad (18.11)$$

磁束密度に対するガウスの法則は、電場に対するガウスの法則と同様に考えられる。磁束密度に対するガウスの法則を表す式を見てみると、『任意にとった閉曲面からの磁束密度の流出量を積分すると、その値は 0 になる』ということ解釈できる。後で確認することではあるが、微分形のマクスウェル方程式によれば、磁束密度は、どの場所においても、発生や吸い込みがおきていないことがわかる。それゆえに、磁束密度の流出も生じないのである。

## 18.3 法則の意味（図的イメージ）



# 19

## アンペール＝マクスウェルの法則

### 19.1 アンペールの法則

#### 19.1.1 エルステッドの実験

電流が生じている導体のそばに方位磁針をおくと、方位磁針は南北を示さなくなる。エルステッド<sup>1)</sup>はこの現象を発見した。その後、更に多くの実験が行われた。そして、アンペールによって、アンペール力（2つの電流の間に生じる力）が発見された。アンペール力  $\mathbf{F}$  は、2つの電流を  $I, I'$  とし、その間の距離を  $l$  としたとき、

$$\mathbf{F} = k \frac{II'}{l} \quad (19.1)$$

で表される。 $k$  は比例定数である。 $k$  の具体的な数値は後で考えることになる<sup>2)</sup>。2つの電流の間に、引力もしくは斥力（反発力）が発生するということである。2つの電流が同じ方向に向いていれば引力が働く。逆向きであれば、斥力が働く。

<sup>1)</sup> Hans Christian Ørsted ( 1777 - 1851, デンマーク ) : 物理学者、科学者。太田光一の著した「電磁気学の基礎 I」には、"エールステズ" と片仮名表記されている。

<sup>2)</sup> SI 単位系において、電流の基本単位 1[A] はアンペール力を利用し、定義される。

原理を考えてみよう。電流の周りには磁束密度が生じる。また、電流とは電荷のいどうのことである。一方の電流が作る磁束密度の中を、他方の電流のもとである電荷が移動することになる。となれば、電荷は磁束密度中をある速度を持って移動することになるので、ローレンツ力を受けることになる。電荷というスケールで考えると、ローレンツ力を受けているのであるが、電流という大局的な視点で考えれば、アンペール力が働いているのである。アンペール力は原理的にはローレンツ力に起因するものと考えても良いが、時と場合によって、使い分けることが大事だ。例えば、実験や工学的な目的であればアンペール力を利用したほうが便利だし、現象を理論的に追求しようとした場合、ローレンツ力として考えたほうが一般性が高まることがあるだろう。

話がそれたが、この節で言いたかったことは、電流の周囲には磁束密度が生じるということである。では、具体的には、どのような磁束密度が分布しているのだろうか。以下で考えていく。

### 19.1.2 ビオ＝サバールの法則（復習）

**コメント** ビオ＝サバールの法則についての詳細は、14.3.2 節を参照。以下は、そこからの抜粋である。

#### Point 66: ビオ＝サバールの法則（電流密度表示）

電流はその周囲に磁束密度を発生させる。その発生は以下の式に従う。

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \quad (19.2)$$

### 19.1.3 アンペールの法則の導出

#### 19.1.3.1 定常電流

ビオ＝サバールの法則からアンペールの法則を導く。はじめに注意しておくと、ビオ＝サバールの法則は時間変化しない電流についての法則である。このような電

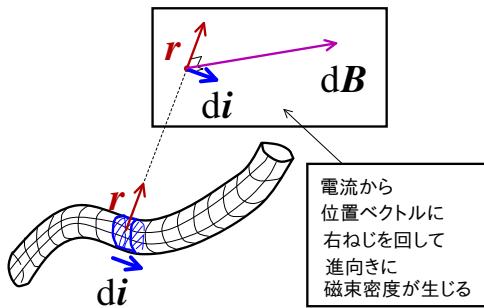


図 19.1 ビオ = サバールの法則

流を 定常電流 という。従って、以下に導くアンペールの法則も、定常電流を仮定していることになる。まず、定常電流を数式で表現しておく。

電流とは電荷の集団の移動と定義される。電流が時間変化しないということは、電荷の移動の時間変化が一定であると考えられる。つまり、電荷密度の時間変化はないと言解釈できる。ここで、電荷保存の法則をおもいだすと、

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_S} \rho(\mathbf{r}, t) dV + \int_S \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) dS = 0 \quad (19.3)$$

である。電荷密度  $\rho(\mathbf{r}, t)$  が一定の値をとることから、この式の第1項は 0 なる。つまり、この式に  $\frac{d}{dt} \int_{\Omega_S} \rho(\mathbf{r}, t) dV = 0$  を代入して、

$$\int_S \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) dS = 0 \quad (19.4)$$

である。この式が定常電流を表現する式である。

### 19.1.3.2 導出

定常電流であることを踏まえてアンペールの法則を導出する。ビオ = サバールの法則は式 (14.6) によって、

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{t}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds' \quad (19.5)$$

である。  $\mathbf{t}(\mathbf{r}') \, ds'$  とまとめて,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{t}(\mathbf{r}') \, ds' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (19.6)$$

である。この式の両辺を曲線  $\Gamma$  を内側に含む閉曲線  $l$  で線積分すると,

$$\begin{aligned} & \oint_l \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{r}) \, dl \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_l \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{t}(\mathbf{r}') \, ds' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot \mathbf{t}^*(\mathbf{r}) \, dl \end{aligned} \quad (19.7)$$

とする。ここに,  $\mathbf{t}^*(\mathbf{r}) \, dl$  は 閉曲線  $l$  単位接線ベクトル である。この式の右辺に ベクトル解析の公式

$$(\mathbf{L} \times \mathbf{M}) \cdot \mathbf{N} = (\mathbf{N} \times \mathbf{L}) \cdot \mathbf{M}$$

を用いると,

$$\begin{aligned} & \oint_l \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{t}^*(\mathbf{r}) \, dl \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_l \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{t}^*(\mathbf{r}) \, dl \times \mathbf{t}(\mathbf{r}') \, ds'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \end{aligned} \quad (19.8)$$

と変形できる。ここで、曲線  $\Gamma$  の単位接線方向ベクトル  $\mathbf{t}(\mathbf{r}')$  と閉曲線  $l$  の単位接線成分  $\mathbf{t}^*(\mathbf{r})$  との外積  $\mathbf{t}(\mathbf{r}') \times \mathbf{t}^*(\mathbf{r})$  を

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}') = \mathbf{t}(\mathbf{r}') \times \mathbf{t}^*(\mathbf{r})$$

とおく。また、 $dS_l = dl \, ds'$  (「閉曲線  $l$  を縁とする面」という意味) とおく。すると,

$$\oint_l \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{t}^*(\mathbf{r}) \, dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_l \int_{S_l} \frac{\mathbf{n}(\mathbf{r}') \, dS}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (19.9)$$

と書ける。さらに曲線  $\Gamma$  が、閉曲線  $l$  の内側にあるので、公式

$$\begin{aligned} & \int_{S_l} \frac{\mathbf{n}(\mathbf{r}') \, dS}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &= \int_{S_l} \frac{\mathbf{n}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \, dS = 4\pi \end{aligned}$$

が成り立つ。従って,

$$\oint_l \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{t}^*(\mathbf{r}) \, dl = \mu_0 I \quad (19.10)$$

となる。この計算では、閉曲線  $l$  の単位接線ベクトルとして、 $\mathbf{t}^*(\mathbf{r})$  を用いてきたが、ここで改めて、 $\mathbf{t}(\mathbf{r}) = \mathbf{t}^*(\mathbf{r})$  と書くことにして混乱はないので、

$$\oint_l \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{r}) \, dl = \mu_0 I \quad (19.11)$$

さらに、面  $S_l$  を流れる電流を電流密度で表記すると、

$$I = \int_{S_l} \mathbf{i}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) \, dS_l \quad (19.12)$$

と書けることから<sup>3)</sup>、(電流は定常電流である。)

$$\oint_l \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{r}) \, dl = \mu_0 \int_{S_l} \mathbf{i}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) \, dS_l \quad (19.13)$$

と表現できる。何度も確認するが、この式の  $\mathbf{t}(\mathbf{r})$  は閉曲線  $l$  の単位接線ベクトルである。

### Point 67: アンペールの法則（積分形）

電流の周囲には磁束密度が生じ、以下の式に従う。

$$\oint_l \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{r}) \, dl = \mu_0 \int_{S_l} \mathbf{i}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) \, dS_l \quad (19.14)$$

#### 19.1.4 法則の意味（図的イメージ）

言葉で言えば、「磁束密度  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  が存在する場所において、任意の閉曲線  $l$  を描き、この閉曲線  $l$  の接線方向に線積分すると、その値は閉曲線  $l$  の張る面  $S_l$  を貫く電流  $I$  の  $\mu_0$  倍に等しい」と言える。この式の解釈を簡単にいえば、『電流が磁束密度を生じさせる』ということである。つまり、(定常的な) 磁束密度が存在するならば、その根源は電流であると言える。

<sup>3)</sup> この式の  $S_l$  は閉曲面ではない。 $S_l$  は閉曲線  $l$  を縁とした曲面である。→ 電荷保存の法則で考えているのは閉曲面  $S$  であって、これとの違いに注意をする。

アンペールの法則を満たす磁束密度は一意に定まらない。そこで、静電場で考えた時と同じように磁束密度に対するガウスの法則を導入するのである。このガウスの法則によって、磁束密度を一意に決定できるようになる。

## 19.2 アンペール＝マクスウェルの法則

**コメント** アンペール＝マクスウェルの法則とは、その記述から察しがつくと思うが、アンペールの法則にマクスウェルが改良を加えたものである。マクスウェルは、動電磁場を考える場合に、アンペールの法則が不完全であるとし、**変位電流** という新しい概念を導入した。変位電流とはなんなのか。マクスウェルはどのように修正したのか。その拡張された法則はどういったイメージなのか。この節で考えることにしよう。

### 19.2.1 アンペールの法則と電荷保存則との矛盾

マクスウェルは、アンペールの法則に変位電流の項を加える修正を行った。なぜ、このような修正が行われたかというと、アンペールの法則が電荷保存則を満たさなかつたからである。アンペールの法則は、電荷保存則と矛盾するのだ。この矛盾はどういったものなのかを、以下に示す。

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i}.$$

両辺に発散 (div ; divergence) をとってみる。

$$\text{div}(\text{rot } \mathbf{B}) = \text{div}(\mu_0 \mathbf{i}).$$

ここで、ベクトル解析の公式から、 $\text{div}(\text{rot } \mathbf{B}) = 0$  が成立している<sup>4)</sup>。つまり、

$$\begin{aligned} \text{div}(\mu_0 \mathbf{i}) &= 0 \\ \therefore \text{div } \mathbf{i} &= 0, \quad (\because \mu_0 \text{は定数}) \end{aligned}$$

となる。ここで、式の見やすさの為に、右辺と左辺を入れ替えた。アンペールの法則を認める限り、この式が成立していなければならないのだけど、一方で、電荷保存

<sup>4)</sup> (公式；定理) 任意のベクトル  $\mathbf{X}$  について、

$$\text{div}(\text{rot } \mathbf{X}) = 0$$

が成立する。

則は

$$\operatorname{div} \mathbf{i} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

であり、右辺に関して、 $\partial \rho / \partial t \neq 0$  である。明らかに、アンペールの法則と電荷保存則は矛盾してしまう。どちらが間違っているのだろうか。あるいは、両者とも間違っているのだろうか。マクスウェルの出した答えは、アンペールの法則が不完全であるというもので、**変位電流** という概念を持ち出して、修正を加えた。現在では、変位電流の実在性は、電磁波の実験により確固たるものとなっている。

### 19.2.2 変位電流

マクスウェルが導入した変位電流とはどのようなものであり、また、変位電流の導入はアンペールの法則と電荷保存則の矛盾をどのように解決するか。これらを次に確認しよう。それには、電場に対するガウスの法則に、電荷密度  $\rho$  が現れていることに着目し、ここから電荷保存則の式に似せていくという、アプローチをとる。

電場に対するガウスの法則によれば、

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho.$$

両辺を時間  $t$  で微分する。

$$\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \mathbf{E}) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\epsilon_0} \rho \right).$$

ここで、空間に関する微分  $\operatorname{div}$  と時間に関する微分  $\partial / \partial t$  の可換性を仮定して<sup>5)</sup>、

$$\operatorname{div} \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

となる。両辺に、 $\epsilon_0$  を掛けると、

$$\operatorname{div} \left( \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

<sup>5)</sup> 時間微分と空間微分は可換であると、信じられている。ちなみに、ここに言う「可換」とは、演算の順番のことを言っている。つまり、時間微分と空間微分の計算順序を入れ替えてよい、ということを主張している。要は、「空間に関するな微分演算」と「時間」に関する微分演算は独立していて、どちらを先に実行しようが、計算結果は変わらないということ。

最後に、両辺に  $-1$  をかける。

$$\operatorname{div} \left( -\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

ここで、再度、電荷保存則の式を見てみよう。

$$\operatorname{div} \mathbf{i} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

電荷保存則と見比べてみると、 $-\varepsilon_0(\partial \mathbf{E}/\partial t)$  が電流密度と同じ働きをすることが見て取れる。しかし、この項は電流密度そのものを表しているのではない事に注意しよう。この項  $\varepsilon_0(\partial \mathbf{E}/\partial t)$  は 変位電流 とよばれる。

電場の時間変化  $-\varepsilon_0(\partial \mathbf{E}/\partial t)$  が、電流のように振る舞うように見える。考察している範囲に電荷密度が存在していないとも、電場の時間変化が生じていれば、それを電流とみなして良いことを示唆している。アンペールの法則と電荷保存則との矛盾を解く鍵だと言つていい。実際にマクスウェルはこの項を持ち出して、アンペールの法則に手を加えて、矛盾を解消した。

### 19.2.3 アンペール＝マクスウェルの法則の導出

アンペール＝マクスウェルの法則とは、前にも書いた通り、アンペールの法則に変位電流の考えを加えたものである。その方程式を先に書いてみれば、

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (19.15)$$

この方程式は、アンペールにより発見された アンペールの法則 に、マクスウェルが修正を加えたもので、アンペール＝マクスウェルの法則 とよばれる。

式の形を見るとは、単に、アンペールの法則の右辺に、変位電流を加えただけだ。しかし、電荷保存則との矛盾が解消されている。右辺第二項の  $\varepsilon_0 \mu_0 (\partial \mathbf{E}/\partial t)$  があるため、 $\operatorname{div} \mathbf{i} = 0$  となつても、

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

となつて、電荷保存則と矛盾はしない。この式を解釈すると、電場の時間変化が回転する磁場を発生させる、ということになる。

#### 19.2.4 法則の意味（図的イメージ）

### 19.3 静電容量

#### 19.3.1 キャパシタンス

# memo No.83: 「キャパシタ」と「キャパシタンス」の違い

#### 19.3.2 変位電流とキャパシタ

#### 19.3.3 平行平板型のキャパシタ

### 19.4 電流の SI 単位に基づく定義

#### 19.4.1 直線電流が作る磁束密度

さて、今まで電流の単位として  $[A]=[C \cdot s]$  を用いてきたが、先にも書いたように、これは現実の定義とは違うものである。SI 単位系における基本単位は、電荷ではなく、電流が採用されている。

今までの議論で電流を定義するための準備ができたので、そのための準備としてのこの項目と、次も項目で、電流の定義をし直すことにする。

まず、定義の概略を示しておく。電流は電荷の移動によって生じる現象であるので、電流はローレンツ力を受ける。この電流に対するローレンツ力を人間が観測するときは、導線が受ける力として観測される。その力は  $\mathbf{F} = \mathbf{I} \times \mathbf{B}$  で表現できた。ここで、2 つの平行な直線の導線を用意する。この 2 つの導線に同じ向きに電流を流すと、後に示すように、導線が互いに引き合う現象が生じる<sup>⑥)</sup>。この力によって電流を定義するのである。実際の力の大きさとしては  $2 \times 10^{-7} [N/m]$  が採用されている。導線同士が互いに引き合うのはローレンツ力によるものであり、これは一方の電流の作る磁束密度が、他方の電流（電荷）に及ぼすローレンツ力である。従って、1 つの導線に流れる電流が作る磁束密度を計算する必要があり、ここではその計算をすることが目的である。そして、次の項目でここでの計算結果を利用して、電流を定義していくと考える。

直線電流が図 19.2 のような磁束密度を作ることを確認する。1 本の直線な導線を用意する。この導線に定常電流  $i$  を流し、この定常電流がその周囲に作る磁束密度を

► ⑥) 電流を逆向きに流せば、導線同士は互いに反発しあう。

考える。アンペールの法則は

$$\oint_l \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{r}) d\mathbf{l} = \mu_0 \int_{S_l} \mathbf{i}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) dS_l \quad (19.16)$$

のように書かれる。

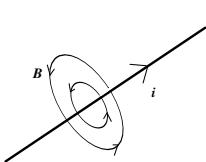


図 19.2 電流の作る磁束密度

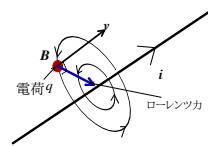


図 19.3 電荷の磁束密度から受けるローレンツ力

磁束密度の大きさは、ビオ＝サバールの法則から、導線から等距離にある部分では等しくならないといけない。従って、直線の導線の任意の点を流れる電流が起こす、磁束密度の大きさが等しい部分をつないでいけば、その形は閉じた円になる。そして磁束密度の向きは電流の生じる方向に対して右回りである。図 19.3 参照。これがわかれば、アンペールの法則の左辺； $\oint_l \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{r}) d\mathbf{l}$  の積分経路は、円にとればよいことがわかる。

積分経路を円とすれば、その半径を  $r$  とした場合に、磁束密度の強さは、以下のように計算される。

アンペールの法則の左辺を計算すると、

$$(左辺) = \oint_l \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{r}) d\mathbf{l} = \oint_l B d\mathbf{l} = B \oint_l d\mathbf{l}$$

ここで、積分経路  $l$  は円であるので、 $\oint_l d\mathbf{l} = 2\pi r$  である。従って、

$$(左辺) = 2\pi r B$$

右辺； $\mu_0 \int_{S_l} \mathbf{i}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) dS_l$  は、定常電流であるので、これは  $\mu_0 I$  と書ける。

以上から

$$2\pi r B = \mu_0 I$$

すなわち、

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (19.17)$$

である。

‡ memo No.84: 積分経路を円にとる

なぜなら、円でない曲線経路をとったとしても、磁束密度の向きは円方向に向いているからである。下図参照。

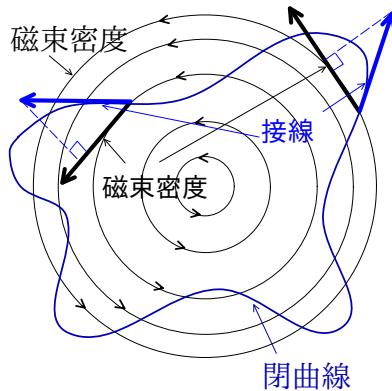


図 19.4 閉曲線の取り方

図で示したように、曲線の接線と磁束密度の内積をとるので、接線の磁束密度に直角な方向成分は考察する必要がないのである。(考えたとしても、内積は 0 となるので意味がない。)

#### 19.4.2 電流が受ける力

電気量  $q$ 、速度  $v$  をもつ 1 つの電荷が受けるローレンツ力  $\mathbf{F}$  をおもいだすと、

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (19.18)$$

であった。複数の電荷を考えれば、電荷密度という概念を導入して、

$$\mathbf{F} = \left( \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}) dV \right) \langle \dot{\mathbf{r}} \rangle \times \mathbf{B} \quad (19.19)$$

ここに、 $\langle \dot{\mathbf{r}} \rangle$  は電荷のドリフト速度である。ドリフト速度というのは、複数の電荷の移動速度の平均である。そして、 $Q := \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}) dV$  おくと、 $\mathbf{F} = Q \langle \dot{\mathbf{r}} \rangle \times \mathbf{B}$  と書けて、 $Q \langle \dot{\mathbf{r}} \rangle$  は電流を表現していると考えられるから、これを  $\mathbf{I}$  おくことで ( $\mathbf{I} := Q \langle \dot{\mathbf{r}} \rangle$ )、

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} \times \mathbf{B} \quad (19.20)$$

を得る。

### 19.4.3 電流の定義 (1[A] の定義)

電磁気学では SI 単位系において、電流の単位が基本単位として採用されている。ここではその基本単位となる電流の 1[A] を定義する。一つ前の項目 14.2 で電流が受ける力は、導線の受ける力として現れることを確認し、その力は式 (14.5) で表された。それをもう一度書き下せば、

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} \times \mathbf{B} \quad (19.21)$$

である。

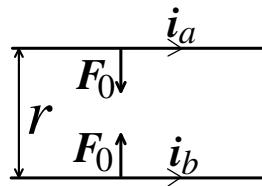


図 19.5 電流の定義の説明図 1

2 本の平行に並んだ導線を用意する。導線の名前をそれぞれ 1, 2 とする。この 2 本の導線に定常電流を流す。それら 2 つの定常電流をそれぞれ  $i_A$ ,  $i_B$  とする。この内の一方の導線に流れる電流が作る磁束密度を考える。どちらでもよいが  $i_1$  の作る磁束密度を考える。アンペールの法則より、

$$\oint_l \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{r}) \, dl = \mu_0 \int_{S_l} \mathbf{i}_1(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) \, dS_l$$

これは前項目で計算計算したように、

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

である。従って、他方の導線に与える力は、(電流と磁束密度のなす角は  $\pi/2$  であることに注意して)

$$F = I_2 B \sin \frac{\pi}{2} = I_2 B$$

従って、 $B = \mu_0 I_1 / 2\pi r$  を代入すれば。

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} \quad (19.22)$$

である。この式を用いて 1[A] の電流を定義する。図 19.6 に描いたように、重さ  $2 \times 10^{-7} [\text{N}]$  のおもりを、同線の片方につるす。

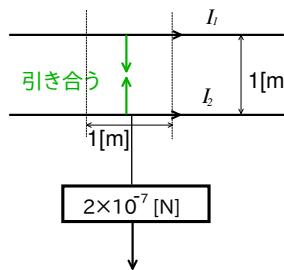


図 19.6 電流の定義の説明図 2

このとき、各導線には同じ方向に電流が流れているとする。導線間の距離は 1[m] としている。この状態で、釣り合いが取れたとき、1[A] の電流が流れていると定義するのである。

以上のことと形式的にまとめておこう。

#### Point 68: 電流 1[A] の定義

1[m] の間隔をおいた 2 本の平行導線に電流を流して、この導線に働く力が単位長さ (1[m]) 当たり  $2 \times 10^{-7} [\text{N}]$  の力が働くとき、この時に流れる電流を 1[A] と定義する。



# 20

## ファラデーの電磁誘導の法則

### 20.1 ファラデーの実験

#### 20.1.1 起電力

「起電力」とは電流を発生させるためのエネルギー源である。具体的には電池と考えてよい。とにかく、電流を発生させるものである。実際は、電流は電荷の移動があるので、従って、「起電力」とは電荷を動かすものである。電荷を動かすものといえば、電場である。すなわち、起電力とは電場を導体内に発生させるエネルギー源であると言える。エネルギーと仕事の関係から、起電力は「導体内において、単位電荷を周させる仕事」と考えられる。従って、起電力を  $V_l$  と書くと、(回路として閉ループ  $l$  を想定するために、このような添え字をつけた。)

$$V_l = \oint_l \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l} \quad (20.1)$$

なる関係式を得ることができる。以後、起電力とはこの  $V_l$  のことという。

### 20.1.2 磁束

イメージを先に書くと、「磁束密度の束」である。これは以下のように表現される。磁束密度を閉ループ  $l$  を縁とする面  $S_l$  で面積分して、

$$\Phi_l = \int_{S_l} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}, t) \, dS_l \quad (20.2)$$

である。この  $\Phi_l$  を 磁束 という。

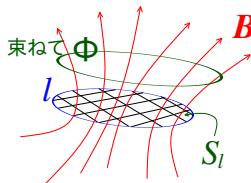


図 20.1 磁束のイメージ

### 20.1.3 電磁誘導の法則

前にもビオ＝サバールの法則の部分で書いたが、エルステッドは電流が生じるとその周りには磁束密度ができるのことを発見した<sup>1)</sup>。この現象はビオ＝サバールの法則によって数学的に表現され、さらに、アンペールの法則と磁束密度に対するガウスの法則に形を変えている。

ファラデーは電流が磁束密度を作るのならば、その逆作用として、磁束密度の中に置いた回路に電流が生じるのではないかと考えた。その実験の中で、彼は磁束密度の時間変化が電場を発生させることを発見した。そして、ノイマン<sup>2)</sup>は、この電磁誘導の法則を次のように定式化した。

<sup>1)</sup> 電流を流している導線の近くに、方位磁針をいくつか置いてみると、方位磁針は電流の作る磁束密度の方向に振れる。

<sup>2)</sup> Frantz Ernst Neumann : (1798 - 1895, ドイツの物理学者, 鉱物学者)

## ファラデーの電磁誘導の法則

閉曲線  $l$  が張る曲面  $S_l$  を貫く磁束  $\Phi_l$  が時間変化すると、この閉路  $l$  に起電力  $V_l$  が生じる。この起電力  $V_l$  の大きさは、磁束  $\Phi_l$  の時間変化率  $\partial\Phi_l/\partial t$  に比例する。また、起電力  $V_l$  の向きは、この起電力によって閉路  $l$  に電流が生じるときに、この電流が作る磁束がはじめの磁束の変化を打ち消すような向きである。起電力の向きに関することは レンツの法則 とよばれる。磁束  $\Phi_l$  の時間変化による閉路  $l$  内に生じる起電力  $V_l$  を、誘導起電力 という。ファラデーの電磁誘導の法則は、次式によって表される。

$$V_l = -\frac{\partial\Phi_l}{\partial t} \quad (20.3)$$

誘導起電力によって回路に電流が生じるときに、この電流が作る磁束がはじめの磁束の変化のきを正の向きとした。

## 20.1.4 法則の意味（図的イメージ）

電磁誘導の最も直感的なイメージを図 20.2, 20.3 に示す<sup>3)</sup>。磁石が振動することによって、その磁石から生じている磁束が時間変化することになる。従って、この磁束密度の時間変化により、電場が生じることになる。もし、振動している磁石の周りに回路があるならば、回路の導線内には電場が生じ、従って起電力となる。

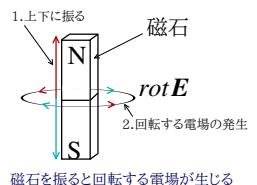


図 20.2 電磁誘導 1-1

電磁誘導の法則を別のイメージで考えてみる。原理は同じだが、次の例はとても面白い現象が得られる。

<sup>3)</sup> 図 20.3 は <http://vanity-worth.com/nature-law/lenz-1.htm> より (2008.08.24 現在)。

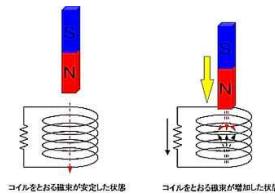


図 20.3 電磁誘導 1-2

コイルに電流を流すと磁束密度が生じることは、アンペールの法則から説明される。そこで、互いに近くに置かれたコイルを 2 つ用意し、片方（コイル 1）にスイッチと電源を接続して、もう一方（コイル 2）には何も接続しないようにする。図 20.4 参照。

まず初めの状態として、コイル 1 が電源に接続されスイッチが切れいている状態にする。このときはコイル 1 に電流が流れていなくておらず、従って、コイル 1 には磁束密度は生じていない。この状態からスイッチを入れてコイル 1 に電流を流してみると、この電流によってコイル 1 に電流が生じる。この電流は磁束密度を発生させる。つまり、コイル 1 の周りに「磁束密度の変化」があったことになる。ファラデーの電磁誘導の法則は、磁束密度の変化が回転する電場を生じさせるというものであったので、この磁束密度の変化がコイル 2 の部分においても生じているはずであり、従って、コイル 2 に回転する電場が生じるはずである。つまり、コイル 2 に電流が生じるのである（電源がつながっていないのにもかかわらず!!）。

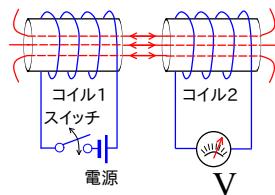


図 20.4 電磁誘導 2

電磁誘導の法則 (20.3) を 電場 と 磁束密度 を用いて表現すれば、起電力 と 磁束の項目から、次のように表現できる。

**Point 69:**

ファラデーの電磁誘導の法則

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} \, dl = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{S_l} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS_l \quad (20.4)$$

ここに,  $\mathbf{E} := \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{t} := \mathbf{t}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{B} := \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{n} := \mathbf{n}(\mathbf{r}, t)$  であり, 位置と時間の関数である. これらが時間依存している点が重要である. 時間依存していなければ右辺は定数となり, 静電場の方程式となる<sup>a</sup>.

---

<sup>a</sup> この意味で, ファラデーの電磁誘導の法則は, 静電場の方程式の時間依存的な拡張を見るともできる.

## 20.2 自己誘導 / 相互誘導

### 20.2.1 自己インダクタンス

アンペールの法則によると, 磁束密度  $B$  は電流  $I$  に比例する. 先に見たとおり, 磁束  $\Phi$  は 磁束密度  $B$  に比例するので<sup>4)</sup>, 当然, 磁束は電流に比例する.

$$\Phi \propto B \propto I.$$

従って, 磁束  $\Phi$  と電流  $I$  の関係式は, 比例定数を  $L$  としたときに,

$$\Phi = LI.$$

これを電磁誘導の法則  $V = -d\Phi/dt$  に代入すると,

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{dI}{dt} \quad (20.5)$$

となる. この定数  $L$  を 自己インダクタンス とよぶ.

---

<sup>4)</sup> そのように, 磁束を定義したのであった.

物理的イメージを考えてみよう。アンペールの法則により、電流はその周囲に磁束密度を発生させる。一方で、電磁誘導の法則によれば、時間変化する磁束密度の周囲には、電場が生じ、電位差が発生する。とすると、電流が流れていなかった導線に、突然に電流が流れ始めると、その周囲に磁束密度が発生するのだが、この磁束密度は時間変化するものであるので、同時に電位差もその周囲に生まれることになる。当然、いま流れ始めた電流はこの電位差の影響もうけることになる。電流自身がその周囲に電位差を作り出し、その電位差が自身に帰ってくるのである。"自己"インダクタンスと表現されているのは、この現象に由来している。

#### # memo No.85: 磁束は電流に比例する

以下のように、簡略表記すると、わかりやすい。一重巻きのコイルを想定してみればよい。積分形のアンペールの法則は

$$\oint_l \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{r}) \, dl = \mu_0 \int_{S_l} \mathbf{i}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) \, dS_l$$

であるから、

$$B = \oint_l \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{r}) \, dl$$

$$I = \int_{S_l} \mathbf{i}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) \, dS_l$$

と計算されたとき、

$$B = \mu_0 I.$$

#### # memo No.86: ソレノイドが作る磁束密度

ソレノイド上の導線が作る磁束密度を考えよう。いま、ソレノイドを流れる電流  $I$  が定常状態であるとしたとき、アンペールの法則によって 1 回巻きの場合

$$\oint_l \mathbf{B} \, dl = \mu_0 I$$

である。 $l$  はアンペールの法則に依れば任意の閉曲線であるから、ここでは図 38.11 のように閉曲線をとってみる。閉曲線 ABCD で、辺 AB, 辺 CD の方向には、電流と平行な向きがあるので、磁束密度は現れない。また、閉曲線 ABCD の辺 BC の部分には磁束密度は存在しない。なぜなら、この辺 BC の部分は磁束密度が存在しない無限遠方と同じ空間でなければならぬからである。つまり、磁束はソレノイドの内部だけに存在することになる。

$$\oint_l \mathbf{B} \, dl = Bl$$

と計算されるから、

$$Bl = \mu_0 I \quad (20.6)$$

$N$  回巻きの場合は、これを  $N$  倍すればよく、

$$\begin{aligned} Bl &= N\mu_0 I \\ \therefore B &= \frac{N\mu_0 I}{l} \end{aligned} \quad (20.7)$$

この式 (38.17) がソレノイド状のコイルに流れる電流がつくる磁束密度である。従って、この磁束密度を磁束  $\Phi$  に代入すると、

$$\Phi_l = BS = \frac{N^2 S \mu_0 I}{l} \quad (20.8)$$

である。ちなみに、この計算では巻き数  $N$  をコイルの総巻き数として計算しているが、単位長さあたりの巻き数  $n$  により表現すれば、 $n = N/l$  から、 $N = nl$  と書き換えて、

$$\Phi = \frac{(nl)^2 S \mu_0 I}{l} = \mu_0 n^2 l S I$$

となる。

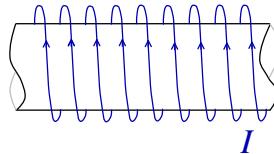


図 20.5 ソレノイド (外観)

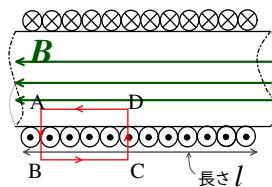


図 20.6 ソレノイド (内部)

*# memo No.87: 「インダクタ」と「インダクタンス」の違い*

インダクタとは、現実に存在するコイルのことを意味する。インダクタンスと表現した場合には、理論上の比例定数のことをいう。似た表現であり、話すときにも混同してしまうことも多々あるが、意味は違うことを覚えておこう。

#### 20.2.2 相互インダクタンス

#### 20.2.3 結合定数

#### 20.2.4 変圧器の原理

# 第 III 部

# 特殊相対性理論



# 21

## 電磁気学の不満な点

### 21.1 導入

特殊相対性理論は、アインシュタインが 1905 年に書いた “Zur Elektrodynamik bewegter Körper”（動いている物体の電気力学）によって、始まった<sup>1)</sup>。特殊相対性理論は、光の速度の不可思議な性質<sup>2)</sup>をスマートに解決する理論である、と言いたいところだが、そうではない。アインシュタインは、光速度不変の原理を認めることで、より多くの物理現象を説明できる理論を組み立てることができると、主張する。その理論が、特殊相対性理論である。この章では、特殊相対性理論を確認する。特殊相対性理論は、アインシュタインの 1905 年の最初の論文で、ほぼ完成している。有名な、時間の遅れという現象、棒の収縮といったことはこの論文に全て書かれててい

<sup>1)</sup> いや、アインシュタインによって、「物理学的に完全な形に整えられた」と言った方が正確だろう。特殊相対性理論と同等の議論は、アインシュタイン以前にも盛んに行われていたからだ。言い換えれば、アインシュタインの他にも、特殊相対性理論の内容と同じ理論的枠組に迫った人がいる、ということにもなる。

<sup>2)</sup> これは 光速度不変の原理 とよばれる、光のもつ性質の 1 つである。光の速さは、1 つの慣性系において、運動している物体から光を出そうが、静止している物体から光を出そうが、両者の光の速度は一定の値 ( $c = 3 \times 10^8 [\text{m/s}]$ ) をとる、というものである。

る<sup>3)</sup>. 岩波文庫から、内山龍雄訳の原論文があるので、これを参照しながら、特殊相対性理論を勉強していこう. 教科書は別のものを使う.

## 21.2 ローレンツ力

ローレンツ力について、復習しよう. ある空間に、電場  $\mathbf{E}$  と、磁束密度  $\mathbf{B}$  が生じていることが分かっているとしよう. このとき、この空間に、電気量  $q$  をもった点電荷を、初速度  $\mathbf{v}$  を与えて放す. すると、この点電荷は、空間からローレンツ力  $\mathbf{F}$  を受けることになる. このローレンツ力  $\mathbf{F}$  は、

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (21.1)$$

と書き表される.

## 21.3 電磁誘導

ファラデーの電磁誘導の法則によると、磁束密度  $\mathbf{B}$  の時間変化がその周りに回転する電場  $\mathbf{E}$  を作り出す. 式で書けば、以下の通り.

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (21.2)$$

## 21.4 ローレンツ力と電磁誘導

原論文<sup>4)</sup>の冒頭で、AINSHUTAINは次のような、電磁気学における矛盾点を指摘している. それは、ローレンツ力と電磁誘導に関するものである.

まず、磁石と金属棒を用意する. はじめに、磁石を固定し、金属棒を磁石の近くで、くっつけることのないよう、揺らしてみよう. このとき、金属棒内の電子に「ローレンツ力」が働く.

今度は、逆に、金属棒を固定し、磁石を金属棒の近くで、棒をくっつけることなく、振ってみよう. このとき、磁石の振動によって、金属棒周囲の磁場が変動する. この

<sup>3)</sup> エネルギーと質量の関係式  $E = mc^2$  は、この論文には書かれていない.

<sup>4)</sup> 原論文とはいっても、もちろん、日本語訳されたものを参照している. 私にドイツ語が読めるわけがない. 英語もよく読めないので.

参考図書のリスト [23] を参照.

磁場の変動は「電磁誘導」により、その周囲に電場を作り出す。この電場によって、金属棒に起電力が生じる。

以上の2つの状況は、ともに電子の運動を引き起こす原因を説明するものである。そして、それらはともに、金属棒と磁石の“相対的な振動”によって、金属棒に起電力が生じるというものである。相対的な位置の変化が問題になるにもかかわらず、起電力発生の原因の説明が、視点を金属棒にするか、あるいは、磁石にするかによって、異なる。つまり、物理学的に、同じ状況であるのだけど、その現象の説明方法が異なっていしまうのだ。これでは、納得のできないだろう。電磁気学に何らかの不備があると、感じてしまうこともある。

そこでアインシュタインは、一步後ろに引いて落ち着いて考察をする。そして、光速不変の原理と特殊相対性原理を基礎にし、「特殊相対性理論」を確立させる。この理論は、上のようなおかしな説明をせずに、起電力の発生を説明できる。そして、それだけにとどまらず、ニュートン力学を、より一般性の高い理論になるように、修正を加える。



# 22

## 2つの基本原理

### 22.1 特殊相対性原理

#### 22.1.1 物理法則と座標変換

物理現象を観測するのは、人間ひとりひとりである。当然ながら、ひとりの人間が同時に二つの視点に立って、同じ物理現象を観測することは不可能である<sup>1)</sup>。

しかし、二人の人間が、同時に、同じ物理現象を観測することは可能である。その場合、もちろん、二人の観測者の位置は異なっている。二人の観測者を A, B としよう。ある物理現象を、観測者 A の視点で見て、そして、物理法則を見出す。同様に、観測者 B の視点で見て、物理法則を見出す。観測者 A が発見した物理法則と、観測者 B が発見した物理法則に違いはあるだろうか。当然のことながら、両者の視点の違いによる差異はある。しかし、これは 座標変換 という操作で、両方の視点に行ったり来たりできる、ということを考えれば、その分の差異はなくなる（例えば、ガリレイ変換）。そして、アインシュタインは、「観測者 A と観測者 B が発見する物理法則は、全く同じ形（全く同じ式）で、表されるはずだ」と言う。

---

<sup>1)</sup> 「分身の術」なんてのは、考えない。

## # memo No.88: 惯性系の存在とガリレイ変換(復習)

まず、慣性系が少なくとも 1 つ存在することを仮定する。実際には完全な慣性系を発見することは難しいだろうが<sup>2)</sup>、ここではこれを理想化して考える。

さて、慣性系が 1 つ存在するならば、ガリレイ変換によって、いくつもの慣性系が存在すると考えられる。それは簡単に示せる。最初に存在を認めた第 1 の慣性系を  $S$  と表現することにし、この慣性系  $S$  を基準に取りこの速度を 0 として考える。この基準慣性系  $S$  の位置座標を  $\mathbf{r}$  と表現する。慣性系  $S$  に対して等速直線運動している慣性系を、ガリレイ変換によって考えることができて、この慣性系を  $S'$  と表現する。慣性系  $S'$  の位置座標を  $\mathbf{r}'$  と表現する。これら 2 つの座標系  $S, S'$  の位置座標には、ガリレイ変換により、

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v}t \quad (22.1)$$

という関係がある。ここに、 $\mathbf{v}$  は  $S'$  の  $S$  を基準とした相対速度であり、 $t$  は時刻を表現する。この相対速度  $\mathbf{v}$  を様々な具体的な速度で考えられるので、複数の慣性系を考えられるというわけである。

次に、このガリレイ変換の逆変換を考える。逆変換とは慣性系  $S'$  から見た 基準慣性系  $S$  の運動を記述することである。慣性系  $S'$  は基準慣性系  $S$  から見て相対速度  $\mathbf{v}$  で運動しているので、慣性系  $S'$  から見れば基準慣性系  $S$  は  $-\mathbf{v}$  の相対速度で運動していかなければならぬ。従って、以下の式が導かれることになる。

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{v}t. \quad (22.2)$$

逆変換における式操作については、“ $\mathbf{r}$  と  $\mathbf{r}'$  の場所を形式的に入れ替えて、速度を  $-\mathbf{v}$  と置き換える”ということをする。実際、この式は、式 (22.1) と矛盾していない(代数学的式変形で同じ式を導くことができるということである)。

### 22.1.2 特殊相対性原理

物理法則はどのような座標系からみても、同じ法則として表されるべきである。座標系が異なったら別の物理法則になってしまうのでは、物理法則とはいえない。この考え方を根本原理として掲げ、これを **特殊相対性原理** という。“特殊”とつくのは、特殊相対性理論の枠内での原理であることを明示するためである<sup>3)</sup>。

<sup>2)</sup> ニュートンの万有引力の法則によれば、質量が存在する場所では重力が存在するので、従って質量付近では慣性系は存在しない。しかし、ここではこのようなことは無視して考える。気分がスッキリしないだろうが、ここは一般相対性理論への第一歩と考えて、この仮定を受け入れてもらいたい。まあ、実際この仮定を受け入れてニュートン力学を考えてきたので(慣性の法則) すんなり受け入れられるかもしれない。

<sup>3)</sup> 一般相対性理論ではこの原理は消えてなくなる。「物理法則はどの座標系でも同じ」という 一般相対性原理 として表現がより強く改められる。

後で学習することだが、特殊相対性理論は慣性系での理論であり、一般的な加速度系では成立しない<sup>4)</sup>。

特殊相対性原理はローレンツ変換<sup>5)</sup>に対して不変であることを要請する原理であるともいえる。ローレンツ変換についてはこのあと記述する。

## 22.2 光速不変の原理

### 22.2.1 エーテル（電磁波と光）

電磁気学において、電場の波動方程式や磁束密度の波動方程式を導出したときに、電磁波が光速で伝わるということを確認した。これにより、光は電磁波の一種であるということが予言され、実際に実験によって確認されている<sup>6)</sup>。

さて、光が電磁波の一種であることが確認されたのであれば、光は波動であるということになるので、この光を伝える媒質が存在すると考えることは当然のことである<sup>7)</sup>。実際には、光を伝える媒質は存在しないことがアインシュタインによって宣言されるが、ここではこのような媒質を仮定して、この媒質のことをエーテルということにする。存在しないものに名前を付ける理由は、歴史的にこれが存在すると考えられていたこともあるが、ここでは、エーテルの存在を否定するような実験を確認したいからということである。

### 22.2.2 マイケルソンとモーレイの実験

コメント ここでは、エーテルの存在を確認しようとする実験であるマイケルソンとモーリーの実験を見ていくたいと思う。これは光速度不変の原理を説明する1つの実証としても

<sup>4)</sup> 特殊な状況であれば、の加速度系で、特殊相対論を議論することは可能。

<sup>5)</sup> ローレンツ変換とは、ニュートン力学で言うところの、ガリレイ変換に相当する座標変換である。速度が光速に近い物体を扱う場合には、物体の座標変換はガリレイ変換に従わず、ローレンツ変換に従うことが明白になる。ガリレイ変換はローレンツ変換の特殊な場合に当たるもので、物体の速度が光速に比べて非常に遅い場合に成り立つものである。ローレンツ変換についても、このあとで学習することになる。

<sup>6)</sup> このことについては電磁気学の章を参照。また、量子力学によれば、光は光子(photon)とよばれる“粒子”的でもあり、これによって光は波動性と粒子性とをあわせもつものと考えられているが、このことはここでは考えないことにする。

<sup>7)</sup> 例えば音は波の一種であり、その媒質は空気である。また別の例を挙げれば、水面の波を考えられる。もちろん、この水面波の媒質は水である。このように、波である以上は何らかの媒質によってその変化が伝えられると考えるるのである。電磁波も波動現象であることが確認されているので、電磁波を伝えるような媒質を見つけようとするのである。

みることができる。まず、光とは何かについての復習から始めていきたい。

マイケルソン<sup>8)</sup>とモーリー<sup>9)</sup>は光を伝える媒質であるエーテルの存在を実験によって確かめようとした。

ここでは、その実験そのものを考えることはせず、この実験の要点を確認するだけにとどめる。図22.1の装置が、エーテル内をABDに対して平行で等速度運動しているとする。速度の向きはAからDへの向きとする。

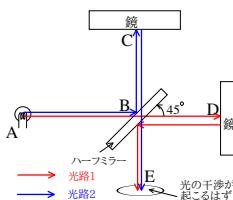


図22.1 マイケルソンとモーリーの実験1

この図22.1のCとDの部分にはミラー(鏡)を置いてある。Cにあるミラーの傾きは進行方向に対して平行であり、Dにあるミラーの傾きは進行方向に対して垂直である。Bの部分には45°傾いているハーフミラー<sup>10)</sup>を置いてある。これによって、Aの部分にある光源から出た光は、Cへ向かうものとD向かうものに分割される。

さて、この装置を用いて、Eへ到着する光を考えてみる。Eへ到着する光の経路は2つあり、それはA→B→C→Eの青色の線の経路(「青経路」ということにする)と、A→D→B→Eの赤色の線の経路(「赤経路」ということにする)である。すなわち、Eで観測される光は、青経路を通った光と赤経路を通った光が干渉したものになる。

そこで、この干渉について式を使って考えてみる。光速をc、また装置の速度をvと表すことにする。装置が速度vで運動しているので、実際の光の経路は以下の図22.2のようになる<sup>11)</sup>。但し注意してもらいたいのは、図22.2ではBD間が装置の速度の方向に縮まっているように見えてしまうが、装置は全体的に同じ速度で運動し

<sup>8)</sup> Albert Abraham Michelson (1852-1931, アメリカ)

<sup>9)</sup> Edward Williams Morley (1838-1923, アメリカ) この人物の片仮名表記は、「モーリー」、「モーリー」等、複数存在している。

<sup>10)</sup> 光を半分反射し、残りの半分をそのまま通すもの。

<sup>11)</sup> 図22.1は実験の内容をわかりやすくするためにあった。従って、図22.1は間違いであり、より正しいのは図22.2である。

ているので，“BD 間の距離が常に一定値  $L$  をとっている” ということである。

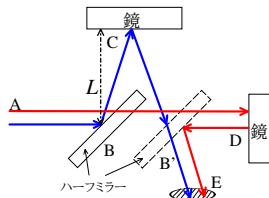


図 22.2 マイケルソンとモーリーの実験 2

ここで大事なのは、この図 22.2 の  $B \rightarrow C \rightarrow B'$  を通る青径路の光と、 $B \rightarrow D \rightarrow B'$  を通る赤径路の光である。この青径路を通った光と赤径路を通った光が干渉すれば、エーテル<sup>12)</sup> が存在するという実証になる。

次に、この干渉を定量的に数式を用いて考えるために、2つの径路を通った光の時間差を計算してみよう。

まず青径路の光を考える。より簡略化したものを以下の図 22.3 に描く。

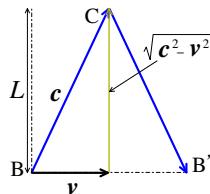


図 22.3 マイケルソンとモーリーの実験 3

光速  $c$  と装置の速度  $v$  によって、B から C へ向かう光の速度の成分は、 $\sqrt{c^2 - v^2}$  である。これを用いると、BC 間の距離が  $L$  であるとき、B から C に着くのに要する時間  $T$  を考えれば、 $T = L / \sqrt{c^2 - v^2}$  があるので、結局、B から B' へ着くまでにはその 2 倍の時間がかかるはずである。この時間を  $t_1$  (B から B' に着くの

<sup>12)</sup> 光を伝える媒質のこと。

にかかる時間) とすれば,

$$t_1 = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}} \quad (22.3)$$

であることがわかる。

次に、赤径路を通る光について考える。まず、簡略した図を図 22.4 に描く。

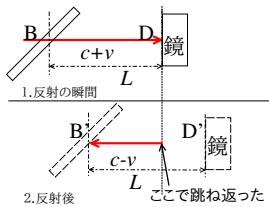


図 22.4 マイケルソンとモーリーの実験 4

反射前の光は、装置の速度  $v$  だけその速度が増して、このときの光の速さは  $c + v$  である。従って、反射前の光が B から D に到達するのにかかる時間  $t_{\text{反射前}}$  は、BD 間の距離が  $L$  であるので、

$$t_{\text{反射前}} = \frac{L}{c + v} \quad (22.4)$$

である。

光が反射するとき、図 22.4 では光の進む距離が短くなっているが、実際は装置全体が同じ速度で動いていることから、BD 間の距離は変わることがない。このことに注意しながら、反射後の光について考える。光は反射後の光は装置の進行方向とは逆向きに進むので、このときの光の速さは  $c - v$  である。従って、販社後の光が D' から B' に到達するのにかかる時間  $t_{\text{反射後}}$  は、B'D' 間の距離が  $L$  であるので、

$$t_{\text{反射後}} = \frac{L}{c - v} \quad (22.5)$$

である。

従って、B→D→B' の赤径路を進む光が、この赤径路を往復するのにかかる時間  $t_2$  は、式 (22.4) の  $t_{\text{反射前}}$  と式 (22.5) の  $t_{\text{反射後}}$  の和であり、

$$t_2 = t_{\text{反射前}} + t_{\text{反射後}}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{L}{c+v} + \frac{L}{c-v} \\ &= \frac{2cL}{c^2 - v^2}. \end{aligned}$$

よって,

$$t_2 = \frac{2cL}{c^2 - v^2} \quad (22.6)$$

となる.

さて, 以上で計算してきた結果をまとめてみる. 青径路を往復するのにかかる時間  $t_1$  と赤径路を往復するのにかかる時間  $t_2$  の差をとると,

$$\begin{aligned} t_1 - t_2 &= \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}} - \frac{2cL}{c^2 - v^2} \\ &\cong \frac{2L}{c} \left( 1 + \frac{v^2}{c^2} \right) - \frac{2L}{c} \left( 1 + \frac{v^2}{2c^2} \right) \\ &= \frac{L}{c} \frac{v^2}{c^2} \end{aligned} \quad (22.7)$$

となる. 式変形の 2 段目の等号で, 近似を用いていることに注意してほしい. すなわち, 時間差が生じて, 干渉縞が E に現れるのである.

さて, 理論上では, 干渉縞が観測されるという予測が立てられた. ところが, この実験結果は “干渉縞が観測されない” ということである. すなわち, マイケルソンとモーリーの実験では エーテルの存在を確認することができなかった ということになる. 残念なことに, 理論的予測とその実証のための実験結果が矛盾してしまったことになる.

次の項目で, この理論と実験結果との矛盾の解決の一例を考える. 但し, 完全な解決とはえないものだが… それでも確認する理由は, 結論に出てくる式は大事であるということと, その変換式の名前(ローレンツ変換式)の由来を知るためにある.

#### # memo No.89: 式 (22.3) の解説

距離  $X$ , 速度  $V$ , 時間  $T$  の関係は  $X = VT$  であった. ここでは, 距離が  $X = 2L$ , 速度が  $V = \sqrt{c^2 - v^2}$ , 時間が  $T = t_1$  であったので,

$$2L = \sqrt{c^2 - v^2} t_1$$

が成立している. これを  $t_1$  について解くことで, 式 (22.3) を得る.

‡ memo No.90: 式 (22.7) の近似式の解説

この式変形に用いた近似は以下の近似公式によるものである.

$$(1+x)^n = 1 + nx \quad (22.8)$$

ここに,  $x, n$  は実数である. まず, 式 (22.7) の式変形における第 1 の等式の第 1 項は以下のように表現してもよい. 分母と分子をそれぞれ  $c$  で割って, 式を近似式を適用できる形にしていく.

$$\begin{aligned} \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}} &= \frac{2L/c}{(\sqrt{c^2 - v^2})/c} \\ &= \frac{2L/c}{\sqrt{(c^2 - v^2)/c^2}} \\ &= \frac{2L}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \\ &= \frac{2L}{c} \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{-1/2} \end{aligned}$$

この式に先ほどの近似式を考慮すれば,

$$\frac{2L}{c} \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{-1/2} \cong \frac{2L}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)$$

を得る. これを式 (22.7) の式変形における第 1 の等式の第 1 項に考慮すると, 上のような近似式を得る.

### 22.2.3 光速不変の原理

マイケルソンとモーリーの実験でも推察されるように, エーテルという物質は存在しないと考える方がよいのである. これは 光の速さが, その光源もつ運動の速度にかかわらずに, 一定の値  $c$  をとると解釈してもよい. これが 光速度不変の原理 である. このように考えれば, 干渉縞が現れないのも当然のこととなる.

AINSHUTAIN はこの考え方を, 特殊相対性理論の論文で, 宣言している<sup>13)</sup>.

しかし, 光速不変の定理という言い方には少し注意が必要である. というもの, この光速度不変の原理は, 慣性系で成り立つものだからである. つまり加速度をもった系では, もはやこの法則は成立しない. この問題は, 一般相対性理論によって解決さ

---

<sup>13)</sup> ポアンカレも『科学の価値』でこの考え方を提案している.

れる。とにかく、光速度不変の原理は慣性系という特殊な状況でのみ成立し得る法則であるということだ。

光速度不変の原理を以下に書き表す。

### Point 70: 光速度不変の原理

『1つの静止系を基準に取った場合、いかなる光線も、それが静止している物体、あるいは運動している物体のいずれから放射されてかには関係なく、常に一定の速さ  $c$  をもって伝播する。』(アインシュタイン著、内山龍雄訳、『相対性理論』より)

この光速度不変の原理で注意すべきことは、観測者の速度が異なる場合、光速は一定値をとることを主張していないことである。例えば、二人の観測者が異なる速度で運動しているとしよう。この二人の観測者が、それぞれ同じ光源から発せられる光の速度を測定したとき、その値が  $c$  で一致するとは、この光速度不変の原理は、主張しない。

では、二人の観測者が異なる速度で運動している場合、それぞれ観測する光速は違うのだろうか。結論からいえば、観測者がどのような速度で運動していくとも、観測される光速  $c$  で一定値をとる、と言える。これを確認しておこう。

二人の観測者が測定した光速を、それぞれ  $c_1, c_2$  とする。 $c_1$  も  $c_2$  も一定の値であることから、

$$c_1 = \phi(v)c_2$$

となる、 $\phi(v)$  が存在するはずである<sup>14)</sup>。ここに、 $v$  は二人の相対速度であり、 $\phi(v)$  の変数である。二人とも、同じ方向に進む光の速度を観測すれば、 $\phi(v)$  は正の値をとるはずである。

ところで、特殊相対性原理によれば、どんな慣性系でも物理法則は全く同じである。つまり、

$$c_2 = \phi(-v)c_1$$

---

<sup>14)</sup> 例えば、 $c_1 = 6, c_2 = 3$  の場合、 $\phi(v) = 2$  である。

も成立している。速度が  $-v$  となることに注意。この 2 式から、

$$\begin{aligned} c_1 &= \phi(v)c_2 = \phi(v)\{\phi(-v)c_1\} \\ \Leftrightarrow \quad \phi(v)\phi(-v) &= 1 \\ \therefore \quad \phi(v) &= 1 \end{aligned}$$

となる。つまり、

$$c_1 = c_2$$

である。従って、観測者がどのような速度で運動していようが、光速は一定の値をとることがわかる。その光速の値は、1 つの慣性系で  $c$  を示していることから、 $c := c_1 = c_2$  である。再度注意しておくが、この結果は、光速度不変の原理が直接示しているのではなく、特殊相対性原理との論理的結果であるということである。観測者の速度にかかわらず、光速が一定値をとるということは、数学でいう定理のようなものである。

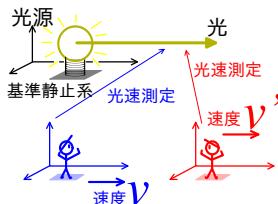


図 22.5 速度の異なる慣性系において、同一光源から生じる光の速度を測定

# 23

## 特殊相対論的な現象

### 23.1 特殊相対論的な現象

**コメント** この節では、特殊相対性原理と光速度不変の原理によって起こる例を考える。最初に、同時刻について考える。その次に、Lorentz 収縮と時間の遅れを考える。そして、マイケルソンとモーリーの実験矛盾を解決するローレンツ変換式を、上の 2 つの基本原理だけによって導出する。

#### 23.1.1 同時刻

**コメント** 光速度不変の原理によって、同時刻という従来のニュートン力学的な概念は、成り立たなくなってしまうのである。そこで次に、同時刻の概念の考え方をしたいと思う。

同時刻については、具体的に考えるとわかりやすい。例として、「2 つの異なる場所より発せられる光が“同時刻”に届く」とはどういうことかを考える。2 つの光源の名前をそれぞれ A, B とする。当たり前のことはあるが、光源 A と光源 B の光が観測点 O に“同時刻”に届くとは、それぞれ光源から発せられた光が時間差なく届くということである。さて、より詳しく考えるために、以下のような状況を設定

し、考察していこう。

まず理想的な<sup>1)</sup> 電車を想定し、この電車両端(前と後ろ)に光源を取り付ける。前の光を青にし、後ろの光を赤にする。そして、電車が前の方向に等速度速度  $V$  をもって運動しているとする。但し、この電車の速度は光速  $c$  に比べて十分に小さいものとする(すなわち、 $V \ll c$ )。このとき、光が電車の真中に到達する様子を以下の2つの立場で考える。まず第1に、観測者がこの車両の真中でこの光の到達を観測するという立場で考える。そして第2に、これを電車の外で静止している別の観測者の立場で考える。この考察で、この両者の同時刻は異なってしまうことをみることになる。

早速考える。第1の立場の状況は図23.1のように描ける。

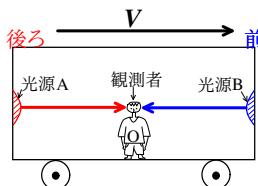


図23.1 同時刻1(電車の中の観測者からの視点)

この立場の観測者は、光源と同時に運動している。従って、前から来る青い光と後ろから来る赤い光は同時刻に観測者の目に入つてくる。

では次に第2の立場、すなわち、電車の外で静止している観測者からの視点で考える。この場合の状況は図23.2のように描ける。光は、電車内の観測者が「“同時刻”に前後の光源が発光した」と主張するように光源を発光させているものとする。すなわち、第1の立場と同じ状況を、電車外の静止した場所から観測してみようということである。実はこの仮定は同時刻を考え直すのに大事になるので、この仮定を覚えておくこと。

この図で注意したいのは“電車が動いても、光速は常に一定値  $c$  をとる”ということである。これは、光速度不変の原理による要請である。

この図を見ると、後ろから発光した赤い光は電車の速度の方向に進むだけ、また他方では、前から発光した青い光は電車の進行方向と逆向きに進むので、従って、青い光が赤い光よりも先に電車の真中に到達することになる。だから、電車外で静止して

<sup>1)</sup> ここでいう「理想的」とは、車輪の摩擦や空気抵抗、燃料の増減による質量の増加等の現実性を全て仮想的に排除したことである。

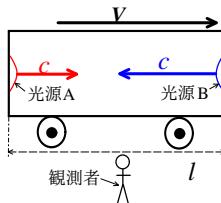


図 23.2 同時刻 2(電車外の静止した観測者からの視点)

いる観測者には、赤と青の光が同時に電車の真中に到達しないと主張することになる。これは、光速が一定であるから、電車が動けば、その電車の動いた分だけ光が進むからである。

では、青い光と赤い光との到達時刻の差はどの程度だろうか。その時間差を考えることにする。この電車の長さを  $l$  とする。このとき、光源 A または光源 B からの電車の真中までの距離は、それぞれ  $l/2$  である。青い光についてまず考えると、青い光が電車の真中までに要する時間を  $t_{\text{青}}$  として、青い光の進む距離  $X_1$  を考えると、電車の速度が前の方向に  $V$  であることを考慮し、

$$X_1 = \frac{l}{2} - Vt_{\text{青}} \quad (23.1)$$

である。ところで、光速度不変の原理によって、光の速度は光源のもつ速度に関係ないので、

$$X_1 = ct_{\text{青}} \quad (23.2)$$

も成立しているはずである。従って、式 (23.1)、式 (23.2) から、

$$\begin{aligned} ct_{\text{青}} &= \frac{l}{2} - Vt_{\text{青}} \\ \Leftrightarrow ct_{\text{青}} + Vt_{\text{青}} &= \frac{l}{2} \\ \Leftrightarrow (c + V)t_{\text{青}} &= \frac{l}{2} \\ \Leftrightarrow t_{\text{青}} &= \frac{l}{2(c + V)} \end{aligned} \quad (23.3)$$

である。一方、赤い光についても同様に考えると、光の進行方向がお会い光と逆方向

なだけなので,

$$t_{\text{赤}} = \frac{l}{2(c - V)} \quad (23.4)$$

計算される。式(23.3)と式(23.4)を比較すると、 $l$ ,  $c$ ,  $V$ は全て定数であるから、 $t_{\text{赤}}$ が $t_{\text{青}}$ よりも大きいことがわかる。すなわち、赤い光が電車の真中に到達する時刻は青い光よりも遅れるということになる。どのくらい遅れるかといえば、

$$\begin{aligned} t_{\text{赤}} - t_{\text{青}} &= \frac{l}{2(c - V)} - \frac{l}{2(c + V)} \\ &= \frac{2l(c + V) - 2l(c - V)}{2(c - V) \times 2(c + V)} \\ &= \frac{2lc + 2lV - 2lc + 2lV}{4(c - V)(c + V)} \\ &= \frac{lV}{c^2 - V^2} \end{aligned} \quad (23.5)$$

である。

ここで最初の光の点灯時刻に関する仮定を思い起こすと、「光源の発光は電車内の観測者が同時刻に発光したと主張するように光源を発光させている」ということであった。これはつまり、

**主張1** ; 「電車内の観測者にとって、赤い光と青い光が同時刻に到達したと観測される」

ということである。しかし、電車外の人間から見れば、青い光が赤い光よりも先に電車の真中に到達していて、つまり、電車外の人間は、

**主張2** ; 「電車内の人間は同時刻に赤い光と青い光を観測していない」

と主張するのである。

主張1と主張2は明らかに矛盾している。これは、「電車内の人間の同時刻の発光」と「電車外の人間の同時刻の発光」が全く別の見方であるということを示唆する。そ

こで、同時刻の概念の考え方しが必要になるのである。この矛盾を解決するには次のように考えるとよい。

電車内の観測者が青い光と赤い光が同時に発光したと主張しているということは、電車内の人間にとって、青い光と赤い光が時間差なく届いたということである。この仮定を前提としたここでの考察で矛盾を生まないためには、電車外の静止した観測者にとって、青い光と赤い光の発光時刻は異なると考えるのである。すなわち、電車外の人にとっては、赤い光が先に点灯し、赤い光の点灯時刻より  $lV/(c^2 - V^2)$  の時間間隔の後に青い光が点灯しているように見えるのである。

電車内の観測者は青い光と赤い光は同時に点灯したと主張し、電車外の観測者は青い光と赤い光は異なった時刻に点灯していると主張する。観測者によって、その主張の内容が異なっているが、矛盾はしていない。この両者の主張の違いは、それぞれの属する慣性系が異なることに依るものである。今までの同時刻の概念は、慣性系に依らないものであった。しかし、光速度不变の原理を仮定している今、もはや従来の同時刻の概念は通用しないものであるということは、以上の確認ではつきりと分かった。つまり、同時刻の概念は慣性系によって異なるものであるということである。ある慣性系では同時刻に起こる現象が、別の慣性系では異なる時刻に起こっている現象であるということを認めねばならない。

### 23.1.2 ローレンツ変換式

**コメント** さて、以上で特殊相対性理論の基本原理を確認し終わった。特殊相対性理論の基礎原理とは、「特殊相対性原理」と「光速度不变の原理」の2つである。この2つの原理を用いて、ローレンツ変換式を導くことがここでの目的である。但し、ここで確認するローレンツ変換式は特殊な状況下に置かれた場合に限られている。一般の場合への拡張は後の項目で考える。ここでの目標は、ローレンツ変換式を直感的に捉えることである。

AINSHUTAINは、特殊相対性原理と光速度不变の原理から、ローレンツ変換式を求めることができることを示した。それにより、ローレンツ変換のときに考えた局所時や物体の収縮等の、物理的に奇妙な現象を用いなくても、ごく自然にローレンツ変換式を受け入れることが可能になる。つまり、物理的な矛盾を生むエーテルの存在を仮定しなくてもよいのである。従って、AINSHUTAINは、事実上、エーテルの存在を否定したものといってよいだろう。しかし、AINSHUTAINはエーテルの存在を直接否定するのではなく、あくまでも、“エーテルが存在しなくともよい”と主張するのである。エーテルの存在を完全に否定しているのではないことに注意した

い<sup>2)</sup>.

では、特殊相対性理論の2つの基本原理から、ローレンツ変換式を求めていくとしよう<sup>3)</sup>。まず、基準慣性系  $S$  を導入し、この基準慣性系  $S$  における立場で、現象を考える。系  $S$  に対して、 $x$  方向の正の向きへ速度  $v$  をもち、 $y$ ,  $z$  の2方向には速度をもたないような座標系  $S'$  を考える。すなわち基準系  $S$  に対して、系  $S'$  は相対速度  $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$  をもっているとする(図23.3)。さらに簡単のために、 $t = t' = 0$  のときに、基準系  $S$  と運動系  $S'$  の両方の原点  $O$ ,  $O'$  が一致するようにする。

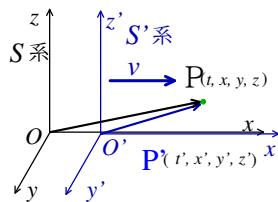


図 23.3 基準座標系  $S$  と  $S$  に対して速度をもつ座標系  $S'$  のイメージ

これから基準系  $S$  から見た系  $S'$  の座標を考えるわけだが、ここで1つの重要な仮定を設けたい。それは、座標変換は1次変換であるということである<sup>4)</sup>。ある点  $P$  を基準系  $S$  から見た座標を  $(ct, x, y, z)$  とし、この点  $P$  を運動系  $S'$  から見た座標を  $(ct', x', y', z')$  とする<sup>5)</sup>。このとき、 $S$  での座標と  $S'$  の座標は1次変換で結ばれているという仮定から、以下のような座標変換式を得る。

$$ct' = A_{00}ct + A_{01}x + A_{02}y + A_{03}z \quad (23.6)$$

<sup>2)</sup> 実は、エーテルとは“光子”という形で、再び、物理理論上に現れることになる。これについては、量子力学(場の量子論)の部分で確認したいと思う。

<sup>3)</sup> 但し、ここでのローレンツ変換式は、直感的イメージを第1に考えたいので、 $x$  軸方向だけに動く物体についての記述をする。従って、以下の議論はかなり特殊なローレンツ変換式だが、この一般論は、章を改めて、確認していくことにしたい。

<sup>4)</sup> このように仮定する理由は、基準系  $S$  から系  $S'$  見る場合と、その逆変換の系  $S'$  から  $S$  をみる場合で、その運動の法則が同じでなければならないからである。つまり、特殊相対性原理を満たさずような座標変換でないといけないのである。もし、2次変換であったならば、この特殊相対性原理を満たさないことは明らかである。(例えば、 $x' = x^2$  の逆変換は  $x = \sqrt{x'}$  であり、形が異なっている。)3次以上についても同様である。

<sup>5)</sup>  $ct$  について； 同時刻の項目で確認したように、時間  $t$  も座標系により違った値となる。従って、時間  $t$  も空間座標と同等に扱う必要がある。しかし、 $t$  のままでは次元が合わないので、光速  $c$  をかけて  $ct$  とし、これを4つめの座標とするのである。光速  $c$  は座標系に関係なく一定の値をとので、実質的に  $t$  だけを考えているのである。

$$x' = A_{10}ct + A_{11}x + A_{12}y + A_{13}z \quad (23.7)$$

$$y' = A_{20}ct + A_{21}x + A_{22}y + A_{23}z \quad (23.8)$$

$$z' = A_{30}ct + A_{31}x + A_{32}y + A_{33}z \quad (23.9)$$

ここで,  $A_{00}, A_{01} \dots$ などは, まだ決定されていない定数である. これから,  $A_{00}, A_{01} \dots$ を決定していこう.

まず, 簡単に求められるのは, 運動系  $S'$  は 静止系  $S$  に対する  $y, z$  方向には運動していない という仮定より,  $y = y', z = z'$  であるから, この 2 式の対応する係数を比較すれば,

$$A_{20} = A_{21} = A_{23} = A_{30} = A_{31} = A_{32} = 0 \quad (23.10)$$

であり, また,

$$A_{22} = A_{33} = 1 \quad (23.11)$$

である. さらに,

$$A_{02} = A_{03} = A_{12} = A_{13} = 1 \quad (23.12)$$

であることもわかる. これは, 特殊相対性原理によって要請されるものである. いうのも,  $A_{02}, A_{03}, A_{12}, A_{13}$  が全て 0 でないと, 逆変換<sup>6)</sup>したときに,  $x$  や  $t$  が  $y$  と  $z$  に依存してしまい, 特殊相対性原理に反してしまうのである.

これらによって, 随分と変換式がすっきりとした形になった. これを書いておこう.

$$ct' = A_{00}ct + A_{01}x \quad (23.13)$$

$$x' = A_{10}ct + A_{11}x \quad (23.14)$$

$$y' = y \quad (23.15)$$

$$z' = z \quad (23.16)$$

---

<sup>6)</sup> 系  $S'$  から見た 基準系  $S$  の座標のこと.

次に、残りの4つの係数( $A_{00}$ ,  $A_{01}$ ,  $A_{10}$ ,  $A_{20}$ )を求めていこう。運動系 $S'$ は、基準系 $S$ に対して、 $x$ 方向性の向きに速度 $v$ で運動している。従って、運動系 $S'$ から基準系 $S$ の原点 $O$ を見ると、その位置は

$$x' = -vt' \quad (23.17)$$

である。この式は、2つの式(23.13), 式(23.14)で、 $x = 0$ をそれぞれに代入した式

$$ct' = A_{00}ct \quad (23.18)$$

$$x' = A_{10}ct \quad (23.19)$$

と一致しているはずである<sup>7)</sup>。式(23.17)と式(23.19)から、

$$-vt' = A_{10}ct \Leftrightarrow ct = -\frac{vt'}{A_{10}}$$

であり、これを式(23.18)に代入すると、

$$\begin{aligned} ct' &= -A_{00}\frac{vt'}{A_{10}} \\ \Leftrightarrow A_{10}c &= -A_{00}v \\ \Leftrightarrow \frac{A_{10}}{A_{00}} &= -\frac{v}{c} \end{aligned} \quad (23.20)$$

である。

また、基準系 $S$ から運動系 $S'$ の原点 $O'$ を見ると、その位置は

$$x = vt \quad (23.21)$$

と書ける。この式(23.21)は、式(23.14)で、 $x' = 0$ とした場合に一致するはずある。つまり、まず式(23.14)から、

$$0 = A_{10}ct + A_{11}x \Leftrightarrow x = -\frac{A_{10}}{A_{11}}ct \quad (23.22)$$

であり、 $x = vt$ から、

$$vt = -\frac{A_{10}}{A_{11}}ct \Leftrightarrow \frac{A_{10}}{A_{11}} = -\frac{v}{c} \quad (23.23)$$

---

<sup>7)</sup> 原点の $x$ 座標は $x = 0$ である。

となる。

式 (23.20) と式 (23.23) から、両者の値は  $-(v/c)$  と等しく、

$$\frac{A_{10}}{A_{00}} = \frac{A_{10}}{A_{11}} \Leftrightarrow \frac{1}{A_{00}} = \frac{1}{A_{11}}$$

すなわち、 $A_{00} = A_{11}$  である。これを  $\gamma$  とおく。

$$\gamma := A_{00} = A_{11} \quad (23.24)$$

これらの計算により、

$$ct' = \gamma ct + A_{01}x \quad (23.25)$$

$$x' = A_{10}ct + \gamma x \quad (23.26)$$

である。 $y = y'$ ,  $z = z'$  は以後省略する。

残った  $A_{01}$ ,  $A_{10}$  を求めよう。それには、光速度不変の原理を利用する。光速度不変の原理とは、光速は、どのような速度で等速直線運動する座標から光の速度を測定しても、光の速さは座標の動く速度に関わらず、一定の値  $c$  を示すという原理である。つまり、

$$x = ct \quad (23.27)$$

$$x' = ct' \quad (23.28)$$

の 2 式が成立していることになる<sup>8)</sup>。

式 (23.27) を式 (23.25) と式 (23.26) に代入して、

$$ct' = \gamma ct + A_{01}ct = (\gamma + A_{01})ct \quad (23.29)$$

$$x' = A_{10}ct + \gamma ct = (A_{10} + \gamma)ct \quad (23.30)$$

また、式 (23.28) の  $x' = ct'$  をこの 2 式に考慮すれば、

$$\begin{aligned} (\gamma + A_{01})ct &= (A_{10} + \gamma)ct \\ \Leftrightarrow \gamma + A_{01} &= A_{10} + \gamma \end{aligned}$$

---

<sup>8)</sup> どちらの座標系でも、光速は同じ値  $c$  を示す。

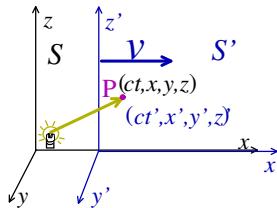


図 23.4 光の伝播

$$\therefore \gamma' := A_{01} = A_{10} \quad (23.31)$$

これまでの計算で、

$$ct' = \gamma ct + \gamma' x \quad (23.32)$$

$$x' = \gamma' ct + \gamma x \quad (23.33)$$

を得た。次に、 $\gamma$  と  $\gamma'$  の関係を調べる。

ところで、先ほど計算した式 (23.23) の  $A_{10}$ ,  $A_{11}$  は、それぞれ、 $\gamma$ ,  $\gamma'$  であるので、これは

$$\begin{aligned} \frac{\gamma'}{\gamma} &= -\frac{v}{c} \\ \therefore \gamma' &= -\gamma \frac{v}{c} \end{aligned} \quad (23.34)$$

である。これによって、運動系  $S'$  への変換式は次のような形になる。

$$ct' = \gamma ct - \gamma \frac{v}{c} x. \quad (23.35)$$

$$x' = -\gamma \frac{v}{c} ct + \gamma x. \quad (23.36)$$

後の式変形の関係で、式を簡単にすることはしなかった。

さて、変換式は  $S$  系に逆変換したときにも成り立たないといけない。二つの変換式が矛盾してはならない。そこで、 $ct'$ ,  $x'$  の式をそれぞれ  $ct$ ,  $x$  について解き、逆変換しても式の形が変わらないような  $\gamma$  の形を求めていこう。

$$ct' = \gamma ct - \gamma \frac{v}{c} x, \quad x' = -\gamma \frac{v}{c} ct + \gamma x$$

$$\gamma ct = ct' + \gamma \frac{v}{c} x, \quad \gamma x = x' + \gamma \frac{v}{c} ct$$

$x, ct$ について解くと,

$$ct = \frac{1}{\gamma} ct' + \frac{v}{c} x \quad (23.37)$$

$$x = \frac{1}{\gamma} x' + \frac{v}{c} ct \quad (23.38)$$

式(23.37)の  $x$  に式(23.38)を代入して,

$$\begin{aligned} ct &= \frac{1}{\gamma} ct' + \frac{v}{c} \left( \frac{1}{\gamma} x' + \frac{v}{c} ct \right) \\ \Leftrightarrow ct &= \frac{1}{\gamma} ct' + \frac{1}{\gamma} \frac{v}{c} x' + \left( \frac{v}{c} \right)^2 ct \\ \Leftrightarrow ct - \left( \frac{v}{c} \right)^2 ct &= \frac{1}{\gamma} ct' + \frac{1}{\gamma} \frac{v}{c} x' \\ \Leftrightarrow \left\{ 1 - \left( \frac{v}{c} \right)^2 \right\} ct &= \frac{1}{\gamma} ct' + \frac{1}{\gamma} \frac{v}{c} x' \end{aligned}$$

$$\therefore ct = \frac{1}{\gamma \{1 - (v/c)^2\}} ct' + \frac{v/c}{\gamma \{1 - (v/c)^2\}} x'. \quad (23.39)$$

同様に式(23.38)の  $ct$  に式(23.37)を代入して,

$$x = \frac{v/c}{\gamma \{1 - (v/c)^2\}} ct' + \frac{1}{\gamma \{1 - (v/c)^2\}} x'. \quad (23.40)$$

先ほども書いたように、この式は、変換前の式と式の形が一致していなければならない。ただし、座標変換した場合、速度の方向は逆方向に見えるはずであり、 $S$  座標系から見た相対速度  $v$  は  $S'$  座標系から見れば、 $-v$  とならないとおかしい。従って、上の  $ct$  の式と  $x$  の式の 2 式と比較すべき式は変換前の  $ct'$  と  $x'$  の式の  $v$  を、 $-v$  で置き換えた

$$ct = \gamma ct' + \gamma \frac{v}{c} x'. \quad (23.41)$$

$$x = \gamma \frac{v}{c} ct' + \gamma x'. \quad (23.42)$$

である。式(23.39)と式(23.41)が対応していて、式(23.40)と式(23.42)が対応する。この対応から、 $\gamma$ を求めていこう。両対応ともに、 $\gamma$ は以下の式を満たしていればよい。

$$\gamma = \frac{1}{\gamma \{1 - (v/c)^2\}}. \quad (23.43)$$

計算して  $\gamma$  について解けば、

$$\gamma = \frac{1}{\gamma \{1 - (v/c)^2\}} \Leftrightarrow \gamma^2 = \frac{1}{1 - (v/c)^2}$$

$$\therefore \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \quad (23.44)$$

この  $\gamma$  を式(23.35)、式(23.36)に代入すれば、求めたかった変換式を得ることができる。すなわち、

$x$  軸方向に運動する系のローレンツ変換式

$$ct' = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} ct - \frac{v/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} x \quad (23.45)$$

$$x' = -\frac{v/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} ct + \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} x \quad (23.46)$$

$$y' = y \quad (23.47)$$

$$z' = z \quad (23.48)$$

である。この逆変換式<sup>9)</sup>は

<sup>9)</sup> 逆変換式とは、座標系が入れ替わった場合の式である。逆変換式の導き方は、変数を機械的に入れ替えて、速度を  $-v$  に置き換えることである。

逆変換した式

$$ct = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} ct' + \frac{v/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} x' \quad (23.49)$$

$$x = \frac{v/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} ct' + \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} x' \quad (23.50)$$

$$y = y' \quad (23.51)$$

$$z = z' \quad (23.52)$$

である。

また、式の表現を簡単にするために、 $\beta = v/c$  とおくことで、

$$\beta = \frac{v}{c} \quad (23.53)$$

$$ct' = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} ct - \frac{v/c}{\sqrt{1 - \beta^2}} x \quad (23.54)$$

$$x' = -\frac{v/c}{\sqrt{1 - \beta^2}} ct + \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} x \quad (23.55)$$

$$y' = y \quad (23.56)$$

$$z' = z \quad (23.57)$$

と書かれることがある。

### 23.1.3 ローレンツ因子

上で得たローレンツ変換式の

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}.$$

を ローレンツ因子 とよぶ。教科書によっては、このように特別に名前をつけていないものもある。しかし、このノートでは、今後の説明のために、ローレンツ因子とよぶことにしよう<sup>10)</sup>。

ローレンツ因子  $\gamma$  を用いると、ローレンツ変換式は次のようになる。

ローレンツ変換式 ( $x$  軸方向,  $\gamma$  で記述を圧縮) —————

$$ct' = \gamma ct - \gamma \frac{v}{c} x \quad (23.58)$$

$$x' = -\gamma \frac{v}{c} ct + \gamma x \quad (23.59)$$

$$y' = y \quad (23.60)$$

$$z' = z \quad (23.61)$$

記号の対象性を残しておくため、 $x'$  の第一項の  $c$  は残しておいたほうがいい。

更に、名も無き因子  $\beta$  (言うなら、光速に対する物体の速度比) をつかうと、

ローレンツ変換式 ( $x$  軸方向,  $\gamma$  と  $\beta$  で記述を圧縮) —————

$$ct' = \gamma ct - \gamma \beta x$$

$$x' = -\gamma \beta ct + \gamma x$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

となる。

#### 23.1.4 方程式の変数

上では、ローレンツ変換式の特別な場合 ( $x$  軸方向に運動する系のみ) における式を導出した。この式の変数について少し考えておこう。これら 4 つの式の変数は  $t$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  である。しかし、このうちの  $t$  は時間を表わし、他の空間を表す  $x$ ,  $y$ ,  $z$  とは次元が異なっていて、同時に扱いづらい。そこで、時間  $t$  に光速  $c$  をかけて  $ct$  として、空間の次元をもたせることで、他の空間的な変数と同時に扱うことにす

<sup>10)</sup> ローレンツ因子は一般的に使われる用語である。私の造語ではない。

る。すなわち、

式の変数は  $ct, x, y, z$

である。光速  $c$  の次元は [m/s]、時間の次元は書くまでもないが [s] であるので、 $ct$  の次元は [(m/s)×s]=[m] であり、空間的な変数  $x, y, z$  と同じ次元で扱うことが可能になる。

### 23.1.5 ローレンツ変換とガリレイ変換

当然のことながら、ローレンツ変換式はどのような速度で運動する系に対しても成立していかなければならない。従って、運動座標系の速度が、光速に対して、十分に小さい場合にも成り立っていないといけない。つまり、光速に対して十分に小さい場合には、ガリレイ変換が成立していることが必要なのである。ローレンツ変換式が、ガリレイ変換式を特別な場合（速度が十分に小さい）において含んでいるかどうかを確認する必要がある。運動座標系の速度が、光速に対して十分に小さいという条件を表す式は、 $v \ll c$  である。

コメント 以下の確認に必要な近似式を書き下しておこう。 $\alpha \ll 1$  の場合、

$$(1 + \alpha)^n \simeq 1 + n\alpha$$

が成立する。

まず、時間  $ct$  について考える。時間に関するローレンツ変換式は

$$ct' = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} ct - \frac{v/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} x$$

であった。この式を近似式が適用しやすい形に書き換える。

$$ct' = \left\{ 1 - \left( \frac{v}{c} \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} ct - \frac{v}{c} \left\{ 1 - \left( \frac{v}{c} \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} x.$$

この式の括弧中の式にたいして、近似式を適用する。

$$\begin{aligned} ct' &\simeq \frac{1}{2} \left( \frac{v}{c} \right)^2 ct - \frac{v}{c} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{v}{c} \right)^2 \right\} x \\ &= ct + \frac{1}{2} \left( \frac{v}{c} \right)^2 ct - \frac{v}{c} x - \frac{1}{2} \left( \frac{v}{c} \right)^3 x \end{aligned}$$

運動座標系の速度  $v$  が、光速  $c$  に対して十分に小さいとき、 $v \ll c$  であるので、

$$\frac{v}{c} \longrightarrow 0$$

として、

$$ct' = ct \quad \therefore t' = t$$

を得る。これはガリレイ変換式と一致する。逆変換に関しても同様に成り立つことを示せる。よって、時間  $t$  に関して、ローレンツ変換はガリレイ変換と矛盾しないことが分かった。

次に、 $x$  について考える。 $x$  も  $ct$  の場合と同様に考えられる。 $x$  に関するローレンツ変換式は

$$x' = -\frac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}}ct + \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}x$$

であった。近似式を適用しやすいうように書き換えると、

$$x' = -\frac{v}{c} \left\{ 1 - \left( \frac{v}{c} \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} ct + \left\{ 1 - \left( \frac{v}{c} \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} x$$

近似式を適用して、

$$\begin{aligned} x' &\simeq -\frac{v}{c} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{v}{c} \right)^2 \right\} ct + \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{v}{c} \right)^2 \right\} x \\ &= -vt - \frac{1}{2} \left( \frac{v}{c} \right)^3 ct + x + \frac{1}{2} \left( \frac{v}{c} \right)^2 x \end{aligned}$$

運動座標系の速度  $v$  が、光速  $c$  に対して十分に小さいとき、 $v \ll c$  であるので、

$$\frac{v}{c} \longrightarrow 0$$

として、

$$x' = -vt + x$$

を得る。これはガリレイ変換に一致する。逆変換に関しても、同様に一致することを示せる。よって、空間座標  $x$  に対して、ローレンツ変換はガリレイ変換に矛盾しないことが確認できた。

以上のように、ガリレイ変換はローレンツ変換の特殊な場合に含まれる。今まで、ガリレイ変換しか実感できなかつたのは、対象の物体の速度が、光速に比べて非常に

小さかったからである。光速不変の原理から、ガリレイ変換は成り立たないと思われたが、実際はむしろその逆で、ガリレイ変換を包括する形で、ローレンツ変換に拡張された。従って、ガリレイ変換という考え方には間違っているわけではない。ただ、光速に比べて非常にゆっくりとした物体の速度という、特殊な場合を見ていただけだったのである。

### 23.1.6 棒の長さの収縮

異なる速度で運動する 2 つの慣性系  $S$  系,  $S'$  系を考える。ニュートン力学で物体の大きさを考えるとき、どのような慣性系からその物体の大きさを測定しても、全く同じ大きさを得ることができる。しかし、ローレンツ変換に従う特殊相対性理論によれば、物体の大きさは慣性系によって違った値をとることが結論される。

例えば、 $x$  軸上に、軸に平行に置かれた長さ  $l$  の棒を考えてみよう。この棒は、 $S$  系に対して静止しているものとする。従って、この棒の長さを  $S$  系で測定したとき、 $l$  を得る。しかし、この棒を  $S$  系に対して運動する  $S'$  系で、その長さを測定したとき、どのような長さになるだろうか。これを調べるには、ローレンツ変換式を用いるといい。ニュートン力学におけるガリレイ変換に従うのであれば、棒の長さは、どのような速度で運動する系から見ても、同じ大きさを示す。しかし、光速度不変の原理によれば、光速に近い速度ではもはやガリレイ変換は成り立たず、それはローレンツ変換式を考慮しなければならない。

考察を簡単にするために、 $S$  系と  $S'$  系が同軸 ( $x$ ,  $x'$  軸上) で等速運動している状態を考える。さらに、 $S$  系と  $S'$  系は、時刻  $t = t' = 0$  でそれぞれの原点  $O$ ,  $O'$  が重なるとする。そして、棒の長さの測定を  $t = t' = 0$  の時刻に行うことにする。測定する棒は  $x$  軸方向に伸びているから、その両端も  $x$  軸上にある。この棒の両端の座標を  $x_1$ ,  $x_2$  としよう。ただし、 $x_2 > x_1$  であるとする。このとき棒の長さ  $l$  は、 $l = x_2 - x_1$  と表現できる。棒の長さを測定するということは、棒の両端の座標  $x_1$  と  $x_2$  を“同時に”測定することである。棒に対して静止している系から、この棒の長さを測定するともちろん、 $l$  である。しかし、棒に対して光速に近い速度で等速直線運動している系から測定すると、これは  $l$  よりも小さい値を示すことになる。

今回は、静止している棒の長さを、運動している座標系から測定するので、上で導出したローレンツ変換式の逆変換の式を適用することになる。 $x$  に関するローレンツ変換式に今回の仮定 ( $t = t' = 0$ ) を代入して、

$$x = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} x' \quad (23.62)$$

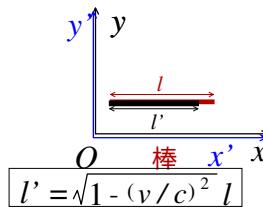


図 23.5 異なる 2 つの系から、棒の長さを測定する

とする。この式から、 $S'$  系から見た  $x_1, x_2$  の座標を計算できて、

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} x'_1, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} x'_2$$

となる。 $S'$  系から見た棒の長さ  $l'$  は  $l' = x'_2 - x'_1$  であるので、両辺の差をとって

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} x'_2 - \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} x'_1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} (x'_2 - x'_1) \end{aligned}$$

である。そして、 $l = x_2 - x_1, l' = x'_2 - x'_1$  から

$$l = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} l'.$$

よって、

棒の長さの収縮

$$l' = l \sqrt{1 - (v/c)^2} \quad (23.63)$$

を得る。この式から、物体の長さを、光速に近い速度で運動している系から測定すると、静止している系から測定する場合に比べて、 $\sqrt{1 - (v/c)^2}$  の長さに変化することがわかる。 $v$  の大きさは光速よりも小さいと考えたとき<sup>11)</sup>、 $\sqrt{1 - (v/c)^2}$  は常に  $0 < \sqrt{1 - (v/c)^2} < 1$  の範囲の値をとる。従って、運動系から見ると、棒の長さは短くなることが結論できる。

<sup>11)</sup> 運動座標系の速度  $v$  が光速  $c$  を越えられないことについては後で確認することである。

## # memo No.91: 座標の収縮

棒の長さが収縮するということを確認したときに、棒の長さ  $l$  とは、その両端の  $x$  座標である  $x_1, x_2$  の差  $x_2 - x_1$  であるとした。つまり、

$$l = x_2 - x_1$$

である。そして、静止している座標系から、運動する棒の長さを測定すると、その棒の長さは、静止している座標系で測るよりも  $\sqrt{1 - (v/c)^2}$  倍だけ短く見えることを確認した。確かに、棒は収縮して見えるが、棒そのものが収縮しているわけではない。棒の長さは、その両端の座標の差なので、つまり、座標の間隔が収縮しているということになる。棒が収縮したように見える原因是、座標が収縮したように観測されるからである。

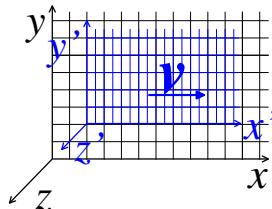


図 23.6 運動方向 ( $x$  軸方向) の座標間隔が収縮して見える

物体の収縮が観測される原因是、この空間の収縮によるものである。実際に観測者が収縮している慣性系にいたとしても、その収縮を感じ取ることはできない。観測者自身も座標の収縮により同じように縮んでしまうからだ。自身の収縮を測ることは原理的に不可能である。別の慣性系にいる観測者が、自分に対し「お前は収縮している」と言っていても、自分はその収縮を観測することは絶対に不可能である<sup>12)</sup>。

## # memo No.92: 例

例えば、 $S'$  系が光速の 0.8 倍の速度で運動している場合を考えてみると、 $v = 0.8c$  を代入して、

$$\begin{aligned} l' &= \sqrt{1 - (0.8c/c)^2} l \\ &= \sqrt{1 - 0.8^2} l \\ &= \sqrt{0.36} l \\ &= 0.6 l. \end{aligned}$$

<sup>12)</sup> 更に言うなら、自分はその別の慣性系の観測者が収縮していることを観測する。

この場合、棒の長さは、0.6倍に短くなっていることになる。

### 23.1.7 運動する時計の、時間の遅れ

異なる速度で運動している2つの系  $S$ ,  $S'$  に、それぞれ時計を置く。このとき、一方の座標系から見た、他方の時計の進み具合を、自身の時計の進み具合と比較することを考える。ここでは、 $S$  系の時計から見た、 $S'$  系の時計の進み具合を考える。同時刻の概念が成り立たなくなったことを確認したことから、これら2つの時計の進み具合が一致しないことは想像がつくだろう。ここでそれを確認しておこう。

考察を簡単にするために、いくつかの仮定をおこう。まず、座標系の運動は一方向で、これを  $x$  軸方向にとる。また、両座標系の  $x$  軸、 $x'$  軸は、同じ直線上にあるとする。さらに、2つの座標系は時刻  $t = t' = 0$  に原点が一致するものとする。各時計は、それぞれの座標原点に置かれているものとする。時刻の進み具合を比較するために、時刻  $t = t' = 0$  には2つの時計は同じ時刻（例えば12時など）を指し示しているとしよう。

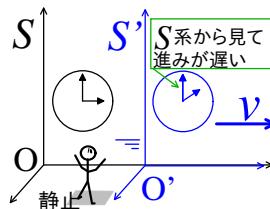


図 23.7 時間の遅れ

さて、今この瞬間に両座標系の原点が一致し、異なる速度で  $x$  方向を運動し始めた。 $S$  系ある時計を基準として、 $S'$  系の時計の進み具合を観測しよう。 $S$  系から見て、時間  $t$  が経過したとき、 $S'$  系にある時計の指す時刻を測ればよい。 $S$  の時計が時刻  $t$  を示したとき、 $S'$  系の時計の位置は、 $x = vt$  である。これをローレンツ変換式に代入すると、

$$ct' = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}ct - \frac{v/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}x$$

$$ct' = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}ct - \frac{v/c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}vt$$

$$\Leftrightarrow t' = \left( \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - \frac{(v/c)^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \right) t \\ = \frac{1 - (v/c)^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} t$$

よって、

運動する系の時間の遅れ

$$\therefore t' = t \sqrt{1 - (v/c)^2} \quad (23.64)$$

この式から、静止している系から、運動している系の時間を測定しようとすると、静止している系の時間の進む速さよりも、運動している系の時間の進みの方がゆっくりであるように観測されることがわかる。

### 23.1.8 複数の時計の、時刻の合わせ方

同じ座標系において、2つの時計があるとしよう。この2つの時計の性能は全く同じであるとする。従って、時計の進み具合も全く同じである。同一の座標系であっても、座標の各点における時刻が同一でないと、議論ができない。従って、同一座標系の各店の時刻は、全て同じ時刻を指していかなければならない。全ての時刻を合わせる最初の手順として、2つの点の時刻を合わせて、この2つの点の時刻と、また別の時刻の点を合わせて、というような方法をとろう。では、2つの時計の間の距離が大きいとき、この二つの時計の時刻を合わせるにはどうしたらよいだろうか。一方の時計を、他方に近づけてしまうと、動かした時計は時間の進みが遅くなり、時間を合わせられたとしても、元の位置に戻した時には時間はあっていなくなる。どうにかして、時計の位置を変化させることなく、離れた2つの時計の時刻を合わせたい。AIN シュタインは次のように時刻を合わせることを提案した。

時刻を合わせるために、光を利用する。一方の時計のある点を A、他方を B としよう。まず、点 A の時刻 ( $t_0$  としよう) を測ると同時に、点 A から点 B に向けて光を発信する。光の速さは、光速度不变の原理から、常に一定の値  $c$  をとる。すると、光は点 B に届くはずである。点 B に光が届いた瞬間 ( $t_1$  としよう) を記録すると同時に、

点Bからもう一度点Aに向けて光を返信する。そして、点Aに光が戻ってきたときの時刻( $t_2$ としよう)を記録する。点Aと点Bの時計の指す時刻が同じであるとき、

$$t_1 - t_0 = t_2 - t_1 \quad (23.65)$$

が成立しているはずである。また逆に、この式(23.65)が成り立っていれば、2点のそれぞれの時計は同じ時刻を指しているとする。

さて、点Aと点Bの間の距離を $\|AB\|$ と表わせば、以下の式が成立している。

$$\frac{2\|AB\|}{t_2 - t_0} = c. \quad (23.66)$$

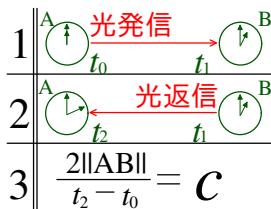


図 23.8 時刻合わせ

### 23.1.9 速度の合成

光速 $c$ で動く光源から光を発したら、その速度静止系に対して $2c$ を示すだろうか。もし $2c$ が成り立ってしまったら、光速度不变の原理を満たさなくなってしまう。実際計算してみると、値はどのような速度で運動している座標系で見ても光速は $c$ である。これは光速度不变の原理を仮定しているからあたりまえのことであると考えられるが、ここではローレンツ変換公式から、光速度不变の原理と矛盾していないかを確認する。

考察を簡単にするために以下のような条件の下で考える。まず、運動の方向を $x$ 軸方向とする。つまり、座標系・物体は $x$ 軸に平行に運動するものとする。速度 $v$ で運動する座標系から観測して、速度 $u'$ で動く物体を考える。

目標は、静止している座標系から見た物体の速度 $u$ を知ることである。これは一気に求めることができないので、順を追って考える。まず、速度 $v$ 運動している座標

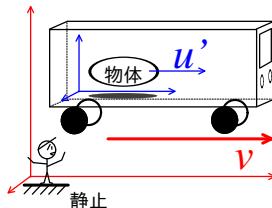


図 23.9 速度の合成

系から見た物体の速度  $u'$  は、

$$u' = \frac{dx'}{dt'} \quad (23.67)$$

である。ここに、 $x'$ 、 $t'$  は運動座標系の座標変数を表す。さて、求めたいのは、静止系から見た物体の速度  $u$  であり、これは

$$u = \frac{dx}{dt}$$

である。これは、次のように計算できる。 $x$  はローレンツ変換式で  $t'$  の関数と見ることができる ( $x = x(t')$ )。さらに、 $t'$  は、同様に、ローレンツ変換式から  $t$  の関数と見ることができる ( $t' = t'(t)$ )。以上から  $x$  は、合成関数  $x = x(t'(t))$  とみなせる。従って、合成関数の微分法を用いることで、 $u$  を計算できる。

$$u = \frac{dx}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \frac{dx}{dt'} \Big/ \frac{dt}{dt'} \quad (23.68)$$

さて、 $dx/dt'$  から計算していこう。

$$x = \frac{v/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} ct' + \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} x'$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt'} &= \frac{v/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} c + \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \frac{dx'}{dt'} \\ &= \frac{v}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} + \frac{u'}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{dx}{dt'} = \frac{v + u'}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (23.69)$$

次に、 $dt'/dt$  を計算する。

$$\begin{aligned}
 ct &= \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}ct' + \frac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}}x'\frac{dt'}{dt} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} + \frac{v/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\frac{dx'}{dt'} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} + \frac{u'v/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \\
 \therefore \frac{dt'}{dt} &= \frac{1+u'v/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}
 \end{aligned} \tag{23.70}$$

以上から、

$$u = \frac{dx}{dt'} \Big/ \frac{dt}{dt'} = \frac{v+u'}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \Big/ \frac{1+u'v/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

従って、

### 速度の合成

$$u = \frac{v+u'}{1+u'v/c^2} \tag{23.71}$$

$u$  は静止した座標系から観測した物体の速度であり、 $v$  は運動する座標系の速度であり、 $u'$  は速度  $v$  で運動する座標系から観測した物体の速度である。

を得る。

#### # memo No.93: 例 1

運動座標系の速度が光速の 0.8 倍であるとき、この運動座標系に対して光速の 0.4 倍の速度で運動する物体を考える。この物体を静止している座標系から眺めたとき、物体の速度はどの程度かを計算する。これは上式に直接代入すればよい。運動座標系の速度  $v$  は光速の 0.8 倍であるから、 $v = 0.8c$  である。また、物体の運動座標系に対する速度  $u'$  は光速の 0.4 倍だから  $0.4c$  である。従って、

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{v+u'}{1+u'v/c^2} = \frac{0.8c+0.4c}{1+0.4c \times 0.8c/c^2} \\
 &= \frac{1.2c}{1.32} = 0.909c.
 \end{aligned}$$

$$\therefore u = 0.91c.$$

従って、静止している座標系から物体の速度を測定すると、光速の 0.91 倍の速度である。

この速度の合成式には、「物体の速さは光速  $c$  を越えることは無い」ということを暗示する。

#### # memo No.94: 例 2

光速で運動している座標系から光を発すると、静止座標系から見て光の速度は  $c + c = 2c$  となってしまうのではないか。もしそうなれば、光速度不変の原理は成り立たなくなってしまう。どうなるかを確認しておこう。

$$u = \frac{v + u'}{1 + u'v/c^2} = \frac{c + c}{1 + c \times c/c^2} = \frac{2c}{2} = c.$$

$$\therefore u = c.$$

従って、静止している座標系において、運動する座標系から発した光の速度を測定しても、その値は  $c$  であることがわかる。これは、光速度不変の原理に矛盾しない。

### 23.1.10 相対性

相対性理論を学習するとき、「長さの収縮」、「時間の遅れ」など誤解を招きやすい表現が多用される。

例えば、二人の観測者 A, B が互いに相対速度をもっていて、両者共に相手の進行方向の長さを比較するとしよう。観測者 A が、観測者 B の進行方向の長さを測ったとき、相対速度が 0 のときに比べてその長さは小さくなる。このときに他方の観測者 B の立場から考えれば、観測者 A が収縮していることになる。両者共に、自分自身との相対速度は 0 だから、自分の収縮は観測されない。また、時間についても同じことが言える。両者の立場で共に、相手の時間の進み具合は、自分の時間の進み具合に比べて、ゆっくりであると観測される。

たしかに、「収縮・遅延」という語を、普段の生活で使う言葉の意味として考えてしまうと、観測者 A と B の主張は、互いに矛盾している。しかし、相対性理論を考える場合には、「収縮・遅延」という語は、このような意味で使っているのではない。本当に収縮あるいは遅延している訳ではない。観測者とは別の速度で運動している慣性系を観測すると、収縮あるいは遅延しているように見えるのである。

もう少し詳しく考えてみよう。ここで問題としているのは、観測者とは異なる速度で運動している物体の長さや時間である。物体の「長さ」は、観測者がその長さを測ることで知ることができる。“長さを測る”とはどういうことか。アインシュタインは長さの測定方法として、2つの提案をしている。

方法1) 自分と同じ慣性系にある定規を観測対象に直接くっつけて、長さを特定する方法

方法2) もう一つは、空間に座標を設けて、物体の両端の座標を“同時に”特定する方法

物体の両端の位置を同時に把握するという意味で、方法1も方法2も本質的には同じ行為である。ここでは多くの教科書で説明のある、方法2に着目してみる。方法2は座標を設けて、物体の両端の座標を“同時に”捕える方法である。これまで見てきたように、“同時”という事実は、観測者ごとに異なる。観測者Aが物体の両端を“同時”に測定したとしても、それを別の観測者Bが見たときに“同時”に測定していないことになる。物体の両端の座標を“同時”に測定していないとすれば、長さを測れていないことになる。観測者Aは間違いなく同時に両端の位置を測定しているのにもかかわらず、その観測者Aの行動を別の慣性系にいる観測者Bが見ると両端の位置をそれぞれ別の時刻に観測しているのである。

どう考えても矛盾だと考えがちだが、これはよく考えれば矛盾ではない。物体の両端を同時に測定するということは、両端の位置を同時に見るということだ。ものを見るということは、ものから発光あるいは反射される光をとらえる必要がある。物体の長さを測るには、物体の両端からくる光を同時に見ることと同じだ。しかし、光の速度は一定<sup>13)</sup>だから、観測者との距離により、光の届く時刻はずれる<sup>14)</sup>。観測者AとBは異なる慣性系にいるので、物体との距離も異なる。要するに、物体から発せられた光が観測者AとBに届く時刻は同時ではない。だから、観測者Aにとって同時でも、観測者Bにはずれて見える、ということが起こる。

観測は観測者が主観的に行うものである。仮に、この観測者Aと観測者Bの両者を観測する観測者Cが存在しても、矛盾は起きない。観測者Cに対して同時に起る現象は、観測者Aとも観測者Bとも異なるのだ。複数の異なる慣性系で同時に測定することは原理的に不可能なのである。

ニュートン物理学では、物体の長さや時間の進み具合は、どの観測者でも全く同じであると考えてきた。そういう感覚があると、相対性理論で提示される棒の収縮や時間の遅れという現象に、矛盾があるように感じてしまう。しかし、これはあくまでも

<sup>13)</sup> どんな速度で運動していようと、光の進む速さ（光速）は常に一定である。これは特殊相対性理論の根本原理であり、光速不変の法則と呼ばれる。光速普遍のはマクスウェル方程式から暗示されるが、別の原理から導かれるものではなく、その原因はわからない。しかし、マイケルソンとモーリーの実験に代表されるように、この光速不変の原理は実験的に実証されている現象である。

<sup>14)</sup> 光源との距離が大きいほど、光の到達時間は大きくなる。

矛盾しているような気がするだけであって、実際に矛盾しているのではない。物体の収縮や時間の遅れという現象は、特殊相対性原理と光速不变の原理から、論理とまた数学により、必然的に導かれる結果である。特殊相対性理論は、物体の長さや時間の進み具合が、観測者と物体の相対速度に依存することを示したのである。考え方を改めないとならない。自分はあくまでも一人の観測者である。別の慣性系にいる観測者の観測結果と自分の観測結果が異なっていても、矛盾ではない。なぜなら、別の観測者と観測対象の相対速度と、自分と観測対象の相対速度が違うから、異なる結果になるのだから。

### 23.1.11 光のドップラー効果

### 23.1.12 アインシュタインの理論と、他の物理学者の理論

Poincaré 等の多くの物理学者が、光速度不变の問題を解決しようと、数学的に特殊相対性理論と同等な理論を、発表しているようである。しかし、これらの理論は、なぜエーテルが実験的に見つからないかを説明しようとするものであったり、エーテルの存在を仮定しているものである等、根本的な解決にはならなかったようである。これに対して、アインシュタインは、大胆にも、絶対静止系を捨てる、つまり、エーテルなんてものは、はじめからなかったのだ、と宣言し、理論を組み立てた。物理的に最も納得のできる方法で説明したのが、アインシュタインである。しかも、前提となる仮定は特殊相対性原理と光速度不变の原理の 2 つだけで。



# 24

## 特殊相対論的力学

**コメント** 以上で、主要な特殊相対論的現象を考えてきた。光速不変の原理を仮定すると、不思議で納得しかねる現象をが現れる。こうなると、物体の運動法則である、ニュートン力学も少しばかり変更する必要がある。ニュートン力学には光速不変の原理を採用し、特殊相対性理論と矛盾しないように、書き換えていこう<sup>1)</sup>。

### 24.1 目標

これから目標を、簡単に記述しておこう。特殊相対性理論は、アインシュタインの最初の論文でほとんど完成している。これから特殊相対性理論を数学的にスマートになるように記述するが、これを考え出したのはアインシュタインではなく、ミンコフスキ<sup>2)</sup>である。アインシュタインの説明では、時間と  $t$  と位置座標  $\mathbf{r}$  は互いに

<sup>1)</sup> ここから、だんだんと特殊相対性理論の核心に迫っていく。目標を、特殊相対性理論を共変形式（ここではそういう形式があると思ってもらえばそれでよい）で表すことにしてよう。この章はそのための、前段階的準備を行い、次章で共変形式について考えていく。

<sup>2)</sup> Hermannn Minkowski(1864–1909, ロシア) 数学者。チューリッヒ工科大学（スイス連邦工科大学）の教授。アインシュタインはこの教授の講義を受けていたらしい。詳しくは、アインシュタインの伝記を読もう。

密接な関係があることを示しながらも、その数学的表现は区別されていた。今日のいわゆる“時空”という考え方があったものの、数学的表現はなされていなかった。時空という概念を数学的に表現したのがミンコフスキーである。ミンコフスキーは時間  $t$  と位置座標  $\mathbf{r}$  を同じ次元として考えることで、特殊相対性理論が数学的に綺麗な形で表現できる事を示した。そのような経緯から、“時空”的ことを、しばしば、ミンコフスキースペースとすることがある。このノートでは、ミンコフスキースペースという言葉を用いることにする。

すこし先走って、ミンコフスキースペースについて記述しよう。ミンコフスキースペースとは、空間の3つの次元と時間の1次元を一括して考え、3+1次元として創られた新しい座標系である<sup>3)</sup>。ただし、時間はそのままでは空間の次元と一致しないので、時間  $t$  に光速  $c$  をかけて空間と同じ次元にし<sup>4)</sup>、 $(ct, x, y, z)$  とされる。ミンコフスキースペースは4次元空間なので、図に描くことはできない<sup>5)</sup>。描くことができるのは、2次元のみである<sup>6)</sup>。しかし、空間はどれも同等であり、そのうちの2次元を取り上げて描けばよい。そこで、図で表現したいときには、時間  $ct$  と空間  $x$  を取り上げて描く事が多い。縦軸に時間  $ct$ 、横軸に  $x$  をとして描く。このミンコフスキースペースを表現する図と、ニュートン力学の  $x - t$  は別物なので、気をつけよう。

## 24.2 ローレンツ変換式の行列表示

イメージを簡単にするため、 $x$  方向のローレンツ変換を考える。<sup>7)</sup>  $x$  方向のローレンツ変換は以下のようであった。

$$\begin{aligned} ct' &= \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}ct - \frac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}}x \\ x' &= -\frac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}}ct + \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}x \end{aligned}$$

<sup>3)</sup> 3+1次元と表現したのは、実は、時間と空間の次元が全く同等に扱われているわけではないからである。とはいっても、この表現は煩わしいので4次元と表現することにしよう

<sup>4)</sup>  $c[\text{m}/\text{s}] \times t[\text{s}] = ct[\text{m}]$

<sup>5)</sup> 3次元空間も、図で表現することは無理であった。紙は2次元だからだ。しかし、目の錯覚を利用して、2次元空間に3次元空間を描く事はできた。3次元は、実際に目で見て、肌で触れて感じている事なので、このことが可能であった。もしかしたら、4次元空間も3次元空間に描く事ができるのも知れなが、生憎(あいにく)、2次元の紙表面に描く事はできない。

<sup>6)</sup> 1次元ずらも描く事はできない。ペンの線には“太さ”があるからだ。

<sup>7)</sup> もちろん、3方向の変換を考えてもよいが、イメージと式が複雑になるだけで、メリットは少ない。1方向に慣れてきたら、3方向の場合の式の導出をしてみればよいだろう。

$$y' = y$$

$$z' = z$$

これは、ローレンツ因子  $\gamma := 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$  を使うと次のようになる。

$$ct' = \gamma ct - \gamma \frac{v}{c} x$$

$$x' = -\gamma \frac{v}{c} ct + \gamma x$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

さらに、 $\beta := v/c$  を使うと次のようになる。

$$ct' = \gamma ct - \gamma \beta x$$

$$x' = -\gamma \beta ct + \gamma x$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

行列の形に書き換えると、次のようになる。

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

これで十分なんだが、

$$\Lambda := \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (24.1)$$

$$X := \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad X' := \begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, \quad (24.2)$$

$$\beta := v/c, \quad \gamma := 1/\sqrt{1 - (v/c)^2} \quad (24.3)$$

としてみると、

$$X' = \Lambda X$$

という単純な形式になっていることが見て取りやすくなる。1つの式になったという感じがする<sup>8)</sup>。実は、行列の成分で式を書くことが一般的である。節を改めて、成分で表示してみよう。その前に、世界間隔と固有時間について触れておきたい。ローレンツ変換と密接に関係のある概念だからだ。

## 24.3 時空座標の導入

### 24.3.1 時空座標の次元 ( $ct$ の導入)

ローレンツ変換は時間と空間が絡み合った変換であることが、先の計算でわかつた。また、行列表示によって、1つの式としてまとめられることもわかっている。そうであれば、時間と空間をまとめて、1つの時空座標として扱うべきだ。ということで、時間座標と空間座標を1つの4次元のベクトルとして、書き表そう。時間と空間を区別する必要はあるのだが、1つの数式にまとめたい。また、時間と空間は同等である表現できるとよい。そこで、時間座標と空間座標で同じ文字で表現することにして、 $x$ という文字を割り当てよう。いまここで使う $x$ は、空間座標の $x$ 座標ではない。全く新しい概念としての座標記号である<sup>9)</sup>。1つのベクトルに組み上げるのだが、その要素の次元(単位)は揃えておきたい。そうしないと、計算時に時間成分だけ特別扱いが必要になるからだ。時間成分  $t[\text{s}]$  を空間成分の距離  $x[\text{m}]$  になるように、調整してやると良い。それには光速  $c[\text{m/s}]$  という都合の良い次元をもった、しかも定数がある。時間  $t$  に光速  $c$  をかけて、 $ct$  とすることで、次元を [m] にできる。

$$c[\text{m/s}] * t[\text{s}] = ct[\text{m}].$$

<sup>8)</sup> 実際、感じがするだけだ。その中身は4つの連立方程式である。悪く言えば、行列を用いて4つの式を無理やり1つに詰め込んだ、といえよう。よく言うならば、行列の論理で整理することによって、4つのバラバラの式を1つの式にまとめ上げた、ともいえる。主観次第だ。

<sup>9)</sup> だったら、 $x$ なんて紛らわしいことしないで、別の文字を使えばいいではないかと思う。でも、相対性理論の教科書はことごとく、 $x$ が使われている。意味は違えど、 $x$ とかいたら、空間をイメージしてしまうことに由来するのだろうか。

### 24.3.2 時空座標の組み上げ

時間座標  $ct$  の位置は空間座標の前に置かれる。空間座標  $x, y, z$  も改めて、時空座標  $x$  で表すことになる。後々、式をまとめ上げる際に役に立つ以下のように、上付きの添数字を導入して、各々に割り当てる。具体的には、次のとおりだ。

$$x^0 := ct, \quad x^1 := x, \quad x^2 := y, \quad x^3 := z.$$

これらを要素として、時空ベクトル  $x^\mu$  を作ろう。

$$x^\mu := (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

これまで、ベクトルを表現するのに、太文字を使ったり文字の上に矢印を書いたりしていたが、また新しい書き方に出てきた。添字にギリシャ文字を使うパターン。これも式をまとめるための小細工の一つである<sup>10)</sup>。

添字の  $\mu$  は実際は右辺で示したような具体的な添字が入るものであり、この添字自体に意味はない。式をまとめるに便利なだけの、無意味なダミー変数である。したがって、 $\nu$  でも  $\rho$  でもなんでもよい。ただ、4次元ベクトルであることを容易に想起させるため、ギリシア文字を使うことにする。つまり、以下の  $x^\mu$  も  $x^\nu$  も  $x^\rho$  も同じことである。

$$x^\nu := (x^0, x^1, x^2, x^3). \qquad x^\rho := (x^0, x^1, x^2, x^3).$$

慣性座標を複数使って考察する場合には、このようにいろいろなギリシア文字の添字を使うことになる。さて、上で導入した時間座標と空間座標を合わせた位置に関する時空ベクトルの他に、位置・速度・角速度・運動量・角運動量・力・エネルギーに関するものがある。順次確認していく。

---

<sup>10)</sup> なれるまで使い続けるしかない。一度なれてしまえば、かなり便利な記法であることが実感できよう。

## 24.4 四元位置ベクトル

いまさつき確認した、位置ベクトルを 4 次元化したものを、四元位置ベクトル という<sup>11)</sup>。

$$x^\mu := (x^0, x^1, x^2, x^3) \quad (24.4)$$

## 24.5 世界間隔

ニュートン力学において、ある 2 点の距離  $d$  は、 $(x, y, z)$  座標において、三平方の定理によって、

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i)^2} \\ &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned}$$

である。特殊相対性理論では、空間座標と時間座標は互いに影響しあっているとわかっているので、上の距離の式に時間も加えて、ニュートン力学の 3 次元空間を例にして、これに時間を加えて時空の 4 次元に拡張したい。いま、観測者はある 1 つの慣性系に静止しているとしよう。その座標系を  $(ct, x, y, z)$  とする。光速不変の原理によると、運動している物体から光が生じようが、静止している物体から光が生じようが、両者の光速は  $c$  という一定値で観測される。

光が原点から一瞬だけ生じたとしよう。このとき、光が進む距離は  $ct$  であり、三平方の定理から、

$$ct = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

であり、両辺を自乗すれば、

$$ct^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

---

<sup>11)</sup> 四元：読み方の流儀がいくつかありそう。四を「よ」というか、「よん」というか、「し」というか。よげん/よんげん/しげん。どれも間違いではないだろう。僕の今の感覚を書いておくと、四元ベクトルは「よんげんベクトル」、四次元は「よじげん」、四元数は「しげんすう」とよむ。

と書ける。これは、特殊相対性原理によって、別の慣性系 ( $ct', x', y', z'$ ) の観測者が観測しても、同じことである。その場合は、

$$ct'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

である。上の 2 つの式を次のように左辺の  $ct^2$  を右辺に移項すると、どの慣性系でも成立する式を得る。

$$0 = -(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2. \quad (24.5)$$

3 次元での距離  $d$  を、4 次元に拡張したような形になっている。この量には名前がついていて、それは 世界間隔 とよばれている<sup>12)</sup>。その記号として、 $s$  が用いられる。つまり、

$$s^2 := -(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2 \quad (24.6)$$

である。この世界間隔  $s$  は、4 次元世界での量であり、今まで考えてきた 3 次元の距離  $d$  と似てはいるものの、いろいろと異なった性質ももつ。また、無限小線素（または単に、線素）を考えるときには、

$$ds^2 = (ds)^2 := -(\mathrm{d}(ct))^2 + (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2 \quad (24.7)$$

である。以下、上式の表現を簡略化して（例えば、 $\mathrm{d}a^2 := (\mathrm{d}a)^2$  とう略記を採用する），

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}(ct)^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \quad (24.8)$$

と書くことが多い。ミンコフスキ空間とは、Euclid 空間における距離の定義を上に説明した世界間隔に置き換えたものに他ならない。

時空座標  $x^\mu$  を使うと、次のようになる。添字を使うと、足し算を現すのに  $\sum$  が利用できるようなり、記述が短くなる。

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= -\mathrm{d}x^0{}^2 + \mathrm{d}x_1{}^2 + \mathrm{d}x_2{}^2 + \mathrm{d}x_3{}^2 \\ &= \sum_{\mu=0}^3 x^\mu{}^2. \end{aligned} \quad (24.9)$$

---

<sup>12)</sup> 教科書により、世界長・世界長さ・世界距離など、表現が異なることがある。

# memo No.95:  $-(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0$  だから常に  $s = 0$ ?

$-(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0$  だから常に  $s = 0$  であるはずがない。光速度動く物体など存在しない。光以外の物体は光速以下で運動するため、常に  $ds^2 < 0$  である。光の場合の特別な状況で、

$$(ct)^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (24.10)$$

が成り立つ。物体の速度  $v$  は光速以下のなので、

$$(ct)^2 > (vt)^2 (= x^2 + y^2 + z^2) \quad (24.11)$$

である。だから、

$$\begin{aligned} (ct)^2 &> x^2 + y^2 + z^2 \\ \Leftrightarrow (ct)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) &> 0 \\ \Leftrightarrow -(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2 &< 0 \\ \Leftrightarrow ds^2 &< 0. \end{aligned}$$

光円錐の内側が光速以下の我々の世界 ( $ds^2 < 0$ ) で、時間的といわれ、因果関係が成立する領域。光円錐の外側が光速を超えた物体があるかもしれない未知の領域で、因果関係が崩れている ( $ds^2 > 0$ )。光円錐のちょうど表面が光速の世界 ( $ds^2 = 0$ ) で、ヌルと言われ、時間領域と空間領域の境界。

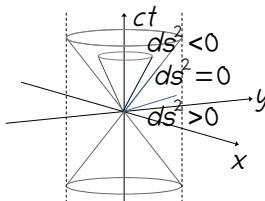


図 24.1 光円錐と  $ds^2$

左辺が 0 であるのは、原点から出発した光を仮定しているからではない。

$$0 = -c^2(t - t_0)^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2.$$

展開して適当に移項してみると、

$$\begin{aligned} & - (ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2 \\ &= 2(-c^2tt_0 + xx_0 + yy_0 + zz_0) - ((ct_0)^2 + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2). \end{aligned}$$

左辺が  $s$  の形になった.

$$\begin{aligned}s &= -(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2 \\&= 2(-c^2tt_0 + xx_0 + yy_0 + zz_0) - (-(ct_0)^2 + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2).\end{aligned}$$

確かに、0 ではないが、こういうことではない……

## 24.6 固有時間

既に確認したように、時間の進み具合は座標系のとり方に依存する。つまり、座標系のとり方しだいで、時間の進み具合が変わってしまうのである。けれども、これで議論はがしにくい。しかも、座標系に依存するということは、基準が存在しないことを意味する。そこで、座標系のとり方にかかわらずに、しかも時間と同じ意味をもつ量を新たに導入する。それは 固有時間  $\tau$  と呼ばれる量であり、記号  $\tau$  によって表される<sup>13)</sup>。固有時間  $\tau$  を具体的に表現することを考える。固有時間に要請される性質として、どの座標系をとっても不变であることである。ところで、このような性質をもつ量として、先ほど、世界間隔について考え、無限小線素を導出した。それは以下のように書き表せる。

$$\begin{aligned}ds^2 &= \sum_{\mu=0}^3 (x^\mu)^2 \\&= -dx^{0^2} + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \\&= -d(ct)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2.\end{aligned}$$

この式を足がかりとして、固有時間について考えていく。今、観測者は系 S に対して静止しているとする。さらに系 S' が、系 S に対して速度  $v'$  で運動しているとしよう。このとき、系 S' に対して静止している時計の時刻を、観測者が観測している状況を考える。系 Sにおいて、時刻  $t = 0$  で時計が原点にあったとする。そして、 $dt'$  の後、時計は位置  $d\mathbf{r}' = (dx', dy', dz')$  へ移動したとき、速度  $v'$  は

$$v' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'} \tag{24.12}$$

<sup>13)</sup> 固有時（こゆうじ）と言う場合も多い。世界間隔にしても固有時間にしても、単語が安定ていない。言葉が微妙に違っても、混乱することがないため、今のところは厳密な統一はされてない。ちなみに、物性物理学で使われる電子緩和時間  $\tau$  とはまったく別の概念である。念のため。

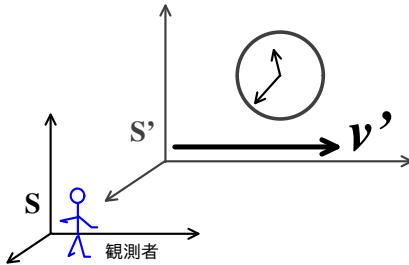


図 24.2 固有時間 1

となる。すると、速さは

$$v' = \frac{|\mathrm{d}\mathbf{r}'|}{\mathrm{d}t'} = \frac{\sqrt{\mathrm{d}x'^2 + \mathrm{d}y'^2 + \mathrm{d}z'^2}}{\mathrm{d}t'}$$

と表現できる。次のように式変形をしよう<sup>14)</sup>。

$$\mathrm{d}s'^2 = \mathrm{d}x'^2 + \mathrm{d}y'^2 + \mathrm{d}z'^2.$$

ところで、系 S から観測する系 S' の無限小線素を  $\mathrm{d}s'$  とすると以下が成り立つ。

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}(ct')^2 + \mathrm{d}x'^2 + \mathrm{d}y'^2 + \mathrm{d}z'^2. \quad (24.13)$$

先ほど計算した  $v'$  を、式 (24.13) に置き換えてみる。右辺の空間座標部分を次のように見てみよう。

$$\begin{aligned} & \mathrm{d}x'^2 + \mathrm{d}y'^2 + \mathrm{d}z'^2 \\ &= \frac{\mathrm{d}x'^2 + \mathrm{d}y'^2 + \mathrm{d}z'^2}{\mathrm{d}t'^2} \mathrm{d}t'^2 \\ &= \left( \frac{\sqrt{\mathrm{d}x'^2 + \mathrm{d}y'^2 + \mathrm{d}z'^2}}{\mathrm{d}t'} \right)^2 \mathrm{d}t'^2 \\ &= v'^2 \mathrm{d}t'^2. \end{aligned}$$

<sup>14)</sup> この変形は数学的に正しいことを確認（証明）すべきだろう。しかし、ここでは数式を感覚的に扱う。正しさを確認したい場合は、微分の教科書を参照のこと。

これを使って置き換えると、次になる。

$$\begin{aligned} ds^2 &= -d(ct')^2 + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 \\ &= -d(ct')^2 + v'^2 dt'^2 \\ &= dt'^2 \left( -c^2 + v'^2 \right) \\ &= -c^2 dt'^2 \left( 1 - \frac{v'^2}{c^2} \right). \end{aligned}$$

ここでちょっと計算ととめて、式をじっくり眺めてみよう。すると、次のことに気づく<sup>15)</sup>。左辺の  $ds^2$  は微小線素であり、どのような座標系でも不变な量である。つまり、等式が成立するのであれば、右辺も座標によらないはずである。括弧の外の  $c$  は定数であるから<sup>16)</sup>、不变なのは明らか。残る  $dt'^2 \left( 1 - v'^2/c^2 \right)$  を見てみると、 $\gamma$  がある<sup>17)</sup>。ローレンツ因子  $\gamma$  を用いることで、式は次のようになる。

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 dt'^2 \left( 1 - \frac{v'^2}{c^2} \right) \\ &= -c^2 \frac{dt'^2}{\gamma^2} \end{aligned}$$

ここで、固有時間  $d\tau$  次のように定義する。すなわち、

$$d\tau := \frac{dt'}{\gamma} = \sqrt{1 - (v^2/c^2)} dt'. \quad (24.14)$$

固有時間  $\tau$  を使って、

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 \frac{dt'^2}{\gamma^2} \\ &= -c^2 d\tau^2 \end{aligned}$$

とかける。固有時間  $\tau$  は系  $S'$  に固有な時間である<sup>18)</sup>。つまり、この時間は系  $S'$  においてのみ計測し得る値である。観測者は系  $S$  に対して静止していることから、当然

<sup>15)</sup> 気づかなくても、先を読んでもらえばいいんだけどね。

<sup>16)</sup>  $c = 3.0 \times 10^{10} [\text{m/s}]$

<sup>17)</sup> ローレンツ因子とは次のように表されるものである。

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}.$$

<sup>18)</sup> 次のような仮定をしていることを、思い出そう。すなわち、観測者は系  $S$  に対して静止している。系  $S'$  は、系  $S$  に対して速度  $v'$  で等速直線運動をしている。

$\tau$  とは異なる時間を感じている。慣性系に対して静止している時計で測った時間が  $\tau$  なのである。だから慣性系に「固有」なのである。固有時間に対して、座標に依存する時間を 座標時 という。座標時は静止系から見た、運動系の時間のことである。

#### # memo No.96: 光の固有時間

光は速度  $v = c$  なので、その固有時間は 0 である。よって、光速で進む座標系では時間はすすまない。固有時間の定義式の  $v$  に  $c$  を代入すると、以下のように 0 になるからだ。

$$\sqrt{1 - (v^2/c^2)} dt' = \sqrt{1 - (c^2/c^2)} dt' = 0.$$

## 24.7 四元速度ベクトル

四元位置ベクトル  $x^\mu$  を固有時間  $\tau$  で微分して、四元速度ベクトル  $u^\mu$  を構成する。

$$u^\mu = (u^0, u^1, u^2, u^3) \quad (24.15)$$

$$= \left( \frac{dx^0}{d\tau}, \frac{dx^1}{d\tau}, \frac{dx^2}{d\tau}, \frac{dx^3}{d\tau} \right) \quad (24.16)$$

## 24.8 四元加速度ベクトル

四元速度ベクトル  $x^\mu$  を固有時間  $\tau$  で微分して、四元加速度ベクトル  $u^\mu$  を構成する。

$$u^\mu = (u^0, u^1, u^2, u^3) \quad (24.17)$$

$$= \left( \frac{du^0}{d\tau}, \frac{du^1}{d\tau}, \frac{du^2}{d\tau}, \frac{du^3}{d\tau} \right) \quad (24.18)$$

## 24.9 $\eta_{\mu\nu}$ の導入

コメント 世界間隔  $ds$  を、時空座標  $x^\mu$  を使って、

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^3 (x^\mu)^2$$

とあらせた。さらに新しい記号  $\eta_{\mu\nu}$  を導入して、式表現を変更する。これは、テンソル表記へに向けての一歩になる。

微小な世界間隔は以下である.

$$\begin{aligned} ds^2 &= \sum_{\mu=0}^3 (x^\mu)^2 \\ &= -d(ct)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \end{aligned}$$

これを時空座標  $x^\mu$  を使った形に書き改めると, 次のようになる.

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2. \quad (24.19)$$

唐突だが, ここで, 以下のような行列  $\eta_{\mu\nu}$  を導入する.

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (24.20)$$

この  $\eta_{\mu\nu}$  を使うと, 世界間隔が以下のように書ける.

$$ds^2 = \sum_{\nu=0}^3 \sum_{\mu=0}^3 \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (24.21)$$

本当かどうか, 展開して, 確かめてみよう.

$$\begin{aligned} ds^2 &= \sum_{\nu=0}^3 \sum_{\mu=0}^3 \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= \sum_{\nu=0}^3 \left( \sum_{\mu=0}^3 \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \right) \\ &= \sum_{\nu=0}^3 (\eta_{0\nu} \eta_{0\nu} dx^0 dx^\nu) \\ &\quad + \sum_{\nu=0}^3 (\eta_{0\nu} \eta_{1\nu} dx^1 dx^\nu) \\ &\quad + \sum_{\nu=0}^3 (\eta_{0\nu} \eta_{2\nu} dx^2 dx^\nu) \\ &\quad + \sum_{\nu=0}^3 (\eta_{0\nu} \eta_{3\nu} dx^3 dx^\nu) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \eta_{00} dx^0 dx^0 + \eta_{01} dx^0 dx^1 + \eta_{02} dx^0 dx^2 + \eta_{03} dx^0 dx^3 \\
&\quad + \eta_{10} dx^1 dx^0 + \eta_{11} dx^1 dx^1 + \eta_{12} dx^1 dx^2 + \eta_{13} dx^1 dx^3 \\
&\quad + \eta_{20} dx^2 dx^0 + \eta_{21} dx^2 dx^1 + \eta_{22} dx^2 dx^2 + \eta_{23} dx^2 dx^3 \\
&\quad + \eta_{30} dx^3 dx^0 + \eta_{31} dx^3 dx^1 + \eta_{32} dx^3 dx^2 + \eta_{33} dx^3 dx^3 \\
&= -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2.
\end{aligned}$$

添字がしんどい。

または、直接、行列表示での計算は以下の通り。

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{bmatrix} \\
&= -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2.
\end{aligned}$$

行列  $\eta_{\mu\nu}$  とベクトル  $x^\mu$  の積は行列積の計算で、その結果はベクトルである。このベクトルと  $x^\nu$  の内積をとる（各同じ成分同士掛け合わせた後、それらを加算する）。すると、世界間隔になる。世界間隔がコンパクトに表現されるようになった（と感じませんか？）。さらに、同じギリシア文字 2 つが添字の上下対になって現れた場合、その文字について常に 0 から 3 までの和を取ると約束するならば<sup>19)</sup>、 $\sum$  記号の記載を省略できて式の見た目がよくなる。省略した形を書いてみよう。

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (24.22)$$

とても短くなった。また、世界間隔と固有時間の関係  $ds^2 = -c^2 d\tau^2$  から、

$$-c^2 d\tau^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

も成り立つ。

<sup>19)</sup> この約束のことを、いくつかバリエーションがあるが、インシュタインの規約、インシュタインの縮約記法、インシュタインの総和規約と言うらしい。どれも同じことである。インシュタインが導入した規則だと伝えられている。インシュタイン自身も、この規約が気に入っていたらしい。根拠はわからんが、いくつかの教科書に記載がある。まあ、名前はどうでもいいや。大事なことは規則を覚えることだ。

## # memo No.97: 行列表示とその成分表示?

行列が、 $\eta_{\mu\nu}$  ではない場合、素直に行列を書いて計算した場合と成分表示した場合で、計算結果が変わる。つまり、一般の行列には成り立たない。計算してみよう。

$$\sum_{\nu=0}^3 \sum_{\mu=0}^3 \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{bmatrix}$$

この等式は先に計算したとおり、成立している。おかしくなるのは、行列を一般化した以下のような式のときだ。

$$\sum_{\nu=0}^3 \sum_{\mu=0}^3 u_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \neq \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

例として、別の  $2 \times 2$  行列で考えよう。2つの  $x$  があるが、文字が2つだと見えにくいので、区別して、 $x, y$  とする。dも例では不要だ。段階を踏んで考える。数学形式で書くので、ベクトルと行列成分の添字の開始番号が1とする。

$$\sum_{\nu=1}^2 \sum_{\mu=1}^2 u_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \neq \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

まずはベクトル  $x^i$  とベクトル  $y_j$  の内積を成分表示したもの。以下の式を理解してほしい。これは  $\sum$  の規則の復習で、簡単なので説明不要だろう。内積はスカラーになるので、結果を  $a$  としておこう。

$$\begin{aligned} a &= \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 x_i y_j \\ &= \sum_{j=1}^2 \left( \sum_{i=1}^2 x_i \right) y_j \\ &= \sum_{j=1}^2 (x_1 + x_2) y_j \\ &= (x_1 + x_2) y_1 + (x_2 + x_2) y_2 \end{aligned}$$

次は行列  $2 \times 2$  表列  $u_{ij}$  とベクトル  $v_j$  の積を成分表示した中級編。結果はベクトルとなるから  $b_i$  としておこう。

$$b_i = \sum_{j=1}^2 u_{ij} v_j$$

$$= [u_{1i}v_1 + u_{2i}v_2].$$

念の為,  $i = 1, 2$  だから, 全部書くと以下.

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11}v_1 + u_{21}v_2 \\ u_{12}v_1 + u_{22}v_2 \end{bmatrix}.$$

さて最終段階だ.  $b_i$  に対して, 更にベクトル  $w_j$  をかける形で, 式を発展させる. 結果はスカラーアリーナになるので  $c$  としておこう. 成分を列挙すると添字地獄に陥る.

$$\begin{aligned} c &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 u_{ij} v_i w_j \\ &= \sum_{i=1}^2 \left( \sum_{j=1}^2 u_{ij} v_i w_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^2 [u_{i1}v_i w_1 + u_{i2}v_i w_2] \\ &= u_{11}v_1 w_1 + u_{12}v_1 w_2 + u_{21}v_2 w_1 + u_{22}v_2 w_2. \end{aligned}$$

他方の成分表示で書かれた場合, アインシュタインの規約による記述を展開して計算すると,

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_{11}v_1 + u_{12}v_2 \\ u_{21}v_1 + u_{22}v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \\ &= (u_{11}v_1 + u_{12}v_2)w_1 + (u_{21}v_1 + u_{22}v_2)w_2 \\ &= (u_{11}v_1 w_1 + u_{12}v_2 w_1) + (u_{21}v_1 w_2 + u_{22}v_2 w_2) \end{aligned}$$

$u_{ji}$  の  $i \neq j$  の成分に関する後が, 行列そのまま表示と成分表示で入れ替わっている.  $\eta_{\mu\nu}$  の場合,  $i \neq j$  の部分は 0 になるため, この問題は生じない.

## 24.10 4 元運動量の定義

観測者に対して, 光速に近い速さで運動している物体の, 運動量を考える. ニュートン力学における運動量  $p$  は, 質量  $m$  と速度  $v$  の積で表現された.

$$p = mv.$$

この運動量  $p$  を成分表示すると.

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mv_x \\ mv_y \\ mv_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m(dx/dt) \\ m(dy/dt) \\ m(dz/dt) \end{bmatrix}$$

である。

このままでは、空間の概念しかなく、特殊相対性理論を考える上で、不都合がある。特殊相対性理論では、空間と時間は同等であるから、上の運動量に、時間も組み込んでおきたい。そこで、4元運動量として、今までの運動量を、拡張する。

$$p^\mu = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} -E/c \\ mv_x \\ mv_y \\ mv_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E/c \\ m(dx/dt) \\ m(dy/dt) \\ m(dz/dt) \end{bmatrix} \quad (24.23)$$

である。

ここで、心配になるのは、時間成分にある  $p^0 = -E/c$  だ。運動方程式や、エネルギー保存の法則に矛盾しないのか。次節以降で確認していこう。

## 24.11 相対論的運動方程式

**コメント** ニュートン力学において、物体はニュートンの運動方程式に従っていることを学んだ。しかし、ニュートンの運動方程式は、空間と時間が全く別のものとして扱われている。それに加えて、空間や時間は、度の観測者から見ても、同一であることを仮定している。この仮定は、特殊相対性理論と矛盾してしまう。

ここでは、ニュートンの運動方程式を、特殊相対性理論と適合するように、書きかえることが、目的である。それには、今まで3次元的に考えてきた運動量、エネルギーを、4次元に拡張する作業が必要になってくる。

ニュートンの運動方程式を4元運動量を使って書き換えよう。といっても、単純に  $\mathbf{p}$  を  $p^\mu$  に機械的に置き換えるだけ。結論は簡単なので、先にその式を書いておこう。

$$f^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau}. \quad (24.24)$$

この式の妥当性を考える。相対性理論は、物体の速度が光速に近いときに有効な理論であるが、ニュートン力学と矛盾なく理論を構築すべきである。そのためには、物体の速度が光速に比べてとても遅い場合<sup>20)</sup>、ニュートンの運動方程式に帰着るべきだ。つまり、速度が  $\mathbf{0}$  の場合はニュートンの運動方程式に完全に一致することが条件の1つにある。物体の静止系  $S'$  を考える<sup>21)</sup>。 $S'$  での、時間を  $t'$ 、位置ベクトル

<sup>20)</sup> 光速  $c$  を無限大と扱える場合。というか、そのまま数値として計算したとしても、光速が大きすぎて、結果にほとんど反映されない場合。 $\beta = v/c$  が限りなく 0 に近い場合。

<sup>21)</sup> 'をつける理由：'をつけたのは、1つの慣性座標系に固定して考察をしたいからである。1つの座

を  $\mathbf{r}' := (x', y', z')$ , 物体に加えられている力を  $\mathbf{f}'$  とするとき, ニュートンの運動方程式は,

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt'^2} = \mathbf{f}'. \quad (24.25)$$

とである.

特殊相対性原理によれば, 運動方程式はローレンツ変換に対して不变である<sup>22)</sup>. すると,  $t'$  のままでは変換(の表現)が複雑になる<sup>23)</sup>. この場合,  $S'$  系の固有時間  $d\tau$  を導入するとよい. 立場を  $S'$  系に移すのだ. この  $S'$  系では,  $x' = 0$ ,  $y' = 0$ ,  $z' = 0$  だから,  $d\tau$  と  $dt'$  は等しい.

$$\begin{aligned} d\tau &= \sqrt{1 - (v^2/c^2)} dt' \\ &= \sqrt{1 - (x'^2 + y'^2 + z'^2)/c^2} dt' \\ &= \sqrt{1 - 0} dt' \\ &= dt'. \end{aligned}$$

よって, 式(24.25)の  $dt'$  は  $d\tau$  で置き換えることができて,

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}'}{d\tau^2} = \mathbf{f}'. \quad (24.26)$$

今,  $\mathbf{r}'$  は3次元を想定して記述したが, 4次元に拡張するため, 座標の時間成分を考察してみよう. 時間成分  $x'^0$  は  $ct'$  と書ける<sup>24)</sup>.  $x'^0 = ct'$  を強引にニュートン

標系のみで考察するため, 特殊な状況であることを表現しておきたいので, 'をついた. 考察の最後で, 一レンツ変換を導入して, 一般的な慣性座標系  $S$  での表現に改める('はなくなる).

<sup>22)</sup> これは理論構築の要請である. 原理であり, 根拠はない. どのような慣性系で物体の運動を観測しようと, 運動方程式は同じ形になるはずだという, 信念のもと, 特殊相対性理論を構築する.

工学的立場から考えれば, 極論を言うと, 原理が正しさはさほど重要なことではない(理論家からすれば, 最も大事な論理的基礎なので重要視されるべきだが). 原理から導かれた結論(今の場合は, 相対性理論的な運動方程式)が現実を説明できるか否か, これが一番の注目点である. 説明できることなれば, 原理の設定はさほど見当違いなことではなかったと考えられよう.

<sup>23)</sup> 速度の変換公式を思い浮かべると, その複雑さを実感できる(式(23.71)参照).

$$u = \frac{v + u'}{1 + u'v/c^2}$$

<sup>24)</sup> この時点では,  $x'^0$  は議論のために一時的に導入する仮の変数である. しかし, この時間成分は相対性理論に重要になる. そのため,  $x'^0$  などと特殊な表現をしている. この意味は後に明らかになるので, ここでは単なる記号として捉えてもらえば, それでよい.

の運動方程式に当てはめてみよう。

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x'^0}{d\tau^2} &= m \frac{d^2 c t'}{dt'^2} \\ &= mc \frac{d^2 t'}{dt'^2} \\ &= mc \frac{d}{dt'} \left( \frac{dt'}{dt'} \right) \\ &= mc \frac{d}{dt'} (1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

定数は微分すると 0 になる（図 24.3 参照）<sup>25)</sup>。ここでは定数 1 を微分を計算して、0 になった。

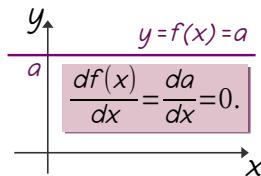


図 24.3 定数の微分は 0 である

一つの例しか確認しておらず粗雑であるが、この時間成分  $x'^0 = ct'$  はニュートン方程式と矛盾なく、整合が取れそうである。となれば、この時間成分と空間成分の  $\mathbf{r}'$  をまとめてしまい、以下のように、時空座標として拡張したい。時間と空間を 1 つのベクトルに集約するのだ。ということで、座標の記号も統一感を持たせるべく、

$$x'^1 := x', \quad x'^2 := y', \quad x'^3 := z'$$

と表現を改めよう。 $x'^0$  は時間成分で、3 つの空間成分よりも前の成分として記述する。すると、拡張した座標（時空座標）を  $x'^\mu$  と表すことにすれば、

$$x'^\mu := (x'^0, \mathbf{r})$$

<sup>25)</sup> 定数は微分する変数によらず、0 になる。変数をもってないから。定数のグラフの傾きはゼロだから。

$$\begin{aligned} &= (x'^0, x', y', z') \\ &= (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3). \end{aligned}$$

注意してほしいのは、前に使っていた空間座標の  $x'$  と今導入した  $x'^\mu$  は全く別物ということである<sup>26)</sup>。先に導入した時空座標が、運動方程式にも問題なく当てはめられることを確認できた。

これに対する力  $f'$  であるが、これをどのように4次元に拡張できるのかが疑問だが、形式的に、同じように  $f'^\mu$  と書くことにしよう。 $f'^\mu$  は時間成分1つと空間成分3つをもつ、合計4成分の4次元ベクトルである。

$$f'^\mu = (f'_t, f'_x, f'_y, f'_z).$$

さらに、上付き添字を導入して、

$$f'^0 := f'_t, \quad f'^1 := f'_x, \quad f'^2 := f'_y, \quad f'^3 := f'_z$$

と書き表すことにする。整理すると、

$$f'^\mu := (f'^0, f'^1, f'^2, f'^3).$$

である。4次元空間の力を現実世界の現象としてイメージすることはできないが、理論と割り切って、抽象的に捉えておこう。

さて、長くなったが、運動方程式を4次元に拡張して ( $x'^\mu$  と  $f'^\mu$  を使って)、

$$f'^\mu = m \frac{d^2 x'^\mu}{d\tau^2}$$

と書けることが確認できた。4次元に拡張できたところで、やっとローレンツ変換を施すことができる形になった。

$$x^\nu = \Lambda x'^\mu \tag{24.27}$$

$$f^\nu = \Lambda f'^\mu \tag{24.28}$$

とすれば、任意の慣性系 S での式になる。ちなみに、 $\Lambda$  は以下のとおりであった(式(24.1))。

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<sup>26)</sup> 同じアルファベットを使っているせいで紛らわしいが、落ち着いて読めば誤解はしないはずだ。相対性理論の初頭的などの教科書はどれも、このような説明になっている。

ローレンツ変換しても、式の形は変わらない。

$$f^\nu = m \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2}$$

でも添字の  $\mu, \nu$  が気になる。今まで  $\mu$  で書いてきたので……添字の記号には特に意味はないので、 $\mu$  で統一しておこう。

$$f^\mu = m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}.$$

また、 $m \frac{dx'^\mu}{d\tau}$  は4次元化された運動量  $p^\mu$  に他ならない。

$$p^\mu = m \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

だから、運動方程式は以下のようになる。

$$\begin{aligned} f^\mu &= m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \\ &= m \frac{d}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} \\ &= \frac{d}{d\tau} \left( m \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) \\ &= \frac{dp^\mu}{d\tau}. \\ \therefore f^\mu &= \frac{dp^\mu}{d\tau}. \end{aligned} \tag{24.29}$$

## 24.12 4元運動量の時間成分

## 24.13 運動する物体の質量

観測者に対して、光速に近い速さで運動している物体の、質量について、考える。



第 IV 部

電磁氣学 2nd



# 25

## 電磁気学の再構築

### 25.1 もう一度はじめから

#### 25.1.1 帰納的な考え方

これまで、マクスウェル方程式を導くように電磁気学を学習してきた。すでに知られている実験事実を基に、物理法則を導出するという考え方を、帰納的な考え方であるという。とにかく、今知られている事実から、どんなことが言えるかを、直感をもとにして探し出すのである。このような帰納的な考え方は、新しい概念をい知識として吸収するのに、有効である。

例えば、小学校や中学校における、算数や数学の授業では、新しい概念を教わるとき、必ず具体的な例を見た後に、「これは一般的に成り立つ」というように教わるはずである。このような学習方法は確かに分かりやすいが、論理的であるとは言えない。何しろ直感をもとにして、説明をしているのだから、仕方がないのであるが、ものごとをきちんと整理して把握するのには、この方法は不適切である。そこで、次の段階として、帰納的に導いた事柄（ここではマクスウェル方程式）をもとにして、理論を再構成する作業が必要になってくる。

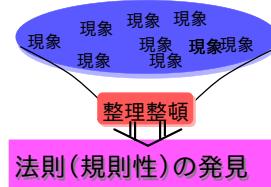


図 25.1 帰納的推論

### 25.1.2 演繹的な考え方

何かの理論を構築する際に、あるいくつかの約束事を、納得するか否かに関わらずに、強制的に認めさせる。そして、この強制的に与えられた約束事を元にして、理論を構築する。もちろん論理的に作らないといけない。最初の約束事さえ認めれば、その後は、論理的推論で導き出せるように、理論を構成するのである。このような考え方を、演繹的な考え方であるという。

演繹的な考え方とは、理論を論理的に構築する際に、とても役に立つ。ただ、問題なのは、最初に与える約束事が認められない、あるいは疑わしさを感じる場合である<sup>1)</sup>。この場合、論理の最も基礎の部分に不安があるため、いくら論理的に理論を構築したところで、この理論の正当性も怪しまれてしまう。なので、その最も基礎となる約束事は、できるだけ確かな事実を採用すべきだ。それには、帰納的な考え方方が適している。帰納的に導きだされた結果は、直感的になじみやすいからである。

### 25.1.3 “帰納”から“演繹”へ

物事を論理的に構成しようとするとき、まず土台<sup>2)</sup>が必要である。その土台は、おおよそ間違いを含まず、正当性が高いものである必要がある。このような理論の土台を得るには、まず帰納的に考えるとよい。帰納的に考えると、実験をして、その結果を説明できるような法則を考えることである。これには、多くの実験を行う必要があることだろう。何度も何度も、実験を行う。そうして、いろいろな実験結果が揃う。そして、それらを説明する理論も、同じくらい多くなっていることだろ

<sup>1)</sup> 集合論などの、選択公理などは、その最も有名なものではなかろうか。

<sup>2)</sup> 土台：有無を言わさず、認めさせる、最初の約束事。

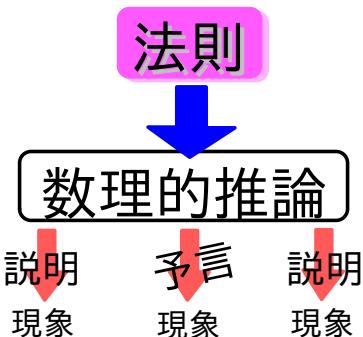


図 25.2 演繹的推論

う。 そうした段階で、少々立ち止まって、考えてみる。 今度は、頭と鉛筆と紙で考えるのである。多くの実験で、多くの理論が創りだされた。しかし、この多くの理論には、いくつかの共通点が存在するはずであると考え、その共通点を探し出すのだ。いくら考えても共通点がないかもしれないが、こればかりはやってみなければわからない。運良く、それらの共通点が明らかになった場合には、より簡潔な理論を作り出せる可能性がある。 そしたら、共通点を法則として捉え直し、演繹的な理論構築の土台にするのだ。たくさんの実験から得られた土台（法則）だから、それだけに説得力があり、正当性の保証も大きい。

帰納的な考え方から、演繹的な考え方へ思考を切り替えるのには、それ相応の困難があることと思う。しかし、理論を組み上げる上で、この考え方の切り替えは非常に重要なことである。以下では、今までに帰納的に導いてきたマクスウェル方程式を土台とし、演繹的な理論構築の基礎に置き、電磁気学的な現象をとらえなおしていくことにしよう。

#### 25.1.4 演繹的な電磁気理論の組み立て方

電磁気理論を再構築するに当たって、まず、その構成の手順を示しておくと、後の話の流れが把握しやすいだろう。

構築の仕方は色いろあるだろうが、ここでは、太田浩一によって著された [14] の構成で学習を進めていくことにする。以下に、その概略を書いておこう。

まず、力学との接点として、クーロンの法則を採用する。そして、特殊相対性理論

の学習で導いたローレンツ変換<sup>3)</sup>をクーロン力に対して、適用する。その適用結果を式変形すると、電磁場のローレンツ力と同じ形の力が導出される。これは、もちろん、ローレンツ力とみなすことができる。このローレンツ力をもとに、電場と磁束密度を定義する。最後に、マクスウェル方程式を、電場と磁束密度が満たす条件として、付け加える。

## 25.2 クーロンの法則

クーロンの法則は、電気の性質を示す最も基礎的な法則である。電気の性質をもつ物体を、電荷 とよぶ<sup>4)</sup>。

### Point 71: クーロンの法則

クーロンの法則が示す電気的性質とは、以下の通り。

- 電気には、"正 (Plus)"と"負 (Minus)"の 2 種類が存在する
- 2 つの電荷が異種（正と負）であれば、各々の電荷は互いに引き合う向きに力を受ける
- 2 つの電荷が同種（正と正/負と負）であれば、各々の電荷は互いに反発し合う向きに力を受ける
- 2 つの電荷が受ける力の大きさは等しく、力の向きは互いに逆向きである
- 2 つの電荷が受ける力の大きさは、2 つの電荷の電気量の積に比例する
- 2 つの電荷が受ける力の大きさは、2 つの電荷の距離の 2 乗に反比例する

<sup>3)</sup> ローレンツ力ではないよ。

<sup>4)</sup> 「電荷」と書いたとき、その物体の他の性質（大きさ、重さ等）は無視して、電気的性質のみに着目する。

**Point 72: クーロン力**

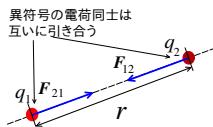
ある空間に 2 つの電荷  $q_1, q_2$  が、それぞれ位置  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  に存在するとき、この 2 つの電荷には、次式で表されるような力が作用する。この力のことを クーロン力 という。

電荷  $q_1$  に対しては、

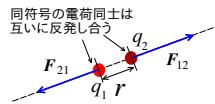
$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \quad (25.1)$$

という力が働く。

ここに、 $\epsilon_0$  は真空の誘電率である。



(A)



(B)

図 25.3 クーロン力 ((図 12.1) 再掲)

## 25.3 ローレンツ変換

## 25.4 電場と磁束密度の定義

## 25.5 マクスウェル方程式

### 25.5.1 ファラデーの電磁誘導の法則

### 25.5.2 アンペール = マクスウェルの法則

### 25.5.3 電場に対するガウスの法則

### 25.5.4 磁束密度に対するガウスの法則

## 25.6 電荷保存の法則

¶ マクスウェル方程式は、その内部に電荷保存則を含んでいる

マクスウェルの法則（マクスウェル方程式）は、その内部に、電荷保存則を含んでいる。つまり、マクスウェル方程式から、電荷保存則を導けるのである。このノートでは前に、電荷保存の法則を仮定してマクスウェル方程式を導いたわけだが、今回はマクスウェル方程式を仮定して、電荷保存の法則を導出する<sup>5)</sup>。今日では、マクスウェル方程式を仮定して電磁気現象を説明するという立場があたりまえになっている。このようなことから、電荷保存の法則は法則ではなく、定理（法則から導かれる現象）として捉えるべきだ。

¶ 導出

アンペール = マクスウェルの法則の両辺に、div をとると<sup>6)</sup>、

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mu_0 \left( \mathbf{i} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) &= \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{B} \\ \Leftrightarrow \mu_0 \left( \operatorname{div} \mathbf{i} + \varepsilon_0 \frac{\partial (\operatorname{div} \mathbf{E})}{\partial t} \right) &= \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{B} \end{aligned}$$

<sup>5)</sup> 電荷保存則を仮定して、マクスウェル方程式を見つけ出したのだから、その内部に電荷保存則を含んでいることは、当然である。

<sup>6)</sup> 电流や変位电流の発散が電荷密度の移動であると表現したいので、このような操作をする。

である。ここで、 $\text{div}$  は空間に関する作用であり、 $\partial/\partial t$  は時間に対する作用であるから、両者は可換である。これに加えて、電場に対するガウスの法則  $\text{div } \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$  から、

$$\mu_0 \left( \text{div } \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial t} \rho \right) = \text{div rot } \mathbf{B}$$

である。最後に、ベクトル解析の恒等式；任意の  $\mathbf{M}$  に対して、 $\text{div rot } \mathbf{M} := 0$  であることを考慮すれば、

$$\text{div } \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial t} \rho = 0 \quad (25.2)$$

を得る。これは電荷保存の法則を表現する式である。

## 25.7 マクスウェル方程式の解

### ¶ 変数の個数と、方程式の個数が一致しない

マクスウェル方程式をなす 4 つの方程式は、電場と磁束密度を変数とする方程式である。電場と磁束密度はそれぞれ 3 つの方向成分をもっている。従って、マクスウェル方程式によって決定されるべき未知関数は、 $3 \times 2$  で 6 個である。具体的には、 $E_x(\mathbf{r}, t)$ ,  $E_y(\mathbf{r}, t)$ ,  $E_z(\mathbf{r}, t)$ ,  $B_x(\mathbf{r}, t)$ ,  $B_y(\mathbf{r}, t)$ ,  $B_z(\mathbf{r}, t)$  である。

ところで、マクスウェル方程式を見てみると、これらは成分で見れば 8 この方程式であると言える。具体的にいえば、電磁誘導の法則で 3 つ、アンペール = マクスウェルの法則で 3 つ、電場に対するガウスの法則で 1 つ、磁束密度に対するガウスの法則で 1 つの合計  $3 + 3 + 1 + 1$  で 8 個となる<sup>7)</sup>。

つまり、方程式の個数の方が変数の個数よりも 2 つ多いということになり、矛盾なく解が求まるかどうかといった疑問が生じるのである。結論から先にいえば、矛盾なく解が求まるのである。というのも、電場に対するガウスの法則が電場の初期条件を与え、磁束密度に対するガウスの法則が磁束密度の初期条件を与える式と考えられるのである。

### ¶ 数式により、確認

以上のことを数式で表現すれば次のようになる。

---

<sup>7)</sup> 電磁誘導の法則やアンペールの法則は、ベクトルで記述されている方程式であるから、その方程式には 3 つの方向成分 ( $x$  成分,  $y$  成分,  $z$  成分) をもっている。従って、法則の各々に、未知関数が 3 つ含まれているのである。また、2 つのガウスの法則はスカラー方程式であるので、未知関数は各々の法則で 1 つである。

まず、 ファラデーの電磁誘導の法則の両辺に  $\text{div}$  をとる.

$$\begin{aligned} \text{div rot } \mathbf{E} &= \text{div} \left( -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \\ \Leftrightarrow \quad \text{div rot } \mathbf{E} &= -\frac{\partial (\text{div } \mathbf{B})}{\partial t} \end{aligned} \quad (25.3)$$

さて、 ベクトル解析の公式から、 任意のベクトルを  $\mathbf{C}$  として、  $\text{div rot } \mathbf{C} := 0$  が成立しているので、 上式の右辺は恒等的に 0 となって、 結局、

$$-\frac{\partial (\text{div } \mathbf{B})}{\partial t} = 0 \quad (25.4)$$

となる。 磁束密度の初期条件として、 磁束密度に対するガウスの法則を使えば、 電磁場が変動してもファラデーの法則は自動的に成り立つのである。

また電場についても、 アンペール＝マクスウェルの法則の両辺に  $\text{div}$  をとれば、

$$\begin{aligned} \text{div} (\text{rot } \mathbf{B}) &= \text{div} \mu_0 \left( \mathbf{i} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \\ \Leftrightarrow \quad \text{div rot } \mathbf{B} &= \mu_0 \text{div } \mathbf{i} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial (\text{div } \mathbf{E})}{\partial t} \end{aligned} \quad (25.5)$$

である。

さて、 ベクトル解析の公式から、 任意のベクトルを  $\mathbf{C}$  として、  $\text{div rot } \mathbf{C} := 0$  が成立しているので、 上式の右辺は恒等的に 0 となって、

$$\text{div } \mathbf{i} + \varepsilon_0 \frac{\partial (\text{div } \mathbf{E})}{\partial t} = 0 \quad (25.6)$$

と書ける。 ここで、 電荷保存の法則より、  $\text{div } \mathbf{i} = -\partial/\partial t \rho$  を上式考慮すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho - \varepsilon_0 \frac{\partial (\text{div } \mathbf{E})}{\partial t} &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho - \varepsilon_0 \text{div } \mathbf{E}) &= 0 \end{aligned} \quad (25.7)$$

を得る。 電場に対するガウスの法則を電場の初期条件として考えるならば、 アンペール＝マクスウェルの法則は、 電場がこの後時間変化しても、 成立する。

つまり、 上式 (25.7) を時間積分して、

$$\rho - \varepsilon_0 \text{div } \mathbf{E} = C, \quad (C \text{ は積分定数})$$

だが、初期条件がガウスの法則によって書かれるものであるとするなら、定数  $C = 0$  であり、

$$\rho - \varepsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E} = 0$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

さて以上によって、マクスウェル方程式を矛盾することなく解くことができるということが示された。



# 26

## 真空中の電磁波

### 26.1 波動方程式

コメント 最初に、波動方程式について、簡単にまとめておこう<sup>►1)</sup>.

#### 26.1.1 波動関数

波動方程式の解は 波動関数 である。波動関数とは、実際の現象として起きている波 もしくは 波動 を、数学的な関数として抽象化したものである。これにより、波という現象を数学的に解析できるようになる。波動方程式を考える前に、波 もしくは 波動 について調べておく必要がある。

---

<sup>►1)</sup> 詳細は、微分方程式の教科書を参照すること。

### 26.1.2 波動方程式の導出

2 つの独立変数  $x, t$  をもつ関数  $K(x, t)$  に関する 波動方程式 とは、以下の偏微分方程式のことを言う。

$$\frac{\partial^2 K}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}. \quad (26.1)$$

## 26.2 真空中のマクスウェル方程式

**コメント** 前章で確認した 微分形のマクスウェル方程式 を用いて、電磁波について考える。まず、電場の波動方程式 と 磁束密度の波動方程式 を別々に確認する。そして、ファラデーの電磁誘導の法則 と 電場に対するガウスの法則から、それら 2 つの波動方程式の関係を考える。

### 26.2.1 マクスウェル方程式の確認

マクスウェルの方程式を書き下しておく。

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (26.2)$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \left( \mathbf{i} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (26.3)$$

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (26.4)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (26.5)$$

$$(26.6)$$

### 26.2.2 真空中であることの仮定

電磁波を考えるにあたって 話を簡単にするために、以下の仮定を設ける。これは 真空中の電磁波を考えることによる要請である。

- (1) 電荷密度  $\rho$  の分布はないものとする。

$$\rho = 0 \quad (26.7)$$

(2) 電流密度  $\mathbf{i}$  の分布はないものとする.

$$\mathbf{i} = 0 \quad (26.8)$$

### 26.2.3 電場の波動方程式

ファラデーの電磁誘導の法則  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$  の両辺に  $\operatorname{rot}$  をとる.

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (26.9)$$

ここで、ベクトル解析の公式  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} = \operatorname{grad} \operatorname{div} - \Delta$  を適用する<sup>2)</sup>. すると,

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} = -\operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (26.10)$$

となる. この式の右辺第1項の  $\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E}$  に注目する. 電場に対するガウスの法則は、仮定の  $\rho = 0$  によって,

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho = 0$$

である. 従って、 $\operatorname{grad} 0 = 0$  となって、式(26.10)は

$$\Delta \mathbf{E} = \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (26.11)$$

と計算される. 回転  $\operatorname{rot}$  と時間微分  $\partial / \partial t$  は可換であるから

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{\partial (\operatorname{rot} \mathbf{B})}{\partial t} \quad (26.12)$$

ところで、左辺の  $\operatorname{rot} \mathbf{B}$  は アンペール = マクスウェルの法則から

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

である. ここで、仮定により  $\mathbf{i} = 0$  を考慮した. これを、式(26.12)に代入して,

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

<sup>2)</sup> ここに,

$$\Delta := \operatorname{div} \operatorname{grad} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

である.

$$\Leftrightarrow \Delta \mathbf{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (26.13)$$

である。この式を以下のように変形する。

$$\left( \Delta - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = 0 \quad (26.14)$$

この式は波動方程式と同型である。従って、電場は波動として伝わることを意味する。

電場の波の位相速度を考える。そのために、速度  $v$  の位相速度をもつ波動の方程式  $\mathbf{K}(\mathbf{r}, t)$  を書き下す。

$$\left( \Delta - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{K} = 0 \quad (26.15)$$

この式 (26.14) と式 (26.15) とを見比べてみると、電場の波動方程式の位相速度は

$$\begin{aligned} \frac{1}{v^2} &= \mu_0 \varepsilon_0 \\ \Leftrightarrow v &= \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \end{aligned} \quad (26.16)$$

である。

速度を具体的に計算してみよう。まず、以下の定数は既知である。

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \frac{1}{36\pi \times 10^9} [\text{F/m}], \\ \mu_0 &= \frac{4\pi}{10^7} [\text{H/m}]. \end{aligned}$$

これを先の位相速度の式に代入して計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{36\pi \times 10^9} [\text{F/m}] \cdot \frac{4\pi}{10^7} [\text{H/m}]}} \\ &= 3 \times 10^8 [\text{m/s}] \end{aligned} \quad (26.17)$$

となって、これは光速にかなり近い値である

この値の妥当性は、ヘルツらの実験により、光速と同等であることが確認された。そこで、改めて光速を  $c$  と表すことにする<sup>3)</sup>。

$$c := \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \cong 3 \times 10^8 [\text{m/s}] \quad (26.18)$$

---

<sup>3)</sup> 実際は、光速を実験的に測定し、その値に基づいて、 $\varepsilon_0$  の値が決められている。 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  と定義されているので（電流の定義の項目を参照）、光速  $c$  を測り、 $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$  の関係から  $\varepsilon_0$  を計算できる。

光速  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$  を用いて、電場  $\mathbf{E}$  の波動方程式を表せば、

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = 0 \quad (26.19)$$

である。

先ほどは次元の具体的な計算をして指定なかった。次元が速度になることをここで確かめておこう。確かめたい次元は

$$\frac{1}{\sqrt{[F/m][H/m]}} = [m/s]$$

となることである。次元の括弧を書くのは面倒なので、この計算では省略して記述する。まずは、以下のようになることは、簡単にわかる。

$$\frac{1}{\sqrt{(F/m) \cdot (H/m)}} = \frac{1}{\sqrt{FH/m^2}}.$$

次に  $FH$  の計算を行いたいが、おそらく単位の定義も忘れているだろうから、定義に戻って計算しよう。 $[F]$  は静電容量の単位で、単位電圧  $1[V]$ あたりにためることできる電荷量  $[C]=[A \cdot s]$  で定義される。

$$F := \frac{A \cdot s}{V}.$$

$[H]$  はインダクタンスの単位で、単位時間  $1[s]$  の間に  $1[A]$  の電流が流れる場合に、 $1[V]$  の電圧が生じる回路のインダクタンスとして定義される。

$$H := \frac{V}{A/s} = \frac{V \cdot s}{A}.$$

だから、

$$F \cdot H = s^2.$$

要するに、

$$\frac{1}{\sqrt{F/mH/m}} = \frac{1}{\sqrt{s^2/m^2}} = \frac{1}{s/m} = m/s$$

となり、次元が速度になることが確かめられた。

### 26.2.4 磁束密度の波動方程式

今度は、磁束密度の波動方程式を考える。(導出方法は電場の波動方程式とほぼ同じである。) アンペール＝マクスウェルの法則  $\text{rot } \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 (\partial \mathbf{E} / \partial t)$  の両辺に、回転  $\text{rot}$  をとる。(仮定により、 $i = 0$  であることを考慮した。)

$$\text{rot rot } \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \text{rot} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (26.20)$$

そして、左辺にベクトル解析の公式  $\text{rot rot} = \text{grad div} - \Delta$  を適用する。

$$\text{grad div } \mathbf{B} - \Delta \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \text{rot} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (26.21)$$

ここで、磁束密度に対するガウスの法則  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  によって、第一項は 0 になる。

$$-\Delta \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \text{rot} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (26.22)$$

回転  $\text{rot}$  と時間微分  $\partial / \partial t$  は可換であるから

$$-\Delta \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial (\text{rot } \mathbf{E})}{\partial t} \quad (26.23)$$

とできる。ここで、ファラデーの電磁誘導よりの法則  $\text{rot } \mathbf{E} = \partial \mathbf{B} / \partial t$  であるから、

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{B} &= -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \\ \Leftrightarrow \quad \Delta \mathbf{B} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (26.24)$$

この式を整理すると、

$$\left( \Delta - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{B} = 0 \quad (26.25)$$

である。光速  $c$  を用いると、

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{B} = 0 \quad (26.26)$$

である。この式は波動方程式と同型である。

従って、磁束密度も光速  $c$  で伝播することがわかる。

### 26.2.5 光速

この速度は、「どの慣性系」に対する物でもない。どんな慣性系でも全く同じ光速を観測し得る。これは特殊相対性理論の基本要請の一つであり、光速度不变の原理とよばれる。

ある慣性系  $O$  で光速  $c$  を観測したとする。また、その慣性系  $O$  において、光速と同じ速度で運動する別の慣性系  $O'$  も観測したとする。ガリレイ変換を考えれば、慣性系  $O'$  で光速  $c'$  を測定すれば、 $c' = 0$  である。しかし、光速度不变の原理によれば、慣性系  $O'$  から光速を測定しても、その速度は  $c = c'$  であるという（従って、光速度不变の原理を採用すると、ガリレイ変換は成り立たない。）

この原理を説明する実験事実として多くの教科書では、マイケルソンとモーレイの実験取り上げられている。これらから「特殊相対性理論」の領域になる。今は電磁気学を考えているので、この辺でこの話を止めておく。

### 26.2.6 電磁波の伝搬

上の計算によって、電場と磁束密度の波動方程式を得た。しかし、波には 縦波と横波の2種類が存在する。ここでは、電場もしくは磁束密度は、縦波か横波かを考えていくことにしよう。

先に電場の波動について考える。それには、微分形の電場に対するガウスの法則を用いる。仮定より、電荷密度は存在しないので、電場に対するガウスの法則は

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \quad (26.27)$$

である。電場の波動方程式  $\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = 0$  を満たす解は

$$\mathbf{E} = f(\mathbf{r} \cdot \mathbf{k} + ct) + g(\mathbf{r} \cdot \mathbf{k} - ct) \quad (26.28)$$

で表されるので<sup>4)</sup>、この式を式 (26.27) に代入すると、

$$\operatorname{div} \{f(\mathbf{r} \cdot \mathbf{k} + ct) + g(\mathbf{r} \cdot \mathbf{k} - ct)\} = 0$$

$\operatorname{div}$  を具体的に表示すると、

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \{f + g\} = 0$$

---

<sup>4)</sup> 本節末のメモを参照。

ここで、式を見やすくするために、

$$\begin{aligned} f &:= f(\mathbf{r} \cdot \mathbf{k} + ct), \\ g &:= g(\mathbf{r} \cdot \mathbf{k} - ct) \end{aligned}$$

と省略して書くことにした。微分作用素を展開して具体的に関数に作用させると、

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}\{f + g\} + \frac{\partial}{\partial y}\{f + g\} + \frac{\partial}{\partial z}\{f + g\}$$

$f, g$  は電場の波動の進行方向  $\mathbf{k}$  を含むことに注意すれば

$$\begin{aligned} 0 &= k_x \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} \right\} \\ &\quad + k_y \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y} \right\} \\ &\quad + k_z \left\{ \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial z} \right\} \end{aligned}$$

となる。これは明らかに、以下のように内積の形で表現できることがわかる。

$$\begin{aligned} 0 &= (k_x, k_y, k_z) \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial z} \right) \\ &= (k_x, k_y, k_z) \cdot (f'_x + g'_x, f'_y + g'_y, f'_z + g'_z) \\ &= \mathbf{k} \cdot (\mathbf{f}' + \mathbf{g}') \end{aligned}$$

ここで電場の式 (26.28) :

$$\mathbf{E} = f(\mathbf{r} \cdot \mathbf{k} + vt) + g(\mathbf{r} \cdot \mathbf{k} - ct)$$

を思い起こせば、

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}' = 0 \tag{26.29}$$

電場の空間微分  $\mathbf{E}'$  は電場の変化の方向を表現していて、 $\mathbf{k}$  は電場の波動の進行方向である。これら 2 つの内積が 0 であるという結果から、電場は、進行方向と垂直な方向に、その振幅が変化する ということがわかる。進行方向と垂直な方向に変化するということは、電場の波動は横波である ということを意味する。

磁束密度についても同様に考えることができて、

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}' = 0 \tag{26.30}$$

の関係が得られる。つまり、磁束密度の波動は横波である ということもわかる。

## # memo No.98: 波動方程式

波動とその運動について考える。波動の運動を表す方程式のことを、**波動方程式** という。波動の形は、関数で表すことができ、これを **波動関数** という。

図 26.1 は、波動の進行方向を  $z$ 、振動の方向を  $x$ 、時間の経過を  $t$  軸で表現したものである。

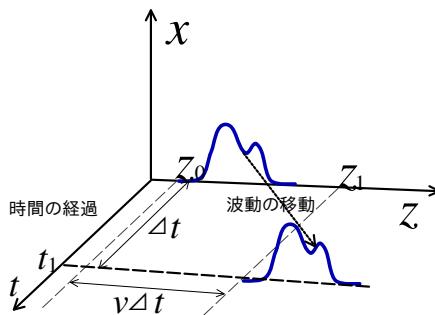


図 26.1 波動の時間移動

波動関数は、もとっとも単純な形をしている、 $\sin$  型や  $\cos$  型でかまわなのだが、より一般的な波動をイメージして現象を考えたいので、ここでは、任意の形をした波形を考える。この波の波動関数を  $f$  とおこう。このとき、波動関数は、 $f(z - vt)$  の形で表せる。その理由を、以下で説明する。

図 26.1 を参照してもらいたい。 $x, z, t$  の交点（原点）を、時刻  $t = 0$  とし、 $t_0$  で表す。時刻  $t_0$  から時間  $\Delta t$  後の時刻を  $t_1$  とする。そして、時刻  $t_0$  での波動関数の位置は  $z_0$  であるとし、時刻  $t_1$  での波動関数の位置は  $z_1$  とする。波動の  $z$  軸の移動速度は  $v_z$  であるとする。

この時、時刻  $t_0$  の波動関数は  $f_0 := f(z_0 - v_z t_0)$  と表せる<sup>5)</sup>。では、時刻  $t_0$  における波動関数はどうだろうか。

$$z_0 = z_1 - v_z \Delta t$$

であることに注意すると、 $t_1$  は

$$t_1 = t_0 + \Delta t \Leftrightarrow \Delta t = t_1 - t_0$$

と表せることから、

$$z_0 = z_1 - v_z \Delta t$$

<sup>5)</sup> 記号「:=」は、左辺を右辺により定義することを意味する。

$$\begin{aligned}
 &= z_1 - v_z(t_1 - t_0) \\
 &= z_1 - v_z t_1 + v_z t_0 \\
 \therefore z_0 - v_z t_0 &= z_1 - v_z t_1.
 \end{aligned}$$

従つて、 $f(z_1 - v_z t_1) = f(z_0 - v_z t_0)$  が成立する。以上により、波動関数は  $f(z - vt)$  で表せることがわかった。よって、波動関数は時間経過でその形  $f$  を変えずに移動することがわかる。また同様に、 $f(z + vt)$  の形であっても、時間経過による波形の変化はないことを示すことができる。

### 26.2.7 電場と磁束密度の伝搬関係

次に、電場の波動と磁束密度の波動の関係を調べていこう。それには、ファラデーの電磁誘導の法則を使う。再度式を書き下す。

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot } \mathbf{E} \quad (26.31)$$

この後の式変形のために、この式を成分表示で書き表しておく。

$$\begin{pmatrix} -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (26.32)$$

電場が時間変化するとその周辺に磁束密度が発生する。逆に、磁束密度が時間変化するとその周辺には電場が発生する。ここでは、電場の伝搬を考え、その電場の波動の変化に対してどのように磁束密度が生れ、どのように伝搬するかを考えていくことにする。ここで次のような仮定を設ける。すなわち、

- (1) 電場の伝搬方向は  $z$  軸正の向きとする。
- (2) 電場の振幅変化の方向は  $x$  軸方向とする。

上の 2 つの仮定から、電場は以下のように成分表示される。

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(z - ct) + g(z + ct) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (26.33)$$

この仮定は先ほど得た結果、つまり、電場の波動と磁束密度の波動は横波であるということから、設定できる。

電磁誘導の法則の式 (26.32) に、電場の式 (26.33) を代入し整理すれば、

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{c} -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial y} 0 - \frac{\partial}{\partial z} 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \left\{ f(z - ct) + g(z + ct) \right\} - \frac{\partial}{\partial x} 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} 0 - \frac{\partial}{\partial y} \left\{ f(z - ct) + g(z + ct) \right\} \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{c} 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \left\{ f(z - ct) + g(z + ct) \right\} \\ -\frac{\partial}{\partial y} \left\{ f(z - ct) + g(z + ct) \right\} \end{array} \right) \end{aligned}$$

ここで、右辺の  $z$  成分  $-\frac{\partial}{\partial y} \left\{ f(z - ct) + g(z + ct) \right\}$  に注目すると、電場は  $y$  方向には振幅変化していないという仮定から 0 になって、従って、

$$\left( \begin{array}{c} -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \left\{ f(z - ct) + g(z + ct) \right\} \\ 0 \end{array} \right)$$

となる。この式の  $y$  成分に注目しよう。

$$\begin{aligned} -\frac{\partial B_y}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ f(z - ct) + g(z + ct) \right\} \\ &= f'^z(z - ct) + g'^z(z + ct) \end{aligned}$$

ここで、 $f'^z$ ,  $g'^z$  の上についている添え字 ' $z$ ' は、 $z$  成分についての微分を表している。この式を時間  $t$  で積分すれば、 $y$  方向の磁束密度が得られる。

$$\begin{aligned} B_y &= - \int \frac{dB_y}{dt} dt \\ &= - \int \left\{ f'^z(z - ct) + g'^z(z + ct) \right\} dt \end{aligned}$$

$$= - \left( -\frac{1}{c} f'^z(z - ct) \right) + \left( -\frac{1}{c} g'^z(z + ct) \right)$$

すなわち,

$$B_y = \frac{1}{c} f'^z(z - ct) - \frac{1}{c} g'^z(z + ct) \quad (26.34)$$

である。磁束密度のその他の成分は、 $-dB_x/dt = 0$ ,  $-dB_z/dt = 0$  であったから、これらを各々時間  $t$  で積分して、 $B_x = B_1$ (定数),  $B_z = B_3$ (定数) だが、初期条件として  $B_1$ ,  $B_3$  共に 0 として、

$$B_x = 0 \quad (26.35)$$

$$B_z = 0 \quad (26.36)$$

以上より、磁束密度をもう一度ベクトル表記すると、

$$\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{c} f'^z(z - ct) - \frac{1}{c} g'^z(z + ct) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (26.37)$$

である。

電場の式 (26.33) と磁束密度の式 (26.37) から、電場  $\mathbf{E}$  と磁束密度  $\mathbf{B}$  の内積は

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (26.38)$$

である。従って、電場と磁束密度は常に互いに直交していることがわかる。

電場  $\mathbf{E}$  と磁束密度  $\mathbf{B}$  の関係は、ファラデーの電磁誘導の法則とアンペール＝マクスウェルの法則によって説明される。そしてここで確認したように、電場の変動と磁束密度の変動は互いに独立ではなく、それらの変動は密接に関係している。そこで、それらの変動を 1 つの現象として捉え、これを 電磁波 という。

### 26.2.8 電磁場のエネルギー と ポイントティング・ベクトル

**コメント** 電磁波は真空中を伝わる。となると、真空中にも電磁気的なエネルギーが蓄えられていると考えられよう。そこで、ここでは真空中に電磁波が存在しているとき、この空間に蓄えられている電磁気的なエネルギーについて考える。

電磁場におけるエネルギー保存の法則を導く。

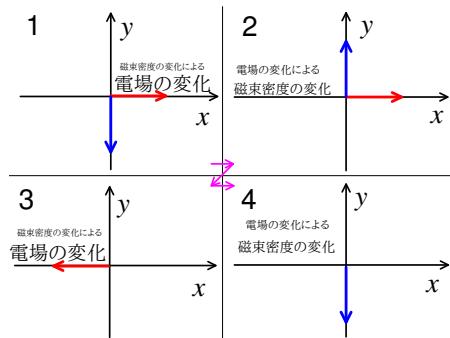


図 26.2 原点における電場と磁束密度の変化のイメージ

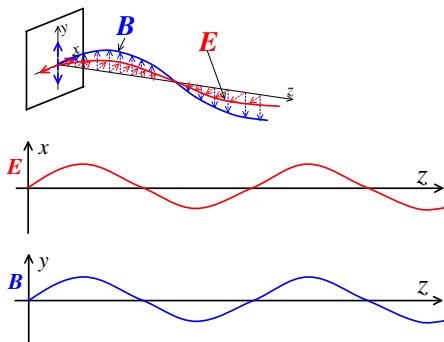


図 26.3 電磁波の伝搬のイメージ

ファラデーの電磁誘導の法則の両辺と、磁束密度  $\mathbf{B}$  との内積をとり、

$$\mathbf{B} \cdot (\text{rot } \mathbf{E}) = \mathbf{B} \cdot \left( -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right). \quad (26.39)$$

右辺を左辺に移項して整理すれば、

$$\mathbf{B} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{E} \right) = 0. \quad (26.40)$$

次に、アンペール＝マクスウェルの法則の両辺と、電場  $\mathbf{E}$  の内積をとり、

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \mu_0 \left( \mathbf{i} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) &= \mathbf{E} \cdot (\operatorname{rot} \mathbf{B}) \\ \Leftrightarrow \quad \mathbf{E} \cdot \left( \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \operatorname{rot} \mathbf{B} \right) &= -\mu_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{i} \\ \Leftrightarrow \quad \mathbf{E} \cdot \left( \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \operatorname{rot} \mathbf{B} \right) &= -\mu_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{i} \end{aligned} \quad (26.41)$$

とする。そして、式 (26.40) と式 (26.41) の両辺の和をとる。

$$\begin{aligned} -\mu_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{i} \\ = \mathbf{B} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{E} \right) + \mathbf{E} \cdot \left( \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \operatorname{rot} \mathbf{B} \right). \end{aligned} \quad (26.42)$$

右辺と左辺を入れ替えた<sup>6)</sup>。右辺を展開すると、

$$\begin{aligned} -\mu_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{i} \\ = \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (26.43)$$

ところで、任意のベクトル  $\mathbf{X}(t)$  に対して以下の式が成立する。

$$\mathbf{X}(t) \cdot \frac{\partial \mathbf{X}(t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{X}(t)^2}{\partial t}. \quad (26.44)$$

なぜなら、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{X}^2}{\partial t} &= \frac{\partial(\mathbf{X} \cdot \mathbf{X})}{\partial t} \\ &= \mathbf{X} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \cdot \mathbf{X} \\ &= 2\mathbf{X} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \\ \therefore \quad \mathbf{X} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{X}^2}{\partial t}. \end{aligned}$$

---

<sup>6)</sup> A4 紙の二段組にした場合、式が一行で納まらなかった。

従って、式(26.43)の第1項と第3項を以下のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} & -\mu_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{i} \\ & = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{B}^2}{\partial t} + \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{E}^2}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}. \end{aligned}$$

整理して、

$$\begin{aligned} & -\mu_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{i} \\ & = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B}^2 + \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{E}^2) + \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (26.45)$$

ここで、左辺の第3項と第4項は、以下のベクトル解析の恒等式を適用してまとめることができる。その公式とは、任意の2つのベクトル  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$  に対して、

$$\mathbf{Y} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{X} - \mathbf{X} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{Y} = \operatorname{div}(\mathbf{X} \times \mathbf{Y}). \quad (26.46)$$

この恒等式を、上式の左辺第3項と第4項に適用して、式変形すれば、

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B}^2 + \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{E}^2) + \operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = -\mu_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{i} \quad (26.47)$$

これを次のように書いてみる。

$$\operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} (\mathbf{B}^2 + \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{E}^2) \right\} = -\mu_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{i}. \quad (26.48)$$

さらに、

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}, \quad (26.49)$$

$$W = \frac{1}{2} (\mathbf{B}^2 + \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{E}^2) \quad (26.50)$$

と置くと、

$$\operatorname{div} \mathbf{S} + \frac{\partial}{\partial t} W = -\mu_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{i}. \quad (26.51)$$

こうしてみると、式の形が電荷保存の法則の式に似ている。電荷保存の法則は次のように記述された。

$$\operatorname{div} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial t} \rho = 0. \quad (26.52)$$

電磁場のエネルギーの式(26.51)の  $\mathbf{S}$  を電荷保存の法則の式の電流  $\mathbf{i}$  と対応させて、また、 $W$  の部分を電荷密度  $\rho$  と対応させて両式を比較してみよう。

電荷保存の法則の式の意味は、「電荷の時間変化(つまり電荷の移動)が電流を発生させている」ということであった。これを電磁場のエネルギーの式に当てはめて考えると、 $(\mathbf{B}^2 + \varepsilon_0\mu_0\mathbf{E}^2)/2$  という量の時間変化が、 $\operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{B})$  という量を生じさせていることになる。また、右辺の電場と電流の積  $-\mu_0\mathbf{E} \cdot \mathbf{i}$  は電荷が電場より受ける単位時間あたりの仕事である。そこで、 $(\mathbf{B}^2 + \varepsilon_0\mu_0\mathbf{E}^2)/2$  を電磁場のエネルギー密度、 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  をポインティング・ベクトルとよぶことにすれば<sup>7)</sup>、「電磁場のエネルギー密度の変化が、ポインティング・ベクトルを生じさせる」と表現される。

<sup>7)</sup> ポインティング・ベクトル: Poynting vector であり、ポインティング (Poynting) は John Henry Poynting, (1852.9.9– 1914.3.30, イギリス) という人の名前に由来する。pointing ではない。

# 27

## その他の電磁気学的現象

### 27.1 電気双極子

### 27.2 熱電効果

#### 27.2.1 はじめに

ここでは、熱と電磁気とに関係する現象を考える。熱電効果とは、熱によって電流を生じさせる現象のことをいう。例えば、一様な物体があったとして、この物体の一部に熱を与えて、周囲よりも高温にしてみる。この時、物体には温度勾配が生じる。熱い部分のエネルギーは冷たい部分よりも高いので、当然、熱した部分の原子の持つ電子も、冷たい部分の電子よりも活発に運動していることだろう。活発な電子はその周囲に拡散することが容易に想像できる。この電子の拡散こそが、電流であり、熱電効果とよばれる理由である。

### 27.2.2 トムソン効果

### 27.2.3 ペルチエ効果

### 27.2.4 ゼーベック効果

## 27.3 ゼーマン効果

原子にある程度エネルギーを与えると、その原子内の電子がエネルギーを吸収する。そして、電子のエネルギーがある一定値を超えると、エネルギーを抱えきれなくなり、電磁波としてそれを放出する。このとき放出される電磁波の波長は原子ごとに決まっている。一般に、放出される電磁波の波長は複数である。つまり、原子はエネルギーを外部から与えると、決まつたいくつかの波長の電磁波を放出する。この原子が出す複数の波長の電磁波のことを、原子スペクトル という。また、そのひとつひとつを 原子スペクトル線 という。

单一の波長しか放出しない原子<sup>1)</sup> も存在する。しかし、磁束密度中でエネルギーを与えた場合、それが複数種類の電磁波を放出するようになる<sup>2)</sup>。この現象を ゼーマン効果 という。

## 27.4 電子の実験的発見

電子は、どのようにしてその存在が認められたのだろうか。

►<sup>1)</sup> スペクトル線をひとつしか持たない原子のこと。

►<sup>2)</sup> スペクトル線が 2 つ以上に分裂するということ。

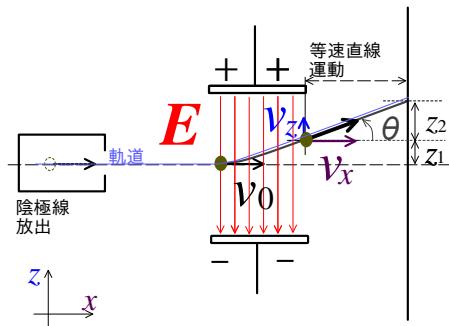


図 27.1 トムソンの陰極線の実験



# 28

## 共変形式のマクスウェル方程式

### 28.1 ポテンシャルの導入

**コメント** 電磁気学を相対性理論や量子力学で扱うとき、電場や磁束密度をそのままの形で表現するよりも、ポテンシャルを用いて表現したほうが都合がよい。そこでここでは、電場と磁束密度をポテンシャル表記することを考える。

その方法は、まず、磁束密度に対するガウスの法則から、ベクトルポテンシャルを定義  $\mathbf{A}$  し、この  $\mathbf{A}$  によって、磁束密度を表現することを考える。そして、ベクトルポテンシャルによって表現された磁束密度を電磁誘導の法則に代入することにより、電場のポテンシャル表記する。このとき、電位（電気的なスカラーポテンシャル）と電場の関係を考慮する必要がある。

#### 28.1.1 スカラーポテンシャル: $\phi$

スカラーポテンシャルとは、電位  $\phi$  のことである。これから、マクスウェル方程式を  $\phi$  を用いた表現に書き直すことを試みる。

### 28.1.2 ベクトルポテンシャル: $\mathbf{A}$

ポテンシャルを用いて電場や磁束密度を表現することを考える。まず、磁束密度について考える。磁束密度は、ガウスの法則により、 $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  を満たしている。このことに注目しながら、次のベクトル解析の恒等式を考える。あるベクトル  $\mathbf{A}$  に対して、

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0 \quad (28.1)$$

回転の発散は常に 0 であるということを意味している。式 (28.1) のベクトル  $\operatorname{rot} \mathbf{A}$  を磁束密度  $\mathbf{B}$  に置き換えれば、すなわち、

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad (28.2)$$

とすれば、以下の恒等式を得られる。

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (28.3)$$

式 (28.2) のように磁束密度を表すことによって、ガウスの法則が数学的に自動的に成り立つのである。この式 (28.2) を満たすようなベクトル  $\mathbf{A}$  のことをベクトルポテンシャル という。

物理的には、ベクトルポテンシャルという概念を理解することは難しいが、ポテンシャルを基礎に置いた理論は現代では主流である。解析力学、量子力学や相対性理論との関連を考えるとき、ベクトルポテンシャルの概念は便利な道具として用いられる。ベクトルポテンシャルの実在性は、Aharonov=Bohm 効果 という現象によって確認されている。この効果については、量子力学の知識が必要である。

### 28.1.3 ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ の形

前項目では、ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  を磁束密度がガウスの法則を満たすように定義したが、具体的な形はまだわかっていない。 $\mathbf{A}$  は電流  $i$  と位置  $\mathbf{r}$  で表せる。以下で計算し、確認してみよう。

ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  の定義は磁束密度  $\mathbf{B}$  に対するガウスの法則から定義された。

$$\mathbf{B} := \operatorname{rot} \mathbf{A}$$

ところで、磁束密度はビオ＝サバールの法則によって記述される。そこで、ビオ＝サバールの法則を式変形していき、上の磁束密度とベクトルポテンシャルの関係式の形へ誘導し、ベクトルポテンシャルに対応する部分を見ることで、ベクトルポテンシャルの形を考えていく。

最初に、式変形につかう公式を2つ確認する。一つは  $\mathbf{r}'$  に関する  $\text{grad}$  として、

$$\text{grad}_{\mathbf{r}'} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (28.4)$$

もう一つは、 $s$  を任意のスカラー<sup>1)</sup>、 $\mathbf{U}$  を任意のベクトルとして、

$$\text{rot}(s\mathbf{U}) = s \text{rot } \mathbf{U} - \mathbf{U} \times (\text{grad } s) \quad (28.5)$$

というベクトル解析の公式である。今回はこの公式の  $\mathbf{U}$  は定電流  $\mathbf{i}(\mathbf{r})$  に対応させてるので、定数ベクトルとして扱いになる。 $\mathbf{U}$  を定数ベクトルと見たとき、この公式(28.5)は次のように計算される。

$$\text{rot}(s\mathbf{U}) = -\mathbf{U} \times (\text{grad } s). \quad (28.6)$$

今回の式変形では公式を変形した式(28.6)を用いる。

それでは、式変形に執りかかろう。ビオ＝サバールの法則は以下のようであった。

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{i}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \end{aligned}$$

一番右の式に先ほどどの公式(28.4)を用いると、

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{i}(\mathbf{r}') \times \text{grad}_{\mathbf{r}'} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' \quad (28.7)$$

右辺に、先ほど記述したベクトル解析の公式  $\text{rot}(s\mathbf{U}) = -\mathbf{U} \times (\text{grad } s)$  を使うと、

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \int \text{rot} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\ &= \text{rot} \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \end{aligned} \quad (28.8)$$

---

<sup>1)</sup> スカラーとは、大きさのみを数である。ベクトルが複数の数の組みで表現されるのに対し、スカラーは1つの数で表現される。

となる。この式(28.8)と、ベクトルポテンシャルと磁束密度の関係式  $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$  のベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  に対応する部分に注目すれば、

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (28.9)$$

を得る。以上で、ベクトルポテンシャルの具体的な形を得ることができた。

#### 28.1.4 磁束密度のポテンシャル表示

今までの議論で、散々書かれてきたが、改めて記載しておこう。磁束密度  $\mathbf{B}$  は、ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  を用いると、以下のように表現できる。

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (28.10)$$

#### 28.1.5 電場のポテンシャル表示

前項目では、磁束密度をベクトルポテンシャルを用いて表現することを考えた。それは、 $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$  の様に表現される。さて、ここでは電場をポテンシャルで表現することを考える。そのためには、 $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$  を用いる。どう用いるかといえば、この式をファラデーの電磁誘導の法則に代入するのである。ファラデーの電磁誘導の法則は

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (28.11)$$

であった。この式に  $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$  を代入すると、

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial(\operatorname{rot} \mathbf{A})}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{rot} \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{E} \right) = 0 \end{aligned} \quad (28.12)$$

となる。一般的に、この式の解は

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi \quad (28.13)$$

と書かれる。但し数学的には、右辺の負符号は必要ない。負の符号を付けたのは、電位の定義によるものである。従って、電場をポテンシャル表示すると、

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \phi \quad (28.14)$$

となる。

## 28.2 マクスウェル方程式のポテンシャル表示

**コメント** さて、以上の計算から、電場と磁束密度のポテンシャル表示を確認した。具体的には、電場と磁束密度はそれぞれ、スカラーポテンシャル  $\phi$  とベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  を用いて、

$$\begin{cases} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \phi \\ \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \end{cases}$$

のように表現されることが分かった。このポテンシャル表示が示すように、電場や磁束密度はポテンシャルから導かれると考えることも可能である。

このポテンシャル表示を導く課程で、ファラデーの電磁誘導の法則と磁束密度に対するガウスの法則を用いた。そして、マクスウェル方程式の残りのもう二つの法則、すなわち、アンペール＝マクスウェルの法則と電場に対するガウスの法則のそれぞれに、上で確認した電場と磁束密度を代入すれば、それによって得た方程式と式(28.15)はマクスウェル方程式と同等であると考えられる。では、実際に計算していくことにする。

### 28.2.1 アンペール＝マクスウェルの法則の変形

アンペール＝マクスウェルの法則は以下のように書かれるることは前に確認した。すなわち、

$$\left( \mathbf{i} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{B} \quad (28.15)$$

である。この方程式に、電場や磁束密度のポテンシャル表示式(28.15)を考慮すると、以下のようになる。

$$\mathbf{i} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \phi \right) = \frac{1}{\mu_0} \text{rot} (\text{rot } \mathbf{A}) \quad (28.16)$$

さてここで、ベクトル解析による恒等式を用いる。それは、任意のベクトルを  $\mathbf{C}$  としたとき、

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{C} := \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{C} - \Delta \mathbf{C} \quad (28.17)$$

が成り立つというものである。この恒等式 (28.17) を用いれば、式 (28.16) は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu_0} (\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}) \\ &= \mathbf{i} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \phi \right) \\ &\Leftrightarrow -\mu_0 \mathbf{i} \\ &= \left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} - \operatorname{grad} \left( \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (28.18)$$

と変形される。ここで、 $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$  とおいた。 $c$  は波動の位相速度で、特にこの場合は光速の意味を持つ。注意しておくことは、この式はもはやアンペール＝マクスウェルの法則を示すものではないということである。

### 28.2.2 電場に対するガウスの法則の変形

電場に対するガウスの法則を書き下すと、

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \quad (28.19)$$

である。この式に、ポテンシャル表示された電場  $\mathbf{E} = -(\partial \mathbf{A}/\partial t) - \operatorname{grad} \phi$  を代入すると、

$$\begin{aligned} & \operatorname{div} \left( -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \phi \right) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \\ & \Leftrightarrow -\frac{\partial (\operatorname{div} \mathbf{A})}{\partial t} - \operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \end{aligned} \quad (28.20)$$

そして、 $\Delta := \operatorname{div} \operatorname{grad}$  ということに注意すれば、

$$\frac{\partial (\operatorname{div} \mathbf{A})}{\partial t} + \Delta \phi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho \quad (28.21)$$

となる。ここで、少々トリッキーな操作を行う。この式の両辺に  $-\varepsilon_0\mu_0(\partial^2\phi/\partial t^2)$  を加える。

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\operatorname{div} \mathbf{A})}{\partial t} + \Delta\phi - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} &= -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \\ \Leftrightarrow \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi + \frac{\partial}{\partial t} \left(\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\phi}{\partial t}\right) &= -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \end{aligned} \quad (28.22)$$

これで、とりあえずの式変形が終了した。この後に、これら4つの式を、次に確認する **Lorentz ゲージ** というゲージを導入し、もう少し表現を簡略化する。その前に、とりあえず今までに得られたマクスウェル方程式と等価な方程式をまとめておく。

### Point 73: マクスウェル方程式のポテンシャル表示

以下の方程式群は、マクスウェル方程式を、ベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルを用いた表現に書きなおしたものであり、先に導出したマクスウェル方程式と（数学的に）同等の内容である。

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \phi \quad (28.23)$$

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad (28.24)$$

$$-\mu_0\mathbf{i} \quad (28.25)$$

$$= \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{A} - \operatorname{grad} \left(\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\phi}{\partial t}\right) \quad (28.26)$$

$$\begin{aligned} &- \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \\ &= \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \phi + \frac{\partial}{\partial t} \left(\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\phi}{\partial t}\right) \end{aligned} \quad (28.27)$$

このままでは式の形がややこしいので、次に ゲージ変換 を確認して、ローレンツ

条件を導入しよう。

### 28.2.3 ゲージ変換

電場  $\mathbf{E}$  と磁束密度  $\mathbf{B}$  のポテンシャル表示の式は以下のように表現されることは、前項目で既に確認している。

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \phi \quad (28.28)$$

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (28.29)$$

ここで、2つのポテンシャル  $\mathbf{A}$  と  $\phi$  を以下のように変換してみる。

#### Point 74: ゲージ変換

2つのポテンシャル  $\mathbf{A}$  と  $\phi$  の ゲージ変換 とは、以下の変換のことをいう。

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \text{grad } \chi \quad (28.30)$$

$$\phi' = \phi + \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (28.31)$$

ここで、 $\chi$  は任意の関数である。このように、ポテンシャルを式(28.30)で変換することを、**ゲージ変換** という。なぜこんな可笑しな変換を考えるかといえば、それは次のような理由による。ポテンシャルをゲージ変換しても、電場と磁束密度は形を変えない。このことを確認をしておこう。

まず、電場について考えよう。ゲージ変換したポテンシャルでの電場  $\mathbf{E}'$  は、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= -\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} - \text{grad } \phi' \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} - \text{grad } \chi) - \text{grad} \left( \phi + \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\partial(\operatorname{grad} \chi)}{\partial t} - \operatorname{grad} \phi - \operatorname{grad} \left( \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) \\
 &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + -\operatorname{grad} \left( \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) - \operatorname{grad} \phi - \operatorname{grad} \left( \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) \\
 &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \phi \\
 &= \mathbf{E}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \mathbf{E}' = \mathbf{E} \quad (28.32)$$

よって、ゲージ変換を適用しても、電場の形の変化はない。

次に、磁束密度について確認しよう。ゲージ変換された磁束密度を  $\mathbf{B}'$  とすると、

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}' &= \operatorname{rot} \mathbf{A}' \\
 &= \operatorname{rot} (\mathbf{A} - \operatorname{grad} \chi) \\
 &= \operatorname{rot} \mathbf{A} - \operatorname{rot} \operatorname{grad} \chi \\
 &= \operatorname{rot} \mathbf{A} \\
 &= \mathbf{B} \\
 \therefore \mathbf{B}' &= \mathbf{B}
 \end{aligned} \quad (28.33)$$

よって電場と同様に、磁束密度についてもゲージ変換を適用しても、磁束密度の形を変えることはないことが示された。

以上のように、電場と磁束密度はゲージ変換に対してその形を変化させることはないことを示したが、このことを、電場と磁束密度は ゲージ変換に対して不変であると表現する。

#### 28.2.4 ローレンツ条件

ベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルが以下の式ローレンツ条件を満たすと仮定する。

**Point 75:** ローレンツ条件式

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (28.34)$$

こうすると、マクスウェル方程式がきれいに整理される。しかし、上のローレンツ条件はどうなるか。実は、これは大した問題ではなく、理論にも矛盾を引き起こしたりしない。そのことを確認するため、計算してみよう。

ローレンツ変換式に、ゲージ変換したポテンシャル  $\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \text{grad } \chi$ ,  $\phi' = \phi + (\partial \chi / \partial t)$  を代入して、

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi'}{\partial t} \\ = \text{div}(\mathbf{A} - \text{grad } \chi) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \phi + \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) \\ = \text{div } \mathbf{A} - \text{div grad } \chi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \\ = \text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \left( -\text{div grad } \chi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \right) \end{aligned}$$

ここで、 $\Delta := \text{div grad}$  であることに注意して、

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi'}{\partial t} \\ = \text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \left( \Delta \chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \right) \end{aligned}$$

この式で右辺第1項と第2項の和は、ローレンツ条件で0になるから、

$$\text{div } \mathbf{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi'}{\partial t} = - \left( \Delta \chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \right)$$

と計算される。ゲージ変換しても、ローレンツ変換式を維もできるためには、この式の右辺が0に等しければよく、つまり

$$\left( \Delta \chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \right) = 0 \tag{28.35}$$

が満たされていればよい。この条件を満たすような解  $\chi$  は1つ以上、すなわち、複数存在する。しかし、この条件を満たすような解ならば、 $\chi$  はどのようなものであってもよい。とにかく、そのような解が存在するということを確認できればそれでよいの

である。解である  $\chi$  具体的な形はあまり本質的ではないのだ。以上で確認終了。これで安心してローレンツ条件を用いることができる。

この条件式を用いて、ポテンシャル表記されたマクスウェル方程式を整理するとつぎのようになる。

**Point 76:** マクスウェル方程式のポテンシャル表示

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \phi \quad (28.36)$$

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (28.37)$$

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{i} \quad (28.38)$$

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho \quad (28.39)$$

ローレンツ条件式

$$\text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (28.40)$$

条件式が 1 つ多くなるが、マクスウェル方程式はかなり整理された形になったと感じられることと思う（感覚は人それぞれではあるが…）<sup>2)</sup>。

### 28.2.5 ポテンシャル表記の利点

マクスウェル方程式を、電位  $\phi$  とベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  で表すことで、マクスウェル方程式が数学的に美しい形で表現された。つまり、方程式が解きやすくなった

<sup>2)</sup> くどいようだが、確認しておきたいことがある。式を 1 つ追加してまでもマクスウェル方程式をポテンシャル表記するのは、後に考える量子力学や相対性理論とのかかわりをより深く理解するためである。この理由を改めておくのは、学習意欲を失うことのないようにするためにある。

のだ。マクスウェル方程式を解くとは、電場  $\mathbf{E}$  と磁束密度  $\mathbf{B}$  を求めることである。元の式では、 $\mathbf{E}$  と  $\mathbf{B}$  がひとつの方程式に混在している。それに対して、ポテンシャル表記された方程式は、 $\phi$  と  $\mathbf{A}$  が分離されている。つまり、元の式から  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  を解くより、ポテンシャル表記された方程式から  $\phi$ ,  $\mathbf{A}$  を求める方が簡単なのである。 $\phi$  と  $\mathbf{A}$  さえ求まれば、 $\mathbf{E}$  と  $\mathbf{B}$  はすぐに求められる。数学的解析を行いたい場合には、このポテンシャル表記された方程式は、とても役に立つ。

さらに言えば、ポテンシャル表記された方程式は量子力学や相対性理論との相性がいい。量子力学・相対性理論を学ぶ際には、ポテンシャル表記の方程式を理解していくなければならない。

もちろん、数式と物理現象との対応を、鮮やかに表現しているのは元の  $\mathbf{E}$  と  $\mathbf{B}$  で表される方程式である。要するに、目的応じて数式的表現を選べるのである。実際の物理現象のイメージを大切にしたい場合は  $\mathbf{E}$  と  $\mathbf{B}$  で表される方程式を使えばいい。問題を解析的(数学的)に解きたい場合はポテンシャル表記の方程式を選べばよい。一度数式で表現された物理現象は、もはや物理現象の数式表現と言うことにとどまらず、純粋に数学的な方程式の問題としても見れるのである。ポテンシャル表記された方程式は、意味がわからないとして避けてしまってはならない。むしろ、これから先の学習で、ポテンシャル表記の方程式はなくてはならないものになるはずである。

## 28.3 マクスウェル方程式のガリレイ変換

### 28.3.1 マクスウェル方程式に対してガリレイ変換は適用できない

マクスウェル方程式をガリレイ変換すると、式の形が変わってしまう。つまり、残念ながら、マクスウェル方程式はガリレイ変換に対して不変でない。

式で示すと、S座標系とS'座標系で式の形が違うということであり、

$$\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \neq \nabla'^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2}$$

ということ。要するに、波動方程式はガリレイ変換にできないので、波動方程式をその内部に含むマクスウェル方程式もガリレイ変換に従わないということだ。

しかし、マクスウェル方程式が間違っているのではない。マクスウェル方程式は電磁波など現象を予言できるし、電磁気現象を十分に説明できる方程式であり、誤っているとは考えにくい。

では、何がおかしいのか。実は、そもそも、ガリレイ変換がおかしいのである。特殊相対性理論により、ガリレイ変換は、光速よりも十分に遅く等速運動する物体に対

して有効な変換であることが分かった。より一般的な変換法則はローレンツ変換であり、ガリレイ変換はローレンツ変換の特殊な場合<sup>3)</sup>に過ぎない。そして、マクスウェル方程式はローレンツ変換に対しては不変である。

以下で、このことを数式を使いながら考えていこうと思う。よく教科書では、1) ガリレイ変換を偏微分の公式に形を変えて、その後に、2) 電磁波の波动方程式がその偏微分で表されたガリレイ変換の式に不変でないことを示している。このノートでも同じような手法をとる。計算課程も詳しく記載しておこう<sup>4)</sup>。

### 28.3.2 ガリレイ変換と偏微分演算子

#### 28.3.2.1 時間微分の計算

座標変換により、 $S = S'(x', t')$  と変換できるとする。このとき、合成関数の微分を用いると、時間微分 は以下の通り、

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial t'} &= \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t'} + \frac{\partial S}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t'} \\ &= \frac{\partial x}{\partial t'} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial t'} \frac{\partial S}{\partial t} \\ &= \left( \frac{\partial x}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial t} \right) S.\end{aligned}$$

ガリレイ変換の場合、空間座標は  $x = x' + Vt'$  ( $V$  は  $S$  系と  $S'$  系の相対速度) なので、

$$\frac{\partial x}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t'} (x' + Vt') = V.$$

さらに、

$$\frac{\partial x}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x'} (x' + Vt') = 1$$

が成立する。従って、

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial t'} &= \left( \frac{\partial x}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial t} \right) S \\ &= \left( V \frac{\partial}{\partial x} + 1 \frac{\partial}{\partial t} \right) S.\end{aligned}$$

<sup>3)</sup> ここでいう特殊な場合とは、光速に対して、とても遅く運動するという状況である。

<sup>4)</sup> 多くの教科書では、計算が当たり前すぎるためなのか、紙面の都合上の問題なのか、計算過程が示されておらず、結果のみが記されている。

微分演算子の部分を抽出すると（両辺の  $S$  の記述を省略すると）

$$\frac{\partial}{\partial t'} = V \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \quad (28.41)$$

を得る。よく見る式が現れた。

$y$  と  $z$  も同様に（書くまでもない気がするが），

$$\frac{\partial}{\partial t'} = V \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial t} \quad (28.42)$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} = V \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} \quad (28.43)$$

である。

### 28.3.2.2 空間微分の計算

同じように、空間微分 は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial x'} &= \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial S}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x'} \\ &= \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial x'} \frac{\partial S}{\partial t} \\ &= \left( \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial t} \right) S. \end{aligned}$$

ここで、さつき計算した  $\partial x / \partial x' = 1$  であることと，

$$\frac{\partial t}{\partial x'} = 0$$

であることを考慮すれば，

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial x'} &= \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial x'} \frac{\partial S}{\partial t} \\ &= \left( 1 \frac{\partial}{\partial x} + 0 \frac{\partial}{\partial t} \right) S \\ &= \frac{\partial}{\partial x} S \end{aligned}$$

を得る。微分演算子の部分を抽出すると（両辺の  $S$  の記述を省略すると）

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x} \quad (28.44)$$

を得る。これもまた、よく見る式だ。

$y$  と  $z$  に関する計算も同様に計算して,

$$\frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y} \quad (28.45)$$

$$\frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z} \quad (28.46)$$

となる.

## 28.4 ローレンツ変換

## 28.5 共変形式にむけて

### 28.5.1 4元電流

今までの電流密度  $\mathbf{i}$  は 3 次元ベクトルとして考えていた。これを以下のように、4次元に拡張する。4次元に拡張した電流のことを **4元電流** とよぶことにしよう<sup>5)</sup>。このノートでは、4元電流を表す記号として、 $\mathbf{j}$  を使うことにする。

$$\mathbf{j} = (j_0, j_1, j_2, j_3) := (c\rho, \mathbf{i}) = (c\rho, i_1, i_2, i_3). \quad (28.47)$$

ここに、 $c$  は光速であり、 $\rho$  は電荷密度である。

3次元の電流密度  $\mathbf{i}$  に対して、形式的に、その第 1 成分に  $c\rho$  を追加しただけだ。

念のため、これを電流の座標成分としてよいか、次元の確認をしておこう。光速  $c$  の次元は [m/s]、電荷密度  $\rho$  の次元は [C/m<sup>3</sup>] なので、

$$\left[ \frac{m}{s} \right] \left[ \frac{C}{m^3} \right] = \left[ \frac{m}{s} \right] \left[ \frac{A \cdot s}{m^3} \right] = \left[ \frac{A}{m^2} \right].$$

と計算される。電流密度の次元に一致することが確認できた。

---

<sup>5)</sup> 細かいことを言うと、4元電流密度 である。



第 V 部

熱・統計物理学



# 29 熱力学

**コメント** 熱力学では、主に気体の熱に関する物理法則を学んでいく。熱力学で着目する日常的に経験する物理現象を取り上げ、熱力学でどんな現象を解析するのかをイメージしよう。それと同時に、熱現象に関する経験則を日常経験の中からピックアップする。さらに、いくつかの実験結果・法則を紹介する。それらから、熱力学の理論を構築していこう。

## 29.1 熱力学的な系

**コメント** 熱力学で着目する日常的に経験する物理現象を取り上げてみる。熱力学学習最初の教科書として、菊川芳夫 著：「講談社の基礎物理シリーズ3『熱力学』」（講談社）を用いる。この教科書は具体例が豊富でイメージしやすい。

### 29.1.1 平衡状態/非平衡状態

熱力学では安定した状態（平衡状態）をあつかう。インクの拡散が進行している状態などの不安定な状態（（非平衡状態））は扱えない。インクの拡散が終わり再び安定した状態になった場合は熱力学の対象になる。つまり、変化の前後の安定状態は熱力

学の対象であるが、変化中の仮定は熱力学では扱えない。

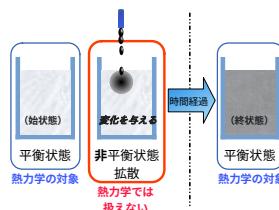


図 29.1 热力学の対象（平衡状態/非平衡状態）

### 29.1.2 热平衡状態

すでに私達は学校で、物質は無数の原子や分子から構成されていることを学んでいる。高校では、主に化学の分野で、アボガドロ定数  $N_A$  という巨大な数字にであう。

$$N_A := 6.02214179(30) \times 10^{23} [\text{mol}^{-1}] \quad (29.1)$$

アボガドロ定数と同じくらいの原子や分子が存在して、これを1つの考察対象の系するとき、巨視的（マクロ、macroscopic）な系という。

巨視的な系は、一定の環境や拘束の下で十分に長い時間が経過すると、系の物理的な性質がそれ以上変化しない平衡状態となり、温度・圧力・体積・物質量（モル数）など、巨視的な装置で測定される極小数の物理量によって記述できる。このような平衡状態を熱力学では、热平衡状態 という。热平衡状態に応じて値が決まる物理量を状態量 という。热平衡状態の例として、以下がある。

- 热平衡 ( $\rightarrow$  29.1.2.1節参照)
- 相平衡 ( $\rightarrow$  29.1.2.2節参照)
- 化学平衡 ( $\rightarrow$  29.1.2.3節参照)

巨視的に見て平衡状態（変化がない状態）にある系が热力学の対象となりうる<sup>1)</sup>

時間変化する状態を 非平衡状態 というが、热力学では簡単には扱えない。通常、热力学といえばあいは平衡状態の理論を指す。非平衡状態の热力学理論も構築されつつあるが、まだ安定した教科書が数少ない。あっても内容が高度である。

<sup>1)</sup> 平衡状態であれば、热力学で扱えない場合もあるかもしれない。

热力学が対象とする系は、均質な系（あるいは、均質な部分系）である。また、系の組成としては、一種の原子・分子からなる单一系や、数種類の原子・分子からなる混合系が考えられる<sup>2)</sup>。

### 29.1.2.1 热平衡

高温と低温の2つの物体を接触させてその状態を保ち、十分に時間が経過すると、この2つの物体の温度が等しくなり、温度が一定になる。この温度が一定にある状態を 热平衡状態 にあるという。

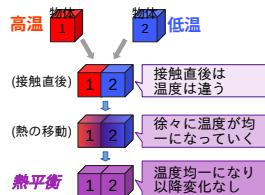


図 29.2 热平衡（物体の接触）

高温の物体はいくらか温度が下がり、低温の物体は温度が上がる。

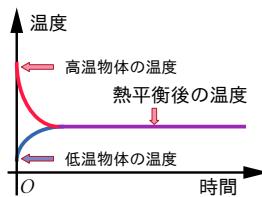


図 29.3 热平衡（温度推移のグラフ）

<sup>2)</sup> 単一系の原子の例として、水 ( $H_2O$ ) を分解してできた水素 ( $H_2$ ) や酸素 ( $O_2$ ) がある。单一系の分子の例は、先の水 ( $H_2O$ ) やアンモニア ( $NH_3$ ) がある。数種類の分子からなる混合系は空気（酸素  $O_2$ ・窒素  $N_2$ ・アルゴン  $Ar$ ・その他）がある。牛乳とかスポーツドリンクなどもへ好状態にある混合系といえるだろう。

### 29.1.2.2 相平衡

水を沸騰させてシリンジにピストンで吸い込み、ゴム栓をする。このとき、空気が入らないようにピストンを調整する。シリンジの中に封入された物質系は、水分子からなる液体の均質な系である。

その後、ピストンを押すと内部の水が沸騰して、その一部が水蒸気に変わる。この状態を保つようにピストンをストッパーで留めておく<sup>3)</sup>。このシリンジ内部の系は同じ水分子からなる単一系だけど、液体（水）と気体（水蒸気）という異なる2つの均質な部分系に分かれている。これを相平衡という。

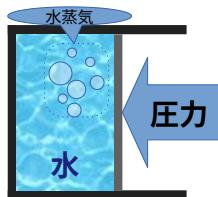


図 29.4 相平衡：熱湯を圧縮

液体（水）と気体（水蒸気）が共存し、相平衡になるときの圧力は、温度によって決まる。温度が低いほど相平衡になる圧力は小さく、温度が高いほど相平衡の圧力は高くなる。この相平衡となる圧力を飽和蒸気圧という。飽和蒸気圧を温度の関数として表したグラフを蒸気圧曲線という。

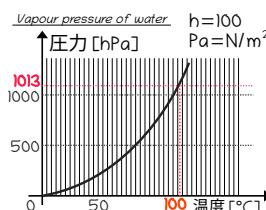


図 29.5 水の蒸気圧曲線

<sup>3)</sup>つまり、ピストン内部の圧力を高いままにしておく。

### 29.1.2.3 化学平衡

一定の温度に保たれた容器の中で、窒素・水素・アンモニアの気体を混合する。窒素分子  $N_2$  が反応してアンモニア分子  $NH_3$  が生成され、逆に、アンモニア分子が分解して窒素分子と水素分子が生成される。この仮定の化学反応式は



となる。しばらくすると、アンモニアの生成される反応速度と分解される反応速度が等しくなり、窒素・水素・アンモニアの物質量が一定の状態になる。これを 化学平衡 という。

このとき、窒素・水素・アンモニアのモル濃度をそれぞれ  $[N_2]$ ・ $[H_2]$ ・ $[NH_3]$  と表せば、次の関係式が成り立つ。

$$\frac{[NH_3]^2}{[N_2][H_2]} = K_c = \text{一定} \quad (29.3)$$

ここで、 $K_c$  は温度で決まる定数である。この関係式を 質量作用の法則 という。

### 29.1.3 準静的過程

変化中の状態は熱力学では扱えないのだが、その変化を少しづつ微小変化させる場合、つまり、その微小変化の前後では状態が変化したことを認識できないレベルで状態を少しづつ変化させる場合は熱力学で扱える場合がある。このような微小変化を連続させて状態変化を観測するとき、この微小変化のことを 準静的過程 という。

例えば、ピストンの内部の物質を圧縮する場合、急激に圧力をかけて体積を小さくする場合は変化が大きいので熱力学で扱えない。しかし、敷居を微小変位させて、とてもゆっくり<sup>4)</sup> 変化させた場合は、一回の微小変化の前後では変化がないため、熱力学で扱える。この無限回微小変化の繰り返しは準静的過程の一種である<sup>5)</sup>。

<sup>4)</sup> 無限回の微小移動、あるいは、無限の時間をかけてゆっくりと移動させるイメージ。

<sup>5)</sup> 0歳と80歳とで外面を比べると大きく違うが、その過程は準静的過程である。徐々に太っていく様子も準静的過程といえる。変化していないように見えるけど、実は変化している。だから、"準"静的過程という。完全に動いていない(静的)わけでもなく、だからといって変化しているように見えない。準静的過程はとても恐ろしい。

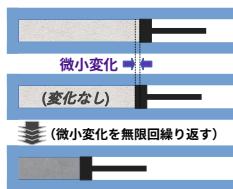


図 29.6 準静的過程の例

## 29.2 状態量

### 29.2.1 热力学で扱う変数（状態量）

单一の原子または分子からなる均質な系の熱平衡状態は、通常、温度  $T$ 、体積  $V$ 、物理量  $n$  によって特定することができる。温度または体積の変わりに圧力  $p$  を用いることもできる。これらの物理量は **状態量** である。

状態量の測定に用いる装置は巨視的であるため、測定値や測定に要する時間も巨視的なスケールになる。

热力学で扱われる単位の例

[L] (リットル) / [m<sup>3</sup>] (立方メートル) / [°C] (度) / [mol] (モル) / [kg] (キログラム) / [Pa] (パスカル) / [N/m<sup>2</sup>] (ニュートン毎平方メートル) / [s] (秒、あるいは、分や時間)

ややこしいことに、仕事  $W$  と熱量  $Q$  は状態量ではない。

### 29.2.2 示強変数と示量変数

熱平衡状態にある均質な系を部分系に分けた場合、その各々の部分系も熱平衡状態である。分かれた部分系を再び合成しても、何の変化も生じない。このとき、部分系の物質量 ( $n_1, n_2, \dots$ ) に比例して変化するか、あるいは分割前のものとの系と同じであるか、のいずれかである。例えば、体積は分割するとその分割の大きさ(物質量)に比例して小さくなる。他方で、温度や圧力は分割しても変化はない。体積のように、物質量に比例して変化する量のことを **示強変数** という。温度や圧力のように分割して

も変化しない量を **示強的** という。また、体積や温度や圧力などを変数化して式として現すとき、体積などの分割したら変化する示量的な変数のことを **示量変数** といい、温度や圧力などの分割しても変化しない示強的な変数のこと **示強変数** という。

示量的 (示量変数)	物質量、体積、質量、エンタルピー、内部エネルギー
示強的 (示強変数)	圧力、温度、濃度、密度、化学ポテンシャル

図 29.7 示強変数と示量変数の例

#### ¶ インク溶液の状態量

ビーカー内の水にインクを数滴垂らしてしばらく放置すると、インクは拡散してインクの密度は均一になる。この水とインクの均質な混合系の状態量は、体積  $V$  と水のモル数  $n$ （またはの密度  $(n/V)$ ）および温度  $T$  である。

均一になった後に、ビーカーに仕切りを入れて水と混合系を均質な 2 つの部分系にわけると、2 つの部分系の温度と水とインクの密度はそれぞれ等しい。仕切りを取り除いて 2 つの部分系を合わせても、温度と水とインクの密度に変化はない。したがって、温度と水のインクの密度は「示強的」である。

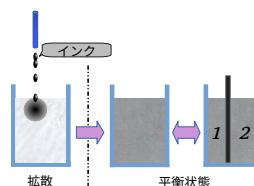


図 29.8 インク溶液の状態量

## 29.3 環境と拘束

### 29.3.1 孤立系（孤立した系; isolated system）

物質も通さず、熱も通さず、形も変化しない容器内部の系を 孤立系 という。当然、外部からエネルギーや仕事の供給もない。外からいかなる影響も受けないし、逆に外に対していかなる影響も及ぼさない。

### 29.3.2 断熱系

外界との熱のやりとりができない系を 断熱系 という。

### 29.3.3 閉鎖系（閉じた系; closed system）

物質を通さない系のことを 閉鎖系 という。熱やエネルギーのやり取りは可能である。

### 29.3.4 開放系（開いた系; opened system）

物質も通し、熱も通し、エネルギーや仕事のやり取りも可能な系を 開放系 という。

### 29.3.5 外界

着目している毛糸直接または間接的に接していて、熱や仕事、物質をやり取りする物質系を 外界 という。

### 29.3.6 環境

考察対象となる熱力学の系が置かれた周囲の状況のうち、室温や大気圧、熱湯（熱源）といった外界の条件をさして、これらを 環境 という。

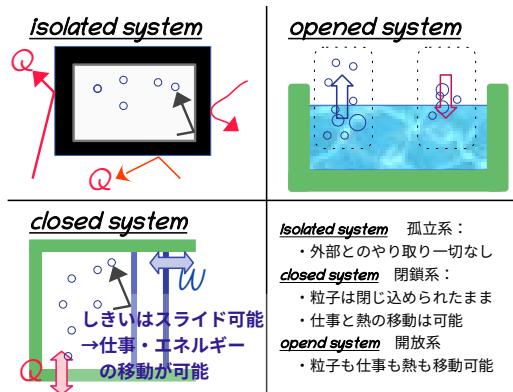


図 29.9 系の分類

### 29.3.7 拘束

考察対象となる熱力学の系が置かれた周囲の状況のうち、容器の壁やしきり、ピストンやピストンのストッパーといった、形状や体積および物質量を決める拘束条件、及び、断熱材や半透膜といった熱や物質の透過性を決める境界の性質、これらを **拘束** という。

### 29.3.8 環境と拘束

巨視的な系の熱平衡状態は、環境と拘束の下で、実現している。環境や拘束の変化に応じて、系の熱平衡状態は変化する。

### 29.3.9 可逆変化・非可逆変化

状態変化させた後で、対象とする系とその外界も含めてもとの状態に戻せる変化のことを **可逆変化** という。系だけがもとに戻つ多としても、可逆変化とはいわない。逆に、状態を戻せない変化のことは、**非可逆変化** という。

### 29.3.10 断熱環境：断熱ポットの中の熱湯

ポットの内部には、水蒸気と空気の混合系（気体）と水の单一系（液体）の2つの部分系からなっている。それぞれの部分系は均質である。ポットは閉じていて、形状が固定されていることから、系の物質量と体積は一定に保たれている。系は熱を通さない材質の壁（断熱壁）で囲まれていて、ポットの外部の大気の熱のやり取りができる。そのため、系の温度は外部の温度に影響されずに、一定の温度に保たれている。一方、2つの部分系（水と水蒸気・空気）の間には仕切りがなく、熱や物質を自由にやり取りできる。

断熱ポット全体を見れば、孤立系である。内部の水と水蒸気と空気に着目すると、相互に粒子やエネルギーのやり取りが行えるため、個々の水と水蒸気は開放系である。



図 29.10 断熱ポット

### 29.3.11 透熱環境：シリンジの中に封入された気体

シリンジの内部は均質な気体の系である。ピストンとゴム栓で閉じていることで、気体の物質量は一定に保たれている。ピストンが可動である場合、内部の気体は膨張あるいは収縮ができる、体積は変化する。ピストンをストッパーで固定する場合は、気体の体積を一定にする拘束が加わる。系の熱を通す材質の壁（透熱壁：シリンジとピストン）で囲まれており、内部の気体はシリンジの外部の大気と熱のやりとりができる。そのため、系の温度はシリンジの外部の温度と等しくなる。シリンジの外部の温度・圧力は、室温・大気圧に保たれている。

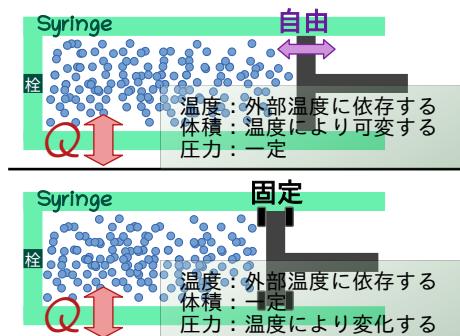


図 29.11 透熱壁

### 29.3.12 热源：浴槽ないの大量の熱湯の中に置かれた鉄球

十分多い量の熱湯の中に小さな手球をいれた系を考える。熱湯と鉄球は、それぞれ均質な部分系である。鉄球は変形したり傷がついたりしないものとすれば、この部分の体積・物理量は一定に拘束されている。熱湯は蒸発することができ、膨張することもできるので、この部分系の体積と物質量に拘束はない。鉄球と熱湯は直接的に接しているため、熱のやりとりがあり、その結果、どちらも温度が変わる。

熱湯の量が十分に多く、鉄球との熱のやりとりによる温度変化が認められないとき、お湯は鉄球に対して熱の供給源とみなせる。これを 热源（熱浴）という。ただし、大気と熱のやりとりによってお湯は冷めていく。一定の熱の供給源として用いるためには、湯沸かし器などによって、お湯の温度を一定に保つ必要がある。

### 29.3.13 半透膜：半透膜でしきられた希薄溶液

ある液体に少量の物質を溶かして作った溶液を 希薄溶液 という。溶けている物質を 溶質 といい、溶かすために用いる液体を 溶媒 という。また、溶媒は透過するが溶質は透過しないような膜状の物質を 半透膜 という。

ビーカー内に半透膜で 2 つに仕切り、片方には溶媒のみを、もう片方には溶質と溶媒を入れる。十分時間が経過した後、ビーカー内の気泡溶液の系は、半透膜で仕切られた溶媒と溶質の混合系と、溶媒のみ系の 2 つの均質な系からなる。溶質の物質量は

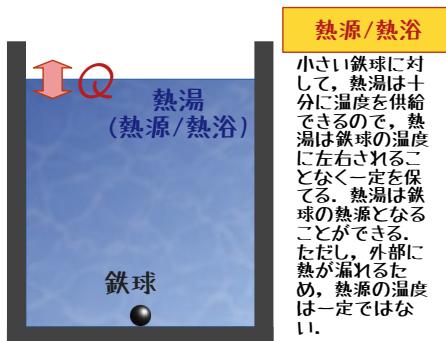


図 29.12 热源/热浴

半透膜によって片側の系（混合系）に拘束されている。溶質の物質量は 2 つの系の間で自由にやりとりができる。

ビーカー内の希薄溶液とビーカー外の大気との境界にしきりではなく、熱や物質を自由にやり取りできる。外界の条件は室温で大気圧にある。



図 29.13 半透膜

## 29.4 絶対温度（気温計による定義）

### 29.4.1 热力学第 0 法則

系 A と系 B が熱平衡状態にあり、系 A と系 C が熱平衡状態にあるならば、系 B と C も熱平衡状態にある。これは経験則で、実験事実である。熱力学の理論体系の基礎になる事柄なので、このことを 热力学第 0 法則 といわれることも多い。ただ、

熱力学の第1法則と第2法則に比べると、この第0法則という表現は少し非公式の感じがする。しかし、大事な原則の1つである。

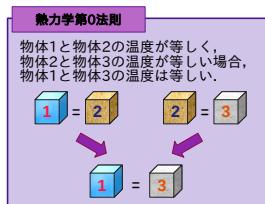


図 29.14 热平衡（熱力学第0法則）

#### 29.4.2 温度

実際、透熱壁を介して、系Bと系Cを接触させてみると、温度など状態量に変化はなく、互いに熱平衡状態にあることがわかる。このように、1つの系を基準にして、他の2つの系が互いに熱平衡状態にあるかどうかを、直接接触させることなく判断できる。この熱平衡状態の性質は、温度計によって温度を定めることのできる原理的な理由になっている。系Aを温度計とみなせば、系Bと系Cは等しい温度にあると見える。

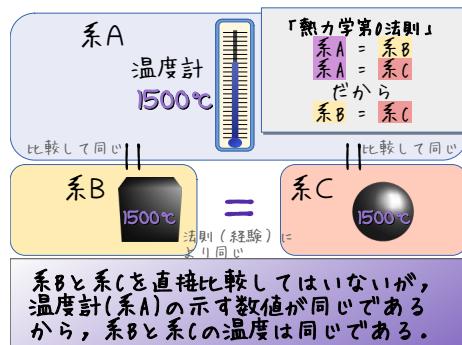


図 29.15 温度計

温度の目盛りを決めるには、一般に、温度計に用いる物質の熱膨張の性質を利用する

る。ほとんどの物質は温度が高くなると体積が膨張し、温度が低くなると収縮する性質を持つ。熱膨張とは、温度による体積の膨張のことのことである。

温度計に用いる物質は何でも良い。昔は（昭和、平成初期）、実用的には水銀やアルコールが使われていた。水の凝固点（ $0[^{\circ}\text{C}]$ ）のときの物質の体積を  $V_0$  =, また、水の沸点（ $100[^{\circ}\text{C}]$ ）のときの物質の体積  $V_{100}$  = として、その差  $V_{100} - V_0$  を 100 等分して目盛りを作る。このように考えた場合、温度  $t$  体積  $V$  の関数として現すことができて ( $t = t(V)$ ),

$$t(V) := 100 \times \frac{V - V_0}{V_{100} - V_0} \quad (29.4)$$

とかける。逆に、温度が分かれば、体積もわかる。

### 29.4.3 絶対温度

気体は、十分に希薄であれば、その体積の膨張率は一定とみなせる。

$$\begin{aligned} V &= V_0 + \frac{V_0}{273.15} t \\ &= V_0 \left( 1 + \frac{1}{273.15} t \right) \\ &= V_0 \left( \frac{273.15 + t}{273.15} \right) \end{aligned} \quad (29.5)$$

シャルルの法則の一例である。

ここで、

$$T := 273.15 + t \quad (29.6)$$

となる温度を新たに定義する。これを 気体温度計による絶対温度 という。すると、

$$V(T) = V_0 \frac{T}{273.15} = \frac{V_0}{273.15} T \quad (29.7)$$

となり、単純な比例の式になった。

# 30

## 気体の状態方程式

### 30.1 ボイルの法則

近代科学の先駆者としてコペルニクス<sup>1)</sup> やガリレイがよく挙げられる。それ以前には、思考のみによって世界の真理を追求してきたのだが、彼らは、これに疑問を訴え、観察や実験を通じた事実を基に、世界の真理を追求すべきだと主張した。

ボイル<sup>2)</sup> もその考えに基づき、自然を実験と観察に基づいて考えるという理念の下で、主に化学現象に関する研究を行っていた。その中で、ボイルは気体に関する法則を実験的に見出した。ボイルの法則である。

<sup>1)</sup> Nicolaus Copernicus (1473–1543, ?) : 地動説を唱えたことで有名。地球は太陽を中心に公転しているのだ。

<sup>2)</sup> Robert Boyle (1627–1691, イギリス) : 化学者、物理学者。

**Point 77: ポイルの法則**

温度を一定に保っている状態では、圧力と体積は反比例の関係にある。言い換えると、圧力と体積の積は一定値を保つ。圧力を  $p$ 、体積を  $V$  としたとき、

$$pV = k. \text{ (温度一定)} \quad (30.1)$$

ここで、 $k$  は気体の初期状態により決まる定数。

ポイルの法則や、この後に説明するシャルルの法則は、熱力学の教科書だけでなく、化学の教科書にも登場する。その意味で、熱力学と化学を結ぶ重要な法則である。

## 30.2 シャルルの法則

シャルル<sup>3)</sup> 気体に関する法則を実験的に見出した。シャルルの法則 とよばれる。

**Point 78: シャルルの法則**

圧力を一定に保っている状態では、体積と温度は比例関係にある。言い換えると、体積と温度の比は一定値を保つ。体積を  $V$ 、温度を  $T$  としたとき、

$$\frac{V}{T} = l. \text{ (圧力一定)} \quad (30.2)$$

ここで、 $l$  は気体の初期状態により決まる定数。

比例定数についても実験的に得られる。もう少しシャルルの法則を詳しく書くと、次ようになる。すなわち、一定圧力において、気体の体積は、温度を 1 度上昇させると、0 度の時の体積の  $1/273$  ずつ増加する。式で表すと、0 度の時の体積を  $V_0$  とし、温度  $t$  度上昇させた時の、気体の体積  $V(t)$  は、

$$V(t) = \frac{1}{273} V_0 t + V_0.$$

<sup>3)</sup> Jacques Alexandre César Charles (1746–1823) : 化学者。

次のように式変形してみよう。

$$V(t) = \left( \frac{1}{273} t + 1 \right) V_0 = \frac{t + 273}{273} V_0.$$

$T = t + 273$  を導入して、

$$V(t) = \frac{T}{273} V_0$$

となる。この  $T$  のことを 絶対温度 といい、単位を [K] で表す。[K] は「ケルビン」と読む。

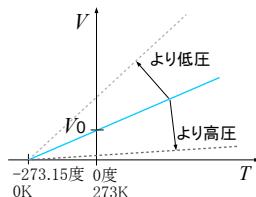


図 30.1 シャルルの法則

### 30.3 ポイル＝シャルルの法則

ポイルの法則とシャルルの法則を 1 つにまとめることができる。ひとまとめにできることを示すには、実際に状態遷移の計算をしてみて、矛盾がないことを確認すればいい。

温度  $T$  と体積  $V$  と圧力  $p$  の添字のアルファベット (A, B, C) は、図 30.2 で示す状態に対応する。状態遷移は次のように行う。まず、最初の状態を A とする。状態 A から等温変化させて、状態 B へ移す。この時、等温変化であるから、ポイルの法則が成り立つはずである。更に、状態 B から状態 C へ等圧変化により遷移させる。この場合は、等圧変化であるので、シャルルの法則が成り立つはずである。最後に、状態 A と状態 C における各温度、体積、圧力の関係が等しければ、ポイルの法則とシャルルの法則をひとまとめにできることが示される。

一定温度  $T_A$  の下で、ポイルの法則により、

$$p_A V_A = p_B V_B.$$

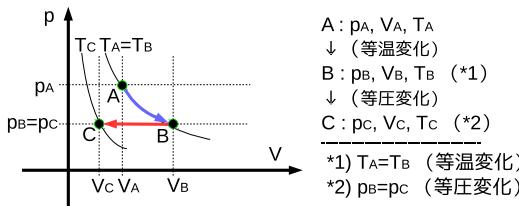


図 30.2 ポイル = シャルルの法則

後の式変形のため,  $V_B$  について解いておく.

$$V_B = \frac{p_A V_A}{p_B}.$$

引き続き, 一定圧力  $p_B$  の下で, シャルルの法則より,

$$\frac{V_B}{T_B} = \frac{V_C}{T_C}.$$

$V_B$  を置き換えて,

$$\frac{p_A V_A}{T_B p_B} = \frac{V_C}{T_C}.$$

両辺に  $p_B$  をかけておく.

$$\frac{p_A V_A}{T_B} = \frac{p_B V_C}{T_C}.$$

ここで, 状態 A から B の遷移は等温変化であるので,

$$T_B = T_A.$$

また, 状態 B から状態 C への遷移は等圧変化であるので,

$$p_B = p_C.$$

この 2 点を考慮すると

$$\frac{p_A V_A}{T_A} = \frac{p_C V_C}{T_C}.$$

式の添字に着目すれば、最初の状態 A と最後の状態 C において、関係式  $pV/T$  が同じ値をとることがわかる。この値を  $k$  と書くことにすれば<sup>\*4)</sup>、

$$\frac{pV}{T} = k.$$

次のように書き換えれば、よく見かける方程式になる。

$$pV = kT.$$

これが、ボイル＝シャルルの法則である。ボイル＝シャルルの法則の式は、気体の状態方程式とよばれる。

まとめておこう。

#### Point 79: ボイル＝シャルルの法則

気体において、温度  $T$ 、体積  $V$ 、圧力  $p$  は、定数  $k$  を用いて、以下の関係式を満たす。

$$pV = kT. \quad (30.3)$$

## 30.4 理想気体

理想気体の状態方程式が厳密に成り立つ理想的な気体のことを 理想気体 という。理想気体は実在しないが、高温状態あるいは低圧状態では、実在する気体を理想気体とみなしうることができる、ということもある。実際は、工学的には、理想と現実の乖離具合を常に意識しなければならない。ただ、理論構築のためには、理想気体はとても有用なので、熱力学では理想気体が主役になる。理想気体の性質を理論的に把握することで、現実に存在する 実在気体 の性質を推察できるようになる。どれだけ実在気体が理想気体と乖離しているかが、実在気体の特徴であるともいえる。

<sup>\*4)</sup>

$$k := \frac{p_A V_A}{T_A} = \frac{p_C V_C}{T_C}.$$

## 30.5 状態方程式

**コメント** 気体が従う自然法則（方程式）を導入する。熱力学では、ニュートンの運動方程式と同じように、天下り的に与えられる式であり、他から導き出されるものではない。気体を無数の粒子の集まりとして仮定した統計力学から、理想気体の状態方程式を導けるが、これは熱力学の論理の範囲外である。今は熱力学を学習しているため、状態方程式は実験事実の自然法則として受け入れよう。

### 30.5.1 理想気体の状態方程式

状態方程式は熱力学の基本法則の1つである。以下に書き下そう。

#### Point 80: 理想気体の状態方程式

理想気体において、圧力  $P[\text{N}/\text{m}^2]$ 、体積  $V[\text{m}^3]$ 、物質量  $n[\text{mol}]$ 、温度  $T[\text{K}]$ 、  
気体定数  $R[\text{J}/\text{mol}\cdot\text{K}]$  の条件下で、以下が成り立つ。

$$PV = nRT. \quad (30.4)$$

理想気体の状態方程式のことは、混乱の恐れがない場合には、単に、状態方程式ともいう。

### 30.5.2 気体の濃度

体積  $V[\text{m}^3]$  の容器の中に  $n[\text{mol}]$  の気体が入っているとき、この気体の濃さを数値化できる。同じ堆積中で、たくさん気体が入っていれば濃くなるし、少なければ、薄くなる。これを **濃度** という。濃度を  $\sigma$  で現すと、

$$\sigma = \frac{n}{V} \quad (30.5)$$

である。状態方程式と対比させてみと、以下になる。

$$PV = nRT$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{n}{V}RT$$

$$\Leftrightarrow P = \sigma RT$$

濃度  $\sigma = n/V$  が一定の場合に成立する式だ。圧力は濃度に比例する。気体の濃度が濃いほど圧力は高くなるのだ。

$$P(T) = \sigma RT. \quad (30.6)$$

注意すべきは式を濃度  $\sigma$  について解いてみて

$$\sigma = \frac{P}{RT} \quad (30.7)$$

としてしまうと、あたかも濃度が圧力に比例するように見える。この解釈は間違いである。濃度はもともと、 $n/V$  であることを忘れてはいけない。 $n$  の値は変化しない(急に気体が湧いて出たりしない)。つまり、圧力が変化して濃度が変わったのであれば、実際には体積  $V$  が変化したということである。圧力  $P$  を高くして体積  $V$  をぐぐっと縮みることで、濃度が高くなるのだ。

### 30.5.3 実在気体の状態方程式

#### 30.5.3.1 ビリアル方程式

#### 30.5.3.2 ファンデルワールスの状態方程式

実在する気体の振る舞いをいい感じに表現する方程式がある。液体にも適用可能である。ファンデルワールス<sup>5)</sup>というオランダ人の物理学者が提案した、実在気体の状態方程式である。気体の種類によって、振る舞いが異なるので、それに対応する特徴的な定数  $a$ ,  $b$  が使われる。

ファンデルワールスの状態方程式も他から導かれるものではないが、雰囲気からなら説明・導入ができる。理想気体の状態方程式に現実的要素を織り交ぜて、変形していく。理想気体からの乖離を補正するのである。補正を受けるのは、体積  $V$  と圧力  $P$  である。まず、体積から考えよう。

---

<sup>5)</sup> Johannes Diderik van der Waals(1837–1923, オランダ)：ヨハネス ディーデリク ファン デル ワールス。1910 年にこの気体の状態方程式の発見によりノーベル賞を受賞している。分子間力の 1 つである、ファンデルワールスカ（ファンデルワールス結合）でもその名前が知られている。

理想気体を構成する粒子は体積はないものと仮定されていた<sup>6)</sup>。しかし、実在気体を構成する粒子は、一つ一つは微小であるが、体積を持つ。現実気体  $n[\text{mol}]$  の体積を  $V_R(\text{Real の R})$ 、おなじく理想気体  $n[\text{mol}]$  の体積を  $V_I(\text{Image の I})$  とするならば、体積の補正項を  $b$  を導入して、

$$V_R = V_I + bn \quad (30.8)$$

と書ける。実在気体の体積は理想気体の体積よりも、粒子自体の大きさ分だけ、大きいと考える。

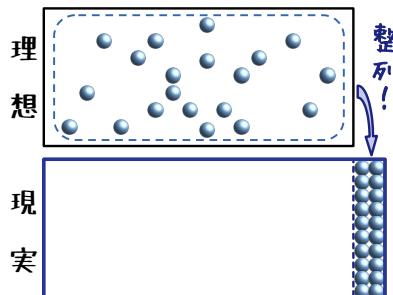


図 30.3 実在気体：体積

実在の気体の圧力も理想とは異なる。実際には分子を構成する原子機構により分子内部の電子の位置が偏り、分子自体に正負の電気的な偏りができる。これが複数存在すると、分子のプラス側（正）と別の分子のマイナス側（負）が引き合う現象がおきる。これを分子間力という<sup>7)</sup>。分子間力が働くと、分子の運動が束縛されて（分子の運動が鈍くなり）、結果、圧力が弱まる。では、どの程度弱まるのか。モル濃度の2乗に比例すると考えられている（根拠は実験かな）。現実気体  $n[\text{mol}]$  の圧力を  $P_R(\text{Real の R})$ 、おなじく理想気体  $n[\text{mol}]$  の圧力を  $P_I(\text{Image の I})$  とするならば、

<sup>6)</sup> 実際、熱力学が成立した時代にも、原子や分子の存在は知られていなかった。確かに、デモクリトストスが提唱していたと言われているが、空想上の概念であり、デモクリトスが実験的に原子や分子の存在を確かめたわけではない。

<sup>7)</sup> 分子間力といっても、発生機構によって細分化される。イオン間相互作用、水素結合、双極子相互作用、ファンデルワールス力。

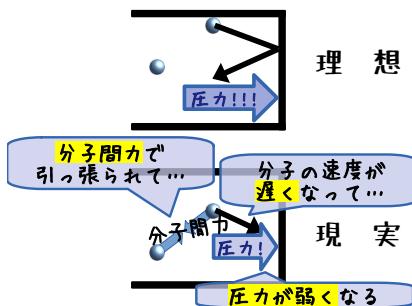


図 30.4 実在気体：圧力

圧力の補正項を  $a$  を導入して、

$$P_R = P_I - a \left( \frac{n}{V_I} \right)^2 \quad (30.9)$$

となる。

理想気体の状態方程式は厳密に成り立つ。 $V_I$  と  $P_I$  を使って理想気体の状態方程式を書くならば、

$$P_I V_I = nRT.$$

だけど、 $V_I$  と  $P_I$  は実在気体の体積と圧力だから、この式は間違っている。式を補正して正しくしよう。この理想気体型の状態方程式に、さつき計算した結果を適用すればよい。まず、上記の 2 つの式をそれぞれ、 $V_I$  と  $P_I$  について解くと、

$$V_I = V_R - bn \quad (30.10)$$

$$P_I = P_R + a \left( \frac{n}{V_I} \right)^2 \quad (30.11)$$

である。これを状態方程式に代入しよう。

$$\left( P_I + a \left( \frac{n}{V_I} \right)^2 \right) (V_I - bn) = nRT. \quad (30.12)$$

カッコが多くて嫌なので、適当に外すと、

$$\left( P_I + a \frac{n^2}{V_I^2} \right) (V_I - bn) = nRT. \quad (30.13)$$

となる。

これを ファンデルワールスの状態方程式 という。また、 $a$ 、 $b$  のことを ファンデルワールス定数 という。

**Point 81:** ファンデルワールスの状態方程式

現実気体  $n[\text{mol}]$  の圧力を  $P_I$ 、現実気体  $n[\text{mol}]$  の体積を  $V_I$  として (Real の R),

$$\left( P_I + a \frac{n^2}{V_I^2} \right) (V_I - bn) = nRT. \quad (30.14)$$

「理想気体の圧力に対して、実在気体の圧力は分子間力の分だけ小さくなるので、補正項を足す」、「理想気体の体積に対して、実在気体の体積は大きさがある分だけ大きくなるので、補正項を引く」と捉えておけばよいだろう。

ちなみに、教科書には  $P_I$  を左辺にした表現となっていた。

$$P_I = \frac{nRT}{(V_I - bn)} - a \left( \frac{n}{V_I} \right)^2. \quad (30.15)$$

ちょっと細工すると、

$$P_I = \frac{1}{(V_I - bn)} nRT - a \left( \frac{n}{V_I} \right)^2.$$

この表現からは、現実気体の圧力は、理想気体の  $1/(V_I - bn)$  で、さらに、分子間力がはたらく分だけ小さくなることが読み取りやすい。

## 30.6 分圧の法則

混合気体が入った容積の圧力を考える。この容積内部の圧力について、以下の法則が成り立っている。

### Point 82: 分圧の法則

混合気体の圧力（全圧）は、それを構成する各々の種類の成分圧力（分圧）の和に等しい。気体は何種類もあってよくて、 $k$  種類の気体がある場合は以下の式が成り立つ。

$$P = \sum_{i=1}^k p_i \quad (30.16)$$

左辺の  $P$  が全圧であり、右辺の  $p_i (i = 1, 2, \dots, n)$  が分圧である。

ドルトンが提唱した法則なので、「ドルトンの分圧の法則」とかと紹介されることも多い。

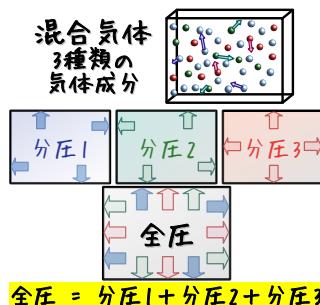


図 30.5 全圧と分圧

うへん、この法則はどうやって実験的に確かめたのだろうか。原理的には、こうだろう。まず、同体積の気体 A, B, C を用意して、それぞれの圧力の計測する。これは、後で気体を混合した場合に、元々の各気体の分圧の測定とみなせる。その結果をそれぞれ  $P_A$ ,  $P_B$ ,  $P_C$  であったとしよう。次に、同じ体積に A, B, C の 3 つの気体を同じ一つの箱に押し込めて、圧力を測定する。たとえば、B と C を A の箱に詰めるなど。そうすると、3 種類の全気体が 1 箇所に集まることになり、この A と B と C から構成される全気体の圧力（すなわち全圧）の測定が可能になる。分圧の法則にしたがえば、全圧を単に  $P$  すると、

$$P = P_A + P_B + P_C$$

と計算できる。

気体が分子から構成されていることと理想気体の状態方程式から、分圧の法則が導けないだろうか。もう少し遊んでみよう。

状態方程式  $PV = nRT$  から、 $P = (n/V)RT$ 。温度  $T$  は一定であるとする。すると、

$$\frac{n}{V}RT = \frac{n_A}{V_A}RT + \frac{n_B}{V_B}RT + \frac{n_C}{V_A}RT.$$

$n_A, n_B, n_C$  は A, B, C のそれぞれのモル数。 $V_A, V_B, V_C$  はそれぞれ、A, B, C の体積である。体積は同じで、

$$V = V_A = V_B = V_C.$$

だから、

$$\frac{n}{V}RT = \frac{n_A}{V}RT + \frac{n_B}{V}RT + \frac{n_C}{V}RT.$$

気体の単位体積あたりのモル数（濃度） $\sigma$  を考えて、

$$\sigma := \frac{n}{V}, \quad \sigma_A := \frac{n_A}{V}, \quad \sigma_B := \frac{n_B}{V}, \quad \sigma_C := \frac{n_C}{V}$$

と書くことにすると、

$$\begin{aligned} \sigma RT &= \sigma_A RT + \sigma_B RT + \sigma_C RT \\ \Leftrightarrow \sigma &= \sigma_A + \sigma_B + \sigma_C. \end{aligned}$$

となる。体積が一定であれば、それぞれの気体を混ぜ合わせた後の濃度は、それぞれの濃度の足し算で計算できる。体積  $V$  がみえるようにかくと、

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_A + \sigma_B + \sigma_C \\ \frac{n}{V} &= \frac{n_A}{V} + \frac{n_B}{V} + \frac{n_C}{V} \\ \therefore n &= n_A + n_B + n_C \end{aligned}$$

である。容積中の全体の気体のモル数は、個々の気体のそれぞれのモル数を足し合わせたものである。

このモル数の足し合わせの結果をベースにして、温度と体積が一定であるという条件の下で、これまでの議論を逆にたどれば、分圧の法則が導ける。

$$n = \sum_{i=1}^k n_i$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \frac{n}{V} &= \frac{1}{V} \sum_{i=1}^k n_i = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{V} \\ \Leftrightarrow \frac{n}{V} T &= \left( \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{V} \right) T = \sum_{i=1}^k \left( \frac{n_i}{V} T \right) \\ \Leftrightarrow \frac{n}{V} RT &= \left( \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{V} \right) RT = \sum_{i=1}^k \left( \frac{n_i}{V} RT \right) \\ \Leftrightarrow P &= \sum_{i=1}^k p_i. \quad (\text{分圧の法則が導けた})\end{aligned}$$

どちらかと言うと、モル数をベースにしたほうが直感的で理解しやすいと思う。ただ、式変形に物理的な洞察はなく、説得力に欠ける。モル数をベースにして、温度と圧力が一定だったら、必然的に、分圧の法則が成り立つ、という事実が説明できるだけだ。



# 31

## 気体分子運動論

コメント 気体についての考察。気体は無数の分子から構成されていると言う仮定して、気体の圧力や分子の運動エネルギーについて調べてみよう。

### 31.1 仮定

気体分子運動論を考える状況について、議論の最初に、いくつか仮定を設けておく。

## 気体分子運動論の仮定

- 気体は理想気体を対象とし、分子間力は考えない
- 分子は数え切れないほど多く存在し、巨視的に見れば、あらゆる方向に均一に運動している ( $x, y, z$  の全方向に均一である)
- 分子同士の衝突はないものとする（衝突しても結果は変わらないが、状況が複雑になり計算が面倒になる）
- 分子と壁は弾性衝突する（衝突係数 = 1: 跳ね返りによるエネルギーの散逸なし）
- 重力の影響はないものとする
- 1辺が  $L[\text{m}]$  の立方体の容器に入った気体分子を考える（体積は  $V = L^3[\text{m}^3]$ ）

## 31.2 分子の速度とその平均

まず、立方体のある1つの分子に着目する。この分子の速度を  $\mathbf{v}$  とする。速度は3次元があるので、 $\mathbf{v}$  は  $x, y, z$  成分に分解できる。

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z). \quad (31.1)$$

他のベクトル量も3次元であり、速度と同様に3つの成分を持つ。後で使うので、速度の2乗平均  $\bar{v^2}$  も計算しておこう。

まず、速度ベクトルを2乗する。

$$\mathbf{v}^2 = v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

すべての分子の平均をかんがえると、

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{v}^2} &= \bar{v^2} \\ &= \bar{v_x^2} + \bar{v_y^2} + \bar{v_z^2} \\ &= \bar{v_x^2} + \bar{v_y^2} + \bar{v_z^2}\end{aligned}$$

さらに、あらゆる方向に均一に運動しているので、

$$\bar{v_x^2} = \bar{v_y^2} = \bar{v_z^2}$$

としてよい。一旦  $v_x$  だけの式にする。

$$\bar{v^2} = 3\bar{v_x^2}$$

これより、

$$\bar{v_x^2} = \frac{1}{3} \bar{v^2} \quad (31.2)$$

を得る。この速度の式は後の計算で使うことになる。

#### # memo No.99: $N$ 個の分子の速度の 2 乗平均

この部分の計算で、現れた速度の 2 乗平均の計算方法を確認しておこう。 $N$  個の分子に、1 から  $N$  の自然数で番号付けをしておこう。そして、 $N$  個の各々の分子の速度を、 $v_i$  としよう。添字の  $i$  は 1 から  $N$  までのいずれかの自然数である。自然数  $i$  をきめると、対応する分子が定まるこのことになる。平均とは全部（ここでは  $N$  個）のデータを合計して、その総数（ここでは  $N$  個）で割った値のことである。 $v_1, v_2, v_3, \dots$  の値はそれぞれ異なる。個々の値には興味はなく、その平均が知りたい。ここで知りたいのは速度の大きさの平均である。速度は正負の向きを持ったベクトルなので、このまま足し合わせても速さの平均値を求めることはできない<sup>1)</sup>。そこで、速度の 2 乗平均を計算することにしよう。実は、運動エネルギーも速度の 2 乗であるため、この方法が都合が良い。

すると、速度の 2 乗平均は以下のように計算される。

$$\begin{aligned} \bar{v^2} &= \frac{1}{N} (v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_N^2) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^2. \end{aligned}$$

速さが知りたかったら、平方根取ればいい。

$$v = \sqrt{\bar{v^2}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^2}.$$

### 31.3 分子 1 つが壁に衝突するときに、壁に与える平均の力: $\bar{f}_x$

まずは  $x$  軸方向のみを考えよう。

<sup>1)</sup> 極端な例を上げよう。速度には正負の向きがあるため、たまたま、すべてを合計したら 0 になるかのせいもある。平均の速度が 0 となる。ベクトルとしてはそれで正解であるが、速さの平均を求めるのであるから、平均が 0 になってしまいしまうのは困る。各々の絶対値をとる方法も考えれるかもしれないが、二乗して必ず正の値になるように細工したほうが都合が計算しやすいし、式も見やすいし良い。二乗しているので、計算の最終段階で平方根を求めれば良い。

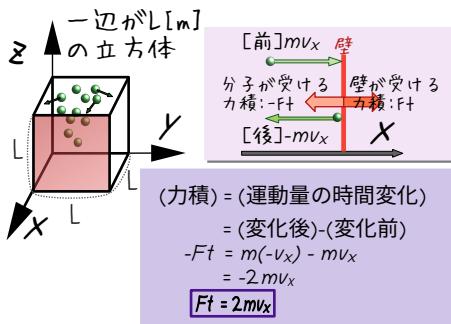


図 31.1 気体分子運動論

最初に、「壁が分子から受ける力積」を計算する。この力積を  $I_x$  とする。計算したいのだが、壁の速度に変化がないので、壁の運動から直接的に計算できない。そこで、分子と壁の作用反作用の法則を利用する。つまり、

$$\text{分子の受ける力積} = -\text{壁の受ける力積}$$

が成り立っているはずなので、分子の受ける力積を計算して、符号を反対にすればよい。力積は運動量の変化分に等しく、

$$\text{力積} = \text{衝突後の運動量} - \text{衝突前の運動量}$$

である。運動量  $mv_x$  で運動していた分子は壁に衝突すると、速度は反対向きになり、 $m(-v_x)$  となる。また、分子が壁から受ける力積は  $x$  軸方向の反対なので、符号はマイナスである。これに当てはめると、分子が壁から受ける力積  $-I_x$  は

$$\begin{aligned}-I_x &= -\bar{f}_x t \\&= m(-v_x) - mv_x \\&= -mv_x - mv_x \\&= -2mv_x\end{aligned}$$

である。 $\bar{f}_x$  は一回の衝突で与える  $x$  方向の力の大きさである。これより、壁が分子から受ける力積  $I_x$  は、

$$I_x = \bar{f}_x t = 2mv_x \quad (31.3)$$

となる<sup>2)</sup>.

次に、「1つの分子が  $t$  秒間に壁に与える力積」を計算する。壁にあたった瞬間を  $t = 0$  としたとき、分子は往復で  $2L$  の距離を速度  $v_x$  で運動しているわけだから、次に衝突する時間を  $t'$  とすれば、

$$2L = v_x t'$$

が成立している。 $t'$  について解いて、

$$t' = \frac{2L}{v_x}$$

としておこう。分子が壁に1回衝突するのにかかる時間が  $t' = 2L/v_x$  であることがわかった。であれば、 $t$  秒間に衝突する回数  $n$  は、 $t/t'$  を計算すればよく、

$$n = \frac{t}{t'} = \frac{t}{2L/v_x} = \frac{v_x t}{2L}$$

となる。

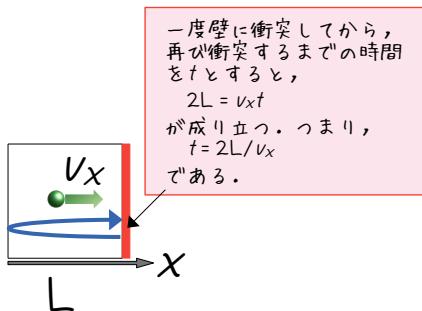


図 31.2 壁への衝突回数

分子が壁に与える1回あたりの力積  $I_x$  は  $I_x = \bar{f}_x t = 2mv_x t$  であった。これを使えば、 $t$  秒間に分子1つが壁に与える力積がわかる。以下のとおりである。

$$2mv_x \times \frac{v_x t}{2L} = \frac{mv_x^2}{L} t = \bar{f}_x t.$$

<sup>2)</sup> ちなみに、「壁が分子から受ける力積」を言い換えれば、「分子が壁に与える力積」である。言葉の表現による注意も怠りなく。

したがって、最後の等式の対応見れば、壁に与える平均の力  $\bar{f}_x$  がわかる。

$$\bar{f}_x = \frac{mv_x^2}{L}. \quad (31.4)$$

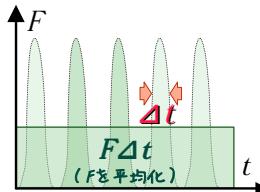


図 31.3 力積

### 31.4 分子 N 個が壁に衝突するときに、壁に与える平均の力: $\bar{F}_x$

分子  $N$  個の衝突によって、壁が受ける平均の力が知りたい。これは  $\bar{f}_x$  を  $N$  倍することで計算できる。ただし、注意が必要である。いままでは 1 つの分子について着目していたため、 $v_x^2$  は確かな固定値であった。しかし、今回は  $N$  個の分子を対象にしており、すべての分子が一律に  $v_x^2$  という速度で運動しているはずがなく、このまま  $v_x^2$  すれば、誤りとなる。ではどうするかと言うと、答えは簡単で、 $N$  個の分子の速度の平均値を考えれば良い。これを  $\bar{v}_x^2$  とかくことにしよう。

$$\bar{F}_x = \frac{Nm\bar{v}_x^2}{L}. \quad (31.5)$$

### 31.5 気体の圧力: $P$

圧力とは、単位面積あたりの力のことであった。今の場合、面積は  $L^2$  である。 $N$  個の分子からなる気体が発生させる圧力  $P$  は

$$P = \frac{\bar{F}_x}{L^2} = \frac{Nm\bar{v}_x^2}{LL^2} = \frac{Nm\bar{v}_x^2}{L^3}$$

である。ここで、 $L^3$  は立方体の体積であるから、 $V$  という文字で置き換えておこう ( $V := L^3$ )。

$$P = \frac{Nm\bar{v}_x^2}{V}$$

さらに、さつき計算した速度の式

$$\bar{v}_x^2 = \frac{1}{3}\bar{v}^2$$

を適用すると、

$$P = \frac{Nm\left(\frac{1}{3}\bar{v}^2\right)}{V} = \frac{Nm\bar{v}^2}{3V}.$$

となる。

## 31.6 分子 1 つの並進運動エネルギーの平均値

理想気体の状態方程式  $PV = nRT$  に関連付けたいので、両辺に  $V$  をかけよう。

$$PV = nRT = \frac{Nm\left(\frac{1}{3}\bar{v}^2\right)}{V} = \frac{Nm\bar{v}^2}{3}.$$

分子 1 つの運動エネルギーは  $mv^2/2$  であるから、この式から抽出してみよう。 $mv^2/2$ について解いてから、両辺に  $1/2$  をかけるとよいだろう。

$$\begin{aligned} nRT &= \frac{Nm\bar{v}^2}{3} \\ \Leftrightarrow mv^2 &= \frac{3nRT}{N} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 &= \frac{3}{2}\frac{n}{N}RT. \end{aligned}$$

ここで、 $n/N$  に注目しよう。 $N$  は気体分子全部の個数で、 $n$  は物質量 ([mol]) である。つまり、 $N$  を  $n$  で割ると、1[mol]あたりの分子の個数が計算できて、これはアボガドロ定数  $N_A$  であり、

$$N_A = \frac{N}{n}$$

であるから、 $n/N$  を  $1/N_A$  で置き換える。

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}\frac{R}{N_A}T.$$

後で詳しく学習するが、 $R/N_A$  はボルツマン定数  $k_B$  であり、以下を得る。

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}k_B T. \quad (31.6)$$

分子の運動エネルギーの平均値は、絶対温度  $T$  のみにより定まり、気体種類には依存しないことがわかる。

### 31.7 単原子分子からなる理想気体の内部エネルギー

$N$  個の単原子分子からなる理想気体の内部エネルギー  $U$  は、内部の分子の運動エネルギーの平均を  $N$  倍すればいい。

$$\begin{aligned} U &= N \times \frac{1}{2}mv^2 \\ &= N \times \frac{3}{2}\frac{R}{N_A}T \\ &= \frac{3}{2}\frac{N}{N_A}RT \end{aligned}$$

ここで、 $n = N/N_A$  だから、

$$U = \frac{3}{2}nRT = \frac{3}{2}PV. \quad (31.7)$$

単原子分子の内部エネルギーは絶対温度で定まり、絶対温度に比例する。

考えなければならず、この結果は多原子分子には適用できない。

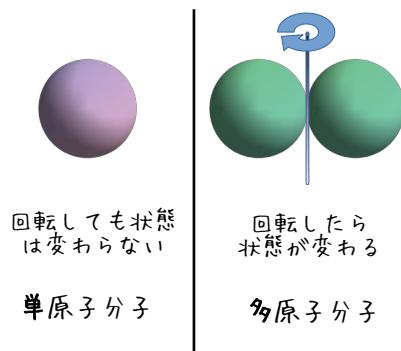


図 31.4 多原子分子の場合は回転の考慮も必要



第 VI 部

量子力学



# 32

## 原子論

### 32.1 原子、分子の概念の導入

**コメント** 最初に「化学」の分野で習う法則を確認するが、あくまでも量子力学を確認するためである。多くの量子力学の教科書は、「物質は多数の原理や分子の運動である」ということが当然のように記述されている。しかし、原子を肉眼で確認することは不可能である。どのように「物体は多数の原子や分子の集合である」ことを見出したのかについては書かれていないことが多い。

実は、分子や原子の概念は「化学」の分野で最初に導入された。当然、分子・原子を観測することはできなかったのだが、化学反応という現象を説明するには、原子や分子という概念を導入する必要があったのである。そこで、このノートでは分子や原子の導入のために、簡単な化学反応を最初に確認したいのである。

なぜ、物質は小さな原子の集まりである、といわれるのだろうか。ここでは、その原子という概念の導入となる、いくつかの化学の法則を見ていくことにしよう。

使用する教科書は、

- 竹内 敬人 [著], 『化学の基本 6 法則』, 岩波ジュニア新書, 1982
- 小川 岩雄 [著], 『原子と原子核』, 共立出版, 2008
- Steven Weinberg [著], 本間 三郎 [訳], 『(新版) 電子と原子核の発見』, ちくま学芸文庫, 2009
- Isaac Asimov [著], 玉虫 文一・竹内 敬人 [訳] 『化学の歴史』, ちくま学術文庫, 2010

である。

### 32.1.1 定比例の法則

リヒター<sup>1)</sup>、ブルースト<sup>2)</sup>は定比例の法則を発見する。

#### Point 83: 定比例の法則

与えられた物質の成分元素の質量比は一定である。

水を例にとってこの法則を考えてみる<sup>3)</sup>。水は水素と酸素から構成されている。定比例の法則が意味するのは、水を構成する水素と酸素の質量比が一定だということである。もっと簡単にいえば、「水を構成する水素と酸素はいつでも同じ割合になっている」ということである。具体的には、水を構成する水素と酸素の比は、水素：酸素 = 1 : 8 である<sup>4)</sup>。

### 32.1.2 倍数比例の法則

ドルトン<sup>5)</sup>はこの倍数比例の法則を提唱し、物質の原子説を発表した。この理論により、原子説が有力になり、物質の変化を原子の観点から、考察されるようになった。

<sup>1)</sup> Jeremias Benjamin Richter (1762–1807, ドイツ), 化学者

<sup>2)</sup> Joseph Louis Proust (1754–1826, フランス), 化学者

<sup>3)</sup> 気体の例を挙げるよりも、身近な水の例を挙げたほうがわかりやすいと思う。

<sup>4)</sup> ここで注意すべきなのは、“水素が1つに対して酸素が8つということではない”ということである。あくまでも質量比である。水素1[g]に対して、8[g]の酸素が反応するということである。9[g]の酸素が存在しても、そこに水素が1[g]しかない場合、この水素と酸素が反応した後、1[g]の酸素が残るのである。

<sup>5)</sup> John Dalton(1766–1844, イギリス)：原子説を強く唱えた科学者。ボイルやラヴォアジエらの実験事実に基づく理論構築を行った。

**Point 84: 倍数比例の法則**

2種類の元素が2つ以上の化合物を形成するとき、一方の元素の一定量と化合する他方の質量は互いに簡単な整数比になる。

同じ二つの種類の元素からなる化合物を、2種類考えてみよう。例えば、CO(一酸化炭素)とCO<sub>2</sub>にしよう。たしかに、COとCO<sub>2</sub>は、両方ともにC(炭素)とO(酸素)の二種類の元素から構成されている。例えば、炭素Cを一定量とすると、一酸化炭素と二酸化炭素のそれぞれに含まれる酸素の比は1:2である<sup>6)</sup>。

### 32.1.3 ドルトンの原子説

物質を構成するものには基本的なものがある。この基本的の物質を“元素(element)”という。もう少し正確に元素を定義するならば、

“元素”とは「それ以上に単純な物質に分けられないもの」である。

と言える。「元素」に“”をつけたのは、現在は元素の定義として、この定義を用いていないからである。現在は、上の「それ以上に単純な物質に分けられないもの」で定義される量は、单体とよばれている。

ドルトンから始まる原子説は、単に化学現象を理論的に説明するために作られた、思考上の概念であった。原子の実在性は、この後、物理学者に再度疑われ<sup>7)</sup>、さらなる実験がなされることになる。

### 32.1.4 気体反応の法則、アヴォガドロの分子説

ゲイ・リュサック<sup>8)</sup>は、気体同士の反応に関する法則を発見した。

►<sup>6)</sup> 現在の化学記号は、すでに倍数比例の法則が反映されているため、この法則を説明するのに化学記号を使って説明を行うと、記号を見れば明らかではないか、と思われるかもしれない。

►<sup>7)</sup> 力学史で有名なマッハは、原子説に対して批判的であったらしい。

►<sup>8)</sup> Joseph Louis Gay-Lussac (1778–1850, フランス) : フランスの化学者。

**Point 85: 気体反応の法則**

気体間が化学反応するとき、反応する気体の体積と生成する気体の体積の間に簡単な整数比が成立する。

## 32.2 原子模型

コメント 原子模型とは原子構造の模型のことをいう。化学の世界で、原子の存在が確かにになってくると、その次の段階として、原子の構造に興味が湧くのは当然のことだろう。ここでは、原子の構造はどのようにになっているかを考えた人の、いくつかの提案(構造の模型)を見ていくことにしよう。はじめに注意しておくと、これらの模型は量子力学的に間違ったものである。しかし、量子力学を考慮しない範囲では有用な考え方であり、実際に物体をマクロで考えるときにはこの原子模型を用いて話をされることが多い。

### 32.2.1 電子の発見

電子の発見は、マクスウェルによって電磁気学が確立された後のことである。電磁気学の部分で保留していた電子の発見について、ここで確認しておこう。原子は電気的に中性である。「電気的に中性」というのは正の電荷も負の電荷ももたないということである。原子がその内部に電子を含むので、この電子のもつ負の電荷とちょうど相殺するような正電荷を原子はもっていることになる<sup>9)</sup>。この正電荷が陽子である。原子がどのような形で陽子をもっているかについては、2通り考えられる。1つは陽子と電子が混在しているものである。この構造はトムソンによって提案されたのでトムソンの原子模型とよばれる。もう一つは、陽子の周りを電子が回転しているというものである。この構造は、日本人の長岡半太郎によって提唱されたものである。この長岡の原子模型では、電子は平面上の楕円軌道を描くとされる。土星のような模型である。土星の輪が電子の描く軌道に相当する。この模型の拡張とのべきものが、ラザフォード<sup>10)</sup>によって提案された。ラザフォードの原子模型では、電子は1つの平面における単なる楕円軌道ではなく、楕円軌道が刻々と変化するという

<sup>9)</sup> 「物質を構成する最小の単位は原子である」という仮定をしていることを前提とした主張である。

<sup>10)</sup> Ernest Rutherford (1871–1937, イギリス)：原子核の発見(実験),  $\alpha$ 線と $\beta$ 線の発見などで有名。放射線に $\gamma$ 線という名前を与えたのもこの人。元素崩壊と放射線の業績(化学)を理由に、ノーベル化学賞を受賞している。

ものである。ラザフォードらの実験によれば、原子の形はラザフォード模型であることが確認される。しかし、この原子模型には欠点がある。後で確認することだが、陽子の周りを電子が回転すると電磁波が生じる。この電磁波は電子のもつエネルギーを外部に放射してしまう。このため、原子の速度が減少し、電子が陽子の周りを回転するために必要な速度が保てなくなる。すなわち、電子が陽子とくっついて、原子がつぶれてしまうのである。このラザフォード模型の欠点は、量子力学 という新しい物理学の分野を待たなければ解決することができない。

話が前後するが、電子のもつ電気量の測定は「ミリカンの油滴実験」が有名である。もちろん、この実験の原理はマクスウェル方程式によって説明される。

### 32.2.2 ラザフォードの原子模型（原子核の発見）

原子構造は、正電荷を持った原子核の周りに、負電荷を持った電子が周っている模型が知られている。こうした今日知られている原子模型は、ラザフォードによるものである。ラザフォードは、原子構造を模索している中の実験で、奇妙な結果（ラザフォード散乱）を得て、この結果から、現在知られている原子模型作り上げた。

ラザフォードは、金属の薄膜に  $\alpha$  線を照射して、その透過具合や散乱の程度を調べる実験を行った。その結果は、ある割合で、 $\alpha$  線が透過せずに跳ね返ってくることが判明した。

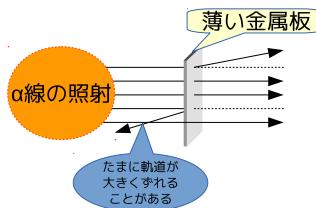


図 32.1 ラザフォード散乱

その結果から、原子の構造は中心に正電荷をもった粒子があり、その正電荷の周囲に電子が存在する、という構造を導き出した<sup>11)</sup>。電磁気学とニュートン力学に基づいて発案されたこの原子模型は、現在の量子力学では否定されてしまう。しかし、

► 11) (参考) 新版 電子と原子核の発見, S. ウィンバーグ [著], 本間三郎 [訳], ちくま文芸文庫:特に、第4章に原子核に関する実験について詳しく書かれている。この本には、トムソンの陰極線に関する実験や、ミリカンの電子に関する実験なども丁寧に書かれている。

化学を考える場合や電子回路を考える場合などは、このモデルで十分であることが多い。

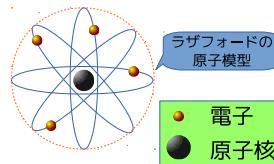


図 32.2 ラザフォードの原子模型

#### # memo No.100: トムソンの原子模型

ラザフォードによる原子構造の発見よりも前に、トムソンは「陰極線」という現象を発見している。陰極線とは、真空中に2つの電極を用意し、この電極間に高電圧をかけると、負電極から正電極に向かって何らかの粒子が飛ぶ現象である。陰極線という名前は、その性質からトムソン自身によって与えられた。実は、この陰極線は後に電子であることが判明する。

電子は、負極から正極へと走ることから、負電荷であることがわかる。多くの物質は電気的に中性であることから、電子の負電荷はどこかで中和されているはずである。要するに、どこかに正電荷をもつ部分があるということだ。

トムソンの時代には、物質は原子から構成されているということは、仮説でしかなかったが、トムソンはこの仮説を支持していた。そこで、トムソンは原子の模型として、正電荷をもつ領域内に電子がその正電荷を中和するように存在するという、原子模型を提唱した。この原子模型を「トムソンの原子模型」という。

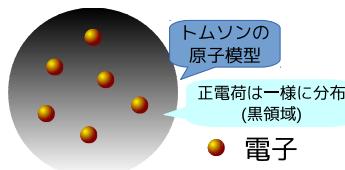


図 32.3 トムソンの原子模型

## # memo No.101: 長岡の原子模型

日本の物理学者に、長岡半太郎<sup>12)</sup> という人物がいる。長岡も原子模型を提唱していたらしく、Web サイトを検索するといいくつかヒットする。電気学会の電磁気学の教科書にも紹介されている。長岡が提唱した原子模型は、ラザフォードの原子模型のを 2 次元にしたようなもので、よく化学の教科書に描かれているような元素の図がそのイメージに一致する。

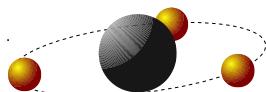


図 32.4 長岡の原子模型

## # memo No.102: 原子は本当に存在するのか

「原子」という概念は化学、つまり、物質の性質やその反応を理解するために導入されたものである。この「原子」という概念を導入することで、が矛盾なくしかも説明がスマートに行えるようになった。「原子」という概念を導入すれば、確かに、理論を綺麗に組み立てられることは確かであるが、実際に、「原子」そのものを見て、その存在を確認したわけではない。では、「原子」は、あくまでも理論を組み立てる上で導入する，“仮想”的なもので、実際には存在しないもののなのだろうか。確かに、肉眼<sup>13)</sup> 確認するまで、その存在を認めないと考えるならば、「原子」はただの仮想のものにすぎない。そうなると、現実には「原子」は存在せず、何かそれに変わるものがあると考えて、それは今の人間には「原子」としてしか認識できないと考えることになるだろう。確かにそうかもしれない。この考えを完全に否定することはできない。

しかし、科学を考える上で、このような考えは余り好ましくないと思う。科学の理論を支える基盤—つまり法則は、あくまでも“仮説”である。となれば、「原子」の存在を疑うことは、法則を疑うことにつながる。科学は実験で得た結果に基づいて、推論し理論を組み立てていく作業である。それが、絶対に現実の世界と一致している必要はないのである。例えば、ニュートン力学は、インシュタインによって、修正を加えられている。それまで、ニュートン力学はどのような場合でも成立すると考えられてきたと思うが、現実は違っていた<sup>14)</sup>。ニュート

▶ 12) 長岡半太郎（1865–1950, 日本）：東京大学出身の、日本の物理学の先駆者の存在。土星型の原子模型を提唱したことで有名。後世の教育にも努力された。

▶ 13) あるいは、顕微鏡などで拡大して。

▶ 14) ニュートン力学が仮定から完全に間違っていたわけではなかった。インシュタインは、考察対象となる系の速度が光速  $c$  に比べて、とても遅いことを暗黙の内に仮定していることを指摘しただけである。そして、その修正とは、光速  $c$  に近い速度で運動する系でも、理論が矛盾なく成立するよう拡張したものである。理論が全く書き換えられたわけではない。理論には暗黙の内に仮定して

ン力学の修正のきっかけは、思考の範囲が広がったことと、実験の技術が向上したこととに伴って、新しい実験結果を得ることができたからである。

科学の理論とは、実験結果から推測される仮定に基づいて、構築されるものである。数学との違いをはっきりと意識させられるところである。

このようなことから、原子の存在を、肉眼で観測できないからといって、疑う事は避けないといけない。「原子」の存在を仮定して、現象の説明がスマートにできるのであれば、科学的に、「そこには「原子」がある」と主張されるのである。そしてこのとき、「原子」は科学的に実在するのである。理論と実験結果の矛盾を見つけるまでは、「原子」の存在を仮定して話を進めていくべきだ。

### 32.3 原子核の構造

#### 32.3.1 ウランの発見

クラプロート<sup>15)</sup>により、ウラン<sup>16)</sup>を発見する。

クラプロートは、薬剤師としてドイツ各地で活躍していたが、薬学による治療では満足できず、化学的な手段に手を広げようとし、銀の発掘現場にて新たな鉱物が発見されたという情報をきつけ、閃ウラン鉱より、酸化ウランを取り出し発見した。「ウラン」の命名由来は、1781年にイギリスの天文学者ハーシェル<sup>17)</sup>が新しい惑星を発見し、「Uranus（ウーラノス、天王星）」を名づけたことを受け、これを讃えたことによる。

#### 32.3.2 X線の発見

レントゲン<sup>18)</sup>は（偶然的に）X線を発見した。

---

いるものがあるが、その暗黙の仮定は理論成立時には気付けない。しかし、後に科学が発展して、「暗黙の内の仮定」に気付いたのであれば、その都度、理論に修正を加えていけばよいのだ。

►<sup>15)</sup> Martin Heinrich Klaproth (1743–1817, ドイツ)：化学者、薬剤師として活躍。ウラン（酸化ウラン）の発見者として有名。

►<sup>16)</sup> Uran, もしくは, Uranium

►<sup>17)</sup> Sir Frederick William Herschel (1738–1822, イギリス)：ドイツ生まれ。イギリスにわたり、音楽家として活躍する。天文学にも興味を持ち、自身の手により望遠鏡を作成している。その後、天王星を発見し、天文学の研究に専念する。

ドイツ語名では Friedrich Wilhelm Herschel であったが、イギリスに渡った後 (1757年), Frederick William Herschel と名乗るようになった。

►<sup>18)</sup> Wilhelm Conrad Röntgen (1845–1923, ドイツ)：1901年に、第1回ノーベル物理学賞を受賞。受賞理由は、もちろん、X線の発見 (1895年) による。1888年に、マクスウェルが提唱した変位電流の存在を、実験的に確かめている。

放電管（クルックス管<sup>19)</sup>）による放射現象の研究の中、感光処理を施した一枚の紙が発光していることに気づき、その原因を突き止めた結果、放電管から生じる目に見えない光線が放射されているがわかった。この光線が **X 線** と呼ばれるものである<sup>20)</sup>。

### 32.3.3 ウランから生じる放射線の発見

ベクレル<sup>21)</sup>は、ウランによる蛍光作用の研究の中、ウランから目に見えない放射が生じていることを発見した。（ポアンカレ<sup>22)</sup>による示唆で、ウランの発光作用と X 線との関連の研究を促されたらしい。）

### 32.3.4 $\alpha$ 線と $\beta$ 線, $\gamma$ 線の発見

ラザフォードが  $\alpha$  線と  $\beta$  線を発見する。ピエール・キュリーが  $\gamma$  線を発見する。

► 19) クルックス管 : Sir William Crookes (1832–1919, イギリスの物理学者, 化学者) による発明品。トムソンの電子発見の説明でよく出てくる、真空管のこと。

► 20) レントゲン線とも呼ばれる。

► 21) Antoine Henri Becquerel (1852–1908, フランス) : 物理学者。1903 年に、放射線の発見により、ノーベル物理学賞を受賞している。

► 22) Jules-Henri Poincaré (1854–1912, フランス) : 数学者。アインシュタインの特殊相対性理論の先駆となる考察（光速不変の原理など）や、ボアンカレ予想などで、その名が有名である。とにかくものすごい数学者。



# 33

## 量子力学への道のり

### 33.1 古典物理学の限界

**コメント** 古典物理学の問題点は、先にあげた原子構造のほかに、固体比熱の問題と黒体輻射の問題がある。固体比熱の問題は「熱・統計物理学」の部分で考えることにして、ここでは、黒体輻射<sup>1)</sup>の問題について考えることにする。

#### 33.1.1 黒体

黒体とはその名の通り、真っ黒な物体である。真っ黒な物体は、色付きの物体と違って、全ての電磁波を吸収する<sup>2)</sup>。つまり、どの電磁波も吸収するということで、その意味で偏りのない物体である。また、このような黒体はそれ自身が熱をもちはじめると、発光し始める。黒体から発光される光は全ての波長の電磁波をふくみ、白っぽく光る。もちろん最初は赤い色を発光し、徐々に温度が高くなるに連れて光は青色に変化し、最終的に白くなるということである。

<sup>1)</sup> 「空洞輻射」、「黒体放射」ともよばれる。

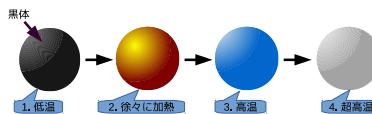
<sup>2)</sup> 色つきの物体は一部の色を吸収しその他を反射することで色を出しているのだ。

マクスウェルの電磁波理論より、光の色は電磁波の波長  $\nu$  によって決まることがわかる。この周波数  $\nu$  のときの光の強度を  $u(\nu)$  と表現する。すると、光の強度  $u(\nu)$  はどのような関数だろうかという疑問が生じるが、古典論から光の強度  $u(\nu)$  の具体的な形を導こうとしても、実験と完全に一致する式を導出することはなかなかできなかった。以下に実験結果の例を示しておく

キルヒホップ<sup>3)</sup>は

### 33.1.2 黒体輻射

一般に固体は温度を上げていくと赤く光り、さらに温度を上げていくと、しだいに白い光を発するようになる。この現象は 黒体輻射 とよばれる。



- 1. 低温状態では、光をはつないため、黒く見える。また全ての光を吸収するため、この意味において、完全な黒である。
- 2. 加熱により、熱エネルギーを黒体に与えると、赤い光を発するようになる。赤は低エネルギーの電磁波である。この電磁波の放射を 輻射 と言ふことが多い。
- 3. 更に高温にしていくと、青くなる。青は高エネルギーの電磁波である。
- 4. 加熱を続けると、最終的に白く見える。といふか、まぶしすぎて、直視できなくなるだろう。この状態になると、黒体からは可視光の全てに色だけでなく、紫外線やガンマ線といった放射線も輻射するようになる。

図 33.1 黒体輻射

ここで問題とするのは、物体の発する光の色 と そのときの光の強度 の関係である。実験によれば、図 33.2 のようになる。

縦軸が黒体輻射の強さで、横軸が輻射される電磁波<sup>4)</sup>の周波数である。このグラフの最大値は、絶対温度によって異なり、温度が高くなるのに伴って最大値も上昇する。また、最大値となる波長は、温度が高くなるのに伴い、短くなっている。

<sup>3)</sup> Gustav Robert Kirchhoff (1824 - 1887, )

<sup>4)</sup> 光とは電磁波のことであった。正確には少し違うが—というのも、可視光以外の電磁波も光と言えると考えれば、電磁波であればそれは光であるとも言える。しかし、光であればそれは電磁波であるとは言い切れない。光子というものが存在するからである。

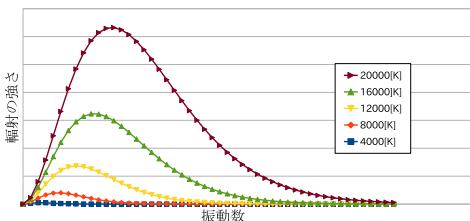


図 33.2 黒体放射

### 33.1.3 レイリー＝ジーンズの公式

図 33.2 を完全に説明できるような式を見出すことは、困難であった。このグラフの比較的波長の短い部分で一致する式を 1900 年にレイリー<sup>5)</sup> が、また 1905 年にジーンズ<sup>6)</sup> が提案する。その式とは、黒体輻射のエネルギー密度を  $u(\nu)$  として、

$$u(\nu) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 k_B T \quad (33.1)$$

である。ここで、 $\nu$  は輻射される電磁波の周波数であり、 $k_B$  はボルツマン定数、また  $T$  は絶対温度である。この式は、レイリー＝ジーンズの公式とよばれる。式の導出は、熱力学理論に従って導出される式ではあるのだが、黒体放射の高周波領域においては、この式で説明することはできない。ここに、熱力学の破綻がみられる。

### 33.1.4 ウィーンの公式

黒体輻射の問題に対して、スペクトル線の方程式を与え、この問題を解決しようとした。その方程式とは、

$$u(\nu) = A \nu^3 \frac{1}{\exp\left(\frac{B\nu}{CT}\right)} \quad (33.2)$$

という形をしている。ここに、 $A$ 、 $B$ 、 $C$  は人為的に、実験値と一致するように選ぶ。定数を確定するために、低周波領域では、熱力学理論から導かれたレイリー＝ジー

<sup>5)</sup> Rayleigh

<sup>6)</sup> Jeans

ンズの式と一致すると仮定するならば,

$$A = \frac{8B\pi}{c^3} , \quad C = k_B$$

となる。改めて書き直せば,

$$u(\nu) = \frac{8\pi B}{c^3} \nu^3 \frac{1}{\exp\left(\frac{B\nu}{k_B T}\right)} \quad (33.3)$$

となる。この式は、高周波領域で実験データと一致するが、低周波領域では実験と異なる値を示す。

### 33.1.5 理論式と実験値の不一致

レイリー＝ジーンズの公式とウィーンの公式を見てきた。しかし、これらの式は、以下のように、実験値と完全には一致しない。

- レイリー＝ジーンズの公式は、高周波数領域では発散してしまい、実験値と一致しない
- ウィーンの公式は、低周波領域では実験値に不一致である

ただし、2つの公式は完全に的外れな式とは言い切れない。以下の点で、実験値と一致するからである。

- レイリー＝ジーンズの公式は、低周波数の場合には、極めて精度よく、実験値と一致する
- ウィーンの公式は、高周波数の場合には、極めて精度よく、実験値と一致する

視覚的に示したほうが、わかりやすいであろう。2つの公式が示すグラフと理論とのグラフの比較を、図33.3に描いた。残念ながら、この公式は輻射される電磁波の波長の短い場合には、実験結果<sup>7)</sup>と一致していない。

---

<sup>7)</sup> 実験結果とは、図では Plank と書かれているデータである。プロット値は、スクリプト (perl) で計算したものである。現在では実験値とプランクの式に一致していることが知られているため、これを実験値と表現した。計算による作図では、当然のことながら実験値など表せないので、理論式を使用する必要があった。ここではウィーンの公式とレイリー＝ジーンズの公式の2つの式が実験値と一致しないことを、視覚的に見るためのもので、値そのものには興味がない。あくまで、不一致のイメージを図にしただけだ。

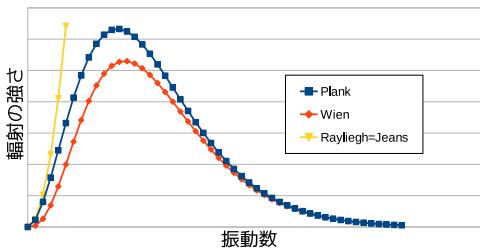


図 33.3 各式による理論値と実験値の比較

### 33.1.6 プランクの式

プランク<sup>8)</sup>は、黒体放射の実験と一致する式を見出した。

#### Point 86: プランクの式

プランクは黒体放射の強度  $u(\nu, T)$  と周波数  $\nu$  の関係を表す式として、次式を提案した。

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}. \quad (33.4)$$

$T$  は黒体の絶対温度、 $\nu$  はそのときに放射される電磁波の周波数、 $h$  はプランク定数、 $k_B$  はボルツマン定数、 $c$  は光速である。

この式は、 $\nu$  が小さいときに ( $\nu \rightarrow 0$ )、レイリーゼンジーンズの式に形を変える。また、 $\nu$  が大きいときに ( $\nu \rightarrow \infty$ )、ウィーンの式になる。このことを、簡単に確認しておこう。

<sup>8)</sup> Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858 - 1947), ドイツ

### 33.1.6.1 $1/(e^x - 1)$ の極限

まず、次の関数の極限について知っておく必要がある。

**Point 87:**  $\frac{1}{\exp(x) - 1}$  の極限

以下の関数  $f(x)$  を考える。

$$f(x) = \frac{1}{\exp(x) - 1} \quad (33.5)$$

この関数は、極限に関する次の性質がある。

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{x}, \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

この式の  $x$  を、 $x = h\nu/k_B T$  とすると、プランクの式の一部分になる。便宜上、一時的にその部分を、 $X(\nu)$  と表そう。

$$X(\nu) = \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{1}{k_B T}\right) - 1}$$

この時、以下の式が成り立つ。

- 低周波領域では、 $\lim_{\nu \rightarrow 0} X(\nu) = \frac{k_B T}{h\nu}$
- 高周波領域では、 $\lim_{\nu \rightarrow \infty} X(\nu) = \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right)}$

### 33.1.6.2 レイリー＝ジーンズの式との関係

プランクの式は、この  $X(\nu)$  を使うと、

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 (h\nu) X(\nu)$$

となる。低周波領域では、 $X(\nu) = k_B T/h\nu$  であるから、

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 (h\nu) X(\nu)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 (h\nu) \frac{k_B T}{h\nu} \\ &= \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 k_B T \end{aligned}$$

と計算される。

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 k_B T$$

はレイリー＝ジーンズの式に他ならない。

### 33.1.6.3 ウィーンの式との関係

高周波領域では,

$$X(\nu) = \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right)}$$

であるから,

$$\begin{aligned} u(\nu, T) &= \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 (h\nu) X(\nu) \\ &= \frac{8\pi h}{c^3} \nu^3 \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right)} \end{aligned}$$

ここで,  $h = B$  とすれば,

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi B}{c^3} \nu^3 \frac{1}{\exp\left(\frac{B\nu}{cT}\right)}$$

となり, ウィーンの式に一致する。

## 33.2 光の粒子性, 電子の波動性

### 33.2.1 光は粒子としても振る舞う

電磁気学で学んだ通り, 光は電磁波であり, 従って「光は波である」と結論される。このことを, 光は 波動性 の性質をもつという。しかし, 後に示す 光電効果 という現象を観測すると, 「光は波である」という主張と矛盾する部分が生じる。光電効果を観測する場合には, 光は波動性ではなく粒子のような性質を示すのである。粒子のような性質のことは, 光の 粒子性 とよばれる。今までの学習で常識的考えれば, 波動

性と粒子性は互いに相反する現象であり、物理現象がその性質として両方の性質を同時にもつものとは考えにくい。しかし、実際にそのような現象が、私達の馴染み深い「光」という物理現象がもっていることは事実であり、これを受け入れる必要がある。

### 33.2.2 アインシュタインの光量子

エネルギーの変化は連続的なものではなく、離散的なものではないかと Planck が提案をした。エネルギーが離散的に変化するとは、ある決まった値の整数倍の値しかとることができないということである。ある決まった値とは、

$$E = \nu h \quad (33.6)$$

である。アインシュタインはこの Planck の提案を受けて、光電効果の理論的説明を与えた。アインシュタインは“光は粒子である”ということを仮定ば、光電効果を説明できることを示した。

$$E = h\nu \quad (33.7)$$

だが、

$$\hbar := \frac{h}{2\pi}, \quad \omega := 2\pi\nu$$

を導入すれば、

$$E = \hbar\omega \quad (33.8)$$

と書ける。

### 33.2.3 光電効果

レーナルト<sup>9)</sup>は光電効果を実験的に発見した。光電効果とは、簡単にいえば、金属に光を照射したときに、金属表面から電子が飛び出してくる現象をいう。

レーナルトが実験で得た光電効果の性質は 3 つある。すなわち、

---

<sup>9)</sup> Philipp Eduard Anton von Lenard (1862 - 1947), ハンガリー

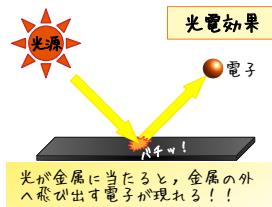


図 33.4 光電効果のイメージ

## 光電効果の性質 -

- (1) 光電効果が起こるためには、金属表面に照射する光の周波数  $\nu$  が、その金属に特有なある一定の周波数  $\nu_0$  より大きくなければならない。この  $\nu_0$  を 光電限界周波数 という。 $\nu < \nu_0$  だと、つまり、照射する光の周波数が  $\nu_0$  以下であると、光電効果は起こらない。逆に、 $\nu > \nu_0$  でれば、つまり、照射する光の周波数が  $\nu_0$  より大きければ、どんなに弱い光でも、光電効果は起こる。
- (2) 光電効果によって金属表面から飛び出る電子のエネルギー  $E$  は、光の強さに無関係であり、照射する光の周波数  $\nu$  のみによって決まる。 $\nu > \nu_0$  の場合に、照射する光の周波数  $\nu$  と飛び出す電子のエネルギー  $E$  の関係は

$$E = h\nu - h\nu_0 \quad (33.9)$$

で与えられる。ここに、 $h$  は Planck 定数である。

- (3) 光の強さを大きくすると、金属表面から飛び出る電子の個数が増える。しかし、この電子のエネルギーは変わらず、式 (33.9) によって決まる。

(阿部 龍蔵 [著], 『量子力学入門』, 岩波書店, 2004, p31-32 を参照した。)

光電効果の関係式 (33.9) の  $h\nu_0$  は定数であるので、これを  $W$  とおく ( $W = h\nu_0$ )。この  $W$  は金属固有の値であり、各金属で異なる値をとる。 $W$  を 仕事関数 という。また、光電効果によって金属表面から飛び出した電子のエネルギーは、もはや金属陽イオンからのクーロン力の影響がなく、ポテンシャルを無視できるので、運動エネルギーのみによって表現できる。飛び出す電子の速度を  $v$ 、質量を  $m_e$  としたと

き、運動エネルギーは  $E = (1/2)mv^2$  である。以上から、光電効果の関係式 (33.9) は以下のように表現することもできる。

$$\begin{aligned} E &= h\nu - h\nu_0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}m_e v^2 &= h\nu - W \end{aligned} \quad (33.10)$$

これを、AINSHUTAIN の光電方程式 という。

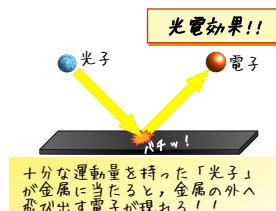


図 33.5 光電効果（光は粒子だ！）

### 33.2.4 振動現象と等速円運動

振動現象と等速円運動についての復習をする。

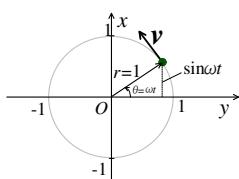


図 33.6 等速円運動の関係

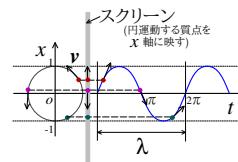


図 33.7 単振動と等速円運動の関係

まず、質点の等速円運動を考える。図 33.6 参照。半径が 1 である円を **単位円** という。単位円の円周の長さ<sup>10)</sup> は、 $2\pi$  である。だから、この質点が単位円上を回転する速度は、質点が単位円を一周するまでの時間  $T$  で円周の長さ  $2\pi$  を割ればよい。回転の速さのことを **角速度** ということにすれば、角速度  $\omega$  は以下のように定義で

<sup>10)</sup> 半径  $r$  の円の円周の長さは  $2\pi r$  である。

きる。

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (33.11)$$

さて、図 33.7 により、質点の等速円運動の  $x$  成分だけを見ると、質点は  $x$  軸上を単振動しているように見える。なぜなら、 $x = \sin \omega t$  の関係があるからである。この意味で、角速度は角周波数<sup>11)</sup>とよばれることもある。質点が単位円を 1 周するまでの時間  $T$  は単振動における周期に対応していることも明らかである。これからは単振動のほうを主に考えるので、 $\omega$  を角周波数と書き、 $T$  を周期と書くことにする。

ところで、振動の周期  $T$  と周波数<sup>12)</sup>  $\nu$  の間には、

$$T = \frac{1}{\nu} \quad \left( \Leftrightarrow \nu = \frac{1}{T} \right) \quad (33.12)$$

の関係がある。式 (33.11) にこの関係式を考慮すれば、

$$\omega = 2\pi\nu \quad (33.13)$$

を得る。

<sup>11)</sup> 定義によれば、単位円(半径  $r = 1$  の円)を周期  $T = 2\pi$  で一周すると、角速度が  $\omega = 1$  となる。

<sup>12)</sup> 周波数とは 1[s] 間における、質点の振動の回数である。



# 34

## 量子力学

### 34.1 量子力学の教科書

#### 34.1.1 説明方法

多くの量子力学の教科書は次の 2 つの種類のうちのどちらかである。

- 歴史的なこと（量子力学の由来）から説明していくもの
- 量子力学の本質を、体系立てて説明するもの

以下で、その長所と短所を説明した後に、このノートの量子力学の学習方針を示す。

#### 34.1.2 歴史的記述から入る教科書

##### ¶ 長所

歴史的なことから記述されている教科書は、学習の動機とか、量子力学の必要性とかをつかむことができる。

### ¶ 短所

本論に入るまでには歴史的記述が長く続くことになるので、量子力学の本論に到達するまでに時間が掛かってしまう。志が低いと、本論に入る前に挫折してしまうことがある<sup>1)</sup>

### 34.1.3 いきなり体系から入る教科書

### ¶ 長所

量子力学の本質から入る教科書は、はじめから本質から入るので時間は掛からない。

### ¶ 短所

量子力学の必要性がよくつかみにくくなってしまう。また、量子力学特有の抽象的な概念が容赦なく押し付けられるため、お手上げ状態になる可能性が高い。

### 34.1.4 このノートの学習方針

このノートは、量子力学を以下の手順で学習する。

### ¶ step1. 数式の少ない入門書を読む

- ブルーバックスなど一般向けの量子力学の入門書が多く出版されている。まず、これにより量子力学の概要をつかむ。
- この段階では Web を参照しないほうが良い。なんの学習をするにしても、Web からの情報を得ることは不可欠だが、誤っている記述も散見されるため、注意が必要。気になって見たとしても、信じこまないよう。

### ¶ step2. 易しい入門書を読む

- 易しく記述されている量子力学の教科書を読む。数式を用いた説明がなされてはいるが、本当の初学者向けに書かれている独習書を選ぶ。"高校数学だけでわかる"的なものがいい。

<sup>1)</sup> 単位取得のみを目的とする大学生や、趣味で勉強しようとする人にとっては、つらいのだ。（私は、昔は前者であり、今は後者である）

#### ¶ step3. 標準的な教科書を読む

- 最後に、原島や砂川、小出、シップなどの、標準的な教科書を読む。教科書を2, 3冊つ選び学習したいところだ。ただし、学習の軸とする教科書を1つに定めてこれを基本に学習を進め、他は副読的に読むこと。2, 3冊を同時に読み込もうとしないこと。読み込むのは1冊で十分。基本とする教科書で、内容が足りなかつたり、わかりにくい記述があった場合に、副読用の教科書を参照するという方法がいい。
- 物理学の解説Webサイトの参照も有用である。ただし、その記述を読む際には、批判的であること。Webの情報の多くは、他人の検閲が行われないため、執筆者の個人的な考え方や感想である。大学の教授によって、その大学の名（研究室名）の下に書かれていれば、その内容の信頼性は高いが、個人サイトの閲覧は要注意である。
- さらに、この段階で、量子力学の学習と並行して、解釈問題などの哲学的问题にも触れておきたい。解釈問題は理解しなくともよいが、理論の基本思想が複数あるということを知っておくべきである。この解釈問題を追っていくと、多世界解釈といった話題につながっていく。
- また、因果律の捉え直しが必要であったり、観測行為が実験結果に強く影響を与えててしまうと問題（観測問題）があることを認識しておきたい。観測問題は量子力学の基本原理の1つである不確定性原理に関連した問題だ。

#### ¶ step4. もっと難しい教科書を読む

- ディラックやノイマン、ランダウ = リフシツなどの、難しい教科書に挑戦する。あるいは、本屋や図書館で、その内容をチラ見する。
- 量子力学の難しさを痛感することが目的だ。教科書の内容を理解することが目的ではない。
- 万が一、更に学習を進みたいという向学心に目覚めた場合に、挑戦すべき教科書を予め定めておくのもよいことだと思う。標準的な教科書を読んで、量子力学をわかった気になってはいけない。

##### 34.1.5 使用する教科書

このノートにおける量子力学の教科書として、以下を使用する。

- (step1) J.C. ポーキングホーン 著, 宮崎 忠 訳, 『量子力学の考え方』, 講談社ブルーバックス
- (step1) 山田 克哉 著, 『量子力学のからくり — 「幽靈波」の正体』, 講談社ブルーバックス
- (step2) 竹内 淳 著, 『高校数学でわかるシュレーディンガー方程式』, 講談社ブルーバックス
- (step2) 都筑 卓司 著, 『なっとくする量子力学』, 講談社
- (step3) 中嶋 貞雄 著, 『量子力学 I / II』(物理入門コース 5/6), 岩波書店
- (step3) 前野 晶弘 著, 『よくわかる量子力学』, 東京図書
- (step3) 佐川 弘幸, 清水 克多郎 著, 『量子力学 (第2版)』, 丸善
- (step3) コリン・ブルース 著, 和田 純夫 訳, 『量子力学の解釈問題』, 講談社ブルーバックス

## 34.2 量子力学での運動方程式

### 34.2.1 はじめに

上に書いたように, 原子のような非常に微小な世界では, ニュートン力学が成り立たなくなってしまう。つまり, 原子や電子, 光子の運動はニュートンの運動方程式では表現できない。これは実験事実であって, 認めるよりしかたがない。しかし, ニュートンの運動方程式に従わないからといって, デタラメに運動しているわけではない。何か“別の運動法則”に従って運動しているのである。

### 34.2.2 量子力学での運動方程式

#### 34.2.2.1 運動方程式は2種類の表現方法がある

では, どのような運動法則に従っているのだろうか。この疑問に答えを見つけたのが, ハイゼンベルクである。シュレーディンガーもハイゼンベルクと独立に, 一年遅れだが答えを見つけている。ハイゼンベルクの見つけた運動方程式は, 行列という数学の形式を用いて表現されるものだった。発見当時は, 科学者は行列という形式に不慣れだったため, ハイゼンベルクの発見はあまり目立ったものではなかった。ハイゼンベルクが行列形式の運動方程式を発見した一年後に, シュレーディンガーは偏微分方程式を用いた形式の運動方程式を発見した。当時の科学者にとって, 偏微分方程式は研究に欠かせない道具だったので, シュレーディンガーの発見した方程式はすぐに有

名になった。もちろんハイゼンベルクの発見した運動方程式が間違っていたのではない。ハイゼンベルクとシュレディンガーが発見した2つの運動法則は全く同等であることは、シュレーディンガーによって証明されている。違いは、単に、数学形式だけである。なので、量子力学には2種類の記述方式があるということになる。一つは、ハイゼンベルクの行列を用いた表現方法で、行列力学とよばれ、その方程式はハイゼンベルク方程式といわれる。もう一つは、シュレーディンガーの偏微分方程式による表現方法で、波動力学とよばれ、その方程式はシュレーディンガー方程式といわれる。

行列力学は、波動力学に比べると、抽象的である。量子力学の体系を構築する場合には、行列力学が有用である。しかし、実際に生じる個々の物理現象を解析するには、波動力学が便利である。個人的に、行列よりも偏微分方程式のほうが扱いなれているので、シュレーディンガー方程式を先に学習する。数学的テクニックや学習のしやすさを考えても、まずはシュレーディンガー方程式から量子力学へ入門する方がよいと思う。実際に、そういう教科書のほうが圧倒的に多く出版されている。

### 34.2.2.2 シュレーディンガー方程式の導入

#### ¶ 方程式は論理的に導けない

光子や電子などの量子は、全てシュレーディンガー方程式に従っている<sup>2)</sup>。

シュレーディンガー方程式は、ニュートン方程式と同様に、論理的考察によって導き出すことはできない。だからといって、シュレーディンガー方程式はこうだ!!と強要されても、納得できない。しかし、シュレーディンガーの推論を辿ることは可能である。

#### ¶ 自由粒子の一次元の運動

以下では、非常に微小で電荷等をもたない、純粹な自由粒子の一次元の運動を考える。自由粒子は、ポテンシャルエネルギーをもっておらず、自身のもつ速度による運動エネルギーのみをもっていると仮定する。自由粒子にはド・ブロイの物質波という波の性質がある。この物質波を  $\psi(x, t)$  と表す。 $\psi(x, t)$  は以下のような波動関数で記述されると仮定する。

$$\psi(x, t) = A e^{i(\frac{p}{\hbar}x - \frac{E}{\hbar}t)}. \quad (34.1)$$

<sup>2)</sup> 相対論的效果が無視できない場合は、シュレーディンガー方程式を拡張した、ディラックの運動方程式で記述される。しかし、ここでは、相対論的效果が無視できるような状況を仮定する。

ここに,  $A$  は定数で, 波動関数の振幅である.  $x$  軸は自由粒子の運動方向にとる. この  $e$  は指数関数である. なぜこの関数が自由粒子の物質波を表現するかについてはよく分からぬが, こう仮定すると, 実験結果とよく整合が取れるのである. とりあえず, ここでは, 波動関数の意味を考えず, これを仮定した上で, 話を進めていこう.

#### ¶ 量子力学における, 運動量とエネルギー

波動関数 (34.1) の波数  $k$  と, 角周波数  $\omega$  はそれぞれ, ド・ブロイの関係から, 運動量  $p$  とエネルギー  $E$  で表現できる. つまり,  $k = p/\hbar$ ,  $\omega = E/\hbar$  の関係によって波動関数 (34.1) は

$$\psi(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)} \quad (34.2)$$

と書き表せる. 波動関数の変数は位置  $x$  と時間  $t$  である. この波動関数  $\psi(x, t)$  が満たしている方程式を考えるために<sup>3)</sup>, その独立変数  $x, t$  でそれぞれ偏微分する.

まず, 波動関数  $\psi(x, t)$  を位置  $x$  で偏微分して,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} &= i \frac{p}{\hbar} A e^{i(kx - \omega t)} \\ &= i \frac{p}{\hbar} \psi(x, t) \\ \therefore \quad \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} &= i \frac{p}{\hbar} \psi(x, t). \end{aligned} \quad (34.3)$$

次に  $\psi(x, t)$  を時間  $t$  で偏微分して

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} &= -i \frac{E}{\hbar} A e^{i(kx - \omega t)} \\ &= -i \frac{E}{\hbar} \psi(x, t) \\ \therefore \quad \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} &= -i \frac{E}{\hbar} \psi(x, t). \end{aligned} \quad (34.4)$$

そして, 式 (34.3), (34.4) をそれぞれ  $p, E$  について解いて,

$$\begin{aligned} p\psi(x, t) &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, t) \\ E\psi(x, t) &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) \end{aligned}$$

<sup>3)</sup> 運動量に対応する演算子と, エネルギーに対応する演算子を知りたいから.

を得る。ここで、計算中に分母に現れる虚数単位  $i$  は、式の見やすさを考えて有理化した、両辺に  $\psi(x, t)$  がかかるように記述したのは、運動量に対応する演算子と、エネルギーに対応する演算子を知りたかったからである。この式を見ると、運動量  $p$  とエネルギー  $E$  は、次のように対応していることがわかる。

$$p \Leftrightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad (34.5)$$

$$E \Leftrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}. \quad (34.6)$$

#### ¶ エネルギー保存則が成立すると仮定する

運動量  $p$  とエネルギー  $E$  の関係を記述する式として、エネルギー保存の法則がある。ここで、何らかのポテンシャル（電位でも重力ポテンシャルでもなんでもいい）を加えて、これを  $V(x, t)$  として、

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(x, t).$$

ここに、 $m$  は質量である。

量子力学でもエネルギー保存の法則を満たしているはずである。<sup>4)</sup> として、運動量  $p$  とエネルギー  $E$  を上で得た対応する演算子に置き換えて、

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + V(x, t).$$

整理しよう。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x, t).$$

<sup>4)</sup> 古典力学のエネルギー保存の法則は、反証的な実験結果が報告されていないという意味で、今までに破られたことはない。これは、量子力学を適用すべき微視領域の実験でも同じである。実際、時間の対称性から、ネーターの定理によって、エネルギー保存則が導かれる。

しかし、時間とエネルギーの不確定性原理によると、エネルギー保存則が破られる瞬間がある。微小時間内ではエネルギーの値が 1 つの値に定まらず、エネルギーが突然増えたり減ったりする時間があるので。このエネルギー保存則の敗れは、量子力学的な微視的範囲でのみ発生し、マクロには現れない現象である。

ついでに、もっと言うと、時間も不確定になるために、量子力学的領域では、因果関係が曖昧になっている。

### ¶ 演算子の導入

形式的に ハミルトニアン演算子 というものを導入してみよう。その記号として、 $\hat{H}_x$  を用いることとする<sup>5)</sup>。

解析力学で学んだハミルトニアンは、系の全エネルギーと等しかった。今の場合、ハミルトニアンそのものではなく、演算子的性質を持つハミルトニアン演算子である。これらを区別するために、演算子のほうには、文字の頭に $\hat{\phantom{x}}$ をつけることにしよう。つまり、

$$\hat{H}_x = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x, t). \quad (34.7)$$

さらに、エネルギー演算子 も同様に導入しよう。エネルギー演算子の記号は  $\hat{E}$  という記号をつかう。

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}. \quad (34.8)$$

すると、形式的に  $\hat{H}_x = \hat{E}$  と書ける<sup>6)</sup>。

### ¶ シュレーディンガー方程式の完成

しかしこの演算子の関係式は、物理的に何も意味しない。この演算子は、波動関数  $\psi(x, t)$  に作用させて始めて運動方程式の意味をなす。従って、

$$\hat{H}_x \psi(x, t) = \hat{E} \psi(x, t) \quad (34.9)$$

を得る。この式 (34.9) が シュレーディンガー方程式 である。

### ¶ 3次元へ拡張

もちろん、 $x$  軸の一方だけではなく、これらは簡単に3次元空間に拡張できる。 $y$ ,  $z$  方向にも同様に考えられる。その場合、シュレーディンガー方程式は次のように記述

<sup>5)</sup> ただ、注意したいのは、量子力学でのハミルトニアン演算子は、解析力学でのハミルトニアン  $H$  とは全く別物であるということである。しかし、概念的に量子力学のハミルトニアン演算子は、解析力学のハミルトニアン  $H$  をヒントに導入されているので、似たような記号を使いたいというもある。そのため、 $\hat{H}$  の $\hat{\phantom{H}}$ (「ハット」と読む)はそれらを区別するためにつけてある。

また、下添え字の  $x$  は、いまは  $x$  軸方向だけしか扱っていないことを明示するためにつけた。空間の3次元を考えるときは添え字を書くことはせず、単に  $\hat{H}$  と記述する。

<sup>6)</sup> 右辺と左辺を入れ替えてしまった。量子力学の教科書を見ると、左辺にハミルトニアン演算子  $\hat{H}$ 、右辺にエネルギー演算子  $\hat{E}$  を書いている。ここではそれに習うこととした。

される。

$$\hat{H}\psi(\mathbf{r}, t) = \hat{E}\psi(\mathbf{r}, t). \quad (34.10)$$

### ¶ 一言メモ

ここで得たシュレディンガー方程式 (34.10) は時間を含むものであり、最も一般的なものである。ここではあたかも方程式を導いたように見えてしまうが、実はそうではない。物質が従うとする波動関数  $\psi(x, t)$  が天下り的に与えられていて、その信憑性に関する言及は全くない。

同じ方程式ではあるが、ハミルトニアン演算子とエネルギー演算子を明示したシュレディンガー方程式を以下に書いておこう。先ほどの  $\hat{H}$ ,  $\hat{E}$  を具体的に記述しただけである。

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + V(\mathbf{r}, t) \right\} \psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t). \quad (34.11)$$

## 34.3 対応原理

シュレディンガー方程式は解析力学における、ハミルトニアンとエネルギーの関係から推察される方程式である。シュレディンガー方程式は論理的に導かれる方程式ではなく、経験によって得られる方程式である。しかし、この方程式で多くの物理現象を説明することができ、それに加えて、この方程式を満たさない現象が確認されていないことから、シュレディンガー方程式は物理的に正しい方程式であるといってよい。

古典力学(解析力学)では、ハミルトニアン  $H$  は座標変数  $(x, y, z)$  と正準運動量  $(p_x, p_y, p_z)$  と時間  $t$  の関数であり、

$$H = H(x, y, z, p_x, p_y, p_z, t) \quad (34.12)$$

と書かれる。ハミルトニアンは、エネルギー  $E$  と等しく、

$$H(x, y, z, p_x, p_y, p_z, t) = E \quad (34.13)$$

である。

量子力学におけるシュレディンガー方程式はハミルトニアン  $H$  の正準運動量  $(p_x, p_y, p_z)$  とエネルギー  $E$  を演算子に置き換える(この機械的な置換えのこと)

対応原理とよぶ). 置き換えの際の対応は以下の通り.

### Point 88: 対応原理

運動量演算子  $\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z$  とエネルギー演算子  $\hat{E}$  は、運動量  $p_x, p_y, p_z$  とエネルギー  $E$  に対して、以下のうように対応させる。

$$p_x \rightarrow \hat{p}_x := -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \quad (34.14)$$

$$p_y \rightarrow \hat{p}_y := -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}, \quad (34.15)$$

$$p_z \rightarrow \hat{p}_z := -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}, \quad (34.16)$$

$$E \rightarrow \hat{E} := i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (34.17)$$

矢印の左側が運動量  $p$  と エネルギー  $E$  である。左側のアルファベットの上に<sup>7)</sup>が上についていた文字は、演算子を意味すると約束しよう<sup>7)</sup>。

そして、置き換えた演算子をそれぞれ波動関数  $\psi(x, t)$  に作用させて、次式を得る。

### Point 89: 時間を含むシュレディンガー方程式

シュレディンガーの式 (34.18) を、時間を含むシュレディンガー方程式 といふ。

$$\hat{H}(x, y, z, \hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z, t) \psi(x, t) = \hat{E}\psi(x, t) \quad (34.18)$$

<sup>7)</sup>  $p$  と  $E$  に対して深い関係がありそうなので、アルファベットはその関連するものを使用しておきたいということと、同時に、演算子であることを示す必要があるので、このような表記になっている。<sup>7)</sup>の有無で意味が全く異なるので、注意すること。

## 34.4 電子の速度

### 34.4.1 間違った考察

電子の速度を、量子力学の関係式から、どう表されるかを、考えてみよう。量子力学では、次の関係式が成り立つことが要求される。すなわち、

$$p = \frac{h}{\lambda}. \quad (34.19)$$

$$E = h\nu. \quad (34.20)$$

さて、波動の速度の式を思い出してみると、

$$v = \nu\lambda. \quad (34.21)$$

量子力学が要請する 2 つの式より、 $\lambda = h/p$ ,  $\nu = E/h$  を上式に代入すると、

$$v = \frac{E}{h} \frac{h}{p} = \frac{E}{p}$$

となる。これを  $E$  について解いてみる。

$$E = pv.$$

ところで、シュレディンガー方程式の考察でも用いたように、量子力学でも、運動エネルギーの式  $E = p^2/2m$  は有効である。これを上式  $E$  に代入すると、

$$\frac{p^2}{2m} = pv.$$

整理すると、

$$p = 2mv.$$

この式は、今まで考えてきた、運動量の式  $p = mv$  と異なっている。量子力学的には、 $p = mv$  が間違っていて、 $p = 2mv$  が成立しているのだろうか。次の項目で、このことについて考えてみよう。

### 34.4.2 電子の群速度

実は、波動の速度を考えるときには、その速度が2種類あることを忘れてはいけない。波動のもつ速度には、位相速度と群速度の2つがある。ここで考えていたのは、位相速度の方であった。しかし、波動の運動量を考えるときには、群速度を考えないといけない。

### 34.4.3 電子の有効質量

電子を量子力学的にみた場合、粒子の性質だけでなく、波動現象も考慮する必要がある。量子力学では、電子のもつ運動量  $p$  とエネルギー  $E$  は、それぞれ、波数  $k$  と各周波数  $\omega$  との関係がある。

$$p = \hbar k \quad (34.22)$$

$$E = \hbar\omega \quad (34.23)$$

この関係から、電子の運動の速度を考えてみよう。この場合、電子の速度とは、位相速度ではなく、群速度で考える必要がある。

ポテンシャルが存在しない場合は、電子は何とも相互作用しないから、質点と同じように扱うことができるが、固体中の電子は、固体原子と相互作用をしてしまうので、質点と同じように考えることができない。電子が波の性質の有することを考慮しているためである。電子のもつエネルギー  $E$  は、エネルギーに関するアインシュタインの関係式により、

$$E = \hbar\omega \quad (34.24)$$

である。ここに、 $\hbar$  はプランク定数であり、 $\omega$  は角周波数である。電子の波動の群速度  $v_g$  を求めるために、 $\omega$  について解き、波数  $k$  で微分すると、

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk} \frac{E}{\hbar} = \frac{1}{\hbar} \frac{dE}{dk} \quad (34.25)$$

さらに、 $v_g$  を時間  $t$  で微分すると、

$$\frac{dv_g}{dt} = \frac{1}{\hbar} \frac{d}{dt} \left( \frac{dE}{dk} \right) = \frac{1}{\hbar} \left( \frac{d^2 E}{dk^2} \right) \frac{dk}{dt} \quad (34.26)$$

両辺に  $\hbar^2$  を掛けて,

$$\hbar^2 \frac{dv_g}{dt} = \hbar \left( \frac{d^2 E}{dk^2} \right) \frac{dk}{dt} \quad (34.27)$$

さらに以下のように書き換える.

$$\frac{\hbar^2}{\left( \frac{d^2 E}{dk^2} \right)} \frac{dv_g}{dt} = \frac{d(\hbar k)}{dt} \quad (34.28)$$

ここで、運動量に関するアインシュタインの関係式  $p = \hbar k$  を右辺に考慮すると、

$$\frac{\hbar^2}{\left( \frac{d^2 E}{dk^2} \right)} \frac{dv_g}{dt} = \frac{dp}{dt} \quad (34.29)$$

ここで、有効質量  $m^*$  を以下のように定義することで、電子に対する運動方程式を得る。

$$m^* := \frac{\hbar^2}{\left( \frac{d^2 E}{dk^2} \right)} \quad (34.30)$$

運動方程式は、

$$m^* \frac{dv_g}{dt} = \frac{dp}{dt} \quad (34.31)$$

現実の電子の質量はどのようなものかを具体的に考えることはできないが、質量を有効質量として繰り込む<sup>8)</sup>ことで近似して考えることはできる。これがこの式の意味するところである。

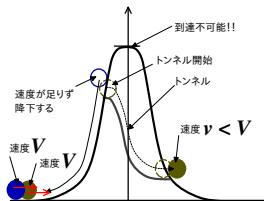


図 34.1 トンネル効果：ポテンシャル障壁

### 34.5 トンネル効果

### 34.6 Fermi-Dirac 分布関数

電子は fermion(Fermi オン) である<sup>⑧)</sup>. 従って, Fermi-Dirac 統計に従う粒子である. この理論によれば, fermion は以下の式を満足する.

$$f(E, T) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E - E_f}{k_B T}\right)} \quad (34.32)$$

この式は **Fermi 分布関数** とよばれる. この式の  $E_F$  はある特定の温度における Fermi エネルギーを表している. また,  $k_B$  はボルツマン定数である.

この式をグラフで表すことを考える. グラフの横軸を  $f(E)$ , 縦軸を  $E$  したい. そこで, 上式を  $E$  について解く. すると,

$$E = E_f + k_B T \log\left(\frac{1}{f(E)} - 1\right)$$

<sup>⑧)</sup> 繰り込み；無限に小さな微小領域で観測するといった現実では不可能な視点にたったときに, 値が無限大に発散してしまう等といった計算が不都合になる場合がある. しかし, ある程度巨視的な視点にたって考えるならば, その値を発散しないようにできる等の解決策がある. その解決策の一つとして繰り込みという概念がある.

<sup>⑨)</sup> 素粒子は, boson(ボソン) または fermion のどちらか一方の性質をもつ. phonon や photon, meson(中間子) は boson であり, electron および proton, neutron は fermion である. fermion は 1 つの位置には 1 つの粒子しか存在することができないという特徴をもっている. 細かくいえば, 量子力学における粒子のスピンという概念を考慮すれば, 1 つの位置に 2 つの互いに異なったスピンをもつ粒子が存在し得る. それに対して, boson は 1 つの位置に対して複数の粒子が存在できる性質をもっている.

を得る。最後に、フェルミ準位を基準とするために、 $E_f = 0$  とする。

$$E = k_B T \log \left( \frac{1}{f(E)} - 1 \right)$$

これを、グラフに書いてみよう。

問題

Fermi-Dirac 分布関数  $f(E)$  は点  $(E_f, \frac{1}{2})$  に関して点対称であることを示せ。

問題の解答

■方針 Fermi-Dirac 分布関数上の任意の点を  $(E_1, f(E_1))$  にとる。また、このよう にとった  $E_1$  に対応して、

$$\frac{E_1 + E_2}{2} = E_f$$

となるような  $E_2$  をとる。以上の  $E_1, E_2$  に対して、もし、

$$\frac{f(E_1) + f(E_2)}{2} = \frac{1}{2}$$

という等式が成立していれば、Fermi-Dirac 分布関数  $f(E)$  は点  $(E_f, \frac{1}{2})$  に関して点 対称であると言える。

解答

実際に計算する。まず、 $f(E_1)$  については、Fermi-Dirac 分布関数に  $E_1$  を代入 して、

$$f(E_1) = \frac{1}{1 + \exp \left( \frac{E_1 - E_f}{k_B T} \right)} \quad (34.33)$$

であることがわかる。これは、仮定により、成立している。次に、 $f(E_2)$  について考 えるが、ここで、 $E_2$  は  $E_1$  と

$$E_2 = 2E_f - E_1$$

の関係があるとしているので、

$$f(E_2) = f(2E_f - E_1) = \frac{1}{1 + \exp \left( \frac{-(E_f - E_1)}{k_B T} \right)} \quad (34.34)$$

となる。

目的は、以上の二つの式 (34.33), (34.34) から、 $\frac{f(E_1) + f(E_2)}{2} = \frac{1}{2}$  の関係を導くことである。導出の過程で、式変形が複雑にならないように、以下のような文字の置き換えを定義する。

$$x := \exp\left(\frac{E_1 - E_f}{k_B T}\right) \quad (34.35)$$

この  $x$  を用いると、式 (34.33) と (34.34) はそれぞれ

$$f(E_1) = \frac{1}{1+x} \quad (34.36)$$

$$f(E_2) = \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \quad (34.37)$$

となる。そして、式 (34.36) と式 (34.37) の辺々を加え合わせると、

$$f(E_1) + f(E_2) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{1+x} + \frac{x}{1+x} = 1 \quad (34.38)$$

となる。

最後に、 $x$  を定義式 (34.35) により書き換え、式 (34.38) の両辺に  $\frac{1}{2}$  を掛けることで、

$$\frac{f(E_1) + f(E_2)}{2} = \frac{1}{2}$$

を得る。これは、最初に期待していた式と一致し、これによって、問題の求める解答を得た。

# 35

## 相対論的量子力学

### 35.1 量子力学と相対性理論との矛盾の原因

量子力学の基本方程式は、エネルギーの関係式

$$E = \frac{p_x^2}{2m} + U(x)$$

から<sup>1)</sup>、対応原理により、エネルギーと運動量は演算子(作用素)によって書き換えられる。すなわち、

$$E \longrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad p_x \longrightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

という変更がなされる。この演算子を、波動関数  $\psi$  に左側から作用させることにより、量子力学の基本方程式が得られる。すなわち、

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x) \right) \psi \quad (35.1)$$

である。これはシュレーディンガー方程式とよばれる。

---

<sup>1)</sup> 簡単のために、一次元で考える。 $x$  軸方向のみの運動であるとする。

しかし、このシュレーディンガー方程式は、相対性理論と相性が悪い。なぜかと言うと、シュレーディンガー方程式を作る上で基礎にしていたエネルギーの関係式が、相対性理論のエネルギーの関係式と異なるからである。

シュレーディンガー方程式は、水素原子の電子軌道の計算などで、十分な精度の解を与える。けれども、ニュートン力学的なエネルギー関係式を採用していることにより、特殊相対性理論によってニュートン物理学が修正を余儀なくされるのと同じように、光速で運動する対象を記述しようとすると、事実と式とが一致しないのである。シュレーディンガー方程式は、ローレンツ変換に対して、不变ではないからである。

そこで、以降では、相対性理論と矛盾なく成立するように、シュレーディンガー方程式を書き換えていくことにしよう。

### 35.2 クライン＝ゴルドンの方程式

エネルギーの関係式が相対性理論と合わないのであれば、この関係式を相対性理論に従った形のものを採用すればよい。

相対性理論によれば、エネルギーの関係式は、次のように修正される。一次元で考える。

#### 相対性理論によるエネルギー

特殊相対性理論から要請されるエネルギーは、次式で表される。

$$E^2 = (mc^2)^2 + (p_x c)^2.$$

この式に、対応原理；

$$E \longrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad p_x \longrightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

を適用しよう。その際、演算子の右側に波動関数  $\psi$  を記述しておく。

$$E^2 = c^2 p_x^2 + m^2 c^4$$

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = \left( -c^2 \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + m^2 c^4 \right) \psi \quad (35.2)$$

このままの式の形でも十分だが、もう少し整理してきれいにできる。両辺に  $-1/c^2 \hbar^2$

をかけるだけなのだが.

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi$$

この式を クライン = ゴルドンの方程式 とよぶ.

クライン = ゴルドンの方程式

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi \quad (35.3)$$

クライン = ゴルドンの方程式は、相対性理論で要求されるローレンツ変換に対して、不変である。それは簡単に確かめることができる。上のクライン = ゴルドンの方程式を、次のようにみればよいだけである。

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi \right) = - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi$$

元の形空間微分  $\partial^2 / \partial x^2$  を移項しただけだ。これを 3 次元に拡張すれば、よりはつきりするだろう。

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi = - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi.$$

ダランベルシアン  $\square$  が見てとれる。すなわち、

$$\square \psi = - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi$$

である。ダランベルシアンと定数のみの式であるから、この Klien–Gordon の方程式はローレンツ変換に対して不変であることが、一目瞭然である。

### 35.3 クライン = ゴルドンの方程式の欠点

クライン = ゴルドンの方程式により、シュレーディンガー方程式が相対性理論と矛盾しない形に近づいたのだが、実はこのクライン = ゴルドンの方程式には欠点がある。それは、時間微分が 2 階になっていることに起因する欠点である。

クライン = ゴルドンの方程式とは、次式のことであった。

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi.$$

この方程式を元にして粒子の確率密度を計算すると、その値が負の数であることも可能なのである。

第 VII 部

電子物性



# 36

## バンド理論

### 36.1 結晶構造

コメント 物体は原子より構成される。原子がたくさん集まってできた塊を、私たちは目で見て、物体を認識しているわけだ。物体を構成している多くの原子は、デタラメに並んでいるわけではなく<sup>1)</sup>、何か一定の規則に基いている。本節では、この規則について、説明する。

#### 36.1.1 結晶

物体を構成する原子は、多くの場合、ある規則に従って並んでいる。この並びを、**原子配列** という。または、原子配列は **結晶構造** とも言われる。原子配列にはいろいろなパターンがある。以下に、その幾つかの例を挙げる。

---

<sup>1)</sup> 原子の並びを、**原子配列** という。配列とは、ものが順番通りに並んでいる状態のことである。

- 36.1.2 単位格子
  - 36.1.3 ミラー指数
  - 36.1.4 ブラックの回折条件
  - 36.1.5 逆格子
  - 36.1.6 結晶構造因子
- 36.2 エネルギーバンドの導出
    - 36.2.1 トンネル効果のおさらい
    - 36.2.2 1次元結晶
    - 36.2.3 ペニーネクローニヒのモデル
    - 36.2.4 ブロッホ関数
    - 36.2.5 ブロッホの定理
    - 36.2.6 バンドの導出

# 37

## 半導体

### 37.1 半導体とは

この世界に存在する全ての物体は、電流を流すことができる。しかし、この電流の生じやすさは、物体ごとに異なり、電流が流れやすい物体と、流れにくい物体が存在する。慣習的に、電流の生じやすい物体を 導体 といい、電流が流れにくい物体を 不導体、または 絶縁体 という。では、全ての物体が、導体か絶縁体のどちらか一方に分類されるかといえば、実はそうとは言い切れない。“どっちつかず”的性質をもつ物体もあるのだ。導体については電流を流しにくく、かといって、絶縁体というほど電流を流しにくいわけでもない物体が存在するのである。このように、導体と絶縁体の中間のような性質をもつ物体のことを、半導体 という。どうにも曖昧な説明だが、イメージは浮かぶだろう。以降では、半導体のもつ性質について考えることで、半導体をイメージできるよう、学習をしよう。

### 37.2 半導体の種類

一口に半導体といっても、いろんな種類がある。図 37.1 にこれを示す。

図からわかるように、半導体の種類を大きく分けるなら、2 種類に分けることがで

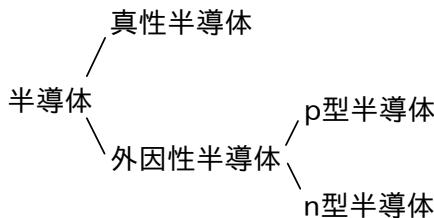


図 37.1 半導体の分類

きる。真性半導体といわれるものと、外因性半導体といわれるものである。真性半導体とは、一種類の元素からなる半導体である。例えば、Si（シリコン、または、珪素）や、Ge（ゲルマニウム）がそうである。*i*型半導体といわれることもある。外因性半導体とは<sup>1)</sup>、複数の元素により構成される半導体である。有名な*n*型半導体、*p*型半導体は、外因性半導体の一種である。

### 37.3 キャリア（電荷担体）

電気伝導の発生源は、電荷の移動である。ただし、多くの場合、物質を構成する原子のもつ全ての電子が、電気伝導を生じさせている電荷であるというではない。物質を構成する原子の、周囲の電子の一部が、移動して電流が生じる。この移動する一部の電子のことを、キャリア（電荷担体）という。ところで、電荷には正と負の2種類あることから、キャリアにはもう一種類あることが容易に推察されよう。このもうひとつの正のキャリアのことを、正孔（hole）という。

下に、キャリアである電子と正孔について、簡単にイメージしておこう。

<sup>1)</sup> 外因性半導体：不純物半導体ともいわれる。

### 37.3.1 電子 (electron)

言わずと知れた、小学生でも知っている、電子である。ただし、キャリアとしての電子とは、上にも書いたように、原子を構成するすべての電子というわけではない。主に、原子を構成する最外殻にある、価電子がキャリアになる場合が多い。

### 37.3.2 正孔 (hole)

### 37.3.3 電子の移動速度 と 正孔の移動速度

## 37.4 真性半導体の電導機構

### 37.4.1 Si 原子の古典的イメージ

半導体は導体と絶縁体の中間のような性質をもつ。ここでは、半導体が導体として機能するときに、その電気伝導はどういうように起こっているかを考える。それにはまず、シリコン(以降、元素記号の Si を用いて表現する)原子の構造を知っていることが必要である。Si 原子の構造を、古典的なイメージで描いたのが、図 37.2 である。Si 原子の周囲には、14 個の電子が存在している。その構成は、図のように、内側に 2

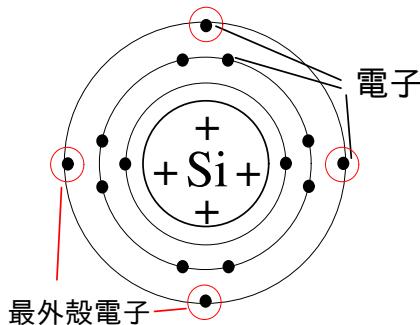


図 37.2 Si 原子の古典的イメージ

個、さらにその外側に 8 個、そして外周に 4 個である。この電子配置は、量子力学的に説明されるのであるが、半導体の電導機構にはあまり関係がない。大事なのは、一

番外側に存在している4つの電子である。化学的に言えば、価電子と呼ばれる電子のことである。この4つの電子が結合の手になり、Si原子の共有結合を実現している。Siの電導機構は、この結合の手である4つの価電子の移動によって、説明される。以降では、最外殻電子（価電子）の個数のみが、導電機構に関与することから、価電子以外の電子は無視する。

### 37.4.2 電導機構の説明

実際の物質は、原子ひとつではなく、複数個の原子が集まってできている。Si原子も同様で、多くのSi原子が共有結合している。それを模式的に表したのが、図37.3である。ただし、この図には、左右に電位を与えており、右側に正の電位を与え、左側に負の電位を与えている。このようにSi原子に電位を与えると、電気伝導が生じる。つまり、両端に電圧を加えると、電流が生じるのである。

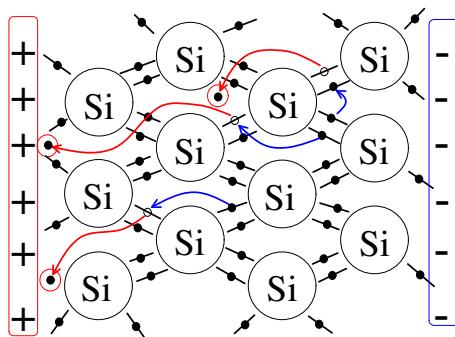


図37.3 Siの電導機構イメージ

この電流の電導機構は次のように説明できる。まず、電位を加えると、Si原子間の共有結合を担っている価電子の一部が、両側から与えられた電位によるエネルギーを受けとる。エネルギーを受け取った電子は、ある程度の運動量をもつようになり、Si原子を離れる。Si原子を離れた電子は、金属で言うところの自由電子と同じ振る舞いをするようになる。この電子が、Siの電気伝導を担う電子である。ところで当然、Si原子から電子が離れてしまったので、そこには穴ができる。電子は負の値を持っているので、開いた穴には電気的に正の性質がある。周囲の電子はこの穴を埋めるべく、移動してくる。そしてその穴がふさがる。そうするとまた、穴をふさいだ電子の元に

いた場所が穴になる。さらにこの穴をふさぐべく、周囲の電子がやってくる。Siの電気伝導はこのように説明できる。

## 37.5 外因性半導体の電導機構

### 37.5.1 外因性半導体の構成 1(donor 注入)

外因性半導体とは、複数の元素から構成される半導体である。例えば、Si原子から構成される真性半導体の一部のSi原子を、価電子を5つもつ原子As(砒素)に置き換えると<sup>2)</sup>、これはn型半導体とよばれるものになる。このn型半導体は外因性半導体の一種である。図37.4にそのイメージを示す。

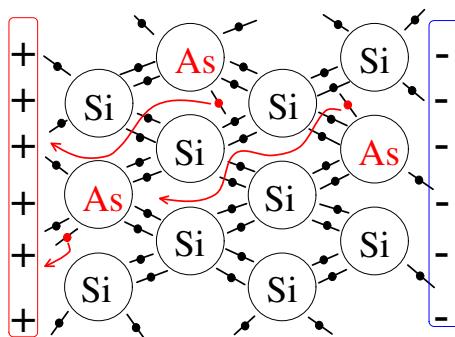


図37.4 Si原子配列にAs(砒素)を少量埋め込む

元々、ひとつのSi原子のもつ価電子数は4つであった。そして、このSi原子の一部が5つの電子をもつAs原子に置き換わったのだから、単純に考えて、

$$(As\text{ 原子の価電子数}) - (Si\text{ 原子の価電子数}) = 5 - 4 = 1$$

で、電子が1つ余ることになる。実は、この余った電子が外因性半導体の電気伝導を担う電荷なのである。

Asの添加等により真性半導体中に電子を増やすことで電気伝導性を高めた半導体のことを、n型半導体といいう<sup>3)</sup>。

<sup>2)</sup> As(砒素)は周期表における第5族元素である。第5族元素は、価電子を5つもっている。

<sup>3)</sup> nはnegative(英単語)の頭文字をとったものである。英単語のnegativeには「否定的」という意

「真性半導体に As を注入する」ということは、「電子を注入する」という意味にとることができる<sup>4)</sup>。電子を注入するという意味で、真性半導体に As 元素を添加するとき、As のこをドナー (donor) という。一般に、電子を注入するために添加される元素のことを ドナー (donor) という。

### 37.5.2 電導機構の説明 1(donor 注入)

### 37.5.3 外因性半導体の構成 2(acceptor 注入)

### 37.5.4 電導機構の説明 2(acceptor 注入)

## 37.6 ホール効果

### 37.6.1 ホール効果の概要

ホール効果 (Hall effect) は Hall<sup>5)</sup> が発見した電流と磁束密度に関連した現象のことである。1879 年に発見されたといわれている。

電流  $\mathbf{I}$  が生じている導体に、この  $\mathbf{I}$  と直交するような方向に、磁束密度  $\mathbf{B}$  をかける。このとき、電流  $\mathbf{I}$  を担うキャリアは、 $\mathbf{I}$  と  $\mathbf{B}$  の両方に直交する方向にローレンツ力を受ける。そうすると、導体内のキャリア密度に偏りが生じる<sup>6)</sup>。偏ったキャリア密度は、導体の表面に電位差を発生させる。図 37.5 は現象の全体像を表したものである。この現象を ホール効果 という。また、ホール効果により生じる導体の両端の電位差を ホール電圧 という。

### 37.6.2 ホール効果発生の機構

先に、ホール効果発生のおおよその道筋を追ったが、ここでは、もう少し詳細に、ホール効果の発生について考えていく。

ホール効果の発生とは、ホール電圧の発生と同じことである。ホール電圧の発生機構を順を追って調べていこう。

---

味がある。電子のもつ電気量がマイナスであることから、negative が連想され、n 型といわれる。

<sup>4)</sup> 実際に添加するのは As 元素なのだが、この As 添加の目的は、実は、電子を注入することである。

<sup>5)</sup> Edwin Herber Hall(1855-1938, アメリカ); 物理学者

<sup>6)</sup> キャリアがローレンツ力に引っ張られて、導体の端のほうへ移動してしまう。そうすると、導体内部にキャリアの多い部分と、少ない部分が生じる。ただし、導体内キャリアの、正味の個数に変化はない。

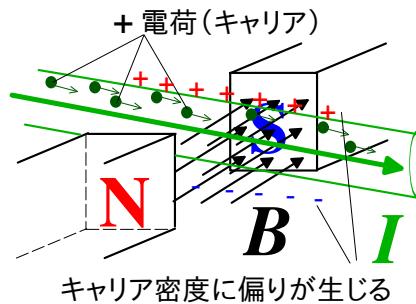
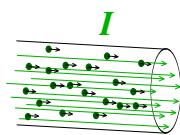


図 37.5 ホール効果(イメージ)

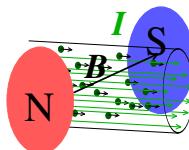
まず、発生機構を箇条書きにすれば、以下の通りになる。

- (1) 导体に電流  $I$  が生じている
- (2) 電流  $I$  が生じている導体の近くに、磁束密度  $B$  を発生させる
- (3) 電流  $I$  を担うキャリアは、磁束密度  $B$  よりローレンツ力をうける
- (4) キャリアはローレンツ力を受け、導体内の一方향に偏る（キャリア密度に偏りが生じる）
- (5) キャリア密度の偏りにより、導体の端に電位差（ホール電圧）が生じる。

また、各段階のイメージを図 37.6 に描く。



(1)



(2)

### 37.6.3 ホール効果におけるキャリアの運動

ホール効果における、キャリアの動きを考える。簡単のために、キャリア 1 個の運動を考える。ここでは、キャリアは電子(負の電荷をもつ粒子)とする。



図 37.6 ホール電圧の発生

ホール効果は導体中に生じている電流  $I$  と、その周囲に生じている磁束密度  $B$  に起因する現象である。そこで、導体に電流  $I$  が生じていることと、その周囲に磁束密度  $B$  が生じていることの 2 点を仮定しよう。

### 37.7 Schottky ダイオード

### 37.7.1 Schottky 障壁ダイオード ダイオードの $I - V$ 特性

図 37.7 は、通常の p-n 接合と Schottky 障壁ダイオードとの  $I - V$  特性の比較したものである。

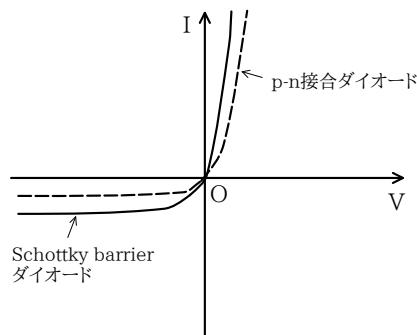


図 37.7 Schottky 障壁ダイオードの  $I - V$  特性

Schottky 接触ダイオードの  $I - V$  特性を考える。上図 37.7 の  $V > 0$  の部分は、

順バイアス<sup>7)</sup> をかけたときのものである。このときの電流  $I$  と電圧  $V$  の関係は、金属から半導体へ流れる電流密度を  $J_{\text{金属} \rightarrow \text{半導体}}$  として、

$$J_{\text{金属} \rightarrow \text{半導体}} = \frac{4\pi q m k_B^2}{h^3} T^2 \exp\left(-\frac{q\phi_{Bn}}{k_B T}\right) \exp\left(\frac{qV}{k_B T}\right) \quad (37.1)$$

が成り立つ。ここに、 $q$  はキャリアの電気量、 $\phi_{Bn}$  は Schottky 障壁、 $m$  は有効質量、 $k_B$  はボルツマン定数、 $h$  はプランク定数、 $T$  は温度である。

次に、逆バイアス<sup>8)</sup> をかけたときを考える。理想的には電流は 0 であるが、非常に微小な実際は電流が生じる。これは、p 型半導体部分の minority carrier である電子がダイオードを通過するためである。図 37.7 は分かりやすさのために、かなり誇張されて描かれている。

図には描かれていないが、逆バイアスの電圧を徐々に大きくしていくと、p 型半導体部分の電子が 電子なだれ を引き起こす。この説明はタウンゼント<sup>9)</sup> によってなされている。高電圧をかけると p 側の少数キャリアである電子  $e_1$  が大きな運動エネルギーをもち、半導体を構成する原子に衝突する。この衝突でその原子内部の電子  $e_2$  が飛び出す。この現象を 衝突電離 という。衝突を引き起こした  $e_1$  は高電圧によって生ずる電場によってなおも運動し続ける。同様に  $e_2$  も運動する。従って、今度は  $e_1$  と  $e_2$  が他の原子にぶつかっていって衝突電離を引き起こし、次第に大量の電子が半導体を流れていく。これが電子なだれと呼ばれる現象である。電子なだれが発生すると、それ以上大きい電圧をかけることができなくなる。

### 37.7.2 p-n 接合ダイオードのエネルギー-band 図

p 型半導体と n 型半導体を接触させると、熱平衡状態において各半導体内の電子のフェルミエネルギーが等しくなる。もしフェルミエネルギーが等しくならなければ半導体内に電流が生じるのであるが、これは外部からの仕事なしに電流が生じていることになり、すなわちエネルギー保存則に反するからである。従って、p-n 接合のエネルギー-band 図は図 37.9 のようになる。参考のために、接合前の n 型半導体、p 型半導体のそれぞれのエネルギー-band 図を図 37.8 に描いておく。

$E_c$  は Conduction band (伝導帯) のエネルギー準位であり、 $E_v$  は Valence band (荷電子帯) のエネルギー準位である。以降の図でもこれらの記号を用いる。

<sup>7)</sup> p 側を正極、n 側を負極に接続。

<sup>8)</sup> n 側を正極、p 側を負極に接続。

<sup>9)</sup> John Sealy Edward Townsend (1868-1957, アイルランド)

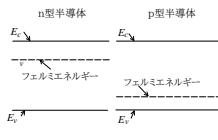


図 37.8 接合前

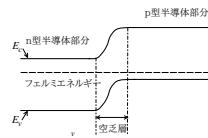


図 37.9 平衡状態

### 37.7.3 Schottky 障壁ダイオードのエネルギー-band図

金属の仕事関数を  $\phi_m$  とし、半導体の仕事関数を  $\phi_s$  とする。n型半導体の場合において、 $\phi_m > \phi_s$  のとき、金属と半導体の接触は Schottky 接触となる。また、p型半導体の場合においてはその逆で、 $\phi_m < \phi_s$  のときに、Schottky 接触となる。

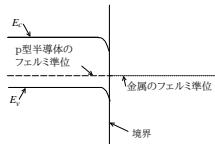


図 37.10 平衡状態；p側

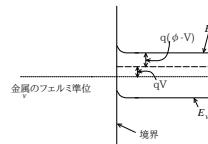


図 37.11 平衡状態；n側

### 37.7.4 オーミック接触のダイオードのエネルギー-band図

金属の仕事関数を  $\phi_m$  とし、半導体の仕事関数を  $\phi_s$  とする。n型半導体の場合において、 $\phi_m > \phi_s$  でないとき、金属と半導体の接触はオーミック接触となる。また、p型半導体の場合においてはその逆で、 $\phi_m < \phi_s$  でないときに、オーミック接触となる。

## 37.8 電子親和力

1つの原子に電子を受け入れたときに放出されるエネルギーのことをいう。

※ 『理科年表』、国立天文台編、丸善、2007 を参照しました。

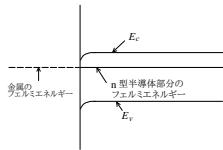


図 37.12 平衡状態 ; n 側

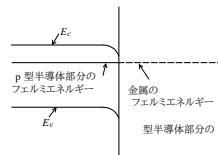


図 37.13 平衡状態 ; p 側

表 37.1 金属の電子親和力と仕事関数

金属	電子親和力 [eV]	仕事関数
Mg	0	
Al	0.43	
NI	1.156	
Cu	1.235	
Zn	0	
Ga	0.43	
Se	2.0206	
Pd	0.562	
Ag	1.302	
In	0.3	
Au	2.3086	

## 37.9 MOSFET

### 37.9.1 ピンチオフ効果

ピンチオフ効果について説明する。MOSFET は通常、図 37.14 に描いたような動作をする。この図の場合、ゲート (Gate) に正のバイアスをかけて、p 型半導体に反転層を生成し、電子のチャネルを生成している。これにより、電子がソース側からドレイン側に流れることができる。

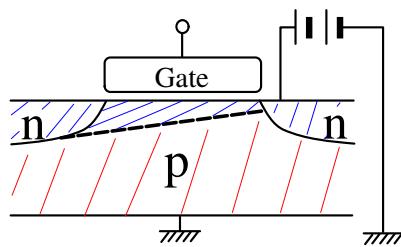


図 37.14 通常の MOSFET の動作

## 第 VIII 部

# 電気回路/電子回路



# 38

## 電気回路/電子回路の構成要素

### 38.1 電気回路/電子回路とは何か

**コメント** 「電気回路」と「電子回路」は字面だけを見る限り、一文字しか違わないのだけど、両者には大きな違いがある。電気回路と電子回路を紹介するに当たって、最初に両者の違いを示しておくべきだろう。以下では、まず、電気回路にはなくてならない要素、すなわち、導線と起電力を説明した後、電気回路と電子回路の違いを確認しよう。

#### 38.1.1 導線（導体）と絶縁体

この世界で、“絶対に電気を通さない物体”は存在しない<sup>1)</sup>。電気を通す物体のことを導体と呼んでいるが、つまり、世の中のすべての物体は導体なのである。しかし、物体の種類は様々であり、電気の通しやすさは、その種類ごとに異なる。となると、当然、物体の種類の違いにより、電気がよく通る物体から、電気をあまり通さない

<sup>1)</sup> “物体は”と言うところに注意。つまり、真空間でないということ。完全に理想的な真空間は、電気を通さない。ただし、高エネルギーをかけなければ、そこから正負の電気が等量だけ発生することがあるかもしれないが、このノートでは、そんなあからさまに特殊な状況を想定することは、しない。

い物体までを順に並べることができる。一般的に、電気をよく通す物体を 導体 といい、電気をあまり（殆ど）通さない物体のことを 絶縁体 という<sup>2)</sup>。そして、導線とは、導体を細長い紐状に整形したもののことをいう。

“よく通す”だとか、“あまり通さない”とかと書いてしまったが、この「よく」と「あまり」とは、具体的にどういうことかは、説明していない。つまり、導体と絶縁体の区別が曖昧に扱ってしまっている。そこで、差し当たっての理解として、乾電池と豆電球を何か物体でつないだ時、豆電球が光るなら、その物体は導体である、と判断して貰って構わない。というか、このノートでは、その程度の理解で十分だし、実際に電気回路を作つて遊ぶ場合にも、これ以上の知識は必要としない。

実は、導体と絶縁体を明確に区別するような定義は存在しない。そもそも、電気の流しやすさというものは、世の中に存在する物体の種類すべてに対して、相対的にしか評価できない。しかし、多くの場合、電気抵抗率 という概念を持ち出して<sup>3)</sup>、その値により、おおよその区別がなされる。例を以下に示しておこう。実際の具体的な数値は物質ごとに様々であるので、そのオーダー（桁数）による区別する。

導体	：	$10^{-8}$	[ $\Omega\text{m}$ ]	以下
絶縁体	：	$10^8$	[ $\Omega\text{m}$ ]	以上

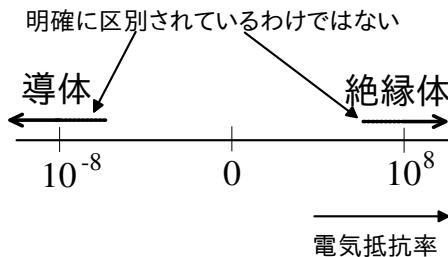


図 38.1 導体と絶縁体の抵抗率

このように書いてしまうと、導体と絶縁体の間の電気抵抗率の値を持つ物体はない

<sup>2)</sup> 絶縁体は、不導体（ふどうたい）とも言われる。

<sup>3)</sup> 電気抵抗率については、38.4.10 節を参照。

のか、といった質問がしたくなるだろう。とりあえず、これに回答しておこう。そのような物体は存在し、実際に半導体と言われていて、現在のコンピュータを構成するためにもっとも重要な役割を担っている。図に加えておこう（図 38.2）。

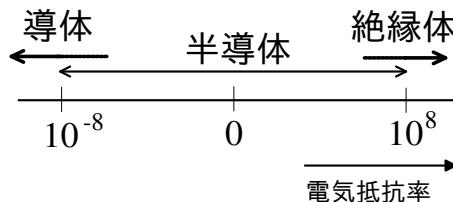


図 38.2 导体と半導体と絶縁体の抵抗率

導体には自由電子と呼ばれる、原子核に束縛されていない電子が多数存在している。この自由電子こそが、電気を通す役割をなっている。自由電子は導体中に多数存在するが、それら全体の動きが、電流として認識される。これに対し、絶縁体には自由電子は存在しない。これが、導体と絶縁体の性質が大きく異なる、直接の原因である。しかし、何度も言うが、絶縁体であっても電流は、微弱とみなされてしまうが、生じる。これは絶縁体の抵抗率が有限であることからも、根拠付けられる<sup>4)</sup>。

#### # memo No.103: 导体/半導体/絶縁体の違い

導体と半導体、絶縁体の違いは、どこから生じてくるのだろうか<sup>5)</sup>。電気抵抗率は物質の種類による物理定数のひとつだが、その値のとりうる範囲は、あまりにも広すぎる。物理学における他の物理定数の中でも、屈指の範囲の広さである。この物質によって大きく値の異なる電気抵抗率は、古典的に説明しようとしても、成功することはない。つまり、量子論を使わないと、説明のつかない現象なのである。言い方を変えれば、この電気抵抗率の値は、量子論を使うことによって説明のつく現象である。それは、エネルギー-bandという概念を用いることで、直感的に説明がなされる。エネルギー-bandを可視化した図が、図 38.3 である。エネルギー

<sup>4)</sup> 電流を生じさせない、完全な絶縁体であれば、電気抵抗率は無限大であり、測定不可能でなければならない。しかし、現実には、電気抵抗率が無限大となるような物質の存在は確認されていない。

<sup>5)</sup> 「自由電子の存在の有無」がその根拠であるが、もう少し、立ち入って考えてみよう。

バンド図、または、誤解が生じるおそれがない場合には、単に バンド図 ということが多い。

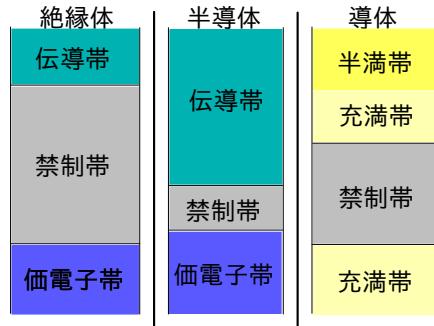


図 38.3 導体と半導体と絶縁体のバンド図

図 38.3 の左側が絶縁体のバンド図である。禁制帯の幅<sup>6)</sup>が、6[eV]以上あれば、絶縁体とみなしてよいだろう。図 38.3 の真ん中が、半導体のバンド図である。禁制帯の幅が、1~[eV]前後であれば、半導体といってよいだろう。導体のバンド図は、図 38.3 の右側である。注目するのは、伝導帯と半満帯ここには、自由電子が多数存在するエネルギー帯である。

導体と半導体、絶縁体の区別を理解した段階で、エネルギー・バンド図はどのように得るのか、という疑問が生じると思うが、これについては、物性の部分で考えることにしよう。電気回路や電子回路を学ぶには、あまり関係がないのである。このエネルギー・バンドの説明だって、あまり関係がないのに—。

### 38.1.2 起電力・電源

#### 38.1.2.1 起電力

導線の両端に電位差を生じさせるものることを、起電力 という。導線の両端に電位差が生じれば、その導線内部の自由電子は運動を始めて、電流が生じる。回路に電流を生じさせるためには、起電力が必要なのである。

もう少し詳しく説明しよう。導体からなる導線には、多数の自由電子が存在している。しかし、導体のみが存在していても、その導体中に電流が生じることはないと<sup>7)</sup>。なので、電気回路に電流を生じさせるには、導線にエネルギーを与える必要があ

<sup>6)</sup> 禁制帯の幅：価電子帯と伝導帯との最小のエネルギー差のこと。単位の [eV] はエレクトロンボルトとよむ。1[eV] は、1[V] の電位差がある空間内で電子 1 つがもっているエネルギーである。

<sup>7)</sup> 導体の自由電子の配置が一意的に定まることと、エネルギー保存の法則からの帰結である。

る。つまり、導線の両端に電位差を生じさせないといけないので。

電流とは、導線内の多数の自由電子の平均的な移動とみなせるから、導線に電流が生じるためには、その内部の自由電子に速度を与える必要がある。導体内部の自由電子が速度を持つようなエネルギーの与え方ならば、その与え方はどのようにあっても構わない。例えば、トムソン効果<sup>8)</sup>を狙って、導線の両端に温度差を作ったりしてもいいし、電磁誘導を狙って、導線を一様な磁場中を運動させてもいい。しかし、一番手っ取り早く、簡単にイメージできるのは、乾電池につなぐことである。とにかく、導線の両端に電位差を生じさせ、導体内部の自由電子にエネルギーを与えるのである。起電力とは、エネルギーの源であり、回路はこの起電力から得たエネルギーを自由電子の運動エネルギーとして受け取るのである。

### 38.1.2.2 電源

起電力が電気回路、あるいは、電子回路を作動させるためのエネルギー源として使用されるとき、この起電力は別名として、電源 というのが一般的である。

#### # memo No.104: 起電力と電源の違い

起電力を得るには、乾電池を使用するのが一番簡単な方法だ。手動のダイナモ発電機を使用するのも面白い（自転車のライト等）。乾電池や発電機は具体的に目に見える物として存在する。だから、電気回路図として乾電池や発電機を記号化して、その位置を描くことができる。

しかし、起電力を得るには、電磁誘導を直接的に利用する方法も考えられる（図 38.4 参照）。

図 38.4 の右側の回路に、電磁誘導により起電力が生じて電流が流れ始めるのだが、具体的にどこに起電力が存在するかを示すことは不可能である。つまり、起電力の発生場所の特定ができないので、電気回路図に描き難いのである<sup>9)</sup>。いうなれば、回路全体に起電力が生じたと言うのが、最も適切な表現だろう。「起電力」とは、「電源」をその一部として含む、より範囲の広い言葉として考えたほうが良いかもしれない。電気回路で使用される起電力を『電

<sup>8)</sup> トムソン効果：導線の両端の一方に高熱源を接触させ、他方に低熱源を接触させる。すると、導線の両端に温度差が生じる。このとき、温度の高い方から低い方に向かう向きに起電力が生じ（これをトムソン効果 という）、電流が生じる。熱力学の第二法則によれば、このように熱の分布に偏りが生じる場合、それを熱平衡状態になるように、熱分布の変化が起こる。導線のもつ熱の原因の一つに、自由電子の運動エネルギーが挙げられる（当然ながら、導線を構成する導体の原子核の振動も、その原因のひとつに挙げられるが、電流が生じる原因としては関係がないので、ここでは無視する）。つまり、温度の高い方の自由電子のが、温度の低い方へ移動するのである。これが、電流として観測されるのである。

27.2.2 節（500 ページ）参照。

<sup>9)</sup> 電磁誘導の法則によれば、起電力はコイル全体に生じているのだが、コイルそれ自体は電源でも起電力でもない。あくまでも、外部の磁場の時間変化に反応するだけ意である。

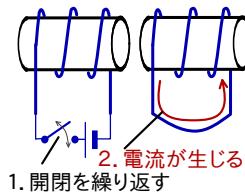


図 38.4 電磁誘導による起電力

源』という、認識よいと思う。

### 38.1.3 電気回路

電気回路とは何かを、一般的に言葉で説明するのは難しいし、例えそれができたとしても、何か難しい言い回しになってしまいかねない。そこで、ここでは具体例を挙げることで、電気回路についてのイメージを捉えることとしよう。

小学生の頃、豆電球と乾電池を用意して、それらをつなぎあわせて、豆電球を光らせた経験があるだろう。これが、最も単純な電気回路と言える。

もっと複雑な電気回路も経験しているだろう。コイルを作成して、モータ、もしくは電磁石、ダイナモ発電機などを作ったことはないだろうか。これらを使った回路も、電気回路である。

コイルや豆電球などを使って、それらを起電力につなぎ、電流が一周できる状態になったものが電気回路である、と言える。

#### # memo No.105: 理論が先か、経験が先か

電気回路とは何か。この疑問を解決させるには、世の中で電気回路と言われるものに触って、実感するのが手っ取り早い。理論的なことは、そのあとで学べば良い。しかし、現実問題として、紙と鉛筆だけを使って、電気回路の教科書をよむ場合には、予め電気回路というもののイメージを持っていないと、理解するのに大変に時間がかかるだろう。理論とは、あくまでも、現実に起きている現象を説明するためのものであり、私たちの経験をもとに構築される。つまり、理論を学ぶ前に、実際に体で経験していることが、最も望ましい学習スタイルである。（にもかかわらず、大学などの学生実験では、実験に先立って、理論の学習を迫られる。何かおかしい気がしてならない。“時間の都合”として、片付けられてしまうのだろうか。）

### 38.1.4 電子回路

電子回路を一言で言い表すことは、電気回路と同じで、とても難しい。ましてや、電子回路は電気回路と違って、小学生の頃から馴染みのあるというものではなく、ともすると、見たことも聞いたこともない人もいることだろう。なので、初めて「電子回路」という単語を聞いたという方は、この節を読み飛ばして、先に進んでもらいたい。そうすれば、電子回路についてのイメージが、徐々に湧いてくることだろう。

電子回路の例として、例えば、交流を直流に変えるインバータや、またはその逆作用であるコンバータ（直流を交流に変える）がある。また、オペアンプを使った各種演算回路も、電子回路と呼ばれるものである。

要するに、回路内の電流や電圧をその回路自身で制御して、自らの動き方に変化を加えられるような回路のことを、電子回路という。インバータの例で言えば、起電力の向きが負の向きになったと判断して、その方向を逆転させて正方向になるように、自身の動きを制御させることができる、ということである。こういう意味から、電子回路は能動的な回路と言われることもある<sup>10)</sup>。

よりはっきりとした電子回路のイメージを得るには、実際に作ってみるか、学習を進めていくしかない。具体的な電子回路を多くみることで、電子回路のイメージが身につくことだろう。

### 38.1.5 電気回路と電子回路の違い

先にも書いたが、電気回路と電子回路には大きな違いがある。電気回路は起電力に対して、一定の動作をさせることしかできないが、電子回路はそれ自身の動きに変化を加えることができる。例えば、一定方向の電流しか通さない（ダイオード）であるとか、振動する入力信号に対して、ある周波数領域の信号しか通過させない（ほかは遮断する）とかといったものが電子回路である。

電気回路は起電力に対して受動的であり、電子回路は能動的に反応する。具体的なイメージが湧かず、モヤモヤした気分かもしれないが、ここで止まってしまっては、先に進めない。学習を先に進むことで、分かってくることであり、具体例をたくさん見ることが、理解を早めるために必要である<sup>11)</sup>。多少のモヤモヤ感を押さえ、先に

▶ 10) 電子回路が能動的な回路と呼ばれるのに対し、電気回路は受動的な回路と言われる。電気回路は一定の動きしかできない。変化を見たい場合には、起電力の考え方を変える（起電力の出力波形を変化させるということ）必要がある。起電力に対して受動的という意味で、このように呼ばれるのだ。

▶ 11) 当然ながら、闇雲に先に進んでも得るものはない。適切な参考書、雑誌、教科書、友人、指導者な

進もう。

## 38.2 電気回路の構成要素

### 38.2.1 素子

電気回路や電子回路を構成する基本的な構成要素は、以下に書くようにいくつがあるが、それらを総称して、**素子（そし）**という<sup>12)</sup>。電気回路を構成するのに必要な素子は3種類ある<sup>13)</sup>。それらは、

- (1) 抵抗
- (2) キャパシタ（コンデンサともいわれる）
- (3) インダクタ（コイルともいわれる）

と呼ばれている。

次節から、この3つの素子（抵抗、キャパシタ、インダクタ）とは何かといった説明と、数学的解析を行うための定義を紹介する。

ちなみに、電子回路を構成する素子は5種類である。上の電気回路の3種類に加えて、ダイオードとトランジスタが使われる。また後に、改めて、紹介しよう。

### 38.2.2 抵抗とオームの法則

#### 38.2.2.1 抵抗の定義

まず、最も単純で基本的な素子である**抵抗**について考える。小学生の頃から、あるいは中学生の頃からおなじみの、**オームの法則**を確認する。この法則は以下のようである。

---

どを頼りに、学習を進めないとならない。

▶<sup>12)</sup> 素子：「そし」と読む。「もとこ」ではありません。

▶<sup>13)</sup> たった3つしかない、といったほうがいい（驚きを込めて）。3種類の素子だけで、バリエーションにとんだ、様々な動作をする電気回路を作ることができる。

**Point 90: オームの法則**

導体に流れる電流  $I$  と、そのときの導体にかかる電圧  $V$  は比例関係にある。式で表現すれば、その比例定数を  $R$  として、

$$V = RI \quad (38.1)$$

である。この比例定数は導体の状態や種類によって異なる。しかし、同一の導体で状態も同じであれば、抵抗値は一通りに決まる。

この比例定数  $R$  を 抵抗 (Resistance) という。この法則から、電流と抵抗から電圧が計算できる。また、電圧と抵抗から電流が計算できる。論理的に整理しようとすると、電流を電圧と抵抗によって定めるか、もしくは、電圧を電流と抵抗で定めるかを決めないといけない。しかし、どちらをとっても、論理的整合性はよくない。そこでここでは、この法則は、「電流と電圧の比例関係を表現する法則」であるという解釈にとどめておく。

**38.2.2.2 抵抗の回路図記号**

電気回路を、紙面上に書く場合、抵抗は次のように表現される。

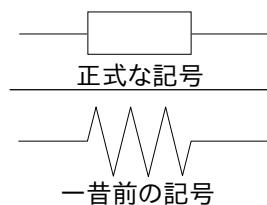


図 38.5 抵抗の回路図記号

図 38.5 は最も基本的な、抵抗を表す記号である。実際の抵抗には、抵抗値を変更できる可変抵抗器や、高電力用のホーロー抵抗器などがあり、それらには別の記号が割当てられている。

### 38.2.3 キャパシタ

#### 38.2.3.1 キャパシタの物理的構成

物理学では、コンデンサとは、二つの物体が互いに近くに存在するとき、この一対のことという。

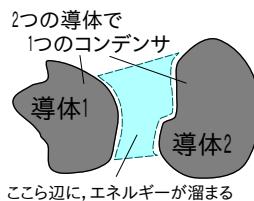


図 38.6 コンデンサ

このコンデンサは、電気回路においては、理想的な素子という意味で、キャパシタとよばれることが多い。

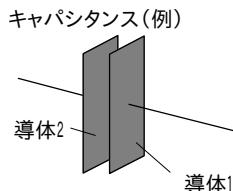


図 38.7 キャパシタンスの最も簡単なイメージ

#### 38.2.3.2 キャパシタンスの定義

キャパシタンスとは、簡単にいえば蓄電器<sup>14)</sup>である。もう少し細かくいうと、キャパシタンスとはある電圧  $V$  に対して溜まる電気量  $Q$  のことをいう。式で書けば以下の通りである。

<sup>14)</sup> 蓄電器：電気をためておくことのできる装置のこと。

**Point 91: キャパシタンスの定義**

キャパシタンス  $C$  は、その両端に電位差  $V$  を与えたときに、それに蓄えられる電気量  $Q$  のたまり具合で定義される。

$$C := \frac{Q}{V}. \quad (38.2)$$

**38.2.3.3 キャパシタの回路図記号**

キャパシタンスの電気回路記号は、図 38.8 の通りである。

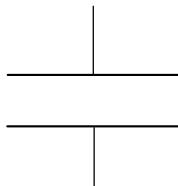


図 38.8 キャパシタンスの回路図

**38.2.3.4 キャパシタの電気回路中の動作**

キャパシタは電気回路の素子であるから、電流と電圧に対してどのように作用するかを考えておく必要がある。電流を  $I$  と表現することにしよう。電磁気学では電流の向きをベクトルで表現していたが、電気回路の部分では、電気回路の方向に電流が生じることはわかりきっているので、その大きさのみを扱うことにする。電流とは電荷の動きそのものであった。つまり、電流  $I$  は電荷の時間変化で表現できて、

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (38.3)$$

である。両辺を時間  $t$  で積分すると、

$$\int I dt = \int \left( \frac{dQ}{dt} \right) dt = \int dQ \quad (38.4)$$

$$\therefore Q = \int I dt$$

である。これを、キャパシタンスの定義式に代入すれば、

$$C = \frac{1}{V} \int I dt \quad (38.5)$$

となる。

このノートでは、オームの法則を電圧  $V$  について解いた式で表現したので、キャパシタンスについても同様に統一すれば、

$$V = \frac{1}{C} \int I dt \quad (38.6)$$

である。

また、電流について解くと、

$$\begin{aligned} \int I dt &= CV \\ \therefore I &= C \frac{dV}{dt}. \end{aligned} \quad (38.7)$$

まとめておこう。

### Point 92: キャパシタンスと電流・電圧の関係

キャパシタンス  $C$  と、電流  $I_C$ 、電圧  $V_C$  の関係<sup>a</sup> は、以下のようになる。

$$V_C = \frac{1}{C} \int I_C dt, \quad \text{または}, \quad I_C = C \frac{dV_C}{dt}. \quad (38.8)$$

上の二つの式は、回路方程式をたてる際に使用する。この式は、キャパシタンスに対する、オームの法則に相当するものと考えてもいい。

<sup>a</sup> 電流と電圧の添字につけた  $C$  は、それぞれ、キャパシタを流れる電流とキャパシタの両端の電位差を強調するために、付加した。

### 38.2.4 インダクタ

#### 38.2.4.1 インダクタの物理的構成

知つてのとおり、コイルとは導線を円筒状に巻いたものである。



図 38.9 インダクタ (コイル)

コイルを電気回路に用いるとき、理想的なコイルというよな意味で、インダクタという用語を用いる<sup>15)</sup>。

#### 38.2.4.2 自己インダクタンスの定義の準備

インダクタにおける電流と電圧の関係を考える。インダクタの原理の根底には、ファラデーの電磁誘導の法則がある。この法則は、電磁気学で学習したように、

$$V = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (38.9)$$

である。ここに、 $\Phi(t)$  は磁束である。電磁気学では電場と磁束密度で電磁誘導の法則を表現したが、電気回路では電圧(起電力)と電流の関係を調べたいので、上のよな表現を用いる。

ソレノイド状のコイルが作る磁束は電流を用いて  $\Phi = NS\mu_0 I/l$  である。ここに、 $N$  はコイルの巻数、 $S$  はコイルの断面積、 $l$  はコイルの長さである。従つて、これを電磁誘導の法則  $V = -d\Phi/dt$  に代入すると、

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \left( \frac{NS\mu_0}{l} I \right) = -\frac{NS\mu_0}{l} \frac{dI}{dt} \quad (38.10)$$

<sup>15)</sup> インダクタにも種類があつて、主なものには無限に長い円筒状のものをソレノイド、円環状(ドーナツ状)にしたものをつけいタルといふ。

となる。ここで定数の部分を、ソレノイドコイルの自己インダクタンス  $L$  と定義する。すると、コイルの両端の部分の電位差は

$$V = -L \frac{dI}{dt} \quad (38.11)$$

となる。

または、電流について解くと、

$$I = -\frac{1}{L} \int V \, dt. \quad (38.12)$$

#### 38.2.4.3 自己インダクタンスの定義

自己インダクタンスについての解説は、上記の通りである。しかし、ここで、自己インダクタンスの符号を逆転しておきたい。というのも、電磁気学的に学んだ場合（上記の場合）には、自己インダクタンスの符号を負として扱う。これは、自己インダクタンス自身を基準にした見方であり、外からの磁束の変化に逆らうとして（レンツの法則）いるからである。つまり、コイルが外部に対してどのように作用するかに視点が置かれていたのである。しかし、電気回路理論においては、外からの電圧が基準になる。なので、自己インダクタンスの定義が異なり、符号が逆転することになる。要するに、

$$L_{EM} = -L_{ECirc}$$

である。ここに、 $L_{EM}$  は電磁気学的 (Electro Magnetism) な自己インダクタンスを表し、 $L_{ECirc}$  は電気回路論的 (Electric Circuit) な自己インダクタンスを表している。すると、関係式の符号も逆転し、以下のようになる。

$$V = L \frac{dI}{dt}, \quad I = \frac{1}{L} \int V \, dt. \quad (38.13)$$

一般的に<sup>16)</sup>、電圧が電流の時間変化に比例する場合<sup>17)</sup>、その比例定数を自己インダクタンス とよぶ。

<sup>16)</sup> 論理がかなり飛躍する。

<sup>17)</sup> 要するに、式 (38.11) が成り立つとき。

**Point 93: 自己インダクタンスの定義**

電圧  $V_L$  が電流  $I_L$  の<sup>a</sup>、時間変化に比例する場合<sup>b</sup> その比例定数 自己インダクタンス といい、これを  $L$  と記述する。この時に成り立つ式は、以下の通りである。

$$V_L = L \frac{dI_L}{dt}, \quad \text{または,} \quad I_L = \frac{1}{L} \int V_L dt. \quad (38.14)$$

インダクタに流れる電流が、自身の両端の電位差に影響を及ぼしている。インダクタ特有の現象を、自己誘導 という。

<sup>a</sup> 電圧と電流の添字  $L$  は、それぞれ、自己インダクタンスの両端の電圧とインダクタに生じる電流を強調するためのものである。

<sup>b</sup> 強磁性体 (Fe, Co, Ni) などは、磁束密度中に置かれると磁化してしまう。この場合、比例関係は成立しない。つまり、インダクタの構成物質に強磁性体を含んでいるならば、自己インダクタンスを定義することは難しい。

# memo No.106: ソレノイドのつくる磁束密度

ソレノイド上の導線が作る磁束密度を、物理法則を用いて、導出してみよう。

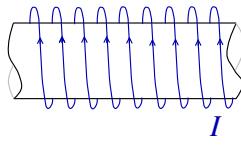


図 38.10 ソレノイド (外観)

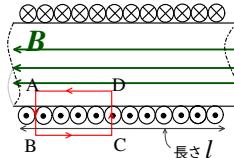


図 38.11 ソレノイド (内部)

いま、ソレノイドを流れる電流  $I$  が定常状態であるとしたとき、アンペールの法則によって 1 回巻きの場合

$$\oint_l B dl = \mu_0 I \quad (38.15)$$

である。 $l$  はアンペールの法則に依れば任意の閉曲線であるから、ここでは図 38.11 のように閉曲線をとってみる。閉曲線 ABCD で、辺 AB, 辺 CD の方向には、電流と平行な向きであ

るので、磁束密度は現れない。また、閉曲線ABCDの辺BCの部分には磁束密度は存在しない。なぜなら、この辺BCの部分は磁束密度が存在しない無限遠方と同じ空間でなければならぬからである。つまり、磁束はソレノイドの内部だけに存在することになる。

$$\oint_l B \, dl = Bl$$

と計算されるから、

$$Bl = \mu_0 I. \quad (38.16)$$

$N$ 回巻きの場合は、これを  $N$ 倍すればよく、

$$\begin{aligned} Bl &= N\mu_0 I \\ \therefore B &= \frac{N\mu_0 I}{l} \end{aligned} \quad (38.17)$$

この式(38.17)がソレノイド状のコイルに流れる電流がつくる磁束密度である。従って、この磁束密度を磁束  $\Phi$  に代入すると、

$$\Phi_l = \frac{NS\mu_0 I}{l} \quad (38.18)$$

である。

#### Point 94: ソレノイドコイルの自己インダクタンス

ソレノイドコイルの自己インダクタンス  $L$  は、以下の式で表される。

$$L := \frac{NS\mu_0}{l}. \quad (38.19)$$

$N$  はコイルの巻数、 $S$  はコイルの断面積、 $l$  はコイルの長さである。

## 38.3 電子回路の構成要素

### 38.3.1 ダイオード

#### 38.3.1.1 ダイオードとは

電流を一方向しか流さないようにする素子が存在する。この素子に生じる電流は、いふなれば一方通行であり、逆向きに電流を通すことはしない。このような動きをする素子を、ダイオードという。

## 38.3.1.2 ダイオードの回路図記号

ダイオードの回路図記号は図 38.12 の通り、矢印の方向が正方向である。逆向きに電流は流さない。

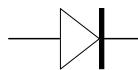


図 38.12 ダイオードの回路図記号

ダイオードはどのように構成されるかといった説明は後回しにして、ここではそのような素子が存在することを知ってもらうだけでよい。

## 38.3.1.3 ダイオードの特性

ダイオードを用いた最も簡単な電子回路を図 38.14 に示す。電子回路の理論で仮定されている理想的なダイオードには、抵抗がない。抵抗を挟んでいる理由はこのためであり、電源圧源のショートを抑える働きをする。

ダイオードの両端には、電源電圧によって、電圧がかかっているが、負方向に電圧がかかっても、その方向には電流は流さない。これを象徴的に図にしたのが、図 38.14 である。

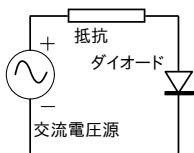


図 38.13 ダイオードを用いた電子回路

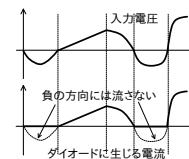


図 38.14 ダイオードの動作

### 38.3.2 テランジスタ

### 38.3.3 受動的な素子/能動的な素子

今までの素子（抵抗、キャパシタ、インダクタ）と違い、ダイオードやトランジスタは、自身におかれられた条件（端子の電位差）によりその特性を変える。ここで、特性といったのは、一方方向にしか電流を流さないということである。このように、素子の両端にかかる電圧と、素子に生じる電流により、その特性を変えるものを、能動的な素子という。

また、抵抗…キャパシタ…インダクタの3つ素子は、電流や電圧の向きにより、その特性を変化させることはない。このような素子は、周囲の状況に流されるといったイメージで、受動的な素子といわれる。

#### # memo No.107: 回路が「記憶」できるようになった

ダイオードやトランジスタの、能動的な性質により、電子回路に「記憶」という仕組み<sup>18)</sup>を実現することが可能になった<sup>19)</sup>。

このおかげで、今日私たちはパソコンや携帯電話などの電子機器を活用し、便利な生活を送ることができるるのである。

## 38.4 電磁気学とのつながり

コメント 電気回路で起こる現象は、物理法則—特に電磁気学、マクスウェル方程式—に従っている。そこで、ここでは、抵抗/キャパシタンス/自己インダクタンスは物理的にどのように説明されるのかを、紹介しておこう。実際に電気回路を作る時には、いちいち意識しないことであるが、基本的な知識（常識/教養的な意味で）として、知っておいたほうが良い。

### 38.4.1 コンダクタンス

物体には、電流が生じやすいものと電流が生じにくいものに大まかに分類できるが、そのための指標がないと、数式的に表現できず、つまりは回路解析ができない。そこで、ここでは、物体の電流の生じやすさの指標を導入する。

<sup>18)</sup> LSI(集積回路)で言うところの、フリップフロップ・ラッチのこと。コンピュータ(CPU)では、レジスタやメモリがその例として挙げられる。

<sup>19)</sup> どのように実現するのかについて、後ほど簡単に触れてみたい。

物体の電流の生じやすさの指標の名前は、コンダクタンス とよばれる。ここで、簡単な実験を考える。何か物体が目の前にあるとしよう。そして、この物体の電流の生じやすさを知りたいとする。この場合、適当な電圧をその物体に与え、その時に生じる電流を測定することが、電流の生じさを把握する上で最も適した方法である。この実験を、ひとつの物体だけでなく、複数種類の物体に対して行うと、次のような電流と電圧の関係を得られる。

### 電流の生じやすさ

多くの物体<sup>a</sup>で、以下の関係が成立している。すなわち、物体のある 2 点を特定し、その 2 点に対して電圧  $V$  を与えて、その時の電流値  $I$  を測定すると、 $V$  と  $I$  には比例関係が成立している。この比例定数を  $G$  で表す。すると、電圧と電流の関係は、次式で表せる。

$$V = GI. \quad (38.20)$$

<sup>a</sup> “すべての物体ではない”ことに注意。

上の式を比例定数  $G$  について解く。

$$G = \frac{I}{V}.$$

こうすることで、“電圧に対する電流”がイメージしやすくなった。この式を見れば、低い電圧で大電流が生じれば、当然、コンダクタンス  $G$  は大きくなる。ということは、電流が生じやすいということを、数値的に表現できたことになる。よって、この比例定数であるコンダクタンスこそが、物体の電流の生じやすさの指標として、定義できる。

**Point 95: コンダクタンス**

コンダクタンスは、物体の電流の生じやすさの指標であり、次式で定義される量である。

$$G := \frac{I}{V}. \quad (38.21)$$

ここに、 $I$  は物体に生じる電流であり、 $V$  は物体の 2 点間にかける電圧である。

ただし、例えば、タングステンや半導体など、電流と電圧が比例関係を満たさない物体も存在する。その場合は、コンダクタンスは上式で定義されない。ただし、電流と電圧には関数関係は成立していて、局所的にはコンダクタンスを定義することは可能である<sup>20)</sup>。ただし、このノートの電気回路の部分では、このような特殊な性質をもつ物体は考慮しない。対象とする物体の性質として、電流が電圧に比例するようなものを考えることとする。

また、この比例関係は実験的に得られるものであり、その実験の際には、温度の変化はないという、暗黙の仮定もその定義の内に含まれていることに注意しよう。

### 38.4.2 抵抗

電流の生じやすさを表す指標をコンダクタンスと定義した。さらに、今度は逆に、電流の生じにくさを表す指標を考える。といっても、さらに新しい量を導入するわけではない。電流の生じにくさを表すには、ご存知、抵抗を使えば良い。抵抗は、コンダクタンスの逆数として定義される。抵抗を表す文字を  $R$  とすると、定義は次のようになる。

<sup>20)</sup> つまり、電位  $V$  を微小変化させたときには、電流  $I$  は比例しているとみなして、微分でコンダクタンスを定義するのである。

$$G := \frac{\partial I}{\partial V}. \quad (38.22)$$

**Point 96: 抵抗**

抵抗は、物体の電流の生じにくさ指標であり、コンダクタンスの逆数として、次式で定義される量である。

$$R := \frac{1}{G} = \frac{1}{I/V} = \frac{V}{I}. \quad (38.23)$$

ここに、 $I$  は物体に生じる電流であり、 $V$  は物体の 2 点間にかける電圧である。

抵抗は、コンダクタンスをもとに定義したりようであり、つまり、コンダクタンスが定義できない物質<sup>21)</sup>に対しては、抵抗も定義できない。

### 38.4.3 オームの法則

上の抵抗の定義式 (38.23) より、電圧  $V$  について解けば、よく知られている、オームの法則の式になる。

$$V = RI. \quad (38.24)$$

この式は、エネルギー保存則に従っている。次のように式変形してみよう。

$$V + (-RI) = 0. \quad (38.25)$$

この式で、 $V$  は外から与らえるている起電力（外部起電力）である。そして、 $-RI$  は何を意味するかというと、回路内に起こる電位の変化を意味している。負の記号が付いているので、回路内で電位が下がることが示されている<sup>22)</sup>。

<sup>21)</sup> 半導体、タングステンなど。

<sup>22)</sup> わざわざ、括弧をつけてまで、負の記号を強調したのは、その合計（和）が 0 になるということを、しめすためである。

**Point 97: オームの法則**

ある物体に起電力を与えたとき、その物体内部にはその起電力の向きに逆向きな電位差が生じる。そして、外部起電力と物体に生じる電位差の合計は0になる。物体の抵抗値を $R$ とし、物体にかける電圧を $V$ 、その時に生じる電流を $I$ とすれば、オームの法則は

$$V + (-RI) = 0 \quad (38.26)$$

と表現できる。 $V$ が外部起電力であり、 $(-RI)$ が物体に生じる電位差である。

オームの法則は、電圧と電流と抵抗の3つの概念の関係式であり、定義式ではない。よく、 $V = RI$ と書いてしまうから、中学生の頃には、この式で、抵抗が定義されるのだと思い込んでしまっていた<sup>23)</sup>しかし、あくまでも、オームの法則は単なる関係式である。何かを定義している訳ではない<sup>24)</sup>。電気回路論におけるオームの法則は、ニュートン力学でいうと運動方程式に対応する。ニュートンの運動方程式も、質量 $m$ と力 $\mathbf{F}$ 、加速度 $d^2\mathbf{r}/dt^2$ の関係式

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}$$

にすぎず、これで力 $\mathbf{F}$ を定義しているわけでも、加速度 $d^2\mathbf{r}/dt^2$ を定義しているわけでもない。

#### 38.4.4 オームの法則は物理法則ではない

オームの法則は“法則”とよばれているが、実は、一般的に成立するようなものではない。つまり、オームの法則に従わない材料も存在するのであるその代表的なものに半導体やタングステンが紹介されることが多い。また、大概の金属は常温ではオームの法則に従うが、高温環境になるとオームの法則は成り立たなくなる。

とはいっても、オームの法則は電気回路の基本法則である。電気回路が使われるのはほとんどの場合が常温であり、オームの法則に従う材料を導線として使えば回路設計も簡単だからだ。特殊な材料を使わなければならないとか、高温環境で使用され

<sup>23)</sup> 速度の定義式 $v = x/t$ と同じように考えてしまったのである。

<sup>24)</sup> このノートでは、コンダクタンスを電流と電圧で定義し、その基礎としているが、実を言うと、この定義も説明のための便宜的なものであり、コンダクタンスの定義式も関係式なのである。

る場合で、オームの法則に従わないことが考えられる場合でも、基本的な考え方は同じ。オームの法則からずれる部分を実験で測ったり、理論的に計算したりして差分を吸収するように調整することで、問題解決できる。電気回路が使用される環境は、多くの場合、材料がオームの法則に従うと考えてよい<sup>25)</sup>、だから、オームの法則は回路設計や動作解析の際に重宝される。実際、電気回路の理論の根幹をなす法則は、このオームの法則と、キルヒホフの電流則と同電流則の3つだけである。これをもとにして数学的に解析できてしまうのだ<sup>26)</sup>。

オームの法則は物理法則ではないというからには、物理法則から導出できるはずである。次節では、オームの法則の導出を見ていくが、実は、導き方が複数考えられる。このノートでは、有名な3つの導出方法を考える。

#### 38.4.5 オームの法則の導出1：高校生への標準的な説明

電気抵抗が生じるのはなぜか。もう少し詳しく考える<sup>27)</sup>。物体は原子によって構成されるが、この原子はさらに細かく見ると、電子と原子核によって構成されている。とりあえずは、ここまで知識でよい<sup>28)</sup>。

導体には、自由電子とよばれる、原子核よりも少し離れた電子がある。この電子は原子核に束縛されることなく、自由に導体内を移動できる——自由と入っても、導体の外に勝手に出て行くことはないが。

導体の例として、銅線（導線ではない!!）を考える。もちろん、他の導体でも同様の議論ができるがイメージしやすいようにするためにそうする。

銅線にだって小さいとはいえど抵抗がある。抵抗が生じる原因是、電子が移動の際に、原子核と衝突することである。「電流とは電子の移動のことである」ということはJ. J. トムソンらの実験によってわかっている。原子を構成するのは電子と原子核だが、電子は原子核の1800倍も小さく、電子の移動の際には、原子核は静止していると考えても差し支えない。もっと正確にいって原子核は完全に静止しているのでは

- 
- ▶ 25) オームの法則に従わない材料を導線として使うこともあるのかもしれないが、私にはそのようなことが要求される場面を想像できない。万が一あるとしても、たいへん特殊な場合であろう。
  - ▶ 26) 電気回路を論ずる際に使用される数学は、線形代数と微分方程式である。計算を楽にする単に技術的なものとして、複素関数論が使われることもある。具体的には、フーリエ級数、フーリエ変換、ラプラス変換だ。電気回路や電子回路で多用される数学理論は、電気数学と総称される。
  - ▶ 27) とはいっても、量子力学の知識がないので、少し理想化しそぎな部分があるが、そこら辺は無視しよう。詳細は「物性」関係の教科書を参照するとよい。
  - ▶ 28) さらにいえば、原子核は陽子や中性子で構成されることや、さらに陽子や中性子はクォークによって構成されていることがわかっているが、ここではこんなことを考へてもしょうがない。

なく、その場で振動している。この振動が電子との衝突を生むのである。電子の移動が原子核によって妨げられるということで、それが抵抗という現象となって現れるのである。

定量的に考えてみよう。まずは、微分方程式を使わずに、高校レベルで考える。

ここに、長さ  $l[m]$ 、面積  $S[m^2]$  の銅線があるとする。この銅線の単位体積 ( $1[m^3]$ )あたりの電子の個数を  $n$  としよう。この  $n$  は銅線中の電子の単位体積あたりの密度を表している。電子の電荷を  $-e$  とおこう。電子は銅線中を移動している。銅線中の電子はたくさんある。もちろん、複数の電子が全く同じ速さをもって移動しているわけではなく、ここの電子は気まぐれに様々な速度で移動している。そこで、この速さの平均を考えることにし、これを  $\bar{v}$  と表現する。今仮に、速度  $\bar{v}$  の一定速度で動く電子を考える。

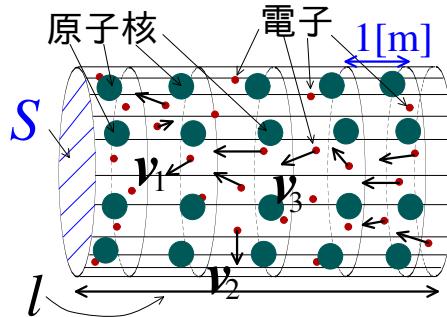


図 38.15 オームの法則

電流  $I$  は単位時間 (1秒)あたりに、正電荷がどれだけ通過したかによって表せる<sup>29)</sup>。電流とは電子の移動であるから、

$$I = (-e)n\bar{v}S \quad (38.27)$$

と書ける。

<sup>29)</sup> 電子が負の電荷をもっているのは、電流の定義の方が電子の発見よりも早い時期になされたからである。正電荷は、特に何もしなければ、電位の高いほうから低いほうへと移動する。電流はこのような正電荷を仮定して定義していた。しかし、実験によって電子が発見されたとき、電子は電位の低い方から高いほうへと移動した。だから電子はマイナスの電荷をもっているのである。

慣習上、電流の向きの定義を逆にし直すことはないようである。電流の向きの定義を逆にするには労力が必要であるし、それをおこなっても、大した利点がないからだろう。

ところで、電子はクーロン力  $-eE$  を受ける。さらに電子は、速度  $\bar{v}$  で運動する際に、原子核から受ける抵抗  $k\bar{v}$  を受ける。この  $k$  は定数である。ここでは原子核から受ける抵抗は速度に比例すると近似している。電子が銅線中を一定の速度  $\bar{v}$  で動いているので、クーロン力と原子核から受ける抵抗力は釣り合っているはずである。つまり、

$$-eE = k\bar{v} \quad (38.28)$$

が成立している。

さらに、銅線の両端部分の電位差のことを **電位** というが、この電位は [銅線内の電場] と [銅線の長さ] の積で表される。なぜなら、電位は単位電荷が電場からなされる仕事として定義されているのである。単位電荷は  $1[C]$  の電気量をもつ電荷であり、従って、これは電場  $E$  より受けるクーロン力も  $E$  である。単位電荷が電場  $E$  によって  $l$  だけ変位したのならば、単位電荷が電場  $E$  より受けた仕事は  $lE$  ということになる。銅線の両端の電圧を  $V$  と表せば、

$$V = lE \quad (38.29)$$

と書ける。

以上の 3 つの式 (38.27), (38.28), (38.29) より、オームの法則を導いてみよう。まず、式 (38.28) の両辺に  $l$  をかける。

$$-eEl = k\bar{v}l$$

この式の左辺は、式 (38.29) から  $V = El$  だから、

$$\begin{aligned} -eV &= k\bar{v}l \\ \Leftrightarrow \bar{v} &= -\frac{eV}{kl} \end{aligned}$$

この  $\bar{v}$  を式 (38.27) に代入する。

$$\begin{aligned} I &= (-e)n \left( -\frac{eV}{kl} \right) S \\ \Leftrightarrow I &= \frac{ne^2}{k} \frac{S}{l} V \end{aligned}$$

これを  $V$  について解くと、

$$V = \frac{k}{ne^2} \frac{l}{S} I \quad (38.30)$$

である。右辺の  $I$  以外は全て定数である<sup>30)</sup>。この定数が抵抗を表している。

$$R = \frac{k}{ne^2} \frac{l}{S} \quad (38.31)$$

以上から、オームの法則

$$V = RI \quad (38.32)$$

が求まった。

### 38.4.6 オームの法則の導出2: 微分方程式

導出の雰囲気をつかんだところで、微分方程式を用いてもう少し具体的にオームの法則を導出してみよう。まず、電流の根源は電子の運動であるから、この電子の運動方程式をたてる。

起電力により導体内に電場  $E$  があるはずで、電子はこの電場からクーロン力  $eE$  を受けている。さらに、導体中の電子は陽イオン（原子核のこと）にぶつかりながら運動する。もちろん、衝突の際には速度は変化する。これを平均して  $v_d$  と表現する。これは、電子が図 38.4.6 のように、導体内をヨロヨロしながら運動するためで、このような電子の動きをドリフトしているという。この  $v_d$  のことを ドリフト速度 という。

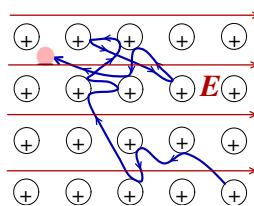


図 38.16 電子のドリフト

このように電子は陽イオンから抵抗力を受けながら導体内を運動するわけだが、この抵抗力は電子のドリフト速度に比例していると仮定してよいとするなら、適当にその係数を用意し、これを  $k$  として、抵抗力を  $-kv_d$  とする。抵抗力に負符号がつく

<sup>30)</sup> 面積  $S$  と長さ  $l$  は実験で測定できる。

のは、ドリフト速度と逆向きだからである。以上を踏まえて、電子の質量を  $m_e$  とすれば、電子の運動方程式は

$$m_e \frac{dv_d}{dt} = -eE - kv_d \quad (38.33)$$

である。この電子の運動方程式を解いていこう。まず、両辺を  $m_e$  で割る。

$$\frac{dv_d}{dt} = -\frac{eE}{m_e} - \frac{k}{m_e} v_d \quad (38.34)$$

次に、少しトリッキーではあるが、右辺を  $-k/m_e$  でくくる。

$$\frac{dv_d}{dt} = -\frac{k}{m_e} \left( v_d + \frac{m_e}{k} \frac{eE}{m_e} \right) \quad (38.35)$$

この式の右辺の括弧の中を  $\xi$  とおく。

$$\xi := v_d + \frac{m_e}{k} \frac{eE}{m_e} \quad (38.36)$$

この  $\xi$  を時間  $t$  で微分して

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{d}{dt} \left( v_d + \frac{m_e}{k} \frac{eE}{m_e} \right) = \frac{dv_d}{dt} \quad (38.37)$$

である。

式 (38.36) と式 (38.37) を式 (38.35) に考慮すれば、

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{k}{m_e} \xi \quad (38.38)$$

という方程式となる。この微分方程式を解いてみよう。ここでは、計算の細かい部分は多少省略する<sup>31)</sup>。まず、 $d\xi$  と  $dt$  を 1 つの独立な数のように扱い、以下のように変形する。

$$\frac{1}{\xi} d\xi = -\frac{k}{m_e} dt$$

これは、 $d\xi$  に関する項と  $dt$  に関する項を、それぞれ左辺と右辺にまとめたものである。次に両辺を不定積分する。このとき、左辺は  $d\xi$  で積分し、右辺は  $dt$  で積分する。

$$\frac{1}{\xi} d\xi = -\frac{k}{m_e} dt \Leftrightarrow \int \frac{1}{\xi} d\xi = -\int \frac{k}{m_e} dt$$

<sup>31)</sup> ここでの式変形は、 $dt$  等を 1 つの数のようにみなして計算する事がある。このような計算ができるることは、微分方程式の教科書を参照して確認して欲しい。

$$\Leftrightarrow \log \xi = -\frac{k}{m_e}t + C \Leftrightarrow \xi = e^{-\frac{k}{m_e}t+C} = e^{-\frac{k}{m_e}t}e^C$$

$$\therefore \xi = Ae^{-\frac{k}{m_e}t}, \quad (A = e^C)$$

解が上のように求まった。 $\xi$  は式 (38.36) で定義された量であることを思い起こせば、

$$Ae^{-\frac{k}{m_e}t} = v_d + \frac{m_e}{k} \frac{eE}{m_e}$$

である。これを  $v_d$  について解いて

$$v_d = Ae^{-\frac{k}{m_e}t} - \frac{eE}{k} \quad (38.39)$$

となる。

もともと知りたかったのは、多数の電子の運動が平均して安定している状況における解である。安定な状態とは、導体に起電力が与えられてから、十分に時間が経過したときのことである ( $t \rightarrow \infty$ )<sup>32)</sup> 第一項は 0 になって、

$$v_d = -\frac{eE}{k}$$

となる<sup>33)</sup>。これが導線内の自由電子のドリフト速度であり、終速度ともいわれる。

ところで、以前、式 (38.27) において、電流  $I = -en\bar{v}S$  と表せることを認めた。これに表れる平均の速度  $\bar{v}$  は、終速度  $v_d$  と同一視することができて、

$$I = -en \left( -\frac{eE}{k} \right) S = \frac{e^2 n E}{k} S.$$

さらに、電圧  $V$  と電場  $E$  の関係は、距離  $d$  を比例定数として、 $V = dE$  が成立していることは、前に確認済みである<sup>34)</sup>。この距離  $d$  は、ここでは導線の長さ  $l$  に

▶ 32) 十分に時間がたてば安定状態に至るという、暗黙の仮定がなされている。これまで得た知識からでは、この暗黙の仮定の妥当性を示せない。ここでは、時間がたつと安定状態になるという経験をもとに、この仮定の正当性を主張する。

▶ 33) 第一項が 0 になることを確認しておこう。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{k}{m_e}t} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

▶ 34) 電場に関するガウスの法則での具体例として、よく取り上げられる問題であり、電磁気学と電気回路を繋ぐ大切な式である。

相当する<sup>35)</sup> から  $V = lE$  である。これを  $E$  について解いて  $E = V/l$ 。これを上の式に代入すると、

$$I = \frac{e^2 n E}{k} S = \frac{e^2 n (V/l)}{k} S = \frac{e^2 n V}{k} \frac{S}{l}.$$

これを  $V$  について解くと

$$V = \frac{k}{e^2 n} \frac{l}{S} I \quad (38.40)$$

となって、一番目に求めたオームの法則の式と同じ式がえられた。

ついでに、定数  $k$  について、もう少し踏み込んでみよう。定数  $k$  は、電子のドリフト速度  $v_d$  と、そのときの陽イオンから受ける抵抗力の比例定数として使ってきただが、もう少し詳細を見てみよう。といっても、最初に立てた微分方程式 (38.33) を次元解析をするだけ。式 (38.33) 見ると、定数  $k$  の次元は [kg/s] であることが要請されている<sup>36)</sup>。よって、 $\tau$  を静止状態の電子が終速度までに達するまでの時間としたとき、

$$k = \frac{m_e}{\tau}$$

とできる<sup>37)</sup>。 $\tau$  の物理的な意味は、「電子が陽イオンに衝突してから次の衝突までの時間」である。言い換えれば、電子は時間  $\tau$  の間は何にも衝突せず、自由に動き

<sup>35)</sup> 導線の形が直線であると暗に仮定してしまったが、これは計算を簡単にするための便宜上の仮定である。導線が曲がっていたら、線積分を考えればいい。曲がっている場合を想定しても数学的な議論が可能だけれど、得られる結果は直線を想定した場合とほとんど変わりはない、議論が面倒になるだけだ。

$$V = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad C: \text{導線の形}.$$

<sup>36)</sup> 以下の次元解析を行う。次の微分方程式

$$m_e \frac{dv_d}{dt} = -eE - kv_d$$

の次元を見ると、 $[kg][m/s][s^{-1}] = [C][V/m] + [X][m/s]$  である。左辺の  $[s^{-1}]$  は、時間  $t$  に関する微分によるものである。 $[X]$  が今知りたい  $k$  の次元だ。とりあえず、 $[X]$  を含む第二項を考えると、 $[kg][m/s][s^{-1}] = [X][m/s]$  であり、 $[X]$  について解いて整理すると、 $[X] = [kg/s]$  を得る。第一項については、今の考察には関係ないので、省略する。電流と力の関係や電場（電位）の定義に立ち返れば、同じ次元をもつことが確認できるだろう。

<sup>37)</sup>  $k$  を  $\tau$  に書き換えただけなので、論理的には何の進展もない。しかし、なんだかわからない定数だった  $k$  が少し具体的に見えたことに意義がある。

回っている時間であることから、この $\tau$ を平均自由時間<sup>38)</sup>という<sup>38)</sup>。そうすると、終速度 $v_d$ は

$$v_d = \frac{eE}{(m_e/\tau)} = \frac{eE\tau}{m_e} \quad (38.41)$$

となる。

最後に、定数部分を抵抗 $R$ として、

$$R := \frac{m_e}{e^2 n \tau} \frac{l}{S}$$

を定義すれば、

$$V = RI$$

が導かれる。

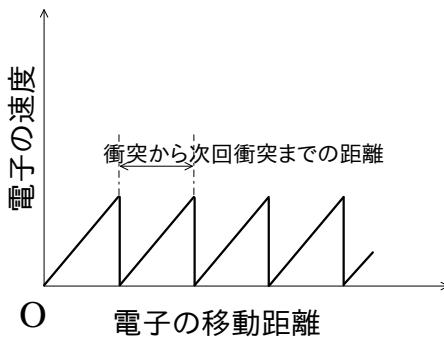


図 38.17 平均自由時間

### 38.4.7 オームの法則の導出3：電子移動度

先ほど、電子は導線の原子にぶつかりながら、導線中を移動すると説明し、このような電子がもつ速度のことを、ドリフト速度<sup>39)</sup>というと書いた。ここで、ドリフト速度

<sup>38)</sup> ちなみに、平均自由時間 $\tau$ の間に電子が移動する距離を、平均自由行程<sup>39)</sup>という。

をもう少し詳しく考えてみよう。ただし、ここで電子の運動は、古典的な粒子を想定する<sup>39)</sup>。

電子が原子にぶつかってから、他の原子にぶつかる直前までの過程を考える。導線中を運動している電子が、導体を構成する原子に衝突したとき、電子の速度は0になると見える。そしてその後、電子は徐々に加速し、また、原子にぶつかる。

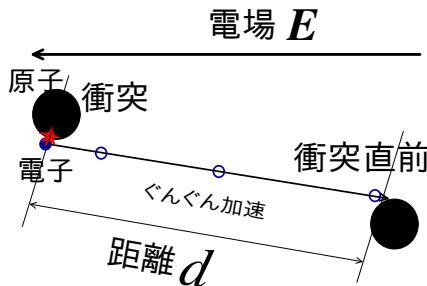


図 38.18 電子移動度・電子緩和時間

電子は電場から常にクーロン力を受けており、加速度運動をしている。衝突直後から、次の衝突の直前までの間に、電子の移動距離  $d$  はどの程度かを計算してみよう。

ニュートン力学において、等加速度運動における位置の公式を計算したことがある。結果を以下に書き下そう。

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

ここに、 $a$  は加速度である。また、 $v_0$ 、 $x_0$  は初期値である。今回は 0 であるとして考える。初速度は、衝突直後は完全に速度は 0 になると仮定し、0 とする。すると、

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2$$

のみが残る。今回は、電子の原子との衝突から他原子の衝突までの時間を考えているので、 $t = T - t_0$  とすればよい。 $t_0$  は現在の時刻である。しかし、話を簡単にする

<sup>39)</sup> 電子は、量子力学においては、単なる粒子ではなく、波動の性質も同時に備えもつ。しかしここでは、電子を単純な粒子であると仮定し、話を進めていくことにする。

ために、 $t_0 = 0$  として考える。つまり、 $t = T$  とする。

$$x(T) = d = \frac{1}{2}aT^2$$

ところで、電子は、回路内の電場  $E$  より、クーロン力  $F$  を受けている。これは、クーロンの法則で、

$$F = -eE$$

と書かれる。ここに、 $-e$  は電子のもつ電荷量である。この時の、電子の運動方程式<sup>40)</sup> は次のようにになる。

$$ma = -eE.$$

これにより、電子の加速度を得る。すなわち、

$$a = -\frac{eE}{m}.$$

これを、先ほどの等加速度運動の公式に代入してみよう。

$$d = -\frac{1}{2}\frac{eE}{m}T^2$$

という式を得る。この式の時間  $t$  は、電子が原子と衝突してから、別の原子と衝突するまでの時間である。

導体中を移動する電子の平均の速度  $v_e$  を考えてみよう。平均の速度  $v_e$  とは、この場合、電子の運動を等速直線運動とみなして、計算することと同じである。等速直線運動では、位置  $x$  は  $x = v_0 t$  という関係式が成立している。速度について解けば、 $v_0 = x/t$  である。つまり、平均の速度を知りたければ、位置を時間で割ってやればよい。すると、

$$v_e = -\frac{d}{T} = -\frac{1}{2}\frac{eE}{m}T$$

となる。この式で、 $e$  は電子のもつ電荷量、 $m$  は電子の質量であるので、これらは、定数である。これを意識して、式を書き変えてみよう。

$$v_e = -\frac{T}{2}\frac{e}{m}E.$$

<sup>40)</sup> ニュートンの運動方程式は、力  $\mathbf{F}$ 、加速度  $\mathbf{a}$ 、質量  $m$  の関係を表し、

$$ma = \mathbf{F}$$

と書かれる。

さらに,  $T/2$  も, 電子の衝突の周期によるもので, これらは平均して一定であると仮定して,

$$\tau := \frac{T}{2} \quad (38.42)$$

とおく. この  $\tau$  を 電子緩和時間 とよぶ. すると, 平均の速度の式は次のように表現される.

$$v_e = -\frac{e\tau}{m} E$$

さて, 速度は, 上の式より, 電場  $E$  に比例することが明らかになった. その依存関係は, 比例定数によって決まる. そこで, この比例定数は, 電子移動度 という名前でよばれる.

$$\mu_e = \frac{e\tau}{m} \quad (38.43)$$

で表される. この  $\mu_e$  は, 電磁気学で用いた透磁率の記号と同じであるが, それとは全く関係のない概念であることに, 注意すべきだ.

以上により, 電子が導線中を移動する平均の速度を求めることができた. その式は,

$$v_e = -\mu_e E \quad (38.44)$$

で表される. マイナスが付いているのは, 今考えている電荷が電子であることによる. 電子の電荷量が負だからである.もちろん, 正の電荷量をもつと仮定すれば, マイナスの符号は付かない.

この式により, 電子のドリフト速度は, 導体内の電場に比例することが分かる.

### 38.4.8 ジュール熱と電力

電気回路に起電力をつなぐと, 実際には抵抗部分に熱を生じることはよく知っているだろう. この熱は ジュール熱 よばれている. なぜ, ジュール熱が発生するのだろうか.

電池をつないでから, 電流が生じるまでを考えてみよう.もちろん, 電池接続された直接の結果が電流の発生ではない. 電池が電気回路の両端に接続されると, 電池の両端には電位差があるから, その電位差が電気回路内部に発生する. これは電気回路内部に電場が生じることを意味する. 電場の伝わる速さは, 前章で確認したように, 光速  $c = 3 \times 10^8 [\text{m/s}]$  である. この電場によって, 導線にある自由電子がクーロン

力を受けて、運動を始める。この電子の運動が、電流である。電子は力を受け続けると、速度はどんどん上がってしまうが、電気回路内部では自由電子の速度は、どのようにになっているのだろうか。前項目で考えたように、運動する自由電子は、導線を構成する原子核にぶつかって速度を落とす。自由電子は導線内に多数存在するが、それらを平均すると、一定の速度に落ち着く。これを終端速度ということを前項目で確認した。自由電子が原子核にぶつかったとき、原子核は電子の運動量を受ける。この電子から受け取った運動量により、原子核は運動しようとする。しかし、電子から受け取る運動量は、原子核をその場から移動させるほどの大きさではない。原子核はその衝突前の位置を中心に、振動する。この原子核の振動を、私達は熱として感じるのである。1つの電子の原子核の衝突では、微々たるものだが、自由電子や原子核は導線中に多数存在することを考えれば、納得がいくだろう。

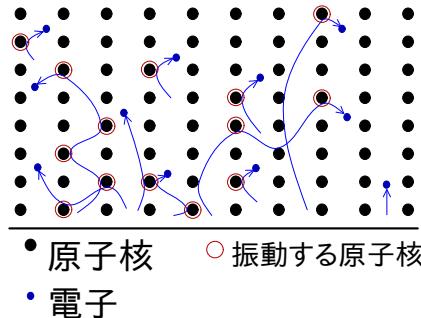


図 38.19 電子と原子核の衝突

数量的に考えてみよう。起電力  $V_l$  と電場  $E$  の関係は、

$$V_l = \oint_l E \, dl = lE$$

である<sup>41)</sup>。ここでは電場は電気回路内で一定（電池内部は除く）とし、電気回路の長さを  $l$  であるとした。この起電力  $V_l$  が 1 つの電荷（ここでは電子）にする仕事を考える。言い方を変えれば、電子が起電力から得るエネルギーを考えることと同じである。電位の定義は、単位電荷が受ける仕事として定義されているので、電子の電荷を

<sup>41)</sup>  $V_l$  の添え字  $l$  電気回路の閉ループ（loop）の頭文字  $l$  を意識してつけた。

$q_e$  と書くことにはすれば、電子が起電力から受け取るエネルギー  $\mathcal{E}$  は、

$$\mathcal{E} = q_e V_l$$

である<sup>42)</sup>。実際には、電荷は運動していて、これが電流  $I_l$  だから、 $I_l = dq_e/dt$  である<sup>43)</sup>。上式で、電荷  $q_e$  を電流に置き換えるので、両辺を時間微分しよう。すると、

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{dq_e}{dt} V_l = I_l V_l$$

となって、電流  $I_l$  を式に取り入れることができた。再び両辺を時間積分しよう。すると

$$\int \frac{d\mathcal{E}}{dt} dt = \int I_l V_l dt$$

であるが、起電力(電圧)と電流はともに時間変化しない定数であると仮定し、

$$\mathcal{E} = I_l V_l t$$

である。これが起電力が導線中の電子に与えるエネルギーである。特に  $t = 1$  として、単位時間中に、起電力が電気回路に与えるエネルギーとして、電力  $P$  が定義される。

起電力が導線にエネルギーを与えることを、改めて実感したことだろう。つまり、熱の原因是、この電力にあるということである。

<sup>42)</sup> エネルギーの記号に  $E$  ではなく、 $\mathcal{E}$  を用いた理由は、電場の  $E$  と区別するためである。ニュートン力学ではエネルギーを表す記号として  $E$  が使われることが多いが、電磁気学での  $E$  は電場の強さを意味することが一般的である。このように、物理学では、同一の記号を全く違う物理的対象に当てることが多い。アルファベットが 26 文字しかないので、このようなことはよく起こる。記号が何を意味して用いられているかは、常に注意をしながら式を読む必要がある。

別の例だと、この後に確認するが、自己インダクタンスの記号として、 $L$  が用いられるが、これは角運動量とは全く別の概念である。

<sup>43)</sup>  $l$  は、起電力  $V_l$  と統一するため、同様に電気回路の閉ループ(loop)の頭文字を意識してつけた。

**Point 98: 電力の定義**

単位時間中に、起電力が電気回路に与えるエネルギーを **電力** といい、ここでは記号  $P$  を用いて表すことにする。電力  $P$  と電流  $I$  と電圧  $V$  の間には、以下の関係式が成立する。

$$P := IV. \quad (38.45)$$

オームの法則  $V = RI$  を考慮すれば、電力  $P$  は次のように表現することも可能である。

$$P = IV = RI^2 = \frac{V^2}{R}. \quad (38.46)$$

### 38.4.9 電流と電球の発光との関係

電気回路につながれた電球がある。導線に電池をつなぐと、電流が生じる。実際にこれを確かめるには、抵抗と電球を直列につなぎ、そしてその両端に電池をつなげる。電球が光ることから、この電気回路に電流が流れたことが、目で見て確認できる。

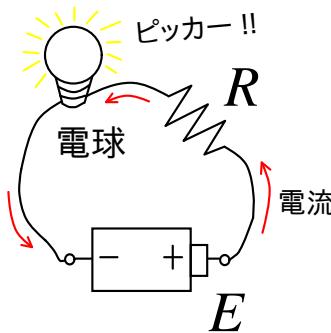


図 38.20 電流が流れたかな？

ここで、少し疑問になる事がある。それは、「なぜ、電球が光ったら、その電気回路に電流が流れていると言えるのか」ということである。電気回路に電流が流れていな

いのに、電球が光ることはないのか。また、電気回路に電流が流れているけれども、電球が光らないことはないのか。

この問題は、電球を構成する物質について考える必要がある。

### 38.4.10 電気抵抗率

前項目で抵抗の式、つまり、

$$R = \frac{k}{ne^2} \frac{l}{S} \quad (38.47)$$

が導出されたついでに、抵抗率についても考えておこう。式を見ればわかるように、抵抗は導線（銅線ではない!!）の長さ  $l$  に比例し断面積  $S$  に反比例する。ということは、抵抗を長さ  $l$  と断面積  $S$  の一種の関数のように見ることができる。で、この関数の定数部分に注目して、これを 電気抵抗率 という。単に 抵抗率 といってしまうことのほうが多い。抵抗率は普通、 $\rho$  で表現される。つまり、

$$\rho = \frac{k}{ne^2} \quad (38.48)$$

である。

しかし通常、抵抗率という場合には、この式の右辺はあまり意識しない。何らかの定数であることには変わりないが、この定数は実験的に直接的に測定されてしまうことが多い。右辺の  $k/ne^2$  は大した意味がないように思われる。

抵抗率を使えば、抵抗は

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (38.49)$$

と書かれる。

### 38.4.11 電気伝導率

抵抗率の逆数  $1/\rho$  を 電気伝導率 といい、 $\sigma$  で表す。抵抗率と同様に、単に 伝導率 ということも多い。つまり、

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \quad (38.50)$$

である。

導線は、その抵抗率が大きいほど、電流を通しにくくなる。これを逆手に考えれば、つまり、抵抗率が小さいほど、電流を通しやすくなるということになる。電気伝導率とは、式の等号の意味において、抵抗と同じ意味をもつただけでも、着眼点が少し異なっていることに注意したい。

電気伝導率を使うと、電流密度  $i$  と電場  $E$  に関係させて、オームの法則は次のように表現できる。

$$i = \sigma E. \quad (38.51)$$

なぜなら、

$$\begin{aligned} V &= RI = \rho \frac{l}{S} I = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{S} I \\ \Leftrightarrow \quad \sigma V &= \frac{l}{S} I. \end{aligned}$$

ここで、電流と電流密度の関係式

$$I = \iint_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS$$

から<sup>44)</sup>、

$$\sigma V = \frac{l}{S} \iint_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS$$

さらに、電場  $E$  と電位差  $V$  の関係式

$$V = \int_l \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl.$$

より<sup>45)</sup>、

$$\begin{aligned} \sigma \int_l \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl &= \frac{l}{S} \iint_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS. \\ \Leftrightarrow \quad \sigma \int_l |\mathbf{E}| |\mathbf{t}| \cos \theta dl &= \frac{l}{S} \iint_S |\mathbf{i}| |\mathbf{n}| \cos \theta dl \\ \sigma \int_l E dl &= \frac{l}{S} \iint_S i dS \end{aligned}$$

<sup>44)</sup>  $S$  は曲面、 $dS$  は曲面  $S$  の微小部分、 $\mathbf{n}$  は  $dS$  の単位法線ベクトル。

<sup>45)</sup>  $l$  は線積分の任意の経路（導線にほかならない）、 $dl$  は  $l$  の微小部分、 $\mathbf{t}$  は  $dl$  の単位接線ベクトル。

$$\begin{aligned}\sigma E \int_l dl &= \frac{l}{S} i \iint_S dS \\ \sigma El &= \frac{l}{S} i S \\ \therefore \quad \sigma E &= i\end{aligned}$$

計算途中,  $|t| = 1$ ,  $|n| = 1$ ,  $\theta = \pi/2$  であることに注意しよう。

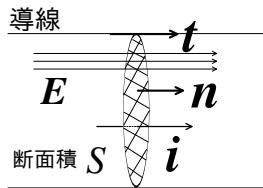


図 38.21 オームの法則を拡張する ( $i = \sigma E$ )

#### 38.4.11.1 キャパシタンスの形と容量の関係

キャパシタンスは、形によって容量が変化する。形と容量の関係は、数式的に表現できる。ここでそれを確認しておこう。キャパシタンスの両端には電圧がかかっており、十分に時間が経っていて、電荷が十分に溜まっているとする。

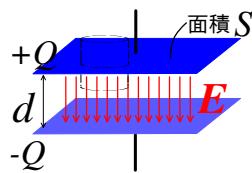


図 38.22 キャパシタンスの形と容量

キャパシタンスの形を、各電極間の距離を  $d$ 、電極の面積を  $S$  とする。ガウスの法則を使って、一方の電極から生じている電場の強さを求めてみよう。電場の向きは、キャパシタンスに垂直であると考える。ここでは、その大きさのみを考える。とりあえず、ガウスの法則を書いてみよう。その形式は、計算が楽な積分形を用意しよう。キャパシタンスの一方の電極を含むように、図の点線で囲ったように、閉曲面をと

る。この閉曲面を  $A$  とする<sup>46)</sup>。このとき、ガウスの法則の積分形は

$$\varepsilon_0 \int_{S_A} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS_A = \int_{\Omega_{S_A}} \rho dV_A$$

と書ける。 $S_A$  と  $V_A$  の添字の  $A$  はそれぞれ、閉曲面  $A$  の表面積、体積を意識して書いた。円柱の閉曲面  $A$  は上面  $At$  (t:top), 側面  $As$  (s:side), 下面  $Ab$  (b:bottom) の3部分に分けて考える ( $A = At + As + Ab$ )。

右辺と左辺を別々に計算していこう。まず、左辺を考える。

$$\begin{aligned} [\text{左辺}] &= \varepsilon_0 \int_{S_A} E dS_A \\ &= \varepsilon_0 \left( \int_{S_{At}} E_\perp dS_{At} + \int_{S_{As}} E_\parallel dS_{As} + \int_{S_{Ab}} E_\perp dS_{Ab} \right) \end{aligned}$$

であるが、電極に平行な電場成分  $E_\parallel$  は 0 だから、第2項はなくなり、

$$[\text{左辺}] = \varepsilon_0 \left( \int_{S_{At}} E_\perp dS_{At} + \int_{S_{Ab}} E_\perp dS_{Ab} \right)$$

さらに、電極の一方で生じる電荷量は、他方の電荷量の反対符号である。つまり、一方の電極から生じる電場は全て、他方の電極に吸収される。これは、キャパシタンスの外部には電場の漏れがないことを意味している。従って、今回の場合、キャパシタンスの外部に電場を生じるような向きの、閉曲面  $A$  の上面からは電場は生じていないことになる。よって、式はさらに簡単になる。

$$[\text{左辺}] = \varepsilon_0 \int_{S_{Ab}} E_\perp dS_{Ab} = \varepsilon_0 E_\perp S_{Ab}$$

以下、 $E_\perp$ ,  $S_{Ab}$  の添字はいつでも同じになるので、添字を省略して記述する。

$$[\text{左辺}] = \varepsilon_0 E S_A.$$

キャパシタンス全体で考えれば  $S_A = S$  であり、

$$[\text{左辺}] = \varepsilon_0 E S. \quad (38.52)$$

<sup>46)</sup> 閉曲面はどのような形にしても、ガウスの法則は成立するので、計算のしやすさを考えてとるべきだ。今回の場合は、電極平面から平行な電場の成分はないことから、円柱型の閉曲面をとることにした。こうすることで、側面から流れ出る電場を考慮する必要がなくなつて、計算が楽になるからである。

次に、ガウスの法則の右辺を考える。電荷密度は、総電荷をその面積で割ったものである。今回、キャパシタンスにたまっている電荷は  $Q$  だから、

$$[\text{右辺}] = \int_{\Omega_A} \rho dV_A = Q. \quad (38.53)$$

以上から、 $[\text{左辺}] = [\text{右辺}]$  をとすれば、

$$\varepsilon_0 E S = Q$$

となり、これより、キャパシタンス内部の電場  $E$  は

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} \quad (38.54)$$

を得る。これから、キャパシタンスの両端の電位差を計算できる。電場と電位差の関係は

$$V = \oint_l E dl$$

である。今回、経路  $l$  はキャパシタンスの距離にとればよく、その長さは  $d$  である。つまり、

$$V = E \oint_l dl = Ed$$

これに求めたキャパシタンス内の電場  $E = Q/\varepsilon_0 S$  を代入することで、

$$V = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} d \Leftrightarrow \frac{Q}{V} = \varepsilon_0 \frac{S}{d} \quad (38.55)$$

を得る。

ここで、キャパシタンスの要領の定義式  $C = Q/V$  を考慮すれば、

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d} \quad (38.56)$$

を得る。

**Point 99: キャパシタンスの形状と容量の関係**

キャパシタンス  $C$  と形状の関係は次のようにある。

$$C := \frac{Q}{V} = \varepsilon_0 \frac{S}{d} \quad (38.57)$$

ここに,  $Q$  はキャパシタンスに溜まる電気量,  $V$  はその時のキャパシタンスの両端の電位差,  $\varepsilon_0$  は真空の誘電率,  $S$  はキャパシタンスの断面積  $d$  はキャパシタンスを構成する導体板間の距離である。

**# memo No.108: 電気力線と等電位線は直交する**

電荷が, 無限に広い平面に, 一様に分布しているとき, この平面から生じている電場はどのようにになっているかをここで確認する。結論からいえば, このとき, 平面に垂直な方向に電場が生じているのである。これは, 導体の表面は等電位であることと, 電場と電位の関係<sup>47)</sup>を考えれば, すんなりと説明できる。この説明は電磁気学の部分で行っているので, 今回は, 別の方法で, 説明してみよう。

まず, 平面上に任意の点をとり, これを点 A としよう。この点 A を通るように, 図のような円を描く。この円の上に, 点 A とその円の中心を通る直線上に, 点 B をとる。これら点 A と点 B のそれぞれの部分の電荷密度がつくる電場を合成すると, 図に示したように, 平面上平行な電場の成分は相殺されて, 正味 0 となる。つまり, 平面上平行な電場はないということである。よって, 電場は平面に垂直な成分のみが残り, これが, 平面上分布した電荷密度のつくる電場となる。

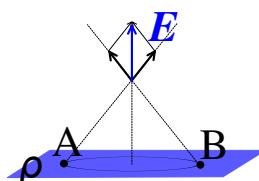


図 38.23 無限平面上に分布した電荷密度より生じる電場

もちろん, 今の場合, 無限に広い平面に電荷密度が分布しているとしたので, 平面の端は存在しないから, 平面上のどの部分を見ても, 面に垂直な電場が生じている。しかし, 実際には,

<sup>47)</sup> 電気力線と, 等電位線は垂直に交わる。

平面は有限であるので、その平面の端では対称性がなく、電場が歪む。有限の場合でも、その平面の中心付近では無限平面と同様に考えられるので、このノートでは平面の端の部分については、考慮しないことにして、話を簡略化する。



39

## 代表的な電気回路

39.1 抵抗のみの回路

39.2 インダクタと抵抗の回路（直列）

39.3 キャパシタと抵抗の回路（直列）

39.4 抵抗、インダクタ、キャパシタの直列回路

39.5 インダクタと抵抗の回路（並列）

39.6 キャパシタと抵抗の回路（並列）

39.7 抵抗、インダクタ、キャパシタの並列回路

39.8 積分回路

39.9 微分回路

39.10 変圧器

# 40

## 代表的な電子回路

40.1 整流回路（インバータ）

40.2 増幅回路

40.2.1 「増幅」の意味



# 41

## コンピュータの物理学的基礎

### 41.1 考え方と方針

ここでは、大規模な電子回路である、コンピュータについて考える。一般論として、電子計算機を学ぶのも 1 つの方法であるが、このノートでは現実性を重視し、実際のコンピュータが電子回路によって、構成可能かどうかを検証することとしたい<sup>1)</sup>。以降の議論はかなり荒削り<sup>2)</sup> だが、コンピュータがどのように物理法則に則って計算を行っているか、というイメージをもつには十分であると思う。

あくまでも、目的は、コンピュータが物理法則に従って計算を行なっているという

<sup>1)</sup> 「コンピュータが電子回路によって構成買うであることを“検証”したい」と書いたが、現実にコンピュータが存在しているので、すでに検証済みであると考えられるだろう。その通りである。しかし、今の私にはコンピュータが本当に電子回路の知識で構成可能かどうかは理解していない。わかっているのは、コンピュータが存在している事実であって、コンピュータが電子回路であるということはわかっているわけではない。なので、この章でコンピュータの動作原理を理解し、コンピュータが電子回路で構成可能であるということを確認したいと思う。

しかし、コンピュータの動作原理を説明する教科書には、物理学的な基礎から書かれているものがない（見当たらない）。しかし、確かに、コンピュータは現実に存在していて、コンピュータは物理法則に則って動作しているはずである。そこで、コンピュータの動きを、物理法則から理解できるということを文書にまとめ、知識を整理することで理解を深めていきたいと思う。

<sup>2)</sup> 壊滅的に等しい。

ことを“実感すること”である。

#### # memo No.109: 注意

説明のために、簡易的なコンピュータを（頭の中で）つくることになるが、あくまでも私が考えた構成のもので、現実的なものではない。それは、上記の目的<sup>3)</sup> のためにつくるものであって、実際のコンピュータがそうなっているのではない。「ああ、たしかに、こうやって構成すれば、コンピュータが作れるんだな」という感覚を抱けるようになりたいのだ。

## 41.2 電磁気学の復習

コメント まずは、基礎中の基礎の確認から始めよう。

### 41.2.1 電子の存在

電子がないと、電磁気現象は生じない。もともと、電磁気現象の根源として、電荷の存在が仮定（要請）されていて、これをもとに電磁気学が構成されている。電磁気学が成立した後、存在を仮定していた電荷というものが、電子という形で実在することが、実験により確かめられた。しかし、電子のもつ電気量は、電磁気学で定める正電気量の反対の符号をもつことも確かめられた。そうは言っても、電子が電磁気現象の根源であることは、今では、絶対に否定できない事実である。

コンピュータも電子回路のひとつである以上、電子の存在の上に成り立っているものである。コンピュータ内部の回路を移動する電子こそが、計算の動力源となるだ。

### 41.2.2 「ホール(hole)」という考え方

ホールという語彙は、正確には、エレクトロン・ホール（Electron hole）という。また、日本語に訳して、正孔とも言われる<sup>4)</sup>。このノートでは、「ホール」という言い方を採用する。次に、肝心のホールとは何かを、説明しよう。

ホールとは、簡単に言えば、電子の抜け殻とでも表現できよう。元々電子が存在すべき場所なのだが、実際には電子が存在しない部分を、ホールと呼んでいる。

なんで、こんなこと（ホール）を考える必要があるのか。結論から言えば、実は

<sup>3)</sup> 目的：「コンピュータがどのように物理法則に則って計算を行っているか」というイメージをもつこと。

<sup>4)</sup> 正孔：「せいこう」と読む。

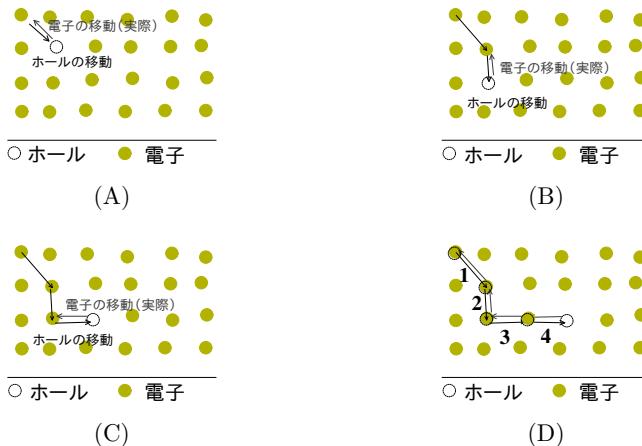


図 41.1 ホールの動き（実際は電子の動き）

ホールという概念は絶対に必要というわけではない。しかし、ホールという考え方を用いることにより、物理的イメージが捉えやすくなり、物理現象の説明も短くなり簡潔にまとめるができるのだ。だったら、これを採用しない手はない。

#### # memo No.110: 炭酸の泡 — ホールに似た現象として —

似たような考え方の例として、炭酸飲料の気泡がよく挙げられる。この気泡が、ホールに対応するのである。たんさんの入っていない飲み物には、当然、泡は生じない<sup>5)</sup>。しかし、炭酸飲料の場合には、内部から泡が生じる。これは、圧力により液体に溶けていた二酸化炭素などの気体が、圧力の低下に伴って、外部に出ようとして泡として現れるものである。このとき、本来ならば液体が存在する場所なのだが、実際には泡（気体）が眼に見えてくる。そして、この泡は液体中を、上に向かって移動する。いや、この言い方は、正確ではない。なぜなら、こう表現してしまうと、気体が重力に逆らっているように、捉えられてしまうからである。では、本当のところは、どう説明すればよいのだろうか。答えは、視点を変えることである。泡を見るのではなく、液体を見るのである。つまり、液体が気体の下に潜り込むように落ちるのである。

現象の流れは次のように説明できる。最初の段階では、炭酸飲料には圧力がかけられていて、気体は内部に溶けたままである<sup>6)</sup>。そして、炭酸飲料にかける圧力を低くする<sup>7)</sup>。すると、

<sup>5)</sup>もちろん、振ったり、ストローか何かで内部に気体（空気）を入れれば泡ができるが、ここでは理想的（液体に対してなんの操作もしていない）な状態を想定している。

<sup>6)</sup>炭酸飲料が入ったペットボトルが未開封の状態に相当する。

<sup>7)</sup>ペットボトルのフタを開ける。

液体の内部から気体が生じてくる<sup>8)</sup>。一度液体中から気体が生じれば、液体は気体より重いので、液体は気体の下の方へ入り込もうとする<sup>9)</sup>。この結果として、泡が上に移動しているように見えるのだ。屁理屈を言っているような気がするが<sup>10)</sup>、正確さを求める場合には、高説明するしかない（と思う）。

### 41.2.3 電荷保存則

#### 41.2.3.1 電場に対するガウスの法則

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho. \quad (41.1)$$

#### 41.2.3.2 アンペール = マクスウェルの法則

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (41.2)$$

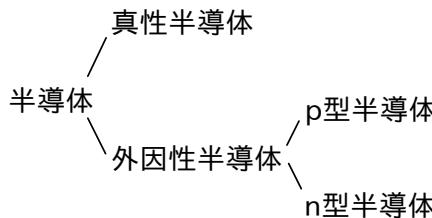


図 41.2 半導体の分類

41.2.3.3 電荷保存の法則

41.2.4 電位（電圧）の定義

## 41.3 テランジスタの動作概要

### 41.3.1 半導体

41.3.1.1 半導体の分類

41.3.1.2 真性半導体

41.3.1.3 n型半導体, ドナー

41.3.1.4 p型半導体, アクセプタ

### 41.3.2 ダイオード

41.3.3 ダイオードの電流電圧特性

### 41.3.4 テランジスタの物理構成

41.3.4.1 バイポーラトランジスタの物理構成

41.3.4.2 電界効果型トランジスタ (FET) の物理構成

41.3.4.3 MOSFET トランジスタ (MIS 構造) の物理構成

41.3.4.4 CMOS の物理構成

### 41.3.5 テランジスタの動作

41.3.5.1 バイポーラトランジスタの動作原理

電流により、電流の増幅率を調整する。

#### 41.3.5.2 MOSFET トランジスタ (MIS 構造) の物理構成

電圧により、電流の増幅率を調整する。

#### 41.3.5.3 トランジスタの動作（これだけを覚えていれば十分）

### 41.4 コンピュータの構成概要

コメント 「コンピュータの構成」は現実のところ、様々である。それは開発される回路の数だけ存在するからである。同じ回路を開発するのは、骨折り損だ。しかし、コンピュータの構成の思想はどれも同じである。それは、「命令」による「データ加工」である。

#### 41.4.1 コンピュータの定義

##### 41.4.1.1 コンピュータとは何か

まず始めに、明確にして置かなければならぬことがある。それは、

「コンピュータとは何か。」

ということだ。何を今更、と思うかもしれないが、いざこの質問に答えようとするとき、曖昧になってしまうのではないか。この質問の答えとして、例えば、電気関係にうとい一般の方だとしたら、「何かものすごい計算を行うもの」だと答えるだろう。また、普段仕事でパソコンを使っている人には、「Microsoft の Word や Excel などで文書を作成したり、表計算をするをするものである」という答が返ってきそうである。これらの答えは、大きな枠組みの範囲では正しい。しかし、これから議論していくには、コンピュータの定義としては、不十分である。では、どのように定義したらよいのだろうか。

一般的に、コンピュータを定義することは難しい。これは「世界初のコンピュータは誰が開発したか」という質問に対して、パスカル  
とか、バベッジ

とかと言われるように、複数の解答が寄せられることにも、定義の難しさ、あるいは認識の曖昧さが現れている。この違いは、コンピュータをどう定義の違いの現れなのだ。答えとして、誰を上げても、間違いはない<sup>11)</sup>。パスカルは四則演算を機械的に行える装置を作ったし、ライプニッツはそれを改良して桁上がりに対応させ

<sup>11)</sup>もちろん、コンピュータを自分なりに定義して、それを最初に創り上げた人で無いといけない。

た。さらに、バベッジはプログラムと言う概念をその計算機に折込み、自動で計算を行えるような装置を考案した<sup>12)</sup>。

このように、コンピュータを単なる四則演算器として捉えるならば、パスカルがその創始者となる。しかし、私の知る限りでは、コンピュータの定義として、「計算を自動的に行うもの」とされることが多く、その意味では、計算をプログラム制御によって自動化することに成功した、バベッジがその答えとされることが多いを感じている。

このノートでは、コンピュータを次のように定義し、以降では、この定義を基にして話を進めていく。

**Point 100: (このノートの) コンピュータの定義**

コンピュータとは、命令によるデータの加工を自動で行う装置である。

「命令」、「データ」、「加工」の定義については、後ほど詳しく記述することしたいが、さしあたっては、次のように捉えておいて欲しい。命令とは、「四則演算を行え」ということであり、データはその四則演算の対象となる数であり、加工とは四則演算を実際に行うことである。

▶ 12) 実際に装置が作られたのは、彼の死後である。ただ、文書として理論が残されており、これを基に後の人々がその理論の正しさを実証している。

41.4.1.2 コンピュータの構成方法

41.4.1.3 ノイマン型コンピュータ

41.4.1.4 ハーバードアーキテクチャ

41.4.2 CPU（中央処理装置）

41.4.2.1 制御装置

41.4.2.2 主記憶装置（メモリ）

41.4.2.3 ALU（算術論理演算装置）

41.4.3 入出力装置

41.4.3.1 入力装置

キーボード、マウス、タブレットなど。

41.4.3.2 出力装置

パソコンの画面（ディスプレイ）やプリンタ、プロジェクタなど。

## 41.5 コンピュータの基本構成回路

### 41.5.1 NOT 回路

### 41.5.2 AND 回路

### 41.5.3 OR 回路

### 41.5.4 NOR 回路

### 41.5.5 NAND 回路

## 41.6 制御回路

### 41.6.1 クロック

### 41.6.2 リセット

### 41.6.3 制御用選択回路（マルチプレクサ）

## 41.7 記憶回路（簡易的なメモリの作成）

### 41.7.1 コンピュータにおける「記憶」の意味

### 41.7.2 メモリの構成

#### 41.7.2.1 メモリとは

#### 41.7.2.2 アドレスデコーダ

#### 41.7.2.3 メモリセル

### 41.7.3 メモリセルの基本素子

#### 41.7.3.1 ラッチ（Latch）

AND 回路を例に、ラッチの動作を説明する。

#### 41.7.3.2 記憶回路の要素

インバータ 2 つのラッチを説明

41.7.3.3 D-ラッチ

41.7.3.4 D-フリップフロップ

41.7.4 メモリの動作

## 41.8 計算回路（簡易的な ALU の作成）

### 41.8.1 コンピュータが行う計算

41.8.1.1 10 進法

41.8.1.2 2 進法

41.8.1.3 16 進法

41.8.1.4 2 の補数（負の数の表現）

41.8.1.5 2 進法による足し算

### 41.8.2 簡易 ALU の構成

41.8.2.1 加算器

41.8.2.2 乗算器

41.8.2.3 アキュムレータ

41.8.3 簡易 ALU の動作

## 第 IX 部

数学の勉強ノート



# 42

はじめに

## 42.1 物理学と数学

物理学の勉強を始めようとしているのに、なぜその前に数学を勉強しなければならないのか。あるいは、なぜ、物理学の学習と、数学の学習を同時に進めないといけないのか。それは、物理学では数学を道具として扱うからである。その道具の使い方を知らずして、物理学は学習できないのである。

もちろん、近代物理学の創始者ニュートン<sup>1)</sup>の時代には、物理学のための数学なんてものではなく、物理学の研究に伴って、その数学的手法である微分積分学を作る必要があった。数学的手法の発明時には記号の統一ができていなかったり、不明確な問題も多いものである。そしてこれらの問題は、後の時代の多くの数学者によって解決され、その表現方法もよりわかりやすい形に書き改められ、きれいな体系に整えられていく。そのため、ニュートンの理論の数学的表現は現在とは全く異なる。現在の物理学で用いられる数学は、代数学や微分積分学がある<sup>2)</sup>。現在の物理学は、これら

<sup>1)</sup> Sir Isaac Newton (1643–1727, イギリス)：古典力学の創始者。微分法という就学的手法を発明し、物体の運動を記述することができるようになった。彼の名をとて、「ニュートン力学」とよばれることも多い。また後で、ニュートン力学の部分において、紹介することになろう。

<sup>2)</sup> 特に、微分積分学はニュートンが物理学を構築するために発明された数学的手法である。(ライブ

が当たり前のように使われる。いわば、物理学を記述するために欠くことのできない言語なのである<sup>3)</sup>。だから、物理学を学習する前に、まずは最低限の数学を学習する必要がある。

物理学を学んでいく途中で、必要になったらその数学を学ぶという方法もあるが、ある程度の数学的知識を予め身に着けておいた方が、学習するのに効率的である。「ある程度」を見極めるのは難しいが、ここではさしあたり、高校レベルの数学がわかるくらいを目標に、数学を学ぶ。

## 42.2 「数学的準備」の学習マップ

このPertで学習する数学について、簡単に触れておこう。まず、内容を列挙してみよう。

- (1) 関数
- (2) 微分積分学
- (3) 微分方程式
- (4) ベクトル
- (5) ベクトル解析（ベクトルの微分積分）
- (6) 行列

まず、「関数」を学習する。中学校では、1次関数や2次関数に触れたことと思う。ここでは、これらをもう少し一般的に考える。物理学ではこの関数がメインとなる。関数により、自然法則を記述するからである。

次に、「微分積分学」を学習する。ただし、深入りはしない。図形的直感を第一に考える。物理学は物体の運動や挙動を数式で表現することがその目的のひとつである。つまり、物体の位置の時間的な変化を記述できなければいけない。この時間変化を表現する最善の手段として、ニュートンは微分積分法という新しい数学分野を開拓した。

その次に、「微分方程式」について学習する。微分方程式とは、微分積分法で定義される微分を含む数式のことである。通常の方程式では、未知変数  $x$  や  $y$  が方程式を満たす値を求める。これに対して、微分方程式で、未知変数に対応するのが、未知

---

ニツツも同時期に微分積分学を発明している。）微分積分学の発明当時には、極限の定義が曖昧であったり、使用される記号も分かりにくるものであった。

<sup>3)</sup> 物理学は数学の助けを借りて成立している。

関数である。微分方程式を解くということは、その微分方程式を満たす関数の具体的な形を求める事にほかならない。

その次に、「ベクトル」について学習する。ベクトルは、物体の位置を数学的に表現するものである。これも図形的イメージ習得を第一にする。

その次に、「ベクトル解析」を学習する。ベクトル解析は、ベクトルに微分積分学を組み合わせたものであるとも言えよう。ベクトルは物体の位置を表現するものであり、微分積分学は時間的変化を記述するものである。つまり、ベクトルに対して、微分積分を適用すると、物体の位置の時間変化を数学的に扱うことができるようになるのだ。

その次に、「行列」を学習する。行列とは、何個かの数を縦横に並べてひとつの組として扱われるものである。行列の概念は、言葉で説明するよりも、具体例を示したほうが分かりやすいだろう。以下は、行列の具体的な例である。

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

これらについての、具体的な性質について考えることは、行列という数学分野である。しかしここでは、行列というものの具体的な形を紹介しただけにとどめておこう。具体的な定義や性質は、後で考えることにする。



# 43

## 関数

### 43.1 集合

#### 43.1.1 集合を定義するとは

数学において、集合とは、その最も基礎にあたる概念である。数学の要である自然数も、集合という概念を使って定義されるものである。自然数の定義は、ペアノ<sup>1)</sup>の公理系として知られている<sup>2)</sup>。

集合が数学の最も基礎的な概念であるだけに、それを定義することは非常に難しい。中学校や高校で集合について学習するとき、次のように集合という概念が説明される。

中学・高校での集合の定義「集合とは、モノの集まりである。ただし、ここで言うモノとは、集合に属するか否かを明確に判断できるものに限る。」

---

<sup>1)</sup> Giuseppe Peano (1858–1932, イタリア)：数学者。自然数を作り出す仕組みである「ペアノの公理系」を提案する。

<sup>2)</sup> ここでは、集合の重要性を示すことが目的なので、ペアノの公理は解説しない。ペアノの公理系を解説する Web サイトは非常に多いし、整数論などの数学の教科書には必ず記述されているので、それらを参照してもらいたい。

この集合の定義は、直観的で非常に分かりやすい。しかし、この“ただし”以下の部分に問題がある。“モノが集合に属すか否かを明確に判断できる”とは、どういうことか。「自然数」や「有理数」などは、明確な判断が下せるので、モノである。しかし、「美人」とか「厳密」だとかというのは、万人に対して明確な判断基準を与えることができず、モノではありえない。となると、どういった場合に、モノになりうるのかという疑問が自然と脳裏にうかんでくる。しかし、実際問題として、モノになりうるかどうかの判断基準を明示することは不可能なのである。つまり、「モノの集まりを集合という」といった集合の定義は、深く考えると曖昧な部分が浮き彫りにされてくるのである<sup>3)</sup>。

どう定義したものか。答えを先に書いてしまうと、実は、数学的に厳密に集合を直接定義することはできないのである。集合は数学的に言えば、無定義語として扱われる概念なのである。

通常、数学では、ある概念を定義する場合、既存の概念を基にする。しかし、数学も言葉を使う以上、「言葉のもつ限界」をふくんでしまう。ここで言葉のもつ限界と

<sup>3)</sup> 集合論が含む矛盾 たしかに、集合論（特に無限集合論）の開拓者であるカントール（※1）が与えた集合の定義は「モノの集まりを集合という」であった。しかし、この定義を用いると、矛盾したことが起こってしまうことをラッセル（※2）が発見した。この矛盾したこととは、次のような命題（定義A）を考えることで説明される。

- 定義 A：「自分自身を含まない全ての集合を  $\omega$  とする」  
さて、どこが矛盾なのかを説明しよう。次の問題を考えてみる。
- 問題 X：「 $\omega$  は、 $\omega$  自身に含まれるか、否か？」

考えらる答えは2つしかない。1.) 含まれるか、2.) 含まれないか、のどちらかである。さて、1.) の状況、つまり、 $\omega$  は  $\omega$  自身に含まれると仮定しよう。この場合、定義 A により自分自身を含まない。しかし、いま、 $\omega$  自身に含まれているという仮定に反する。つまり、「1.) 含まれる」は間違っている。では、2.) の状況、つまり、 $\omega$  は  $\omega$  自身に含まれないが答えなのだろうか。しかし、この場合、定義 A に反していることは明白であり、「2.) 含まれない」も間違いである。考えられるすべての答えで前提とする条件と矛盾する結果がでてしまう。これを ラッセルのパラドクス という。どう考えても、定義 A によって作られる集合  $\omega$  は問題 X を突きつけられると、その答えは矛盾を生じるという結果に終わる。

これは致命的な問題である。集合はすべての数学の分野の基礎にあたる概念であり、この部分に欠陥があるということは、すべての数学分野の存立が危うくなる。

ここで示した矛盾以外以外にも、カントール自身が発見した カントールのパラドクス がある。任意の集合  $A$  に対し、それよりも大きい集合を作成できることが証明されている（「集合の集合」を考えることができてしまうので）。にもかかわらず、最大の大きさを持つ集合があることも証明されてしまった。つまり、いくらでも大きい集合を考えることができると保証されているのに、その大きさには上限があるという。明らかに、矛盾している。（自然数を例として言えば、「自然数はいくらでも大きい数を創りだすことができるのに、それには最大値がある」と言っているのと同じである）

(※1) カントール：Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845–1918, ロシア)

(※2) ラッセル：Bertrand Arthur William Russell (1872–1970, イギリス)

表現したのは、ある単語を説明するには、他の別の言葉を用いなければならないということである。これの何が限界なのかといえば、次の例を考えればよい。例えば、「全体」という語彙が“全ての部分”というように定義されているとしよう。では、この定義で出てくる「部分」とは何か。部分の定義はどうしたらよいかを考えても、“部分とは全体を複数個に分割したものの中の、その1のこと”というような表現になってしまう。この部分の定義には、「全体」という語彙が含まれているが、一方で全体の定義では「部分」という語彙が使用されている。つまりは、語彙の定義が循環してしまっているのである。もっと抽象的に言えば、次の2つの定義が同時になされているということである。

定義 P： A とは B であることをいう。

定義 Q： B とは A であることをいう。

こうなると、定義 P を行うには、それに先立って定義 Q がなされていなければならぬし、しかし、定義 Q をするには、それに先立って定義 P がなされていないといけない。定義が堂々巡りしてしまうのである。これでは数学的に厳密な議論ができない。集合を通常通り数学的に厳密に定義しようとするとき、このような限界から、その実行是不可能であると言わざるをえない。

では、どうすればよいか。これには選択肢が次の2つ考えられる。

- (1) 集合を無定義語として扱う（集合を公理的に定義する）
- (2) 数学的厳密性を犠牲にする

まず選択肢1から説明しよう。無定義語とは、このような言葉の限界を回避すべく考え出された解決策である。驚くべきことに<sup>4)</sup>、無定義語とは、数学的に直接定義されないのである。では、どう説明されるのか。この考え方は盲点だったかもしれない。次のようになされる。例えば、A という概念を定義したいが、数学的に厳密に定義しようとするとき、言葉の限界からそれが不可能であることが判明したとする。しかし、今定義したい A という概念のもつ性質は十分に考えられているとしよう。このとき、概念 A を定義するには、最初に、その性質を必要十分であるように、列挙する。ここで挙げられる性質は複数個になることだろう。そして、この複数個の性質を満たすものを A と定義するのである。これを実行すると次のようになるだろう。

<sup>4)</sup> 「無定義語」という語彙から、推察されてしまい、驚かないかもしれない。しかし、それでも革命的な考え方であると感じることと思う。

## 無定義語 A の説明の仕方 —

以下の性質をもつものを A という.

- (1) A には、性質  $X_1$  が備わっている.
- (2) A には、性質  $X_2$  が備わっている.
- (3) A には、性質  $X_3$  が備わっている.
- (4) … (以下、いくつか続く)

もちろん、このように説明される概念 A には、日常的な意味を考えると直感的イメージにそぐわない、複数のものが想像されてしまうかもしれない。しかし、数学的には、それらすべてを区別することはせず、同一視するのである。なぜかといえば、語彙 A は無定義語 A ということを示す記号に過ぎず、その意味などは一切考慮されないからである。無定義語 A が他の概念と区別できれば良いのである。無定義語の例として、「点」・「直線」などが有名であるが、これらは「点」、「直線」と表現しなければならないわけではない。一貫して同一の語彙を使用していれば、同表現してもかまわないのである。ヒルベルト<sup>5)</sup>が言ったとされる、「机と椅子とビールジョッキの幾何学」という表現は、このことである。点を「机」と言い換え、直線を「椅子」と言い換えても、数学的には何の支障もない<sup>6)</sup>。

## 43.1.2 集合の直感的定義

前節では、集合を数学的に厳密に扱うべく、無定義語という考え方を紹介した。しかし、ここでは物理学を学習しているのであって、厳密な数学を理解しようとしているのではないのだから、集合の定義に無定義語という概念を持ち出して話を難しくしたくない。そこまで数学的な厳密性にこだわる必要もないので、ここでは、集合を直

<sup>5)</sup> ヒルベルト (David Hilbert, 1858–1932, ドイツ) : 数学者。整数論、数学基礎論、積分方程式論など広い分野にわたり、著しい功績がある。また、ヒルベルト空間など、物理学への貢献も多くある（物理学の公理化も目論でいたらしい）。

（参照）Constance Reid[著]、彌永健一[訳]、『ヒルベルト—現代数学の巨峰』

<sup>6)</sup> こう言うと、無定義語には A や B というように抽象的な記号を割り当てよう、という考え方方が生まれてしまうかもしれない。しかし、だからと言って、不用意に記号化することは好ましくない。数学は人間がその想像力により発展させるものであり、そのためにはイメージが非常に重要である。イメージによりインスピレーションが湧き、数学が発展するのである。安易に無定義語を記号化してしまうと、イメージすることが難くなってしまう。なので、無定義語にはできる限り、イメージしやすい語彙を割り当てるべきなのである。点という語彙から意味を削ぎ落とされたとしても、点というイメージを捨て去るべきではないということである。

感的に定義して扱っていきたい。このような考え方は、素朴集合論といわれている。高校数学における集合とは、素朴集合論である。このノートでも、以下では集合といえば、素朴に定義された集合のであるとする。

集合の素朴な定義は、次のようになされる。

#### Point 101: 直感的な集合の定義

定義 43.1.1. “もの”の集まりのことを **集合** という。

記号 集合を表現するのには、多くの教科書では、大文字のアルファベットが用いられる。例えば、

集合 A

のように、このノートでも、この表現を採用する。

ここでいう“もの”とは何でもよいということではなく、数学的に厳密に扱えるものでないといけない。例えば、「美しいものの集合」といわれても、これは数学的に扱うことはできない。「美しい」という定義が曖昧だからだ。数学的に扱える集合とは、例えば自然数や整数があげられよう。

#### 43.1.3 集合の要素

「集合」と言うからには、その中には、何らかの構成要素があるはずである。といふか、そういうもの想定して、集合を定義している。そこで、集合を構成するものの呼び方を与えておく（定義 43.1.2）。また、後の学習で要素について考えるときに、例えば、ある概念  $a$  がその集合  $A$  の要素であることを数式的に示せると、便利である。

## 集合の要素

**定義 43.1.2.** 集合を構成するもの<sup>a</sup> を集合の 要素 という<sup>b</sup>.

記号 ある要素  $a$  が集合  $A$  に含まれているということを,

$$a \in A.$$

と記述する. これは左右を逆転させて

$$A \in a.$$

と表現しても同じことである.

<sup>a</sup> 例えば上の 1 から 5 の自然数の集合  $A$  であれば, 1, 2, 3, 4, 5 の 5 つの自然数である.

<sup>b</sup> 元(げん) ということもある. 教科書によって様々に表される.

43.1.4 空集合の存在 :  $\emptyset$ 

集合は要素を含むことが一般的だ. しかし, 「要素を全く含まない集合」というものも考えられる. それについて, 次に説明しよう.

要素をひとつも含まない集合を, 空集合<sup>7)</sup> という.

空集合には要素がないのだけど, これを表現したい場合もある. そのため,  $\emptyset$  という記号を使うことが一般的である. このノートでも, この記号  $\emptyset$  を用いる<sup>8)</sup>. つまり, 空集合の要素は次のように表現できる<sup>9)</sup>.

$$A \in \emptyset.$$

「空集合は空っぽの要素をもつ」と言い換えられるのである<sup>10)</sup>.

►7) 空集合: 「くうしゅうごう」と読む. 「そらしゅうごう」でも「からしゅうごう」でも「あきしゅうごう」でもないよ.

►8) 空集合を表す記号  $\emptyset$  は, “数字の 0 に斜め線をいれた記号”である. よく, ギリシャ文字の  $\phi$  が使われていることがあるが, これは間違いである. フォントが足りなかった時代の古い教科書では,  $\phi$  を  $\emptyset$  の代わりとして使用されていることもあるので, 注意が必要. ノートをとる時に,  $\phi$  と見分けが付かなくなることもあるが, イメージは  $\emptyset$  であることを意識すること.

►9) ここで用いられる記号  $\emptyset$  には, 「空っぽである」というイメージが込められている.

►10) 何かまわりくどい言い回しあるが, こう表現することで, 数学体系をより豊かにできるのである.

改めて、定義しておこう。

### 空集合の存在

**定義 43.1.3.** 要素をひとつも含まない集合を 空集合 という。

記号 集合 A が空集合であるとは、次のように表現される。

$$A \in \emptyset.$$

ここに用いられる記号  $\emptyset$  には「空っぽ」であるという意味が込められている。

## 43.1.5 ある集合を定義する

### 43.1.5.1 特別な集合の定義の表現方法

ある特別な集合を定義<sup>11)</sup>したい場合、その表現は次の 2 種類ある。その記述例と特徴を説明する。

---

まあ、ここでは物理のための数学を学習しているので、どんな風に豊かになるかには興味はない。  
詳細は、集合論の教科書を参照してほしい。

► 11) ここで、ひとつ断っておかないといけないことがある。今まで単に「集合の定義」という言葉を使っていたが、これには次のような 2 通りの意味が考えられる。ひとつは、1.) 集合という概念そのものの定義という意味である。もうひとつは、2.) 要素が限定されている集合を定義する場合である。1 の場合の例は上げるまでもない。2 の場合の例をあげよう。例えば、要素が自然数のみの集合を考えたい場合、「集合 N を自然数の集合とする」という。この場合は、集合の概念そのものの定義ではなく、ある性質を持った特別な集合を考えたい場合に、ある記号をその集合に割り当てるという、集合の定義である。

このように、「集合の定義」という言葉には 2 通りの意味が考えられるが、これらの違いは文脈上で峻別できることである（多くの場合、2 の場合の意味である）。

ある集合の定義の方法――

(1) 内包的定義

例.)  $A = \{x \mid x \text{ は偶数}\}$

- 要素の持つ性質を、式等を用いて集合を定義する方法.
- 要素の個数が無限にあっても記述可能である.
- 要素の具体例がすぐにイメージしづらいことが多い.

(2) 外延的定義

例.)  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

- 集合のもつすべての要素を列举して集合を定義する方法.
- 要素の個数が無限であると、表現しきれない場合がある.
- 要素の具体例は、直接記述されているので、イメージしやすい.

以下で、もう少し詳しく説明する。

#### 43.1.5.2 集合の内包的定義

内包的定義とは、その集合のもつ性質を表して集合を定義するというものである。例えば、「偶数の集合  $A$ 」を表現するには、

$$A = \{x \mid x \text{ は偶数}\}$$

と書く。一般には、この例で「 $x$  は偶数」の部分を  $P(x)$  と表現して、

$$A = \underbrace{\{x \mid}_{\substack{\text{変数} \\ \text{条件式}}} \underbrace{P(x)\}}_{\text{条件式}} \quad (43.1)$$

と書く<sup>12)</sup>。読み方としては、「条件  $P(x)$  を満たすような  $x$  の集合」といったカンジである。

##### # memo No.111: 注意

ここに書いた「変数」というのは、要素を一般的に表現する変数のことである。

<sup>12)</sup> この  $P(x)$  は述語とよばれる。これら辺は、論理学等の教科書を読んでみよう。ここでは深く考えずに話を先へ進める。

#### 43.1.5.3 集合の外延的定義

外延的定義とは、その集合を構成する要素全てを列挙して、その集合を表現するというものである。例えば1から5までの自然数の集合は

$$A = \underbrace{\{1, 2, 3, 4, 5\}}_{\text{要素の列挙}}$$

と書く。これはまた、内包的にも表現できて、

$$A = \underbrace{\{x \mid 1 \leq x \leq 5, x \text{ は自然数}\}}_{\substack{\text{変数} \\ \text{条件式}}}$$

と書ける。外延的定義は集合の要素に規則性がないときに用いることが多い。また、内包的定義よりも直感的にわかりやすいならば、外延的定義が用いられることがある。しかし概して、一般的には内包的定義のほうがよく用いられるようである。

#### 43.1.6 集合の性質

実数を扱う場合には、等号や不等号といった、右辺と左辺の関係を表現する必要があった。集合にもこれと同等な概念がある。それは、次のようなものである。これらについて、詳細は次節以降で考える<sup>13)</sup>。

##### 複数の集合の間の関係

2つ以上の集合が存在するとき、それらの集合同士の間に、次のような関係が定義される。

- 包含関係（部分集合）
- 二項関係
- 同値関係

また、今まで親しんできた実数の加法・乗法などの演算のように、集合も演算の対象となることができる。しかし、集合の演算は、加法・乗法という言葉は使われない。実数の意味での加法・乗法と少々異なるからである。集合の代表的な演算の種類は次

<sup>13)</sup> ここではとりあえず、このような概念があるということを認識できれば、それで良い。

の通りである。

### 集合の演算的性質

2つ以上の集合が存在するとき、それらの集合に対し、以下のような概念が定義される。

- 共通部分
- 合併集合（または、和集合）
- 補集合
- 差集合
- 直積（または、積集合）
- 商集合
- 幂集合<sup>a</sup>

<sup>a</sup> 幂集合：「べきしゅうごう」と読む。 $a^x$  のような指数で表される積のことをいう。

#### 43.1.6.1 集合の共通部分

2つの集合を用意しよう。要素は任意のものでよい。この適当な2つの集合を  $A$ ,  $B$  と表すこととする。このとき、集合  $A$  と集合  $B$  の両方の集合において、それぞれの要素を考えると、次のものがある。

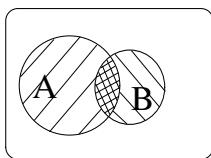
- (1) 集合  $A$  のみに属し、かつ、集合  $B$  には属さない要素
- (2) 集合  $B$  のみに属し、かつ、集合  $A$  には属さない要素
- (3) 集合  $A$  と  $B$  の両方に属する要素

図示すれば、図??の様である。集合  $A$  と集合  $B$  の定義の仕方によっては、どちらの集合にも属さない要素の存在も考えられる（図 43.1 (B)）。

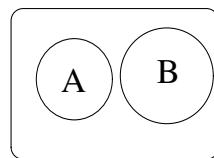
図 43.1 の円で囲まれた領域の内側に、その集合の要素が含まれている。ここでは、境界線上の点は含めないこととする。

共通部分を示す記号として、 $\cap$  が用いられる<sup>14)</sup>。例えば、集合  $A$  と集合  $B$  の共

<sup>14)</sup> 共通部分を表す記号  $\cap$  に正式に決まった名称は与えられていないが、多くの教科書では「キヤップ」とい名前が与えられている。



(A)



(B)

図 43.1 共通部分（例：集合が 2 つの場合）

共通部分は、

$$A \cap B$$

というように表現される。

もっと一般的に、2 個以上の集合を考え、それらの共通部分を図示すると、図 43.2 のようになる。ここでは、4 つの集合しか描いていないが、この集合の個数は任意に設定できる。

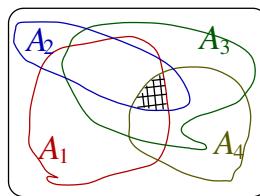


図 43.2 共通部分

ここで、集合を添字付きのアルファベットに書きなおした<sup>15)</sup>。この場合、集合の共通部分は

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$$

<sup>15)</sup> これは、アルファベットの種類が A から Z の 26 種類しかないからである。アルファベットのみによる集合の表し方を採用していると、26 個までの集合しか区別して扱うことができない。そこで、同じアルファベットでも、添字をつけて区別することで、集合を区別できるようにするのである。こうすると、すぐ後に述べる、複数の集合の共通部分を表す省略記号  $\bigcap_{i=1}^n$  の導入も自然に行うことができる。

と表される。

同様に、集合の数が  $n$  個の場合は、

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap A_n$$

と表される。想定する集合の個数が多くなると、その共通部分の表現も長つたらしくなり、読みづらくなる。そこで、新たに記号を導入することにしよう。次の通りである。

$$\bigcap_{i=1}^n A_i := A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap A_n$$

省略記号  $\bigcap_{i=1}^n$  により、 $i = 1$  から  $i = n$  までの集合の共通部分の表現を簡略化できる<sup>16)</sup>。

集合の個数に上限がないのなら（無限個の集合を想定する場合）、個数  $n$  を無量大数を表す記号  $\infty$  に置き換えて、

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i := A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots$$

と表現する。

ここで、改めて、集合の共通部分を定義しておこう。

---

<sup>16)</sup> これは、和の記号  $\sum_{i=1}^n a_i$  に真似た記号である。

集合の共通部分 —

**定義 43.1.4.** 集合が  $n$  個ある場合を考え、それらを  $A_1, A_2, \dots, A_n$  とする。この  $n$  個の集合全てに属する要素を、これらのすべての集合の 共通部分 という。

記号 1 集合の個数が 2 つの場合、記号  $\cap$  を用いて、

$$A_1 \cap A_2. \quad (43.2)$$

記号 2 集合の数が 2 つ以上の場合、その個数を  $n$  個として、

$$\bigcap_{i=1}^n A_i := A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap A_n. \quad (43.3)$$

記号 3 集合の個数に上限をつけない場合、記号  $\infty$  を用いて、

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i := A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots. \quad (43.4)$$

特に注意しておこう。想定する全ての集合  $(A_1, A_2, \dots, A_n)$  の共通部分がないとき、それは共通部分は空集合であると言い換えることができる。

共通部分がない場合 —

想定する複数個の集合に対し、共通部分が存在しない場合、共通部分は空集合であるといい、次の記号で表現できる。

$$\emptyset = \bigcap_{i=1}^n A_i \iff \bigcap_{i=1}^n A_i \text{ の共通部分なし.} \quad (43.5)$$

#### 43.1.6.2 合併集合（または、和集合）

任意に集合を 2 つ用意して、それぞれ集合  $A$ 、集合  $B$  と名付けよう。この 2 つの集合のもつ要素をあわせて新たに集合を作るとき、これを集合  $A$  と集合  $B$  の 合併集合 という。図示すれば、図 43.4 のように描けよう。

合併集合は、また 和集合 ともいわれる。2 つの集合より作られる合併集合を表す

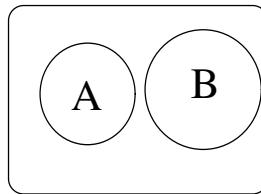


図 43.3 共通部分なし = 共通部分は空集合

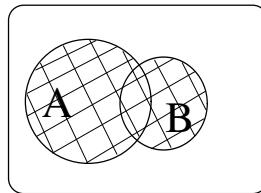


図 43.4 合併集合

記号として、 $\cup$  が用いられる<sup>17)</sup>.

例えば、集合  $A$  と集合  $B$  の合併集合は、

$$A \cup B$$

というように表現される。

もっと一般的に、2個以上の集合を考え、それらの合併集合を図示すると、図 43.2 のようになる。ここでは、4つの集合しか描いていないが、この集合の個数は任意に設定できる。

ここで、集合を添字付きのアルファベットに書きなおした。この場合、集合の合併集合は

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$$

と表される。

---

<sup>17)</sup> 合併集合を表す記号  $\cup$  に正式に決まった名称は与えられていないが、多くの教科書では「カップ」とい名前が与えられている（コーヒーカップとか、マグカップとかの“カップ”である）。

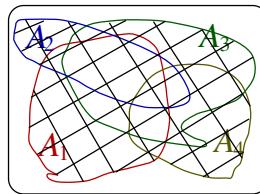


図 43.5 合併集合

同様に、集合の数が  $n$  個の場合は、

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1} \cup A_n$$

と表される。想定する集合の個数が多くなると、その合併集合の表現も長つたらしくなり、読みづらくなる。そこで、新たに記号を導入することにしよう。次の通りである。

$$\bigcup_{i=1}^n A_i := A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1} \cup A_n$$

省略記号  $\bigcup_{i=1}^n$  により、 $i = 1$  から  $i = n$  までの集合の合併集合の表現を簡略化できる<sup>18)</sup>。

集合の個数に上限がないのなら（無限個の集合を想定する場合）、個数  $n$  を無量大数を表す記号  $\infty$  に置き換えて、

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i := A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots$$

と表現する。

ここで、改めて、合併集合を定義しておこう。

---

<sup>18)</sup> これは、和の記号  $\Sigma_{i=1}^n a_i$  に真似た記号である。

## 合併集合

**定義 43.1.5.** 集合が  $n$  個ある場合を考え、それらを  $A_1, A_2, \dots, A_n$  とする。この  $n$  個の集合全てに属する要素を、これらのすべての集合の 合併集合 という。

記号 1 集合の個数が 2 つの場合、記号  $\cup$  を用いて、

$$A_1 \cup A_2. \quad (43.6)$$

記号 2 集合の数が 2 つ以上の場合、その個数を  $n$  個として、

$$\bigcup_{i=1}^n A_i := A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1} \cup A_n. \quad (43.7)$$

記号 3 集合の個数に上限をつけない場合、記号  $\infty$  を用いて、

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i := A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots. \quad (43.8)$$

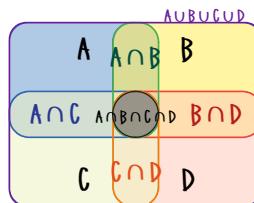


図 43.6 共通部分/合併集合

### 43.1.6.3 補集合

今まででは、例えば集合  $A$  を考えるときに、その外側の領域についても、全く考慮していなかった。しかし、集合  $A$  の外側の領域についても考えられるので、それを無視することはできない。図で描けば、図 43.7 のようになる。

そこで、次のような定義をしよう。

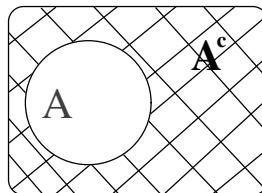


図 43.7 補集合

## 補集合

**定義 43.1.6.** 任意の集合  $A$  の外側の領域に含まれている全ての要素からなる集合を、集合  $A$  の **補集合** とよぶ。

記号 1 集合  $A$  補集合を表す記号として、このノートでは以下の記号を用いる。

$$A^c. \quad (43.9)$$

ここで 1 つ注意がある。この上付きの添字記号  $c$  は定数ではない。なので、これを「 $A$  の  $c$  乗」というように解釈してはならない<sup>a</sup>。

記号 2 集合  $A$  の補集合  $A^c$  は、「集合  $A$  でない、他の全ての集合の合併集合」と捉えることができる。簡単に表現すれば、「集合  $A$  でない集合」となる。この表現は集合  $A$  の否定であり、ブール代数などでは、

$$\bar{A}$$

と書かれることも多い。

---

<sup>a</sup> 補集合を英語で表すと、"a complementary set" であるので、上付き添字の  $c$  はこれに由来するのではないかと思う。確かに「補集合」の「補」が「補助」と「補う」という意味があるからだ。しかし、確かに「補助」と「補う」の意味があるが、その「補助」と「補う」が「補集合」と「補う」と「補う」が「補集合」と結びつくわけがない。つまり、この「補集合」の「補」は「補助」と「補う」の意味ではなく、単に「補」の意味だけである。これは、英語の「complementary set」が日本語の「補集合」に翻訳されたときに、誤訳された結果である。

#### 43.1.6.4 差集合

任意に集合を2つ用意して、それぞれ集合A、集合Bと名付けよう。この2つの集合A、Bには空集合でない共通部分が存在すると仮定する。つまり、

$$A \cap B \neq \emptyset$$

を想定する。

このとき、次のことを考えられる。それは「集合Aに属している要素のうち、集合Bに属していない全ての要素からなる集合」である。図で描けば、図43.8のようになる。

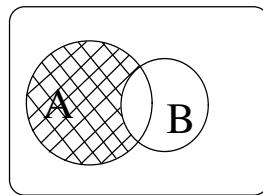


図43.8 差集合

改めて定義しておこう。

## 差集合

**定義 43.1.7.** 任意の 2 つの集合  $A, B$  があるとき, 集合  $A$  に属している要素のうち, 集合  $B$  に属していない全ての要素からなる集合のことを, 集合  $A$  から集合  $B$  を引いた **差集合** という.

記号 集合  $A$  から集合  $B$  を引いた差集合を, このノートでは以下のように記述する.

$$A \setminus B \quad (43.10)$$

のようである<sup>a</sup>.

---

<sup>a</sup> これは, 差集合が実数の意味での  $-$  とは異なる概念だからだろう. 合併集合の記号  $\cup$  の記号にしても, 同じことがいえよう.

教科書によっては, 差集合を  $A - B$  のように表現しているものも見受けられる. しかし, その場合でも, 合併集合の記号は  $\cup$  を採用していることが多い.  $+$  にすれば良いのに.

## 43.1.6.5 直積（または、積集合）

任意に集合を 2 つ用意して, それぞれ集合  $A$ , 集合  $B$  と名付けよう<sup>19)</sup>. このとき, 次の操作を行うことを考える. 集合  $A$  から任意に要素を一つ選択する. これを

$$x_A \in A$$

としよう. 同様に, 集合  $B$  に対してもこの操作を行い,

$$x_B \in B$$

とする.

そして, この選択した 2 つの要素  $x_A, x_B$  から, 新しい集合を構成する. 記号は, 集合  $A$  と集合  $B$  から生成されるので,  $A \times B$  と表現しよう<sup>20)</sup>. 集合  $A \times B$  に名前がないと説明しづらいので, とりあえず, 直積と名付けておこう.

---

► 19) この記述, 飽きてきたかな. 何か別の言い回しで, このマンネリをなくしたいな. 何かいいアイディア, ないかな.

► 20) 今のところ, 記号  $\times$  については深く考えずにしておこう.

すると、集合  $A$  と集合  $B$  の直積  $A \times B$  は、次のように、要素を用いて表現される。

$$A \times B = \{< x_A, x_B > \mid (x_A \in A) \cap (x_B \in B)\} \quad (43.11)$$

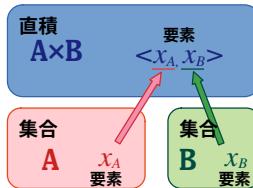


図 43.9 直積

#### 43.1.6.6 商集合

#### 43.1.6.7 幂集合

## 43.2 写像

### 43.2.1 写像とは

集合についてはこのくらいにして、次に **写像** という概念を考えていこう。集合を 2 つもってきて、それらを  $A$ ,  $B$  としよう。集合  $A$  の各要素に対して、集合  $B$  の要素を対応させる。この対応の方法は様々だが、これを  $f$  という記号を用いて、

$$f : A \longrightarrow B$$

と表現する。この  $f$  のことを写像という。記号の意味は、写像  $f$  によって、集合  $A$  の要素を集合  $B$  の要素に対応させるということである。対応のさせ方は大きく分けて 3 つがある。それは、全射、単射、全単射である。

全射とは、例えば、もとの集合  $A$  の要素を別の集合  $B$  の要素に対応させるときに、 $A$  の要素に漏れが 1 つもなく  $B$  の全ての要素に対応していることである。ここで、 $A$  の複数の要素が  $B$  の 1 つの要素に対応していてもかまわない。とにかく、全射とはもとの集合から漏れる要素が 1 つもなく、別の集合の要素に対応している状況のことをいう。但し注意しておくことは、集合  $A$  の要素 1 つから集合  $B$  の複数の要素には

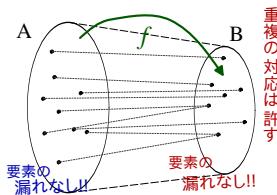


図 43.10 全射のイメージ

対応していないことである。簡単にいえば、集合 A の要素を 1 つもってきただけで、それに対応する B 要素がただ 1 つ定まっていることである。

よく知っている例では、2 次関数  $f(x) = x^2$  がある。これは写像  $f$  を使って表現すると次のようになる。

$$f : x \mapsto x^2$$

$x$  が 1 つ定まると、 $x^2$  の値は必ず 1 つ定まる。例えば  $x = 2$  のとき、 $x^2 = 4$  である<sup>21)</sup>。

次に 単射 について考える。単射であるとは漏れはあるが、重複はないということを意味する。もとの集合 A の全ての要素は別の集合 B の要素に対応しているという約束はあるが、集合 B の全てに対応している必要はない。つまり、集合 B 側には要素の漏れがあってもよい。単射で大事なのは、重複した対応がないということである。

単射の例を考えれば、自然数を 2 倍して偶数にするという関数を上げられる。つまり、 $f(x) = 2x$  である。写像の表記をすれば、

$$f : \mathbf{N} \mapsto \mathbf{N}, \quad f : x \mapsto 2x$$

である。但し、ここでの  $x$  は自然数に限っている。はじめに書いた  $f : \mathbf{N} \mapsto \mathbf{N}$  は自然数から自然数への写像であることを示し ( $\mathbf{N}$  は自然数を表現する)，その後に書いた  $f : x \mapsto 2x$  は自然数を 2 倍して偶数を求めるという写像を意味している。そうすれば確かに、 $x$  はすべて  $2x$  に写せる。 $2x$  は自然数の一部であり、全体ではない。

<sup>21)</sup> ここが混乱しやすい部分だが、 $x = -2$  の時も  $x^2 = 4$  である。確かに、 $x = 2$  と  $x = -2$  の場合の両方で、写像  $f$  によって同じ値 ( $x^2 = 4$ ) に対応させられているが、これは全く問題はない。ここで考えているのは  $x$  から  $x^2$  を対応させるような写像  $f$  であって、 $x^2$  から  $x$  に対応させる写像ではないからだ。

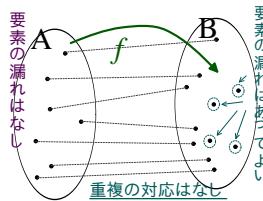


図 43.11 単射のイメージ

い<sup>22)</sup>.

### 43.2.2 関数

次に、関数について確認するが、これは簡単だ。実数から実数への写像を、慣習に従って、**関数**という。これだけである。高校の時には、「変数  $x$  が 1 つ定まったとき、それに伴って、 $f(x)$  も 1 つに定まるならば、 $f(x)$  は  $x$  の関数である」と習ったと思う。これは正しい。しかし、写像という概念を導入すると、数学の世界がもっと広くなる。なので、ここで写像という概念の紹介をしたかった。写像とはとても抽象的なものであり、捉えるのが難しい。しかし、あえて感覚的に説明しようとすれば、写像とはある集合の要素を、何らかの変換を用いて、別の集合の要素に対応させるものであるといえよう<sup>23)</sup>。

### 43.2.3 関数のイメージ

関数のイメージとして、よく例に挙がるのは、“自動販売機”である<sup>24)</sup> 自販機を関数としてみるとき、それは、入力 1 つに対して、出力が 1 つであるという特徴を指している。入力とは、ほしい商品に対応したボタンを押すことであり、出力はそのほしい商品が取り出し口に現れることがある。これは、関数のイメージによく合う。関数とは、

1 つの入力に対して、1 つの出力が対応する

▶ 22) しかし、自然数の濃度と偶数の濃度は同じである。“濃度”については、集合論などの教科書を参照。濃度とは、簡単にいえば、要素の個数が無限大個であるときの、集合の“大きさ”を示すものである。

▶ 23) この説明はどのくらい妥当かどうか不安。

▶ 24) 以降、自動販売機のことを“自販機”と略記する。

という性質をもつものである。

数学ではよく関数を  $f(x)$  のような記号で表現される。初めてこの記号をみると、面を食らってしまう。中学校で初めて習う一次関数は、 $y = ax + b$  のように記述していたし、2次関数だって、 $y = ax^2 + bx + c$  と書かれた。この時に、 $y$  は  $x$  の一次関数だとか、2次関数だとかというように覚えさせられる。

なぜ  $f(x)$  のような書き方をするのか。それは、関数という概念を、一般化して考えたいからである。関数には、一次関数や2次関数に限らず、もっと高次元の  $n$  次関数とか、指數関数、三角関数とかいろいろ考えられる。これらの関数を、どれか1つに特定することなく、関数全てを対象にして考えたいときには、関数の具体的な形を与えるわけにはいかない。しかし、関数という以上、入力と出力を表現すべきだ。入力に対応するのが、記号  $f(x)$  の括弧の中の変数  $x$  で、出力は  $f(x)$  そのもので表現される。入力とにそれに対応する出力は分かっているが、その具体的な形はわからないときに<sup>25)</sup>、 $f(x)$  という記号を使うのである。こうすれば、関数一般について記述できるのである。

入力  $x$  に対して、 $f$  という操作を施して、 $f(x)$  として出力する

ということをこの記号は表現する。入力と操作方法が分かれば、出力も分かる。だから、入力と操作方法を象徴するような記号で関数を表せる。

その内部の構造は知らなくてもよい。それは本当か。もう一度、自販機の例を考える。入力は、ほしい商品に対応するボタンを一回押すこと。出力は、ほしい商品が取り出し口に現れること。さて、ボタンを押してから、商品を手にするまでどのように自販機は動くのか。その間、自販機の内部では、大量の計算がなされているはずである。どのボタンが押されたのかを判別し、押されたボタンに対応する商品を選択し、内部での機械を正確に制御させて商品を取っだし口に落とす。おそらく、こんなことをしているはず<sup>26)</sup>。で、商品を買う側の私たちは、自販機の内部の壮絶な計算を全て理解しないといけないのか。実際はそうでないことは、知っている。自販機の計算など、知らなくても何の問題もない。ボタンを押して、商品を得ることができれば、それで満足である。関数とはそんなものである。「関数  $f(x)$ 」とだけしか書かれていない場合、関数の内部はどうなっているかは知る必要はないのだ。

入力が複数あっても同じこと。例えば、電卓は複数のボタンを順序よく入力し、計算結果を出力として得る。これを式で書くと、入力される値は括弧の中に全て記述し、

▶ 25) もしくは、形を特定したくないとき。

▶ 26) 詳細は、設計者に聞かないとわからないから…

$f(x, y, z)$  のように書ける。この場合、入力は  $x, y, z$  の3つで、出力は  $f(x, y, z)$  そのものである。

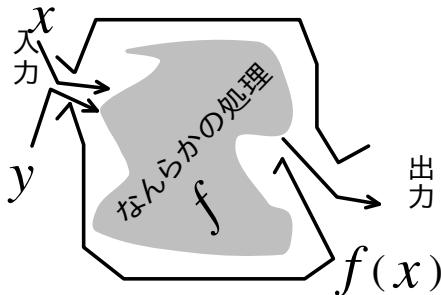


図 43.12 関数のイメージ

$f(x)$  という記号は、一般の関数を扱いたいときにも、役に立つが、もっと別の理由で使われることがある。実験的に、入力と出力は得られているのだが、その関係がよくわからないことがある。関数の形が分からぬのだ。そういう時は、とりあえず、その関数として、 $f(x)$  と書いてしまうのである。そして、その関数が満たしている性質から、関数を推測するのである。

形のはっきりしない関数  $f(x)$  が使われる例として、微分方程式がある<sup>27)</sup>。こんな感じで記述される。

$$\frac{df(x)}{dx} + x = 5.$$

微分方程式を解くとは、その方程式を満たす関数を見つけることである。その場合、とりあえず、解となる関数を  $f(x)$  とおく。そして、演算によって、具体的な関数の形を得る。これはちょうど、 $x$  の一次方程式  $2x + 1 = 0$  に現れる変数  $x$  と同じ考え方である。

物理学では、微分方程式の解として、いろいろな関数が現れる。ということで、次から、関数の具体的な例として、対数関数・指数関数、三角関数について、簡単に確認しておこう。

<sup>27)</sup> 微分方程式は、後でたくさんあらわれるが、ここでは微分方程式がどのようなものであるかを知っている必要はない。そんなものがあるので、と思ってもらえばそれでよい。

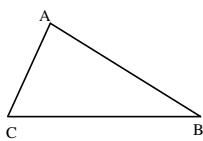
### 43.2.4 三角関数

#### 43.2.4.1 三角比

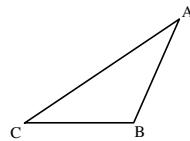
三角関数の前に、三角比を復習しておく。ここでは大体の感じをつかめればそれでよい<sup>28)</sup>。三角形には、鋭角三角形と鈍角三角形、直角三角形の3つがある。それぞれの定義は、以下の通り。

- 鋭角三角形：90度未満の角が、ひとつも"ない"三角形
- 鈍角三角形：90度よりも大きい角を、ひとつもつ三角形
- 直角三角形：90度ピッタリの角を、ひとつもつ三角形

実際の図形を目で見たほうが、わかりやすいだろう<sup>29)</sup>。下図を参照。



(A) 鋭角三角形



(B) 鈍角三角形

図 43.13 三角形の種類

ここで確認したいのは、sin関数とcos関数である。図の三角形（鋭角、鈍角のどちらでもよい）で、三角形の頂点Aから、辺BCもしくはその延長に対して垂線を引く。垂線の足<sup>30)</sup>をHとする。 $\angle ABC$ の角度を $\theta$ と表す。

これから大事なるのが、垂線AHとBHである。つまり、直角三角形を考えることになる。三角比には一般の三角形で成立立つような、「正弦定理」や「余弦定理」などがあるが、これらはここでは考えず、必要になった時に確認するという形にしたい。とりあえずは直角三角形を考える。

ということで、図を以下のように書き直そう。

直角三角形は、辺ABの長さ $\|AB\|$ と角度 $\theta$ で、その形を特定できる。<sup>31)</sup> つまり

<sup>28)</sup> 三角関数の部分でしっかりと覚えればよい。

<sup>29)</sup> 論理的に厳密に定義したい場合は、記号化しやすい文（命題）を使うべきである。だけど、物理学を考える上では、そこまで神経質になる必要はない。

<sup>30)</sup> 垂線の足：頂点Aから辺BCの延長の交点のこと。

<sup>31)</sup> 言い換えると、 $\|AB\|$ と $\theta$ の2つが特定されると、三角形の形とその大きさがきまる、ということ。



図 43.14 垂線の引き方

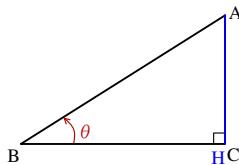


図 43.15 直角三角形の図

り、 $\|AB\|$  と  $\theta$  がそれぞれ 1 つずつ定まれば、垂線  $AH$  の長さ  $\|AH\|$  が 1 つに定まるという関係がある。従って、 $\|AH\|$  は、 $\|AB\|$  と  $\theta$  の関数であり、

$$\|AH\| = \|AB\| \sin \theta$$

と表現する。辺  $AB$  が、基準となる水平な線よりも角度  $\theta$ だけ傾いているときの、縦方向の長さが  $\|AH\|$  なのである。

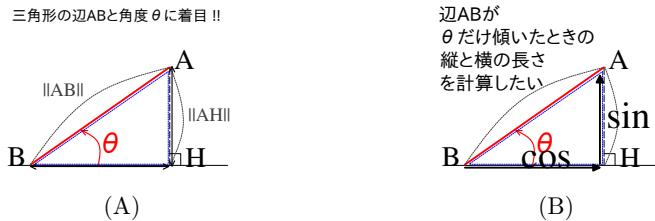


図 43.16 三角形の見方を変えよう

もう一方の辺  $BH$  の長さ  $\|BH\|$  も、 $\|AB\|$  と  $\theta$  の関数である。

$$\|BH\| = \|AB\| \cos \theta$$

と表現する。

要するに、辺 AB が  $\theta$ だけ傾いている直角三角形の、縦の長さ ( $\|AH\|$ ) が知りたい場合、 $\|AB\|$  に  $\sin \theta$  をかけて、

$$\|AH\| = \|AB\| \sin \theta$$

と計算できるということだ。横の長さ ( $\|BH\|$ ) を知りたければ、 $\cos \theta$  をかけねばよく、

$$\|BH\| = \|AB\| \cos \theta$$

と計算される。 $\sin \theta$  と  $\cos \theta$  の値は、すでに先人が計算していて、今では、三角関数の表として、簡単に参照できるし、 $\|AB\|$  もわかる。つまり、三角関数を使うことで、辺 AB とその傾斜している角度  $\theta$  から、縦と横の長さを計算で出すことができるのだ。

さらに、 $\sin \theta$  と  $\cos \theta$  を使うと、辺 AB の傾きを表現できる。一次関数、つまり直線の式では、 $y = ax + b$  の  $a$  が直線  $y$  の傾きを表している。傾きとは、

$$a = \frac{(y \text{ の増加量})}{(x \text{ の増加量})}$$

で定義される量であった。この式の分母に  $\|AB\| \cos \theta$  を、分子に  $\|AB\| \sin \theta$  を入れると、

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

である。 $(\|AB\|$  は約分される。) これは、辺 AB の傾きにほかならない。これを、 $\tan$  という関数記号を導入し、

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

と表現する。三角比には他にもいろいろな公式があるが、ここでは省略する。三角比は三角関数の特殊 ( $0^\circ < \theta < 180^\circ$ ) な例である。従って、三角比の公式は、三角関数でも成り立つ。三角関数を説明した後、そのうちの重要な公式を確認しよう。

では次に、三角関数にとりかかろう。

#### 43.2.4.2 三角関数の定義

三角関数の定義する<sup>32)</sup>。図 43.17 を参照してほしい。

---

<sup>32)</sup> この定義は、図形を用いてなされるので、かなり直観的で、何か受け入れがたいのだが、とりあえず便宜上の定義として考えてもらいたい。しかし、この定義は完全に間違っているわけではない。図

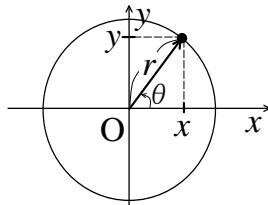


図 43.17 三角関数

図を見るときには、半径  $r$  の円上を回転しているイメージしてほしい。この回転により、 $\theta$  がいろいろな値に変化している様子が想像できればよい。 $0^\circ < \theta < 360^\circ$  に限らず、何回転でもできる。また、右回転(図 43.17 の矢印の向き)を正方向の回転として、その逆回転の負方向の回転も可能である。負の回転の場合、 $\theta$  の取りうる値は負になる。この回転する半径のことを、動径 とよぶ。

### 三角関数の定義

図 43.17において、三角関数  $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$ ,  $\tan \theta$  を次で定義する。

$$\sin \theta := \frac{y}{r} \quad (43.12)$$

$$\cos \theta := \frac{x}{r} \quad (43.13)$$

$$\tan \theta := \frac{y}{x} \quad (43.14)$$

$r$  は円の半径である。この定義では、もちろん  $r \neq 0$  と仮定している。

#### 43.2.4.3 三角関数の図形的イメージ

三角関数の定義式を見ても、最初はイメージしにくいことと思う。だから、ここで、三角関数の図形的イメージを押さえておこう。

---

形的に定義されるから、そこに直観があり、論理が崩れてしまうという恐れがあるだけである。このノートでは、この図形的定義で十分である。

### ¶ cos 関数のイメージ

最初に, cos 関数のイメージを考える. cos 関数の定義式は

$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$

である. 但し, 右辺は直交座標による.  $r$  は円の半径であるから, 定数として見てよい. 例えば,  $r = 1$  の場合を考えてみよう.  $r = 1$  の場合, 定義式により

$$\cos \theta = x$$

となる. これは何を表しているか. 式の示す通りである.  $\cos \theta$  は  $x$  の座標値に等しい. 三角形で考えれば, 半径  $r$  を斜辺とみなしたときの,  $x$  座標に等しいのである.

半径が 1 でない場合はどうだろうか. その場合, 定義式から,

$$r \cos \theta = x$$

である. 単に半径が 1 の場合の  $r$  倍になったにすぎない.

これは, 半径の  $x$  方向だけを考えたい場合に便利な道具となる. 動径はいろいろな角度に運動するだろうが, その方向全てではなく,  $x$  軸方向のみを知りたい場合, その時の動径の角度を  $\theta$  として,  $\cos \theta$  をかけねばよいのだ.

長さ  $r$  をもつ動径が, 角度  $\theta$  の位置にあるとき, その時の  $x$  座標は  $x = r \cos \theta$  で計算できる. 半径  $r$  に  $\cos \theta$  をかけると  $x$  座標が分かるのである.

これはまた, 動径の  $x$  方向の長さを示しているとみても同じことである.

### ¶ sin 関数のイメージ

sin 関数も, cos 関数と同じように考えられる. sin 関数の定義は

$$\sin \theta = \frac{y}{r}$$

である. 半径  $r = 1$  の場合, それは動径の  $y$  座標を示す.  $r \neq 1$  の場合は,

$$r \sin \theta = y$$

である. これは動径の  $y$  座標に他ならない. 動径の  $x$  座標を知りたい場合は, 半径に  $\cos \theta$  をかけねばよいのと同様に, 動径の  $y$  座標を知りたい場合は,  $\sin \theta$  を半径  $r$  にかけねばよい.

長さ  $r$  をもつ動径が, 角度  $\theta$  の位置にあるとき, その時の  $y$  座標は  $y = r \sin \theta$  で計算できる. 半径  $r$  に  $\sin \theta$  をかけると  $y$  座標が分かるのである.

これはまた, 動径の  $y$  方向の長さを示しているとみても同じことである.

¶ tan 関数のイメージ

では、tan 関数は同イメージされるのだろう。tan 関数の定義は

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

である。定義そのものを見れば、答えは意外に簡単だ。動径の傾きを表しているのである。これは定義式から明らかだ。動径の一端は常に座標のある一点から動かない。今のは、考えやすいように、座標原点に一端を固定している。だから、

$$\frac{y}{x} = \frac{y - 0}{x - 0}$$

と見ることができる。動径の回転中心が座標原点ではなく、 $(x_0, y_0)$  の場合は

$$\frac{y - y_0}{x - x_0}$$

である。どちらの場合も、

$$\frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}}$$

と見ることができる。

$\tan$  は、動径を一次関数と見立てた時の、変化の割合を示す量と見ることができる。

#### 43.2.4.4 三角関数の性質

三角関数には公式がいろいろとある。ここでいくつかを確認しておこう。

まず、三平方の定理から、

三角関数の公式

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad (43.15)$$

が成立する。

¶ 説明

簡単に説明する。直交座標において、

$$x^2 + y^2 = r^2$$

が成立する。さて、この  $x, y$  は三角関数の定義から、

$$x = r \cos \theta \quad , \quad y = r \sin \theta$$

である。つまり、

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \\ (r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 &= r^2 \\ r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta &= r^2. \end{aligned}$$

$r \neq 0$  だから  $r^2 \neq 0$  であり、 $r^2$  で割ると、

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

が導かれる。



# 44

## 三角関数

### 44.1 三角関数の公式

#### 44.1.1 加法定理

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta. \quad (44.1)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta. \quad (44.2)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta. \quad (44.3)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta. \quad (44.4)$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}. \quad (44.5)$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}. \quad (44.6)$$

### 44.1.2 倍角公式

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \beta. \quad (44.7)$$

$$\begin{aligned} \tan 2\alpha &= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \cdot \cos 2\alpha \\ &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{aligned} \quad (44.8)$$

$$= 2 \cos^2 \alpha - 1 \quad (44.9)$$

$$= 1 - 2 \sin^2 \alpha. \quad (44.10)$$

### 44.1.3 三倍角公式

$$\sin 3\alpha = -4 \sin^3 \alpha + 3 \sin \alpha \quad (44.11)$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \quad (44.12)$$

### 44.1.4 半角公式

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}. \quad (44.13)$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}. \quad (44.14)$$

$$\tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}. \quad (44.15)$$

### 44.1.5 積和公式

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}. \quad (44.16)$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}. \quad (44.17)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)}{2}. \quad (44.18)$$

## 44.1.6 和積公式

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}. \quad (44.19)$$

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}. \quad (44.20)$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}. \quad (44.21)$$

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}. \quad (44.22)$$



# 45

## 微分積分学

### 45.1 極限

45.1.1 数列とは

45.1.2 等差数列

45.1.3 等比数列

45.1.4 等比級数

45.1.5 無限等比級数

45.1.6 数列の極限 – 「限りなく 0 に近づける」とは –

微分の定義で、 $\Delta x$  を「0 に近づける」という表現を用いる。しかし、この“近づける”という表現は、どうにも、曖昧である。“近づける”とはいうものの、その近づける方法がよく分からないし、また、どの程度まで近づけられるかもはつきりとしない。そもそも、「近づけられるのか」という不安もある。そこで、ここでは“近づける”という作業とはどのようにすべきかを考える。まず、具体例で考えよう。例と

して、0の“次に”大きい数を考えてみよう。自然数で考えるならば、これは1である。しかし、今考えているのは、実数の範囲だから、1ではありえない。それでは、0.1か。いや、もっと小さい数の0.01がある。いやいや、0.001, 0.0001, といくらでも考えられる。この問いには、具体的に数を提示して、解答することはできない。それでは、「0の次に大きい数」は存在しないのか。0よりも少しでも大きい数は存在するが、「0の次」となると、答えられなくなってしまう。この問い自体が、無意味な問い合わせだからである。では、なぜこのようなことを考えたかといえば、0の次に大きい数を考えるときに、その答えとなる数として、1, 0.1, 0.01, … と0にだんだんと“近づいて”いったからである。「近づける」という作業をしたのだ。これを、文字を用いて表現できれば、「近づける」ということを、もっと納得の行く形で受け入れることができよう。今の手順を、もう一度詳しく、考え方直そう。最初に、0に近い数として、1を考えた。今回は、1を考えたが、実際は0.5でも、0.3でも、その他の数でも、よかったです。とりあえず、考察に先立って、基準となる数を挙げただけである。そして次に最初に挙げた数よりも、より小さい数を考えた。今回は1に対して0.1を挙げたが、最初に挙げた数の0よりも近い値であれば、どのような数でもよい。そして、さらに0に近い値、もっと0に近い値へと徐々に0に近づけていった。この作業は無制限に続き、終わりがないが、これを自動的に行わせるように、文字で表現できれば、目標を達成できる。今の例とその解答手順を、もう少し一般的に扱うために、文字で表現してみよう。0に近い数として最初に挙げる数を $a_0$ としよう。そして、0と $a_0$ の値との差 $|a_0 - 0|$ を考え、これよりもさらに小さい数が存在するとき、そのような数を $a_1(<|a_0 - 0|)$ とおこう。これを繰り返すと、 $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ のような数列が得られる。この数列を $\{a_n\}$ と表現すれば、 $n$ が大きくなるに伴い、数列 $\{a_n\}$ は0に近づいていくと言える。あとは、この作業を式で表現することを考えるのみだ。自然数 $n$ が大きくなるということは、「ある任意の自然数 $n_0$ に対して、 $n > n_0$ となるような自然数 $n$ が存在する」ということである。例えば、任意の自然数を、 $n_0 = 100$ としてみよう。この100に対して、大きい自然数は例えれば200がある。そうなれば、 $n_0 = 200$ と書き換えて、これより大きい数500を考えられる。さらに $n_0 = 500$ と書き換えて、…のように考えていけば、いくらでも大きな自然数を得ることができる。そして、 $n$ の増加に伴い、 $a_n$ と0との差が小さくなるので、その差を $\varepsilon(>0)$ と表現すれば、目標とする式表現として、次のように書ける。

限りなく 0 に近づける

任意の正の数  $\varepsilon$  に対して、自然数  $n_0$  を決めることができ、

$$n > n_0 \Rightarrow |a_n - 0| < \varepsilon \quad (45.1)$$

が成立するならば、数列  $a_n$  は 0 に限りなく近づくと言える。

このとき、これをもっと読みやすく簡略化した式として、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = 0 \quad (45.2)$$

と表現する。

今回挙げた例の、この  $\varepsilon$  に対応するのが、1 である。この 1 対応して  $n_0 = 1$  と決まる。そして、 $n_0 = 1$  に対して、これより大きい自然数  $n = 2$  を与えることができる。 $n = 2$  としたときに、 $|a_2 - 0| < 1$  となるような数  $a_2$  が存在すれば、 $\varepsilon$  として [1 より小さい値] が存在するとして、 $\varepsilon$  がその値で書き換えられる。今回の例では 0.1 である。また、 $n_0 = 2$  とも書き換えられる。これで一巡したが、同様に、 $n_0 = 2$  のとき、これよりも大きい自然数  $n = 3$  を与えることができ、 $|a_3 - 0| < 0.1$  となるような数が存在すれば、 $\varepsilon$  をその数に書き換える。今回の例では 0.01 である。そして、 $n_0 = 3$  とも書き換える。 $n_0 = 3$  に対して  $n = 4$  が存在し、… 以下同様。

このような作業を無制限に続けることができるとき、0 に近づけることができるということであり、また、「限りなく 0 に近づける」という行為でもある。そして、この式によって、「限りなく 0 に近づける」という行為が、いわば“自動的”に行。「近づける」という行動を起こさなくても、極限を定義することができた。

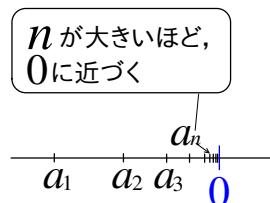


図 45.1 数列の極限

また、上の例では 0 に近づけるということを考えたが、任意の実数に近づけるという作業も同じように考えられる。その場合、近づけたい数を  $\alpha$  とするならば、次の

ように表現を拡張できる。

限りなく実数  $\alpha$  に近づける

任意の正の数  $\varepsilon$  に対して、自然数  $n_0$  を決めることができ、

$$n > n_0 \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon \quad (45.3)$$

が成立するならば、数列  $a_n$  は  $\alpha$  に限りなく近づくと言える。

このとき、これをもっと読みやすく簡略化した式として、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = \alpha \quad (45.4)$$

と表現する。

見ての通り、先ほどの式の 0 を  $\alpha$  で置き換えただけである。ちなみに、このような  $\alpha$  が存在するとき、数列  $\{a_n\}$  は  $\alpha$  に収束するという。また、 $\alpha$  のことを数列  $\{a_n\}$  の極限という。感覚的にいってしまえば、数列の項の番号  $n$  が大きくなるとともに、項の値が極限値に近づくということである。

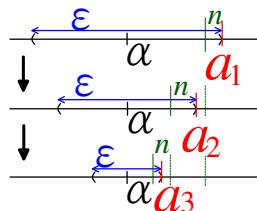


図 45.2 数列の極限 2

最初に  $\varepsilon$  を設定するのは、自然数  $n_0$  を必ず決定できるようにするためである。自然数  $n_0$  を決定したとしても、 $\varepsilon$  は全く定まらない。先に  $\varepsilon$  を決定しておけば、その範囲に含まれる自然数があるはずであり、この内のどれかが  $n_0$  であるとして、極限の定義ができる。

この定義の最大の利点は、複数の数列の極限値に関する、加減乗除の定理を証明できる点にある。例えば、2つの数列  $\{a_n\}$  と  $\{b_n\}$  があるとき、次のような数列を

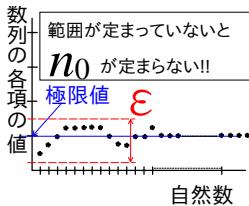


図 45.3 数列の極限 3

作ってみよう.

$$\{a_n + b_n\} = a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \dots, a_n + b_n, \dots$$

この数列の極限はどうなるだろうか. これは簡単で, 2つの数列  $\{a_n\}$  と  $\{b_n\}$  の極限がそれぞれ,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} &= \alpha \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \{b_n\} &= \beta\end{aligned}$$

であるとき, 数列  $\{a_n + b_n\}$  の極限は,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n + b_n\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} + \lim_{n \rightarrow \infty} \{b_n\} \\ &= \alpha + \beta\end{aligned}$$

となる. これを証明するには, 「近づける」という表現で極限を説明しただけでは論理的に不可能である. 極限を式で定義することで, この定義に基づいて, 上の公式を証明することが可能になる.

#### 45.1.7 関数の極限 – $\varepsilon - \delta$ 論法 –

数列の極限を考えたついでに, 関数の極限も考える. 考える関数の性質として, 全ての点で連続で, 全ての点で微分可能な関数を考える. 関数が連続であるとは, 関数に切れ目がないことである. 微分可能であるというのは, 全ての点がなめらかにつながっているということである.

1変数関数について考える. 変数  $x$  をもつ関数  $f(x)$  において, ある任意の定点  $x_0$  を関数  $f(x)$  に代入する. このとき, 関数が  $f(x_0) = A$  であったとする. つまり, 関数  $f(x)$  は, 点  $x_0$  で,  $A$  という値をとると仮定しよう.

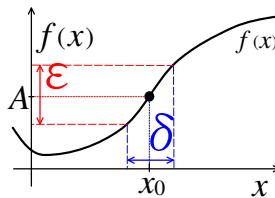


図 45.4 関数の極限

この場合、関数の極限として、1変数関数  $f(x)$ において、「変数  $x$  を限りなく  $x_0$  に近づけると、関数  $f(x)$  の値は、 $A$  に近づく。」と言える。しかし、これはとても曖昧な表現である。数列の極限で考えたときと同じように、この「近づける」という行為を、式で表現することにしよう。

変数  $x$  を定点  $x_0$  に近づけると、関数  $f(x_0)$  は  $A$  に近づくが、 $A$  とは一致しない。つまり、変数  $x$  を定点  $x_0$  に近づけているときには、 $A$  とは若干異なった値の  $A + \epsilon$  を示す。ここに、 $\epsilon$  は任意の正の定数である。 $\epsilon$  のイメージは、とても小さな値をもつ定数である。

さて最初に関数  $f(x)$  に対して、 $\epsilon$  を決めるとき、これに対応して、変数  $x$  の範囲も決まる。その  $x$  の範囲を  $\delta$  と書こう。しかし、この  $\delta$  が分かったとき、さらに関数  $f(x)$  が  $A$  に近づくような範囲  $\epsilon$  を与えなおすことができる。そうすれば、この  $\epsilon$  の変更に伴って、 $x$  の範囲  $\delta$  も変わる。そうなれば、変更された  $\delta$  に対して、さらに  $f(x)$  が  $A$  に近づくような範囲に …。これは無制限に続けることができ、最終的には、関数の極限として、 $x$  を  $x_0$  に近づけたときに、 $A$  の値を得る、ということになる。

このように、最初の一回だけ  $\epsilon$  を指定するだけで、あとは無制限に自動的に、関数の極限値を得られる。以上をもう少し詳しく記述し、式で表現して見よう。

関数  $f(x)$  において、変数  $x$  を  $x_0$  に近づけるが、 $x_0$  に一致させないようにするとき、 $|x - x_0|$  はある正の値  $\delta$  をもつ。この  $\delta$  のイメージは、 $x_0$  を含むような、変数  $x$  の微小な区間である。そして、関数  $f(x)$  には、この微小区間  $\delta$  に対応して、 $|f(x) - A|$  という正の値  $\epsilon$  という値域をもつことになる。 $f(x_0) = A$  であるので、 $\epsilon$  がより小さくなれば、さらに関数は  $A$  からの範囲を狭めていくことになる。関数  $f(x)$  は連続な関数なので、 $\epsilon$  をさらに小さくすることは可能である。 $\epsilon$  をさらに小さくするに伴い、 $\delta$  もさらに小さくなっていく。もちろん、 $\delta$  をいくら小さくしても、

その範囲の中には  $x_0$  が含まれている。

式で書いてみよう。まず、 $A$  からのずれの程度の指標である、 $\varepsilon$  が考えられる。そして、この  $\varepsilon$  が定まることで、 $x$  の範囲もきまり、 $\delta$  となるとき、

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \quad (45.5)$$

であるならば、関数  $f(x)$  は、変数  $x$  を定点  $x_0$  に近づけたときに、 $A$  に収束すると言える。

今まででは連続関数を考えてきたが、実際は、もう少し制限を緩めることができる。というのも、関数  $f(x)$  は区間  $I$  のみで連続と定義されていればよく、また一方で、 $x$  も  $x_0$  の点で定義されていなくてもかまわない。 $f(x_0)$  が定義されていなくても、 $x$  は単に  $x_0$  に近づけるだけであり、一致させるわけではないので、不都合は生じない。

最初に  $\varepsilon$  の存在を確認したのは、このためである。もし  $\delta$  の存在を先に認めてしまうと、もしかしたら、関数が定義されないような範囲を選んでしまう可能性がある。そうなれば、上の式は、その関数が定義されていない点に差し掛かったとき、極限が存在しないという結論を出してしまう。

## 45.2 積分

### 45.2.1 長方形の面積公式に対する疑問

積分は面積と深くかかわりがある。そこで、ここで改めて、面積とは何かを考えてみる。

目標は任意の一変数関数  $f(x)$  の積分を定義することだ。以下、変数  $x$  は  $f(x)$  の独立変数であり、実数であるとする。

面積といえば、最も基本的な面積公式として、長方形の面積の公式

$$\text{縦} \times \text{横}$$

がある。

長方形の面積というものを、小学校でどのように教わったか忘れてしまったが、おそらく、天下り的に教わったのではないかと思う。しかし、強引に押し付けられたこの式を、単純に鵜呑みにするには少々抵抗がある。そこで次節から、改めて長方形の面積はなぜ「縦の長さ}  $\times$  横の長さ」なのかを、できるだけ、合理的に説明してみよう。

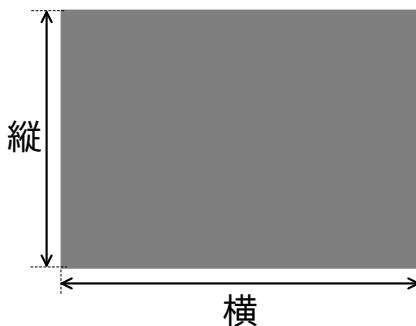


図 45.5 長方形の面積

#### 45.2.2 長さとは何か

まず、長さという概念を考えないといけない。これは何も難しく考えることない。なぜなら、私たちは定規を使って長さを測るという行為をすでに会得しているからである。少し畏まった形で、説明してみよう。

長さは、数直線状の2点の間の距離として捉えれば良い。

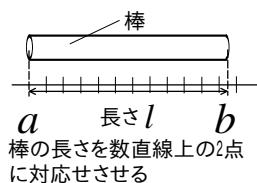


図 45.6 棒の長さと数直線

棒の長さ  $l$  を考えるなら、棒を数直線に並べて置いて、棒の両端に対応する数直線上の2点  $a, b$  ( $a < b$  となるように置く) から、

$$l = b - a$$

とすれば、長さを数で表せる。

さらによく言えば、棒を置く位置はどこでもよいから<sup>1)</sup>、棒の一端を数直線上の原点、つまり、数値 0 に対応するようにして、さらに、もう一端を正の数値  $x (> 0)$  に対応するように置ける。

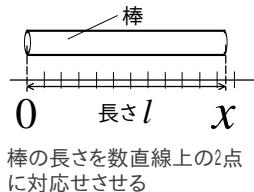


図 45.7 棒の長さ

すると、

$$l = x - 0 = x$$

となる。 $l = x$  となって、数値  $x$  がそのまま棒の長を示すことになる。

なんだか面倒な言い回しになってしまったが、要は、棒の長を測るには、棒の端に定規の 0 をあてて、もう一方の端に対応する数値  $x$  を読めば、この数値  $x$  が知りたかった棒の長さ  $l$  と同一視できるということである。単に、定規を使って棒の長さを測るという行為を、式を使って丁寧に説明しただけだ。

### 45.2.3 長方形の面積とは何か

長さは、数直線上の点により表現できることができた。では、面積はどうだろうか。たしかに、私たちは長さという概念だけではなく、平面的な広がりというものを感じ取ることができる。そして、様々な広がりの大きさを感じてもいる。例えば、土地の広さが良い例だ。土地を持っていると、国に税を払わないといけないが、この税の支払い額は所有している土地の広さに大きく影響する。当然、広い土地を持っているほど、多額の税金を国に収めないとならない。現実には、土地の面積だけで税の支払い額が決まるわけではないが、ここでは、話を単純にするため、面積のみで支払う税金の額が決まるとしよう。つまり、同じ大きさの土地を持っている者は、同額の税を払うことになる。こうなると問題になるのが、土地の大きさの測り方である。どう

<sup>1)</sup> 棒を置く位置によって、棒の長さが変わることがないという前提の上での話である。

やって、土地の広さが同じだとか、どちらが小さいとかをきめれば良いのだろうか。もし、正確に表すことができなければ、例えば、同じくらいの広さの土地を持つものが二人いたとして、支払う税額が両者で異なるれば、争いが起こることは必至である。幸いにも、この問題を解決するすべを、すでに私たちは持っている。面積という概念が、その解決の鍵だ。ある決まった広さを基準として、その何倍かで広さを表すのである。これにより、広さを数量的に比較することができる<sup>2)</sup>。

長さが数直線状の2点で表すことができたなら、面積も同じように考えることができないだろうか。全く同じように考えることはできないが、この考え方を真似ることはできる。数直線を2つ使うのである。

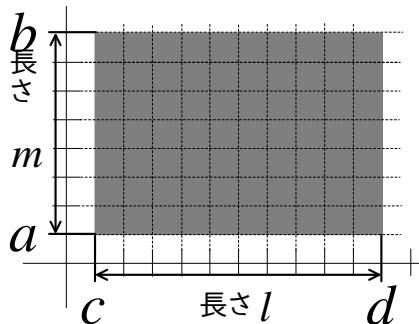


図 45.8 面積

2つの数直線を用意し<sup>3)</sup>、直角に交わるようにする。このような行為を、2つの直線を直交させるといい、また、この2つの直線は直交しているという。考えやすいように、両数直線とともに、原点で直交させよう。

2つの数直線が直交している部分の近くに、長方形を置く。置き方はいろいろ考えられるが、長方形の辺が用意した数直線に平行になるようにしよう。すると、各辺の頂点を数直線上の数値に対応するようになる。つまり、辺の長さが数によって表現できるのである。

<sup>2)</sup> 実際には、面積の測定方法はどうするかといった問題がある。同じ土地の面積を測るのに、毎回異なる結果を出すような測定方法ではダメだ。かなり深刻な問題だけど、ここで無視しよう。

<sup>3)</sup> この2つの数直線の目盛の間隔の長さは、実のところ異なっていてもよいが、ここでは考えやすいように、目盛の間隔は同じであるとしよう。

長方形のもつ辺はの数は、縦 2 本と横 2 本で、合わせて 4 つだが、縦と横の 2 本づつの辺の長さは同じである。つまり、長方形の形を明確にするには、縦 1 個と横 1 個の 2 つの辺の長さが分かれば良い。縦の長さを  $m$ 、横の長さを  $l$  とおく。縦の長さ  $m$  は、辺の頂点が数直線上の  $a, b$  に対応しているとき ( $a < b$  となるようにする)，

$$m = b - a$$

である。横方向の長さについても同じように考えて ( $c < d$  となるようにする)，

$$l = d - c.$$

長方形の面積はこの 2 つの長さ  $l, m$  によって、確定する。長方形の面積を表す記号を、 $S_{\text{長方形}}$  としたとき、 $S_{\text{長方形}}$  は  $l$  と  $m$  を用いて、

$$S_{\text{長方形}} = l \times m$$

と定義される。これは数直線上の数値  $a, b, c, d$  で表せば、

$$S_{\text{長方形}} = l \times m = (d - c) \times (b - a)$$

となり、ひとつの数値に確定する。

面積とは、2 つの独立した数直線上にある、それぞれの区間の長さ  $l, m$  によって特徴付けられるものである。小学校では、「長方形の面積は縦 × 横である」と押し付けられるように教わったが、縦や横とはなんのことかはそれほど明確には説明されていなかった。ここでは、縦と横を直交する 2 つの数直線であるように、置き換えることで明確にすることができた。

しかし、面積は、なぜ、乗算で定義されているのだろうか。加算で定義してもよさそうではないか。また、少々おかしいかもしないが、減算や除算でも、論理的に矛盾することのないように、面積を定義することもできるのではないか。もしかしたら、予想通り<sup>4)</sup>、乗算以外でも定義可能かもしれない。しかし、広さを数で表すに最も直感と合うものは、掛け算である。例えば、横の長さが 1だけ増えるとしても、長方形には縦の長さもあるから、その分だけ余計に面積が増える。式で書けば、もともと面積が  $S_{\text{長方形}} = l \times m$  であった場合に、 $l$  が 1 増えるとで、

$$S_{\text{長方形}} = (l + 1) \times m = l \times m + m$$

---

<sup>4)</sup> 確かめてないからわかりません。もしかしたら、簡単に否定されてしまうかもしれない。

となって、たとえ  $l$  が 1 しか増えなかつとしても、面積は  $m$  だけ増えることになるのである。縦横にぎっしりと詰めたタイルを、さらに横にその数を増やすときには、縦の枚数分だけのタイルが必要になるのである。乗算による定義はこのイメージと一致するのだ。

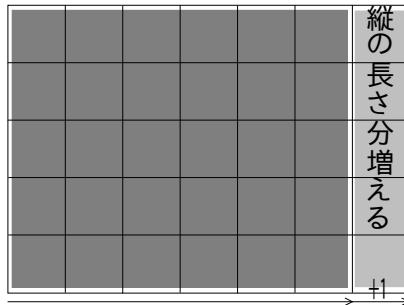


図 45.9 面積はなぜ掛け算で定義されるか

#### # memo No.112: 一般的な形の面積

ちょっと関係ないことになるが、ついでに任意の図形の面積について考えてみよう。

たしか、小学校では、一般的な形の面積を測る方法として、基準となる面積が 1 のタイルを持ってきて、その任意の形にを覆うのにひとつずつタイルの枚数を数える、ということをしたはず。この考え方は、とても大切な考え方である。とても素朴で、それこそ、小学生でも理解できるのだけど、すごく重要なことを含んでいる。

もちろん、ここで用意したタイルは同じ形のものなので、任意の形をした図形に対してぴったりと覆うことはできず、足りない部分や、はみ出してしまう部分も生じる。小学校では、「だいたいこのくらい」で終わってしまつただろうが、この考え方をもう一段階進めてみると、任意の形をした図形の面積を正確に表現できるようになる。その一段階は案外に低い。とても小さいタイルを用意すれば良いのである。タイルが小さいほど、隙間を詰めやすくなり、タイルの覆う面積が本来の任意の図形の面積に近づく。

この考え方、微分積分学の心に直結する大切な精神を含んでいるので、もう一度、繰り返しておこう。直感的に分かりきっていることだけど、大変大切な考え方である。

任意の大きさの長方形を 1 つ用意して、この 1 つを複製する。用意した長方形の面積は、すでに知っているとする。それで、複製した長方形を、面積を知りたい図形の内側に、できる限



図 45.10 面積

り稠密<sup>5)</sup> になるように並べる。そして、任意の图形の面積を、並べたすべての長方形の面積の合計で近似するのである。もちろん、隙間の文だけの誤差は生じる。この誤差が気になるようだったら、はじめに用意する任意の大きさの長方形をより小さいものにすれば、それだけ隙間を埋めることができ、その誤差を小さくできる。

ここで、誤差を「小さく」できると言ってしまった。この言い方では、どれだけ誤差を小さくできるのかが不明確で、曖昧さを含んでしまう。この曖昧さを解消するために厳密には、 $\varepsilon - \delta$  論法を使うのであるが、物理学を学ぶ上では、このような厳密さにはそんなにこだわる必要はないので、ここでは少々細かいことには目をつぶって、先に話を進めていこう<sup>6)</sup>。

#### # memo No.113: 「直角」とは何か

2つの直線が「直交する」ということは、その2つの直線が直角に交わっていることであると、上に記述した。では、「直角」とはなんだろうか。交わる角度が  $\pi/2$ （度数表記では  $90^\circ$ ）である場合に、直角に交わっていると表現する。この説明に従うと、 $\pi/2$  は円の一一周する角度  $2\pi$  の  $1/4$  だから、その円の2つの直径が円を4等分する角度で交わっている、と言うことになる。何が4等分なのかといえば、それは円の面積に他ならない。

となると、直角を説明するより先に、面積について説明すべきである。しかし、上に説明した考え方には、円の面積を知るには、無限に小さな長方形でその円を覆わないとならない。そして、ひとつの長方形の面積は、上の記述<sup>7)</sup>によれば、直交する2つの直線という概念を元に、説明されるものである。

さて、語彙の説明の循環に気づいただろうか。直角を説明する前に、面積について説明しようとしたのだけど、その面積の説明をするのに、直角という考え方を使ってしまったのである。つまり、この説明では、面積と直角の両方の語彙について、説明がなされていないということ

<sup>5)</sup> 稠密：隙間なく、ぎっしりと詰まっている様子を、稠密 であるという。ここで使った「できる限り稠密」の意味は、本来の「稠密」の意味からずれているが、隙間の面積が最小になるようにという意味で、「できる限り稠密」という表現を使った。

<sup>6)</sup> ただし、もちろん、一度も厳密に考えないというはよくない。暇なときに、物理学を学ぶのに飽きたときに、数学の教科書を読んでおくべきだ。ここで厳密さを無視したのは、あくまでも物理学を行う上では無視しても支障がないからであり、重要でないからということではない。

<sup>7)</sup> 45.2.3節参照。

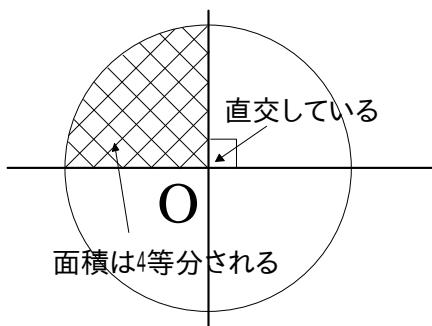


図 45.11 円の面積と直交する 2 つの直線

である。

では、上の説明のどこに間違いがあったのか。答えは簡単だ。「直角に交わる」ということを、視覚的な直感に頼ってしまったことである。なぜだか知らないが、人間の目には、「直角」が他の角度よりも特別な角度であると、感じてしまう。この感覚が、このような間違いを起こしたと考えてよいだろう。つまり、より大げさに言うなら、図形の性質の視覚に頼った説明は、論理に矛盾を生じやすいということである。

そうなると、どう正せばよいかということに関心が向かうが、一番手っ取り早い方法が、後に説明することになる、ベクトルの内積・外積という概念を使うことである。どういう事かといえば、「ある条件式<sup>8)</sup>」が成り立つとき、そして、その場合に限り、2つの直線は直交しているという」といった、説明になるのだ。

言いたかったことは、上記の説明には、矛盾点が含まれるということであり、この点に注意してほしい、ということである。直感的に説明しようとしたばかりに、このような矛盾した記述を行ってしまった。さらに白状すれば、このノートでは、多かれ少なかれ、この種の矛盾した説明を行ってしまうこととなる。しかし、このような矛盾した説明は、物理学を直感的に説明しようとする場合には、回避ができないと思われる<sup>9)</sup>なので、このノートを読む場合には、少々矛盾した説明にめをつむっていてもらいたい。また、矛盾しているか否か意識しなが

<sup>8)</sup> 先走って、書いておくと、2つのベクトル  $a, b$  があるとき（ただし、 $a, b$  ともに零ベクトルでないとする）、 $a \cdot b = 0$  であるならば、 $a$  と  $b$  は直交しているという。「ベクトル」という単語を、「直線」と置き換えることで、2つの直線が直交する条件を得ることができる。

詳細は、47.2.3節（774ページ）、47.2.4節（775ページ）、47.2.6節（777ページ）、47.2.7節（778ページ）を参照。

<sup>9)</sup> 少なくとも、私には、物理学を論理的に矛盾なく説明するだけの力はないし、それがこのノートの目的ではない。このノートの目的の一つは、自然界の現象を物理学を通して、ごく直感的にみることである。

ら、読み進めてもらいたい。

#### 45.2.4 関数と、図形の面積

長方形の面積について、改めて考え直した。そして、一般の図形の面積の求め方の考え方を紹介した。そして、いよいよ、次に積分の定義にとりかかるのであるが、いきなり定義を紹介したところで、意味不明で消化不良を起こしかねない。なので、少しずつ段階を踏んで、帰納的<sup>10)</sup>に積分の定義について考える。

目標は、一般の図形の面積が計算できるようになること、である。しかし、いきなり一般の図形を考えることは難しいので<sup>11)</sup>、まずは、以下のような状況を考える。一般の図形の面積を考えるには、図 45.12 のように考えると良い。

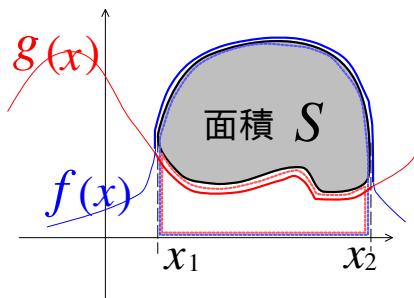


図 45.12  $S$  は関数  $f(x)$  と  $g(x)$  の間の面積とみなせる

まず、面積を知りたい図形があり、その面積が仮に計算可能であったとして、その面積を  $S$  としよう。面積  $S$  を知る方法として、まず、図形の縁<sup>12)</sup>に着目する。どうするかというと、この図形の縁を上下に分けて見るのである。そして、上方の縁が属する関数  $f(x)$  を仮想的に用意する。下方についても同じように、関数  $g(x)$  を用

▶ 10) 帰納的：具体例から一般的に通用する表現を得ることを、「帰納的」な手段で、一般規則を得る」などという。学問は、主として、帰納的な考え方によって理論が組み立てられる。なぜなら、世の中には具体例しか存在しないからである。具体例の共通点を洗い出して、より一般に通用する規則を見つけるのである。それが数学では公理であったり、物理学では法則と言われたりするものである。

▶ 11) 少なくとも、私にとっては、難しいです。

▶ 12) 縁：「ふち」と読んでください。「えん」ではありません。図形の周囲を囲む縁のことと言っているんです。

意しよう。図形の縁の上下の端は、両方共に、 $x_1, x_2$ （ただし、 $x_1 < x_2$  とする）である。そして、次の計算を行う。

- (1) 関数  $f(x)$  と  $x$  軸の間（縦方向）の面積を、 $x_1$  から  $x_2$  の間（横方向）で計算し、その値を  $S_f$  とおく
- (2) 関数  $g(x)$  と  $x$  軸の間（縦方向）の面積を、 $x_1$  から  $x_2$  の間（横方向）で計算し、その値を  $S_g$  とおく
- (3)  $S = S_f - S_g$  により、求めたい面積  $S$  を得る

この方法により、一般的な図形の面積を求めることができる。ただし、関数  $f(x)$  や  $g(x)$  が存在する場合のみに限られてしまうのだが<sup>13)</sup>。

次節より、このような図形の面積の計算の仕方を学習する。まずは、関数  $f(x)$  と  $x$  軸との間の面積を考える。これがわかれば、 $g(x)$  に対しても全く同じだから、 $S = S_f - S_g$  が計算できるようになる。

#### # memo No.114: 一般的な図形の例

上のような考え方でできない図形をひとつ紹介しておこう。図 45.13 を参照。

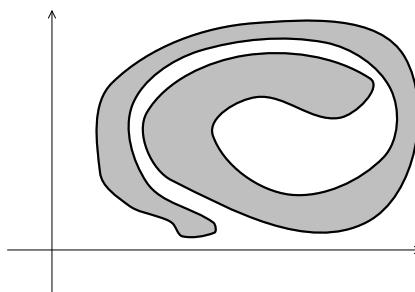


図 45.13 関数  $f(x)$  と  $x$  軸の間の面積

これでは、図形の縁の上半分の関数  $f(x)$  や下半分の関数  $g(x)$  など、どう考えても作ることはできない。

残念ながら、これらの図形の面積をどう扱うかについては、このノートでは考えない。これ

<sup>13)</sup> この意味で、「一般的」と言ってしまうのは、少々誇張である。

以上の深入りはしたくない。物理学で使うのは、関数の作る面積が重要なのであり、一般的な図形の面積まで考える必要はない<sup>14)</sup>。

#### 45.2.5 「関数 $f(x)$ と $x$ 軸の間の面積」とは

最終的な目的は、「関数  $f(x)$  と  $x$  軸の間の面積を計算すること」である。イメージは図 45.14 のようなものである。

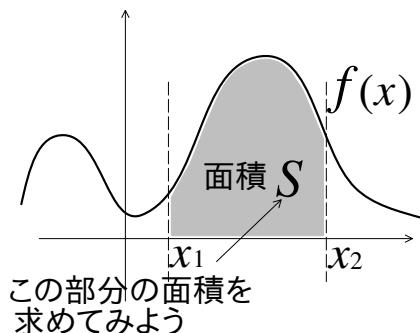


図 45.14 関数  $f(x)$  と  $x$  軸の間の面積

#### 45.2.6 関数 $f(x)$ に与える条件

今まででは、何の断りもなしに、「関数  $f(x)$ 」と書いてきた。しかし、実は、これから考える関数  $f(x)$  には、ある条件をみたしている必要がある。それは、「連続」であり、かつ、「微分可能」である関数」というものだ。しかし、ここでは、「連続」だとか「微分可能」だとかの専門用語をまだ説明していないので、この条件はとりあえず、考えなくてよい。これらの用語については、微分を学習するときに説明する。それで、関数  $f(x)$  については、今しばらくの間、一次関数とか二次関数、三角関数、指數関数を指しているというように思っていてもらいたい。

<sup>14)</sup> もしかしたら、使わなければならないかも知れないが、今のところは必要としない。ただし、面白い問題があるので、次の教科書を読むことを勧める。

(教科書) 志賀 浩二 [著] , 「数学 30 講シリーズ - 解析入門 30 講」, 朝倉書店, 1988(初版)

### 45.2.7 変数 $x$ のとりうる値の制限

関数  $f(x)$  は、一般的に考えれば、 $x$  軸全体に定義される。しかし、これは面積を考える場合には不都合なことである。というのも、 $x$  の範囲を指定してやらないと、面積を計算できないのである。そこで、この  $x$  のとりうる値を制限してやって、その制限した区間における  $f(x)$  の面積を考えることにする。このような考え方で面積を計算する手法のことを、定積分 という<sup>15)</sup>。定積分を定義することが、この章の最終的な目標である。

### 45.2.8 「近似的な面積」という考え方

**コメント** では、積分の定義を説明していこう。とは言っても、一般的に、関数は色々とクネクネしていて、直接的に面積を計算することは不可能である。そこで、次のような考え方を使う。近似的な面積の値を計算するのである。

近似的な面積を計算方法の説明に入ろう。どうするかというと、まず、 $x$  軸をある有限個の区間に区切る。この区間の個数は何個でもいい<sup>16)</sup>。なので、個数を  $N$  個としよう。この区間の分割は、長さを当分にしなくても良い。そうすると、 $x$  軸のそれぞれの区間には、ある長さが各々対応しているはずである。なので、それらの長さを、右端から、 $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_N$  と書くことにする。区間の長さが等分であるという条件はないから、一般には  $\Delta x_1 \neq \Delta x_2$  である<sup>17)</sup>。

$x$  軸を  $N$  個に分割したので、 $N$  個の区間ができたわけだ。この  $N$  個の区間でそれぞれ、代表点を一つ決める。代表点の決め方には任意である。これらの代表点を決めると、その代表点に対する関数の値も定まる。代表点を  $x_1, x_2, \dots, x_N$  と書こう。以下、番号  $i$  を使い、 $x_i$  まとめて、略記する。図 45.15 参照。

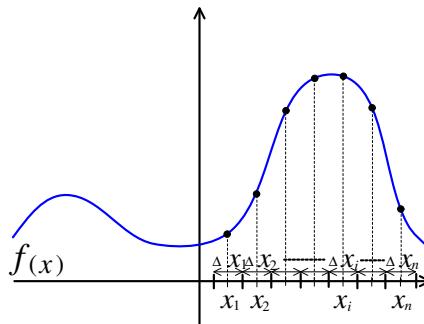
第一の区間である  $\Delta x_1$  の部分に注目しよう。この区間をみると、この区間で関数の値が仮に一定値を取るとすれば<sup>18)</sup>、横  $\Delta x_1$ 、縦  $f(x_1)$  の長方形が一つ作れ

▶ 15) なぜ、わざわざ、「積分」に「定」という文字を付けるのかといえば、あとで、不定積分 といわれる計算手法を紹介するからである。不定積分は、微分の逆演算として知られるものだ。後ほど、詳しく説明しよう。

▶ 16) 有限個であることを忘れないでね。ちなみに、後で、この個数  $N$  を無限大にもっていきます。無限大に持っていくことで、近似値を真の値にさせることができるんだ。

▶ 17) もちろん、“たまたま長さが同じになってしましました”ということもある。だけど、長さが同じだろうが異なっていようが、最終的には関係の無いことなので、無視してしまおう。

▶ 18) ひとつの区間で関数が一定値をとるなんていう仮定は、強引すぎるかもしれない。しかし、ここは

図 45.15 区間を  $N$  個に分割

る<sup>19)</sup>. 図 45.16 参照. 同様に, 横  $\Delta x_2$ , 縦  $f(x_2)$  の長方形も一つ作れる. 同じように  $N$  個のすべての区間にに対して長方形を考えられる. それらは, 横  $\Delta x_i$  と縦  $f(x_i)$  の長方形の面積  $\Delta x_i f(x_i)$  である. ここで作った長方形の面積を足しあわせて, その値を  $S_N$  とした場合,

$$S_N = \sum_{i=1}^N \Delta x_i f(x_i) = \Delta x_1 f(x_1) + \Delta x_2 f(x_2) + \cdots + \Delta x_N f(x_N)$$

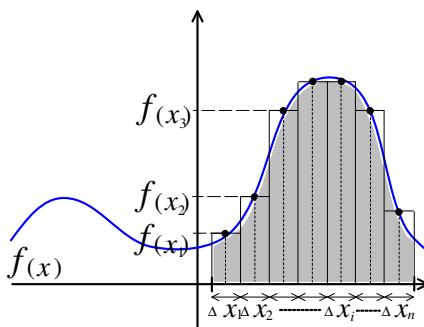
と計算される.

なんでこんな長方形を考えて, それらを加え合わせて  $S_N$  を求めたかというと,  $S_N$  が, 今求めるべき「関数  $f(x)$  と  $x$  軸の間の面積」の近似値として, 使えるからである. 図 45.16 参照.

---

我慢して, 先へ読み進めてほしい. すぐに, この強引さは解消されることと思う. ここでは, あくまでも, 面積の近似値をどう考えるかを説明するだけであり, 近似するという意味では, そんなに強引な仮定ではないだろう.

<sup>19)</sup> 以降では, 「横の長さ」と記述すべきところを, 単に, 「横」と記述する. 「縦の長さ」についても, 単に, 「縦」と記述する. 煩わしさを無くすためである. 単なる縦・横いう言葉との区別は文脈で判別できるので, 省略した表現をする.

図 45.16 関数  $f(x)$  と  $x$  軸の間の面積

# memo No.115: 和の記号  $\sum$

$\sum$  は総和の記号である。“シグマ”と読む。 $\sum_{i=1}^N f(x_i)\Delta x_i$  は以下の式の略記である。

$$\sum_{i=1}^N f(x_i)\Delta x_i = f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \cdots + f(x_{N-1})\Delta x_{N-1} + f(x_N)\Delta x_N$$

# memo No.116: 番号  $i$  を用いた表現（例  $x_i$ ）

番号  $i$  を用いた表現について、説明する。というのも、私がこの表現につまずいてしまったからである<sup>20)</sup>。

この表現を導入したい理由は、例えば、上の場合で、この分割した  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_N$  と、それに対応した代表点  $x_1, x_2, \dots, x_N$  の任意の一組を表現することが多くなるから、その略記法を使いたいからである。

番号というだけに、 $i = 1, 2, 3, \dots, N$  とする。つまり、番号  $i$  は、自然数のうちどれかひとつつの数を表すもの、とするのである。この番号  $i$  を用いることで、 $x_1$  や  $x_2$ などを、ひっくるめて表現できるのである。つまり、 $x_i$  と書くことで、 $x_1, x_2, \dots, x_N$  任意の一つを表現するのである。 $x_i$  と書かれたら、それは  $x_1$  かもしれないし、 $x_2$  かもしれないが、 $x_1, x_2, \dots, x_N$

<sup>20)</sup> 私は、この表現の意味を、なかなか理解できなかった。最初は、意味がわからず、式変形を追うことしかできなかった。これを理解するのに、半年以上（1年かも）かかった記憶がある。線形代数（ベクトルと行列を扱う数学の分野）が得意なひとには、なんの苦労もなしに、理解できることなんだけど…。

の全てに対して記述したい場合に,  $x_i$  と書けば, これでことが足りるのである. はじめのうちは, 少々戸惑うかもしれないが, 慣れてしまえば, 非常に簡単で便利な表現方法であることを, 感じることと思う. この番号  $i$  を用いた表現は, 以降で, 多々出てくる. 特に, 物理学を学ぶ際には, この記述方法が当たり前のように使用される. できるだけ, 早期に慣れておくようにしたい.

### 45.2.9 面積確定の図形

近似値の取り方は二種類考えられる. 真値よりも少々大きめの値と, 小さい目の値の二つの近似である. 例えば, 1 を真値としたとき, その大きめの近似値は 1.1 で, 小さめの近似値が 0.9 といった具合である.

関数  $f(x)$  のグラフを描き, 変数  $x$  の区間を  $N$  個に分割しよう.

このひとつ 1 つの区間  $\Delta x_i$  では, 関数の値が一定であるように近似する. このような近似のとり方としては, 2 種類の方法があることが考えられる. 図 45.17 参照. 関数  $f(x)$  より少し大きい値で近似するのと, 少し小さい値で近似する方法の 2 種類である. 大きい方の近似値を  $f_{\text{大}}(x)$ , 小さい方の近似値を  $f_{\text{小}}(x)$  と表記する. そして, 各区間幅 とその区間でのしかし,  $N$  個の区間の分割をさらに細かくしていけば, この 2 種類の近似はだんだんと同じ値を示すようになる. 大きめに近似した面積を  $S_N \text{ 大}$ , 小さめに近似した面積を  $S_N \text{ 小}$  と書くと,

$$n \rightarrow \infty \text{ のとき, } S_N \text{ 大} = S_N \text{ 小}. \quad (45.6)$$

である. この関係式 (45.6) が成り立つとき, この図形は 面積確定 の図形と言われる.

### 45.2.10 積分可能

関数  $f(x)$  と  $x$  との間の面積を考え, これが面積確定である場合, 積分ができる. 積分ができるることを 積分可能 といわれる. 特に, この部分で考えている積分は, **Riemann 積分可能** という<sup>21)</sup>.

要するに, ある図形の面積の近似的な値を, 図形の分割という考え方を使って求めるとして, 大きい方の近似値と, 小さい方の近似値が考えれる. 分割数を無限大にしたとき, この 2 つの近似値が同じ値に落ち着くときに, 積分が可能なのである.

---

<sup>21)</sup> 実は, Riemann(リーマン) 積分以外にも Lebesgue(ルベーグ) 積分 という積分方法もあるが, これは高度であるので, この部分では考えない.

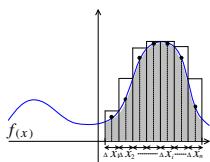
### 45.2.11 定積分の定義

**コメント** 面積の近似値から、本来の面積値を得る方法を考える。この方法こそ、定積分の定義にほかならない。

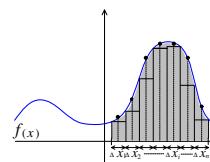
変数  $x$  のある区間  $\Delta x_i$  の両端の関数  $f(x)$  の値はほとんど差がなく一定であるとみなせる——というか、一定とあるようにみなせるように区間を分割したのだが——。そこで、区間  $\Delta x_i$  内のどの点でもよいが<sup>22)</sup>、その 1 つの点  $x_i$  をとって

$$f(x_i)\Delta x_i$$

という量を作る。



(A) 大きめの近似



(B) 小さめの近似

図 45.17 近似値の得方は 2 種類ある

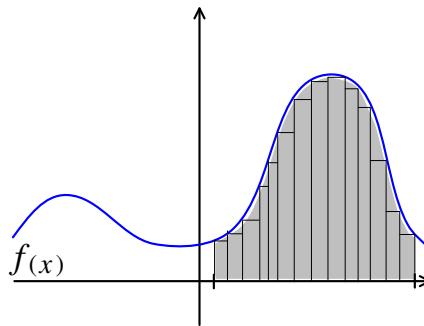
そして、 $N$  個全てについて同様に考え、それらを加え合わせる。これを  $S_N$  とおこう。

$$S_N = \sum_{i=1}^N f(x_i)\Delta x_i \quad (45.7)$$

このままでは、本当の値に近づかない。近づけるには、分割数  $N$  を増やし、区間分割を細かくする必要がある。さらに分割数を上げてみよう。図 45.18 参照。

だんだんと真値に近づく様子が、イメージできるだろう。しかしこれでも足りない。分割数  $N$  を、もっともっと大きい値にとれば、それだけ本当に求めたい関数  $f(x)$  と  $x$  軸の間の面積に近づく。けれども、いくら分割数  $N$  の値を大きな自然数に変えたとしても、有限の値で止めてしまっては、必ず誤差が生じることは明らか。

▶ 22) 要は、変数の区間  $\Delta x_i$  における  $f(x_i)$  の値がほしいのである。区間内で  $f(x)$  の値は一定値をとると仮定しているので、変数はその区間内ならばどれをとろうが、同じ結果となる。別に真中の値をとるようなことをしなくともよい。

図 45.18 分割数  $N$  を増やす

それでは、どのように考えるかというと，“分割数を無限大にもっていく”のである。こうなると、もはや「分割数」という語彙は使えない<sup>23)</sup>。

$N$  を無限大にもっていくことを、 $\lim_{N \rightarrow \infty}$  と表現する。式(45.7)の  $S_N$  を無限大にもっていく。この値を  $S_\infty$  と書くことにする。すると、

$$S_\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N f(x_i) \Delta x_i \quad (45.8)$$

となる。

分割数  $N$  を無限大にすると、それに伴って、ひとつの区間の幅  $\Delta x_i$  は無限に小さくなっていく。これを 無限小 という。 $x$  の無限小の幅ことを  $dx$  と表現する。

式(45.8)の極限の計算ができるとき、積分がこの極限として定義できる。もちろん、この極限が存在しなかったら計算はできない。 $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N$  の部分をインテグラル  $\int$ 、さらに、 $\Delta x_i$  の部分を  $dx$  と書き直して、

<sup>23)</sup> 無限大は数ではない。だから、「分割数」というように、「数」と表現することは不適切なのである。

積分の定義

$$S_\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N f(x_i) \Delta x_i := \int f(x) dx \quad (45.9)$$

この式をもって定積分を定義する。

#### # memo No.117: 「無量大」とはどういうことか

数学では、数え切れないくらい大きい数を無量大数（むりょうたいすう）とよび  $\infty$  という記号で表現する。無量大数は“どんな数よりも大きい数”とされる。しかし、無量大数は具体的な数ではなく、単なる概念である。これには少し引っかかる部分があるが、ここでは気にしないようにしてほしい。また、無量大数のことを、無限大数（むげんたいすう）とか、無限大（むげんだい）とよんでしまうことが多い。上でも、「無限大」と書いてしまっている。

無量大数という概念は数ではないことを示しておこう。確かに自然数は数え切れないくらい存在するので、無量大数という概念は存在し得るが、具体的な数で表現することはできないのである。もし無量大数なる数を表現できたと仮定して、これを  $M$  とおいてみる。従って、 $M$  は無量大数の「どのような数よりも大きい」という性質をもっている。しかし、私達は  $M+1$  という数も考えられる。明らかに  $M+1 > M$  であり、 $M$  がどんな数よりも大きいという性質に反してしまう。この推論は妥当な推論であることから、背理法の考え方に基づき、「 $M$  がどんな数よりも大きい数とおける」という仮定が間違っていたと結論される。つまり、無量大数という数を表現することはできない、ということだ。しかし、無量大数という概念の存在が否定されたわけではないことに、注意したい。以下では、無量大数という概念を（少し曖昧な感じではあるが）用いていく。それを象徴する記号として、 $\infty$  を使う。 $\infty$  はあくまで単に無限大を表すシンボルであり、これ以上の意味はもない。

#### # memo No.118: 記号 $dx$ の意味

記号  $dx$  の意味は、高校数学と異なった方法であるので注意が必要である。これは微分と言われる概念を表している。 $dx$  のイメージはとても単純で、「無限に短い長さ」である。「無限に短い」という言葉に、何か曖昧さを感じ、不安かもしれない。しかし、ここは気にせず、話を先に進めよう。気になる場合は、微積分学についての教科書を参照。岩波書店から出版されている、小平 邦彦著、『解析入門 1, 2』がとても厳密に書かれている。ちなみに、高校で習ったのは、微分係数（導関数ともいう）であり、微分とはことなる。高校では、「微分する」という、という感じで微分法を説明されている。決して、「これを微分という」とは説明されていないはず。紛らわしいけど、注意してほしい。

## 45.3 微分

### 45.3.1 変化の割合

一変数関数  $y = f(x)$  の変化の割合  $a$  を考える。関数  $f(x)$  が一次関数 ( $y = ax + b$ ) であるならば、 $a$  は簡単に求めることができて、

$$a = \frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}}$$

である<sup>24)</sup>。というか、これが変化の割合の定義である。一次関数上の異なる 2 点を任意にとって、その 2 点の座標をそれぞれ  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  とおく。ただし、 $x_1 < x_2$  とする。このとき変化の割合  $a$  は、

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

と計算すればよい。

### 45.3.2 「変化の割合」を拡張する

では、関数が 2 次関数や、三次関数、もっと複雑な  $\sin x$  などのときの、変化の割合はどのようになるだろうか。一次関数の場合は、変化の割合は一定であったが、2 次関数やその他の一般の関数では、グラフの形からも想像できるように、変化の割合は一定ではない。つまり、変化の割合は、グラフの各点でいろんな値をとる。しかし、変化の割合がデタラメに決まっているわけではない。それはある決まった式によって書き表され、各点における変化の割合を計算することができる。

例えば、2 次関数  $y = x^2$  を考えてみよう。変化の割合は関数の 2 点の間で決定できるので、適当に関数上の点を 2 点とって、それを  $x_1$ ,  $x_2$  としよう。ただし、 $x_1 < x_2$  であるとする。このとき、変化の割合は

$$a = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1}$$

と計算される。しかし、 $x_1$  と  $x_2$  の間隔が大きいと、この変化の割合は図からわかるように、正確ではない。

---

<sup>24)</sup> 変化の割合は、 $x$  を変数としてもつ 1 次関数  $y$  が、 $x$  が 1だけ変化したときにどの程度変化するかを表すものである。この値により、 $y$  の増加の仕方が数量的にわかることになる。

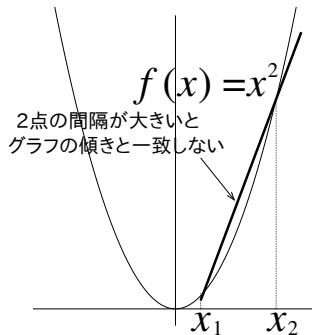


図 45.19 2 次関数

そこで、2点  $x_1, x_2$  の間の距離を小さくしていくことで、近似的に、関数の傾き近づけていくことを考える。2点の間の大きさを  $\Delta x$  とおいたとき、この  $\Delta x$  を0に近づけていけばよい。この  $\Delta x$  を用いることで、 $x_2$  は

$$x_2 = x_1 + \Delta x$$

と書ける。これを、さっきの2次関数の変化の割合の式に代入すると、

$$a = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = \frac{(x_1 + \Delta x)^2 - x_1^2}{(x_1 + \Delta x) - x_1} = \frac{2x_1\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x_1 + \Delta x.$$

ここで、 $\Delta x$  をできる限り0に近づけて、第一項の  $2x_1$  に比べて無視できる程度にしたとき<sup>25)</sup>、

$$a = 2x_1$$

となる。ところで、この式は点  $x_1$  の部分だけに適用できるものだが、 $x_1$  が任意に選べることから、

$$a = 2x$$

であることがわかる。これが2次関数の変化の割合になる。一次関数との違いは、変化の割合が  $x$  の関数になっていることだろう。これによって、2次関数の、全ての点

<sup>25)</sup> より詳細は、極限という概念を用いて考えないといけないのだが、ここでは簡単のために、極限の概念を軽視した。

における変化の割合を求めることができる。例えば、 $x = 1$  の部分における 2 次関数の傾きは、 $a = 2 \times 1 = 2$  と計算されるし、 $x = 50$  の場合は、 $a = 2 \times 50 = 100$  である。少し計算は複雑になるが、一般的な 2 次関数  $y = ax^2 + bx + c$  の変化の割合は、これと同様な方法で求めることができて、

$$a = 2ax + b$$

である。また、これと同様な方法で、 $y = x^3$  の変化の割合を求めることができる。三次関数の変化の割合の式は、 $a = 3x^2$  となる。

### 45.3.3 導関数の定義（「微分する」ということ）

この計算方法を一般化してみよう。しかし、難しくなることを恐れて、関数は一変数関数  $y = f(x)$  としよう。点  $x$  における、 $f(x)$  の変化の割合を求める。変化の割合を求めるには、関数上の 2 点 ( $x$  ともう一点) が必要である。しかし、この 2 点の間隔が大きすぎると、先ほどの例のように、正確に求めることができなくなる。そこで、もう 1 つの点を  $x$  の近くにとるようにしたい。この点を、 $x + \Delta x$  としよう。 $\Delta x$  は非常に小さいけれども、0 ではない数とする。

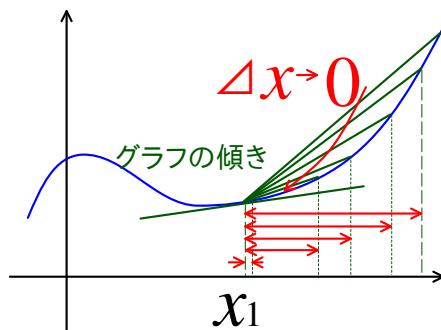


図 45.20  $\Delta x$  を 0 に近づけることで、関数の傾きの正確さが増す

これらを、変化の割合の式に代入すると、

$$a = \frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{(x + \Delta x) - x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

ここで、 $\Delta x$  を 0 に近づけることを表現するため、 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$  という記号を導入する。

$$a = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

関数  $f(x)$  の変化の割合を求める式を 導関数 という。また、そのような行為のことを、微分する という。 $f(x)$  の導関数を表す記号として、

$$f'(x), \frac{df(x)}{dx}, \frac{d}{dx}(x) \quad (45.10)$$

等が用いられる。このノートでは、 $f'(x)$  や  $df(x)/dx$  という記号を用いる。関数  $f(x)$  を微分するには

導関数の定義（「微分する」という行為）

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (45.11)$$

以上の説明はあまりにも感覚的過ぎるので、微分積分の教科書で学習してもらいたい。ここでは、あくまでもイメージを優先した。また、以降の項目において、説明が楽になるようにと考えたためでもある。まあ、物理学に触れてみる程度ならば、この程度の説明で事足りると思う。

#### 45.3.4 微分 ( $dy$ の形式的定義)

**コメント** 「微分」について説明よう。ちなみに、上では「微分する」という行為を定義した。それは、導関数の定義でもあった。

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

しかし、これと「微分」は異なる概念である。上の導関数の定義式の、 $dx$ ,  $dy$  には、定義上、なんの意味も与えられていない。 $dy/dx$  と書かれて、初めて導関数を意味するのであって、単独では意味を成さないのである。たしかに、 $dx$  は  $\Delta x$  の 0 の極限として ( $dy$  も同様)、イメージされるかもしれないが、あくまでイメージであり、意味付けはされていない。そこで、ここで、新たに「微分」という概念を定義することで、 $dx$ ,  $dy$  に意味をもたせよう。そうすることで、 $dx$ ,  $dy$  を、あたかも変数であるかのようにみなすことができ、式変形が容易に行えるようになる。

導関数の公式の、極限  $\Delta x \rightarrow 0$  をとる前の式は、

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

である。これを、次のように変形させよう。

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

両辺を  $\Delta x (\neq 0)$  倍しただけである。この式で、 $\Delta x$  はとても小さいが、0 の極限値を取っていないので、普通の実数であるから、このような除算が可能である。

ここで、もう一度、今度は導関数の定義式より。

$$f'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} + o(\Delta x).$$

ここに、今さき求めた  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$  を考慮した。そして、さらに、極限  $\Delta x \rightarrow 0$  を取ることを省いた。そのため、 $o(\Delta x)$  という余分な項が付いている。これは、極限をとる操作を省いたために生じた、誤差を表現したものである。両辺を  $\Delta x$  倍しよう。

$$f'(x)\Delta x = \Delta y + o(\Delta x)\Delta x.$$

ここで、微分  $dy = df(x)$  を次式で定義する。

$$dy = df(x) := f'(x)\Delta x. \quad (45.12)$$

微分  $dy$  を使うと、

$$dy = \Delta y + o(\Delta x)\Delta x. \quad (45.13)$$

つまり、この微分  $dy$  は、「 $x$  が  $\Delta x$  だけ変化したときの  $y$  の増分」を表す。

上式の  $o(\Delta x)\Delta x$  は、 $\Delta x \rightarrow 0$  としたときに0に近づく量であるので、この極限を再び考慮すると、

$$dy = \Delta y, \quad (\Delta x \rightarrow 0). \quad (45.14)$$

この式から、 $\Delta x \rightarrow 0$  の極限をとると、微分  $dy$  は、 $y$  の変化分  $\Delta y$  と同一視できることがわかる。

図を用いたイメージでも説明できるが、そのためには、接線の方程式についての知識があるとよい。そこで、次節で接線の方程式を復習したあとで、 $dy$  の図形的イ

メージを紹介しよう。

### 微分の定義

微分  $dy = df(x)$  を次式で定義する。

$$dy = df(x) := f'(x)\Delta x. \quad (45.15)$$

である。

#### # memo No.119: 独立変数 $x$ の微分

$x$  は関数  $f(x)$  の独立変数としているが、この  $x$  自身の微分  $dx$  はどう表されるだろうか。ここで計算しておこう。定義式は  $y$  についての微分  $dy$  について記述された式であるが、 $y$  は任意であるので、当然、 $y = f(x) = x$  の場合も考えられる。つまり、

$$dx = df(x) = f'(x)\Delta x = 1\Delta x = \Delta x. \quad (45.16)$$

要するに、独立変数  $x$  の微分  $dx$  は、それ自身の変化分  $\Delta x$  と同じであると言える。

#### # memo No.120: 導関数の式

上の計算から、微分の定義式  $dy := f'(x)\Delta x$  の  $\Delta x$  は  $dx$  に置き換えることができて、

$$dy = f'(x) dx$$

上式を次のように変形させれば、導関数の定義と同じ式を得る。

$$\frac{dy}{dx} = f'(x). \quad (45.17)$$

### 45.3.5 (関数 $f(x)$ の) 接線の方程式

関数  $f(x)$  の、点  $\alpha$  における、接線の方程式を求める。

接線の方程式とは、直線の方程式であり、 $y = ax + b$  と書かれる。一般の関数  $f(x)$  に対して、導関数  $f'(x)$  を求めることにより、関数  $f(x)$  の各点における変化の割合が求まる。ということは、 $a = f'(\alpha)$  として、 $y = f'(\alpha)x + b$  と書き表せる。関数  $f(x)$  は、 $x = \alpha$  のとき、点  $(\alpha, f(\alpha))$  を通る。つまり、方程式  $y = f'(\alpha)x + b$  に  $y = f(\alpha)$ 、 $x = \alpha$  を代入し、

$$f(\alpha) = f'(\alpha)\alpha + b$$

が成立しているはずである。これと、元の式

$$y = f'(\alpha)x + b$$

の両辺を引くことで、

$$\begin{aligned} y - f(\alpha) &= (f'(\alpha)x + b) - (f'(\alpha)\alpha + b) \\ &= f'(\alpha)(x - \alpha) \end{aligned}$$

と計算される。これが接線の方程式である。

### 接線の方程式

関数  $f(x)$  の、 $x = \alpha$  における、接線の方程式は、

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) \quad (45.18)$$

である。

### 45.3.6 $dy$ の図形的イメージ

このように微分を定義することで、 $dy$  に次のような意味が与えられる。

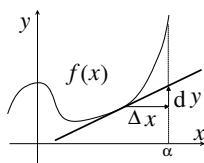
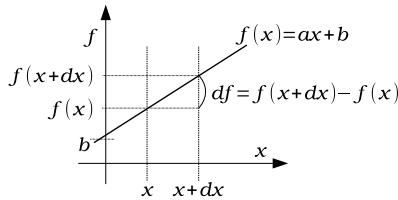


図 45.21 微分の定義

### 45.3.7 1 次関数 $f(x) = ax + b$ の増加量

一次関数の増加量を、微分を使って表してみる。仰々しいかもしれないが、後でこの考え方を発展させるために、基礎的なところから考えていきたい。

一次関数はグラフで表現すると直線であり、方程式は  $f(x) = ax + b$  である。 $a$  は

図 45.22 1次関数  $f(x) = ax + b$  の増加量

傾きで、 $b$  は  $y$  軸との交点である<sup>26)</sup>。点  $x$  のところでは、

$$f(x) = ax + b.$$

点  $x$  から微小距離  $dx$  だけ離れたところでは  $(x + dx)$ ,

$$f(x + dx) = a(x + dx) + b.$$

よって、 $x$  が  $dx$  だけ増えた時の  $f(x)$  の増加量を  $df$  として<sup>27)</sup>,

$$\begin{aligned} df &= f(x + dx) - f(x) \\ &= \{a(x + dx) + b\} - \{ax + b\} \\ &= (ax + adx + b) - (ax + b) \\ &= adx. \end{aligned}$$

一次関数の増加量は傾き  $a$  と微少変化  $dx$  の積で表せることがわかった。

#### 45.3.8 1変数関数 $f(x)$ の増加量

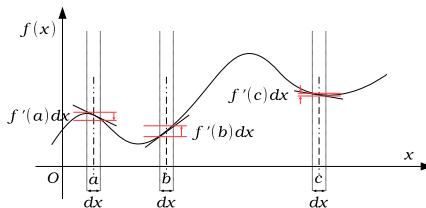
1変数関数  $f(x)$ において、 $x$  の微小変化分  $dx$  に対する  $f(x)$  の増加量を計算したいことがある。これは、局所的に一次関数近似することで、一次関数の時と同じように考えることができる。

一次関数では、微小変化  $dx$  に対する関数  $f$  の増加量は、 $df = a dx$  と書けるのであった。これを任意の一変数関数に拡張する場合、各  $x$  で傾きが異なるが、 $a = f'(x)$  と書けることを考慮すると、

$$df = f'(x) dx \tag{45.19}$$

<sup>26)</sup>  $b$  は切片ともよばれる。

<sup>27)</sup> より細かく表現すると、 $df := df(x)$  である。



一次関数の増加量は、”(傾き)  $\times$  (x の変化量)”で計算できることを思い出す。

同じように考えて、区間  $dx$  で関数  $f(x)$  を一次関数近似したならば、 $f'(x)dx$  が関数の増加量となる。

$x$  方向の増加量を  $dx$  と表したように、 $f(x)$  の増加量を  $df$  と表して、

$$df = f'(x)dx = \frac{\partial f(x)}{\partial x} dx$$

図 45.23 1 変数関数  $f(x)$  の増加量

となる。これが 1 変数関数  $f(x)$  の増加量である。これはまさに、前に説明した 微分 にほかならない。微分とは一変数関数の微小増加量のことをいうのである。

### 45.3.9 偏微分

次は 2 変数関数の微分だ。1 変数関数のグラフは線であり、 $x$  方向の 1 方向のみを考えればよかった。これに対して、2 変数の場合は面になるので、 $x$  方向と  $y$  方向の 2 方向を考える必要がある。

$x$  方向の微分をする場合は、 $y$  方向を固定して微分する。式で書くと、

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

$y$  方向の微分をする場合は、 $x$  方向を固定して微分する。式で書くと、

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} := \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

このような微分を 1 変数の微分と区別するために<sup>28)</sup>、偏微分 という。

偏微分の視点で、改めて、1 変数の微分を見ると、 $y = 0$  固定の微分であったと解釈できる。

<sup>28)</sup> 言い換えれば、多変数関数の微分であることを強調するために。

### 45.3.10 全微分

偏微分の場合、微分するときに片方を固定してしまうので、 $x$  と  $y$  を"同時に"変化させた場合の関数の増加量がわからない。幸運なことに、 $x$  と  $y$  を"同時に"変化させた場合の増加量は、それぞれ独立であり、従って、「 $x$ だけを変化させた場合の増加量」と「 $y$ だけを変化させた場合の増加量」をたすだけで良い。

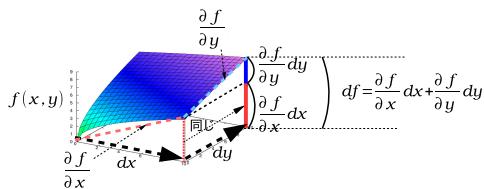


図 45.24 全微分のイメージ

$x$  方向だけ変化させた場合の増加量とは、 $x$  方向についての微分であり、

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx$$

である。また、 $y$  方向だけ変化させた場合の増加量とは、 $y$  方向についての微分であり、

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy$$

と書ける。よって、 $df := df(x, y)$  は

$$df = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy \quad (45.20)$$

と計算することができる。

このような 2 变数関数の微分のことを **全微分** という<sup>29)</sup>。

<sup>29)</sup> 1 变数関数の微小増加量が微分であることを先に確認した。2 变数関数の場合は方向が 2 つあるので、増加量を計算するには全方向の微分を足し合わせるのであった。これを強調し、2 变数関数の微分のことを **全微分** という。2 变数以上の関数の微分は全て、全微分と言われる。

## 45.4 よく使う公式

### 45.4.1 和の微分

1変数関数  $K(x)$  があり、この  $K(x)$  が 2つの関数  $f(x)$ ,  $g(x)$  の和に分解できるとする。つまり、以下が成り立っている場合を考える<sup>30)</sup>。

$$K(x) = f(x) + g(x).$$

この時、

$$K'(x) = f'(x) + g'(x) \quad (45.21)$$

が成り立つ。

これは微分の定義に従って式変形をすることで、確認できる。少々面倒だが、やってみよう。

$$\begin{aligned} K'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{K(x + \Delta x) - K(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)) - (f(x) + g(x))}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x) + g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= f'(x) + g'(x). \end{aligned}$$

この式変形で、関数の極限の和の公式を利用している<sup>31)</sup>。

<sup>30)</sup> ごく簡単な例で言えば、 $K(x) = f(x) + g(x) = 5x$ ,  $f(x) = x$ ,  $g(x) = 4x$  の場合とか。

<sup>31)</sup>  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  と  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  が共に収束する場合、

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0} g(x).$$

### 45.4.2 積の微分

1変数関数  $K(x)$  があり、この  $K(x)$  が 2つの関数  $f(x)$ ,  $g(x)$  の積に分解できるとする。つまり、以下が成り立っている場合を考える<sup>32)</sup>。

$$K(x) = f(x)g(x).$$

この時、

$$K'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad (45.22)$$

が成り立つ。

これは微分の定義に従って式変形をすることで、確認できる。少々面倒だが、やってみよう。特に、 $-f(x)g(x + \Delta x) + f(x)g(x + \Delta x) = 0$  であることに注意。

$$\begin{aligned} K'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{K(x + \Delta x) - K(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x + \Delta x) + f(x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f(x + \Delta x) - f(x))g(x + \Delta x) + f(x)(g(x + \Delta x) - g(x))}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f(x + \Delta x) - f(x))g(x + \Delta x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x) \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x + \Delta x) + f(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \end{aligned}$$

この式変形で、関数の極限の積の公式を利用している<sup>33)</sup>。また、式変形について、以下を考慮した。

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x)$$

<sup>32)</sup> ごく簡単な例で言えば、 $K(x) = f(x)g(x) = 5x(x+1)$ ,  $f(x) = 5x$ ,  $g(x) = x+1$  の場合とか。

<sup>33)</sup>  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  と  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  が共に収束する場合、

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} g(x).$$

$$g(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x + \Delta x)$$

1つ目の式はそもそも  $\Delta x$  が関数  $f(x)$  にないので、 $\Delta x$  に関する極限をとったところで変化なし。2つ目の式は関数の極限の定義そのものである。

### 45.4.3 商の微分

1変数関数  $K(x)$  があり、この  $K(x)$  が2つの関数  $f(x)$ ,  $g(x)$  の商に分解できるとする。つまり、以下が成り立っている場合を考える<sup>34)</sup>。

$$K(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

この時、

$$K'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \quad (45.23)$$

が成り立つ。

これを示すには、

$$K(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \frac{1}{g(x)}$$

とみなし、積の微分公式を用いる。実際に確認してみよう。

$$K'(x) = f'(x) \frac{1}{g(x)} + f(x) \left( \frac{1}{g(x)} \right)'$$

ここで移行の式変形の都合上<sup>35)</sup>、上式の第1項の分母と分子に  $g(x)$  をかけて、

$$K'(x) = f'(x)g(x) \frac{1}{g(x)^2} + f(x) \left( \frac{1}{g(x)} \right)'$$

としておく。また、第2項のカッコ内の微分は、定義に従って計算する<sup>36)</sup>。

$$\left( \frac{1}{g(x)} \right)' = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{g(x + \Delta x)} - \frac{1}{g(x)}}{\Delta x}$$

<sup>34)</sup> ごく簡単な例で言えば、 $K(x) = f(x)/g(x) = 5x$ ,  $f(x) = 20x^2$ ,  $g(x) = 4x$  の場合とか。

<sup>35)</sup> 不自然に思われるかもしれないが、覚えやすく使いやすい形にしたいがための式変形であり、重要な部分である。

<sup>36)</sup> 2つの分数の恒等式を使うので、補足しておこう。

$$\frac{1}{A} - \frac{1}{B} = \frac{B}{AB} - \frac{A}{AB} = \frac{B - A}{AB} = -\frac{A - B}{AB}.$$

$$\begin{aligned}
& \frac{-g(x + \Delta x) + g(x)}{g(x + \Delta x)g(x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-g(x + \Delta x) + g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \frac{1}{g(x + \Delta x)g(x)} \\
&= -g'(x) \frac{1}{(g(x))^2} \\
&= -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}
\end{aligned}$$

なので,

$$K'(x) = f'(x)g(x) \frac{1}{(g(x))^2} - f(x) \frac{g'(x)}{(g(x))^2}.$$

共通な分母でまとめると,

$$K'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

#### 45.4.4 合成関数の微分

関数  $f(g(x))$  というものを考える。 $g(x)$  は独立変数  $x$  を持つ関数であり、 $f$  は  $g(x)$  で得られた値を引数に持つ関数である<sup>37)</sup>。こういった入れ子になった関数を 合成関数 という。 $f(g(x))$  は  $(g \circ f)(x)$  と書かれることもある。<sup>38)</sup>

ここでは、この合成関数の微分公式を確認する。合成関数  $(g \circ f)(x) = f(g(x))$  は  $u = g(x)$  と置いて  $f(u)$  と見ることができる。 $g(x)$  が  $x$  の関数だから、結局のところ  $(g \circ f)(x)$  も  $x$  の関数となるので、 $d(g \circ f)/dx$  を考えられる。 $u = g(x)$  を展開し、さらに  $f(u)$  を展開した後で、微分を計算しても良いが、もっと賢い方法がある。

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{A}{B}B}{BC} = \frac{A}{BC}.$$

<sup>37)</sup> 例えば、 $(x + 1)^2$  であれば、 $g(x) = x + 1$  として  $f(g(x)) = (g(x))^2$  と書き表せる。

<sup>38)</sup> 表記だけの問題だが、 $f(g(x))$  という表現は、見難くなる傾向にある。この程度であれば、まだわかるが、これが  $f(g(h(i(j(x))))$  となった場合にはカッコが多くて、読み難くなってしまう。だから、 $f(g(x)) = (g \circ f)(x)$  と書くこともある。これなら、関数が多くなるとも問題ない。さつきの例で言うと、 $(j \circ i \circ h \circ g \circ f)(x)$  である。関数の依存関係を左のカッコ内に書き、その独立変数を右のカッコの中に書く。関数の依存関係は一番深いものを最左に書き、順次右に追記していく。

次のとおりだ.

$$\frac{d(g \circ f)}{dx} = \frac{df}{du} \frac{du}{dx} = \frac{df(u)}{du} \frac{dg(x)}{dx}. \quad (45.24)$$

これが正しいことは、微分の定義から計算することで確認できる。

$$\begin{aligned} & \frac{d(g \circ f)}{dx} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(g \circ f)(x + \Delta x) - (g \circ f)(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(g \circ f)(x + \Delta x) - (g \circ f)(x)}{g(x + \Delta x) - g(x)} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(g \circ f)(x + \Delta x) - (g \circ f)(x)}{\Delta g} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(g \circ f)(x + \Delta x) - (g \circ f)(x)}{g(x + \Delta x) - g(x)} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

ここで、式の見やすさのため、 $\Delta g = g(x + \Delta x) - g(x)$  と置く。また、 $g(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x + \Delta x)$  の関係から、

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (g(x + \Delta x)) - g(x) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (g(x + \Delta x) - g(x)) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta g \\ &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つので、 $\Delta x \rightarrow 0$  を  $\Delta g \rightarrow 0$  に置き換えられることを使う。

$$\begin{aligned} & \frac{d(g \circ f)}{dx} \\ &= \lim_{\Delta g \rightarrow 0} \frac{(g \circ f)(x + \Delta x) - (g \circ f)(x)}{\Delta g} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

最後に、 $\Delta(g \circ f) = (g \circ f)(x + \Delta x) - (g \circ f)(x)$ 、 $\Delta u = \Delta g$  であることに注意すれば、

$$\begin{aligned} & \frac{d(g \circ f)}{dx} = \lim_{\Delta g \rightarrow 0} \frac{\Delta(g \circ f)}{\Delta g} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta(g \circ f)}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta(g \circ f)}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\&= \frac{d(g \circ f)}{du} \frac{du}{dx}\end{aligned}$$

を得る。大抵の場合は、 $f := (g \circ f) = f(g(x))$  と略記されるので、これに従うと、

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \frac{du}{dx}$$

となって、いつもの合成関数の微分公式が見えてくる。

#### 45.4.5 部分積分

# 46

## 微分方程式

46.1 微分方程式とは

46.1.1 微分方程式の概要



# 47

## ベクトル

### 47.1 ベクトルの定義

#### 47.1.1 図形的（幾何学的）なベクトル

物理を考える上で、矢印はとても有用である。力の方向と大きさを直感的に表現するのに、矢印は欠かせない。この矢印は、数学的に扱うことができて、数学の世界では、矢印のことをベクトルとよんでいる。

矢印のトンガリがない方を、矢印の始点といい、トンガっている方を、矢印の終点という。これにより、方向は矢印の向きで表現できるし、その大きさは長さに比例するように描くと約束すれば、大きさも表現できる。イメージは、図 47.1 に描いたようになる<sup>1)</sup>。

これを文字で表すと、始点を  $O$  とし、また、終点を  $P$  とする線分  $\overrightarrow{OP}$  に向きをつけたと考えて、

$$\overrightarrow{OP}$$

と書ける。

---

<sup>1)</sup> 当たり前すぎて、描くまでもなかつたかな。

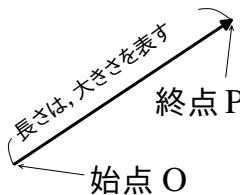


図 47.1 ベクトル：図形，矢印

## # memo No.121: ベクトルの位置は不問である

同じ大きさで、同じ向きをもつベクトルがいくつか存在する場合を考える。これらのベクトルの位置が異なる場合、異なるベクトルと考えるべきなのだろうか。

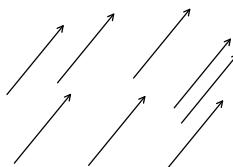


図 47.2 ベクトル：図形，矢印

結論から書くと、これらのベクトルは、同一とみなされる。つまり、ベクトルの存在する場所は、そのベクトルの性質には何ら関係がないということだ。そもそも、ベクトルとは大きさと向きのみをもつ概念であるから、当然、ベクトルが同一であるということは、大きさと向きが同じであるということである。ベクトルが存在する場所は、定義には含まれておらず、不問とされるのである。

ベクトルという概念は、力学を数式化するために整備されたものである。ベクトルを用いることで、物体にかかる力を数式で表現できるようになるのだ。例え、自分が誰から引っ張られる場合を想像してみよう。同じ大きさの力で、同じ向きに引っ張られるのであれば、引っ張られる場所は関係ない。引っ張られる場所が、公園だろうが、公民館だろうが、あるいはトイレだろうが、引っ張られるときの感覚は同一のはずである。つまり、力そのものは、その発生場所には関係がないのである。ベクトルという概念は力学の記述に適するようにつくられたので、力と同様に、その存在する場所には依存しないのである。というか、依存しないと定義

付けるのである<sup>2)</sup>。いつどんな場所でも、同じ物体に同じ力をかければ、その位置の変化の仕方もまた同じなのである。いや、結果が同じになるように、ベクトルという概念を定義してしまうのだ。

### 47.1.2 代数的なベクトル

コメント ベクトルを数式で扱えるように、是非とも、文字を使ってベクトルを表現したい。ベクトルは代数的に表現可能なのだが<sup>3)</sup>、2つの書き方がある。書き方の違いにより、次のように言葉を割当て、区別する。すなわち、

- 横ベクトル
- 縦ベクトル

なぜこう言われるかは、後の記述で分かることなので、今は気にせず、話を進めよう。横ベクトル・縦ベクトル共に、どちらも同じように頻繁に使われる。どっちも大切である。どちらか一方を採用したら、他方を捨て去るということはない。

#### 47.1.2.1 横ベクトル

ベクトルを代数的に表現する方法は2通りあると、先に記述した。ここではそのうちの、横ベクトルについて、説明する。

ベクトルをどのように代数的に表現するのか。実は、その考え方は簡単で、そのベクトルの始点に原点  $O$  を合わせた座標を張ればよい。図47.3では直交直線座標を描いた。これより、終点の座標を記述することで、ベクトルを表現できるのである。

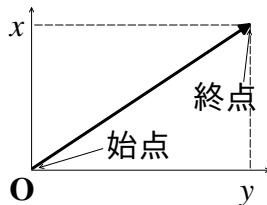


図 47.3 ベクトル：図形、矢印

<sup>2)</sup> ベクトルの定義では、場所に依存しないという直接的な記述はないが、定理として成り立つ性質として、このことが保証される。場所に依存しないように定義付けを行っているんだから、当たり前だ。

<sup>3)</sup> 「代数的に表現可能」とは、文字の列として表現することが可能であるということである。

代数的なベクトルは、以下のように記述される。

$$\mathbf{r} = [x, y]. \quad (47.1)$$

上の表現では、2次元の平面に存在するベクトルが記述されている。より高次元のベクトル  $\mathbf{x}$  を考える場合、その次元数を  $n$  として、

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]. \quad (47.2)$$

ここで、座標を表す記号を、 $x$  に統一して添字により区別すよう、表現方法を変えた。

このように、成分を横書きしたベクトル表記を、**横ベクトル** という。

ベクトルを表現するのに、太字を用いているのは、単なる実数と区別するためである。

#### 47.1.2.2 縦ベクトル

横ベクトルが成分を横書きしたベクトル表現だとしたら、**縦ベクトル** とは成分を縦書きしたベクトル表現である。なんとも安易な考え方だ。縦ベクトルは以下のように記述される。

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \quad (47.3)$$

#### 47.1.3 ベクトルの大きさ

ベクトルの大きさは、三平方の定理により定義できる<sup>4)</sup>。

まず、2次元ベクトル  $\mathbf{r} = [x, y]$  の場合、このベクトルの大きさは三平方の定理によって定められ、

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (47.4)$$

である。

---

<sup>4)</sup> 三平方の定理について一言コメントしておこう。これは数学的には三角関数の余弦定理の特殊な場合である。しかし、ここでは、三平方の定理を距離を定めるひとつの要請として扱うこととする。

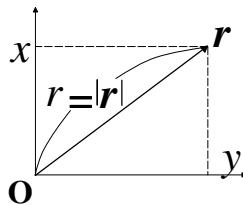


図 47.4 三平方の定理（2次元）

2次元のベクトルの大きさを、3次元ベクトルに拡張しよう。図 47.5 の色を塗った部分の直角三角形に着目する。このとき、2次元の三平方の定理から、

$$|r| = \sqrt{\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2}$$

が成立している。つまり、

$$|r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (47.5)$$

という関係があるということだ。もはや変数は4つであり、"三平方"という語彙と食い違ってしまったが、とりあえず、ここでは、3次元の三平方の定理と表現しておこう。

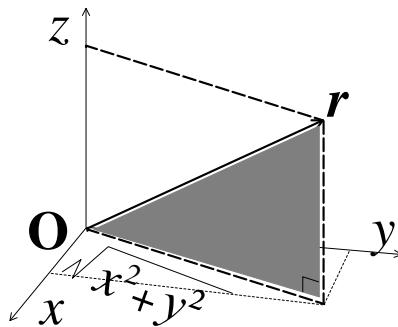


図 47.5 三平方の定理（3次元）

#### 47.1.4 ベクトルの次元

私たちは、3次元の世界に住んでいるから、当然、縦・横・高さの3方向しか把握できない。4つ以上の次元で成り立つ世界を見ることは不可能である。しかし、数学的には、4つ以上の方を考へても、理論的に矛盾することはない。つまり、数学的には、より多くの方向をもつベクトルを扱えるのである<sup>5)</sup>。そこで、4つ以上の方向をもつベクトルについて、考へる。

まず、今まで日常生活的に使用してきた、次元という語彙を、数学用語として改めてその意味を明確にしておきたい。次元とは、ベクトルの成分の個数と定める。ただし、物理学では単位のことを次元と表現するが<sup>6)</sup>、それとは別物である。

あるベクトル  $\mathbf{r}$  があり、その成分が  $n$  個であるとしよう。つまり、

$$\mathbf{r} = [r_1, r_2, r_3, \dots, r_n]$$

と成分表示されるとする。この時、 $\mathbf{r}$  のことを  $n$  次元ベクトルという。

##### # memo No.122: $n$ 次元の三平方の定理

2次元と3次元の両方の三平方の定理から推察して、より高次元である  $n$  次元に定理を拡張できる。もちろん、 $n$  は任意の自然数である。この拡張に伴って、この定理に改めて名前をつけることしよう<sup>7)</sup>。距離の公理と名付ける。

$n$  次元への拡張は以下のようにして行われる。

$$r := |\mathbf{r}| = q_1^2 + q_2^2 + \cdots + q_n^2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n q_i^2}. \quad (47.6)$$

ここに、 $q_i$  はそれぞれ座標を表す。

<sup>5)</sup> ただし、4つ以上の方向を肌で感じたり、見たりできない以上、図示することは不可能であるから、4次元以上の世界は完全に文字（数式）だけの記述のみになってしまう。

<sup>6)</sup> 物理学では「次元解析」という言葉が使われる。これは、物理学的な単位同士の関係を調べることであり、特に、数式の右辺と左辺の単位に矛盾がないかを確認することで利用される。しかし、ここで考へている次元とは、意味が異なる（完全に異なるわけではないが）ものとして、考へてもらいたい。少なくとも、いま考へる次元とは、空間の方向の数であり、ベクトルの成分の個数のことである。

<sup>7)</sup> これから定義しようとするのは、 $n$  次元での定理であり、それには  $n+1$  個の数が絡んでくるから、「三平方の定理」では定理の内容と一致しなくなってしまうのだ。

### 47.1.5 ベクトル空間の定義

ベクトルをより一般的に定義しておきたい。そこで、はじめに、ベクトルの集合を定義する。ベクトルの持つ性質を列挙して、それを満たすものを、ベクトル空間 とよぶ。そして、ベクトルをベクトル空間の要素として定義することで、ベクトルを、数学的に曖昧さのない概念として、扱うことが可能になる。

#### ベクトル空間

**定義 47.1.1.** ある集合  $U$  が次の条件全てを満たすとき、 $U$  を ベクトル空間 という。

集合  $U$  の任意の要素  $a, b, c$  に対して、

- 1  $(a + b) + c = a + (b + c)$
- 2  $a + b = b + a$
- 3  $o + a = o$  を満たす  $o$  がただ一つ存在する。
- 4  $a + a' = o$  を満たす  $a'$  がただ一つ存在する。

が成立する。

さらに、任意の実数  $m, n$  に対して、

- 5  $(m + n)a = ma + na$
- 6  $m(a + b)$
- 7  $(mn)a = m(na)$
- 8  $1a = a$

が成立する。

特に、 $o = (0, 0, \dots, 0)$  であり、ゼロベクトル という。

### 47.1.6 ベクトルの定義

ベクトルを定義しよう。

## ベクトル

**定義 47.1.2.** ベクトル空間  $U$  の要素のことを ベクトル という。

## 47.2 ベクトルの性質

### 47.2.1 ベクトルの転置

横ベクトルと縦ベクトルの関係を、ここに書いておこう。議論の最初に、横ベクトルで表現したベクトルを、縦ベクトルとして表現したい場合が起こる<sup>8)</sup>

そんな時、活躍するのが、ベクトルの 転置 という考え方である。

$n$  次元ベクトル  $x$  を最初に導入するとき、横ベクトルとして定義したとする。そして、議論の途中、 $x$  を縦ベクトルとして記述したくなつたとしよう。すなわち、以下のような書き換えたいのである。

$$[x_1, x_2, \dots, x_n] \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

要するに、横ベクトルの成分表示で、その成分を左から順に書いていたベクトルを、縦に上から順に成分を記述する方式に変更したいのだ。この操作を、ベクトルの 転置 という。

この場合、以下のように記述する。

$${}^t [x_1, x_2, \dots, x_n] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \quad (47.7)$$

左辺の左上の添字  $t$  で、ベクトルの転置を表現する。

最初に定義されたベクトルが縦ベクトルであっても、ベクトルの転置を行うこと

<sup>8)</sup> 特に、ベクトルの内積を行列的に記述したい場合に、このような要求をしたくなる。

で、横ベクトルにできる。つまり、次のようにも記述して良い。

$${}^t \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1, x_2, \dots, x_n] \quad (47.8)$$

以上から、ベクトルの転置について、次が成立している。

$${}^t({}^t \mathbf{x}) = \mathbf{x}. \quad (47.9)$$

ベクトル  $\mathbf{x}$  に 2 回転置をすれば、元のベクトルに戻るのである。以下のような感じで、巡回が起こる。

$$\begin{array}{ccccc} \text{縦ベクトル} & \longrightarrow & \text{横ベクトル} & \longrightarrow & \text{縦ベクトル} \\ \text{転置} & & \text{転置} & & \\ \text{横ベクトル} & \longrightarrow & \text{縦ベクトル} & \longrightarrow & \text{横ベクトル} \\ \text{転置} & & \text{転置} & & \end{array}$$

もちろん、横ベクトルで表現しようとも、縦ベクトルで表現しようとも、同一のベクトルであれば、それが示すベクトルは同一である。同じベクトルを表現する方法が 2 種類あるということであり、ベクトルが 2 つになるわけではない。 $\mathbf{x}$  も  ${}^t \mathbf{x}$  も同じベクトルを表現するものであり、違うのは表現の方法なのだ。

### 47.2.2 ベクトルの四則演算

コメント ここでは、ベクトルに対して四則演算を定義する。

#### 47.2.2.1 ベクトルの加法

3 次元の 2 つのベクトルを、任意にもってきて、それらを

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

と書くことにしよう。これら 2 つのベクトル  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  の和  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$  は、成分表示で以下のように示される。

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{bmatrix}. \quad (47.10)$$

つまり、成分同士を足し合わせるということである。

$n$  次元ベクトルに対して、拡張しておこう。任意の 2 つの  $n$  次元ベクトル

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

に対して、これらの和は、成分で書くと次のようになる。

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}. \quad (47.11)$$

また、次元の違うベクトル同士の和は定義されない。つまり、次元が違うと、加法を行うことはできない。

#### 47.2.2.2 実数とベクトルの積

ここでは、ひとつの任意の実数と、ひとつの任意のベクトルの積を定義する。ベクトル同士の掛け算も定義されるが<sup>9)</sup>、ここでは、実数とベクトルの掛け算のみについて考える。

任意の実数  $a$  と任意の  $n$  次元ベクトル  $\mathbf{x}$  をもってきて、積を作る。その積を、

$$a\mathbf{x} = a \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

と書くことにする。成分で書くと、次のようになる<sup>10)</sup>。

$$a\mathbf{x} = a \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ \vdots \\ ax_n \end{bmatrix}. \quad (47.12)$$

これは  $n$  次元ベクトルに対して成り立つものである。つまり、実数とベクトルの積は、ベクトルの各成分を実数  $a$  倍することである。

<sup>9)</sup> ベクトルの内積・外積を参照。

<sup>10)</sup> というか、こうなるように、実数とベクトルの積を定義する。

## 47.2.2.3 ベクトルの減法

実数の世界では、事実上、減法が存在するが、しかしこれは公理的視点からは加法の一部である。つまり、2つの実数  $x, y$  があった時、減法  $x - y$  は 加法  $x + (-1 \cdot y)$  で定義されるのである。負の記号  $-1$  は公理により、その存在が示されているからである。減法を新たに定義するよりも、 $-1$  の存在を主張するほうが、理論が単純になるり、思考経済<sup>11)</sup> に合致する。

ベクトルに関する減法も、実数と同様に、加法の一部として、説明されるべきものである。負の向きをもつベクトルとは、当然、正の向きに対して逆向きのベクトルである。負の向きのベクトルは、ベクトルに  $-1$  を掛けることで、得られる。つまり、任意の  $n$  次元ベクトル  $\mathbf{y}$  に対して、これと同じ大きさで、逆向きのベクトルは、

$$-1 \cdot \mathbf{y} = -\mathbf{y}$$

と書かれる。実数の場合と同じように、 $-1$  倍のときは、 $1$  を省略して書くことにする。

これを用いて、ベクトルの減法を定めよう。任意の 2 つの  $n$  次元ベクトル  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  に対して、差  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$  とは次のように、成分表示される。

$$\begin{aligned} \mathbf{x} - \mathbf{y} &= \mathbf{x} + (-\mathbf{y}) \\ &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -y_1 \\ -y_2 \\ \vdots \\ -y_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

<sup>11)</sup> 思考経済 同じことを説明するのに、2つ以上の手段があるとしよう。思考経済とは、この2つの説明のうちどちらを採用するかという基準である。「簡潔に説明できる方を採用せよ」というものだ。もちろん、最も簡潔に説明するほうがいいに決まっている（直感だけど）うだうだ説明するよりも、スパッと説明したほうがかっこいいし、覚えることも少なくすむし、何しろ短時間で説明できるのだから。しかし、世の中にはどちらも同じだけ簡潔に説明できることが多くある。その場合には、時と場合によって使い分ける必要が出てくることだろう。

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} x_1 + (-y_1) \\ x_2 + (-y_2) \\ \vdots \\ x_n + (-y_n) \end{bmatrix} \\
 \therefore \quad \mathbf{x} - \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \\ \vdots \\ x_n - y_n \end{bmatrix} \tag{47.13}
 \end{aligned}$$

### 47.2.3 ベクトルの内積（図形的）

ベクトルの内積について、簡単に説明をしておこう。

2つの任意のベクトルを用意し、 $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ とする。ベクトルの内積はこの2つのベクトルより定義される。内積の表し方は、 $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ または $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ などの複数の表現がある。このノートでは、 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ を内積の記号として使うことにする。ベクトルの内積を、次のように、平面图形的に定義する。

#### ベクトルの内積（図形的）

**定義 47.2.1.** 任意の2つのベクトル  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  の間に、演算 $\cdot$ を以下のように定義する。

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta \tag{47.14}$$

この演算を、ベクトル  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  の内積という。

この式のイメージは、「 $\mathbf{a}$  の  $\mathbf{b}$  方向の成分の大きさ」と、 $\mathbf{b}$  の積の大きさである。

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (|\mathbf{a}| \cos \theta) |\mathbf{b}|$$

と書いたらイメージしやすい。 $|\mathbf{a}| \cos \theta$  の  $|\mathbf{b}|$  倍ということである。

例えば、 $\theta = 60^\circ$ ,  $|\mathbf{a}| = 3$ ,  $|\mathbf{b}| = 5$  のとき、

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta = 3 \times 5 \times \cos(60^\circ) \\
 &= 3 \times 5 \times \frac{1}{2} \\
 &= \frac{15}{2}
 \end{aligned}$$

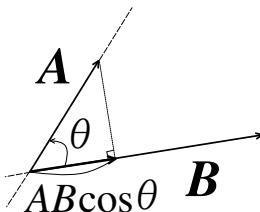


図 47.6 内積

となる。

#### 47.2.4 ベクトルの内積（代数的）

実は、ベクトルの内積には、もう一つ別の定義がある。もちろん、上に説明した平面図形的定義と全く矛盾しない。別の定義とは、ベクトルの成分に着目した、代数的定義である<sup>12)</sup>。

ベクトルの内積の代数的定義は、次式で定義される。

##### ベクトルの内積（代数的）

**定義 47.2.2.** 任意の 2 つのベクトル  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  があるとする。ベクトルの成分を  $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ ,  $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_n]$  で表すとき、この 2 つのベクトルの間の演算・を次で定義する

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i. \quad (47.15)$$

**例** 仮に、2 つのベクトルの成分は 2 つとしよう。つまり、 $\mathbf{a} = [a_1, a_2]$ ,  $\mathbf{b} = [b_1, b_2]$  と仮定する。このときベクトルの内積は

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 \quad (47.16)$$

である。

<sup>12)</sup> 「平面図形的定義」と「代数的定義」は私の造語。

### 47.2.5 図形的内積と代数的内積の関係

図形的定義による内積と代数的定義による内積が全く同じことであることは、次のように説明できる<sup>13)</sup>。

2つの任意のベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  の内積を考える。この2つのベクトルを直交座標の  $x$  座標,  $y$  それぞれ座標の成分に分解し、

$$\begin{cases} \mathbf{a} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y \\ \mathbf{a} = \mathbf{b}_x + \mathbf{b}_y \end{cases}$$

とする。ここで、 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  の内積を図形的に計算してみよう。

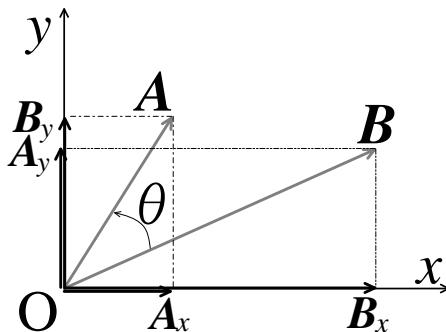


図 47.7 内積(代数的定義と図形的定義の関係)

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y) \cdot (\mathbf{b}_x + \mathbf{b}_y) \\ &= \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{b}_x + \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{b}_y + \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{b}_x + \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{b}_y \end{aligned}$$

<sup>13)</sup> 互いに矛盾する定義だったら、内積の定義としてどちらを採用するかを検討しないといけない。もしくは、両方とも採用しないことになるかもしれない。だけど、全く同じことを言っているのだから、都合のよい方を、定義式として採用してよいのである。

今回は、まずイメージしやすいように図形的な定義を先に紹介した。だけど、物理学の理論を考えるには、数式で表現する必要がある。 $\cos$  関数を用いた図形的定義でも事足りると思うが、代数的な内積の式も有用なので、紹介をしておいた。

右辺の各項を、それぞれ計算しよう。( $\cos 0^\circ = 1, \cos 90^\circ = 0$ )

$$\begin{cases} \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{b}_x = |\mathbf{a}_x| |\mathbf{b}_x| \cos 0^\circ = a_x b_x. \\ \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{b}_y = |\mathbf{a}_x| |\mathbf{b}_y| \cos 90^\circ = 0. \\ \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{b}_x = |\mathbf{a}_y| |\mathbf{b}_x| \cos 90^\circ = 0. \\ \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{b}_y = |\mathbf{a}_y| |\mathbf{b}_y| \cos 0^\circ = a_y b_y. \end{cases}$$

つまり、

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y \quad (47.17)$$

である。これで、代数的定義は、図形的定義と同じことだと、分かるだろう。

### ベクトルの内積

直交座標上における、2つの二次元ベクトル  $\mathbf{a} = [a_x, a_y], \mathbf{b} = [b_x, b_y]$  に対して、ベクトルの内積  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  を次式で定義する。

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := a_x b_x + a_y b_y. \quad (47.18)$$

$n$  次元ベクトル同士の内積の場合、

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := \sum_{i=1}^n a_i b_i. \quad (47.19)$$

と定義する。

#### 47.2.6 ベクトルの内積の性質

ベクトルの内積は1つのベクトル、つまり、自分自身との内積を計算することもできる。図形的に計算すると、

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}| |\mathbf{a}| \cos 0^\circ = |\mathbf{a}|^2. \quad (47.20)$$

である。自分自身との内積は、そのベクトルの大きさの二乗になる。

まとめておこう。今後のことを考えて、ここでは、代数的定義を採用しておこう。そのほうが、ベクトルの次元が任意になったとしても、その定義式を簡単にイメージできるからである。

また、ベクトルの内積を考えることで、ベクトル同士が直交しているか否かを知ることができる。ベクトル同士が直交するとき、その角度は、 $90^\circ$ である。このとき、 $\cos 90^\circ = 0$ なので、内積も0になる。内積が0になる他の条件として、交わる角度が $270^\circ$ であること( $\cos 270^\circ = 0$ でこの場合も直交している)、そして、そもそも、少なくともどちらか一方のベクトルが零ベクトル、つまり  $\mathbf{a} = (0, 0, 0)$  の場合である。それ以外には内積は0にならない。よって、次のように言うことができる。

- 零ベクトルでない、2つのベクトルの内積が0の場合、この2つのベクトルは直交している。

逆に次もいえる。

- 零ベクトルでない、2つのベクトルが直交している場合、この2つのベクトルの内積は0である。

以上、2つの性質をまとめよう。

### ベクトルの内積の性質

- (1) 自分自身との内積は、自分自身の大きさの二乗になる。

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2. \quad (47.21)$$

- (2) 直交座標上における、零ベクトルでない、2つの二次元ベクトル  $\mathbf{a} = [a_x, a_y]$ ,  $\mathbf{b} = [b_x, b_y]$  に対して,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{b}. \quad (47.22)$$

## 47.2.7 ベクトルの外積

### 47.2.7.1 外積の定義

向きが互いに異なる2つのベクトルは、ひとつの平面を張る。これは図に描けばすぐに分かる。ベクトルは、向きを変えずに、もちろん大きさも変えることなく移動させても、定義上、同一のベクトルとみなせる。従って、2つのベクトルが存在するとき、この2つのベクトルの始点を1箇所に集めて、ベクトルをくっつけることができる。定義上、このような操作をベクトルに施しても、ベクトルが変わったわけではないのだ。こう考えれば、2つのベクトルは、3角形を張ることがわかる。3角形は平

面図形の典型であり、つまり、このような3角形を作る2つのベクトルはひとつの平面を張ると言えるのである。



(a) 2つのベクトル

(b) 始点を揃える

図 47.8 2つのベクトルは3角形を作る

しかし、私達の暮らす世界は、3つの次元をもっている<sup>14)</sup>。なので、3次元に広がったベクトルを考えることもできる。今まででは、平面上に存在するベクトルを考えてきたが、ここでは次元を1つ追加して、3次元の空間に想像をふくらませよう。

3つめの方向をもつベクトルをどうやってつくるか。そこで考え出されたのが、ベクトルの外積という概念である。考え方は簡単。2つのベクトルに直交するようなベクトルを作ればいい。

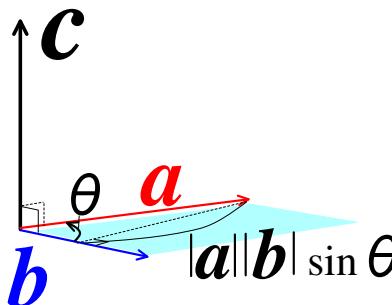


図 47.9 外積

<sup>14)</sup> 少なくとも、私たちは直感的に、縦・横・高さの3つの方向を認識している。また、方向3つしかないとも直感的に把握している。当然、物理学もこの直感に従って構成される。ただ、最近「超弦理論（スーパーストリンリングス・セオリー；super string theory）」という数学的な匂いの濃い理論が、スポットライトを浴びてきてはいるが。

そのようなベクトルが仮に存在できたとして、それを  $c$  と表すことにしてよい。このとき、既存の 2 つのベクトルを  $a, b$  としたなら、次式が成立してなければならない。すなわち、

$$a \cdot c = |a||c| \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$b \cdot c = |b||c| \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

である。直交しているから、内積が 0 になっているはずである<sup>15)</sup>。ベクトル  $c$  の成分を  $(c_1, c_2, c_3)$  としよう。 $a$  と  $b$  についても同様に、それぞれ、 $(a_1, a_2, a_3)$ ,  $(b_1, b_2, b_3)$  とする。そうすると、上の 2 つの式は、また、以下のように書いても同じことである。すなわち、

$$a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = 0.$$

$$b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 = 0.$$

ベクトルの方向については、上の 2 式が成り立つことがその条件であるが、向きについては何も言っていない<sup>16)</sup>。そこで、次のように向きを決めてしまおう。すなわち、

**向きの定義** ベクトル  $a$  とベクトル  $b$  から生成する外積  $c$  のむきは、 $a$  から  $b$  に向かって右ねじを右まわし回したときに、ネジが進む向きを正方向する。これを満たすことを、右手系をなすという（「右ねじの法則」なんていう表現が使われることも多い。特に、物理学の多数の教科書で用いられる）。

ベクトルにはもうひとつの性質である大きさも考えないといけない。どのような大きさにしようと自由だが、最も簡潔に大きさを定めたい。もとの 2 つのベクトル  $a$ ,

<sup>15)</sup>  $\cos(\pi/2) = 0$  に注意。

<sup>16)</sup> 「方向」と「向き」の違い 「方向」と「向き」という語彙の違いは、日常生活において、ほとんど区別することなしに使っている。話の流れで意味が理解できるのであるから、そもそも区別することに注意を払う必要はない。しかし、正確には、「方向」と「向き」とは、別の意味を持っている。「方向」とは例えば、「東西の方向」とか、「 $x$  軸の方向」のようにつかう。つまり、「方向を決める」とは、多数ある直線から、1 つの直線を決めるということである。だから、「方向」という語彙には、「正の向き」とか「負の向き」と言ったことは一切含まれていない。「向き」というのは、要するに、自分のいる場所を基準点として、例えば、左右の方向を考えたとき、右か左かを示すものである。別の例でたとえるなら、数直線があって、その基準点 0 から見て右側を正の向きとし、他方、基準点 0 から見て左側を負の向きとするようなことである。「方向」を決めるとは 1 つの直線を定めることであり、向きを決めるとは、その直線の上的一点にたって、一方を正、他方を負とすることである（「直線上の任意の一点」は、その直線を 2 つに切断することは明らかですよね）。

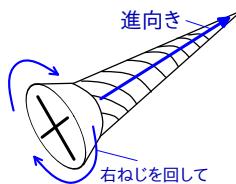


図 47.10 右ねじを回して進む方向

$\mathbf{b}$  より、この二つのベクトルが張る平行四辺形の面積を、その大きさとするのが最も簡単だろう。実際、数学的にもこのような定義がなされる。これが最も無理のない定義なのだろう。すると、 $\mathbf{c}$  の条件として、次式も加わることになる。

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \theta$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \sin \theta$$

これで、都合 3 つの条件式と、向きの定義は揃った。もう一度、まとめて書いておこう。

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = 0 \\ b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 = 0 \\ \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \sin \theta \\ \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \text{は右手系をなす。} \text{ (向きの定義)} \end{array} \right.$$

未知数が  $c_1, c_2, c_3$  と三つなのに対し、条件式も同じく 3 つであり、数式的な条件としては必要十分である<sup>17)</sup>。また、ベクトルの向きの定義もした。これで、外積を作る準備が整った。あとは、外積を作れるかどうか、言い換えれば、このように定義した外積というものが存在可能かどうかを、確認すれば良い。

#### 47.2.7.2 外積の成分表示

このような 3 式<sup>18)</sup> を満たすような  $\mathbf{c}$  は存在するのか。存在するとしたら、その成分はどのようになるか。それをこれから考えていこうと思う。それで、どうやって

▶ 17) これで、大きさと方向を定めることができる。

▶ 18) 正確には、「3 つの式と、向きの定義」と書くべきだけど、向きは人間が勝手に選ぶものなので、数的に気にするものではない。

求めるかなんだけど、その方法は幾つか思い当たる。式をくどくどと計算をして発見的に答えを得る方法もあるけれど、それだと少々話が長くなり、計算も面倒くさい。なので、この問題の答えはすでに得られていることだから、先に答えを見てしまおう。そのほうが早い。

で、その答えとは、

$$\begin{aligned}\mathbf{c} &= (c_1, c_2, c_3) \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)\end{aligned}$$

である。なにやら複雑な式に見えるが、次のように書くと、ある規則がみえてくるだろう。

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix}. \quad (47.23)$$

$\mathbf{a}, \mathbf{b}$  の成分の添字を縦方向に意識して眺めると、巡回 ( $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ ) しているのが見える<sup>19)</sup>。式 (47.23) は、先ほど上げた 3 つの条件式を必要十分に満たす。

#### 47.2.7.3 外積の成分表示の検算

式 (47.23) が本当に条件を満たすかどうかを、確かめておこう。まず、 $\mathbf{c} \perp \mathbf{a}, \mathbf{c} \perp \mathbf{b}$  を満たすことを示す。やり方は、単純に条件式に成分を代入して、式を整理するだけ。

$$\begin{aligned}a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 \\&= a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1) \\&= a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - a_2a_1b_3 + a_3a_1b_2 - a_3a_2b_1 \\&= 0.\end{aligned}$$

もうひとつの式も同じように計算できる。

$$\begin{aligned}b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 \\&= b_1(a_2b_3 - a_3b_2) + b_2(a_3b_1 - a_1b_3) + b_3(a_1b_2 - a_2b_1) \\&= b_1a_2b_3 - b_1a_3b_2 + b_2a_3b_1 - b_2a_1b_3 + b_3a_1b_2 - b_3a_2b_1 \\&= 0.\end{aligned}$$

---

<sup>19)</sup> 複雑そうに見えるけど、規則さえ分かってしまえば、覚えるのはたやすい。最初の  $a_2b_3$  さえ覚えてしまえば、残りは機械的に記述できる。引く数は添字の数字を入れ替えたものだし、他の成分については添字を巡回させればいい。

たしかに、二つの条件式を満たしている。このことにより、ベクトル  $c$  は、ベクトル  $a, b$  に直交していることが確かめられた。つまり、ベクトル  $c$  の方向は条件に沿うものであると言える。

では、残りの大きさに関する条件式について、それを満たすかを計算してみよう。もう一度、大きさを決める条件式を書くと、

$$\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \sin \theta$$

でるが、両辺を 2 乗して、

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \sin^2 \theta.$$

ここで、三角関数の公式  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  を思い起こし、 $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$  と置き換えて、

$$\begin{aligned} c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) (1 - \cos^2 \theta) \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \\ &\quad - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \cos^2 \theta. \end{aligned}$$

最後の行の

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \cos^2 \theta.$$

に注目すると、

$$\begin{aligned} &\left( \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \cos \theta \right)^2 \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \\ &= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2. \end{aligned}$$

つまり、大きさの定義式は以下のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) (1 - \cos^2 \theta) \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2. \end{aligned}$$

この式を、ベクトル  $c$  が満たしていることを確認すればよい。

$$|\mathbf{c}|^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2$$

$$\begin{aligned}
&= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \\
&= (a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_2^2 - 2a_2 a_3 b_2 b_3) + (a_3^2 b_1^2 + a_1^2 b_3^2 - 2a_1 a_3 b_1 b_3) \\
&\quad + (a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2) \\
&= a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_2^2 + a_3^2 b_1^2 + a_1^2 b_3^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 \\
&\quad - 2a_2 a_3 b_2 b_3 - 2a_1 a_3 b_1 b_3 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 \\
&= (a_1^2 b_3^2 + a_1^2 b_2^2) + (a_2^2 b_3^2 + a_2^2 b_1^2) + (a_3^2 b_2^2 + a_3^2 b_1^2) \\
&\quad - 2a_2 a_3 b_2 b_3 - 2a_1 a_3 b_1 b_3 - 2a_1 a_2 b_1 b_2.
\end{aligned}$$

ちょっと一息。まだまだ式変形は続く。ちなみに、上式の冗長な括弧は、以降の式変形のために、明示的に記述している。

次に、トリッキーな作業をする。それは、ある数  $x$  に対して、当然、 $0 = x - x$  が成り立つから、0を加えるということは  $x - x$  を加えることと同じである。そして0を加えても等式は成り立つ。この考え方を利用して、式変形を続けよう。

$$\begin{aligned}
|c|^2 &= a_1^2 b_3^2 + a_1^2 b_2^2 + (a_1^2 b_1^2 - a_1^2 b_1^2) \\
&\quad + a_2^2 b_3^2 + a_2^2 b_1^2 + (a_2^2 b_2^2 - a_2^2 b_2^2) \\
&\quad + a_3^2 b_2^2 + a_3^2 b_1^2 + (a_3^2 b_3^2 - a_3^2 b_3^2) \\
&\quad - 2a_2 a_3 b_2 b_3 - 2a_1 a_3 b_1 b_3 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 \\
&= a_1^2 (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + a_2^2 (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + a_3^2 (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \\
&\quad - a_1^2 b_1^2 - a_2^2 b_2^2 - a_3^2 b_3^2 - 2a_2 a_3 b_2 b_3 - 2a_1 a_3 b_1 b_3 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 \\
&= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2.
\end{aligned}$$

式変形が長々と続いたが、これでやっと確かめられた<sup>20)</sup>。

以上から、 $c$  は 3 つの条件式を満たすことが確かめられ、ベクトルの外積が存在することが示された。つまり、ベクトルの外積は定義可能であることが確かめられた。

何度も言うが、ベクトルの外積は導かれるものではない。人の想像力によって定義するものである。この外積という概念を導入することで、物体の回転を数学的に扱うことができるるのである。というか、実際は話が逆で、ベクトルの外積の定義に従う物理現象が発見され、この現象を数学的に扱うことができるよう、外積が定義される

<sup>20)</sup> 以下の恒等式が成立している。

$$(X + Y + Z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2XY + 2YZ + 2ZX.$$

ここでは、 $X = a_1 b_1$ ,  $Y = a_2 b_2$ ,  $Z = a_3 b_3$  に対応している。まさかとは思うが、高校数学レベルの代数の恒等式を忘れているといけないので、メモしておいた。

のである。もしかしたら、外積の定義が突拍子も無いと感じているかも知れないが、現実に外積を用いて説明される物理現象が生じているのである。外積はその現象を扱うために導入されるのだ。

### # memo No.123: 右手系とは何か

外積の定義のうちの、向きの定義をもう一回読んでみよう。

**向きの定義** ベクトル  $a$  とベクトル  $b$  から生成する外積  $c$  のむきは、 $a$  から  $b$  に向かって右ねじを右まわし回したときに、ネジが進む向きを正方向する。これを満たすことを、右手系をなすという。

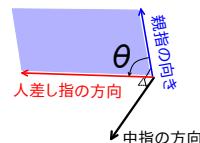
なぜこのように定義するのかという疑問があるが、この疑問はすぐに捨て去るべきだ。なにしろ、答えがないのだから。しかし、天下り的な説明はよくない。なので、できるだけ“もっともらしい”説明を、以下に記述しておくことにしよう<sup>21)</sup>。

2つのベクトル  $a$ ,  $b$  に直交する方向は内積の式で表現され、数学的に議論できるが、方向は計算で導くことはできない。なので、予め、向きを定めておくのである。どちらの向きを正方向としても、それ以降で変更しなければ、論理に矛盾は生じない。しかし、向きを決めないと議論ができないので、人為的な向きの定義を施すのである。

では、なぜ、「右ネジをまわして進む向き」と表現するのか。これにも、多分、明確な答えはない。おそらく、これが最も簡潔な言い回しで、誤解なく、加えて直感的イメージしやすく説明できるからだろう。しかし、学術的には格好をつけて、「右手系をなす」と言われる。それは、右手の親指を人差し指に近づけるという行為が、親指を右まわしするという行為に当たり、中指の先の向きが外積の向きに一致するからである。元となる2つのベクトルが親指と人差し指に値し、それに直交する向きに中指が向いているのだ。



(a) 私の右手



(b) 対応図

図 47.11 右手系

<sup>21)</sup> あくまでも、“もっともらしく”記述するのであり、これがほんとうの理由だとか、正解だとかといふものではない。天下り的な説明ではスッキリとせず、モヤモヤしてしまうので、これを少しでも解消できればと考えて、記述するものである。

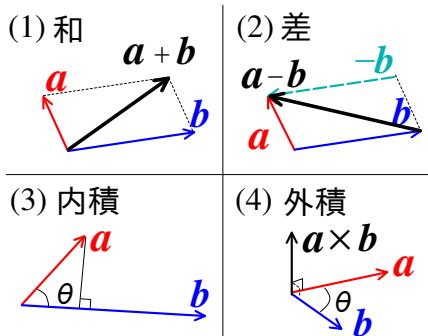


図 47.12 ベクトルの和・差・積（内積/外積）

## 47.3 特殊なベクトル

### 47.3.1 単位ベクトル

ベクトルは、大きさと向きをもつ。しかし、ベクトルを成分表示したときに、その大きさと向きが同時に記述されていて、成分表示を見ただけでは、簡単にはその大きさや向きを把握することはできない<sup>22)</sup>。そこで、登場するのが、単位ベクトルという概念である。

自然数でいえば、数字の 1 がその単位元であり、2 以上のすべての自然数は、この単位元 1 の倍数として記述できる。

$$2 = 1 \times 2, 3 = 1 \times 3, \dots$$

ベクトルの世界では、単位元は 1 という単なる数値ではなく、大きさが 1 で方向<sup>23)</sup>をもつ、単位ベクトルという概念が定義される<sup>24)</sup>。

<sup>22)</sup> 計算（暗算）が非常に得意な人や、ベクトルのスペシャリストでない限り、ベクトルの成分表示を見た瞬間に、その大きさと向きが想像できることはないとと思う。少なくとも、私はそのようなマネはできない。

<sup>23)</sup> 「向き」と書いていないことに注意。ここで言っているのは、正の向きと負の向きを同時に考えたので、「方向」と書いた。

<sup>24)</sup> 定義とは、後の議論の発展のためになされるのであり、導かれるものではない。初学の数学に不慣れである時期には、このことは特に忘れがちである。

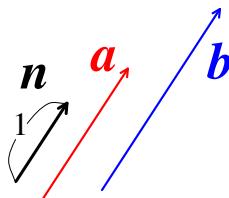


図 47.13 単位ベクトル

単位ベクトルがあれば、同じ向きを持つベクトルは、その単位ベクトルにその大きさをかけることで、ベクトルを表せるのである。単位ベクトルと 1 との違いは、方向をもつか、否かである<sup>25)</sup>。

言葉で「単位ベクトル」といったところで、数学的に扱う事はできない。なので、単位ベクトルを文字で表そう。

まだ、単位ベクトルが定義可能か否かは分からぬが、単位ベクトルなるものがあると仮定して、それを  $n$  と書くこととする。この単位ベクトルを用いると、 $n$  と同じ方向をもつベクトルならば、 $n$  の実数倍で表現できる。例えば、ベクトル  $a$  の向きが単位ベクトル  $n$  と同じ方向であったなら、

$$a = |a|n$$

と書ける。これは  $n$  と同じ向きを持つ任意のベクトルに対して成り立つ<sup>26)</sup>。上式を  $n$  について解くと、

$$n = \frac{a}{|a|} \quad (47.24)$$

なる。だから、単位ベクトルとは、ベクトルを自身の大きさで割ったものであるといえよう。

念のため、成分表示もしておこう。

$$n = \frac{a}{|a|}$$

<sup>25)</sup> 単位ベクトルには方向があり、1 には方向がない。

<sup>26)</sup> 当然、 $n$  と向きが異なるベクトルはこのように記述はできない。その場合には新たに、その方向をもつ別の単位ベクトルを作らないといけない。つまり、単位ベクトルはその方向によって無数に存在する。これも、自然数の単位元 1 との違うところだ。

$$\begin{aligned}
 &= \left( \frac{a_1}{|\mathbf{a}|}, \frac{a_2}{|\mathbf{a}|}, \frac{a_3}{|\mathbf{a}|} \right) \\
 &= \left( \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \right).
 \end{aligned}$$

これは大きさが 1 であり、 $\mathbf{a}$  と同じ方向のベクトルである。なぜなら、ベクトルの成分を全て同じ実数で割ったベクトルと、元のベクトルの方向は同一であることは、ベクトルの加減乗除の定義によって簡単に示せる。また、大きさも次の計算から、簡単に 1 であることも確かめられる。

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{n}| &= \left( \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \right)^2 + \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \right)^2 \\
 &\quad + \left( \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \right)^2 \\
 &= \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{(\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2})^2} \\
 &= \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \\
 &= 1 \\
 \therefore \quad |\mathbf{n}| &= 1.
 \end{aligned}$$

#### # memo No.124: 具体例

ベクトル  $\mathbf{a} = [1, 2, 4]$  を、大きさと単位ベクトルに分解してみよう。

まず大きさは、定義に従って

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{1 + 4 + 16} = \sqrt{21}$$

である。よって、求めたい単位ベクトルを  $\mathbf{n}$  と書くことにはすれば、

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{1}{\sqrt{21}} [1, 2, 4] = \left[ \frac{1}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{4}{\sqrt{21}} \right].$$

以上から、ベクトル  $\mathbf{a}$  は大きさと単位ベクトルに分解すると、

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \mathbf{n} = \sqrt{21} \left[ \frac{1}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{4}{\sqrt{21}} \right]$$

と表現される。

### 47.3.2 基底ベクトル

先に単位ベクトルという概念を説明した。そして、ここでは単位ベクトルを使って、さらに新し考え方を導入する。

いきなりだけど、具体例から考える。ひとつの任意のベクトル  $\mathbf{a}$  をもってきて、 $\mathbf{a}$  が次のようなベクトルだったとしよう<sup>27)</sup>。

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

この式は次のように見ることもできる。

$$\mathbf{a} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3つの方向に対し、ひつの方向に1の大きさをもち、かつ、他の方向には0であるような単位ベクトルを作り、それに係数をかけて、足し合わせるのである。

任意のベクトルに対して、この表し方が可能であることは、明白である。任意の  $n$  次元ベクトル  $\mathbf{x}$  が

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

と成分表示されるとしよう。このとき、 $\mathbf{x}$  は次のようにも表現することが可能である。

$$\mathbf{x} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + x_i \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

<sup>27)</sup> まずは、馴染み深い3次元ベクトルで考える。

このような書き方だと、記述が少々面倒なので、次のような記号を導入し、表現を簡略化させよう。

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{e}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (47.25)$$

このように、一成分が 1 であり、他の成分がすべて 0 であるようなベクトルを、基底ベクトル という。もちろん、基底ベクトルとは、任意のベクトルを表現する場合に用いるベクトルである。しかし、たまたま任意のベクトルが基底ベクトルの成分と一致してしまうこともある。この場合のベクトルは基底ベクトルとは認識されない。

基底ベクトルという概念を使うと、 $\mathbf{x}$  は以下のように書き直せる。

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + x_i \mathbf{e}_i + \cdots + x_n \mathbf{e}_n. \quad (47.26)$$

和の記号  $\sum_{i=1}^n$  を使うともっと簡単になる。

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i. \quad (47.27)$$

#### # memo No.125: 注意

基底ベクトルを先に「一成分が 1 であり、他の成分がすべて 0 であるようなベクトル」と定義してしまった。しかし、注意してほしい。より細かく言うと、“直線直交座標系”における基底ベクトルと表現すべきであった。

基底ベクトルは、座標系によってことなる。座標系には、直線直交座標意外にも、極座標系や円筒座標系<sup>28)</sup> があり、各座標系の基底ベクトルは全く異なるベクトルである<sup>29)</sup>。

<sup>28)</sup> 後で説明する。中学から使ってきた、 $x-y$  座標のことを、直線直交座標というが、これ以外にも、上に書いたように、極座標系や円筒座標系など、様々な座標系を設定できる。ここでは、座標系は直線直交座標系だけではないということを分かってもらわねば、それでいい。

<sup>29)</sup> ただし、ある基底ベクトルが存在するとき、この基底ベクトルを別の基底ベクトルに変換する方法は存在する。

# 48

## ベクトル解析

### 48.1 ベクトル関数

#### 48.1.1 ベクトル変数（あるいは、変数ベクトル）

ベクトルには、スカラーにおける語彙「変数」に対応する、一般的呼称がない。ないと不便なので、このノートでは **ベクトル変数** という言い方を導入する。もしかしたら、**変数ベクトル** と書くこともあるかもしれない。

細かいことを言うと、ベクトル変数は、成分の一部あるいは全部が変数であるようなベクトルであり、次に説明するベクトル関数である<sup>1)</sup>。

変数をベクトル変数と区別する意味で、スカラー変数と書くこともある。

#### 48.1.2 ベクトル関数

ベクトルが絡む関数のことを総称して **ベクトル関数** という。また、ベクトル関数と区別するために、今まで考えてきたベクトルが絡まないような関数を、スカラー関

---

<sup>1)</sup> 定義が論理的に循環してしまっているが、意図は伝わるはず。循環しないような記述も可能だが、理論構築が目的ではないため、深く突っ込まないでおこう。

数と表現する場合がある<sup>2)</sup>.

考えれる例をいくつか上げておこう. 特にこれらを区別してよぶ必要はないので, 名称を与えることはしない<sup>3)</sup>.

例えば, スカラーの独立変数  $t$  に対して, 1つの定ベクトルが定まる関数を考えられる. これを

$$\mathbf{a}(t) \quad (48.1)$$

と表す. 関数記号  $\mathbf{a}$  を太字にした意図は, ベクトルが定まる(値域がベクトルである)ことを明示するためである. また,  $(t)$  という表記は,  $t$  が独立変数であることを示すものである<sup>4)</sup>.

別の例を上げると, ベクトル変数を独立変数にもつ関数が考えられる. 数式で表そうとするとき,

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) \quad (48.2)$$

のようになる.  $\mathbf{r}$  はベクトル変数である.

上記2つの混合して, スカラー変数  $t$  とベクトル変数  $\mathbf{r}$  から

$$a(t, \mathbf{r}) \quad (48.3)$$

という関数を作ってもいい.

ベクトル変数を独立変数として, スカラーが定まる(値域がスカラーである)関数もあり得る. 記号化すれば,

$$a(\mathbf{r}) \quad (48.4)$$

となるだろう. 関数記号  $a$  を細字にした意図は, スカラーが定まることを明示するためである.

もちろん, スカラー変数  $t$  とベクトル変数  $\mathbf{r}$  をもち, スカラーが定まる関数も考えられる.

$$a(t, \mathbf{r}) \quad (48.5)$$

<sup>2)</sup> 細かいことを言うと, スカラーは1次元ベクトルだから, スカラー関数もベクトル関数である.

<sup>3)</sup> 記述の際には, どんな形のベクトル関数について議論しているかが明確にわかるようにする.

<sup>4)</sup> 多変数になる場合,  $\mathbf{a}(t, s)$  と書かれることになる( $t$  と  $s$  はスカラーである). このとき,  $(t, s)$  という記述がベクトルを成分表示と同じで, 紛らわしいかもしれない. しかし, 文脈により容易に区別できるとし, 特に書き分けることはしない. この記述の前に関数を表現する文字があれば, それらは独立変数である.

定ベクトルもベクトル関数の一部として考える。明示的な独立変数はないが、入力にかかわらず常に一定値をとるような関数として捉える。スカラー関数の場合と同じように考える。

独立変数が 1 つのベクトル関数 ( $\mathbf{a}(t)$ ) を、**1 変数ベクトル関数** という。独立変数が 2 つ以上のベクトル関数を総称して、**多変数ベクトル関数** という。ベクトル変数をもつベクトル関数 ( $\mathbf{a}(\mathbf{r})$  など) は多変数ベクトル関数として考える。

ひと目で見やすいように、表にしておこう(図 48.1)。

表 48.1 ベクトル関数の種類

関数記号	独立変数	値域	例
$\mathbf{a}$	なし	ベクトル	定ベクトル
$\mathbf{a}(t)$	$t$	ベクトル	ある 1 点の風向の時間推移
$\mathbf{a}(\mathbf{r})$	$\mathbf{r}$	ベクトル	ある時刻の風向分布
$\mathbf{a}(t, \mathbf{r})$	$t, \mathbf{r}$	ベクトル	風向分布の時間推移
$a(\mathbf{r})$	$\mathbf{r}$	スカラー	風力分布
$a(t, \mathbf{r})$	$t, \mathbf{r}$	スカラー	風力分布の時間推移

### 48.1.3 ベクトル関数の微積分

コメント スカラー関数での微積分を、ベクトル関数へ拡張する。ベクトル関数の微積分も、基本的にはスカラー関数と同じように計算可能である。

#### 48.1.3.1 極限

ベクトル関数の極限はスカラー関数の場合と同じように定義できる。

#### 48.1.3.2 導関数

#### 48.1.4 使用用語

電磁気学を考えるとき、曲線 や、閉曲線 等という数学用語を頻繁に使う。ニュートン力学では、特に必要はない<sup>5)</sup>。だから、電磁気学を学習し始める段階になったら、この部分を読むようにすればいい。

<sup>5)</sup> 知っていれば、それだけ“広く”考えられるが、無理してまで、ここで学習する必要はない。

最初に、これらの用語について、あらかじめ確認する。以下の説明はすごく感覚的なものであって、全く厳密でないことを注意しておく。

#### 48.1.4.1 導線(曲線)

一本のひものように、端と端が結ばれていない線のことを **曲線** という。このノートでは、「電気の流れる道」という意味をこめて、**導線** ということにする。導線の形は グニャグニヤ と曲がっていてかまわないと、導線が自身と重ならないようなものであるとする(リボンのように絡まっていないものとする)。このノートでは、導線を表現する記号として、 $\Gamma$  を用いる。

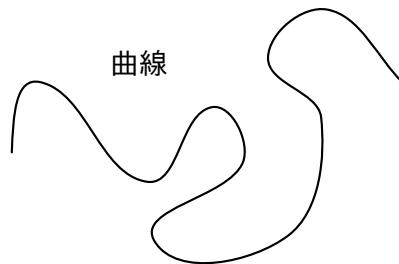


図 48.1 導線

数学的に表現すると、曲線とは各成分が共通のパラメータ  $t$  の関数であるようなベクトルのことをいう。式で表せば、曲線  $\mathbf{r}(t)$  は

$$\mathbf{r}_n(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t)) \quad (48.6)$$

と書ける。これは  $n$  次元ベクトルである。このノートでは空間の次元である 3 次元を考えているので、その各成分は  $(x(t), y(t), z(t))$  と書くことにし、

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad (48.7)$$

とする。この式は時刻  $t$  における位置を表現する式と同じである。時間  $t$  を正方向になめらかに変化させていく、その各々の時間における位置を記録していくれば、1つの曲線が現れてくる。力学ではこの曲線のことを「軌跡」とよんでいたが、ここではそれを一般的に解釈して、**曲線** ということにする。このノートの電磁気学の部分

においては、曲線として出てくるのは回路の導線である。そこで、曲線とよばずに、導線 ということが多い。また、導線の形をいちいち指定することはしない。だから、 $\Gamma = \mathbf{r}(t)$  として、導線を表現する記号として、 $\Gamma$  を用いる。

以下では導線は連続しているという条件を課する。簡単にいえば、「切れていない」導線を考えるということである。

#### 48.1.4.2 閉曲線

導線の両端がつながっているとき<sup>6)</sup>，これを 閉曲線 という。閉曲線の形は グニャグニヤ と曲がっていてもよいが、「八の字」のように導線同士が接触してが重ならないようにする。輪ゴムのようなものを考えるとよい。このノートでは、閉曲線を表現する記号として、 $l$  を用いる。

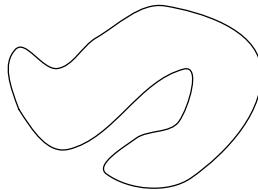


図 48.2 閉曲線

#### 48.1.4.3 曲面

平らではなく、グニャグニヤとした面のことを 曲面 という。もちろん、平らな面も曲面に属するが、ここではもっと一般的なグニャッとなつた面を想像してもらいたい。

電磁気学では特に、「縁をもつた曲面」を考えることも多い<sup>7)</sup>。曲面の境界は閉曲線である。従って以下では、「縁をもつた曲面」のことを『閉曲線  $l$  を縁とする曲面』のようにいうことにする。このノートでは、閉曲線  $l$  を縁とする曲面を 表現する記号として、 $S_l$  を用いることにする。

<sup>6)</sup> この場合、どこが端であるかは見分けがつかないが…。

<sup>7)</sup> 例えば、お皿等がその例になるだろう。縁を持たない曲面の例とは、ボールの表面があげられよう。

#### 48.1.4.4 閉曲面

ボールの表面のように、縁をもたない曲面のことを **閉曲面** という。グニヤグニヤとしていてよいが、面同士が重なったり、互いに切断しあったりしないものとする。このノートでは、閉曲面を表現する記号として、 $S$  を用いる。

ここで注意したい、「閉曲線  $l$  を縁とする閉曲面  $S_l$ 」と「閉曲線  $S$ 」の違いである。 $S$  の添え字に  $l$  が付いているもの ( $S_l$ ) は曲面であり、添え字に  $l$  がついていないものの ( $S$ ) は閉曲面である。

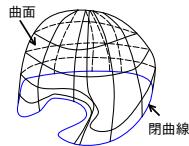


図 48.3 曲面

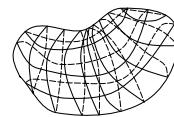


図 48.4 閉曲面

#### 48.1.4.5 領域

閉曲面  $S$  を考えるとき、その表面は その内側の空間 と 外側の空間 を分けていると考えられる。閉曲面の内側の空間のことを **領域** という。領域を表現する記号として、このノートでは  $\Omega_S$  を用いる。もちろん、添え字の  $S$  は領域の表面である閉曲面  $S$  を意味している。

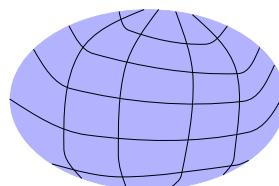


図 48.5 領域

### 48.1.5 線積分と面積分のイメージ

線積分と面積分についての詳しいことは、ベクトル解析の教科書や微分積分学の教科書を参照してもらうことにして、ここではそのイメージを記述しておく。

### 48.1.6 ベクトル空間

位置を一つ指定すると、その位置に対して、1つのベクトルが指定される空間を考える(図48.6参照)。

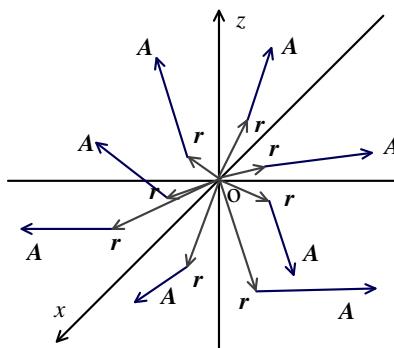


図 48.6 ベクトル空間 1(説明図)

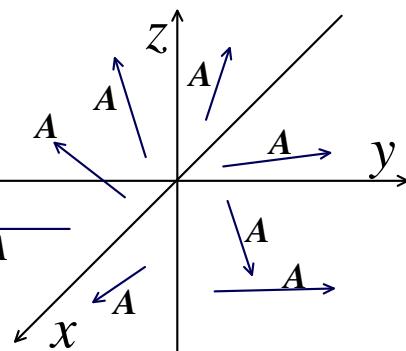


図 48.7 ベクトル空間 2(イメージ)

任意の位置  $r$  に対して、1つのベクトル  $A$  が決定されるという空間をイメージして描いた図である。このような空間を **ベクトル空間** という。また、位置(と時間)を指定すると1つのベクトルを決定できるので、これは関数の性質に他ならず、これを**ベクトル関数** という。従って、 $A$  を  $A(r)$  と表現したほうがベクトル関数であることが、明確になる。しかし今後も、式が煩雑にならないように、ベクトル関数の変数である  $r$  を省略して表現する( $A := A(r)$ )。

ベクトル空間の例としてよく取り上げられる現象のうち、空気の流れ(風)がある。風は向きと速度をもっている。その向きと速度は場所と時間によって異なるが、1つの場所と時間を指定すれば、風の向きと速度は求まる。川の流れや、海水の流れといった現象もベクトル空間で表現される。要するに、何かの「流れ」があったときに、それはベクトル空間で表現するのである。

以下でベクトル空間というときには、図48.7を思い浮かべてもらいたい。但し、ベクトル  $\mathbf{A}$  について、時間と位置を指定すれば決定されるようなものであれば、図48.7のようなものでなくとも、自由に想像してよい。

### 48.1.7 ベクトルとスカラーの区別の仕方

今まで、ベクトルとは大きさと向きのある量であると考えてきた。また、スカラーは大きさのみをもつ量としていた。実は、これは正確な説明ではない。ベクトル空間を確認した今、ベクトルとスカラーの正確に違いについて、議論ができる。ここで整理しよう。

ベクトルとスカラーを正確に区別する方法は、座標変換を考えることである。私がある空間に直交座標を張ったとしよう。私のいる空間には、複数の人がいて、その各々が任意に直交座標を張るとする。もちろん、何人もの人が張った直交座標の座標軸の方向はばらばらである。

この空間が、ベクトル空間であったとしよう。その時、私は1つの点に属する1つのベクトルをみるとする。そのベクトルの方向は、私から見た方向と、他の観測者から見た方向とで一致しない<sup>8)</sup>。それでは、この空間がベクトル空間ではなく、スカラー空間であるとしよう。この時には私がさしている点に属する数は、別の観測者がそれを見ても、全く一致する。ベクトルとスカラーの違いはここにある。私が見るベクトルの向きと、他の人が同じベクトルを見たときのむきは異なるが、スカラーは度の観測者に対しても同じ値を示す。観測者によって違うということは、直交座標の座標軸の設定方向が違うということである。つまり、別の座標に移ってしまうと、ベクトルの向きは変化してしまうのである。スカラーは座標が変わっても、全く同じように観測される。両者はこのように、座標変換によって区別されるものである。座標変換についての知識がないので、これ以上ここでは話を続けることができない。座標変換について学ぶときに、もう一度、ベクトルとスカラーの違いを確認し、“実感”したいと思う。ここでは区別の仕方が知識として身に付いていれば、それでよいことにしよう。

### 48.1.8 線積分

ベクトル空間に、任意の曲線  $C$  を描く。この曲線  $C$  上の全ての点にはそれぞれ1つのベクトルが対応している。ベクトル空間に曲線  $C$  を描いてみると図48.8のよう

<sup>8)</sup> 偶然の一一致は起こりえるが、より一般的に考えよう。

になる。

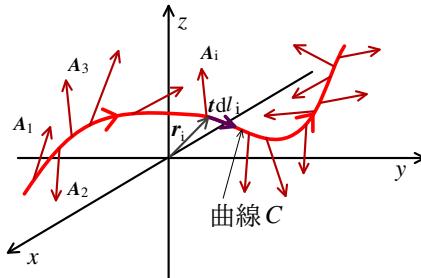


図 48.8 線積分

見易さのために、曲線  $C$  上のベクトルしか描いていないが、実際は別の点においてもベクトルは存在している。線積分の考察の対象はあくまでも、曲線  $C$  上のベクトルだけである。

曲線  $C$  を微小な長さの直線分割して、そのひとつひとつを  $dl$  とする。この部分の単位接線ベクトルを  $t$  で表現する。もちろん、曲線  $C$  は曲がっているので、各  $dl$  部分における単位接線ベクトル  $t$  は一定ではない。これらにより、長さ  $dl$  で向きが  $t$  であるベクトル  $t dl$  を曲線  $C$  上に作ることができる。 $C$  上に位置するベクトル  $A$  の接線方向は  $A \cdot t dl$  と表現できる。これを曲線  $C$  全域にわたって積分したものが、線積分であり、

$$\int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} dl \quad (48.8)$$

と表現される。

曲線  $C$  上のベクトル  $\mathbf{A}$  の曲線方向成分  $\mathbf{t}$  の積分を表している。

#### # memo No.126: 詳細

もう少し優しく解説してみる。線積分とは、曲線  $C$  上のベクトル関数を、曲線  $C$  に沿って積分するということである。「曲線  $C$  に沿って積分する」というのは、ベクトル関数の曲線方向成分の総和を考えることである。そのためには、曲線  $C$  とその上のベクトル  $\mathbf{A}$  の内

積を考える必要がある<sup>9)</sup> すなわち、曲線をベクトルとしてみることが要求され、曲線に向きをつけるということである。曲線の向きは2通り考えられるが<sup>10)</sup>、どちらをとろうが、結果は同じである。しかし、一度向きを指定したら、後になって変更することはできない。

曲線  $C$  を有限の  $N$  個に分割する(48.9参照)。このように分割された曲線は、ほとんど直線と見ることができる。つまり、曲線  $C$  を  $N$  個の直線で近似するのである。これらの近似の直線に名前と番号をつけて  $\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_N$  とする。また、これらに向きという概念を導入して、それぞれに  $t_1, t_2, \dots, t_N$  を対応させる。もちろん、先ほど決めた曲線の向きに合うように設定する。そして、 $t_1\Delta l_1, t_2\Delta l_2, \dots, t_N\Delta l_N$  を作る。これらのベクトルは曲線の接線の向きを持ち、大きさが  $\Delta l$  である<sup>11)</sup>。

ところで、この分割に際して、 $C$  上のベクトル  $A$  は連続であるために、分割した直線部分には複数のベクトルが含まれることになる。そこで、ベクトル  $A$  を1つの直線で平均して、それぞれ、 $A_1, A_2, \dots, A_N$  とする。

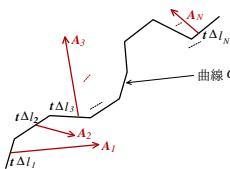


図 48.9 線積分(説明図)

以上より、曲線  $C$  上のベクトルと曲線上に沿ったベクトルとの内積の和は

$$A_1 \cdot t_1\Delta l_1 + A_2 \cdot t_2\Delta l_2 + \cdots + A_N \cdot t_N\Delta l_N \quad (48.10)$$

和の記号  $\sum$  を用いて表現すれば、

$$\sum_{i=1}^N A_i \cdot t_i\Delta l_i \quad (48.11)$$

<sup>9)</sup> 任意の2つのベクトル  $u, v$  の内積は  $u \cdot v = uv \cos \theta$  である。

<sup>10)</sup> 曲線の両端をそれぞれ A, B として、まず第1に A から B に向かう向きを考えられる。また、第2に、B から A に向かう向きを考えられる。

<sup>11)</sup> 単位ベクトル；任意のベクトル  $v$  を用意する。ここで、大きさ1の向きを持った単位ベクトルを導入し、これを  $m$  と書く。この単位ベクトル  $m$  を用いて任意のベクトル  $v$  はその大きさを  $v$  と表すことで、

$$v = vm \quad (48.9)$$

と書ける。ここでは  $v$  が曲線上に沿うベクトルに対応し、 $v$  はその大きさ  $dl$ 、 $m$  は向き  $t$  に対応している。

さらに分割数  $N$  を無限大に持ってことで、曲線に近づいていき、最終的には

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{t}_i \Delta l_i = \int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} \, dl \quad (48.12)$$

を得る。

### 48.1.9 面積分

ベクトル空間に、任意の閉曲面  $S$  をとる(図 48.10 参照)。

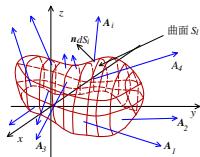


図 48.10 面積分(巨視的視点から)

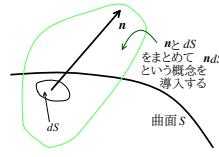


図 48.11 面積分(微視的視点から)

曲面  $S_l$  の各点から、流出するベクトルを考える。曲面  $S_l$  上の位置  $\mathbf{r}$  から流出するベクトルを  $\mathbf{A}$  とする。

曲面  $S_l$  を無限に分割し、その微小面積部分のひとつひとつを  $dS_l$  と表す。曲面  $S_l$  から流出するベクトルの垂直な成分が、実質的に流出する量である。曲面  $S_l$  に平行な成分は曲面  $S_l$  上を流れるだけであり、流出はしない。そこで、曲面  $S_l$  に垂直な成分を考えるために、曲面  $S_l$  と流出するベクトル  $\mathbf{A}$  の内積を考える必要が生じる。つまり、曲面  $S_l$  をベクトルとして考えることになる。そのままではベクトルにすることができないので、線積分のときと同様に、単位ベクトルの導入をする。線積分のときは曲線に沿うベクトルにしたかったので単位接線ベクトルを考えたが、面積分では曲面  $S_l$  に垂直な方向を考えないので、単位法線ベクトルを導入し、これを  $\mathbf{n}$  とする。さて、どのような向きに設定するかだが、曲面には 2 つの面が考えられる。すなわち裏と表を考えられる。従って、単位法線ベクトルの向きとして「裏から表」と「表から裏」の 2 つの向きのどちらか一方をつける必要がある。しかし明らかに、どちらの向きにとろうが結果は同じである。一度向きを決定したら、後になってその向きを変更してはいけない。

このように設定した単位法線ベクトルを用いて、曲面の各微小面積部分  $dS$  におけるベクトルは、 $\mathbf{n} dS$  と書ける。というか、こういう概念を導入するのである。このベクトルの大きさは  $dS$  であり、向きは法線ベクトルの向きである。

以上によって、微小面積部分  $dS$  から流出するベクトル  $\mathbf{A}$  は、 $\mathbf{n}dS$  との内積から  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}dS$  と表現できる。曲面  $S_l$  全体を考えるならば曲面で積分すればよく、

$$\int_{S_l} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS_l \quad (48.13)$$

である。

式のイメージは、曲面  $S_l$  から流出するベクトルの総和である。どのくらいの量が流出しているかを計算するのがこの式である。

微分形のマクスウェル方程式を得るために必要な概念はベクトルの 発散 (div) と、ベクトルの 回転 (rot) である。まずは、この 2つについて確認する。さらに今後必要となるベクトル解析の公式もここに書き下しておく。

### 48.1.10 ベクトルの発散・回転・勾配

#### 48.1.10.1 ベクトルの発散 (div)

ベクトルの発散というのは、ある点でベクトルの「湧き出し」が生じているかどうかを表現する<sup>12)</sup>。もしその値が正であれば、その点でベクトルが湧き出しているのであり、負であれば吸収が起こっていることを意味する。

ベクトルの発散の計算方法なのだけど、ここでは厳密なことは考えず、感覚的な説明にとどめる<sup>13)</sup>。ベクトルといつてもイメージがわきにくいので、ここでは水の流れ(川)を例にとって説明したい。水の流れのベクトルを  $\mathbf{A}(r)$  で表すことにする。

ある点  $P$  で水が湧き出ているとき、正方形の箱でその点  $P$  を内部に含むように囲む。

もし、 $P$  から水が湧き出していないなら、この箱に入ってくる水の量と、箱の外に出て行く水の量の和は 0 である。ここで、この箱は正方形であるから、水が流入する面と流出する面はそれぞれ 3 面ずつである。そこで、向かい合う面同士の対をつくり、一方の面から水が流入し、その面の向かい側の面から水が流出するという状況を考える。もちろん、3 つの組が作られるが、ここでは説明を簡単にするために、1 組の面を考える。

図 48.13において、水が流入する面の面積は、 $\Delta y \Delta z$  であることは図より明らか。

<sup>12)</sup> 湧き出しのことを divergence というので、その頭文字 div をとって、これを発散の数式記号として用いる。

<sup>13)</sup> もし、より厳密に知りたければ、「ベクトル解析」の教科書にあたってみるとよい。

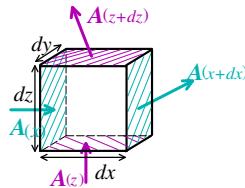


図 48.12 発散のイメージ

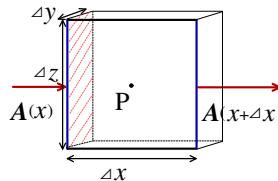


図 48.13 湧き出し (一方向)

従って、この面に流入する水の量は、

$$A_x(x, y, z)\Delta y\Delta z$$

である。また、流出する水の量は、

$$A_x(x + \Delta x, y, z)\Delta y\Delta z$$

である。湧き出しの量は、流入する水の量から流れる量を引けばよい。従って、

$$A_x(x + \Delta x, y, z)\Delta y\Delta z - A_x(x, y, z)\Delta y\Delta z$$

$$\Leftrightarrow \{A_x(x + \Delta x, y, z) - A_x(x, y, z)\}\Delta y\Delta z$$

と計算される。ここで、 $A_x(x + \Delta x, y, z) - A_x(x, y, z) = (\partial A_x / \partial x)\Delta x$  であることに注意すれば<sup>14)</sup>

$$\Leftrightarrow \frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

<sup>14)</sup>  $\Delta x$  の 2 次以上の項は無視した。

となる。これは正か負の値をもつ。正の場合は湧き出しが起こっていることを意味し、負の場合は吸収が起こっていることを意味する。

これは他の2組の面においても同様に計算でき、結果を記しておけば、

$$\frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z, \quad \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

である。

以上から、正方形の箱から流れ出す量は、それぞれの和を考えればよく、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z \\ \Leftrightarrow & \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Delta V \end{aligned}$$

である。ここに、 $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ とした。これは箱の体積を表すものである。

ここで、ベクトル  $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$  の発散  $\text{div}$  は次式で定義される。

発散 (div) の定義

$$\text{div } \mathbf{A} := \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (48.14)$$

この発散記号  $\text{div}$  を用いると、

$$\text{div } \mathbf{A} \Delta V \quad (48.15)$$

となる。これを体積  $\Delta V$  で割ると、単位体積あたりの湧き出しの量を計算できる。

$$\frac{1}{\Delta V} \text{div } \mathbf{A} \Delta V \quad (48.16)$$

箱の内部で湧き出した分だけ、水はこの箱の外に流出するが、この関係について次の項目で考える。

#### 48.1.10.2 ガウスの定理

前項目での箱の体積、つまり  $\Delta V$  を極限まで小さくしていき、それをある領域で積分する。この領域をつぎのように設定する。閉曲面  $S$  をとり、その内側の領域を

$\Omega_S$  とする。また、この領域の体積を  $V$  とする。そして、まず体積  $V$  を分割して  $\Delta V$  とする。この  $\Delta V$  を領域  $\Omega_S$  で積分するということは、以下の通りに計算するということである。

$$\lim_{\Delta V \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\Delta V} \sum \operatorname{div} \mathbf{A} \Delta V \right)$$

積分記号を用いれば、

$$\int_{\Omega_S} \operatorname{div} \mathbf{A} \, dV \quad (48.17)$$

である。この積分は、領域  $\Omega_S$  からの湧き出しの量を計算するものである。

ところで、領域  $\Omega_S$  から湧き出した量は領域内にとどまれず、外にあふれてしまうはず。つまり、湧き出した分だけ、領域の表面である閉曲面  $S$  を貫いて領域外へともれてしまう。閉曲面  $S$  から流れ出る量は、

$$\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (48.18)$$

と計算できる。

従って、“湧き出した分だけ流出する”ことを式で表現するならば、式 (48.17) と式 (48.18) が等しいとするべきで、すなわち、

$$\int_{\Omega_S} \operatorname{div} \mathbf{A} \, dV = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (48.19)$$

が成立している。これを ガウスの定理 という。左辺が体積積分で、右辺が面積分になっている面白い定理である。

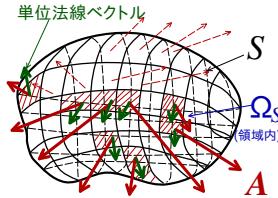


図 48.14 ガウスの定理 (イメージ)

ガウスの定理を感覚的に説明してしまったが、これは数学的には厳密に証明されるべき定理である。このノートではこの定理の証明はしないが、この定理は大事なもの

だから、ベクトル解析の教科書を読んで、証明を確認するとよい。ここでは、この定理の直感的な理解と扱い方がわかれれば、それでよいことにしたい。

#### # memo No.127: 整理

もう一度整理しよう。任意の閉曲面を  $S$ 、この閉曲面  $S$  の内側の領域を  $\Omega_S$  と表す。また、閉曲面の単位法線ベクトルを  $\mathbf{n}$  表す。このとき、任意の3次元ベクトル  $\mathbf{A}$  に対して以下の関係が成り立つ。

ガウスの定理

$$\int_{\Omega_S} \operatorname{div} \mathbf{A} \, dV = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (48.20)$$

言葉で式を表現するならば

(領域内での湧き出し量) = (領域外への流出量)

といった感じだろうか。

#### # memo No.128: 「ガウスの法則」と「ガウスの定理」

“ガウスの法則”との区別をしつかりしておくこと。

- ガウスの法則は電場や磁束密度の振る舞いを表す “物理法則”
- ガウスの定理とはベクトルの発散に関する “数学の定理”

#### 48.1.10.3 ベクトルの回転 (rot)

ベクトルの回転を式で表現することを考える<sup>15)</sup>。

ベクトルの回転とは、1つのベクトルが時間的に向きを変えて変化するような回転ではない。ベクトル空間自体が回転運動をしているのでもない。どのようなことが、具体例で考えよう。

ここでも、具体的なベクトルの例として水の流れ(川)を用いる。川を見ると、岩や石の付近で“渦”を巻いている所があるだろう。これから考えることは、この“渦”を数式で表現することである。

物体の回転を扱ったときは、直接的に物体そのものの運動を考えることができた。ところが、水などの流体は物体とは異なり、その流れ自体を物体と同じように考える

<sup>15)</sup> 回転のことを rotation というので、その頭文字の rot が数式記号として用いられる。

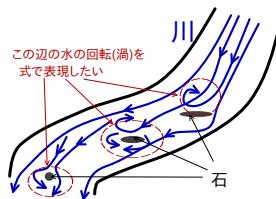


図 48.15 川で生じる渦のイメージ

とややこしい。そこで、どのような流れかを知るために、川の上に葉を置いてみるのだ。葉は、水の流れに従って移動する。この葉の動きを観察することにより、川の様子を探ることができる。川の全体の様子を把握したい場合には、その川のいたるところに葉を置いて見て、その葉がどのような動きをするかを、観察すればよい。

葉が1つの場所にとどまっている、その場で回転している状況を想定する。この回転面に  $x-y$  面をとる<sup>16)</sup>。そして、葉が回転している一点を原点にとる。

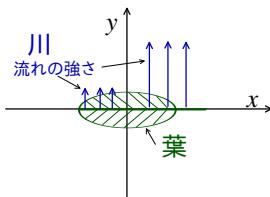


図 48.16 回転(渦)が生じるための条件

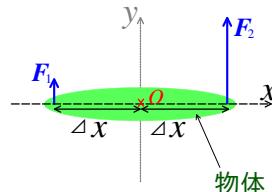


図 48.17 物体(葉)の回転 1

葉が原点を中心に回転するには、水の流れが原点の中心を境に、その勢いが異なつていればよい。図 48.16 でいえば、左側の勢いと右側の勢いが違つていればよいということである。この図はもっと簡単になる。

この図 48.17 で、左右両方の原点を中心とする力のモーメントを考えれば、左側が  $F_1\Delta x$  であり、右側が  $F_2\Delta x$  である。ここで、図より  $F_1 < F_2$  であるから ( $\Delta x$  は共通であるとする)，この二つの力のモーメントのは互いに異なった値であり、従つて、物体は回転をしているはずである<sup>17)</sup>。

<sup>16)</sup> これは葉が置かれている表面、つまり水面に  $x-y$  にとるのと同じである。

<sup>17)</sup> 回転するように仮定を設けているので、当たり前と言ってしまえばそうだが、確かに回転を表現できるという確認をここでしたのである。

ここからが少しヤッカイな部分だが、それは今考えている対象は物体の回転ではなく水の回転、つまり“渦”である。この渦とはベクトルの回転である。物体の回転そのものを見るときは力のモーメントを考えればよかつたが、ベクトルの回転では力のモーメントなんてものは直接には定義できない。だから、ベクトル(渦)の上に物体を置いて、その回転でもってベクトルの回転の様子をうかがってみようのである。そしてそれによって、ベクトルの回転の様子を、物体の回転として観測できることが分かった。この考えをもっと進めていこう。簡単のために、原点付近の水の様子を考えてみる。

力の方向が左右で同じ方向を向いていなくともかまわない。

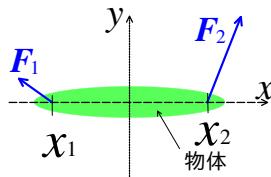


図 48.18 物体(葉)の回転 2

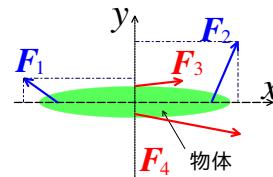


図 48.19 物体(葉)の回転 3

この図のような状況でベクトルの渦が起こるには、物体にかかる  $x$  方向と  $y$  方向の 2 方向で考えればよい。それを図 48.19 に示す。

ベクトル場とはここでは物体が水の流れから受ける力のことだが、これを  $\mathbf{F}(x, y)$  とする。ここでは話を簡単にするために、ベクトル場は時間に依存しないとした。

先ほど考えた左右それぞれ力のモーメントの関係は  $F_1\Delta x > F_2\Delta x$  であった。これを以下のように書き直す。

$$F_1\Delta x - F_2\Delta x > 0.$$

$$(F_1 - F_2)\Delta x > 0.$$

さらにこの式の左辺は 0 より大きいので、何らかの定数、もしくは関数があるので、それを  $a(\mathbf{r}, t)$  と書いて、

$$(\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2)\Delta x = a(\mathbf{r}, t)$$

とする。今考えている力  $F$  は、 $x$  座標と  $y$  座標ごとに違うはずである。つまり、 $F$  は  $x$  と  $y$  の関数であるから、

$$(F(x_1, y_1) - F(x_2, y_2))\Delta x = a(\mathbf{r}, t).$$

今考えているのは、原点付近の水の回転の様子であり、 $x_1$  と  $x_2$  はさほど離れていないと考えてよい。 $x_1$  と  $x_2$  の距離は前の図で  $2\Delta x$  としていた。 $2\Delta x$  を  $h$  に置き換えてしまおう。つまり、 $x_2 = x_1 + h$  である。

$$(F(x_1, y_1) - F(x_1 + h, y_2))\Delta x = a(\mathbf{r}, t).$$

上式の左辺第一項と第二項を入れ替えてみよう。

$$(F(x_1 + h, y_2) - F(x_1, y_1))\Delta x = -a(\mathbf{r}, t).$$

ところで、物体の回転を現すにはベクトルの外積を用いた。

ベクトル  $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$  の回転  $\text{rot}$  は次式で定義される。

$$\text{rot } \mathbf{A} := \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \quad (48.21)$$

#### 48.1.10.4 ベクトルの勾配 (grad)

ベクトル  $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$  の勾配  $\text{grad}$  は次式で定義される。

$$\text{div } \mathbf{A} := \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}, \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right) \quad (48.22)$$

#### 48.1.10.5 ベクトル解析の公式 (演算子)

$$\Delta := \text{div grad} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (48.23)$$

$$\text{rot rot} = \text{grad div} - \Delta \quad (48.24)$$

#### 48.1.10.6 ストークスの定理

任意の閉曲線を  $l$ 、この閉曲線を縁とする曲面を  $S_l$  と表す。また、閉曲線  $l$  の単位接線ベクトルを  $\mathbf{t}$  と表す。このとき、任意の 3 次元ベクトル  $\mathbf{A}$  に対して、

$$\int_{S_l} (\text{rot } \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} \, dS_l = \oint_l \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} \, dl \quad (48.25)$$

が成り立つ。これを ストークスの定理 という。



# 49

## 行列

49.1 行列とは



第 X 部

思想



# A

## 感覚・思考・表現

**コメント** この章は、私の個人的な考えをメモしておくものである。だから、記述内容が誤っているかもしれない、考え方違いや、誤解が含まれていることと思う。誰とも議論もせずに記述することであるから、偏った考え方になりがちだし、最悪の場合、矛盾がふくまれているだろう。それにもかかわらず、この章の文章は“言い切り”の形で記述する。いちいち、「だと思う」という語彙を文章末尾につけてしまうと、読みにくくなってしまうし、第一、カッコ悪い。なので、偏った考え方や誤った主張を強く強調していると思われるかもしれないが、そうではなく、単に現在私の考えをメモしているものに過ぎないと、捉えてもらいたい。

### A.1 根拠なしに、確信できること

根拠なしに確信を持てることは、「考えられる」ということである。そして、考えるという行為は、言葉<sup>1)</sup>を用いて行われることも、根拠なしに認めることができる<sup>2)</sup>。

何かものを考えるときには、考えるための材料と道具が必要である。材料というの

▶ 1) ここで言う「言葉」とは、“書くことによる表現”と“話すことによる表現”的な意味で使っている。

▶ 2) 「言葉なしに考える」という行為は可能だろうか。少なくとも、私には実行不可能である。

は経験であり、道具というのは言葉である。考えるという行為とは、経験を道具により整理して、その経験に対する理解を深めるという行為である。

私たちの経験する全ての事柄を、世界と表現することにしよう<sup>3)</sup>。私たちは、世界を経験できる。経験を記憶できる。また、経験を不思議がったり、その不思議を考えられる。そして、その考えを言葉や絵で表現できる。そして、このような表現を行うことで、自分以外の相手に自分の考えを伝えることができる。

これが、私の「考えること」の根本的な思想である。これから物理学の学習は、この思想のもとに行う。

#### # memo No.129: 言葉と思考の順序

考えるという行為は、言葉を使って行われう行為である。もっと強い言い方をすると、考えるという行為は言葉なしに行なうことは不可能である。つまり、言葉を習得する以前は、ものを考えることができないことになる。となると、言葉の見習得の赤ん坊は、を考えることができないのだろうか。この問題に対する、私が納得のできる答えは、まだ存在していない。

しかし、これだけは言える。言葉の習得する以前から、この世界を感じている。世界を感じるという経験の1つに、言葉がある。経験が「思考する」という行為の基礎に位置するのである。しかし、この推論に確証はもてない。経験が思考の基礎をなすということを、今から身をもって体験することができないからだ。言葉習得以前の状態にもどり、言語を習得しなくとも世界を感じとることができるのだな、という感覚を体験できればよいが、これは不可能である。推論をいくら重ねたところで、あるいは、多くの言語見習得の赤ん坊を観察したところで、自分自身で実感できないので、納得はできない。納得はいかないけれど、今の私は言語を扱っている<sup>4)</sup>。また、その習得に多くの時間を費やしたことでも記憶にある。ということは、言語見習得の時期があつたという推論は妥当であるとも思える<sup>5)</sup>。

#### # memo No.130: 言葉の習得

言葉は、人間が生まれながらにてもっているものではない。言葉は、意思疎通を行うために、先人の経験により発明され、洗練されてきたものである。

私たちは、生まれてから自然と母国語の文法を習得する<sup>6)</sup>。母国語は体系的に教わることな

<sup>3)</sup> ここでいう世界とは、世界の国々を表しているのではない。私たちが目や耳などの、いわゆる五感で感じ取る全てのことを総合して、「世界」と表現する。

<sup>4)</sup> 少なくとも、とりあえずの不都合なく、意思疎通ができる程度に。

<sup>5)</sup> 実際に言語見習得の時期の記憶がないので、単なる推論でしかない。

<sup>6)</sup> 国語の時間に、強制的に習得させられることもあるだろう。ひらがなや、カタカナ、漢字を覚えるのには苦労したはず。また、使い慣れない語彙を使用し始める場合、単語そのものを誤って使ってしまい（「つくる」を「くつる」に間違うなど）、大人から、その場で間違いを指摘され、修正された経験もあったことだろう。しかし、その間違いの指摘は言葉によって行われたのであり、それにより、誤りを自覺してそれを修正しようと努力できたはずである、全ての言葉を自然に習得できるわ

い。常に生の言葉を聞き、そして、その時の状況を機能するすべての感覚器から感じ取り、言葉の使用法を身につける。論理学や数学で言うところの公理<sup>7)</sup>があるわけでもなく、ただ漠然と、その使われ方を悟り、自分のものとしていく。人間には、言葉を習得する能力が生まれながらにして備わっているのだ。なぜだろうか。意思疎通をうまい具合に行うためだとか、いろいろ後付的な説明がなされることもあるが、そんなことは確かめようがない。なんとでも言えるのだ。ここでは、深く考えずに、「私は言葉を使うことができる」ということを、素直にそのままの形で受け入れておこう。

#### # memo No.131: 意思疎通

言葉はどんな時に使われるのだろうか。いや、おかしな疑問を投げかけてしまった。そんなの、意思疎通を行うために決まっているじゃないか。本当に、そうなのか。言葉だけで、意思疎通が十分に可能だろうか。いや、できないはずだ。誤解や言い間違いなどで、正しく意思疎通ができないこともあるだろう。言葉だけで十分に意思疎通はできないのは、当たり前で、のために、他の手段として、手や体を動かして（身振り手振り）表現することもある<sup>8)</sup>。図を使って表現することもある。音楽で気分を表現したりもするだろう<sup>9)</sup>。とにかく、意思疎通のための道具は、言葉だけではない。

だけど、ここまで書いといてなんだけども、ノートで自分の考えを示すのには、図と言葉でしか表現できない。なんともやりづらいが、どうしようもない。ここは我慢して、図と言葉だけで伝わるように、記述しなければならない。図と言葉だけで、どれだけのことが表現できるかわからないが、頑張って考えながら、記述していこう。たとえ時間がかかるとも、文が長つたらしくなるとも、丁寧に記述していくば、どんなことでも言葉で伝えることができる」と信じて、記述していこう。

私は考えることができ、それを言葉で表現でき、そして、その言葉によって他者に自分の考えを伝える事ができると信じる。そして、逆に、他人の表現する言葉を理解し、他者の考えを

---

けではないのだが、言葉の基本的な使い方は誰から教わったものではなく、自分の周囲に飛び交っていた母国語を聞くことにより、非言語的に習得するのである（そうでなければ、言葉の使い方を間違つときの、その間違いの指摘を理解することができないことになる）。言葉の文法を、0から言葉により説明することはできない。というのも、文法を説明しようとすると、その説明自体に言葉を使用せざるを得ず、つまり、「文法を知る前に文法を知っていなければならない」といった、自己言及的な矛盾がおこるからである。しかし、現に私たちは母国語の文法を習得して使用している。

►7) 最も基礎となる、疑いようのない事実のこと。万人が根拠なしに正しいと感じること。例えば、数学で言うと、「 $A=B$  で  $B=C$  のとき、 $A=C$ 」といった感じの、最も基本的な約束のことを言う。これは有無を言わさずたたきつけられることである。その根拠を求めてはならない。公理の根拠なんてものは、はじめから存在しないのだから。言い方を変えれば、何かを論理的に考えようとした時に、その根拠が求められることがあるが、その根拠は果てしなく問うことは不可能である。いずれは、根拠を示すことができない当たり前すぎる事柄に、直面することだろう。それを公理というのである。

►8) 別れ際に相手に対して手を振ったり、違うことを示すために首を横に振ったりするだろう。

►9) 気分が良い時には、鼻歌が自然にでたり、踊ることだってするでしょ？

受け入れられることも、信じる。さらに、自分と他人とで会話を続けることにより、より深く正確に互いの考えを理解し合えると信じよう。ここのところをこれ以上疑いだすと、言語哲学的な世界に陥ることになり、抜け出せなくなってしまう。もうこれ以上、言葉について考える事はせずに、話を先に進めよう。

## A.2 表現

思考を表現する最も有効な道具が、言葉である。また、時には、言葉よりも絵に書いたほうがより伝わりやすいこともあろう<sup>10)</sup>。言葉や絵以外にも、ある規則に従った記号により、思考を表現することも可能である。<sup>11)</sup> 表現するという行為は、言うまでもなく、自分の考えや思いを自分以外の相手に伝えるということである。

## A.3 「科学」の思想

"科学的" という言葉は日常的に使用される。特に、最新技術という意味で使用されることが多いように感じる。しかし、"科学的" とはどういうことかを考えてみると、残念なことに、明確なイメージを描けないことに気付く。

### # memo No.132: 基礎がない、考えが循環する

ものごとを考える前には、経験が必要である。考えは、その経験の不思議さを基に行われるからである。では、この経験はどう捉えら得るのだろうか。当然ながら、経験は眼や耳などの五感で捉えられる。そして、その認識は、脳に伝わって初めて経験を実感し、記憶される。だから、最も基礎的な学問分野は脳科学なのだろうか。いや、これは違う。脳は生物の一部であり、脳科学は生物学の一分野として位置するものである。生物はその組織の内部で、化学反応を起こして生命を維持している。従って、化学が、生物学よりも基礎的な位置にあるはずである。また、化学で扱われる化学反応は、突き詰めれば、原子や分子の結びつきであり、原子や分子の運動は物理学により説明される。そして、物理学は数理的推論をその拠り所としていて、数学と論理学が物理学の基礎となっている。数学と論理学は、元を正せば、私達が日常生活の

▶ 10) 宣伝看板や、ポスターなどが良い例だ。

▶ 11) 特に、音楽は言葉によって表すことは難しい。原理的に不可能とは言わないが、そうして表現できたものは、とても煩雑で理解しがたい表現になっていることだろう。では、音楽を伝える方法はないのかというと、もちろん、そんなことはない。周知の通り、楽譜 という音楽独特の表現方法が考えだされている。楽譜は絵でも言葉でもないが、人間のもっている、ある種の感覚を表現するものである。

また、他例を上げれば、数学や記号論理学なども、記号の羅列である。

「言葉」という語彙は、これらの例のような意味を含めて使われることも多い。これは、文脈によって理解できるだろう（著者はそうわかるように書くべきだ）。

## 観測できない世界

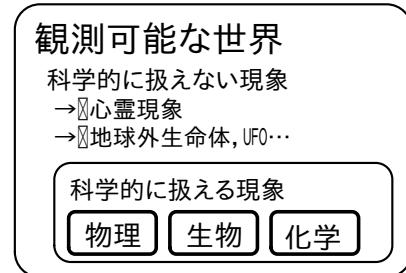


図 A.1 科学的に扱えることの範囲

中で使用している言語の曖昧な部分を除き、正しい思考とは何かを探る学問である。そして、その思考を行うには、前もってその思考に関する経験が必要である。経験は五感で感じ、脳によって認識され、……

循環する。上記のどこかに誤りがあるのだろうか。



# B

論理



## 第 XI 部

思うこと，思つたこと



# C

## 素朴な疑問

### C.1 最も基本的なこと

学問を学ぶにあたって，“最も基本的で信頼できること”を基礎にして、その上で学習を進めることは、当たり前のことである。では、その“最も基本的で信頼できること”とは何だろうか。

これは多分に哲学的な問題提起であるが、ここでは、今後、物理学の学習を進めていくにあたり、思想の最も基本的なよりどころを確認するためのもので、哲学に深く介入することはしない<sup>1)</sup>。

私は、最も基本的で信頼できることとして、「考えること」をあげたい。これは独我論できな思想である。独我論とは、極端に言えば、この世界に存在を確信できるのは私の思考のみであり、私が今感じている温度や光などは、私の思考によって感じていると錯覚しているのであって、実在しているのではない、という考え方である。こう考えると、自分以外の人間とは、私の思考が作り出した幻想であり、実際にそこにはいるわけではないということになる。そう、信じられるのは、今考えている私がここ

<sup>1)</sup> 正直に書こう。哲学に介入することは、私のような低レベルの頭では、不可能である。開き直って、言うならば、そこまで深く考えてもしようがない、思うところもある。

にあるということである。

## C.2 私の思想の根本

では、もう一段階突っ込んでみよう。「考える」ということとは、どうすることなのだろうか。「考える」という動詞の使い方は、おおよそ次の様だろう。今晚の献立を考える。人の気持ちを考える。将来の進路を考える…などなど。考えるという作業を行っているとき、「言葉」を道具として使う。また、時には「図」を使って考えることもあるだろうが、これは単に言葉で考えるよりも図を用いた方が考えやすいからであり、言葉では思考不可能であるということではない。思考はすべて言葉で表現できる(と信じる)。

私の、最も信頼できる唯一の基本的なことである、私の思考は言葉を用いて実行される。では、その次の疑問として、「言葉」とは何か、ということが生まれてこよう。

この章では、「考えるとは何か」について、私が考えること、というか、思っていることを記述する。

## C.3 思考の道具

考えるという動作は、言葉を用いて行っていることを確認した。言葉を用いて考えているので、この言葉の使用限界が思考の限界であるということになる<sup>2)</sup>。

単に「言葉」といっても、それは様々な形で存在する。英語やドイツ語、フランス語、イタリア語などたくさんだ。各国の人々は、自国のあるいは使い慣れた言葉で考えていることだろう。ここでは、どのような国々の言葉も、その適用限界は変わらないと仮定して、話を進めて生きたい。多少、言葉の適用限界があったとしても、それは話にならないくらい、細かいことに過ぎないと信じる<sup>3)</sup>。

もちろん、言葉で説明できないこともある。ある種の“ひらめき”とか、もろもろの感情とかを言葉で表現することは難しいことである。いや、不可能といつてもよい。しかし、考えるということに関しては、言葉のもう機能は十分である考える。私

<sup>2)</sup> Wittgensteinは「論理哲学論考」という著作で、このことを詳しく論じている。後に、彼自身によってこの著作は間違いであるとされてしまうのであるが…このノートでは、そこまで深く入らない。だって、とっても難しいから。

<sup>3)</sup> 実際、各国の人々が同じように「考えて」いるという現状からこのような仮定を設けてもよいと考えている。ただし、ここでは、「考える」ということに関して、文化や伝統、生活習慣などの影響は無視する。

は、「どんな思考も言葉にできる」と信じて、このノートを作成する。

## C.4 言語の曖昧さ

思考を言葉で記述できたとしよう。その次に問題となるのは、どれだけ正確に思考できるか、ということだろう。いや、視点を変えて言い換えよう。私たちが行う多くの思考の中で、正しい思考とはどういうものなのかを、整理しなければいけない。わけのわからない思考や、意味を成さない思考などを排除したいのである。

## C.5 日常言語

普段の生活で使っている言語は、曖昧な表現をすることが多い。曖昧表現というのは、人によって解釈が異なってしまう表現のことである。「美しい景色」だの、「大きな木」だのと言って、すべての人が同じ情景を浮かべることはまずない。これでは正しい思考が、十分ではない他の人間に伝わることはない。

しかし、このような例から、普段使っている言語は正しい思考に適していないと、判断してはいけない。事実、過去の多くの頭のいい学者さん達は、言語を用いて正しい思考をし、様々な学問を作り上げている。大切なのは、曖昧な表現を避けることである。ただ、言語には使い方によって、曖昧に表現できてしまうだけなのである。

では、言語の曖昧な表現を使わないようにするには、どうしたらよいだろうか。まず考えつくのは、日常言語から万人が認める最も基本的な部分を抽出し、それを元に思考をすればよいことである。言語の最も基本的な部分とは、「論理」である。次に、論理について簡単に触れよう。



# D

論理学とか、数学とか

## D.1 論理

私たちが普段の生活で使っている言語のうち、曖昧な使い方を避けて、万人に共通に伝わるようにしたい。そのためには、論理と言うものを考える必要がある。論理は、日常言語の中の一部にある。相手に自分の考えを伝えるとき、物事を筋道立てて伝えようとするだろう。自分の考えができるだけ性格に相手に知ってほしいからである。さて、このとき私たちは、論理を使っているのである。論理は、何個かの公理<sup>①)</sup>と推論規則<sup>②)</sup>を基に構成される。少數の公理と推論規則から、主張したいことがすべて主張できる体系を作ることが学問の目的である。これを思考経済と言ったりする。公理と推論規則は、少なければ少ないほどよい。

---

<sup>①)</sup> 公理：万人が認める事実のこと。何の反論なしに認めなければならないことである。ある仮説を検証するとき、その仮説の根拠をどんどん探ることになる — A は B と C からなっていて、B は D から、C は E を基にしている・・・と言うように—。しかし、いつまでもこれが続くわけではない。いつかは、どうしようもなく“当たり前すぎて”，説明ができないことにたどり着く。公理とは、その当たり前の事実を明示するものである。

<sup>②)</sup> 推論規則：ある仮定から、別の仮説を作り出せる規則のこと。公理と同様、有無を言わざず認めさせられるものである。

## D.2 論理学

この論理について、詳しく研究する学問に **論理学** がある。ある仮説を記述した文で、本当か嘘かをはっきりと区別できる文のことを、**命題** という。論理学はいくつかの必要最小限の公理と推論規則を組み合わせ、命題の証明を繰り返し発展させていくものである。命題と推論規則の組み合わせのことを、**公理系** と言う。この公理系には、次の 3 つの性質が備わっている必要がある。一つは **独立性** で、公理形の中のどの 1 つの公理を選んでも、他の公理からその公理を証明できないような性質である。二つ目は **完全性** と言われるもので、主張したい命題が、その公理系からすべて導けることである。三つ目は **無矛盾性** と言われるもので、公理系に互いに矛盾する公理を含んでいないことである。

論理学とは考察の足固めである公理系を設計し、体系を作り上げていく学問でもあるのだ。どれだけ詳しく説明できるかと言う疑問の最も根本的な部分の研究がここでなされる。

## D.3 数学

数学とは、論理に複素数を組み合わせた学問であると言える。その研究の対象はおもに、複素数である。複素数の一部には、自然数が含まれている。残念なことに、自然数を含む公理系には、完全性、無矛盾性が常に保たれていると言う保障がないことが知られている。この事実は Gödel の 不完全性定理 とよばれている<sup>3)</sup>。

集合論により無限を扱えるようになってきたころ、この無限を起因として様々なパラドクスが発見されることとなった。「自分自身を要素として含まないすべての集合」がその最も有名なものである。ちょっと考えてみよう。

$\omega$ ： 自分自身を要素として含まないすべての集合

と定義しよう。そして、次の問題、すなわち

問題：  $\omega$  自身は、 $\omega$  に含まれるか否か

を考えてみよう。すぐに明らかな矛盾が見えてくるだろう。

$\omega$  は自分自身に含まれると仮定してみる。すると、 $\omega$  の定義「自分自身を要素として含まない」という仮定に矛盾する。では、 $\omega$  は自分自身に含まれないと仮定した

---

<sup>3)</sup> 参考文献：廣瀬 健、横田 一正 [著]、「ゲーデルの世界」、鳴海社、2004

らどうか。実はこれでも矛盾が生じる。なぜなら、「自分自身要素としてを含まない」という定義上、仮定で「自分自身は含まない」言っているので、自分自身を含むべきだと言う結論が出来てしまう。肯定的に仮定しようが、否定的に仮定しようが、どちらにしても結果はその仮定と矛盾するのである。

Russell らは、この問題を解決しようと階という概念を導入し、命題に自分自身を含むことのないように制限を加えた。しかし、問題はこれだけではとどまらず、山のように残されていた。

Hilbert はこのような問題の山を、数学の危機であると自覚し、これを解決しようと計画した。Hilbert はこの数学の危機と言われる問題を 23 個の命題にまとめた。そして彼は、この 23 の問題を証明し解決しようと呼びかけた。Gödel の不完全性定理はこの 23 の問題のうちの一つ<sup>4)</sup> の否定的な回答であった。

だから、物理学に公理系を作成して、論理的に構成しようとしても、無駄である。しかし、物理学は自然の構成を探る学問だから、この点に関してはあまり気にすることはないと思う。

## D.4 物理学

物理学は、自然がどのようにになっているかを探る学問である。<sup>5)</sup> 「なぜ (Why)」を問うのではなく、「どのように (How)」を問うのである。

なぜ自然がこのように<sup>6)</sup> なっているのか、とか、なぜ宇宙があるのかとかを考えるのは哲学であって、物理学ではない。物理学ではこういう、"なぜ"を問うような疑問には答えられない<sup>7)</sup>。

物理学とは、自然の性質を見つけるものである。この「性質」という言葉は物理学では法則と呼ばれている<sup>8)</sup>。自然の法則を、実験や数式を通して見つけ出すことが物理学の目的なのだ。

自然はデータラメに変化しているのではなく、何か一定の法則に従っているということは、経験上理解できることと思う。例えば、特別に力を加えない限り、高いところから低いところへ、物体は落ちていく。落とした消しゴムは、拾わないと手元に

<sup>4)</sup> 第 2 番目に掲げられていた問題だった。

<sup>5)</sup> "なぜ"自然が私たちの感じているようになっているのかを探る学問ではない。

<sup>6)</sup> 普段の生活で、私たちが感じている自然を思い浮かべてみて。

<sup>7)</sup> ただ、"なぜ"という問を深めていく事は可能で、実際に、物理学の発展はその繰り返しだ。その様子は、これから学習で実際に感じることになる。

<sup>8)</sup> 法則：後で詳しく記述する。

戻ってこないのである。何でだろうか。この原因を探り、「法則」として記述するのである。

このことについては、物理学を学び始めた段階ではまだ実感がわからないかも知れない。学習していく過程で、だんだんとわかることだろう。

このノートでは物理学を学習することが目的である。自然はどのような法則に従つて変化しているのだろうか。少しづつ考えることにしよう。

# E

## 他愛のない、思つたこと

### E.1 生まれ変わる？

「生まれ変わるとしたら、次は何になつていい？」と聞かれることがある。この質問には、何も考えずに答えることが、コミュニケーションを円滑にする為に良いのだが、やはり引っかかる部分がある。

引っかかることとは、「生まれ変わる」ということの定義である。生まれ変わると否かということも当然疑問なのだが、それよりももっと疑問なことがある。生まれ変わることが可能かどうかという疑問には、おそらく答えることは不可能だろう。生まれ変わることが不可能であるとしたら、話はそれで終わりであるので、ここでは、生まれ変わることができるものとして、話を進めたいと思う。

疑問というのは、“今の記憶が忘れ去っていたとしても、生まれ変わったと言えるか”というものである。以前までの記憶がない以上、当然、自分自身には生まれ変わったという意識は生まれない。第三者的な立場にたって、他人の生まれ変わる瞬間を見たとしよう。その場合、生まれ変わることが可能だと、納得することだろう。しかし、その他人には以前までの記憶がなく、やはり、その人にとって、生まれ変わったという意識はないはずである。たとえ、その瞬間を見ていたと教えてやったとしても、その人は生まれ変わったのだと明確に認識することは不可能である。

生まれ変わって以前までの記憶がない以上、たとえ本当に生まれ変わったのだとしても、自分自身にとっては、別人であると意識せざるを得ないと考えるのが、自然なのではなかろうか。実際、今の私には、こう考えることが一番妥当だと思っている。たとえ、生まれ変わっていたとしても、記憶が残っていない以上、それはその人にとって別ものなのだと考えたい。

まとめよう。求める答えは、生まれ変われるか否か、ということだったが、これには、答えることはできない。生まれ変わることができないのであれば、話はここで終了になる。もし、生まれ変わることがわかったとしても（他人が生まれ変わったことを見るなどして）、自分自身では認識できないのであれば、それは生まれ変わったと考えるべきではない、と思う。

## E.2 教科書に書かれていること

物理学や化学・生物学・天文学などの自然現象を説明すべく、それを文字として記述し、本という形で記録できる。世の中には多くの専門書、教科書、解説書がある。しかし、どれをとっても自然現象をすべて説明するものはない。つまり、本を読んだところで、世界を理解できるわけではない。本を読んでわかることは、先人たちが苦心して築きあげてきた壮大な理論体系ではあるものの、自然現象についてのほんの僅かなことでしかない。

物理学を学ぶということは、物理学の論文や専門書、教科書を読むということではなく、実際の自然現象に触れるということである。そして、なぜだろうと疑問に感じることであり、さらに、それを解き明かしたいと思うことである。

物理学を学びたいから物理学の教科書を読む、なんてことは、甚だ見当違いである。物理学は自然現象を説明する理論であり、つまり、実際に起こっている現象を説明しようととするものである。重要なのは、現象に触れること。そして、その現象について、その特徴をできるかぎり詳しくしらべること。そうしてやっと、現象の特徴はどのような法則に従っているかといった、理論的研究に入るるのである。

物理学の本を読むということは、今知られている理論を把握するということであり、物理を追求するという行為ではない。あくまでも、先人の得た知恵を吸収するということである。しかし、それは、探求の第一歩ではない。物理学の本を読んで、物理をわかった気になっているとしたら、とても残念なことである。

## E.3 心配レベル

心配という心情には、4つの段階があると思う。それは、次の通りだ。

- (1) 心配
- (2) 不安
- (3) 恐怖
- (4) 絶望

下に行くほど（数字が大きくなるほど）、心配レベルが上がる。

具体例を示してみよう。いつもそばにいる大切な人が、一週間の間、自分の前からはなれることになることを考えてみる。海外旅行にでも出かけることにもしておこう。

その時、あなたは大切な人が、目の前から離れることで、心配になる（はずだ）。交通事故に遭わないだろうか、悪い人に騙されたりしないだろうか、等々。これが、心配という心情だ。この段階では、心配するだけで、何も行動を起こさないことだろう。

一週間たっても、1日、2日、大切な人が帰って来なかつたとしよう。あなたは不安に陥ることだろう。何があったのか気になって仕方がない。こうなると、あなたは、どうにかして、連絡を取ろうと必死になるはずである。これが不安という心情。

どうしても連絡がつかなかつたら、その不安は恐怖になる。事件に巻き込まれたとか、事故にあったのではないかとかと、考え始める。この時、大切な人が傷ついているかもしれないという、恐怖を覚える。

その恐怖が、最悪の形で現実会ったとしよう。このとき、あなたは為す術がなく、絶望に至る。その後、自分のできる限りの行動を、世の中に対して必死に働きかけることになる。

## E.4 "分からないこと" と "知らないこと"

突然、新しい環境に放り込まれたとしよう。このとき、大変幸福なことに、近くにその環境に詳しい人がいるとする。しかし、その人は、私に対して、その環境のことを説明することをあまりしない。そのひとは、「わからないことがあつたら、何でも質問してください」と言う。新参者の私にとっては、その環境に詳しい人は、唯一頼りにできる大変ありがたい存在である。しかし、私がその人に質問するには、時間がかかる。自分が分からぬことを把握しなければならないからである。わからないこ

とを把握するには、知らないことをリストアップしていく必要がある。知らないことは、当然、質問できないからだ。例えば、「不確定性原理」という言葉を知らない人は、それについて詳しい人がそばに居たとしても、質問することはない。質問できないのである。

何が言いたいかというと、教わる側の人間にが取るべき行動は、その周囲の環境を、できる限り、見て聞いて把握することである。そして、教える側の人間が取るべき行動は、その新参者が知らないことを示してあげる事である。

わからないことが質問できないと言つて、嘆く必要はない。そんな場合は、周囲の環境を執拗に見たり聞いたりして、できる限り早く把握する、という目標があるのであるから、それを行えば良い。それができなければ、諦めて、別の場所に行くより他はない。

## E.5 故事成語

### E.5.1 華胥の國

理想的な世の中のこと。また、心地よい夢の正解のこと。列子から。

### E.5.2 胡蝶の夢

夢と現実の違いは、実ははつきりとしないということ。また、人生のはかないことのたとえ。莊子から。

### E.5.3 上善は水のごとし

最高の善を、水の性質にたとえたことば。老子から。

### E.5.4 骥足を伸ばす

優秀な才能を存分に發揮することのたとえ。また、自由気ままに行動すること。三国志・蜀書-龐統伝から。

E.5.5 驥尾に付す

それほど才能がない者でも、才能があるものについて行けば、何かをやりとげることができることのたとえ。史記-伯夷伝から。

E.5.6 木に縁りて魚を求む

やり方をまちがえると、何も得られないことのたとえ。的外れで、愚かな行為のたとえ。孟子から。

E.5.7 人間到る所に青山有り

骨を埋めるところはどこにでもある。大望を実現するためには、故郷にこだわらず、広い世間に出て活動すべきである、ということ。

E.5.8 過ぎたるは及ばざるがごとし

度が過ぎたものは、足りないものと同様によくない。ものごとには程よさが大切ということ。やりすぎはよくない。足りないのもよくない。ちょうどよいのがいい。論語から。



## 参考図書・教科書等

- [1] 藤田 真作 [著], 『LaTeX 2 $\varepsilon$  コマンドブック』, ソフトバンクパブリッシング, 2003
- [2] 吉永 徹美 [著], 『独習 LaTeX 2 $\varepsilon$ 』, 翔泳社, 2008
- [3] 宮腰 忠 [著], 『高校数学 + $\alpha$  基礎と理論の物語』, 共立出版, 2009
- [4] 小平 邦彦 [著], 『解析入門』(軽装版), 岩波書店, 2006
- [5] 戸田 盛和 [著], 理工系の数学入門コース 3 『ベクトル解析』, 岩波書店, 2006
- [6] 数研出版編集部 [編著], 『視覚でとらえる フォトサイエンス 物理図録』,
- [7] 大貫 義郎, 吉田 春夫 [著], 岩波講座 現代の物理学第 1 卷 『力学』, 岩波書店, 1994
- [8] 阿部 龍藏 [著], 岩波基礎物理シリーズ① 『力学・解析力学』, 岩波書店, 2005
- [9] 藤原 邦男 [著], 『物理学序論としての 力学』, 東京大学出版会, 2004
- [10] 山田 直平, 桂井 誠 [著], 電気学会大学講座 『電気磁気学』 3 訂版, Ohm 社, 2004
- [11] 永田 一清 [著], 基礎の物理 4 『電磁気学』, 朝倉書店, 1998
- [12] 砂川 重信 [著], 物理テキストシリーズ 4 『電磁気学』, 岩波書店, 2003
- [13] 川村 清 [著], 岩波基礎物理学シリーズ③ 『電磁気学』, 岩波書店,
- [14] 太田 浩一 [著], 『マクスウェル理論の基礎 相対論と電磁気学』, 東京大学出版会, 2009(第 4 版)
- [15] 太田 浩一 [著], 『マクスウェルの渦 アインシュタインの時計 現代物理学の源流』, 東京大学出版会, 2005(初版)
- [16] 太田 浩一 [著], 『電磁気学の基礎 I』, 東京大学出版会, 2008
- [17] 太田 浩一 [著], 『電磁気学の基礎 II』, 東京大学出版会, 2008
- [18] 野田 二次男, 菅野 正吉 [著], (理工学のための) 『電磁気学入門』, 培風館
- [19] 加藤 正昭 [著], 基礎物理学 3 『電磁気学』, 東京大学出版会, 1987
- [20] 長岡 洋介 [著], 物理入門コース 4 『電磁気学 II - 変動する電磁場 -』, 岩波書店, 2006
- [21] 藤村 哲夫 [著], 『電気発見物語』, 講談社ブルーバックス, 2002
- [22] ウィリアム.H. クロッパー [著], 『物理学天才外伝』, 講談社ブルーバックス, 2009
- [23] アインシュタイン [著], 内山 龍雄 訳, 『相対性理論』, 岩波書店(岩波文庫), 2005
- [24] 砂川 重信 [著], 物理の考え方 5 『相対性理論の考え方』, 岩波書店, 2006
- [25] 中野 董夫 [著], 物理入門シリーズ 9 『相対性理論』, 岩波書店, 2006
- [26] 佐藤 勝彦 [著], 岩波基礎物理シリーズ 9 『相対性理論』, 岩波書店, 2006
- [27] 片山 泰久 [著], 『量子力学の世界』, 講談社ブルーバックス, 1998

- [28] 山田 克哉 [著], 『量子力学のからくり – 「幽靈波」の正体–』, 講談社ブルーバックス, 2003
- [29] 小川岩雄 [著], 物理学 One Point — 29 『原子と原子核』, 共立出版, 2008
- [30] 阿部 龍蔵 [著], 物理テキストシリーズ 6 『量子力学入門』, 岩波書店, 2004
- [31] 佐川 弘幸, 清水 克多郎 [著], 物理学スーパーラーニングシリーズ『量子力学』, シュプリンガーフェアラーク東京, 2005
- [32] E. シュポルスキー [著], 玉木 英彦, 細谷 資明, 井田 幸次郎, 松平 升 訳, 『原子物理学 I』, 東京図書, 2000
- [33] 原島 鮮 [著], 『初等量子力学』, 裳華房, 2007
- [34] 小出 昭一郎 [著], 『量子力学 1』, 裳華房, 2006
- [35] 関根 松夫 [著], 『量子電磁気学』, コロナ社, 1996
- [36] A.C. ローズ-インネス, E.H. ロディリック [著], 島本 進, 安河内 昂 訳, 『超電導入門』, 産業図書, 1999
- [37] 広江 勝彦 [著], 『趣味で物理学』, 理工図書, 2007
- [38] 矢野 健太郎 [著], 『AINシュタイン』, 講談社 (講談社学術文庫), 1991
- [39] 中谷 宇吉郎 [著], 『科学の方法』, 岩波書店 (岩波新書), 1998
- [40] 湯川 秀樹 [著], 『目に見えないもの』, 講談社 (講談社学術文庫), 2007
- [41] S. ワインバーグ [著], 本間三郎 [訳], 『新版 電子と原子核の発見』, 筑摩書房 (ちくま学芸文庫), 2009

## 図目次

1.1	科学的活動	10
1.2	定義しよう!!	37
2.1	力の合成、力の分解	51
2.2	時間と時刻	59
2.3	「今」見ている世界	61
2.4	「質量」と「重さ」の違い	66
2.5	単位の構成	69
2.6	研究所の並進移動	73
2.7	研究所の回転	74
3.1	1 次元（直線上）での位置	81
3.2	2 次元（平面上）での位置（2 次元直交座標）	82
3.3	ベクトルの大きさ（2 次元）	84
3.4	3 次元直交座標	85
3.5	次元とは何か	86
3.6	座標の張り方	88
3.7	相対的な位置の関係	88
3.8	軌跡 = 時刻ごとの位置の記録	90
3.9	ベクトルの引き算	91
3.10	速度 1	92
3.11	速度 2	93
3.12	速度 3	94
3.13	相対速度 (A から見た物体の速度 と B から見た物体の速度)	98
4.1	慣性の法則	106

4.2	運動方程式	108
4.3	作用・反作用の法則	110
4.4	万有引力	112
4.5	万有引力（例：2次元）	113
5.1	等価原理	119
5.2	運動量を用いた方程式の適用例	121
5.3	運動量保存の法則	123
5.4	てこの原理	125
5.5	釣り合い	127
5.6	物体の回転	127
5.7	(a) 直線運動	128
5.8	(b) 回転運動	129
5.9	力と仕事(3次元)	133
5.10	力 $\mathbf{F}$ と変位 $\Delta s$ のなす角 $\theta$	133
5.11	点 A から点 B まで	135
5.12	始点と終点が同じ	135
5.13	仕事とエネルギー	136
5.14	物体の移動のある瞬間	138
5.15	高さ $h$ でのポテンシャル・エネルギー	141
5.16	運動エネルギーの説明	142
5.17	二次元のスカラー関数のイメージ	148
5.18	重力から受ける仕事は鉛直方向のみ	155
5.19	傾き	156
5.20	面の傾き	157
5.21	ポテンシャルエネルギーと保存力	159
5.22	保存力の性質	160
5.23	保存力でない場合	161
6.1	直交座標	164
6.2	斜交座標	165
6.3	極座標	166
6.4	直交座標との対応	166
6.5	円筒座標	167

---

6.6	加速度をもった座標系 . . . . .	172
7.1	等速円運動 . . . . .	181
7.2	等速円運動の加速度の向き . . . . .	182
7.3	等速円運動における、速度と加速度の関係 . . . . .	184
7.4	円の方程式 . . . . .	185
7.5	地表付近は平面とみなしてよい . . . . .	193
7.6	放物運動 . . . . .	195
7.7	放物運動開始 . . . . .	196
7.8	円錐振り子 . . . . .	203
7.9	フックの法則 . . . . .	204
7.10	調和振動（単振動） . . . . .	205
7.11	調和振動の運動解析 . . . . .	205
8.1	楕円と座標・方程式 . . . . .	211
8.2	惑星の楕円軌道 . . . . .	211
8.3	面積速度一定 . . . . .	211
9.1	変分のイメージ . . . . .	229
11.1	電気現象と 2 種類の電荷 . . . . .	264
11.2	点電荷（イメージ） . . . . .	266
11.3	検電器 . . . . .	267
11.4	油滴実験 . . . . .	270
11.5	電荷密度（イメージ） . . . . .	271
11.6	電荷密度と全電気量 . . . . .	273
11.7	微小体積 . . . . .	273
11.8	ディラックの $\delta$ 関数（1 次元）の形 . . . . .	276
11.9	ディラックの $\delta$ 関数の作り方 1 . . . . .	277
11.10	ディラックの $\delta$ 関数の作り方 2 . . . . .	277
11.11	ディラックの $\delta$ 関数（2 次元）の形 . . . . .	278
11.12	電流（イメージ） . . . . .	279
11.13	電流（イメージ） . . . . .	280
11.14	電流密度（イメージ） . . . . .	281
11.15	電流と電流密度 . . . . .	282

11.16	微小体積	283
11.17	電流と電荷	286
12.1	クーロン力	290
12.2	クーロンの法則	291
12.3	一般の 2 つの点の間の距離	295
12.4	例：2 つの点電荷間のクーロン力	296
12.5	クーロン力（3 つの点電荷）	298
12.6	重ねあわせの原理（クーロン力）	298
12.7	クーロン力の重ねあわせの結果（3 つの点電荷）	299
12.8	$N$ 個の点電荷の番号付け	300
12.9	クーロンの法則（ $N$ 個の点電荷）	301
12.10	クーロンの法則（電荷の連続分布）	303
13.1	試験電荷の受ける力	307
13.2	試験電荷の受ける力の記録	307
13.3	電場の流線（電気力線）のイメージ	314
13.4	点電荷が作る電気力線（平面）	315
13.5	点電荷が作る電気力線（平面）	315
14.1	磁束密度に関するローレンツ力	318
14.2	磁束密度の存在	319
14.3	磁束密度中の電流が受ける力	321
14.4	ビオ＝サバールの法則	323
14.5	電流素片 $ \mathbf{I}  d\mathbf{s}t_I(\mathbf{r})$	324
16.1	電場に対するガウスの法則	333
16.2	磁束密度に対するガウスの法則	334
16.3	ファラデーの電磁誘導の法則	335
16.4	電流と時間変化する電場は、その周囲に回転する磁場を生じる	336
16.5	電場は電荷より生じる	339
16.6	磁束密度の湧き出しへはない	340
16.7	電流、変位電流と磁束密度の関係	341
17.1	閉曲面 $S$ の中に 1 つの電荷を含む場合	348

---

17.2	ガウスの法則 (1) . . . . .	350
17.3	ガウスの法則 (2) . . . . .	350
17.4	閉曲面 $S$ の中に複数の電荷を含む場合 . . . . .	351
17.5	閉曲面 $S$ の中に点電荷が連続的に分布している場合 . . . . .	353
17.6	電位と仕事 . . . . .	357
17.7	単一電荷の作る等電位面 . . . . .	362
17.8	異種の 2 電荷がつくる等電位面 . . . . .	362
17.9	等電位面と電場 . . . . .	363
17.10	電荷が存在しない領域では、電位は極値をとらない . . . . .	368
17.11	等電位の閉曲面内の電位 (内部に電荷を含まず) . . . . .	369
17.12	「安定な点」のイメージ . . . . .	370
17.13	導体と絶縁体 . . . . .	372
17.14	理想的な導体のイメージ . . . . .	373
17.15	静電誘導 . . . . .	374
17.16	静電遮蔽 . . . . .	374
17.17	電場は導体表面に直交する . . . . .	375
17.18	もし、電場が導体に直交しなかつたら . . . . .	376
18.1	ビオ = サバールの法則 . . . . .	378
19.1	ビオ = サバールの法則 . . . . .	385
19.2	電流の作る磁束密度 . . . . .	392
19.3	電荷の磁束密度から受けるローレンツ力 . . . . .	392
19.4	閉曲線の取り方 . . . . .	393
19.5	電流の定義の説明図 1 . . . . .	394
19.6	電流の定義の説明図 2 . . . . .	395
20.1	磁束のイメージ . . . . .	398
20.2	電磁誘導 1-1 . . . . .	399
20.3	電磁誘導 1-2 . . . . .	400
20.4	電磁誘導 2 . . . . .	400
20.5	ソレノイド (外観) . . . . .	403
20.6	ソレノイド (内部) . . . . .	403
22.1	マイケルソンとモーリーの実験 1 . . . . .	414

22.2	マイケルソンとモーリーの実験 2	415
22.3	マイケルソンとモーリーの実験 3	415
22.4	マイケルソンとモーリーの実験 4	416
22.5	速度の異なる慣性系において、同一光源から生じる光の速度を測定	420
23.1	同時刻 1(電車の中の観測者からの視点)	422
23.2	同時刻 2(電車外の静止した観測者からの視点)	423
23.3	基準座標系 $S$ と $S$ に対して速度をもつ座標系 $S'$ のイメージ	426
23.4	光の伝播	430
23.5	異なる 2 つの系から、棒の長さを測定する	438
23.6	運動方向 ( $x$ 軸方向) の座標間隔が収縮して見える	439
23.7	時間の遅れ	440
23.8	時刻合わせ	442
23.9	速度の合成	443
24.1	光円錐と $ds^2$	456
24.2	固有時間 1	458
24.3	定数の微分は 0 である	467
25.1	帰納的推論	474
25.2	演繹的推論	475
25.3	クーロン力 ((図 12.1) 再掲)	477
26.1	波動の時間移動	491
26.2	原点における電場と磁束密度の変化のイメージ	495
26.3	電磁波の伝搬のイメージ	495
27.1	トムソンの陰極線の実験	501
29.1	熱力学の対象 (平衡状態/非平衡状態)	522
29.2	熱平衡 (物体の接触)	523
29.3	熱平衡 (温度推移のグラフ)	523
29.4	相平衡 : 熱湯を圧縮	524
29.5	水の蒸気圧曲線	524
29.6	準静的過程の例	526
29.7	示強変数と示量変数の例	527

---

29.8	インク溶液の状態量	527
29.9	系の分類	529
29.10	断熱ポット	530
29.11	透熱壁	531
29.12	熱源/熱浴	532
29.13	半透膜	532
29.14	熱平衡（熱力学第0法則）	533
29.15	温度計	533
30.1	シャルルの法則	537
30.2	ボイル＝シャルルの法則	538
30.3	実在気体：体積	542
30.4	実在気体：圧力	543
30.5	全圧と分圧	545
31.1	気体分子運動論	552
31.2	壁への衝突回数	553
31.3	力積	554
31.4	多原子分子の場合は回転の考慮も必要	557
32.1	ラザフォード散乱	565
32.2	ラザフォードの原子模型	566
32.3	トムソンの原子模型	566
32.4	長岡の原子模型	567
33.1	黒体輻射	572
33.2	黒体放射	573
33.3	各式による理論値と実験値の比較	575
33.4	光電効果のイメージ	579
33.5	光電効果（光は粒子だ！）	580
33.6	等速円運動の関係	580
33.7	単振動と等速円運動の関係	580
34.1	トンネル効果：ポテンシャル障壁	596
37.1	半導体の分類	608

37.2	Si 原子の古典的イメージ . . . . .	609
37.3	Si の電導機構イメージ . . . . .	610
37.4	Si 原子配列に As (砒素) を少量埋め込む . . . . .	611
37.5	ホール効果 (イメージ) . . . . .	613
37.6	ホール電圧の発生 . . . . .	614
37.7	Schottky 障壁ダイオードの $I - V$ 特性 . . . . .	614
37.8	接合前 . . . . .	616
37.9	平衡状態 . . . . .	616
37.10	平衡状態 ; p 側 . . . . .	616
37.11	平衡状態 ; n 側 . . . . .	616
37.12	平衡状態 ; n 側 . . . . .	617
37.13	平衡状態 ; p 側 . . . . .	617
37.14	通常の MOSFET の動作 . . . . .	618
38.1	導体と絶縁体の抵抗率 . . . . .	622
38.2	導体と半導体と絶縁体の抵抗率 . . . . .	623
38.3	導体と半導体と絶縁体のバンド図 . . . . .	624
38.4	電磁誘導による起電力 . . . . .	626
38.5	抵抗の回路図記号 . . . . .	629
38.6	コンデンサ . . . . .	630
38.7	キャパシタンスの最も簡単なイメージ . . . . .	630
38.8	キャパシタンスの回路図 . . . . .	631
38.9	インダクタ (コイル) . . . . .	633
38.10	ソレノイド (外観) . . . . .	635
38.11	ソレノイド (内部) . . . . .	635
38.12	ダイオードの回路図記号 . . . . .	637
38.13	ダイオードを用いた電子回路 . . . . .	637
38.14	ダイオードの動作 . . . . .	637
38.15	オームの法則 . . . . .	644
38.16	電子のドリフト . . . . .	646
38.17	平均自由時間 . . . . .	650
38.18	電子移動度・電子緩和時間 . . . . .	651
38.19	電子と原子核の衝突 . . . . .	654
38.20	電流が流れたかな? . . . . .	656

---

38.21	オームの法則を拡張する ( $i = \sigma E$ ) . . . . .	659
38.22	キャパシタンスの形と容量 . . . . .	659
38.23	無限平面上に分布した電荷密度より生じる電場 . . . . .	662
41.1	ホールの動き（実際は電子の動き） . . . . .	671
41.2	半導体の分類 . . . . .	673
43.1	共通部分（例：集合が 2 つの場合） . . . . .	695
43.2	共通部分 . . . . .	695
43.3	共通部分なし = 共通部分は空集合 . . . . .	698
43.4	合併集合 . . . . .	698
43.5	合併集合 . . . . .	699
43.6	共通部分/合併集合 . . . . .	700
43.7	補集合 . . . . .	701
43.8	差集合 . . . . .	702
43.9	直積 . . . . .	704
43.10	全射のイメージ . . . . .	705
43.11	単射のイメージ . . . . .	706
43.12	関数のイメージ . . . . .	708
43.13	三角形の種類 . . . . .	709
43.14	垂線の引き方 . . . . .	710
43.15	直角三角形の図 . . . . .	710
43.16	三角形の見方を変えよう . . . . .	710
43.17	三角関数 . . . . .	712
45.1	数列の極限 . . . . .	723
45.2	数列の極限 2 . . . . .	724
45.3	数列の極限 3 . . . . .	725
45.4	関数の極限 . . . . .	726
45.5	長方形の面積 . . . . .	728
45.6	棒の長さと数直線 . . . . .	728
45.7	棒の長さ . . . . .	729
45.8	面積 . . . . .	730
45.9	面積はなぜ掛け算で定義されるか . . . . .	732
45.10	面積 . . . . .	733

45.11	円の面積と直交する 2 つの直線	734
45.12	$S$ は関数 $f(x)$ と $g(x)$ の間の面積とみなせる	735
45.13	関数 $f(x)$ と $x$ 軸の間の面積	736
45.14	関数 $f(x)$ と $x$ 軸の間の面積	737
45.15	区間を $N$ 個に分割	739
45.16	関数 $f(x)$ と $x$ 軸の間の面積	740
45.17	近似値の得方は 2 種類ある	742
45.18	分割数 $N$ を増やす	743
45.19	2 次関数	746
45.20	$\Delta x$ を 0 に近づけることで、関数の傾きの正確さが増す	747
45.21	微分の定義	751
45.22	1 次関数数関数 $f(x) = ax + b$ の増加量	752
45.23	1 変数関数 $f(x)$ の増加量	753
45.24	全微分のイメージ	754
47.1	ベクトル：図形、矢印	764
47.2	ベクトル：図形、矢印	764
47.3	ベクトル：図形、矢印	765
47.4	三平方の定理（2 次元）	767
47.5	三平方の定理（3 次元）	767
47.6	内積	775
47.7	内積（代数的定義と图形的定義の関係）	776
47.8	2 つのベクトルは 3 角形を作る	779
47.9	外積	779
47.10	右ねじを回して進む方向	781
47.11	右手系	785
47.12	ベクトルの和・差/・積（内積/外積）	786
47.13	単位ベクトル	787
48.1	導線	794
48.2	閉曲線	795
48.3	曲面	796
48.4	閉曲面	796
48.5	領域	796

48.6	ベクトル空間 1(説明図) . . . . .	797
48.7	ベクトル空間 2(イメージ) . . . . .	797
48.8	線積分 . . . . .	799
48.9	線積分(説明図) . . . . .	800
48.10	面積分(巨視的視点から) . . . . .	801
48.11	面積分(微視的視点から) . . . . .	801
48.12	発散のイメージ . . . . .	803
48.13	湧き出し(一方向) . . . . .	803
48.14	ガウスの定理(イメージ) . . . . .	805
48.15	川で生じる渦のイメージ . . . . .	807
48.16	回転(渦)が生じるための条件 . . . . .	807
48.17	物体(葉)の回転 1 . . . . .	807
48.18	物体(葉)の回転 2 . . . . .	808
48.19	物体(葉)の回転 3 . . . . .	808
A.1	科学的に扱えることの範囲 . . . . .	819



サイゴ ニ ヒトコト キジュツ スル