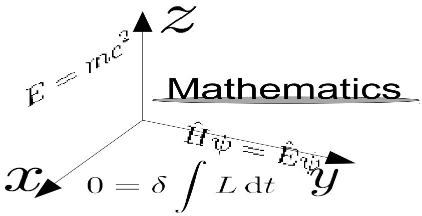
数学ノート 2nd

菅谷　千慧

2016 年 8 月 31 日　更新

–> 2010 年 8 月 より「物理学ノート」の一部として作製開始

–> 2014 年 5 月 より「物理学ノート」から切り出し



目次

第I部

数学の勉強ノート

1 はじめに

1.1 物理学と数学

物理学の勉強を始めようとしているのに，なぜその前に数学を勉強しなければならないのか．あるいは，なぜ，物理学の学習と，数学の学習を同時に進めないといけないのか．それは，物理学では数学を道具として扱うからである．その道具の使い方を知らずして，物理学は学習できないのである．

もちろん，近代物理学の創始者ニュートン▶[1] の時代には，物理学のための数学なんてものはなく，物理学の研究に伴って，その数学的手法である微分積分学を作る必要があった．数学的手法の発明時には記号の統一ができていなかったり，不明確な問題も多いものである．そしてこれらの問題は，後の時代の多くの数学者によって解決され，その表現方法もよりわかりやすい形に書き改められ，きれいな体系に整えられていく．そのため，ニュートンの理論の数学的表現は現在とは全く異なる．現在の物理学で用いられる数学は，代数学や微分積分学がある▶[2]．現在の物理学は，これらが当たり前のように使われる．いわば，物理学を記述するために欠くことのできない言語なのである▶[3]．だから，物理学を学習する前に，まずは最低限の数学を学習す

▶1) Sir Isaac Newton（1643–1727, イギリス）: 古典力学の創始者．微分法という就学的手法を発明し，物体の運動を記述することができるようになった．彼の名をとって，「ニュートン力学」とよばれることも多い．また後で，ニュートン力学の部分において，紹介することになろう．

▶2) 特に，微分積分学はニュートンが物理学を構築するために発明された数学的手法である．（ライプニッツも同時期に微分積分学を発明している．）微分積分学の発明当時には，極限の定義が曖昧であったり，使用される記号も分かりにくいものであった．

▶3) 物理学は数学の助けを借りて成立している．

る必要がある．

物理学を学んでいく途中で，必要になったらその数学を学ぶという方法もあるが，ある程度の数学的知識を予め身に着けておいた方が，学習するのに効率的である．「ある程度」を見極めるのは難しいが，ここではさしあたり，高校レベルの数学がわかるくらいを目標に，数学を学ぶ．

1.2 「数学的準備」の学習マップ

この Pert で学習する数学について，簡単に触れておこう．まず，内容を列挙してみよう．

(1) 関数
(2) 微分積分学
(3) 微分方程式
(4) ベクトル
(5) ベクトル解析（ベクトルの微分積分）
(6) 行列

まず，「関数」を学習する．中学校では，1 次関数や 2 次関数に触れたことと思う．ここでは，これらをもう少し一般的に考える．物理学ではこの関数がメインとなる．関数により，自然法則を記述するからである．

次に，「微分積分学」を学習する．ただし，深入りはしない．図形的直感を第一に考える．物理学は物体の運動や挙動を数式で表現することがその目的のひとつである．つまり，物体の位置の時間的な変化を記述できなければいけない．この時間変化を表現する最善の手段として，ニュートンは微分積分法という新しい数学分野を開拓した．

その次に，「微分方程式」について学習する．微分方程式とは，微分積分法で定義される微分を含む数式のことである．通常の方程式では，未知変数 x や y が方程式を満たす値を求める．これに対して，微分方程式で，未知変数に対応するのが，未知関数である．微分方程式を解くということは，その微分方程式を満たす関数の具体的な形を求めることにほかならない．

その次に，「ベクトル」について学習する．ベクトルは，物体の位置を数学的に表現するものである．これも図形的イメージ習得を第一にする．

その次に，「ベクトル解析」を学習する．ベクトル解析は，ベクトルに微分積分学を組み合わせたものであるとも言えよう．ベクトルは物体の位置を表現するものであり，微分積分学は時間的変化を記述するものである．つまり，ベクトルに対して，微分積分を適用すると，物体の位置の時間変化を数学的に扱うことができるようになるのだ．

その次に，「行列」を学習する．行列とは，何個かの数を縦横に並べてひとつの組として扱われるものである．行列の概念は，言葉で説明するよりも，具体例を示したほうが分かりやすいだろう．以下は，行列の具体的な例である．

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

これらについての，具体的な性質について考えることは，行列という数学分野である．しかしここでは，行列というものの具体的な形を紹介しただけにとどめておこう．具体的な定義や性質は，後で考えることにする．

2
関数

2.1　集合

2.1.1　集合を定義するとは

数学において，**集合** とは，その最も基礎にあたる概念である．数学の要である自然数も，集合という概念を使って定義されるものである．自然数の定義は，**ペアノ**[▶1)] **の公理系**として知られている[▶2)]．

集合が数学の最も基礎的な概念であるだけに，それを定義することは非常に難しい．中学校や高校で集合について学習するとき，次のように集合という概念が説明される．

中学・高校での集合の定義「集合とは，モノの集まりである．ただし，ここで言うモノとは，集合に属するか否かを明確に判断できるものに限る．」

この集合の定義は，直観的で非常に分かりやすい．しかし，この“ ただし ”以下の部分に問題がある．“ モノが集合に属すか否かを明確に判断できる ”とは，どういうことか．「自然数」や「有理数」などは，明確な判断が下せるので，モノである．しかし，「美人」とか「厳密」だとかというのは，万人に対して明確な判断基準を与え

▶1)　Giuseppe Peano（1858–1932, イタリア）: 数学者．自然数を作り出す仕組みである「ペアノの公理系」を提案する．

▶2)　ここでは，集合の重要性を示すことが目的なので，ペアノの公理は解説しない．ペアノの公理系を解説する Web サイトは非常に多いし，整数論などの数学の教科書には必ず記述されているので，それらを参照してもらいたい．

ることができず，モノではありえない．となると，どういった場合に，モノになりうるのかという疑問が自然と脳裏にうかんでくる．しかし，実際問題として，モノになりうるかどうかの判断基準を明示することは不可能なのである．つまり，「モノの集まりを集合という」といった集合の定義は，深く考えると曖昧な部分が浮き彫りにされてくるのである[▶3)]．

どう定義したものか．答えを先に書いてしまうと，実は，数学的に厳密に集合を直接定義することはできないのである．集合は数学的に言えば，**無定義語** として扱われる概念なのである．

通常，数学では，ある概念を定義する場合，既存の概念を基にする．しかし，数学も言葉を使う以上，「言葉のもつ限界」をふくんでしまう．ここで言葉のもつ限界と表現したのは，ある単語を説明するには，他の別の言葉を用いなければならないということである．これの何が限界なのかといえば，次の例を考えればよい．例えば，「全体」という語彙が“ 全ての部分 ”というように定義されているとしよう．では，この定義で出てくる「部分」とは何か．部分の定義はどうしたらよいかを考えても，“ 部分とは全体を複数個に分割したものの中の，その 1 つのこと ”というような表現になってしまう．この部分の定義には，「全体」という語彙が含まれているが，一方で全体の定義では「部分」という語彙が使用されている．つまりは，語彙の定義が循環してしまっているのである．もっと抽象的に言えば，次の 2 つの定義が同時になさ

▶3)　**集合論が含む矛盾**　たしかに，集合論（特に無限集合論）の開拓者であるカントール（※ 1）が与えた集合の定義は「モノの集まりを集合という」であった．しかし，この定義を用いると，矛盾したことが起こってしまうことをラッセル（※ 2）が発見した．この矛盾したこととは，次のような命題（定義 A）を考えることで説明される．

- **定義 A**：「自分自身を含まない全ての集合を ω とする」

さて，どこが矛盾なのかを説明しよう．次の問題を考えてみる．

- **問題 X**：「ω は，ω 自身に含まれるか，否か」

考えらる答えは 2 つしかない．1.) 含まれるか，2.) 含まれないか，のどちらかである．さて，1.) の状況，つまり，ω は ω 自身に含まれると仮定しよう．この場合，定義 A により自分自身を含まない．しかし，いま，ω 自身に含まれているという仮定に反する．つまり，「1.) 含まれる」は間違いである．では，2.) の状況，つまり，ω は ω 自身に含まれないが答えなのだろうか．しかし，この場合，定義 A に反していることは明白であり，「2.) 含まれない」も間違いである．考えられるすべての答えで前提とする条件と矛盾する結果がでてしまう．これを **ラッセルのパラドクス** という．どう考えても，定義 A によって作られる集合 ω は問題 X を突きつけられると，その答えは矛盾を生じるという結果に終わる．

これは致命的な問題である．集合はすべての数学の分野の基礎にあたる概念であり，この部分に欠陥があるということは，すべての数学分野の存立が危うくなる．

ここで示した矛盾以外以外にも，カントール自身が発見した **カントールのパラドクス** がある．任意の集合 A に対し，それよりも大きい集合を作成できることが証明されている（「集合の集合」を考えることができてしまうので）．にもかかわらず，最大の大きさを持つ集合があることも証明されてしまった．つまり，いくらでも大きい集合を考えることができると保証されているのに，その大きさには上限があるという．明らかに，矛盾している．（自然数を例として言えば，「自然数はいくらでも大きい数を創りだすことができるのに，それには最大値がある」と言っているのと同じである）

（※ 1）カントール：Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor（1845–1918, ロシア）

（※ 2）ラッセル：Bertrand Arthur William Russell（1872–1970, イギリス）

れているということである．

定義 P： A とは B であることをいう．
定義 Q： B とは A であることをいう．

こうなると，定義 P を行うには，それに先立って定義 Q がなされていなければならなし，しかし，定義 Q をするには，それに先立って定義 P がなされていないといけない．定義が堂々巡りしてしまうのである．これでは数学的に厳密な議論ができない．集合を通常通り数学的に厳密に定義しようとするとき，このような限界から，その実行は不可能であると言わざるをえない．

では，どうすればよいか．これには選択肢が次の 2 つ考えられる．

(1) 集合を無定義語として扱う（集合を公理的に定義する）
(2) 数学的厳密性を犠牲にする

まず選択肢 1 から説明しよう．無定義語とは，このような言葉の限界を回避すべく考え出された解決策である．驚くべきことに▶4)，無定義語とは，数学的に直接定義されないのである．では，どう説明されるのか．この考え方は盲点だったかもしれない．次のようになされる．例えば，A という概念を定義したいが，数学的に厳密に定義しようとするとき，言葉の限界からそれが不可能であることが判明したとする．しかし，今定義したい A という概念のもつ性質は十分に考えられているとしよう．このとき，概念 A を定義するには，最初に，その性質を必要十分であるように，列挙する．ここで挙げられる性質は複数個になることだろう．そして，この複数個の性質を満たすものを A と定義するのである．これを実行すると次のようになるだろう．

無定義語 A の説明の仕方

以下の性質をもつものを A という．

(1) A には，性質 X_1 が備わっている．
(2) A には，性質 X_2 が備わっている．
(3) A には，性質 X_3 が備わっている．
(4) …（以下，いくつか続く）

もちろん，このように説明される概念 A には，日常的な意味を考えると直感的イメージにそぐわない，複数のものが想像されてしまうかもしれない．しかし，数学的には，それらすべてを区別することはせず，同一視するのである．なぜかといえば，語彙 A は無定義語 A ということを示す記号に過ぎず，その意味などは一切考慮され

▶4) 「無定義語」という語彙から，推察されてしまい，驚かないかもしれない．しかし，それでも革命的な考え方であると感じることと思う．

ないからである．無定義語 A が他の概念と区別できれば良いのである．無定義語の例として，「点」･「直線」などが有名であるが，これらは「点」，「直線」と表現しなければならないわけではない．一貫して同一の語彙を使用していれば，同表現してもかまわないのである．ヒルベルト▶[5] が言ったとされる，「机と椅子とビールジョッキの幾何学」という表現は，このことである．点を「机」と言い換え，直線を「椅子」と言い換えても，数学的には何の支障もない▶[6]．

2.1.2　集合の直感的定義

前節では，集合を数学的に厳密に扱うべく，無定義語という考え方を紹介した．しかし，ここでは物理学を学習しているのであって，厳密な数学を理解しようとしているのではないのだから，集合の定義に無定義語という概念を持ち出して話を難しくしたくない．そこまで数学的な厳密性にこだわる必要もないので，ここでは，集合を直感的に定義して扱っていきたい．このような考え方は，素朴集合論といわれている．高校数学における集合とは，素朴集合論である．このノートでも，以下では集合といえば，素朴に定義された集合のであるとする．

集合の素朴な定義は，次のようになされる．

☛ **Point No.1:** 直感的な集合の定義

定義 2.1.1. “ もの ” の集まりのことを **集合** という．

記号 集合を表現するのには，多くの教科書では，大文字のアルファベットが用いられる．例えば，

集合 A

のように．このノートでも，この表現を採用する．

ここでいう “ もの ” とは何でもよいということではなく，数学的に厳密に扱えるも

▶5) ヒルベルト（David Hilbert, 1858–1932, ドイツ）: 数学者．整数論，数学基礎論，積分方程式論など広い分野にわたり，著しい功績がある．また，ヒルベルト空間など，物理学への貢献も多くある（物理学の公理化も目論でいたらしい）．
（参照）Constance Reid[著]，彌永健一 [訳]，『ヒルベルト—現代数学の巨峰』

▶6) こう言うと，無定義語には A や B というように抽象的な記号を割り当てよう，という考え方が生まれてしまうかもしれない．しかし，だからと言って，不用意に記号化することは好ましくない．数学は人間がその想像力により発展させるものであり，そのためにはイメージが非常に重要である．イメージによりインスピレーションが湧き，数学が発展するのである．安易に無定義語を記号化してしまうと，イメージすることが難しくなってしまう．なので，無定義語にはできる限り，イメージしやすい語彙を割当てるべきなのである．点という語彙から意味を削ぎ落とされたとしても，点というイメージを捨て去るべきではないということである．

のでないといけない．例えば，「美しいものの集合」といわれても，これは数学的に扱うことはできない．「美しい」という定義が曖昧だからだ．数学的に扱える集合とは，例えば自然数や整数があげられよう．

2.1.3 集合の要素

「集合」と言うからには，その中には，何らかの構成要素があるはずである．というか，そういうもの想定して，集合を定義している．そこで，集合を構成するものの呼び方を与えておく（定義 2.1.2）．また，後の学習で要素について考えるときに，例えば，ある概念 a がその集合 A の要素であることを数式的に示せると，便利である．

集合の要素

定義 2.1.2. 集合を構成するもの[a] を集合の **要素** という[b]．

記号 ある要素 a が集合 A に含まれているということを，

$$a \ni A.$$

と記述する．これは左右を逆転させて

$$A \in a.$$

と表現しても同じことである．

[a] 例えば上の 1 から 5 の自然数の集合 A であれば，1，2，3，4，5 の 5 つの自然数である．
[b] 元 (げん) ということもある．教科書によって様々なよび方がなされる．

2.1.4 空集合の存在：$\emptyset$

集合は要素を含むつことが一般的だ．しかし，「要素を全く含まない集合」というものも考えられる．それについて，次に説明しよう．

要素をひとつも含まない集合を，**空集合**[▶7] という．

空集合には要素がないのだけど，これを表現したい場合もある．そのために，$\emptyset$ という記号を使うことが一般的である．このノートでも，この記号 $\emptyset$ を用いる[▶8]．つ

▶7) 空集合：「くうしゅうごう」と読む．「そらしゅうごう」でも「からしゅうごう」でも「あきしゅうごう」でもないよ．

▶8) 空集合を表す記号 $\emptyset$ は，“ 数字の 0 に斜め線をいれた記号 ” である．よく，ギリシャ文字の ϕ が使われていることがあるが，これは間違いである．フォントが足りなかった時代の古い教科書では，ϕ を $\emptyset$ の代わりとして使用されていることもあるので，注意が必要．ノートをとる時に，ϕ と見分けが付かなくなることもあるが，イメージは $\emptyset$ であることを意識すること．

まり，空集合の要素は次のように表現できる[9]．

$$A \in \emptyset.$$

「空集合は空っぽの要素をもつ」と言い換えられるのである[10]．

改めて，定義しておこう．

空集合の存在

定義 2.1.3. 要素をひとつも含まない集合を **空集合** という．

記号 集合 A が空集合であるとは，次のように表現される．

$$A \in \emptyset.$$

ここに用いられる記号 $\emptyset$ には「空っぽ」であるという意味が込められている．

2.1.5　ある集合を定義する

2.1.5.1　特別な集合の定義の表現方法

ある特別な集合を定義[11] したい場合，その表現は次の 2 種類ある．その記述例と特徴を説明する．

[9] ここで用いられる記号 $\emptyset$ には，「空っぽである」というイメージが込められている．

[10] 何かまわりくどい言い回しであるが，こう表現することで，数学体系をより豊かにできるのである．まあ，ここでは物理のための数学を学習しているので，どんな風に豊かになるかには興味はない．詳細は，集合論の教科書を参照してほしい．

[11] ここで，ひとつ断っておかないといけないことがある．今までは単に「集合の定義」という言葉を使っていたが，これには次のような 2 通りの意味が考えられる．ひとつは，1.) 集合という概念そのものの定義という意味である．もうひとつは，2.) 要素が限定されている集合を定義する場合である．1 の場合の例は上げるまでもない．2 の場合の例をあげよう．例えば，要素が自然数のみの集合を考えたい場合，「集合 $\boldsymbol{N}$ を自然数の集合とする」という．この場合は，集合の概念そのものの定義ではなく，ある性質を持った特別な集合を考えたい場合に，ある記号をその集合に割り当てるという，集合の定義である．

このように，「集合の定義」という言葉には 2 通りの意味が考えられるが，これらの違いは文脈上で峻別できることである（多くの場合，2 の場合の意味である）．

ある集合の定義の方法

(1)　内包的定義

例.）$A = \{x \,|\, x \text{ は偶数 }\}$

- 要素の持つ性質を，式等を用いて集合を定義する方法.
- 要素の個数が無限にあっても記述可能である.
- 要素の具体例がすぐにイメージしづらいことも多い.

(2)　外延的定義

例.）$A = \{\,1,\,2,\,3,\,4,\,5\,\}$

- 集合のもつすべての要素を列挙して集合を定義する方法.
- 要素の個数が無限であると，表現しきれない場合がある.
- 要素の具体例は，直接記述されているので，イメージしやすい.

以下で，もう少し詳しく説明する.

2.1.5.2　集合の内包的定義

内包的定義とは，その集合のもつ性質を表して集合を定義するというものである. 例えば,「偶数の集合 A 」を表現するには,

$$A = \{x \,|\, x \text{ は偶数 }\}$$

と書く. 一般には，この例で「x は偶数」の部分を $P(x)$ と表現して,

$$A = \{\,\underbrace{x}_{\text{変数}}\;|\;\underbrace{P(x)}_{\text{条件式}}\,\} \tag{2.1}$$

と書く[12]. 読み方としては,「条件 $P(x)$ を満たすような x の集合」といったカンジである.

♯ *memo* No.1: 注意

ここに書いた「変数」というのは，要素を一般的に表現する変数のことである.

2.1.5.3　集合の外延的定義

外延的定義とは，その集合を構成する要素全てを列挙して，その集合を表現するというものである. 例えば 1 から 5 までの自然数の集合は

$$A = \{\underbrace{1,\,2,\,3,\,4,\,5}_{\text{要素の列挙}}\}$$

[12] この $P(x)$ は **述語** とよばれる. ここら辺は，論理学等の教科書を読んでみよう. ここでは深く考えずに話を先へ進める.

と書く．これはまた，内包的にも表現できて，

$$A = \{\underbrace{\ x\ }_{\text{変数}} \mid \underbrace{1 \leq x \leq 5,\ x\ \text{は自然数}}_{\text{条件式}}\}$$

と書ける．外延的定義は集合の要素に規則性がないときに用いることが多い．また，内包的定義よりも直感的にわかりやすいならば，外延的定義が用いられることもある．しかし概して，一般的には内包的定義のほうがよく用いられるようである．

2.1.6　集合の性質

実数を扱う場合には，等号や不等号といった，右辺と左辺の関係を表現する必要があった．集合にもこれと同等な概念がある．それは，次のようなものである．これらについて，詳細は次節以降で考える[▶13)]．

複数の集合の間の関係

2 つ以上の集合が存在するとき，それらの集合同士の間に，次のような関係が定義される．

- 包含関係（部分集合）
- 二項関係
- 同値関係

また，今まで親しんできた実数の加法・乗法などの演算のように，集合も演算の対象となることができる．しかし，集合の演算は，加法・乗法という言葉は使われない．実数の意味での加法・乗法と少々異なるからである．集合の代表的な演算の種類は次の通りである．

▶13)　ここではとりあえず，このような概念があるということを認識できれば，それで良い．

集合の演算的性質

2 つ以上の集合が存在するとき，それらの集合に対し，以下のような概念が定義される．

- 共通部分
- 合併集合（または，和集合）
- 補集合
- 差集合
- 直積（または，積集合）
- 商集合
- 冪集合[a]

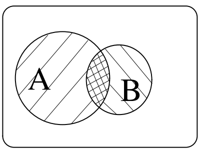
[a] 冪集合：「べきしゅうごう」と読む．a^x のような指数で表される積のことをいう．

2.1.6.1 集合の共通部分

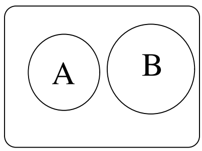
2 つの集合を用意しよう．要素は任意のものでよい．この適当な 2 つの集合を A，B と表すことにする．このとき，集合 A と集合 B のの両方の集合において，それぞれの要素を考えると，次のものがある．

(1) 集合 A のみに属し，かつ，集合 B には属さない要素
(2) 集合 B のみに属し，かつ，集合 A には属さない要素
(3) 集合 A と B の両方に属する要素

図示すれば，Fig 2.1 の様である．集合 A と集合 B の定義の仕方によっては，どちらの集合にも属さない要素の存在も考えられる（Fig 2.1 (B)）．



(A)



(B)

図 2.1 共通部分（例：集合が 2 つの場合）

Fig 2.1 の円で囲まれた領域の内側に，その集合の要素が含まれている．ここでは，境界線上の点は含めないこととする．

共通部分を示す記号として，$\cap$ が用いられる[▶14)]．例えば，集合 A と集合 B の共通部分は，

$$A \cap B$$

というように表現される．

もっと一般的に，2 個以上の集合を考え，それらの共通部分を図示すると，Fig 2.2 のようになる．ここでは，4 つの集合しか描いていないが，この集合の個数は任意に設定できる．

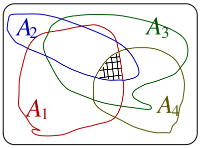


図 2.2　共通部分

ここで，集合を添字付きのアルファベットに書きなおした[▶15)]．この場合，集合の共通部分は

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$$

と表される．

同様に，集合の数が n 個の場合は，

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap A_n$$

と表される．想定する集合の個数が多くなると，その共通部分の表現も長ったらしくなり，読みづらくなる．そこで，新たに記号を導入することにしよう．次の通りである．

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i := A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap A_n$$

省略記号 $\bigcap_{i=1}^{n}$ により，$i = 1$ から $i = n$ までの集合の共通部分の表現を簡略化できる[▶16)]．

▶14)　共通部分を表す記号 $\cap$ に正式に決まった名称は与えられていないが，多くの教科書では「キャップ」とい名前が与えられている．

▶15)　これは，アルファベットの種類が A から Z の 26 種類しかないからである．アルファベットのみによる集合の表し方を採用していると，26 個までの集合しか区別して扱うことができない．そこで，同じアルファベットでも，添字をつけて区別することで，集合を区別できるようにするのである．こうすると，すぐ後に述べる，複数の集合の共通部分を表す省略記号 $\bigcap_{i=1}^{n}$ の導入も自然に行うことができる．

▶16)　これは，和の記号 $\Sigma_{i=1}^{n} a_i$ に真似た記号である．

集合の個数に上限がないのなら（無限個の集合を想定する場合），個数 n を無量大数を表す記号 ∞ に置き換えて，

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i := A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots$$

と表現する．

ここで，改めて，集合の共通部分を定義しておこう．

集合の共通部分

定義 2.1.4. 集合が n 個ある場合を考え，それらを A_1 , A_2 , $\cdots$ A_n とする．この n 個の集合全てに属する要素を，これらのすべての集合の **共通部分** という．

記号 1 集合の個数が 2 つの場合，記号 $\cap$ を用いて，

$$A_1 \cap A_2. \tag{2.2}$$

記号 2 集合の数が 2 つ以上の場合，その個数を n 個として，

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i := A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap A_n. \tag{2.3}$$

記号 3 集合の個数に上限をつけない場合，記号 ∞ を用いて，

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i := A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots . \tag{2.4}$$

特に注意しておこう．想定する全ての集合（A_1 , A_2 , $\cdots$ A_n）の共通部分がないとき，それは共通部分は空集合であると言い換えることができる．

共通部分がない場合

想定する複数個の集合に対し，共通部分が存在しない場合，共通部分は空集合であるといい，次の記号で表現できる．

$$\emptyset = \bigcap_{i=1}^{n} A_i \quad \Longleftrightarrow \quad \bigcap_{i=1}^{n} A_i \text{の共通部分なし}. \tag{2.5}$$

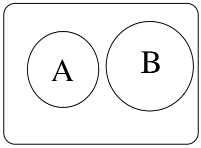


図 2.3　共通部分なし = 共通部分は空集合

2.1.6.2　合併集合（または，和集合）

任意に集合を 2 つ用意して，それぞれ集合 A，集合 B と名付けよう．この 2 つの集合のもつ要素をあわせて新たに集合を作るとき，これを集合 A と集合 B の **合併集合** という．図示すれば，Fig 2.4 のように描けよう．

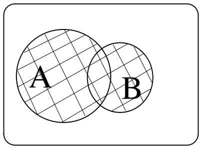


図 2.4　合併集合

合併集合は，また **和集合** ともいわれる．2 つの集合より作られる合併集合を表す記号として，∪ が用いられる▶17)．

例えば，集合 A と集合 B の合併集合は，

$$A \cup B$$

というように表現される．

もっと一般的に，2 個以上の集合を考え，それらの合併集合を図示すると，Fig 2.2 のようになる．ここでは，4 つの集合しか描いていないが，この集合の個数は任意に設定できる．

ここで，集合を添字付きのアルファベットに書きなおした．この場合，集合の合併集合は

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$$

と表される．

▶17)　合併集合を表す記号 ∪ に正式に決まった名称は与えられていないが，多くの教科書では「カップ」とい名前が与えられている（コーヒーカップとか，マグカップとかの“ カップ ”である）．

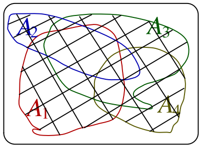


図 2.5　合併集合

同様に，集合の数が n 個の場合は，

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1} \cup A_n$$

と表される．想定する集合の個数が多くなると，その合併集合の表現も長ったらしくなり，読みづらくなる．そこで，新たに記号を導入することにしよう．次の通りである．

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i := A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1} \cup A_n$$

省略記号 $\bigcup_{i=1}^{n}$ により，$i = 1$ から $i = n$ までの集合の合併集合の表現を簡略化できる[▶18)]．

集合の個数に上限がないのなら（無限個の集合を想定する場合），個数 n を無量大数を表す記号 ∞ に置き換えて，

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i := A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots$$

と表現する．

ここで，改めて，合併集合を定義しておこう．

▶18)　これは，和の記号 $\Sigma_{i=1}^{n} a_i$ に真似た記号である．

合併集合

定義 2.1.5. 集合が n 個ある場合を考え，それらを A_1 , A_2 , $\cdots$ A_n とする．この n 個の集合全てに属する要素を，これらのすべての集合の **合併集合** という．

記号 1 集合の個数が 2 つの場合，記号 $\cup$ を用いて，

$$A_1 \cup A_2. \tag{2.6}$$

記号 2 集合の数が 2 つ以上の場合，その個数を n 個として，

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i := A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1} \cup A_n. \tag{2.7}$$

記号 3 集合の個数に上限をつけない場合，記号 ∞ を用いて，

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i := A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots . \tag{2.8}$$

2.1.6.3　補集合

今までは，例えば集合 A を考えるときに，その外側の領域については，全く考慮していなかった．しかし，集合 A の外側の領域についても考えられるので，それを無視することはできない．図で描けば，Fig 2.6 のようになる．

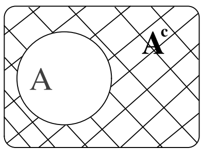


図 2.6　補集合

そこで，次のような定義をしよう．

補集合

定義 2.1.6. 任意の集合 A の外側の領域に含まれている全ての要素からなる集合を，集合 A の **補集合** とよぶ.

記号 1 集合 A 補集合を表す記号として，このノートでは以下の記号を用いる.

$$A^c. \tag{2.9}$$

ここで一つ注意がある．この上付きの添字記号 c は定数ではない．なので，これを「A の c 乗」というように解釈してはならない[a].

記号 2 集合 A の補集合 A^c は,「集合 A でない，他の全ての集合の合併集合」と捉えることができる．簡単に表現すれば,「集合 A でない集合」となる．この表現は集合 A の否定であり，ブール代数などでは,

$$\bar{A}$$

と書かれることも多い.

[a] 補集合を英語で表すと，"a complementary set" であるので，上付き添字の c はこれに由来するのではないかと思う．確かではないが．まあ，記号なんて，その由来なんか気にする必要なんてないのだけど.

2.1.6.4　差集合

任意に集合を 2 つ用意して，それぞれ集合 A，集合 B と名付けよう．この 2 つの集合 A，B には空集合でない共通部分が存在すると仮定する．つまり,

$$A \cap B \neq \emptyset$$

を想定する.

このとき，次のことを考えられる．それは「集合 A に属している要素のうち，集合 B に属していない全ての要素からなる集合」である．図で描けば，Fig 2.7 のようになる.

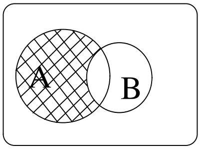


図 2.7　差集合

改めて定義しておこう.

差集合

定義 2.1.7. 任意の 2 つの集合 A，B があるとき，集合 A に属している要素のうち，集合 B に属していない全ての要素からなる集合のことを，集合 A から集合 B を引いた **差集合** という．

記号 集合 A から集合 B を引いた差集合を，このノートでは以下のように記述する．

$$A \setminus B \tag{2.10}$$

のようである[a]．

[a] これは，差集合が実数の意味での $-$ とは異なる概念だからだろう．合併集合の記号 $\cup$ の記号にしても，同じことがいえよう．
　教科書によっては，差集合を $A - B$ のように表現しているものも見受けられる．しかし，その場合でも，合併集合の記号は $\cup$ を採用していることが多い．$+$ にすれば良いのに．

2.1.6.5　直積（または，積集合）

任意に集合を 2 つ用意して，それぞれ集合 A，集合 B と名付けよう▶[19]．このとき，次の操作を行うことを考える．集合 A から任意に要素を一つ選択する．これを

$$x_A \in A$$

としよう．同様に，集合 B に対してもこの操作を行い，

$$x_B \in B$$

とする．

そして，この選択した 2 つの要素 x_A，x_B から，新しい集合を構成する．記号は，集合 A と集合 B から生成されるので，$A \times B$ と表現しよう▶[20]．集合 $A \times B$ に名前がないと説明しづらいので，とりあえず，**直積** と名付けておこう．

すると，集合 A と集合 B の直積 $A \times B$ は，次のように，要素を用いて表現される．

$$A \times B = \{< x_A, x_B > |(x_A \in A) \cap (x_B \in B)\} \tag{2.11}$$

▶[19] この記述，飽きてきたかな．何か別の言い回しで，このマンネリをなくしたいな．何かいいアイディア，ないかな．

▶[20] 今のところ，記号 $\times$ については深く考えずにしておこう．

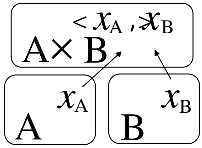


図 2.8　直積

2.1.6.6　商集合

2.1.6.7　冪集合

2.2　写像

2.2.1　写像とは

集合についてはこのくらいにして，次に **写像** という概念を考えていこう．集合を 2 つもってきて，それらを A，B としよう．集合 A の各要素に対して，集合 B の要素を対応させる．この対応の方法は様々だが， これを f という記号を用いて，

$$f\,:\,A \longmapsto B$$

と表現する．この f のことを写像という．記号の意味は，写像 f によって，集合 A の要素を集合 B の要素に対応させるということである．対応のさせ方は大きく分けて 3 つがある．それは，**全射**，**単射**，**全単射** である．

全射とは，例えば，もとの集合 A の要素を別の集合 B の要素に対応させるときに，A の要素に漏れが 1 つもなく B の全ての要素に対応していることである．ここで，A の複数の要素が B の 1 つの要素に対応していてもかまわない．とにかく，全射とはもとの集合から漏れる要素が 1 つもなく，別の集合の要素に対応している状況のことをいう．但し注意しておくことは，集合 A の要素 1 つから集合 B の複数の要素には対応していないことである．簡単にいえば，集合 A の要素を 1 つもってきたとき，それに対応する B 要素がただ 1 つ定まっていることである．

よく知っている例では，2 次関数 $f(x) = x^2$ がある．これは写像 f を使って表現すると次のようになる．

$$f\,:\,x \longmapsto x^2$$

x が 1 つ定まると，x^2 の値は必ず 1 つ定まる．例えば $x = 2$ のとき，$x^2 = 4$ である[▶21)]．

▶21)　ここが混乱しやすい部分だが，$x = -2$ の時も $x^2 = 4$ である．確かに，$x = 2$ と $x = -2$ の場合の両方で，写像 f によって同じ値 ($x^2 = 4$) に対応させられているが，これは全く問題はない．

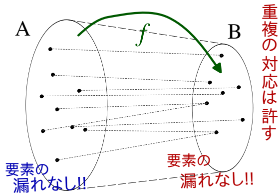


図 2.9　全射のイメージ

次に **単射** について考える．単射であるとは漏れはあるが，重複はないということを意味する．もとの集合 A の全ての要素は別の集合 B の要素に対応しているという約束はあるが，集合 B の全てに対応している必要はない．つまり，集合 B 側には要素の漏れがあってもよい．単射で大事なのは，重複した対応がないということである．

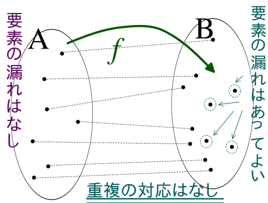


図 2.10　単射のイメージ

単射の例を考えれば，自然数を 2 倍して偶数にするという関数を上げられる．つまり，$f(x) = 2x$ である．写像の表記をすれば，

$$f\ :\ \boldsymbol{N} \longmapsto \boldsymbol{N}\ ,\quad f\ :\ x \longmapsto 2x$$

である．但し，ここでの x は自然数に限っている．はじめに書いた $f\ :\ \boldsymbol{N} \longmapsto \boldsymbol{N}$ は自然数から自然数への写像であることを示し ($\boldsymbol{N}$ は自然数を表現する)，その後に書いた $f\ :\ x \longmapsto 2x$ は自然数を 2 倍して偶数を求めるという写像を意味している．そうすれば確かに，x はすべて $2x$ に写せる．$2x$ は自然数の一部であり，全体ではない▶[22]．

ここで考えているのは x から x^2 を対応させるような写像 f であって，x^2 から x に対応させる写像ではないからだ．

▶22)　しかし，自然数の濃度と偶数の濃度は同じである．“ 濃度 ” については，集合論などの教科書を参照．濃度とは，簡単にいえば，要素の個数が無限大個であるときの，集合の “ 大きさ ” を示すものである．

2.2.2 関数

次に，関数について確認するが，これは簡単だ．実数から実数への写像を，慣習に従って，**関数** という．これだけである．高校の時には，「変数 x が 1 つ定まったとき，それに伴って，$f(x)$ も 1 つに定まるならば，$f(x)$ は x の関数であるという」と習ったと思う．これは正しい．しかし，写像という概念を導入すると，数学の世界がもっと広くなる．なので，ここで写像という概念の紹介をしたかった．写像とはとても抽象的なものであり，捉えるのが難しい．しかし，あえて感覚的に説明しようとすれば，写像とはある集合の要素を，何らかの変換を用いて，別の集合の要素に対応させるものであるといえよう[▶23)]．

2.2.3 関数のイメージ

関数のイメージとして，よく例に挙がるのは，“ 自動販売機 ” である[▶24)] 自販機を関数としてみるとき，それは，入力一つに対して，出力が一つであるという特徴を指している．入力とは，ほしい商品に対応したボタンを押すことであり，出力はそのほしい商品が取り出し口に現れることである．これは，関数のイメージによく合う．関数とは，

一つの入力に対して，一つの出力が対応する

という性質をもつものである．

数学ではよく関数を $f(x)$ のような記号で表現される．初めてこの記号をみると，面を食らってしまう．中学校で初めて習う一次関数は，$y = ax + b$ のように記述していたし，2 次関数だって，$y = ax^2 + bx + c$ と書かれた．この時に，y は x の一次関数だとか，2 次関数だとかというように覚えさせられる．

なぜ $f(x)$ のような書き方をするのか．それは，関数という概念を，一般化して考えたいからである．関数には，一次関数や 2 次関数に限らず，もっと高次元の n 次関数とか，指数関数，三角関数とかいろいろ考えられる．これらの関数を，どれか一つに特定することなく，関数全てを対象にして考えたいときには，関数の具体的な形を与えるわけにはいかない．しかし，関数という以上，入力と出力を表現すべきだ．入力に対応するのが，記号 $f(x)$ の括弧の中の変数 x で，出力は $f(x)$ そのもので表現される．入力とにそれに対応する出力は分かっているが，その具体的な形はわからないときに[▶25)]，$f(x)$ という記号を使うのである．こうすれば，関数一般について

▶23) この説明はどのくらい妥当かどうか不安．

▶24) 以降，自動販売機のことを “ 自販機 ” と略記する．

▶25) もしくは，形を特定したくないとき．

記述できるのである．

入力 x に対して，f という操作を施して，$f(x)$ として出力する

ということをこの記号は表現する．入力と操作方法が分かれば，出力も分かる．だから，入力と操作方法を象徴するような記号で関数を表せる．

その内部の構造は知らなくてもよい．それは本当か．もう一度，自販機の例を考える．入力は，ほしい商品に対応するボタンを一回押すこと．出力は，ほしい商品が取り出し口に現れること．さて，ボタンを押してから，商品を手にするまでどのように自販機は動くのか．その間，自販機の内部では，大量の計算がなされているはずである．どのボタンが押されたのかを判別し，押されたボタンに対応する商品を選択し，内部での機械を正確に制御させて商品を取っ出し口に落とす．おそらく，こんなことをしているはず[▶26)]．で，商品を買う側の私たちは，自販機の内部の壮絶な計算を全て理解しないといけないのか．実際はそうでないことは，知っている．自販機の計算など，知らなくても何の問題もない．ボタンを押して，商品を得ることができれば，それで満足である．関数とはそんなものである．「関数 $f(x)$」とだけしか書かれていない場合，関数の内部はどうなっているかは知る必要はないのだ．

入力が複数あっても同じこと．例えば，電卓は複数のボタンを順序よく入力し，計算結果を出力として得る．これを式で書くと，入力される値は括弧の中に全て記述し，$f(x, y, z)$ のように書ける．この場合，入力は x，y，z の 3 つで，出力は $f(x, y, z)$ そのものである．

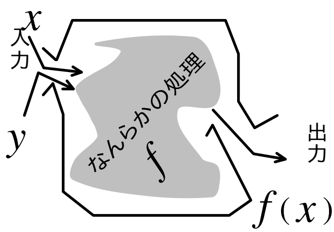


図 2.11　関数のイメージ

$f(x)$ という記号は，一般の関数を扱いたいときにも，役に立つが，もっと別の理由で使われることがある．実験的に，入力と出力は得られているのだが，その関係がよくわからないということがある．関数の形が分からないのだ．そういう時は，とりあえず，その関数として，$f(x)$ と書いてしまうのである．そして，その関数が満たしている性質から，関数を推測するのである．

▶26)　詳細は，設計者に聞かないとわからないから…

形のはっきりしない関数 $f(x)$ が使われる例として，微分方程式がある[27]．こんな感じで記述される．

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}+x=5.$$

微分方程式を解くとは，その方程式を満たす関数を見つけることである．その場合，とりあえず，解となる関数を $f(x)$ とおく．そして，演算によって，具体的な関数の形を得る．これはちょうど，x の一次方程式 $2x+1=0$ に現れる変数 x と同じ考え方である．

物理学では，微分方程式の解として，いろいろな関数が現れる．ということで，次から，関数の具体的な例として，対数関数・指数関数，三角関数について，簡単に確認しておこう．

2.2.4　三角関数

2.2.4.1　三角比

三角関数の前に，三角比を復習しておく．ここでは大体の感じをつかめればそれでよい[28]．三角形には，**鋭角三角形** と **鈍角三角形**，**直角三角形** の 3 つがある．それぞれの定義は，以下の通り．

- 鋭角三角形：90 度未満の角が，ひとつも"ない"三角形
- 鈍角三角形：90 度よりも大きいの角を，ひとつもつ三角形
- 直角三角形：90 度ピッタリの角を，ひとつもつ三角形

実際の図形を目で見たほうが，わかりやすいだろう[29]．下図を参照．

(A) 鋭角三角形　　(B) 鈍角三角形

図 2.12　三角形の種類

ここで確認したいのは，sin 関数と cos 関数である．図の三角形（鋭角，鈍角のどちらでもよい）で，三角形の頂点 A から，辺 BC もしくはその延長に対して垂線を

[27] 微分方程式は, 後でたくさんあらわれるが，ここでは微分方程式がどのようなものであるかを知っている必要はない．そんなものがあるのだ，と思ってもらえばそれでよい．

[28] 三角関数の部分でしっかりと覚えればよい．

[29] 論理的に厳密に定義したい場合は，記号化しやすい文（命題）を使うべきである．だけど，物理学を考える上では，そこまで神経質になる必要はない．

引く．垂線の足[▶30)] を H とする．$\angle$ABC の角度を θ と表す．

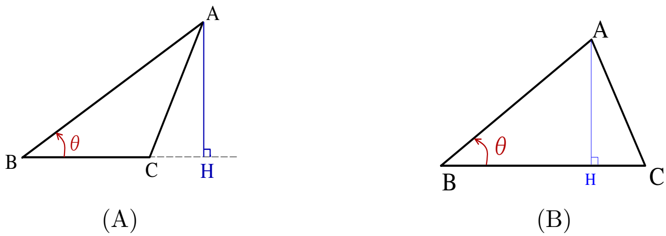


図 2.13　垂線の引き方

これから大事なるのが，垂線 AH と BH である．つまり，直角三角形を考えることになる．三角比には一般の三角形で成り立つような，「正弦定理」や「余弦定理」などがあるが，これらはここでは考えず，必要になった時に確認するという形にしたい．とりあえずは直角三角形を考える．

ということで，図を以下のように書き直そう．

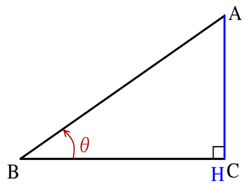


図 2.14　直角三角形の図

直角三角形は，辺 AB の長さ $\|\mathrm{AB}\|$ と角度 θ で，その形を特定できる．[▶31)] つまり，$\|\mathrm{AB}\|$ と θ がそれぞれ 1 つずつ定まれば，垂線 AH の長さ $\|\mathrm{AH}\|$ が 1 つに定まるという関係がある．従って，$\|\mathrm{AH}\|$ は，$\|\mathrm{AB}\|$ と θ の関数であり，

$$\|\mathrm{AH}\| = \|\mathrm{AB}\| \sin\theta$$

と表現する．辺 AB が，基準となる水平な線よりも角度 θ だけ傾いているときの，縦方向の長さが $\|\mathrm{AH}\|$ なのである．

もう一方の辺 BH の長さ $\|\mathrm{BH}\|$ も，$\|\mathrm{AB}\|$ と θ の関数である．

$$\|\mathrm{BH}\| = \|\mathrm{AB}\| \cos\theta$$

▶30)　垂線の足：頂点 A から辺 BC の延長の交点のこと．

▶31)　言い換えると，$\|\mathrm{AB}\|$ と θ の 2 つが特定されると，三角形の形とその大きさがきまる，ということ．

(A)　　(B)

図 2.15　三角形の見方を変えよう

と表現する．

要するに，辺 AB が θ だけ傾いている直角三角形の，縦の長さ ($\|\mathrm{AH}\|$) が知りたい場合，$\|\mathrm{AB}\|$ に $\sin\theta$ をかけて，

$$\|\mathrm{AH}\| = \|\mathrm{AB}\|\sin\theta$$

と計算できるということだ．横の長さ ($\|\mathrm{BH}\|$) を知りたければ，$\cos\theta$ をかければよく，

$$\|\mathrm{BH}\| = \|\mathrm{AB}\|\sin\theta$$

と計算される．$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値は，すでに先人が計算していて，今では，三角関数の表として，簡単に参照できるし，$\|\mathrm{AB}\|$ もわかる．つまり，三角関数を使うことで，辺 AB とその傾射ている角度 θ から，縦と横の長さを計算で出すことができるのだ．

さらに，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ を使うと，辺 AB の傾きを表現できる．一次関数，つまり直線の式では，$y = ax + b$ の a が直線 y の傾きを表している．傾きとは，

$$a = \frac{(y\text{ の増加量})}{(x\text{ の増加量})}$$

で定義される量であった．この式の分母に $\|\mathrm{AB}\|\cos\theta$ を，分子に $\|\mathrm{AB}\|\sin\theta$ を入れると，

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

である．($\|\mathrm{AB}\|$ は約分される．) これは，辺 AB の傾きにほかならない．これを，tan という関数記号を導入し，

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

と表現する．三角比には他にもいろいろな公式があるが，ここでは省略する．三角比は三角関数の特殊 ($0^\circ < \theta < 180^\circ$) な例である．従って，三角比の公式は，三角関数でも成り立つ．三角関数を説明した後，そのうちの重要な公式を確認しよう．

では次に，三角関数にとりかかろう．

2.2.4.2　三角関数の定義

三角関数の定義する[32]．Fig 2.16 を参照してほしい．

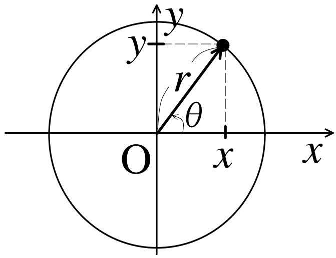


図 2.16　三角関数

図を見るときに，半径 r の円上を回転しているイメージしてほしい．この回転により，θ がいろいろな値に変化している様子が想像できればよい．$0^\circ < \theta < 360^\circ$ に限らず，何回転でもできる．また，右回転 (Fig 2.16 の矢印の向き) を正方向の回転として，その逆回転の負方向の回転も可能である．負の回転の場合，θ の取りうる値は負になる．この回転する半径のことを，**動径** とよぶ．

三角関数の定義

Fig 2.16 において，三角関数 $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ を次で定義する．

$$\sin\theta \equiv \frac{y}{r} \tag{2.12}$$

$$\cos\theta \equiv \frac{x}{r} \tag{2.13}$$

$$\tan\theta \equiv \frac{y}{x} \tag{2.14}$$

r は円の半径である．この定義では，もちろん $r \neq 0$ と仮定している．

2.2.4.3　三角関数の図形的イメージ

三角関数の定義式を見ても，最初はイメージしにくいことと思う．だから，ここで，三角関数の図形的イメージを押さえておこう．

[32] この定義は，図形を用いてなされるので，かなり直観的で，何か受け入れがたいのだが，とりあえず便宜上の定義として考えてもらいたい．しかし，この定義は完全に間違っているわけではない．図形的に定義されるから，そこに直観が入り，論理が崩れてしまうという恐れがあるだけである．このノートでは，この図形的定義で十分である．

¶ cos 関数のイメージ

最初に，cos 関数のイメージを考える．cos 関数の定義式は

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

である．但し，右辺は直交座標による．r は円の半径であるから，定数として見てよい．例えば，$r = 1$ の場合を考えてみよう．$r = 1$ の場合，定義式により

$$\cos\theta = x$$

となる．これは何を表しているか．式の示す通りである．$\cos\theta$ は x の座標値に等しい．三角形で考えれば，半径 r を斜辺とみなしたときの，x 座標に等しいのである．

半径が 1 でない場合はどうだろうか．その場合，定義式から，

$$r\cos\theta = x$$

である．単に半径が 1 の場合の r 倍になったにすぎない．

これは，半径の x 方向だけを考えたい場合に便利な道具となる．動径はいろいろな角度に運動するだろうが，その方向全てではなく，x 軸方向のみを知りたい場合，その時の動径の角度を θ として，$\cos\theta$ をかければよいのだ．

長さ r をもつ動径が，角度 θ の位置にあるとき，その時の x 座標は $x = r\cos\theta$ で計算できる．半径 r に $\cos\theta$ をかけると x 座標が分かるのである．

これはまた，**動径の x 方向の長さを示している**とみても同じことである．

¶ sin 関数のイメージ

sin 関数も，cos 関数と同じように考えられる．sin 関数の定義は

$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$

である．半径 $r = 1$ の場合，それは動径の y 座標を示す．$r \neq 1$ の場合は，

$$r\sin\theta = y$$

である．これは動径の y 座標に他ならない．動径の x 座標を知りたい場合は，半径に $\cos\theta$ をかければよいのと同様に，動径の y 座標を知りたい場合は，$\sin\theta$ を半径 r にかければよい．

長さ r をもつ動径が，角度 θ の位置にあるとき，その時の y 座標は $y = r\sin\theta$ で計算できる．半径 r に $\sin\theta$ をかけると y 座標が分かるのである．

これはまた，**動径の y 方向の長さを示している**とみても同じことである．

¶ tan 関数のイメージ

では，tan 関数は同イメージされるのだろう．tan 関数の定義は

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

である．定義そのものを見れば，答えは意外に簡単だ．動径の傾きを表しているのである．これは定義式から明らかだ．動径の一端は常に座標のある一点から動かない．今の場合は，考えやすいように，座標原点に一端を固定している．だから，

$$\frac{y}{x} = \frac{y-0}{x-0}$$

と見ることができる．動径の回転中心が座標原点ではなく，$(\,x_0, y_0\,)$ の場合は

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}$$

である．どちらの場合も，

$$\frac{y\text{ の増加量}}{x\text{ の増加量}}$$

と見ることができる．

tan **は，動径を一次関数と見立てた時の，変化の割合を示す量**と見ることができる．

2.2.4.4　三角関数の性質

三角関数には公式がいろいろとある．ここでいくつかを確認しておこう．

まず，三平方の定理から，

三角関数の公式

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \tag{2.15}$$

が成立する．

¶ 説明

簡単に説明する．直交座標において，

$$x^2 + y^2 = r^2$$

が成立する．さて，この x，y は三角関数の定義から，

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$$

である．つまり，

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \\ (r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 &= r^2 \\ r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta &= r^2. \end{aligned}$$

$r \neq 0$ だから $r^2 \neq 0$ であり，r^2 で割ると，

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

が導かれる．

3
微分積分学

3.1　極限

3.1.1　数列とは

3.1.2　等差数列

3.1.3　等比数列

3.1.4　等比級数

3.1.5　無限等比級数

3.1.6　数列の極限 –「限りなく 0 に近づける」とは –

微分の定義で，Δx を「0 に近づける」という表現を用いる．しかし，この“ 近づける ”という表現は，どうにも，曖昧である．“ 近づける ”とはいうものの，その近づける方法がよく分からないし，また，どの程度まで近づけられるかもはっきりとしない．そもそも，「近づけられるのか」という不安もある．そこで，ここでは“ 近づける ”という作業とはどのようにすべきかを考える．まず，具体例で考えよう．例として，

(例)　0 の“ 次に ”大きい数

を考えてみよう．自然数で考えるならば，これは 1 である．しかし，今考えているのは，実数の範囲だから，1 ではありえない．それでは，0.1 か．いや，もっと小さい数の 0.01 がある．いやいや，0.001，0.0001，といくらでも考えられる．この問いには，具体的に数を提示して，解答することはできない．それでは，「0 の次に大きい数」は存在しないのか．0 よりも少しでも大きい数は存在するが，“ 0 の次 ” となると，答えられなくなってしまう．この問い自体が，無意味な問いだからである．では，なぜこのようなことを考えたかといえば，0 の次に大きい数を考えるときに，その答えとなる数として，1，0.1，0.01，$\cdots$ と 0 にだんだんと “ 近づいて ” いったからである．「近づける」という作業をしたのだ．これを，文字を用いて表現できれば，「近づける」ということを，もっと納得の行く形で受け入れることができよう．今の手順を，もう一度詳しく，考え直そう．最初に，0 に近い数として，1 を考えた．今回は，1 を考えたが，実際は 0.5 でも，0.3 でも，その他の数でも，よかった．とりあえず，考察に先立って，基準となる数を挙げただけである．そして次に最初に挙げた数よりも，より小さい数を考えた．今回は 1 に対して 0.1 を挙げたが，最初に挙げた数の 0 よりも近い値であれば，どのような数でもよい．そして，さらに 0 に近い値，もっと 0 に近い値へと徐々に 0 に近づけていった．この作業は無制限に続き，終わりがないが，これを自動的に行わせるように，文字で表現できれば，目標を達成できる．今の例とその解答手順を，もう少し一般的に扱うために，文字で表現してみよう．0 に近い数として最初に挙げる数を a_0 としよう．そして，0 と a_0 の値との差 $|\ a_0 - 0\ |$ を考え，これよりもさらに小さい数が存在するとき，そのような数を $a_1(<|\ a_0 - 0\ |)$ とおこう．これを繰り返すと，a_0，a_1，a_2，a_3，のような数列が得られる．この数列を $\{a_n\}$ と表現すれば，n が大きくなるに伴い，数列 $\{a_n\}$ は 0 に近づいていくと言える．あとは，この作業を式で表現することを考えるのみだ．自然数 n が大きくなるということは，

ある任意の自然数 n_0 に対して，$n > n_0$ となるような自然数 n が存在する

ということである．例えば，任意の自然数を，$n_0 = 100$ としてみよう．この 100 に対して，大きい自然数は例えば 200 がある．そうなれば，$n_0 = 200$ と書き換えて，これより大きい数 500 を考えられる．さらに $n_0 = 500$ と書き換えて，$\cdots$ のように考えていけば，いくらでも大きな自然数を得ることができる．そして，n の増加に伴い，a_n と 0 との差が小さくなるので，その差を $\varepsilon(> 0)$ と表現すれば，目標とする式表現として，次のように書ける．

限りなく 0 に近づける

任意の正の数 ε に対して，自然数 n_0 を決めることができ，

$$n > n_0 \quad \Rightarrow \quad |\, a_n - 0 \,| < \varepsilon \tag{3.1}$$

が成立するならば，数列 a_n は 0 に限りなく近づくと言える．

このとき，これをもっと読みやすく簡略化した式として，

$$\lim_{n\to\infty} \{a_n\} = 0 \tag{3.2}$$

と表現する．

今回挙げた例の，この ε に対応するのが，1 である．この 1 対応して $n_0 = 1$ と決まる．そして，$n_0 = 1$ に対して，これより大きい自然数 $n = 2$ を与えることができる．$n = 2$ としたときに，$|\, a_2 - 0 \,| < 1$ となるような数 a_2 が存在すれば，ε として [1 より小さい値] が存在するとして，ε がその値で書き換えられる．今回の例では 0.1 である．また，$n_0 = 2$ とも書き換えられる．これで一巡したが，同様に，$n_0 = 2$ のとき，これよりも大きい自然数 $n = 3$ を与えることができ，$|\, a_2 - 0 \,| < 0.1$ となるような数が存在すれば，ε をその数に書き換える．今回の例では 0.01 である．そして，$n_0 = 3$ とも書き換える．$n_0 = 3$ に対して $n = 4$ が存在し，$\cdots$ 以下同様．

このような作業を無制限に続けることができるとき，0 に近づけることができるということであり，また，「限りなく 0 に近づける」という行為でもある．そして，この式によって，「限りなく 0 に近づける」という行為が，いわば " 自動的 " に行.「近づける」という行動を起こさなくても，極限を定義することができた．

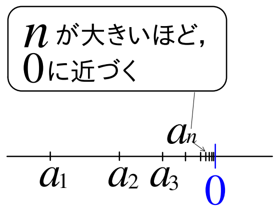


図 3.1　数列の極限

また，上の例では 0 に近づけるということを考えたが，任意の実数に近づけるという作業も同じように考えられる．その場合，近づけたい数を α とするならば，次のように表現を拡張できる．

限りなく実数 α に近づける

任意の正の数 ε に対して，自然数 n_0 を決めることができ，

$$n > n_0 \quad \Rightarrow \quad |\, a_n - \alpha \,| < \varepsilon \tag{3.3}$$

が成立するならば，数列 a_n は α に限りなく近づくと言える．

このとき，これをもっと読みやすく簡略化した式として，

$$\lim_{n\to\infty} \{a_n\} = \alpha \tag{3.4}$$

と表現する．

見ての通り，先ほどの式の 0 を α で置き換えただけである．ちなみに，このような α が存在するとき，数列 $\{a_n\}$ は α に **収束** するという．また，α のことを数列 $\{a_n\}$ の **極限** という．感覚的にいってしまえば，数列の項の番号 n が大きくなるともなって，項の値が極限値に近づくということである．

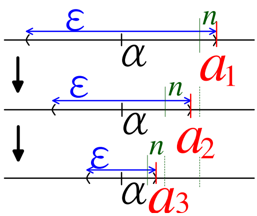


図 3.2　数列の極限 2

最初に ε を設定するのは，自然数 n_0 を必ず決定できるようにするためである．自然数 n_0 を決定したとしても，ε は全く定まらない．先に ε を決定しておけば，その範囲に含まれる自然数があるはずであり，この内のどれかが n_0 であるとして，極限の定義ができる．

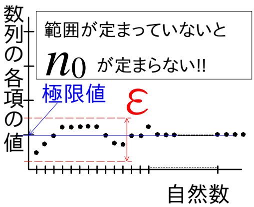


図 3.3　数列の極限 3

この定義の最大の利点は，複数の数列の極限値に関する，加減乗除の定理を証明できる点にある．例えば，2 つの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ があるとき，次のような数列を作ってみよう．

$$\{a_n + b_n\} = a_1 + b_1\,,\ a_2 + b_2\,,\ a_3 + b_3\,,\ \cdots\,,\ a_n + b_n\,,\ \cdots$$

この数列の極限はどうなるだろうか．これは簡単で，2 つの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の極限がそれぞれ，

$$\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = \alpha$$
$$\lim_{n\to\infty}\{b_n\} = \beta$$

であるとき，数列 $\{a_n + b_n\}$ の極限は，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\{a_n + b_n\} &= \lim_{n\to\infty}\{a_n\} + \lim_{n\to\infty}\{b_n\}\\ &= \alpha + \beta\end{aligned}$$

となる．これを証明するには，「近づける」という表現で極限を説明しただけでは論理的に不可能である．極限を式で定義することで，この定義に基づいて，上の公式を証明することが可能になる．

3.1.7　関数の極限 – ε - δ 論法 –

数列の極限を考えたついでに，関数の極限も考える．考える関数の性質として，全ての点で連続で，全ての点で微分可能な関数を考える．関数が連続であるとは，関数に切れ目がないことである．微分可能であるというのは，全ての点がなめらかにつながっているということである．

1 変数関数について考える．変数 x をもつ関数 $f(x)$ において，ある任意の定点 x_0 を関数 $f(x)$ に代入する．このとき，関数が $f(x_0) = A$ であったとする．つまり，関数 $f(x)$ は，点 x_0 で，A という値をとると仮定しよう．

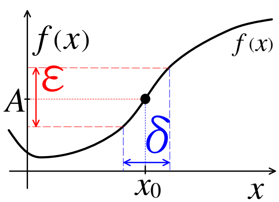


図 3.4　関数の極限

この場合，関数の極限として，1 変数関数 $f(x)$ において，

変数 x を限りなく x_0に近づけると，関数 $f(x)$ の値は，A に近づく．

と言える．しかし，これはとても曖昧な表現である．数列の極限で考えたときと同じように，この「近づける」という行為を，式で表現することにしよう．

変数 x を定点 x_0 に近づけると，関数 $f(x_0)$ は A に近づくが，A とは一致しない．つまり，変数 x を定点 x_0 に近づけているときには, A とは若干異なった値の $A+\varepsilon$ を示す．ここに，ε は任意の正の定数である．ε のイメージは，とても小さな値をもつ定数である．

さて最初に関数 $f(x)$ に対して，ε を決めると，これに対応して，変数 x の範囲も決まる．その x の範囲を δ と書こう．しかし，この δ が分かったとき，さらに関数 $f(x)$ が A に近づくような範囲 ε を与えなおすことができる．そうすれば，この ε の変更に伴って，x の範囲 δ も変わる．そうなれば，変更された δ に対して，さらに $f(x)$ が A に近づくような範囲に $\cdots$．これは無制限に続けることができ，最終的には，関数の極限として，x を x_0 に近づけたときに，A の値を得る，ということになる．

このように，最初の一回だけ ε を指定するだけで，あとは無制限に自動的に，関数の極限値を得られる．以上をもう少し詳しく記述し，式で表現して見よう．

関数 $f(x)$ において，変数 x を x_0 に近づけるが，x_0 に一致させないようにするとき，$|\, x-x_0\,|$ はある正の値 δ をもつ．この δ のイメージは，x_0 を含むような，変数 x の微小な区間である．そして，関数 $f(x)$ には，この微小区間 δ に対応して，$|\, f(x)-A\,|$ という正の値 ε という値域をもつことになる．$f(x_0)=A$ であるので，ε がより小さくなれば，さらに関数は A からの範囲を狭めていくことになる．関数 $f(x)$ は連続な関数なので，ε をさらに小さくすることは可能である．ε をさらに小さくするに伴い，δ もさらに小さくなっていく．もちろん，δ をいくら小さくしても，その範囲の中には x_0 が含まれている．

式で書いてみよう．まず，A からのずれの程度の指標である，ε が考えられる．そして，この ε が定まることで，x の範囲もきまり，δ となるとき，

$$|\, x-x_0\,|<\delta \quad\Rightarrow\quad |\, f(x)-A\,|<\varepsilon \tag{3.5}$$

であるならば，関数 $f(x)$ は，変数 x を定点 x_0 に近づけたときに，A に収束すると言える．

今までは連続関数を考えてきたが，実際は，もう少し制限を緩めることができる．というのも，関数 $f(x)$ は区間 I のみで連続と定義されていればよく，また一方で，x も x_0 の点で定義されていなくてもかまわない．$f(x_0)$ が定義されていなくても，x は単に x_0 に近づけるだけであり，一致させるわけではないので，不都合は生じない．

最初に ε の存在を確認したのは，このためである．もし δ の存在を先に認めてしまうと，もしかしたら，関数が定義されないような範囲を選んでしまう可能性がある．そうなれば，上の式は，その関数が定義されていない点に差し掛かったとき，極限が存在しないという結論を出してしまう．

3.2　積分

3.2.1　長方形の面積公式に対する疑問

積分は面積と深くかかわりがある．そこで，ここで改めて，面積とは何かを反省してみたい．

目標は任意の一変数関数 $f(x)$ の積分を定義することだ．以下，変数 x は $f(x)$ の独立変数であり，実数であるとする．

面積といえば，最も基本的な面積公式として，長方形の面積の公式

縦 $\times$ 横

がある．

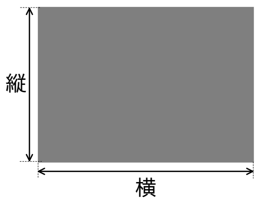


図 3.5　長方形の面積

長方形の面積というものを，小学校でどのように教わったか忘れてしまったが，おそらく，天下り的に教わったのではないかと思う．しかし，強引に押し付けられたこの式を，単純に鵜呑みにするには少々抵抗がある．そこで次節から，改めて長方形の面積はなぜ「縦の長さ $\times$ 横の長さ」なのかを，できるだけ，合理的に説明してみよう．

3.2.2　長さとは何か

まず，長さという概念を考えないといけない．これは何も難しく考えることない．なぜなら，私たちは定規を使って長さを測るという行為をすでに会得しているからである．少し畏まった形で，説明してみよう．

長さは，数直線状の 2 点の間の距離として捉えれば良い．

棒の長さ l を考えるなら，棒を数直線に並べて置いて，棒の両端に対応する数直線上の 2 点 a，b ($a < b$ となるように置く) から，

$$l = b - a$$

とすれば，長さを数で表せる．

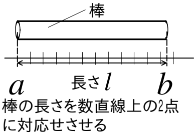


図 3.6　棒の長さと数直線

さらに言えば，棒を置く位置はどでもよいから[1]，棒の一端を数直線上の原点，つまり，数値 0 に対応するようにして，さらに，もう一端を正の数値 $x(>0)$ に対応するように置ける．

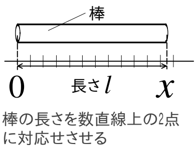


図 3.7　棒の長さ

すると，

$$l = x - 0 = x$$

となる．$l = x$ となって，数値 x がそのまま棒の長を示すことになる．

なんだか面倒な言い回しになってしまったが，要は，棒の長を測るには，棒の端に定規の 0 をあてて，もう一方の端に対応する数値 x を読めば，この数値 x が知りたかった棒の長さ l と同一視できるということである．単に，定規を使って棒の長さを測るという行為を，式を使って丁寧に説明しただけだ．

3.2.3　長方形の面積とは何か

長さは，数直線上の点により表現できることがわかった．では，面積はどうだろうか．たしかに，私たちは長さという概念だけではなく，平面的な広がりというものも感じ取ることができる．そして，様々な広がりの大きさを感じてもいる．例えば，土地の広さが良い例だ．土地を持っていると，国に税を払わないといけないが，この税の支払い額は所有している土地の広さに大きく影響する．当然，広い土地を持っているほど，多額の税金を国に収めないとならない．現実には，土地の面積でけで税の支払い額が決まるわけではないが，ここでは，話を単純にするため，面積のみで支払う

[1] 棒を置く位置によって，棒の長さが変わることがないという前提の上での話である．

税金の額が決まるとしよう．つまり，同じ大きさの土地を持っている者は，同額の税を払うことになる．こうなると問題になるのが，土地の大きさの測り方である．どうやって，土地の広さが同じだとか，どちらが小さいとかをきめれば良いのだろうか．もし，正確に表すことができなければ，例えば，同じくらいの広さの土地を持つものが二人いたとして，支払う税額が両者で異なれば，争いが起こることは必至である．幸いにも，この問題を解決するすべを，すでに私たちは持っている．面積という概念が，その解決の鍵だ．ある決まった広さを基準として，その何倍かで広さを表すのである．これにより，広さを数量的に比較することができるのである▶[2]．

長さが数直線状の 2 点で表すことができたなら，面積も同じように考えることができないだろうか．全く同じように考えることはできないが，この考え方を真似ることはできる．数直線を 2 つ使うのである．

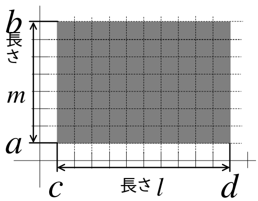


図 3.8　面積

2 つの数直線を用意し▶[3]，直角に交わるようにする．このような行為を，2 つの直線を **直交** させるといい，また，この 2 つの直線は直交しているという．考えやすいように，両数直線ともに，原点で直交させせよう．

2 つの数直線が直交している部分の近くに，長方形を置く．置き方はいろいろ考えられるが，長方形の辺が用意した数直線に平行になるようにしよう．すると，各辺の頂点を数直線上の数値に対応するようになる．つまり，辺の長さが数によって表現できるのである．

長方形のもつ辺はの数は，縦 2 本と横 2 本で，合わせて 4 つだが，縦と横の 2 本づつの辺の長さは同じである．つまり，長方形の形を明確にするには，縦 1 個と横 1 個の 2 つの辺の長さが分かれば良い．縦の長さを m，横の長さを l とおく．縦の長さ m は，辺の頂点が数直線上の a，b に対応しているとき（$a < b$ となるようにする），

$$m = b - a$$

▶2)　実際には，面積の測定方法はどうするかといった問題がある．同じ土地の面積を測るのに，毎回異なる結果を出すような測定方法ではダメだ．かなり深刻な問題だけど，ここで無視しよう．

▶3)　この 2 つの数直線の目盛の間隔の長さは，実のところ異なっていてもよいが，ここでは考えやすいように，目盛の間隔は同じであるとしよう．

である．横方向の長さについても同じように考えて（$c < d$ となるようにする），

$$l = d - c.$$

長方形の面積はこの 2 つの長さ l，m によって，確定する．長方形の面積を表す記号を，$S_{\text{長方形}}$ としたとき，$S_{\text{長方形}}$ は l と m を用いて，

$$S_{\text{長方形}} = l \times m$$

と定義される．これは数直線上の数値 a，b，c，d で表せば，

$$S_{\text{長方形}} = l \times m = (d - c) \times (b - a)$$

となり，ひとつの数値に確定する．

面積とは，2 つの独立した数直線上にある，それぞれの区間の長さ l，m によって特徴付けられるものである．小学校では，「長方形の面積は縦 $\times$ 横である」と押し付けられるように教わったが，縦や横とはなんのことかはそれほど明確には説明されていなかった．ここでは，縦と横を直交する 2 つの数直線であるように，置き換えることで明確にすることができた．

しかし，面積は，なぜ，乗算で定義されているのだろうか．加算で定義してもよさそうではないか．また，少々おかしいかもしれないが，減算や除算でも，論理的に矛盾することのないように，面積を定義することもできるのではないか．もしかしたら，予想通り▶[4]，乗算以外でも定義可能かもしれない．しかし，広さを数で表すのに最も直感と合うものは，掛け算である．例えば，横の長さが 1 だけ増えるとしても，長方形には縦の長さもあるから，その分だけ余計に面積が増える．式で書けば，もともと面積が $S_{\text{長方形}} = l \times m$ であった場合に，l が 1 増えるとで，

$$S_{\text{長方形}} = (l + 1) \times m = l \times m + m$$

となって，たとえ l が 1 しか増えなかっとしても，面積は m だけ増えることになるのである．縦横にぎっしりと詰めたタイルを，さらに横にその数を増やすときには，縦の枚数分だけのタイルが必要になるのである．乗算による定義はこのイメージと一致するのだ．

♯ *memo* No.2: 一般的な形の面積

ちょっと関係ないことになるが，ついでに任意の図形の面積について考えてみよう．

たしか，小学校では，一般的な形の面積を測る方法として，基準となる面積が 1 のタイルを持ってきて，その任意の形にを覆うのにひつようなタイルの枚数を数える，ということをしたはず．この考え方は，とても大切な考え方である．とても素朴で，それこそ，小学生でも理解できるのだけど，すごく重要なことを含んでいる．

▶[4] 確かめてないからわかりません．もしかしたら，簡単に否定されてしまうかもしれない．

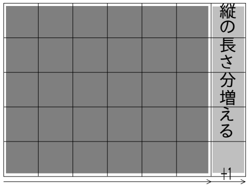
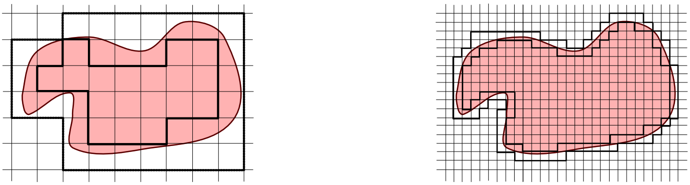


図 3.9　面積はなぜ掛け算で定義されるか

もちろん，ここで用意したタイルは同じ形のものなので，任意の形をした図形に対してぴったりと覆うことはできず，足りない部分や，はみ出してしまう部分も生じる．小学校では，「だいたいこのくらい」で終わってしまっただろうが，この考え方をもう一段階進めてみると，任意の形をした図形の面積を正確に表現できるようになる．その一段階は案外に低い．とても小さいタイルを用意すれば良いのである．タイルが小さいほど，隙間を詰めやすくなり，タイルの覆う面積が本来の任意の図形の面積に近づく．



(A)　(B)

図 3.10　面積

この考え方は，微分積分学の心に直結する大切な精神を含んでいるので，もう一度，繰り返しておこう．直感的に分かりきっていることだけど，大変大切な考え方である．

任意の大きさの長方形を 1 つ用意して，この 1 つを複製する．用意した長方形の面積は，すでに知っているとする．それで，複製した長方形を，面積を知りたい図形の内側に，できる限り稠密[▶5)] になるように並べる．そして，任意の図形の面積を，並べたすべての長方形の面積の合計で近似するのである．もちろん，隙間の文だけの誤差は生じる．この誤差が気になるようだったら，はじめに用意する任意の大きさの長方形をより小さいものにすれば，それだけ隙間を埋めることができ，その誤差を小さくできる．

ここで，誤差を「小さく」できると言ってしまった．この言い方では，どれだけ誤差を小さくできるのかが不明確で，曖昧さを含んでしまう．この曖昧さを解消するために厳密には，$\varepsilon-\delta$ 論法を使うのであるが，物理学を学ぶ上では，このような厳密さにはそんなにこだわる必要は

▶5)　稠密：隙間なく，ぎっしりと詰まっている様子を，**稠密** であるという．ここで使った「できる限り稠密」の意味は，本来の「稠密」の意味からずれているが，隙間の面積が最小になるようにという意味で，「できる限り稠密」という表現を使った．

ないので，ここでは少々細かいことには目をつぶって，先に話を進めていこう[6)]．

♯ *memo* No.3: 「直角」とは何か

2 つの直線が「直交する」ということは，その 2 つの直線が直角に交わっていることであると，上に記述した．では，「直角」とはなんだろうか．交わる角度が $\pi/2$（度数表記では $90°$）である場合に，直角に交わっていると表現する．この説明に従うと，$\pi/2$ は円の一周する角度 2π の $1/4$ だから，その円の 2 つの直径が円を 4 等分する角度で交わっている，と言うことになる．何が 4 等分なのかといえば，それは円の面積に他ならない．

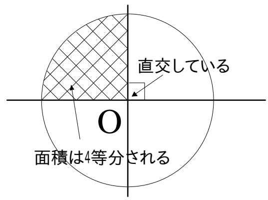


図 3.11　円の面積と直交する 2 つの直線

となると，直角を説明するより先に，面積について説明すべきである．しかし，上に説明した考え方に従うと，円の面積を知るには，無限に小さな長方形でその円を覆わないとならない．そして，ひとつの長方形の面積は，上の記述[7)] によれば，直交する 2 つの直線という概念を元に，説明されるものである．

さて，語彙の説明の循環に気づいただろうか．直角を説明する前に，面積について説明しようとしたのだけど，その面積の説明をするのに，直角という考え方を使ってしまったのである．つまり，この説明では，面積と直角の両方の語彙について，説明がなされていないということである．

では，上の説明のどこに間違いがあったのか．答えは簡単だ．「直角に交わる」ということを，視覚的な直感に頼ってしまったことである．なぜだか知らないが，人間の目には，「直角」が他の角度よりも特別な角度であると，感じてしまう．この感覚が，このような間違いを起こしたと考えてよいだろう．つまり，より大げさに言うなら，図形の性質の視覚に頼った説明は，論理に矛盾を生じやすいということである．

そうなると，どう正せばよいかということに関心が向かうが，一番手っ取り早い方法が，後に説明することになる，**ベクトルの内積・外積** という概念を使うことである．どういう事かといえば，「ある条件式[8)] が成り立つとき，そして, その場合に限り，2 つの直線は直交してい

[6)] ただし，もちろん，一度も厳密に考えないというはよくない．暇なときに，物理学を学ぶのに飽きたときに，数学の教科書を読んでおくべきだ．ここで厳密さを無視したのは，あくまでも物理学を行う上では無視しても支障がないからであり，重要でないからということではない．

[7)] 3.2.3 節参照.

[8)] 先走って，書いておくと，2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ があるとき（ただし，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ ともに零ベクトルでないとする)，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ であるならば，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は **直交** しているという．「ベクトル」という単語を，「直線」と置き換えることで，2 つの直線が直交する条件を得ることができる．

詳細は，5.2.3 節（75 ページ），5.2.4 節（76 ページ），5.2.6 節（78 ページ），5.2.7 節（79 ページ）を参照.

るという」といった，説明になるのだ．

言いたかったことは，**上記の説明には，矛盾点が含まれる**ということであり，この点に注意してほしい，ということである．直感的に説明しようとしたばっかりに，このような矛盾した記述を行ってしまった．さらに白状すれば，このノートでは，多かれ少なかれ，この種の矛盾した説明を行ってしまうこととなる．しかし，このような矛盾した説明は，物理学を直感的に説明しようとする場合には，回避ができないと思われる▶[9] なので，このノートを読む場合には，少々矛盾した説明にめをつむっていてもらいたい．また，矛盾しているか否か意識しながら，読み進めてもらいたい．

3.2.4　関数と，図形の面積

長方形の面積について，改めて考え直した．そして，一般の図形の面積の求め方の考え方も紹介した．そして，いよいよ，次に積分の定義にとりかかるのであるが，いきなり定義を紹介したところで，意味不明で消化不良を起こしかねない．なので，少しずつ段階を踏んで，帰納的▶[10] に積分の定義について考える．

目標は，一般の図形の面積が計算できるようになること，である．しかし，いきなり一般の図形を考えることは難しいので▶[11]，まずは，以下のような状況を考える．一般の図形の面積を考えるには，Fig 3.12 のように考えると良い．

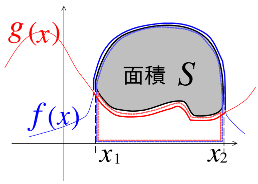


図 3.12　S は関数 $f(x)$ と $g(x)$ の間の面積とみなせる

まず，面積を知りたい図形があり，その面積が仮に計算可能であったとして，その面積を S としよう．面積 S を知る方法として，まず，図形の縁▶[12] に着目する．どうするかというと，この図形の縁を上下に分けて見るのである．そして，上方の縁が

▶9)　少なくとも，私には，物理学を論理的に矛盾なく説明するだけの力はないし，それがこのノートの目的ではない．このノートの目的の一つは，自然界の現象を物理学を通して，ごく直感的にみることである．

▶10)　帰納的：具体例から一般的に通用する表現を得ることを，「**帰納的** な手段で，一般規則を得る」などという．学問は，主として，帰納的な考え方によって理論が組み立てられる．なぜなら，世の中には具体例しか存在しないからである．具体例の共通点を洗い出して，より一般に通用する規則を見つけるのである．それが数学では公理であったり，物理学では法則と言われたりするものである．

▶11)　少なくとも，私にとっては，難しいです．

▶12)　縁：「ふち」と読んでください．「えん」ではありません．図形の周囲を囲む縁のことを言っているんです．

属する関数 $f(x)$ を仮想的に用意する．下方についても同じように，関数 $g(x)$ を用意しよう．図形の縁の上下の端は，両方共に，x_1，x_2（ただし，$x_1 < x_2$ とする）である．そして，次の計算を行う．

(1) 関数 $f(x)$ と x 軸の間（縦方向）の面積を，x_1 から x_2 の間（横方向）で計算し，その値を S_f とおく
(2) 関数 $g(x)$ と x 軸の間（縦方向）の面積を，x_1 から x_2 の間（横方向）で計算し，その値を S_g とおく
(3) $S = S_f - S_g$ により，求めたい面積 S を得る

この方法により，一般的な図形の面積を求めることができる．ただし，関数 $f(x)$ や $g(x)$ が存在する場合のみに限られてしまうのだが▶[13]．

次節より，このような図形の面積の計算の仕方を学習する．まずは，関数 $f(x)$ と x 軸との間の面積を考える．これがわかれば，$g(x)$ に対しも全く同じだから，$S = S_f - S_g$ が計算できるようになる．

♯ *memo* No.4: 一般的な図形の例

上のような考え方ができない図形をひとつ紹介しておこう．Fig 3.13 を参照．

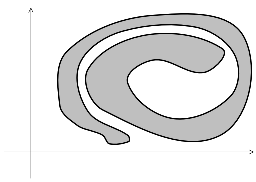


図 3.13　関数 $f(x)$ と x 軸の間の面積

これでは，図形の縁の上半分の関数 $f(x)$ や下半分の関数 $g(x)$ など，どう考えても作ることはできない．

残念ながら，これらの図形の面積をどう扱うかについては，このノートでは考えない．これ以上の深入りはしたくない．物理学で使うのは，関数の作る面積が重要なのであり，一般の図形の面積まで考える必要はない▶[14]．

▶[13] この意味で，「一般的」と言ってしまうのは，少々誇張である．

▶[14] もしかしたら，使わなければならないのかもしれないが，今のところは必要としない．ただし，面白い問題であるので，次の教科書を読むことを勧める．
（教科書）志賀 浩二 [著]，「数学 30 講シリーズ – 解析入門 30 講」，朝倉書店，1988(初版)

3.2.5 「関数 $f(x)$ と x 軸の間の面積」とは

最終的な目的は，「関数 $f(x)$ と x 軸の間の面積を計算すること」である．イメージは Fig 3.14 のようなものである．

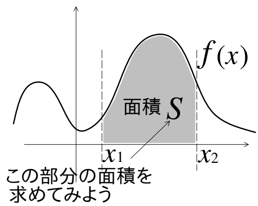


図 3.14 関数 $f(x)$ と x 軸の間の面積

3.2.6 関数 $f(x)$ に与える条件

今までは，何の断りもなしに，「関数 $f(x)$」と書いてきた．しかし，実は，これから考える関数 $f(x)$ には，ある条件をみたしている必要がある．それは，「**連続** であり，かつ， **微分可能** である関数」というものだ．しかし，ここでは，「連続」だとか「微分可能」だとかの専門用語をまだ説明していないので，この条件はとりあえず，考えなくてよい．これらの用語については，微分を学習するときに説明する．それで，関数 $f(x)$ については，今しばらくの間，一次関数とか二次関数，三角関数，指数関数を指しているというように思っていてもらいたい．

3.2.7 変数 x のとりうる値の制限

関数 $f(x)$ は，一般的に考えれば，x 軸全体に定義される．しかし，これは面積を考える場合には不都合なことである．というのも，x の範囲を指定してやらないと，面積を計算できないのである．そこで，この x のとりうる値を制限してやって，その制限した区間における $f(x)$ の面積を考えることにする．このような考え方で面積を計算する手法のことを，**定積分** という▶[15]．定積分を定義することが，この章の最終的な目標である．

▶15) なぜ，わざわざ，「積分」に「定」という文字を付けるのかといえば，あとで，**不定積分** といわれる計算手法を紹介するからである．不定積分は，微分の逆演算として知られるものだ．後ほど，詳しく説明しよう．

3.2.8　「近似的な面積」という考え方

コメント　　では，積分の定義を説明していこう．とは言っても，一般的に，関数は色々とクネクネしていて，直接的に面積を計算することは不可能である．そこで，次のような考え方を使う．近似的な面積の値を計算するのである．

近似的な面積を計算方法の説明に入ろう．どうするかというと，まず，x 軸をある有限個の区間に区切る．この区間の個数は何個でもいい[16]．なので，個数を N 個としよう．この区間の分割は，長さを当分にしなくても良い．そうすると，x 軸のそれぞれの区間には，ある長さが各々対応しているはずである．なので，それらの長さを，右端から，$\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_N$ と書くことにする．区間の長さが等分であるという条件はないから，一般には $\Delta x_1 \neq \Delta x_2$ である[17]．

x 軸を N 個に分割したので，N 個の区間ができたわけだ．この N 個の区間でそれぞれ，代表点を一つ決める．代表点の決め方には任意である．これらの代表点を決めると，その代表点に対する関数の値も定まる．代表点を $x_1, x_2, \cdots, x_N$ と書こう．以下，番号 i を使い，x_i とまとめて，略記する．Fig 3.15 参照．

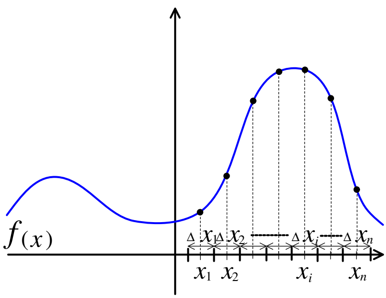


図 3.15　区間を N 個に分割

第一の区間である Δx_1 の部分に注目しよう．この区間をみると，この区間で関数の値が仮に一定値を取るとすれば[18]，横 Δx_1，縦 $f(x_1)$ の長方形が一つ作れ

---

[16] 有限個であることを忘れないでね．ちなみに，後で，この個数 N を無限大にもっていきます．無限大に持っていくことで，近似値を真の値にさせることができるんだ．

[17] もちろん，“ たまたま長さが同じになってしまいました ” ということもある．だけど，長さが同じだろうが異なっていようが，最終的には関係の無いことなので，無視してしまおう．

[18] ひとつの区間で関数が一定値をとるなんていう仮定は，強引すぎるかもしれない．しかし，ここは我慢して，先へ読み進めてほしい．すぐに，この強引さは解消されることと思う．ここでは，あくまでも，面積の近似値をどう考えるかを説明するだけであり，近似するという意味では，そんなに強引な仮定ではないだろう．

る[19]．Fig 3.16 参照．同様に，横 Δx_2，縦 $f(x_2)$ の長方形も一つ作れる．同じように N 個のすべての区間に対して長方形を考えられる．それらは，横 Δx_i と 縦 $f(x_i)$ の長方形の面積 $\Delta x_i f(x_i)$ である．ここで作った長方形の面積を足しあわせて，その値を S_N とした場合，

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} \Delta x_i f(x_i) = \Delta x_1 f(x_1) + \Delta x_2 f(x_2) + \cdots + \Delta x_N f(x_N)$$

と計算される．

なんでこんな長方形を考えて，それらを加え合わせて S_N を求めたかというと，S_N が，今求めるべき「関数 $f(x)$ と x 軸の間の面積」の近似値として，使えるからである．Fig 3.16 参照．

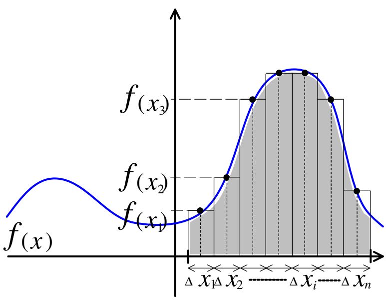


図 3.16　関数 $f(x)$ と x 軸の間の面積

♯ *memo* No.5: 和の記号 $\sum$

$\sum$ は総和の記号である．“ シグマ ” と読む．$\displaystyle\sum_{i=1}^{N} f(x_i)\Delta x_i$ は以下の式の略記である．

$$\sum_{i=1}^{N} f(x_i)\Delta x_i = f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \cdots + f(x_{N-1})\Delta x_{N-1} + f(x_N)\Delta x_N$$

♯ *memo* No.6: 番号 i を用いた表現（例 x_i）

番号 i を用いた表現について，説明する．というのも，私がこの表現につまずいてしまったからである[20]．

▶19)　以降では，「横の長さ」と記述すべきところを，単に，「横」と記述する．「縦の長さ」についても，単に，「縦」と記述する．煩わしさを無くすためである．単なる縦・横いう言葉との区別は文脈で判別できるので，省略した表現をする．

▶20)　私は，この表現の意味を，なかなか理解できなかった．最初は，意味がわからず，式変形を追うことしかできなかった．これを理解するのに，半年以上（1 年かも）かかった記憶がある．線形代数

この表現を導入したい理由は，例えば，上の場合で，この分割した $\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, x_N$ と，それに対応した代表点 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ の任意の一組を表現することが多くなるから，その略記法を使いたいからである．

番号というだけに，$i = 1, 2, 3, \cdots, N$ とする．つまり，番号 i は，自然数のうちどれかひとつの数を表すもの，とするのである．この番号 i を用いることで，x_1 や x_2 などを，ひっくるめて表現できるのである．つまり，x_i と書くことで，$x_1, x_2, \cdots, x_N$ 任意の一つを表現するのである．x_i と書かれたら，それは x_1 かもしれないし，x_2 かもしれないが，$x_1, x_2, \cdots, x_N$ の全てに対して記述したい場合に，x_i と書けば，これでことが足りるのである．はじめのうちは，少々戸惑うかもしれないが，慣れてしまえば，非常に簡単で便利な表現方法であることを，感じることと思う．この番号 i を用いた表現は，以降で，多々出てくる．特に，物理学を学ぶ際には，この記述方法が当たり前のように使用される．できるだけ，早期に慣れておくようにしたい．

3.2.9　面積確定の図形

近似値の取り方は二種類考えられる．真値よりも少々大きめの値と，小さい目の値の二つの近似である．例えば，1 を真値としたとき，その大きめの近似値は 1.1 で，小さめの近似値が 0.9 といった具合である．

関数 $f(x)$ のグラフを描き，変数 x の区間を N 個に分割しよう．

このひとつ 1 つの区間 Δx_i では，関数の値が一定であるように近似する．このような近似のとり方としては，2 種類の方法があるとが考えられる．Fig 3.17 参照．関数 $f(x)$ より少し大きい値で近似するのと，少し小さい値で近似する方法の 2 種類である．大きい方の近似値を $f_{大}(x)$，小さい方の近似値を $f_{小}(x)$ と表記する．そして，各区間幅 とその区間でのしかし，N 個の区間の分割をさらに細かくしていけば，この 2 種類の近似はだんだんと同じ値を示すようになる．大きめに近似した面積を $S_{N\text{ 大}}$，小さめに近似した面積を $S_{N\text{ 小}}$ と書くと，

$$n \longrightarrow \infty \quad \text{のとき，} \quad S_{\text{N 大}} = S_{N\text{ 小}}. \tag{3.6}$$

である．この関係式 (3.6) が成り立つとき，この図形は **面積確定** の図形と言われる．

3.2.10　積分可能

関数 $f(x)$ と x との間の面積を考え，これが面積確定である場合，積分ができる．積分が定義できることを **積分可能** といわれる．特に，この部分で考えている積分は，**Riemann 積分可能** という▶21)．

要するに，ある図形の面積の近似的な値を，図形の分割という考え方を使って求め

（ベクトルと行列を扱う数学の分野）が得意なひとには，なんの苦労もなしに，理解できることなんだけど $\cdots$.

▶21) 実は，Riemann(リーマン) 積分以外にも **Lebesgue(ルベーグ) 積分** という積分方法もあるが，これは高度であるので，この部分では考えない．

るとして，大きい方の近似値と，小さい方の近似値が考えれる．分割数を無限大にしたとき，この 2 つの近似値が同じ値に落ち着くときに，積分が可能なのである．

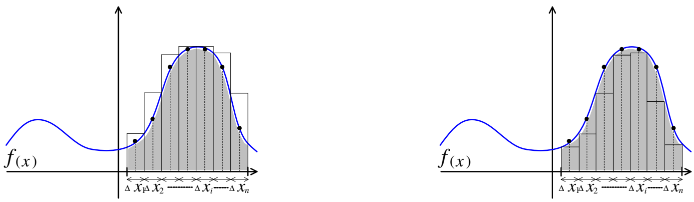
3.2.11　定積分の定義

コメント　面積の近似値から，本来の面積値を得る方法を考える．この方法こそ，**定積分**の定義にほかならない．

変数 x のある区間 Δx_i の両端の関数 $f(x)$ の値はほとんど差がなく一定であるとみなせる——というか，一定とあるようにみなせるように区間を分割したのだが——．そこで，区間 Δx_i 内のどの点でもよいが[22]，その 1 つの点 x_i をとって

$$f(x_i)\Delta x_i$$

という量を作る．



(A) 大きめの近似　(B) 小さめの近似

図 3.17　近似値の得方は 2 種類ある

そして，N 個全てについて同様に考え，それれらを加え合わせる．これを S_N とおこう．

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\Delta x_i \tag{3.7}$$

このままでは，本当の値に近づかない．近づけるには，分割数 N を増やし，区間分割を細かくする必要がある．さらに分割数を上げてみよう．Fig 3.18 参照．

だんだんと真値に近づく様子が，イメージできるだろう．しかしこれでも足りない．分割数 N を，もっともっと大きい値にとれば，それだけ本当に求めたい関数 $f(x)$ と x 軸の間の面積に近づく．けれども，いくら分割数 N の値を大きな自然数に変えたとしても，有限の値で止めてしまっては，必ず誤差が生じることは明らか．

▶ 22)　要は，変数の区間 Δx_i における $f(x_i)$ の値がほしいのである．区間内で $f(x)$ の値は一定値をとると仮定しているので，変数はその区間内ならばどれをとろうが，同じ結果となる．別に真中の値をとるようなことをしなくともよい．

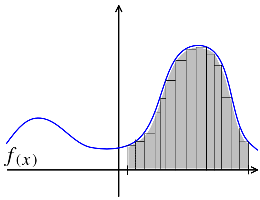


図 3.18　分割数 N を増やす

それでは，どのように考えるかというと，“ 分割数を無限大にもっていく ” のである．こうなると，もはや「分割数」という語彙は使えない[▶23)]．

N を無限大にもっていくことを，$\lim\limits_{N\to\infty}$ と表現する．式 (3.7) の S_N を無限大にもっていく．この値を S_∞ と書くことにする．すると，

$$S_\infty = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\Delta x_i \tag{3.8}$$

となる．

分割数 N を無限大にすると，それに伴って，ひとつの区間の幅 Δx_i は無限に小さくなっていく．これを **無限小** という．x の無限小の幅ことを $\mathrm{d}x$ と表現する．

式 (3.8) の極限の計算ができるとき，積分がこの極限として定義できる．もちろん，この極限が存在しなかったら計算はできない．$\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{N}$ の部分をインテグラル $\int$，さらに，Δx_i の部分を $\mathrm{d}x$ と書き直して，

積分の定義

$$S_\infty = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\Delta x_i := \int f(x)\,\mathrm{d}x \tag{3.9}$$

この式をもって定積分を定義する．

♯ *memo* No.7: 「無量大」とはどういうことか

数学では，数え切れないくらい大きい数を **無量大数**（むりょうたいすう）とよび ∞ という記号で表現する．無量大数は “ どんな数よりも大きい数 ” とされる．しかし，無量大数は具体的な数ではなく，単なる概念である．これには少し引っかかる部分があるが，ここでは気にし

[▶23)] 無限大は数ではない．だから，「分割数」というように，「数」と表現することは不適切なのである．

ないようにしてほしい．また，無量大数のことを，**無限大数**（むげんたいすう）とか，**無限大**（むげんだい）とよんでしまうことも多い．上でも，「無限大」と書いてしまっている．

無量大数という概念は数ではないことを示しておこう．確かに自然数は数え切れないくらい存在するので，無量大数という概念は存在し得るが，具体的な数で表現することはできないのである．もし無量大数なる数を表現できたと仮定して，これを M とおいてみる．従って，M は無量大数の「どのような数よりも大きい」という性質をもっている．しかし，私達は $M+1$ という数も考えられる．明らかに $M+1>M$ であり，M がどんな数よりも大きいという性質に反してしまう．この推論は妥当な推論であることから，背理法の考え方に基づき，「M がどんな数よりも大きい数とおける」という仮定が間違っていたと結論される．つまり，無量大数という数を表現することはできない，ということだ．しかし，無量大数という概念の存在が否定されたわけではないことに，注意したい．以下では，無量大数という概念を (少し曖昧な感じではあるが) 用いていく．それを象徴する記号として，∞ を使う．∞ はあくまで単に無限大を表すシンボルであり，これ以上の意味はもたない．

♯ *memo* No.8: 記号 $\mathrm{d}x$ の意味

記号 $\mathrm{d}x$ の意味は，高校数学と異なった方法であるので注意が必要である．これは **微分** と言われる概念を表している．$\mathrm{d}x$ のイメージはとても単純で，「無限に短い長さ」である．「無限に短い」という言葉に，何か曖昧さを感じ，不安かもしれない．しかし，ここは気にせず，話を先に進めよう．気なる場合は，微積分学についての教科書を参照．岩波書店から出版されている，小平 邦彦 著，『解析入門 1，2』がとても厳密に書かれている．ちなみに，高校で習ったのは，**微分係数**（**導関数** ともいう）であり，微分とはことなる．高校では，「微分する」という，という感じで微分法を説明されている．決して，「これを微分という」とは説明されていないはず．紛らわしいけど，注意してほしい．

3.3　微分

3.3.1　変化の割合

一変数関数 $y=f(x)$ の変化の割合 a を考える．関数 $f(x)$ が一次関数 $(y=ax+b)$ であるならば，a は簡単に求めることができて，

$$a=\frac{y\text{ の増加量}}{x\text{ の増加量}}$$

である[▶24)]．というか，これが変化の割合の定義である．一次関数上の異なる 2 点を任意にとって，その 2 点の座標をそれぞれ $(x_1\,,y_1)$，$(x_2\,,y_2)$ とおく．ただし，$x_1<x_2$ とする．このとき変化の割合 a は，

$$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

と計算すればよい．

▶24)　変化の割合は，x を変数としてもつ 1 次関数 y が，x が 1 だけ変化したときにとの程度変化するかを表すものである．この値により，y の増加の仕方が数量的にわかることになる．

3.3.2 「変化の割合」を拡張する

では，関数が 2 次関数や，三次関数，もっと複雑な $\sin x$ などのときの，変化の割合はどのようになるだろうか．一次関数の場合は，変化の割合は一定であったが，2 次関数やその他の一般の関数では，グラフの形からも想像できるように，変化の割合は一定ではない．つまり，変化の割合は，グラフの各点でいろんな値をとる．しかし，変化の割合がデタラメに決まっているわけではない．それはある決まった式によって書き表され，各点における変化の割合を計算することができる．

例えば，2 次関数 $y = x^2$ を考えてみよう．変化の割合は関数の 2 点の間で決定できるので，適当に関数上の点を 2 点とって，それを x_1，x_2 としよう．ただし，$x_1 < x_2$ であるとする．このとき，変化の割合は

$$a = \frac{{x_2}^2 - {x_1}^2}{x_2 - x_1}$$

と計算される．しかし，x_1 と x_2 の間隔が大きいと，この変化の割合は図からわかるように，正確ではない．

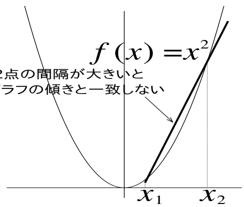


図 3.19　2 次関数

そこで，2 点 x_1，x_2 の間の距離を小さくしていくことで，近似的に，関数の傾き近づけていくことを考える．2 点の間の大きさを Δx とおいたとき，この Δx を 0 に近づけていけばよい．この Δx を用いることで，x_2 は

$$x_2 = x_1 + \Delta x$$

と書ける．これを，さっきの 2 次関数の変化の割合の式に代入すると，

$$a = \frac{{x_2}^2 - {x_1}^2}{x_2 - x_1} = \frac{(x_1 + \Delta x)^2 - {x_1}^2}{(x_1 + \Delta x) - x_1} = \frac{2x_1 \Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x_1 + \Delta x$$

ここで，Δx をできる限り 0 に近づけて，第一項の $2x_1$ に比べて無視できる程度にし

たとき[25]，

$$a = 2x_1$$

となる．ところで，この式は点 x_1 の部分だけに適用できるものだが，x_1 が任意に選べることから，

$$a = 2x$$

であることがわかる．これが 2 次関数の変化の割合になる．一次関数との違いは，変化の割合が x の関数になっていることだろう．これによって，2 次関数の，全ての点における変化の割合を求めることができる．例えば，$x = 1$ の部分における 2 次関数の傾きは，$a = 2 \times 1 = 2$ と計算されるし，$x = 50$ の場合は，$a = 2 \times 50 = 100$ である．少し計算は複雑になるが，一般の 2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ の変化の割合は，これと同様な方法で求めることができて，

$$a = 2ax + b$$

である．また，これと同様な方法で，$y = x^3$ の変化の割合を求めることができる．三次関数の変化の割合の式は，$a = 3x^2$ となる．

3.3.3　導関数の定義（「微分する」ということ）

この計算方法を一般化してみよう．しかし，難しくなることを恐れて，関数は一変数関数 $y = f(x)$ としよう．点 x における，$f(x)$ の変化の割合を求める．変化の割合を求めるには，関数上の 2 点 (x ともう一点) が必要手である．しかし，この 2 点の間隔が大きすぎると，先ほどの例のように，正確に求めることができなくなる．そこで，もう一つの点を x の近くにとるようにしたい．この点を，$x + \Delta x$ としよう．Δx は非常に小さいけれども，0 ではない数とする．

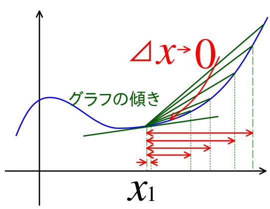


図 3.20　Δx を 0 に近づけることで，関数の傾きの正確さが増す

[25] より詳細は，**極限** という概念を用いて考えないといけないのだが，ここでは簡単のために，極限の概念を軽視した．

これらを，変化の割合の式に代入すると，

$$a = \frac{y\text{ の増加量}}{x\text{ の増加量}} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{(x+\Delta x) - x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

ここで，Δx を 0 に近づけることを表現するため，$\lim\limits_{\Delta x \to 0}$ という記号を導入する．

$$a = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

関数 $f(x)$ の変化の割合を求める式を **導関数** という．また，そのような行為のことを，**微分する** という．$f(x)$ の導関数を表す記号として，

$$f'(x)\,,\ \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\,,\ \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) \tag{3.10}$$

等が用いられる．このノートでは，$f'(x)$ や $\mathrm{d}f(x)/\mathrm{d}x$ という記号を用いる．関数 $f(x)$ を微分するには

導関数の定義（「微分する」という行為）

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{3.11}$$

以上の説明はあまりにも感覚的過ぎるので，微分積分の教科書で学習してもらいたい．ここでは，あくまでもイメージを優先した．また，以降の項目において，説明が楽になるようにと考えたためでもある．まあ，物理学に触れてみる程度ならば，この程度の説明で事足りると思う．

3.3.4　微分（$\mathrm{d}y$ の形式的定義）

コメント　「微分」について説明よう．ちなみに，上では「微分する」という行為を定義した．それは，導関数の定義でもあった．

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

しかし，これと「微分」は異なる概念である．上の導関数の定義式の，$\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$ には，定義上，なんの意味も与えられていない．$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ と書かれて，初めて導関数を意味するのであって，単独では意味を成さないのである．たしかに，$\mathrm{d}x$ は Δx の 0 の極限として（$\mathrm{d}y$ も同様），イメージされるかもしれないが，あくまでイメージであり，意味付けはされていない．そこで，ここで，新たに「微分」という概念を定義することで，$\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$ に意味をもたせよう．そうすることで，$\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$ を，あたかも変数であるかのようにみなすことができ，式変形が容易に行えるようになる．

導関数の公式の，極限 $\Delta x \to 0$ をとる前の式は，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

である．これを，次のように変形させよう．

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x).$$

両辺を $\Delta x (\neq 0)$ 倍しただけである．この式で，Δx はとても小さいが，0 の極限値を取っていないので，普通の実数であるから，このような除算が可能である．

ここで，もう一度，今度は導関数の定義式より．

$$f'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} + o(\Delta x).$$

ここに，今さっき求めた $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ を考慮した．そして，さらに，極限 $\Delta x \to 0$ を取ることを省いた．そのため，$o(\Delta x)$ という余分な項が付いている．これは，極限をとる操作を省いたために生じた，誤差を表現したものである．両辺を Δx 倍しよう．

$$f'(x)\Delta x = \Delta y + o(\Delta x)\Delta x.$$

ここで，**微分** $\mathrm{d}y = \mathrm{d}f(x)$ を次式で定義する．

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}f(x) := f'(x)\Delta x. \tag{3.12}$$

微分 $\mathrm{d}y$ を使うと，

$$\mathrm{d}y = \Delta y + o(\Delta x)\Delta x. \tag{3.13}$$

つまり，この微分 $\mathrm{d}y$ は，「x が Δx だけ変化したときの y の増分」を表す．

上式の $o(\Delta x)\Delta x$ は，$\Delta x \to 0$ としたときに 0 に近づく量であるので，この極限を再び考慮すると，

$$\mathrm{d}y = \Delta y\,, \quad (\Delta x \to 0). \tag{3.14}$$

この式から，$\Delta x \to 0$ の極限をとると，微分 $\mathrm{d}y$ は，y の変化分 Δy と同一視できることがわかる．

図を用いたイメージでも説明できるが，そのためには，接線の方程式についての知識があるとよい．そこで，次節で接線の方程式を復習したあとで，$\mathrm{d}y$ の図形的イメージを紹介しよう．

微分の定義

微分 $\mathrm{d}y = \mathrm{d}f(x)$ を次式で定義する．

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}f(x) := f'(x)\Delta x. \tag{3.15}$$

である．

♯ *memo* No.9: 独立変数 x の微分

x は関数 $f(x)$ の独立変数としているが，この x 自身の微分 $\mathrm{d}x$ はどう表されるだろうか．ここで計算しておこう．定義式は y についての微分 $\mathrm{d}y$ について記述された式であるが，y は任意であるので，当然，$y = f(x) = x$ の場合も考えられる．つまり，

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}f(x) = f'(x)\Delta x = 1\,\Delta x = \Delta x. \tag{3.16}$$

要するに，独立変数 x の微分 $\mathrm{d}x$ は，それ自身の変化分 Δx に同じであると言える．

♯ *memo* No.10: 導関数の式

上の計算から，微分の定義式 $\mathrm{d}y := f'(x)\Delta x$ の Δx は $\mathrm{d}x$ に置き換えることができて，

$$\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$$

上式を次のように変形させれば，導関数の定義と同じ式を得る．

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x). \tag{3.17}$$

3.3.5　（関数 $f(x)$ の）接線の方程式

関数 $f(x)$ の，点 α における，接線の方程式を求める．

接線の方程式とは，直線の方程式であり，$y = ax+b$ と書かれる．一般の関数 $f(x)$ に対して，導関数 $f'(x)$ を求めることにより，関数 $f(x)$ の各点における変化の割合が求まる．ということは，$a = f'(\alpha)$ として，$y = f'(\alpha)x + b$ と書き表せる．関数 $f(x)$ は，$x = \alpha$ のとき，点 $(\,\alpha,\, f(\alpha)\,)$ を通る．つまり，方程式 $y = f'(\alpha)x + b$ に $y = f(\alpha)$，$x = \alpha$ を代入し，

$$f(\alpha) = f'(\alpha)\alpha + b$$

が成立しているはずである．これと，元の式

$$y = f'(\alpha)x + b$$

の両辺を引くことで，

$$\begin{aligned} y - f(\alpha) &= (f'(\alpha)x + b) - (f'(\alpha)\alpha + b) \\ &= f'(\alpha)\,(x - \alpha) \end{aligned}$$

と計算される．これが接線の方程式である．

接線の方程式

関数 $f(x)$ の，$x = \alpha$ における，接線の方程式は，

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha)\,(x - \alpha) \tag{3.18}$$

である．

3.3.6　$\mathrm{d}y$ の図形的イメージ

このように微分を定義することで，$\mathrm{d}y$ に次のような意味が与えられる．

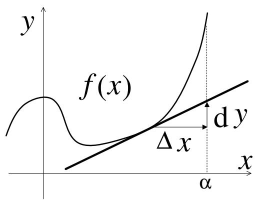


図 3.21　微分の定義

4
微分方程式

4.1　微分方程式とは

4.1.1　微分方程式の概要

5 ベクトル

5.1　ベクトルの定義

5.1.1　図形的（幾何学的）なベクトル

物理を考える上で，**矢印** はとても有用である．力の方向と大きさを直感的に表現するのに，矢印は欠かせない．この矢印は，数学的に扱うことができて，数学の世界では，矢印のことを **ベクトル** とよんでいる．

矢印のトンガリがない方を，矢印の **始点** といい，トンガっている方を，矢印の **終点** という．これにより，方向は矢印の向きで表現できるし，その大きさは長さに比例するように描くと約束すれば，大きさも表現できる．イメージは，Fig 5.1 に描いたようになる[1]．

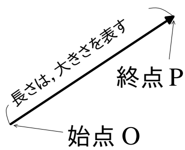


図 5.1　ベクトル：図形，矢印

これを文字で表すと，始点を O とし，また，終点を P とする線分 $\overline{\mathrm{OP}}$ に向きをつ

[1] 当たり前すぎて，描くまでもなかったかな．

けたと考えて，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

と書ける．

♯ *memo* No.11: ベクトルの位置は不問である

同じ大きさで，同じ向きをもつベクトルがいくつか存在する場合を考える．これらのベクトルの位置が異なる場合，異なるベクトルと考えるべきなのだろうか．

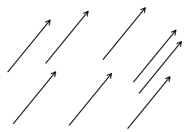


図 5.2　ベクトル：図形，矢印

結論から書くと，これらのベクトルは，同一とみなされる．つまり，ベクトルの存在する場所は，そのベクトルの性質には何ら関係がないということだ．そもそも，ベクトルとは大きさと向きのみをもつ概念であるから，当然，ベクトルが同一であるということは，大きさと向きが同じであるということである．ベクトルが存在する場所は，定義には含まれておらず，不問とされるのである．

ベクトルという概念は，力学を数式化するために整備されたものである．ベクトルを用いることで，物体にかかる力を数式で表現できるようになるのだ．例えば，自分が誰かから引っ張られる場合を想像してみよう．同じ大きさの力で，同じ向きに引っ張られるのであれば，引っ張られる場所は関係ない．引っ張られる場所が，公園だろうが，公民館だろうが，あるいはトイレだろうが，引っ張られるときの感覚は同一のはずである．つまり，力そのものは，その発生場所には関係がないのである．ベクトルという概念は力学の記述に適するようにつくられたので，力と同様に，その存在する場所には依存しないのである．というか，依存しないと定義付けるのである▶2)．いつどんな場所でも，同じ物体に同じ力をかければ，その位置の変化の仕方もまた同じなのである．いや，結果が同じになるように，ベクトルという概念を定義してしまうのだ．

5.1.2　代数的なベクトル

コメント　　ベクトルを数式で扱えるように，是非とも，文字を使ってベクトルを表現したい．ベクトルは代数的に表現可能なのだが▶3)，2 つの書き方がある．書き方の違いにより，次のように言葉を割当て，区別する．すなわち，

▶2)　ベクトルの定義では，場所に依存しないという直接的な記述はないが，定理として成り立つ性質として，このことが保証される．場所に依存しないように定義付けを行っているんだから，当たり前だ．

▶3)　「代数的に表現可能」とは，文字の列として表現することが可能であるということである．

- 横ベクトル
- 縦ベクトル

なぜこう言われるかは，後の記述で分かることなので，今は気にせず，話を進めよう．横ベクトル · 縦ベクトル共に，どちらも同じように頻繁に使われる．どっちも大切である．どちらか一方を採用したら，他方を捨て去るということはない．

5.1.2.1　横ベクトル

ベクトルを代数的に表現する方法は 2 通りあると，先に記述した．ここではそのうちの，**横ベクトル** について，説明する．

ベクトルをどのように代数的に表現するのか．実は，その考え方は簡単で，そのベクトルの始点に原点 O を合わせた座標を張ればよい．Fig 5.3 では直交直線座標を描いた．これより，終点の座標を記述することで，ベクトルを表現できるのである．

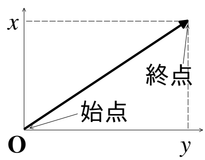


図 5.3　ベクトル：図形，矢印

代数的なベクトルは，以下のように記述される．

$$\boldsymbol{r} = [\,x\,, y\,]\,. \tag{5.1}$$

上の表現では，2 次元の平面に存在するベクトルが記述されている．より高次元のベクトル $\boldsymbol{x}$ を考える場合，その次元数を n として，

$$\boldsymbol{x} = [\,x_1\,,\ x_2\,,\ \cdots\,,\ x_n\,]\,. \tag{5.2}$$

ここで，座標を表すこ記号を，x に統一して添字により区別すよう，表現方法を変えた．

このように，成分を横書きしたベクトル表記を，**横ベクトル** という．

ベクトルを表現するのに，太字を用いているのは，単なる実数と区別するためである．

5.1.2.2　縦ベクトル

横ベクトルが成分を横書きしたベクトル表現だとしたら，**縦ベクトル** とは成分を縦書きしたベクトル表現である．なんとも安易な考え方だ．縦ベクトルは以下のよう

に記述される．

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{5.3}$$

5.1.3　ベクトルの大きさ

ベクトルの大きさは，三平方の定理により定義できる[4]．

まず，2 次元ベクトル $\boldsymbol{r} = [\,x\,, y\,]$ の場合，このベクトルの大きさは三平方の定理によって定められ，

$$|\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{5.4}$$

である．

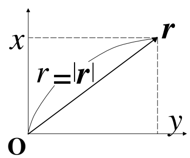


図 5.4　三平方の定理（2 次元）

2 次元のベクトルの大きさを，3 次元ベクトルに拡張しよう．Fig 5.5 の色を塗った部分の直角三角形に着目する．このとき，2 次元の三平方の定理から，

$$|\boldsymbol{r}| = \sqrt{\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2}$$

が成立している．つまり，

$$|\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{5.5}$$

という関係があるということだ．もはや変数は 4 つであり，"三平方"という語彙と食い違ってしまったが，とりあえず，ここでは，3 次元の三平方の定理と表現しておこう．

---

[4] 三平方の定理について一言コメントしておこう．これは数学的には三角関数の余弦定理の特殊な場合である．しかし，ここでは，三平方の定理を距離を定めるひとつの要請として扱うことにする．

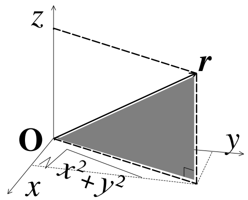


図 5.5　三平方の定理（3 次元）

5.1.4　ベクトルの次元

私たちは，3 次元の世界に住んでいるから，当然，縦・横・高さの 3 方向しか把握できない．4 つ以上の次元で成り立つ世界を見ることは不可能である．しかし，数学的には，4 つ以上の方向を考えても，理論的に矛盾することはない．つまり，数学的には，より多くの方向をもつベクトルを扱えるのである▶5)．そこで，4 つ以上の方向をもつベクトルについて，考える．

まず，今まで日常生活的に使用してきた，**次元** という語彙を，数学用語として改めてその意味を明確にしておきたい．次元とは，ベクトルの成分の個数と定める．ただし，物理学では単位のことを次元と表現するが▶6)，それとは別物である．

あるベクトル $\boldsymbol{r}$ があり，その成分が n 個であるとしよう．つまり，

$$\boldsymbol{r} = [r_1, r_2, r_3, \cdots, r_n]$$

と成分表示されるとする．この時，$\boldsymbol{r}$ のことを n **次元ベクトル** という．

♯ *memo* No.12: n 次元の三平方の定理

2 次元と 3 次元の両方の三平方の定理から推察して，より高次元である n 次元に定理を拡張できる．もちろん，n は任意の自然数である．この拡張に伴って，この定理に改めて名前をつけることにしよう▶7)．**距離の公理** と名付ける．

▶5)　ただし，4 つ以上の方向を肌で感じたり，見たりできない以上，図示することは不可能であるから，4 次元以上の世界は完全に文字（数式）だけの記述のみになってしまう．

▶6)　物理学では「次元解析」という言葉が使われる．これは，物理学的な単位同士の関係を調べることであり，特に，数式の右辺と左辺の単位に矛盾がないかを確認することで利用される．しかし，ここで考えている次元とは，意味が異なる（完全に異なるわけではないが）ものとして，考えてもらいたい．少なくとも，いま考える次元とは，空間の方向の数であり，ベクトルの成分の個数のことである．

▶7)　これから定義しようとするのは，n 次元での定理であり，それには $n+1$ 個の数が絡んでくるから，「三平方の定理」では定理の内容と一致しなくなってしまうのだ．

n 次元への拡張は以下のようにして行われる．

$$r := |\boldsymbol{r}| = {q_1}^2 + {q_2}^2 + \cdots + {q_n}^2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {q_i}^2}. \tag{5.6}$$

ここに，q_i はそれぞれ座標を表す．

5.1.5　ベクトル空間の定義

ベクトルをより一般的に定義しておきたい．そこで，はじめに，ベクトルの集合を定義する．ベクトルの持つ性質を列挙して，それを満たすものを，**ベクトル空間** とよぶ．そして，ベクトルをベクトル空間の要素として定義することで，ベクトルを，数学的に曖昧さのない概念として，扱うことが可能になる．

ベクトル空間

定義 5.1.1. ある集合 $\boldsymbol{U}$ が次の条件全てを満たすとき，$\boldsymbol{U}$ を **ベクトル空間** という．
集合 $\boldsymbol{U}$ の任意の要素 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ に対して，

1 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

2 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

3 $\boldsymbol{o}+\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$ を満たす $\boldsymbol{o}$ がただ一つ存在する．

4 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{o}$ を満たす $\boldsymbol{a}'$ がただ一つ存在する．

が成立する．
さらに，任意の実数 m，n に対して，

5 $(m+n)\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{a}$

6 $m(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$

7 $(mn)\boldsymbol{a} = m(n\boldsymbol{a})$

8 $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$

が成立する．
特に，$\boldsymbol{o} = (\,0, 0, \cdots, 0\,)$ であり，**ゼロベクトル** という．

5.1.6　ベクトルの定義

ベクトルを定義しよう．

ベクトル

定義 5.1.2. ベクトル空間 $\boldsymbol{U}$ の要素のことを **ベクトル** という．

5.2　ベクトルの性質

5.2.1　ベクトルの転置

横ベクトルと縦ベクトルの関係を，ここに書いておこう．議論の最初に，横ベクトルで表現したベクトルを，縦ベクトルとして表現したい場合が起こる▶[8]．

そんな時，活躍するのが，ベクトルの **転置** という考え方である．

n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ を最初に導入するとき，横ベクトルとして定義したとする．そして，議論の途中，$\boldsymbol{x}$ を縦ベクトルとして記述したくなったとしよう．すなわち，以下のような書き換えたいのである．

$$[\,x_1\,,\ x_2\,,\ \cdots\,,\ x_n\,] \quad \to \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

要するに，横ベクトルの成分表示で，その成分を左から順に書いていたベクトルを，縦に上から順に成分を記述する方式に変更したいのだ．この操作を，ベクトルの **転置** という．

この場合，以下のように記述する．

$$^{t}\,[\,x_1\,,\ x_2\,,\ \cdots\,,\ x_n\,] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{5.7}$$

左辺の左上の添字 ^{t} で，ベクトルの転置を表現する．

最初に定義されたベクトルが縦ベクトルであっても，ベクトルの転置を行うこと

▶8)　特に，ベクトルの内積を行列的に記述したい場合に，このような要求をしたくなる．

で，横ベクトルにできる．つまり，次のようにも記述して良い．

$$
{}^t\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [\,x_1\,,\ x_2\,,\ \cdots\,,\ x_n\,] \tag{5.8}
$$

以上から，ベクトルの転置について，次が成立している．

$$
{}^t({}^t\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}. \tag{5.9}
$$

ベクトル $\boldsymbol{x}$ に 2 回転置をすれば，元のベクトルに戻るのである．以下のような感じで，巡回が起こる．

$$
\begin{aligned}
&\text{縦ベクトル} \xrightarrow[\text{転置}]{} \text{横ベクトル} \xrightarrow[\text{転置}]{} \text{縦ベクトル} \\
&\text{横ベクトル} \xrightarrow[\text{転置}]{} \text{縦ベクトル} \xrightarrow[\text{転置}]{} \text{横ベクトル}
\end{aligned}
$$

もちろん，横ベクトルで表現しようとも，縦ベクトルで表現しようとも，同一のベクトルであれば，それが示すベクトルは同一である．同じベクトルを表現する方法が 2 種類あるということであり，ベクトルが 2 つになるわけではない．$\boldsymbol{x}$ も ${}^t\boldsymbol{x}$ も同じベクトルを表現するものであり，違うのは表現の方法なのだ．

5.2.2　ベクトルの四則演算

コメント　　ここでは，ベクトルに対して四則演算を定義する．

5.2.2.1　ベクトルの加法

3 次元の 2 つのベクトルを，任意にもってきて，それらを

$$
\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad , \qquad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}
$$

と書くことにしよう．これら 2 つのベクトル $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ の和 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ は，成分表示で以下のように示される．

$$
\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{bmatrix}. \tag{5.10}
$$

つまり，成分同士を足し合わせるということである．

n 次元ベクトルに対して，拡張しておこう．任意の 2 つの n 次元ベクトル

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

に対して，これらの和は，成分で書くと次のようになる．

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}. \tag{5.11}$$

また，次元の違うベクトル同士の和は定義されない．つまり，次元が違うと，加法を行うことはできない．

5.2.2.2　実数とベクトルの積

ここでは，ひとつの任意の実数と，ひとつの任意のベクトルの積を定義する．ベクトル同士の掛け算も定義されるが[9]，ここでは，実数とベクトルの掛け算のみについて考える．

任意の実数 a と任意の n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ をもってきて，積を作る．その積を，

$$a\boldsymbol{x} = a \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

と書くことにする．成分で書くと，次のようになる[10]．

$$a\boldsymbol{x} = a \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ \vdots \\ ax_n \end{bmatrix}. \tag{5.12}$$

これは n 次元ベクトルに対して成り立つものである．つまり，実数とベクトルの積は，ベクトルの各成分を実数 a 倍するということである．

5.2.2.3　ベクトルの減法

実数の世界では，事実上，減法が存在するが，しかしこれは公理的視点からは加法の一部である．つまり，2 つの実数 x，y があった時，減法 $x - y$ は 加法 $x + (-1 \cdot y)$

---

[9] ベクトルの内積・外積を参照．

[10] というか，こうなるように，実数とベクトルの積を定義する．

で定義されるのである．負の記号 -1 は公理により，その存在が示されているからである．減法を新たに定義するよりも，-1 の存在を主張するほうが，理論が単純になるり，思考経済▶11) に合致する．

ベクトルに関する減法も，実数と同様に，加法の一部として，説明されるべきものである．負の向きをもつベクトルとは，当然，正の向きに対して逆向きのベクトルである．負の向きのベクトルは，ベクトルに -1 を掛けることで，得られる．つまり，任意の n 次元ベクトル $\boldsymbol{y}$ に対して，これと同じ大きさで，逆向きのベクトルは，

$$-1 \cdot \boldsymbol{y} = -\boldsymbol{y}$$

と書かれる．実数の場合と同じように，-1 倍のときは，1 を省略して書くことにする．

これを用いて，ベクトルの減法を定めよう．任意の 2 つの n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ に対して，差 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ とは次のように，成分表示される．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{y}) \\
&= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -y_1 \\ -y_2 \\ \vdots \\ -y_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x_1+(-y_1) \\ x_2+(-y_2) \\ \vdots \\ x_n+(-y_n) \end{bmatrix} \\
\therefore \quad \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} &= \begin{bmatrix} x_1-y_1 \\ x_2-y_2 \\ \vdots \\ x_n-y_n \end{bmatrix} \qquad (5.13)
\end{aligned}$$

▶11) **思考経済**　同じことを説明するのに，2 つ以上の手段があるとしよう．思考経済とは，この 2 つの説明のうちどちらを採用するかという基準である．「簡潔に説明できる方を採用せよ」というものだ．もちろん，最も簡潔に説明するほうがいいに決まっている（直感だけど）うだうだ説明するりも，スパッと説明したほうがかっこいいし，覚えることも少なくすむし，何しろ短時間で説明できるのだから．しかし，世の中にはどちらも同じだけ簡潔に説明できることが多くある．その場合には，時と場合によって使い分ける必要が出てくることだろう．

5.2.3　ベクトルの内積（図形的）

ベクトルの内積について，簡単に説明をしておこう．

2 つの任意のベクトルを用意し，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ とする．ベクトルの **内積** はこの 2 つのベクトルより定義される．内積の表し方は，$(\boldsymbol{a}\,,\ \boldsymbol{b})$ または $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ などの複数の表現がある．このノートでは，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ を内積の記号として使うことにする．ベクトルの内積を，次のように，平面図形的に定義する．

ベクトルの内積（図形的）

定義 5.2.1. 任意の 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の間に，演算 $\cdot$ を以下のように定義する．

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} := |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta \tag{5.14}$$

この演算を，ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の **内積** という．

この式のイメージは，「$\boldsymbol{a}$ の $\boldsymbol{b}$ 方向の成分の大きさ」と，$\boldsymbol{b}$ の積の大きさである．

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (|\boldsymbol{a}|\cos\theta)|\boldsymbol{b}|$$

と書いたらイメージしやすい．$|\boldsymbol{a}|\cos\theta$ の $|\boldsymbol{b}|$ 倍ということである．

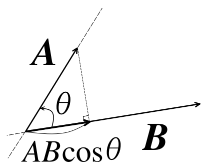


図 5.6　内積

例えば，$\theta = 60^\circ$，$|\boldsymbol{a}| = 3$，$|\boldsymbol{b}| = 5$ のとき，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta = 3\times 5\times\cos(60^\circ)\\ &= 3\times 5\times\frac{1}{2}\\ &= \frac{15}{2}\end{aligned}$$

となる．

5.2.4 ベクトルの内積（代数的）

実は，ベクトルの内積には，もう一つ別の定義がある．もちろん，上に説明した平面図形的定義と全く矛盾しない．別の定義とは，ベクトルの成分に着目した，代数的定義である[12]．

ベクトルの内積の代数的定義は，次式で定義される．

ベクトルの内積（代数的）

定義 5.2.2. 任意の 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ があるとする．ベクトルの成分を $\boldsymbol{a} = [\,a_1, a_2, \cdots, a_n\,]$，$\boldsymbol{b} = [\,b_1, b_2, \cdots, b_n\,]$ で表すとき，この 2 つのベクトルの間の演算 $\cdot$ を次で定義する

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i. \tag{5.15}$$

例 仮に，2 つのベクトルの成分は 2 つとしよう．つまり，$\boldsymbol{a} = [a_1, a_2]$，$\boldsymbol{b} = [b_1, b_2]$ と仮定する．このときベクトルの内積は

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 \tag{5.16}$$

である．

5.2.5 図形的内積と代数的内積の関係

図形的定義による内積と代数的定義による内積が全く同じことであることは，次のように説明できる[13]．

2 つの任意のベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ の内積を考える．この 2 つのベクトルを直交座標の x 座標，y それぞれ座標の成分に分解し，

$$\begin{cases} \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_x + \boldsymbol{a}_y \\ \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}_x + \boldsymbol{b}_y \end{cases}$$

とする．ここで， $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ の内積を図形的に計算してみよう．

▶ 12) 「平面図形的定義」と「代数的定義」は私の造語．

▶ 13) 互いに矛盾する定義だったら，内積の定義としてどちらを採用するかを検討しないといけない．もしくは，両方とも採用しないことになるかもしれない．だけど，全く同じことを言っているのだから，都合のよい方を，定義式として採用してよいのである．

今回は，まずイメージしやすいように図形的な定義を先に紹介した．だけど，物理学の理論を考えるには，数式で表現する必要がある．cos 関数を用いた図形的定義でも事足りると思うが，代数的な内積の式も有用なので，紹介をしておいた．

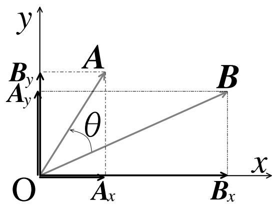


図 5.7　内積 (代数的定義と図形的定義の関係)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= (\boldsymbol{a}_x+\boldsymbol{a}_y)\cdot(\boldsymbol{b}_x+\boldsymbol{b}_y)\\ &= \boldsymbol{a}_x\cdot\boldsymbol{b}_x+\boldsymbol{a}_x\cdot\boldsymbol{b}_y+\boldsymbol{a}_y\cdot\boldsymbol{b}_x+\boldsymbol{a}_y\cdot\boldsymbol{b}_y\end{aligned}$$

右辺の各項を，それぞれ計算しよう．($\cos 0^\circ = 1$，$\cos 90^\circ = 0$)

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}_x\cdot\boldsymbol{b}_x = |\boldsymbol{a}_x||\boldsymbol{b}_x|\cos 0^\circ = a_x b_x.\\ \boldsymbol{a}_x\cdot\boldsymbol{b}_y = |\boldsymbol{a}_x||\boldsymbol{b}_y|\cos 90^\circ = 0.\\ \boldsymbol{a}_y\cdot\boldsymbol{b}_x = |\boldsymbol{a}_y||\boldsymbol{b}_x|\cos 90^\circ = 0.\\ \boldsymbol{a}_y\cdot\boldsymbol{b}_y = |\boldsymbol{a}_y||\boldsymbol{b}_y|\cos 0^\circ = a_y b_y.\end{cases}$$

つまり，

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y \tag{5.17}$$

である．これで，代数的定義は，図形的定義と同じこだと，分かるだろう．

ベクトルの内積

直交座標上における，2 つの二次元ベクトル $\boldsymbol{a} = [a_x,\, a_y]$，$\boldsymbol{b} = [b_x,\, b_y]$ に対して，ベクトルの **内積** $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ を次式で定義する．

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} := a_x b_x + a_y b_y. \tag{5.18}$$

n 次元ベクトル同士の内積の場合，

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} := \sum_{i=1}^{n} a_i b_i. \tag{5.19}$$

と定義する．

5.2.6　ベクトルの内積の性質

ベクトルの内積は 1 つのベクトル，つまり，自分自身との内積を計算することもできる．図形的に計算すると，

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}| \cos 0^\circ = |\boldsymbol{a}|^2. \tag{5.20}$$

である．自分自身との内積は，そのベクトルの大きさの二乗になる．

まとめておこう．今後のことを考えて，ここでは，代数的定義を採用しておこう．そのほうが，ベクトルの次元が任意になったとしても，その定義式を簡単にイメージできるからである．

また，ベクトルの内積を考えることで，ベクトル同士が直交しているか否かを知ることができる．ベクトル同士が直交するとき，その角度は，90° である．このとき，$\cos 90^\circ = 0$ なので，内積も 0 になる．内積が 0 になる他の条件として，交わる角度が 270° であること ($\cos 270^\circ = 0$ でこの場合も直交している)，そして，そもそも，少なくともどちらか一方のベクトルが零ベクトル，つまり $\boldsymbol{a} = (0, 0, 0)$ の場合である．それ以外には内積は 0 にならない．よって，次のように言うことができる．

- 零ベクトルでない，2 つのベクトルの内積が 0 の場合，この 2 つのベクトルは直交している．

逆に次もいえる．

- 零ベクトルでない，2 つのベクトルが直交している場合，この 2 つのベクトルの内積は 0 である．

以上，2 つの性質をまとめよう．

ベクトルの内積の性質

(1)　自分自身との内積は，自分自身の大きさの二乗になる．

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2. \tag{5.21}$$

(2)　直交座標上における，零ベクトルでない，2 つの二次元ベクトル $\boldsymbol{a} = [a_x, a_y]$，$\boldsymbol{b} = [b_x, b_y]$ に対して，

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}. \tag{5.22}$$

5.2.7　ベクトルの外積

5.2.7.1　外積の定義

向きが互いに異なる 2 つのベクトルは，ひとつの平面を張る．これは図に描けばすぐに分かる．ベクトルは，向きを変えずに，もちろん大きさも変えることなく移動させても，定義上，同一のベクトルとみなせる．従って，2 つのベクトルが存在するとき，この 2 つのベクトルの始点を 1 箇所に集めて，ベクトルをくっつけることができる．定義上，このような操作をベクトルに施しても，ベクトルが変わったわけではないのだ．こう考えれば，2 つのベクトルは，3 角形を張ることがわかる．3 角形は平面図形の典型であり，つまり，このような 3 角形を作る 2 つのベクトルはひとつの平面を張ると言えるのである．

(a) 2 つのベクトル　　(b) 始点を揃える

図 5.8　2 つのベクトルは 3 角形を作る

しかし，私達の暮らす世界は，3 つの次元をもっている▶[14]．なので，3 次元に広がったベクトルを考えることもできる．今までは，平面上に存在するベクトルを考えてきたが，ここでは次元を 1 つ追加して，3 次元の空間に想像をふくらませよう．

3 つめの方向をもつベクトルをどうやってつくるか．そこで考え出されたのが，ベクトルの **外積** という概念である．考え方は簡単．2 つのベクトルに直交するようなベクトルを作ればいい．

そのようなベクトルが仮に存在できたとして，それを $\boldsymbol{c}$ と表すことにしよう．このとき，既存の 2 つのベクトルを $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ としたなら，次式が成立してなければならない．すなわち，

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}| \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = |\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}| \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

▶[14]　少なくとも，私たちは直感的に，縦・横・高さの 3 つの方向を認識している．また，方向 3 つしかないとも直感的に把握している．当然，物理学もこの直感に従って構成される．ただ，最近「超弦理論（スーパーストリンリングス・セオリー；super string theory)」という数学的な匂いの濃い理論が，スポットライトを浴びてきてはいるが．

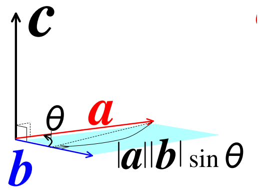


図 5.9　外積

である．直交しているから，内積が 0 になっているはずである[15]．ベクトル $\boldsymbol{c}$ の成分を (c_1, c_2, c_3) としよう．$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ についても同様に，それぞれ，(a_1, a_2, a_3)，(b_1, b_2, b_3) とする．そうすると，上の 2 つの式は，また，以下のよう書いても同じことである．すなわち，

$$a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = 0.$$
$$b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 = 0.$$

ベクトルの方向については，上の 2 式が成り立つことがその条件であるが，向きについては何も言っていない[16]．そこで，次のように向きを決めてしまおう．すなわち，

向きの定義 ベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ から生成する外積 $\boldsymbol{c}$ のむきは，$\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ に向かって右ねじを右まわし回したときに，ネジが進む向き を正方向する．これを満たすことを，**右手系をなす** という（「右ねじの法則」なんていう表現が使われることも多い．特に，物理学の多数の教科書で用いられる）．

ベクトルにはもうひとつの性質である大きさも考えないといけない．どのような大きさにしようと自由だが，最も簡潔に大きさを定めたい．もとの 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ より，この二つのベクトルが張る平行四辺形の面積を，その大きさとするのが最も簡単だろう．実際，数学的にもこのような定義がなされる．これが最も無理のない定

[15] $\cos(\pi/2) = 0$ に注意．

[16] **「方向」と「向き」の違い**　「方向」と「向き」という語彙の違いは，日常生活において，ほとんど区別することなしに使っている．話の流れで意味が理解できるのであるから，そもそも区別することに注意を払う必要はない．しかし，正確には，「方向」と「向き」とは，別の意味を持っている．「方向」とは例えば，“東西の方向”とか，“x 軸の方向”のようにつかう．つまり，「方向を決める」とは，多数ある直線から，一つの直線を決めるということである．だから，「方向」という語彙には，“正の向き”とか“負の向き”と言ったことは一切含まれていない．「向き」というのは，要するに，自分のいる場所を基準点として，例えば，左右の方向を考えたとき，右か左かを示すものである．別の例でたとえるなら，数直線があって，その基準点 0 から見て右側を正の向きとし，他方，基準点 0 から見て左側を負の向きとするようなことである．「方向」を決めるとは一つの直線を定めることであり，向きを決めるとは，その直線の上の一点にたって，一方を正，他方を負とすることである（「直線上の任意の一点」は，その直線を 2 つに切断することは明らかですよね）．

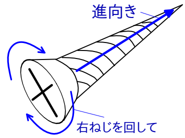


図 5.10　右ねじを回して進む方向

義なのだろう．すると，$\boldsymbol{c}$ の条件として，次式も加わることになる．

$$\begin{aligned}&|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta\\ &\quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{{c_1}^2+{c_2}^2+{c_3}^2} = \sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}\sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2}\sin\theta\end{aligned}$$

これで，都合 3 つの条件式と，向きの定義は揃った．もう一度，まとめて書いておこう．

$$\begin{cases} a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3=0\\ b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3=0\\ \sqrt{{c_1}^2+{c_2}^2+{c_3}^2} = \sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}\sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2}\sin\theta\\ \boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}, \text{は右手系をなす．（向きの定義）}\end{cases}$$

未知数が c_1，c_2，c_3 と三つなのに対し，条件式も同じく 3 つであり，数式的な条件としては必要十分である▸[17]．また，ベクトルの向きの定義もした．これで，外積を作る準備が整った．あとは，外積を作れるかどうか，言い換えれば，このように定義した外積というものが存在可能かどうかを，確認すれば良い．

5.2.7.2　外積の成分表示

このような 3 式▸[18] を満たすような $\boldsymbol{c}$ は存在するのか．存在するとしたら，その成分はどのようになるか．それをこれから考えていこうと思う．それで，どうやって求めるかなんだけど，その方法は幾つか思い当たる．式をくどくどと計算をして発見的に答えを得る方法もあるけれど，それだと少々話が長くなり，計算も面倒くさい．なので，この問題の答えはすでに得られていることだから，先に答えを見てしまおう．そのほうが早い．

で，その答えとは，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c} &= (\,c_1,\,c_2,\,c_3\,)\\ &= (\,a_2b_3-a_3b_2,\,a_3b_1-a_1b_3,\,a_1b_2-a_2b_1\,)\end{aligned}$$

▸17)　これで，大きさと方向を定めることができる．

▸18)　正確には，「3 つの式と，向きの定義」と書くべきだけど，向きは人間が勝手に選ぶものなので，数式的に気にするものではない．

である．なにやら複雑な式に見えるが，次のように書くと，ある規則がみえてくるだろう．

$$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix}. \tag{5.23}$$

$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ の成分の添字を縦方向に意識して眺めると，巡回 $(1 \to 2 \to 3 \to 1)$ しているのが見える[19]．式 (5.23) は，先ほど上げた 3 つの条件式を必要十分に満たす．

5.2.7.3　外積の成分表示の検算

式 (5.23) が本当に条件を満たすかどうかを，確かめておこう．まず，$\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{b}$ を満たすことを示す．やり方は，単純に条件式に成分を代入して，式を整理するだけ．

$$\begin{aligned} &a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 \\ &\quad = a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1) \\ &\quad = a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - a_2a_1b_3 + a_3a_1b_2 - a_3a_2b_1 \\ &\quad = 0. \end{aligned}$$

もうひとつの式も同じように計算できる．

$$\begin{aligned} &b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 \\ &\quad = b_1(a_2b_3 - a_3b_2) + b_2(a_3b_1 - a_1b_3) + b_3(a_1b_2 - a_2b_1) \\ &\quad = b_1a_2b_3 - b_1a_3b_2 + b_2a_3b_1 - b_2a_1b_3 + b_3a_1b_2 - b_3a_2b_1 \\ &\quad = 0. \end{aligned}$$

たしかに，二つの条件式を満たしている．このことにより，ベクトル $\boldsymbol{c}$ は，ベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ に直交していることが確かめられた．つまり，ベクトル $\boldsymbol{c}$ の方向は条件に沿うものであると言える．

では，残りの大きさに関する条件式について，それを満たすかを計算してみよう．もう一度，大きさを決める条件式を書くと，

$$\sqrt{{c_1}^2 + {c_2}^2 + {c_3}^2} = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}\sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2}\sin\theta$$

でるが，両辺を 2 乗して，

$${c_1}^2 + {c_2}^2 + {c_3}^2 = \left({a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2\right)\left({b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2\right)\sin^2\theta.$$

ここで，三角関数の公式 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ を思い起こし，$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ と置き換えて，

$${c_1}^2 + {c_2}^2 + {c_3}^2$$

▶19)　複雑そうに見えるけど，規則さえ分かってしまえば，覚えるのはたやすい．最初の a_2b_3 さえ覚えてしまえば，残りは機械的に記述できる．引く数は添字の数字を入れ替えたものだし，その他の成分については添字を巡回させればいい．

$$
\begin{aligned}
&= \left(a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2\right)\left(b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_3{}^2\right)\left(1 - \cos^2\theta\right) \\
&= \left(a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2\right)\left(b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_3{}^2\right) \\
&\qquad - \left(a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2\right)\left(b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_3{}^2\right)\cos^2\theta.
\end{aligned}
$$

最後の行の

$$
\left(a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2\right)\left(b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_3{}^2\right)\cos^2\theta.
$$

に注目すると，

$$
\begin{aligned}
&\left(\sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}\sqrt{b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_3{}^2}\cos\theta\right)^2 \\
&\qquad = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 \\
&\qquad = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 .
\end{aligned}
$$

つまり，大きさの定義式は以下のように書き換えられる．

$$
\begin{aligned}
&c_1{}^2 + c_2{}^2 + c_3{}^2 \\
&\qquad = \left(a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2\right)\left(b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_3{}^2\right)\left(1 - \cos^2\theta\right) \\
&\qquad = \left(a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2\right)\left(b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_3{}^2\right) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 .
\end{aligned}
$$

この式を，ベクトル $\boldsymbol{c}$ が満たしていることを確認すればよい．

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{c}|^2 &= c_1{}^2 + c_2{}^2 + c_3{}^2 \\
&= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \\
&= \left(a_2{}^2 b_3{}^2 + a_3{}^2 b_2{}^2 - 2a_2 a_3 b_2 b_3\right) + \left(a_3{}^2 b_1{}^2 + a_1{}^2 b_3{}^2 - 2a_1 a_3 b_1 b_3\right) \\
&\qquad + \left(a_1{}^2 b_2{}^2 + a_2{}^2 b_1{}^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2\right) \\
&= a_2{}^2 b_3{}^2 + a_3{}^2 b_2{}^2 + a_3{}^2 b_1{}^2 + a_1{}^2 b_3{}^2 + a_1{}^2 b_2{}^2 + a_2{}^2 b_1{}^2 \\
&\quad - 2a_2 a_3 b_2 b_3 - 2a_1 a_3 b_1 b_3 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 \\
&= \left(a_1{}^2 b_3{}^2 + a_1{}^2 b_2{}^2\right) + \left(a_2{}^2 b_3{}^2 + a_2{}^2 b_1{}^2\right) + \left(a_3{}^2 b_2{}^2 + a_3{}^2 b_1{}^2\right) \\
&\quad - 2a_2 a_3 b_2 b_3 - 2a_1 a_3 b_1 b_3 - 2a_1 a_2 b_1 b_2.
\end{aligned}
$$

ちょっと一息．まだまだ式変形は続く．ちなみに，上式の冗長な括弧は，以降の式変形のために，明示的に記述している．

次に，トリッキーな作業をする．それは，ある数 x に対して，当然，$0 = x - x$ が成り立つから，0 を加えるということは $x - x$ を加えることと同じである．そして 0 を加えても等式は成り立つ．この考え方を利用して，式変形を続けよう．

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{c}|^2 &= a_1{}^2 b_3{}^2 + a_1{}^2 b_2{}^2 + \left(a_1{}^2 b_1{}^2 - a_1{}^2 b_1{}^2\right) \\
&\quad + a_2{}^2 b_3{}^2 + a_2{}^2 b_1{}^2 + \left(a_2{}^2 b_2{}^2 - a_2{}^2 b_2{}^2\right) \\
&\quad + a_3{}^2 b_2{}^2 + a_3{}^2 b_1{}^2 + \left(a_3{}^2 b_3{}^2 - a_3{}^2 b_3{}^2\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- 2a_2a_3b_2b_3 - 2a_1a_3b_1b_3 - 2a_1a_2b_1b_2 \\
&= {a_1}^2\left({b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2\right) + {a_2}^2\left({b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2\right) + {a_3}^2\left({b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2\right) \\
&\quad - {a_1}^2{b_1}^2 - {a_2}^2{b_2}^2 - {a_3}^2{b_3}^2 - 2a_2a_3b_2b_3 - 2a_1a_3b_1b_3 - 2a_1a_2b_1b_2 \\
&= \left({a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2\right)\left({b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2\right) - (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 .
\end{aligned}
$$

式変形が長々と続いたが，これでやっと確かめられた▶[20]．

以上から，$\boldsymbol{c}$ は 3 つの条件式を満たすことが確かめられ，ベクトルの外積が存在することが示された．つまり，ベクトルの外積は定義可能であることが確かめられた．

何度も言うが，ベクトルの外積は導かれるものではない．人の想像力によって定義するものである．この外積という概念を導入することで，物体の回転を数学的に扱うことができるのである．というか，実際は話が逆で，ベクトルの外積の定義に従う物理現象が発見され，この現象を数学的に扱うことができるように，外積が定義されるのである．もしかしたら，外積の定義が突拍子も無いと感じているかも知れないが，現実に外積を用いて説明される物理現象が生じているのである．外積はその現象を扱うために導入されるのだ．

♯ *memo* No.13: 右手系とは何か

外積の定義のうちの，向きの定義をもう一回読んでみよう．

向きの定義 ベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ から生成する外積 $\boldsymbol{c}$ のむきは，$\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ に向かって右ねじを右まわし回したときに，ネジが進む向き を正方向する．これを満たすことを，右手系をなす という．

なぜこのように定義するのかという疑問があろうが，この疑問はすぐに捨て去るべきだ．なにしろ，答えがないのだから．しかし，天下り的な説明はよくない．なので，できるだけ“もっともらしい”説明を，以下に記述しておくことにしよう▶[21]．

2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ に直交する方向は内積の数式で表現され，数学的に議論できるが，方向は計算で導くことはできない．なので，予め，向きを定めておくのである．どちらの向きを正方向としても，それ以降で変更しなければ，論理に矛盾は生じない．しかし，向きを決めないと議論ができないので，人為的な向きの定義を施すのである．

では，なぜ，「右ネジをまわして進む向き」と表現するのか．これにも，多分，明確な答えはない．おそらく，これが最も簡潔な言い回しで，誤解なく，加えて直感的イメージしやすく説明できるからだろう．しかし，学術的には格好をつけて，「右手系をなす」と言われる．それは，右手の親指を人差し指に近づけるという行為が，親指を右まわしするという行為に当たり，中指の先の向きが外積の向きに一致するからである．元となる 2 つのベクトルが親指と人差し

▶20) 以下の恒等式が成立している．

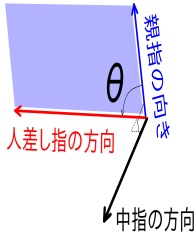
$$(X+Y+Z)^2 = X^2+Y^2+Z^2+2XY+2YZ+2ZX.$$

ここでは，$X=a_1b_1$，$Y=a_2b_2$，$Z=a_3b_3$ に対応している．まさかとは思うが，高校数学レベルの代数の恒等式を忘れているといけないので，メモしておいた．

▶21) あくまでも，“もっともらしく”記述するのであり，これがほんとうの理由だとか，正解だとかいうものではない．天下り的な説明ではスッキリとせず，モヤモヤしてしまうので，これを少しでも解消できればと考えて，記述するものである．

指に値し，それに直交する向きに中指が向いているのだ．

(a) 私の右手



(b) 対応図

図 5.11　右手系

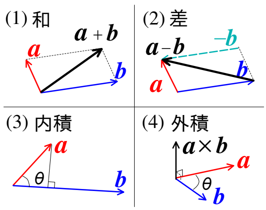


図 5.12　ベクトルの和 · 差/· 積（内積/外積）

5.3　特殊なベクトル

5.3.1　単位ベクトル

ベクトルは，大きさと向きをもつ．しかし，ベクトルを成分表示したときに，その大きさと向きが同時に記述されていて，成分表示を見ただけでは，簡単にはその大きさや向きを把握することはできない[▶22)]．そこで，登場するのが，**単位ベクトル** という概念である．

自然数でいえば，数字の 1 がその単位元であり，2 以上のすべての自然数は，この単位元 1 の倍数として記述できる．

$$2 = 1 \times 2\,,\ 3 = 1 \times 3\,,\ \cdots\,.$$

▶22)　計算（暗算）が非常に得意な人や，ベクトルのスペシャリストでない限り，ベクトルの成分表示を見た瞬間に，その大きさと向きが想像できることはないと思う．少なくとも，私はそのようなマネはできない．

ベクトルの世界では，単位元は 1 という単なる数値ではなく，大きさが 1 で方向[▶23)]をもつ，単位ベクトルという概念が定義される[▶24)]．

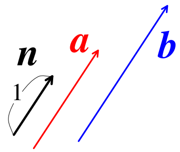


図 5.13　単位ベクトル

単位ベクトルがあれば，同じ向きを持つベクトルは，その単位ベクトルにその大きさをかけることで，ベクトルを表せるのである．単位ベクトルと 1 との違いは，方向をもつか，否かである[▶25)]．

言葉で「単位ベクトル」といったところで，数学的に扱う事はできない．なので，単位ベクトルを文字で表そう．

まだ，単位ベクトルが定義可能か否かは分からないが，単位ベクトルなるものがあると仮定して，それを $\boldsymbol{n}$ と書くこととする．この単位ベクトルを用いると，$\boldsymbol{n}$ と同じ方向をもつベクトルならば，$\boldsymbol{n}$ の実数倍で表現できる．例えば，ベクトル $\boldsymbol{a}$ の向きが単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ と同じ方向であったなら，

$$\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{n}$$

と書ける．これは $\boldsymbol{n}$ と同じ向きを持つ任意のベクトルに対して成り立つ[▶26)]．上式を $\boldsymbol{n}$ について解くと，

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} \tag{5.24}$$

なる．だから，単位ベクトルとは，ベクトルを自身の大きさで割ったものであるといえよう．

念のため，成分表示もしておこう．

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$$

▶23)「向き」と書いていないことに注意．ここで言っているのは，正の向きと負の向きを同時に考えたいので，「方向」と書いた．

▶24) 定義とは，後の議論の発展のためになされるのであり，導かれるものではない．初学の数学に不慣れである時期には，このことは特に忘れがちである．

▶25) 単位ベクトルには方向があり，1 には方向がない．

▶26) 当然，$\boldsymbol{n}$ と向きが異るベクトルはこのように記述はできない．その場合には新たに，その方向をもつ別の単位ベクトルを作らないといけない．つまり，単位ベクトルはその方向によって無数に存在する．これも，自然数の単位元 1 との違うところだ．

$$= \left(\frac{a_1}{|\boldsymbol{a}|}\,,\ \frac{a_2}{|\boldsymbol{a}|}\,,\ \frac{a_3}{|\boldsymbol{a}|} \right)$$

$$= \left(\frac{a_1}{\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}}\,,\ \frac{a_2}{\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}}\,,\ \frac{a_3}{\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}} \right).$$

これは大きさが 1 であり，$\boldsymbol{a}$ と同じ方向のベクトルである．なぜなら，ベクトルの成分を全てを同じ実数で割ったベクトルと，元のベクトルの方向は同一であることは，ベクトルの加減乗除の定義によって簡単に示せる．また，大きさも次の計算から，簡単に 1 であることも確かめられる．

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{n}| &= \left(\frac{a_1}{\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}} \right)^2 + \left(\frac{a_2}{\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}} \right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{a_3}{\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}} \right)^2 \\ &= \frac{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}{\left(\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}\right)^2} \\ &= \frac{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2} \\ &= 1 \\ \therefore\quad |\boldsymbol{n}| &= 1. \end{aligned}$$

♯ *memo* No.14: 具体例

ベクトル $\boldsymbol{a} = [1, 2, 4]$ を，大きさと単位ベクトルに分解してみよう．

まず大きさは，定義に従って

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{1^2+2^2+4^2} = \sqrt{1+4+16} = \sqrt{21}$$

である．よって，求めたい単位ベクトルを $\boldsymbol{n}$ と書くことにすれば，

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{1}{\sqrt{21}}\,[1, 2, 4] = \left[\frac{1}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{4}{\sqrt{21}} \right].$$

以上から，ベクトル $\boldsymbol{a}$ は大きさと単位ベクトルに分解すると，

$$\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{n} = \sqrt{21} \left[\frac{1}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{4}{\sqrt{21}} \right]$$

と表現される．

5.3.2　基底ベクトル

先に単位ベクトルという概念を説明した．そして，ここでは単位ベクトルを使って，さらに新し考え方を導入する．

いきなりだけど，具体例から考える．ひとつの任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ をもってきて，$\boldsymbol{a}$ が次のようなベクトルだったとしよう[27]．

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

この式は次のように見ることもできる．

$$\boldsymbol{a} = 1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3 つの方向に対し，ひつの方向に 1 の大きさをもち，かつ，他の方向には 0 であるような単位ベクトルを作り，それに係数をかけて，足し合わせるのである．

任意のベクトルに対して，この表し方が可能であることは，明白である．任意の n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ が

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

と成分表示されるとしよう．このとき，$\boldsymbol{x}$ は次のようにも表現することが可能である．

$$\boldsymbol{x} = x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + x_i\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + x_n\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

このような書き方だと，記述が少々面倒なので，次のような記号を導入し，表現を

[27] まずは，馴染み深い 3 次元ベクトルで考える．

簡略化させよう．

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\cdots,\ \boldsymbol{e}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\cdots,\ \boldsymbol{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{5.25}$$

このように，一成分が 1 であり，他の成分がすべて 0 であるようなベクトルを，**基底ベクトル** という．もちろん，基底ベクトルとは，任意のベクトルを表現する場合に用いるベクトルである．しかし，たまたま任意のベクトルが基底ベクトルの成分と一致してしまうこともある．この場合のベクトルは基底ベクトルとは認識されない．

基底ベクトルという概念を使うと，$\boldsymbol{x}$ は以下のように書き直せる．

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_i\boldsymbol{e}_i + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n. \tag{5.26}$$

和の記号 $\sum_{i=1}^{n}$ を使うともっと簡単になる．

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{e}_i. \tag{5.27}$$

♯ *memo* No.15: 注意

基底ベクトルを先に「一成分が 1 であり，他の成分がすべて 0 であるようなベクトル」と定義してしまった．しかし，注意してほしい．より細かく言うと，“ 直線直交座標系 ” における基底ベクトルと表現すべきであった．

基底ベクトルは，座標系によってことなる．座標系には，直線直交座標意外にも，極座標系や円筒座標系[28] があり，各座標系の基底ベクトルは全く異なるベクトルである[29]．

[28] 後で説明する．中学から使ってきた，x–y 座標のことを，直線直交座標というが，これ以外にも，上に書いたように，極座標系や円筒座標系など，様々な座標系を設定できる．ここでは，座標系は直線直交座標系だけではないということを分かってもらえれば，それでいい．

[29] ただし，ある基底ベクトルが存在するとき，この基底ベクトルを別の基底ベクトルに変換する方法は存在する．

6 ベクトル解析

6.1　ベクトル関数

6.1.1　ベクトル変数（あるいは，変数ベクトル）

ベクトルには，スカラーにおける語彙「変数」に対応する，一般的呼称がない．ないと不便なので，このノートでは **ベクトル変数** という言い方を導入する．もしかしたら，**変数ベクトル** と書くこともあるかもしれない．

細かいことを言うと，ベクトル変数は，成分の一部あるは全部が変数であるようなベクトルであり，次に説明するベクトル関数である[1]．

変数をベクトル変数と区別する意味で，**スカラー変数** と書くこともある．

6.1.2　ベクトル関数

ベクトルが絡む関数のことを総称して **ベクトル関数** という．また，ベクトル関数と区別するために，今まで考えてきたベクトルが絡まないような関数を，**スカラー関数** と表現する場合がある[2]．

考えれる例をいくつか上げておこう．特にこれらを区別してよぶ必要はないので，名称を与えることはしない[3]．

---

[1] 定義が論理的に循環してしまっているが，意図は伝わるはず．循環しないような記述も可能だが，理論構築が目的ではないため，深く突っ込まないでおこう．

[2] 細かいことを言うと，スカラーは 1 次元ベクトルだから，スカラー関数もベクトル関数である．

[3] 記述の際には，どんな形のベクトル関数について議論しているかが明確にわかるようにする．

例えば，スカラーの独立変数 t に対して，一つの定ベクトルが定まる関数が考えられる．これを

$$\boldsymbol{a}(t) \tag{6.1}$$

と表す．関数記号 $\boldsymbol{a}$ を太字にした意図は，ベクトルが定まる（値域がベクトルである）ことを明示するためである．また，(t) という表記は，t が独立変数であることを示すものである▶4)．

別の例を上げると，ベクトル変数を独立変数にもつ関数が考えられる．数式で表そうとすると，

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) \tag{6.2}$$

のようになる．$\boldsymbol{r}$ はベクトル変数である．

上記 2 つの混合して，スカラー変数 t とベクトル変数 $\boldsymbol{r}$ から

$$\boldsymbol{a}(t, \boldsymbol{r}) \tag{6.3}$$

という関数を作ってもいい．

ベクトル変数を独立変数として，スカラーが定まる（値域がスカラーである）関数もあり得る．記号化すれば，

$$a(\boldsymbol{r}) \tag{6.4}$$

となるだろう．関数記号 a を細字にした意図は，スカラーが定まることを明示するためである．

もちろん，スカラー変数 t とベクトル変数 $\boldsymbol{r}$ をもち，スカラーが定まる関数も考えられる．

$$a(t, \boldsymbol{r}) \tag{6.5}$$

定ベクトルもベクトル関数の一部として考える．明示的な独立変数はないが，入力にかかわらず常に一定値をとるような関数として捉える．スカラー関数の場合と同じように考える．

独立変数が 1 つのベクトル関数 $(\boldsymbol{a}(t))$ を，**1 変数ベクトル関数** という．独立変数が 2 つ以上のベクトル関数を総称して，**多変数ベクトル関数** という．ベクトル変数をもつベクトル関数 ($\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ など) は多変数ベクトル関数として考える．

ひと目で見やすいように，表にしておこう (図 6.1)．

▶4)　多変数になる場合，$\boldsymbol{a}(t, s)$ と書かれることになる（t と s はスカラーである）．このとき，(t, s) という記述がベクトルを成分表示と同じで，紛らわしいかもしれない．しかし，文脈により容易に区別できるとし，特に書き分けることはしない．この記述の前に関数を表現する文字があれば，それらは独立変数である．

表 6.1　ベクトル関数の種類

関数記号	独立変数	値域	例
$\boldsymbol{a}$	なし	ベクトル	定ベクトル
$\boldsymbol{a}(t)$	t	ベクトル	ある 1 点の風向の時間推移
$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$	$\boldsymbol{r}$	ベクトル	ある時刻の風向分布
$\boldsymbol{a}(t,\boldsymbol{r})$	t，$\boldsymbol{r}$	ベクトル	風向分布の時間推移
$a(\boldsymbol{r})$	$\boldsymbol{r}$	スカラー	風力分布
$a(t,\boldsymbol{r})$	t，$\boldsymbol{r}$	スカラー	風力分布の時間推移

6.1.3　ベクトル関数の微積分

コメント　　スカラー関数での微積分を，ベクトル関数へ拡張する．ベクトル関数の微積分も，基本的にはスカラー関数と同じように計算可能である．

6.1.3.1　極限

ベクトル関数の極限はスカラー関数の場合と同じように定義できる．

6.1.3.2　導関数

6.1.4　使用用語

電磁気学を考えるとき，**曲線** や，**閉曲線** 等という数学用語を頻繁に使う．ニュートン力学では，特に必要はない▶5)．だから，電磁気学を学習し始める段階になったら，この部分を読むようにすればいい．

最初に，これらの用語について，あらかじめ確認する．以下の説明はすごく感覚的なものであって，全く厳密でないことを注意しておく．

6.1.4.1　導線 (曲線)

一本のひものように，端と端が結ばれていない線のことを 曲線 という．このノートでは，「電気の流れる道」という意味をこめて，**導線** ということにする．導線の形は グニャグニャ と曲がっていてかまわないが，導線が自身と重ならないようなものであるとする (リボンのように絡まっていないものする)．このノートでは，導線を表現する記号として，Γ を用いる．

数学的に表現すると，曲線とは各成分が共通のパラメータ t の関数であるようなベ

▶5)　知っていれば，それだけ“ 広く ”考えられるが，無理してまで，ここで学習する必要はない．

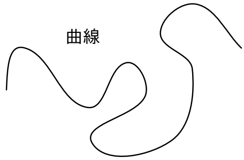


図 6.1　導線

クトルのことをいう．式で表せば，曲線 $\boldsymbol{r}(t)$ は

$$\boldsymbol{r}_n(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), \cdots, x_n(t)) \tag{6.6}$$

と書ける．これは n 次元ベクトルである．このノートでは空間の次元である 3 次元を考えているので，その各成分は $(x(t), y(t), z(t))$ と書くことにし，

$$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \tag{6.7}$$

とする．この式は時刻 t における位置を表現する式と同じである．時間 t を正方向になめらかに変化させていき，その各々の時間における位置を記録していけば，1 つの曲線が現れてくる．力学ではこの曲線のことを「軌跡」とよんでいたが，ここではそれを一般的に解釈して，**曲線** ということにする．このノートの電磁気学の部分においては，曲線として出てくるのは回路の導線である．そこで，曲線とよばずに，**導線** ということが多い．また，導線の形をいちいち指定することはしない．だから，$\Gamma = \boldsymbol{r}(t)$ として，導線を表現する記号として，Γ を用いる．

以下では導線は連続しているという条件を課する．簡単にいえば，「切れていない」導線を考えるということである．

6.1.4.2　閉曲線

導線の両端がつながっているとき▶[6]，これを **閉曲線** という．閉曲線の形は グニャグニャ と曲がっていてもよいが，「八の字」のように導線同士が接触してが重ならないようにする．輪ゴムのようなものを考えるとよい．このノートでは，閉曲線を表現する記号として，l を用いる．

6.1.4.3　曲面

平らではなく， グニャグニャ とした面のことを **曲面** という．もちろん，平らな面も曲面に属するが，ここではもっと一般的なグニャッとなった面を想像してもらいたい．

▶6)　この場合，どこが端であるかは見分けがつかないが….

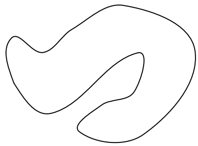


図 6.2　閉曲線

電磁気学では特に，「縁をもった曲面」を考えることも多い[▶7)]．曲面の境界は閉曲線である．従って以下では，「縁をもった曲面」のことを『閉曲線 l を縁とする曲面』のようにいうことにする．このノートでは，閉曲線 l を縁とする曲面 を 表現する記号として，S_l を用いることにする．

6.1.4.4　閉曲面

ボールの表面のように，縁をもたない曲面のことを **閉曲面** という．グニャグニャとしていてよいが，面同士が重なったり，互いに切断しあったりしないものとする．このノートでは，閉曲面を表現する記号として，S を用いる．

ここで注意したい，「閉曲線 l を縁とする閉曲面 S_l」と「閉曲線 S」の違いである．S の添え字に l が付いているもの (S_l) は曲面であり，添え字に l がついていないもの (S) は閉曲面である．

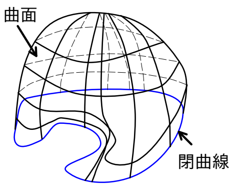


図 6.3　曲面

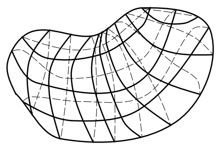


図 6.4　閉曲面

6.1.4.5　領域

閉曲面 S を考えるとき，その表面は その内側の空間 と 外側の空間 を分けていると考えられる．閉曲面の内側の空間のことを **領域** という．領域を表現する記号として，このノートでは Ω_S を用いる．もちろん，添え字の S は領域の表面である閉曲面 S を意味している．

▶7)　例えば，お皿等がその例になるだろう．縁を持たない曲面の例とは，ボールの表面があげられよう．

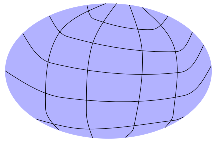


図 6.5　領域

6.1.5　線積分と面積分のイメージ

線積分と面積分についての詳しいことは，ベクトル解析の教科書や微分積分学の教科書を参照してもらうことにして，ここではそのイメージを記述しておく．

6.1.6　ベクトル空間

位置を一つ指定すると，その位置に対して，1 つのベクトルが指定される空間を考える (Fig 6.6 参照).

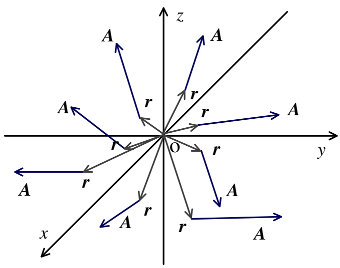


図 6.6　ベクトル空間 1(説明図)

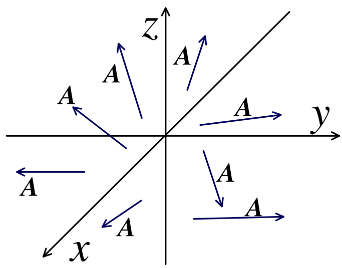


図 6.7　ベクトル空間 2(イメージ)

任意の位置 $\boldsymbol{r}$ に対して，1 つのベクトル $\boldsymbol{A}$ が決定されるという空間をイメージして描いた図である．このような空間を **ベクトル空間** という．また，位置 (と時間) を指定すると 1 つのベクトルを決定できるので，これは関数の性質に他ならず，これを **ベクトル関数** という．従って，$\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ と表現したほうがベクトル関数であることが，明確になる．しかし今後も，式が煩雑にならないように，ベクトル関数の変数である $\boldsymbol{r}$ を省略して表現する ($\boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$).

ベクトル空間の例としてよく取り上げられる現象のうち，空気の流れ (風) がある．風は向きと速度をもっている．その向きと速度は場所と時間によって異なるが，1 つの場所と時間を指定すれば，風の向きと速度は求まる．川の流れや，海水の流れといった現象もベクトル空間で表現される．要するに，何かの「流れ」があったときに，

それはベクトル空間で表現するのである．

以下でベクトル空間というときには，Fig 6.7 を思い浮かべてもらいたい．但し，ベクトル $\boldsymbol{A}$ については，時間と位置を指定すれば決定されるようなものであれば，Fig 6.7 のようなものでなくとも，自由に想像してよい．

6.1.7 ベクトルとスカラーの区別の仕方

いままで，ベクトルとは大きさと向きのある量であると考えてきた．また，スカラーは大きさのみをもつ量としていた．実は，これは正確な説明ではない．ベクトル空間を確認した今，ベクトルとスカラーの正確に違いについて，議論ができる．ここで整理しよう．

ベクトルとスカラーを正確に区別する方法は，座標変換を考えることである．私がある空間に直交座標を張ったとしよう．私のいる空間には，複数の人がいて，その各々が任意に直交座標を張るとする．もちろん，何人もの人が張った直交座標の座標軸の方向はばらばらである．

この空間が，ベクトル空間であったとしよう．その時，私は一つの点に属する一つのベクトルをみるとする．そのベクトルの方向は，私から見た方向と，他の観測者から見た方向とで一致しない[▶8)]．それでは，この空間がベクトル空間ではなく，スカラー空間であるとしよう．この時には私がさしている点に属する数は，別の観測者がそれを見ても，全く一致する．ベクトルとスカラーの違いはここにある．私が見るベクトルの向きと，他の人が同じベクトルを見たときのむきは異なるが，スカラーは度の観測者に対しても同じ値を示す．観測者によって違うということは，直交座標の座標軸の設定方向が違うということである．つまり，別の座標に移ってしまうと，ベクトルの向きは変化してしまうのである．スカラーは座標が変わっても，全く同じように観測される．両者はこのように，座標変換によって区別されるものである．座標変換についての知識がないので，これ以上ここでは話を続けることができない．座標変換について学ぶときに，もう一度，ベクトルとスカラーの違いを確認し，“ 実感 ” したいと思う．ここでは区別の仕方が知識として身に付いていれば，それでよいことにしよう．

6.1.8 線積分

ベクトル空間に，任意の曲線 C を描く．この曲線 C 上の全ての点にはそれぞれ 1 つのベクトルが対応している．ベクトル空間に曲線 C を描いてみると Fig 6.8 のようになる．

見易さのために，曲線 C 上のベクトルしか描いていないが，実際は別の点においてもベクトルは存在している．線積分の考察の対象はあくまでも，曲線 C 上のベク

▶8) 偶然の一致は起こりえるが，より一般的に考えよう．

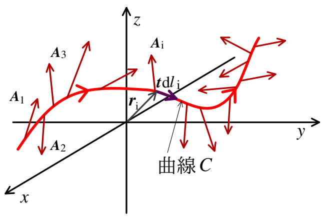


図 6.8　線積分

トルだけである．

曲線 C を微小な長さの直線分割して，そのひとつひとつを $\mathrm{d}l$ とする．この部分の単位接線ベクトルを $\boldsymbol{t}$ で表現する．もちろん，曲線 C は曲がっているので，各 $\mathrm{d}l$ 部分における単位接線ベクトル $\boldsymbol{t}$ は一定ではない．これらにより，長さ $\mathrm{d}l$ で向きが $\boldsymbol{t}$ であるベクトル $\boldsymbol{t}\,\mathrm{d}l$ を曲線 C 上に作ることができる．C 上に位置するベクトル $\boldsymbol{A}$ の接線方向は $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{t}\,\mathrm{d}l$ と表現できる．これを曲線 C 全域にわたって積分したものが，線積分であり，

$$\int_C \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{t}\,\mathrm{d}l \tag{6.8}$$

と表現される．

曲線 C 上のベクトル $\boldsymbol{A}$ の曲線方向成分 $\boldsymbol{t}$ の積分を表している．

♯ *memo* No.16: 詳細

もう少し優しく解説してみる．線積分とは，曲線 C 上のベクトル関数を，曲線 C に沿って積分するということである．「曲線 C に沿って積分する」というのは，ベクトル関数の曲線方向成分の総和を考えるということである．そのためには，曲線 C とその上のベクトル $\boldsymbol{A}$ の内積を考える必要がある[▶9)] すなわち，曲線をベクトルとしてみることが要求され，曲線に向きをつけるということである．曲線の向きは 2 通り考えられるが[▶10)]，どちらをとろうが，結果は同じである．しかし，一度向きを指定したら，後になって変更することはできない．

曲線 C を有限の N 個に分割しする (6.9 参照)．このように分割された曲線は，ほとんど直線と見ることができる．つまり，曲線 C を N 個の直線で近似するのである．これらの近似的直線に名前と番号をつけて Δl_1，Δl_2，…，Δl_N とする．また，これらに向きという概念を導入して，それぞれに $\boldsymbol{t}_1$，$\boldsymbol{t}_2$，…，$\boldsymbol{t}_N$ を対応させる．もちろん，先ほど決めた曲線の向きに合うように設定する．そして，$\boldsymbol{t}_1\Delta l_1$，$\boldsymbol{t}_2\Delta l_2$，…，$\boldsymbol{t}_N\Delta l_N$ を作る．これらのベクトルは曲線の接線の向きを持ち，大きさが Δl である[▶11)]．

▶9)　任意の 2 つのベクトル $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ の内積は $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = uv\cos\theta$ である．

▶10)　曲線の両端をそれぞれ A，B として，まず第 1 に A から B に向かう向きを考えられる．また，第 2 に，B から A に向かう向きを考えられる．

▶11)　**単位ベクトル**；任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ を用意する．ここで，大きさ 1 の向きを持った **単位ベクトル** を

ところで，この分割に際して，C 上のベクトル $\boldsymbol{A}$ は連続であるために，分割した直線部分には複数のベクトルが含まれることになる．そこで，ベクトル $\boldsymbol{A}$ を 1 つの直線で平均して，それぞれ，$\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{A}_2$，⋯，$\boldsymbol{A}_N$ とする．

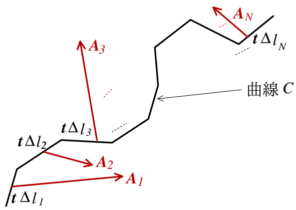


図 6.9　線積分 (説明図)

以上より，曲線 C 上のベクトルと曲線に沿ったベクトルとの内積の和は

$$\boldsymbol{A}_1 \cdot \boldsymbol{t}_1 \Delta l_1 + \boldsymbol{A}_2 \cdot \boldsymbol{t}_2 \Delta l_2 + \cdots + \boldsymbol{A}_N \cdot \boldsymbol{t}_N \Delta l_N \tag{6.10}$$

和の記号 $\sum$ を用いて表現すれば，

$$\sum_{i=n}^{N} \boldsymbol{A}_i \cdot \boldsymbol{t}_i \Delta l_i \tag{6.11}$$

さらに分割数 N を無限大に持ってことで，曲線に近づいていき，最終的には

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=n}^{N} \boldsymbol{A}_i \cdot \boldsymbol{t}_i \Delta l_i = \int_C \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{t}\, \mathrm{d}l \tag{6.12}$$

を得る．

6.1.9　面積分

ベクトル空間に，任意の閉曲面 S をとる (Fig 6.10 参照)．

曲面 S_l の各点から，流出するベクトルを考える．曲面 S_l 上の位置 $\boldsymbol{r}$ から流出するベクトルを $\boldsymbol{A}$ とする．

曲面 S_l を無限に分割し，その微小面積部分のひとつひとつを $\mathrm{d}S_l$ と表す．曲面 S_l から流出するベクトルの垂直な成分が，実質的に流出する量である．曲面 S_l に平

導入し，これを $\boldsymbol{m}$ と書く．この単位ベクトル $\boldsymbol{m}$ を用いて任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ はその大きさを v と表すことで，

$$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{m} \tag{6.9}$$

と書ける．ここでは $\boldsymbol{v}$ が曲線に沿うベクトルに対応し，v はその大きさ $\mathrm{d}l$，$\boldsymbol{m}$ は向き $\boldsymbol{t}$ に対応している．

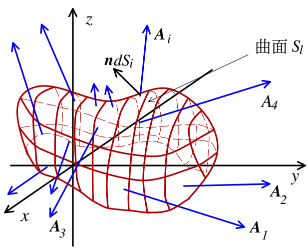


図 6.10 面積分 (巨視的視点から)

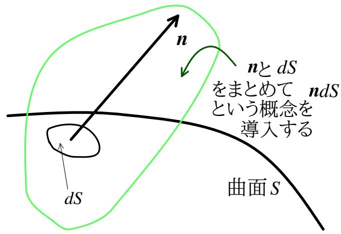


図 6.11 面積分 (微視的視点から)

行な成分は曲面 S_l 上を流れるだけであり，流出はしない．そこで，曲面 S_l に垂直な成分を考えるために，曲面 S_l と流出するベクトル $\boldsymbol{A}$ の内積を考える必要が生じる．つまり，曲面 S_l をベクトルとして考えることになる．そのままではベクトルにすることができないので，線積分のときと同様に，単位ベクトルの導入をする．線積分のときは曲線に沿うベクトルにしたかったので単位接線ベクトルを考えたが，面積分では曲面 S_l に垂直な方向を考えたいので，**単位法線ベクトル** を導入し，これを $\boldsymbol{n}$ とする．さて，どのような向きに設定するかだが，曲面には 2 つの面が考えられる．すなわち裏と表を考えられる．従って，単位法線ベクトルの向きとして「裏から表」と「表から裏」の 2 つの向きのどちらか一方をつける必要がある．しかし明らかに，どちらの向きにとろうが結果は同じである．一度向きを決定したら，後になってその向きを変更してはいけない．

このように設定した単位法線ベクトルを用いて，曲面の各微小面積部分 $\mathrm{d}S$ におけるベクトルは，$\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$ と書ける．というか，こういう概念を導入するのである．このベクトルの大きさは $\mathrm{d}S$ であり，向きは法線ベクトルの向きである．

以上によって，微小面積部分 $\mathrm{d}S$ から流出するベクトル $\boldsymbol{A}$ は，$\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$ との内積から $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$ と表現できる．曲面 S_l 全体を考えるならば曲面で積分すればよく，

$$\int_{S_l} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S_l \tag{6.13}$$

である．

式のイメージは，曲面 S_l から流出するベクトルの総和である．どのくらいの量が流出しているかを計算するのがこの式である．

微分形のマクスウエル方程式を得るために必要な概念はベクトルの **発散** (div) と，ベクトルの **回転** (rot) である．まずは，この 2 つについて確認する．さらに今後必要となるベクトル解析の公式もここに書き下しておく．

6.1.10　ベクトルの発散・回転・勾配

6.1.10.1　ベクトルの発散 (div)

ベクトルの発散というのは，ある点でベクトルの「湧き出し」が生じているかどうかを表現する[12]．もしその値が正であれば，その点でベクトルが湧き出ているのであり，負であれば吸収が起こっていることを意味する．

ベクトルの発散の計算方法なのだけど，ここでは厳密なことは考えず，感覚的な説明にとどめる[13]．ベクトルといってもイメージがわきにくいので，ここでは水の流れ (川) を例にとって説明したい．水の流れのベクトルを $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ で表すことにする．

ある点 P で水が湧き出ているとき，正方形の箱でその点 P を内部に含むように囲む．

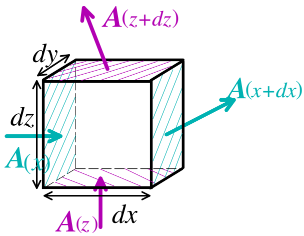


図 6.12　発散のイメージ

もし，P から水が湧き出していないのなら，この箱に入ってくる水の量と，箱の外に出て行く水の量の和は 0 である．ここで，この箱は正方形であるから，水が流入する面と流出する面はそれぞれ 3 面ずつである．そこで，向かい合う面同士の対をつくり，一方の面から水が流入し，その面の向かい側の面から水が流出するという状況を考える．もちろん，3 つの組が作られるが，ここでは説明を簡単にするために，1 組の面を考える．

Fig 6.13 において，水が流入する面の面積は，$\Delta y \Delta z$ であることは図より明らか．従って，この面に流入する水の量は，

$$A_x(x, y, z)\Delta y \Delta z$$

である．また，流出する水の量は，

$$A_x(x + \Delta x, y, z)\Delta y \Delta z$$

▶12) 湧き出しのことを divergence というので，その頭文字 div をとって，これを発散の数式記号として用いる．

▶13) もし，より厳密に知りたければ，「ベクトル解析」の教科書にあたってみるとよい．

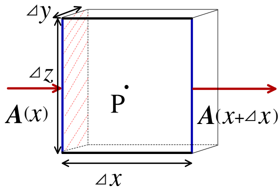


図 6.13　湧き出し (一方向)

である．湧き出しの量は，流入する水の量から流出する量を引けばよい．従って，

$$
\begin{aligned}
&A_x(x+\Delta x, y, z)\Delta y \Delta z - A_x(x, y, z)\Delta y \Delta z \\
\Leftrightarrow \quad &\{A_x(x+\Delta x, y, z) - A_x(x, y, z)\}\Delta y \Delta z
\end{aligned}
$$

と計算される．ここで，$A_x(x+\Delta x, y, z) - A_x(x, y, z) = (\partial A_x/\partial x)\Delta x$ であることに注意すれば[14)]

$$
\Leftrightarrow \quad \frac{\partial A_x}{\partial x}\Delta x \Delta y \Delta z
$$

となる．これは正か負の値をもつ．正の場合は湧き出しが起こっていることを意味し，負の場合は吸収が起こっていることを意味する．

これは他の 2 組の面においても同様に計算でき，結果を記しておけば，

$$
\frac{\partial A_y}{\partial y}\Delta x \Delta y \Delta z, \qquad \frac{\partial A_z}{\partial z}\Delta x \Delta y \Delta z
$$

である．

以上から，正方形の箱から流れ出す量は，それぞれの和を考えればよく，

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial A_x}{\partial x}\Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial A_y}{\partial y}\Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial A_z}{\partial z}\Delta x \Delta y \Delta z \\
\Leftrightarrow \quad &\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\Delta V
\end{aligned}
$$

である．ここに，$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ とした．これは箱の体積を表すものである．

ここで，ベクトル $\boldsymbol{A} = (A_x,\ A_y,\ A_z)$ の発散 div は次式で定義される．

---

14)　Δx の 2 次以上の項は無視した．

発散 (div) の定義

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} \equiv \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{6.14}$$

この発散記号 div を用いると,

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}\,\Delta V \tag{6.15}$$

となる．これを体積 ΔV で割ると，単位体積あたりの湧き出しの量を計算できる．

$$\frac{1}{\Delta V}\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}\,\Delta V \tag{6.16}$$

箱の内部で湧き出した分だけ，水はこの箱の外に流出するが，この関係について次の項目で考える．

6.1.10.2 ガウスの定理

前項目での箱の体積，つまり ΔV を極限まで小さくしていき，それをある領域で積分する．この領域をつぎのように設定する．閉曲面 S をとり，その内側の領域を Ω_S とする．また，この領域の体積を V とする．そして，まず体積 V を分割して ΔV とする．この ΔV を領域 Ω_S で積分するということは，以下の通りに計算するということである．

$$\lim_{\Delta V \to \infty}\left(\frac{1}{\Delta V}\sum \mathrm{div}\,\boldsymbol{A}\,\Delta V\right)$$

積分記号を用いれば,

$$\int_{\Omega_S} \mathrm{div}\,\boldsymbol{A}\;\mathrm{d}V \tag{6.17}$$

である．この積分は，領域 Ω_S からの湧き出しの量を計算するものである．

ところで，領域 Ω_S から湧き出した量は領域内にとどまれず，外にあふれてしまうはず．つまり，湧き出した分だけ，領域の表面である閉曲面 S を貫いて領域外へともれてしまう．閉曲面 S から流れ出る量は,

$$\int_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S \tag{6.18}$$

と計算できる．

従って，“ 湧き出した分だけ流出する ” ことを式で表現するならば，式 (6.17) と式 (る) が等しいとするべきで，すなわち,

$$\int_{\Omega_S} \mathrm{div}\,\boldsymbol{A}\;\mathrm{d}V = \int_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S \tag{6.19}$$

が成立している．これを **ガウスの定理** という．左辺が体積積分で，右辺が面積分になっている面白い定理である．

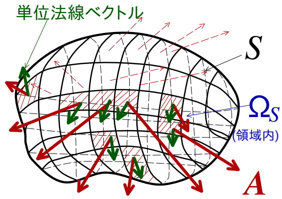


図 6.14　ガウスの定理 (イメージ)

ガウスの定理を感覚的に説明してしまったが，これは数学的には厳密に証明されるべき定理である．このノートではこの定理の証明はしないが，この定理は大事なものだから，ベクトル解析の教科書を読んで，証明を確認するとよい．ここでは，この定理の直感的な理解と扱い方がわかれば，それでよいことにしたい．

♯ *memo* No.17: 整理

もう一度整理しよう．任意の閉曲面を S，この閉曲面 S の内側の領域を Ω_S と表す．また，閉曲面の単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ 表す．このとき，任意の 3 次元ベクトル $\boldsymbol{A}$ に対して以下の関係が成り立つ．

ガウスの定理

$$\int_{\Omega_S} \mathrm{div}\, \boldsymbol{A}\ \mathrm{d}V = \int_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\ \mathrm{d}S \tag{6.20}$$

言葉で式を表現するならば

(領域内での湧き出し量) = (領域外への流出量)

といった感じだろうか．

♯ *memo* No.18: 「ガウスの法則」と「ガウスの定理」

“ ガウスの法則 ” との区別をしっかりしておくこと．

- ガウスの法則は電場や磁束密度の振る舞いを表す "物理法則"
- ガウスの定理とはベクトルの発散に関する "数学の定理"

6.1.10.3　ベクトルの回転 (rot)

ベクトルの回転を式で表現することを考える▶15)．

ベクトルの回転とは，1 つのベクトルが時間的に向きを変えて変化するような回転ではない．ベクトル空間自体が回転運動をしているのでもない．どのようなことか．具体例で考えよう．

ここでも，具体的なベクトルの例として水の流れ (川) を用いる．川を見ると，岩や石の付近で“ 渦 ”を巻いている所があるだろう．これから考えることは，この“ 渦 ”を数式で表現することである．

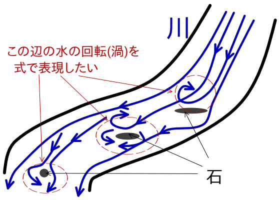


図 6.15　川で生じる渦のイメージ

物体の回転を扱ったときは，直接的に物体そのものの運動を考えることができた．ところが，水などの流体は物体とは異なり，その流れ自体を物体と同じように考えるとややこしい．そこで，どのような流れかを知るために，川の上に葉を置いてみるのだ．葉は，水の流れに従って移動する．この葉の動きを観察することにより，川の様子を探ることができる．川の全体の様子を把握したい場合には，その川のいたるところに葉を置いて見て，その葉がどのような動きをするかを，観察すればよい．

葉が 1 つの場所にとどまっていて，その場で回転している状況を想定する．この回転面に $x-y$ 面をとる▶16)．そして，葉が回転している一点を原点にとる．

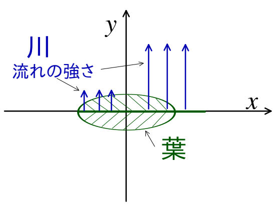


図 6.16　回転 (渦) が生じるための条件

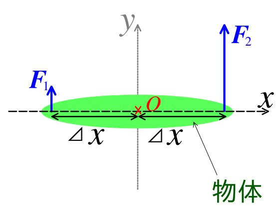


図 6.17　物体 (葉) の回転 1

葉が原点を中心に回転するには，水の流れが原点の中心を境に，その勢いが異なっ

▶15)　回転のことを rotation というので，その頭文字の rot が数式記号として用いられる．

▶16)　これは葉が置かれている表面，つまり水面に $x-y$ にとるのと同じである．

ていればよい．Fig 6.16 でいえば，左側の勢いと右側の勢いが違っていればよいということである．この図はもっと簡単になる．

この Fig 6.17 で，左右両方の原点を中心とする力のモーメントを考えれば，左側が $F_1\Delta x$ であり，右側が $F_2\Delta x$ である．ここで，図より $F_1 < F_2$ であるから (Δx は共通であるとする)，この二つの力のモーメントのは互いに異なった値であり，従って，物体は回転をしているはずである[17]．

ここからが少しヤッカイな部分だが，それは今考えている対象は物体の回転ではなく水の回転，つまり“ 渦 ”である．この渦とはベクトルの回転である．物体の回転そのものを見るときは力のモーメントを考えればよかったが，ベクトルの回転では力のモーメントなんてものは直接には定義できない．だから，ベクトル (渦) の上に物体を置いて，その回転でもってベクトルの回転の様子をうかがってみようとしたのである．そしてそれによって，ベクトルの回転の様子を，物体の回転として観測できることが分かった．この考えをもっと進めていこう．簡単のために，原点付近の水の様子を考えてみる．

力の方向が左右で同じ方向を向いていなくともかまわない．

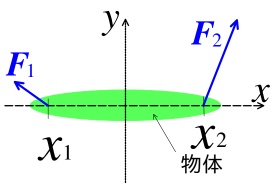


図 6.18　物体 (葉) の回転 2

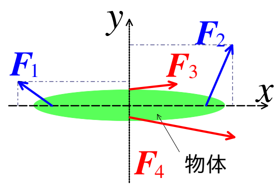


図 6.19　物体 (葉) の回転 3

この図のような状況でベクトルの渦が起こるには，物体にかかる x 方向と y 方向の 2 方向で考えればよい．それを Fig 6.19 に示す．

ベクトル場とはここでは物体が水の流れから受ける力のことだが，これを $\boldsymbol{F}(x, y)$ とする．ここでは話を簡単にするために，ベクトル場は時間に依存しないとした．

先ほど考えた左右それぞれ力のモーメントの関係は $\boldsymbol{F}_1\Delta x > \boldsymbol{F}_2\Delta x$ であった．これを以下のように書き直す．

$$F_1\Delta x - F_2\Delta x > 0.$$
$$(F_1 - F_2)\Delta x > 0.$$

さらにこの式の左辺は 0 より大きいので，何らかの定数，もしくは関数であるので，それを $a(\boldsymbol{r},\ t)$ と書いて，

$$(\boldsymbol{F}_1 - \boldsymbol{F}_2)\Delta x = a(\boldsymbol{r},\ t)$$

[17] 回転するように仮定を設けいているので，当たり前と言ってしまえばそうだが，確かに回転を表現できるという確認をここでしたのである．

とする．今考えている力 F は，x 座標と y 座標ごとに違うはずである．つまり，F は x と y の関数であるから，

$$(F(x_1,\,y_1)-F(x_2,\,y_2))\Delta x = a(\boldsymbol{r}\,,\ t).$$

今考えているのは，原点付近の水の回転の様子であり，x_1 と x_2 はさほど離れていないと考えてよい．x_1 と x_2 の距離は前の図で $2\Delta x$ としていた．$2\Delta x$ を h に置き換えてしまおう．つまり，$x_2 = x_1 + h$ である．

$$(F(x_1,\,y_1)-F(x_1+h,\,y_2))\Delta x = a(\boldsymbol{r}\,,\ t).$$

上式の左辺第一項と第二項を入れ替えてみよう．

$$(F(x_1+h,\,y_2)-F(x_1,\,y_1))\Delta x = -a(\boldsymbol{r}\,,\ t).$$

ところで，物体の回転を現すにはベクトルの外積を用いた．

ベクトル $\boldsymbol{A}=(A_x,\,A_y,\,A_z)$ の回転 rot は次式で定義される．

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} \equiv \left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\,,\ \frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\,,\ \frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \tag{6.21}$$

6.1.10.4　ベクトルの勾配 (grad)

ベクトル $\boldsymbol{A}=(A_x,\,A_y,\,A_z)$ の勾配 grad は次式で定義される．

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} \equiv \left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x}\,,\ \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial y}\,,\ \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial z}\right) \tag{6.22}$$

6.1.10.5　ベクトル解析の公式 (演算子)

$$\Delta \equiv \mathrm{div}\,\mathrm{grad} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{6.23}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div} - \Delta \tag{6.24}$$

6.1.10.6　ストークスの定理

任意の閉曲線を l，この閉曲線を縁とする曲面を S_l と表す．また，閉曲線 l の単位接線ベクトルを $\boldsymbol{t}$ と表す．このとき，任意の 3 次元ベクトル $\boldsymbol{A}$ に対して，

$$\int_{S_l} (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{n}\ \mathrm{d}S_l = \oint_l \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{t}\ \mathrm{d}l \tag{6.25}$$

が成り立つ．これを **ストークスの定理** という．

7
行列

7.1 行列とは

第 II 部

思想

A 感覚・思考・表現

コメント　　この章は，私の個人的な考えをメモしておくものである．だから，記述内容が誤っているかもしれず，考え違いや，誤解が含まれていることと思う．誰とも議論もせずに記述することであるから，偏った考え方になりがちだし，最悪の場合，矛盾がふくまれているだろう．それにもかかわらず，この章の文章は"言い切り"の形で記述する．いちいち，「だと思う」という語彙を文章末尾につけてしまうと，読みにくくなってしまうし，第一，カッコ悪い．なので，偏った考え方や誤った主張を強く強調していると思われるかもしれないが，そうではなく，単に現在の私の考えをメモしているものに過ぎないと，捉えてもらいたい．

A.1　根拠なしに，確信できること

根拠なしに確信を持てることは，「考えられる」ということである．そして，考えるという行為は，言葉[▶1)] を用いて行われてることも，根拠なしに認めることができる[▶2)]．

何かものを考えるときには，考えるための材料と道具が必要である．材料というのは経験であり，道具というのは言葉である．考えるという行為とは，経験を道具により整理して，その経験に対する理解を深めるという行為である．

私たちの経験する全ての事柄を，**世界** と表現することにしよう[▶3)]．私たちは，世

▶1)　ここで言う **言葉** とは，“ 書くことによる表現 ” と “ 話すことによる表現 ” の両方を指す意味で使っている．

▶2)　「言葉なしに考える」という行為は可能だろうか．少なくとも，私には実行不可能である．

▶3)　ここでいう **世界** とは，世界の国々を表しているのではない．私たちが目や耳などの，いわゆる五

界を経験をできる．経験を記憶できる．また，経験を不思議がったり，その不思議を考えられる．そして，その考えを言葉や絵で表現できる．そして，このような表現を行うことで，自分以外の相手に自分の考えを伝えることができる．

これが，私の「考えること」の根本的な思想である．これからの物理学の学習は，この思想のもとに行う．

♯ *memo* No.19: 言葉と思考の順序

考えるという行為は，言葉を使って行われう行為である．もっと強い言い方をすると，考えるという行為は言葉なしに行うことは不可能である．つまり，言葉を習得する以前は，ものを考えることができないことになる．となると，言葉の見習得の赤ん坊は，ものを考えることができないのだろうか．この問題に対する，私が納得のできる答えは，まだ存在していない．

しかし，これだけは言える．言葉の習得する以前から，この世界を感じている．世界を感じるという経験の一つに，言葉がある．経験が「思考する」という行為の基礎に位置するのである．しかし，この推論に確証はもてない．経験が思考の基礎をなすということを，今から身をもって体験することができないからだ．言葉習得以前の状態にもどり，言語を習得しなくとも世界を感じとることができるのだな，という感覚を体験できればよいが，これは不可能である．推論をいくら重ねたところで，あるいは，多くの言語見習得の赤ん坊を観察したところで，自分自身で実感できないので，納得はできない．納得はいかないけれど，今の私は言語を扱っている▶[4]．また，その習得に多くの時間を費やしたことも記憶にある．ということは，言語見習得の時期があったいう推論は妥当であるとも思える▶[5]．

♯ *memo* No.20: 言葉の習得

言葉は，人間が生まれながらにしてもっているものではない．言葉は，意思疎通を行うために，先人の経験により発明され，洗練されてきたものである．

私たちは，生まれてから自然と母国語の文法を習得する▶[6]．母国語は体系的に教わることない．常に生の言葉を聞き，そして，その時の状況を機能するすべての感覚器から感じ取り，言葉の使用法を身につける．論理学や数学で言うところの公理▶[7] があるわけでもなく，ただ

感で感じ取る全てのことを総合して，「世界」と表現する．

▶4) 少なくとも，とりあえずの不都合なく，意思疎通ができる程度に．

▶5) 実際に言語見習得の時期の記憶がないので，単なる推論でしかない．

▶6) 国語の時間に，強制的に習得させられることもあるだろう．ひらがなや，カタカナ，漢字を覚えるのには苦労したはず．また，使い慣れない語彙を使用し始める場合，単語そのものを誤って使ってしまい（「つくる」を「くつる」に間違うなど），大人から，その場で間違いを指摘され，修正された経験もあったことだろう．しかし，その間違いの指摘は言葉によって行われたのであり，それにより，誤りを自覚してそれを修正しようと努力できたはずである，全ての言葉を自然に習得できるわけではないのだが，言葉の基本的な使い方は誰から教わったものではなく，自分の周囲に飛び交っていた母国語を聞くことにより，非言語的に習得するのである（そうでなければ，言葉の使い方を間違っときの，その間違いの指摘を理解することができないことになる）．言葉の文法を，0 から言葉により説明することはできない．というのも，文法を説明しようとすると，その説明自体に言葉を使用せざるを得ず，つまり，「文法を知る前に文法を知っていなければならない」といった，自己言及的な矛盾がおこるからである．しかし，現に私たちは母国語の文法を習得して使用している．

▶7) 最も基礎となる，疑いようのない事実のこと．万人が根拠なしに正しいと感じること．例えば，数学で言うと，「A=B で B=C のとき，A=C」といった感じの，最も基本的なお約束のことを言う．これは有無を言わさずたたきつけられることである．その根拠を求めてはならない．公理の根拠な

漠然と，その使われ方を悟り，自分のものとしていく．人間には，言葉を習得する能力が生まれながらにして備わっているのだ．なぜだろうか．意思疎通をうまい具合に行うためだとか，いろいろ後付的な説明がなされることもあろうが，そんなことは確かめようがない．なんとでも言えるのだ．ここでは，深く考えずに，「私は言葉を使うことができる」ということを，素直にそのままの形で受け入れておこう．

♯ *memo* No.21: 意思疎通

言葉はどんな時に使われるのだろうか．いや，おかしな疑問を投げかけてしまった．そんなの，意思疎通を行うために決まっているじゃないか．本当に，そうなのか．言葉でだけで，意思疎通が十分に可能だろうか．いや，できないはずだ．誤解や言い間違いなどで，正しく意思疎通ができないこともあるだろう．言葉だけで十分に意思疎通はできないのは，当たり前で，そのために，他の手段として，手や体を動かして（身振り手振り）表現することもある▶[8]．図を使って表現することもあろう．音楽で気分を表現したりもするだろう▶[9]．とにかく，意思疎通のための道具は，言葉だけではない．

だけど，ここまで書いといてなんだけども，ノートで自分の考えを示すのには，図と言葉でしか表現できない．なんともやりづらいが，どうしようもない．ここは我慢して，図と言葉だけで伝わるように，記述しなければならない．図と言葉だけで，どれだけのことが表現できるかわからないが，頑張って考えながら，記述していこう．たとえ時間がかかろうとも，文が長ったらしくなろうとも，丁寧に記述していけば，どんなことでも言葉で伝えることができると信じて，記述していこう．

私は考えることができ，それを言葉で表現でき，そして，その言葉によって他者に自分の考えを伝える事ができると信じる．そして，逆に，他人の表現する言葉を理解し，他者の考えを受け入れられることも，信じる．さらに，自分と他人とで会話を続けることにより，より深く正確に互いの考えを理解し合えると信じよう．ここのところをこれ以上疑いだすと，言語哲学的な世界に陥ることになり，抜け出せなくなってしまう．もうこれ以上，言葉について考える事はせずに，話を先に進めよう．

A.2　表現

思考を表現する最も有効な道具が，言葉である．また，時には，言葉よりも絵に書いたほうがより伝わりやすいこともあろう▶[10]．言葉や絵以外にも，ある規則に従った記号により，思考を表現することも可能である．▶[11]．表現するという行為は，言

んてものは，はじめから存在しないのだから．言い方を変えれば，何かを論理的に考えようとした時に，その根拠が求められることがあるが，その根拠は果てしなく問うことは不可能である．いずれは，根拠を示すことができない当たり前すぎる事柄に，直面することだろう．それを公理というのである．

▶8)　別れ際に相手に対して手を振ったり，違うことを示すために首を横に振ったりするだろう．

▶9)　気分が良い時には，鼻歌が自然にでたり，踊ることだってするでしょ？

▶10)　宣伝看板や，ポスターなどが良い例だ．

▶11)　特に，音楽は言葉によって表すことは難しい．原理的に不可能とは言わないが，そうして表現できたものは，とても煩雑で理解しがたい表現になっていることだろう．では，音楽を伝える方法はないのかというと，もちろん，そんなことはない．周知の通り，**楽譜** という音楽独特の表現方法が考えだされている．楽譜は絵でも言葉でもないが，人間のもっている，ある種の感覚を表現するもの

うまでもなく，自分の考えや思いを自分以外の相手に伝えるということである．

A.3 「科学」の思想

"科学的" という言葉は日常的に使用される．特に，最新技術という意味合いで使用されることが多いように感じる．しかし，"科学的" とはどういうことかを考えてみると，残念なことに，明確なイメージを描けないことに気付く．

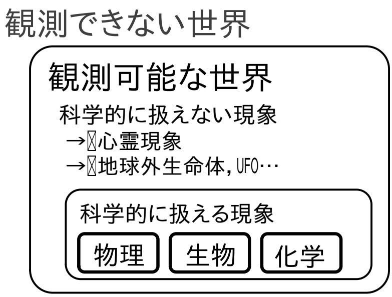


図 A.1　科学的に扱えることの範囲

♯ *memo* No.22: 基礎がない，考えが循環する

ものごとを考える前には，経験が必要である．考えは，その経験の不思議さを基に行われるからである．では，この経験はどう捉えら得るのだろうか．当然ながら，経験は眼や耳などの五感で捉えられる．そして，その認識は，脳に伝わって初めて経験を実感し，記憶される．だから，最も基礎的な学問分野は脳科学なのだろうか．いや，これは違う．脳は生物の一部であり，脳科学は生物学の一分野として位置するものである．生物はその組織の内部で，化学反応を起こして生命を維持している．従って，化学が，生物学よりも基礎的な位置にあるはずである．また，化学で扱われる化学反応は，突き詰めれば，原子や分子の結びつきであり，原子や分子の運動は物理学により説明される．そして，物理学は数理的推論をその拠り所としていて，数学と論理学が物理学の基礎となっている．数学と論理学は，元を正せば，私達が日常生活の中で使用している言語の曖昧な部分を除き，正しい思考とは何かを探る学問である．そして，その思考を行うには，前もってその思考に関する経験が必要である．経験は五感で感じ，脳によって認識され，···．

循環する．上記のどこかに誤りがあるのだろうか．

である．

また，他例を上げれば，数学や記号論理学なども，記号の羅列である．

「言葉」という語彙は，これらの例のような意味を含めて使われることも多い．これは，文脈によって理解できるだろう（著者はそうわかるように書くべきだ）．

B

論理

第 III 部

思うこと，思ったこと

C 素朴な疑問

C.1　最も基本的なこと

学問を学ぶにあたって，“ 最も基本的で信頼できること ” を基礎にして，その上で学習を進めることは，当たり前のことである．では，その “ 最も基本的で信頼できること ” とは何だろうか．

これは多分に哲学的な問題提起であるが，ここでは，今後，物理学の学習を進めていくにあたり，思想の最も基本的なよりどころを確認するためのもので，哲学に深く介入することはしない[▶1)]．

私は，最も基本的で信頼できることとして，「考えること」をあげたい．これは独我論てきな思想である．独我論とは，極端に言えば，この世界に存在を確信できるのは私の思考のみであり，私が今感じている温度や光などは，私の思考によって感じていると錯覚しているのであって，実在しているのではない，という考え方である．こう考えると，自分以外の人間とは，私の思考が作り出した幻想であり，実際にそこにいるわけではないということになる．そう，信じられるのは，今考えている私がここにあるということである．

▶1)　正直に書こう．哲学に介入することは，私のような低レベルの頭では，不可能である．開き直って，言うならば，そこまで深く考えてもしょうがない，思うところもある．

C.2　私の思想の根本

では，もう一段階突っ込んでみよう．「考える」ということとは，どうすることなのだろうか．「考える」という動詞の使い方は，おおよそ次の様だろう．今晩の献立を考える．人の気持ちを考える．将来の進路を考える…などなど．考えるという作業を行っているとき，「言葉」を道具として使う．また，時には「図」を使って考えることもあるだろうが，これは単に言葉で考えるよりも図を用いた方が考えやすいからであり，言葉では思考不可能であるということではない．思考はすべて言葉で表現できる (と信じる)．

私の，最も信頼できる唯一の基本的なことである，私の思考は言葉を用いて実行される．では，その次の疑問として，「言葉」とは何か，ということが生まれてこよう．

この章では，「考えるとは何か」について，私が考えること，というか，思っていることを記述する．

C.3　思考の道具

考えるという動作は，言葉を用いて行っていることを確認した．言葉を用いて考えているので，この言葉の使用限界が思考の限界であるということになる▶[2]．

単に「言葉」といっても，それは様々な形で存在する．英語やドイツ語，フランス語，イタリア語などたくさんだ．各国の人々は，自国のあるいは使い慣れた言葉で考えていることだろう．ここでは，どのような国の言葉も，その適用限界は変わらないと仮定して，話を進めて生きたい．多少，言葉の適用限界があったとしても，それは話にならないくらい，細かいことに過ぎないと信じる▶[3]．

もちろん，言葉で説明できないこともある．ある種の“ ひらめき ”とか，もろもろの感情とかを言葉で表現することは難しいことである．いや，不可能といってもよい．しかし，考えるということに関しては，言葉のもつ機能は十分である考える．私は，「どんな思考も言葉にできる」と信じて，このノートを作成する．

C.4　言語の曖昧さ

思考を言葉で記述できたとしよう．その次に問題となるのは，どれだけ正確に思考できるか，ということだろう．いや，視点を変えて言い換えよう．私たちが行う多く

▶[2] Wittgenstein は「論理哲学論考」という著作で，このことを詳しく論じている．後に，彼自身によってこの著作は間違いであるとされてしまうのであるが…このノートでは，そこまで深く入らない．だって，とっても難しいから．

▶[3] 実際，各国の人々が同じように「考えて」いるという現状からこのような仮定を設けてもよいと考えている．ただし，ここでは，「考える」ということに関して，文化や伝統，生活習慣などの影響は無視する．

の思考の中で，正しい思考とはどういうものなのかを，整理しなければいけない．わけのわからない思考や，意味を成さない思考などを排除したいのである．

C.5　日常言語

普段の生活で使っている言語は，曖昧な表現をすることが多い．曖昧表現というのは，人によって解釈が異なってしまう表現のことである．「美しい景色」だの，「大きな木」だのと言って，すべての人が同じ情景を浮かべることはまずない．これでは正しい思考が，十分ではない他の人間に伝わることはない．

しかし，このような例から，普段使っている言語は正しい思考に適していないと，判断してはいけない．事実，過去の多くの頭のいい学者さん達は，言語を用いて正しい思考をし，様々な学問を作り上げている．大切なのは，曖昧な表現を避けることである．ただ，言語には使い方によって，曖昧に表現できてしまうだけなのである．

では，言語の曖昧な表現を使わないようにするには，どうしたらよいだろうか．まず考えつくのは，日常言語から万人が認める最も基本的な部分を抽出し，それを元に思考をすればよいことである．言語の最も基本的な部分とは，「論理」である．次に，論理について簡単に触れよう．

D 論理学とか，数学とか

D.1　論理

私たちが普段の生活で使っている言語のうち，曖昧な使い方を避けて，万人に共通に伝わるようにしたい．そのためには，**論理**と言うものを考える必要がある．論理は，日常言語の中の一部にある．相手に自分の考えを伝えるとき，物事を筋道立てて伝えようとするだろう．自分の考えをできるだけ性格に相手に知ってほしいからである．さて，このとき私たちは，論理を使っているのである．論理は，何個かの公理▶[1] と推論規則▶[2] を基に構成される．少数の公理と推論規則から，主張したいことがすべて主張できる体系を作ることが学問の目的である．これを思考経済と言ったりする．公理と推論規則は，少なければ少ないほどよい．

D.2　論理学

この論理について，詳しく研究する学問に **論理学** がある．ある仮説を記述した文で，本当か嘘かをはっきりと区別できる文のことを，**命題** という．論理学はいくつか

▶1)　公理：万人が認める事実のこと．何の反論なしに認めなければならないことである．ある仮説を検証するとき，その仮説の根拠をどんどん探ることになる — A は B と C からなっていて，B は D から，C は E を基にしている・・・と言うように—．しかし，いつまでもこれが続くわけではない．いつかは，どうしようもなく“ 当たり前すぎて ”，説明ができないことにたどり着く．公理とは，その当たり前の事実を明示するものである．

▶2)　推論規則：ある仮定から，別の仮説を作り出せる規則のこと．公理と同様，有無を言わさず認めさせられるものである．

の必要最小限の公理と推論規則を組み合わせ，命題の証明を繰り返し発展させていくものである．命題と推論規則の組み合わせのことを，**公理系** と言う．この公理系には，次の 3 つの性質が備わっている必要がある．一つは **独立性** で，公理形の中のどの一つの公理を選んでも，他の公理からその公理を証明できないような性質である．二つ目は **完全性** と言われるもので，主張したい命題が，その公理系からすべて導けることである．三つ目は **無矛盾性** と言われるもので，公理系に互いに矛盾する公理を含んでいないことである．

論理学とは考察の足固めである公理系を設計し，体系を作り上げていく学問でもあるのだ．どれだけ詳しく説明できるかと言う疑問の最も根本的な部分の研究がここでなされる．

D.3　数学

数学とは，論理に複素数を組み合わせた学問であると言える．その研究の対象はおもに，複素数である．複素数の一部には，自然数が含まれている．残念なことに，自然数を含む公理系には，完全性，無矛盾性が常に保たれていると言う保障がないことが知られている．この事実は Gödel の **不完全性定理** とよばれている▶[3)]．

集合論により無限を扱えるようになってきたころ，この無限を起因として様々なパラドクスが発見されることとなった．「自分自身を要素として含まないすべての集合」がその最も有名なものである．ちょっと考えてみよう．

ω : 自分自身を要素として含まないすべての集合

と定義しよう．そして，次の問題，すなわち

問題 : ω自身は,ωに含まれるか否か

を考えてみよう．すぐに明らかな矛盾が見えてくるだろう．

ω は自分自身に含まれると仮定してみる．すると，ω の定義「自分自身を要素として含まない」という仮定に矛盾する．では，ω は自分自身に含まれないと仮定したらどうか．実はこれでも矛盾が生じる．なぜなら，「自分自身要素としてを含まない」という定義上，仮定で「自分自身は含まない」言っているので，自分自身を含むべきだと言う結論が出てしまう．肯定的に仮定しようが，否定的に仮定しようが，どちらにしても結果はその仮定と矛盾するのである．

Russell らは，この問題を解決しようと階という概念を導入し，命題に自分自身を含むことのないように制限を加えた．しかし，問題はこれだけではとどまらず，山のように残されていた．

Hilbert はこのような問題の山を，数学の危機であると自覚し，これを解決しようと計画した．Hilbert はこの数学の危機と言われる問題を 23 個の命題にまとめた．

▶3)　参考文献 : 廣瀬 健，横田 一正 [著],「ゲーデルの世界」，鳴海社，2004

そして彼は，この 23 の問題を証明し解決しようと呼びかけた．Gödel の不完全性定理はこの 23 の問題のうちの一つ[4] の否定的な回答であった．

だから，物理学に公理系を作成して，論理的に構成しようとしても，無駄である．しかし，物理学は自然の構成を探る学問だから，この点に関してはあまり気にすることはないと思う．

D.4 物理学

物理学は，自然がどのようになっているかを探る学問である．[5] 「なぜ（Why）」を問うのではなく，「どのように（How）」を問うのである．

なぜ自然がこのように[6] なっているのか，とか，なぜ宇宙があるのかとかを考えるのは哲学であって，物理学ではない．物理学ではこういう，"なぜ"を問うような疑問には答えられない[7]．

物理学とは，自然の性質を見つけるものである．この「性質」という言葉は物理学では **法則** と呼ばれている[8]．自然の法則を，実験や数式を通して見つけ出すことが物理学の目的なのだ．

自然はデタラメに変化しているのではなく，何か一定の法則に従っているということは，経験上理解できることと思う．例えば，特別に力を加えない限り，高いところから低いところへ，物体は落ちていく．落とした消しゴムは，拾わないと手元に戻ってこないのである．何でだろうか．この原因を探り，「法則」として記述するのである．

このことについては，物理学を学び始めた段階ではまだ実感がわかないかも知れない．学習していく過程で，だんだんとわかることだろう．

このノートでは物理学を学習することが目的である．自然はどのような法則に従って変化しているのだろうか．少しずつ考えることにしよう．

---

[4] 第 2 番目に掲げられていた問題だった．

[5] "なぜ"自然が私たちの感じているようになっているのかを探る学問ではない．

[6] 普段の生活で，私たちが感じている自然を思い浮かべてみて．

[7] ただ，"なぜ"という問を深めていく事は可能で，実際に，物理学の発展はその繰り返しである．その様子は．これからの学習で実際に感じることになる．

[8] **法則**：後で詳しく記述する．

E
他愛のない，思ったこと

E.1　生まれ変わる？

「生まれ変われるとしたら，次は何になっていたい？」と聞かれることがある．この質問には，何も考えずに答えることが，コミュニケーションを円滑にする為に良いのだが，やはり引っかかる部分がある．

引っかかることとは，「生まれ変わる」ということの定義である．生まれ変われるか否かということも当然疑問なのだが，それよりももっと疑問なことがある．生まれ変われることが可能かどうかという疑問には，おそらく答えることは不可能だろう．生まれ変わることが不可能であるとしたら，話はそれで終わりであるので，ここでは，生まれ変われることができるものとして，話を進めたいと思う．

疑問というのは，“ 今の記憶が忘れ去られていたとしても，生まれ変わったと言えるか ” というものである．以前までの記憶がない以上，当然，自分自身には生まれ変わったという意識は生まれない．第三者的な立場にたって，他人の生まれ変わる瞬間を見たとしよう．その場合，生まれ変わることが可能だと，納得することだろう．しかし，その他人には以前までの記憶がなく，やはり，その人にとって，生まれ変わったという意識はないはずである．たとえ，その瞬間を見ていたと教えてやったとしても，その人は生まれ変わったのだと明確に認識することは不可能である．

生まれ変わって以前までの記憶がない以上，たとえ本当に生まれ変わったのだとしても，自分自身にとっては，別人であると意識せざるを得ないと考えるのが，自然なのではなかろうか．実際，今の私には，こう考えることが一番妥当だと思っている．たとえ，生まれれ変わっていたとしても，記憶が残っていない以上，それはその人に

とって別ものなのだと考えたい．

まとめよう．求める答えは，生まれ変われるか否か，ということだったが，これには，答えることはできない．生まれ変わることができないのであれば，話はここで終了になる．もし，生まれ変われることがわかったとしても（他人が生まれ変わったことを見るなどして），自分自身では認識できないのであれば，それは生まれ変わったと考えるべきではない，と思う．

E.2　教科書に書かれていること

物理学や化学・生物学・天文学などの自然現象を説明すべく，それを文字として記述し，本という形で記録できる．世の中には多くの専門書，教科書，解説書がある．しかし，どれをとっても自然現象をすべて説明するものはない．つまり，本を読んだところで，世界を理解できるわけではない．本を読んでわかることは，先人たちが苦心して築きあげてきた壮大な理論体系ではあるものの，自然現象についてのほんの僅かなことでしかない．

物理学を学ぶということは，物理学の論文や専門書，教科書を読むということではなく，実際の自然現象に触れるということである．そして，なぜだろうと疑問に感じることであり，さらに，それを解き明かしたいと思うことである．

物理学を学びたいから物理学の教科書を読む，なんてことは，甚だ見当違いである．物理学は自然現象を説明する理論であり，つまり，実際に起こっている現象を説明しようとするものである．重要なのは，現象に触れること．そして，その現象について，その特徴をできるかぎり詳しくしらべること．そうしてやっと，現象の特徴はどのような法則に従っているかといった，理論的研究に入るのである．

物理学の本を読むということは，今知られている理論を把握するということであり，物理を追求するという行為ではない．あくまでも，先人の得た知恵を吸収するということである．しかし，それは，探求の第一歩ではない．物理学の本を読んで，物理をわかった気になっているとしたら，とても残念なことである．

E.3　心配レベル

心配という心情には，4 つの段階があると思う．それは，次の通りだ．

(1) 心配
(2) 不安
(3) 恐怖
(4) 絶望

下に行くほど（数字が大きくなるほど），心配レベルが上がる．

具体例を示してみよう．いつもそばにいる大切な人が，一週間の間，自分の前からはなれることになることを考えてみる．海外旅行にでも出かけることにでもしておこう．

その時，あなたは大切な人が，目の前から離れることで，心配になる（はずだ）．交通事故に遭わないだろうか，悪い人に騙されたりしないだろうか，等々．これが，心配という心情だ．この段階では，心配するだけで，何も行動を起こさないことだろう．

一週間たっても，1 日，2 日，大切な人が帰って来なかったとしよう．あなたは不安に陥ることだろう．何があったのか気になって仕方がない．こうなると，あなたは，どうにかして，連絡を取ろうと必死になるはずである．これが不安という心情．

どうしても連絡がつかなかったら，その不安は恐怖になる．事件に巻き込まれたとか，事故にあったのではないかとかと，考え始める．この時，大切な人が傷ついているかもしれないという，恐怖を覚える．

その恐怖が，最悪の形で現実出会ったとしよう．このとき，あなたは為す術がなく，絶望に至る．その後，自分のできる限りの行動を，世の中に対して必死に働きかけることになる．

E.4 "分からないこと" と "知らないこと"

突然，新しい環境に放り込まれたとしよう．このとき，大変幸福なことに，近くにその環境に詳しい人がいるとする．しかし，その人は，私に対して，その環境のことを説明することをあまりしない．そのひとは，「わからないことがあったら，何でも質問してください」と言う．新参者の私にとっては，その環境に詳しい人は，唯一頼りにできる大変ありがたい存在である．しかし，私がその人に質問するには，時間がかかる．自分が分からないことを把握しなければならないからである．わからないことを把握するには，知らないことをリストアップしていく必要がある．知らないことは，当然，質問できないからだ．例えば，「不確定性原理」という言葉を知らない人は，それについて詳しい人がそばに居たとしても，質問することはない．質問できないのである．

何が言いたいかというと，教わる側の人間にが取るべき行動は，その周囲の環境を，できる限り，見て聞いて把握することである．そして，教える側の人間が取るべき行動は，その新参者が知らないことを示してあげる事である．

わからないことが質問できないと言って，嘆く必要はない．そんな場合は，周囲の環境を執拗に見たり聞いたりして，できる限り早く把握する，という目標があるのだから，それを行えば良い．それができなければ，諦めて，別の場所に行くより他はない．

参考図書・教科書等

[1] 藤田 真作 [著], 『LaTeX 2$_\varepsilon$ コマンドブック』, ソフトバンクパブリッシング, 2003
[2] 吉永 徹美 [著], 『独習 LaTeX 2$_\varepsilon$』, 翔泳社, 2008
[3] 宮腰 忠 [著], 『高校数学 $+\alpha$ 基礎と理論の物語』, 共立出版, 2009
[4] 小平 邦彦 [著], 『解析入門』(軽装版), 岩波書店, 2006
[5] 戸田 盛和 [著], 理工系の数学入門コース 3『ベクトル解析』, 岩波書店, 2006
[6] 数研出版編集部 [編著], 『視覚でとらえる フォトサイエンス 物理図録』,
[7] 大貫 義郎, 吉田 春夫 [著], 岩波講座 現代の物理学第 1 巻 『力学』, 岩波書店, 1994
[8] 阿部 龍蔵 [著], 岩波基礎物理シリーズ① 『力学・解析力学』, 岩波書店, 2005
[9] 藤原 邦男 [著], 『物理学序論としての 力学』, 東京大学出版会, 2004
[10] 山田 直平, 桂井 誠 [著], 電気学会大学講座 『電気磁気学』 3 訂版, Ohm 社, 2004
[11] 永田 一清 [著], 基礎の物理 4『電磁気学』, 朝倉書店, 1998
[12] 砂川 重信 [著], 物理テキストシリーズ 4『電磁気学』, 岩波書店, 2003
[13] 川村 清 [著], 岩波基礎物理学シリーズ③『電磁気学』, 岩波書店,
[14] 太田 浩一 [著],『マクスウェル理論の基礎 相対論と電磁気学』, 東京大学出版会, 2009(第 4 版)
[15] 太田 浩一 [著], 『マクスウェルの渦 アインシュタインの時計 現代物理学の源流』, 東京大学出版会, 2005(初版)
[16] 太田 浩一 [著], 『電磁気学の基礎 I』, 東京大学出版会, 2008
[17] 太田 浩一 [著], 『電磁気学の基礎 II』, 東京大学出版会, 2008
[18] 野田 二次男, 菅野 正吉 [著], (理工学のための)『電磁気学入門』, 培風館
[19] 加藤 正昭 [著], 基礎物理学 3『電磁気学』, 東京大学出版会, 1987
[20] 長岡 洋介 [著], 物理入門コース 4『電磁気学 II －変動する電磁場－』, 岩波書店, 2006
[21] 藤村 哲夫 [著], 『電気発見物語』, 講談社ブルーバックス, 2002
[22] ウィリアム.H. クロッパー [著],『物理学天才外伝』, 講談社ブルーバックス, 2009
[23] アインシュタイン [著], 内山 龍雄 訳, 『相対性理論』, 岩波書店 (岩波文庫), 2005
[24] 砂川 重信 [著], 物理の考え方 5『相対性理論の考え方』, 岩波書店, 2006
[25] 中野 董夫 [著], 物理入門シリーズ 9『相対性理論』, 岩波書店, 2006
[26] 佐藤 勝彦 [著], 岩波基礎物理シリーズ 9『相対性理論』, 岩波書店, 2006
[27] 片山 泰久 [著], 『量子力学の世界』, 講談社ブルーバックス, 1998
[28] 山田 克哉 [著], 『量子力学のからくり –「幽霊波」の正体–』, 講談社ブルーバックス, 2003
[29] 小川岩雄 [著], 物理学 One Point — 29 『原子と原子核』, 共立出版, 2008
[30] 阿部 龍蔵 [著], 物理テキストシリーズ 6『量子力学入門』, 岩波書店, 2004

[31] 佐川 弘幸, 清水 克多郎 [著], 物理学スーパーラーニングシリーズ『量子力学』, シュプリンガーフェアラーク東京, 2005
[32] E. シュポルスキー [著], 玉木 英彦, 細谷 資明, 井田 幸次郎, 松平 升 訳, 『原子物理学 I』, 東京図書, 2000
[33] 原島 鮮 [著], 『初等量子力学』, 裳華房, 2007
[34] 小出 昭一郎 [著], 『量子力学 1』, 裳華房, 2006
[35] 関根 松夫 [著], 『量子電磁気学』, コロナ社, 1996
[36] A.C. ローズ–インネス, E.H. ロディリック [著], 島本 進, 安河内 昴 訳,『超電導入門』, 産業図書, 1999
[37] 広江 勝彦 [著], 『趣味で物理学』, 理工図書, 2007
[38] 矢野 健太郎 [著], 『アインシュタイン』, 講談社 (講談社学術文庫), 1991
[39] 中谷 宇吉郎 [著], 『科学の方法』, 岩波書店 (岩波新書), 1998
[40] 湯川 秀樹 [著], 『目に見えないもの』, 講談社 (講談社学術文庫), 2007
[41] S. ワインバーグ [著], 本間三郎 [訳],『新版 電子と原子核の発見』, 筑摩書房 (ちくま学芸文庫), 2009

図目次