

Часть 2. Аналитический метод

Лоскутова Мария М3135

ПР-1. Пределы и точные границы.

Часть 1. Аналитический метод

$$\textcircled{1} \quad x_n = \frac{n}{n+1} \cdot (2 + (-1)^n)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \cdot (2 + (-1)^n) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot$$

$$\cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (2 + (-1)^n)$$

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n(1 + \frac{1}{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1$$

2) Проверка сходимости:

$$\lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ (n=2k)}} (2 + (-1)^{2k}) = 2 + 1 = 3$$

$$\lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ (n=2k+1)}} (2 + (-1)^{2k+1}) = 2 - 1 = 1$$

1. Проверка сходимости:

$$a_{2k} = \frac{2k}{2k+1} \cdot 3$$

$$(\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = 1 \cdot 3 = 3)$$

$$a_{2k+1} = \frac{2k+1}{2k+2} \cdot 1$$

$$(\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = 1 \cdot 1 = 1)$$

т.к. \exists 2 подпоследовательности и $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} \neq \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1}$,то $\nexists \lim a_n \Rightarrow$ послед. x_n расходится.2. Мн-во частичных пределов: $\{3, 1\}$

$$3. \underline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3} ; \underline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1}$$

4. x_n последовательность (числ. н.т.)

② 1) $a_{2k} = \frac{2k}{2k+1} \cdot 3$

$\forall k: C \geq a_{2k}$

$$a_2 = \frac{2}{3} \cdot 3$$

$$a_4 = \frac{4}{5} \cdot 3$$

$$a_6 = \frac{6}{7} \cdot 3$$

$$a_{2k} = \underbrace{\frac{2k}{2k+1}}_{< 1} \cdot 3 < 1 \cdot 3 = 3 = \sup a_{2k}$$

$\forall k: a_{2k} \leq \sup a_{2k} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists k \forall \varepsilon > 0: a_{2k} > \sup a_{2k} - \varepsilon$

$$\frac{2k}{2k+1} \cdot 3 > 3 - \varepsilon$$

$$\frac{2k}{2k+1} > 1 - \frac{\varepsilon}{3} \quad | \cdot (2k+1)$$

$$2k > 2k+1 - \frac{\varepsilon}{3} \cdot 2k - \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\frac{\varepsilon}{3} (2k+1) > 1 \quad | : \frac{\varepsilon}{3} > 0$$

$$2k+1 > \frac{3}{\varepsilon}$$

$$2k > \frac{3}{\varepsilon} - 1$$

$$k > \frac{3}{2\varepsilon} - \frac{1}{2}$$

$$k \geq \left[\frac{3}{2\varepsilon} - \frac{1}{2} \right] + 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sup a_{2k} = 3$

$$a_2 = \frac{2}{3} \cdot 3$$

$$a_4 = \frac{4}{5} \cdot 3$$

$$a_6 = \frac{6}{7} \cdot 3$$

$$\inf a_{2k} = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2$$

~~monoton~~

$$\forall k : a_{2k} \geq \inf a_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists k \quad \forall \varepsilon > 0 : a_{2k} < \inf a_k + \varepsilon$$

$$a_2 = \frac{2}{3} \cdot 3 < 2 + \varepsilon$$

$$\frac{2}{3} \cdot 3 \leq a_{2k} \quad \text{für } \forall k.$$

$$\frac{2k}{2k+1} \cdot 3 - \frac{2}{3} \cdot 3 \leq 2 + \varepsilon$$

$$\frac{6k}{2k+1} - 2 \leq 2 + \varepsilon$$

$$\frac{-2 + 2k}{2k+1} \geq 0 \Rightarrow \inf a_{2k} = 2$$

$$2) \quad a_{2k+1} = \frac{2k+1}{2k+2} - 1 = \frac{2k-1}{2k} \cdot 1$$

$$a_1 = \frac{1}{2} < 1$$

$$a_3 = \frac{3}{4} < 1$$

$$a_5 = \frac{5}{6} < 1$$

$$a_7 = \frac{7}{8} < 1 = \sup a_{2k+1}$$

$$\forall k : a_{2k-1} \leq 1$$

$$a_{2k-1} = \frac{2k-1}{2k} - 1 \leq 0$$

$$\frac{-1}{2k} \leq 0 \Rightarrow \sup a_{2k+1} = 1$$

$$\forall k: a_{2k+1} \leq \sup a_{2k+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists k \quad \forall \varepsilon > 0: a_{2k} > \sup a_{2k+1}$$

$$1 - \varepsilon < a_{2k-1}$$

$$\frac{2k-1}{2k} > 1 - \varepsilon$$

$$\frac{2k-1}{2k} - 1 + \varepsilon > 0$$

$$\frac{2k-1-2k+\varepsilon \cdot 2k}{2k} > 0$$

$$\frac{2k\varepsilon - 1}{2k} > 0$$

$$2k\varepsilon > 1$$

$$k > \frac{1}{2\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \sup a_{2k+1} = 1$$

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{3}{4}$$

$$a_5 = \frac{5}{6}$$

$$\inf a_{2k-1} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \leq a_{2k-1}, \quad \forall k$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{2k-1}{2k}$$

$$k \leq 2k-1$$

$$k-1 \geq 0$$

$$\underline{k=1}$$

$$\forall k: a_{2k+1} \geq \inf a_{2k+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists k \quad \forall \varepsilon > 0: a_{2k+1} < \inf a_{2k+1} + \varepsilon$$

$$\frac{1}{2} + \varepsilon \geq a_{2k-1}$$

$$k=1$$

$$\begin{aligned}
 4) \text{ m.o. } \sup x_n &= \max(1, 3) = 3 \\
 \inf x_n &= \min\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2} \\
 \lim x_n &= 3 \\
 \lim x_n &= 1
 \end{aligned}$$

③ Наибольший элемент не существует, если бы он был, то верхняя грань была бы достигнута.

$$\text{Наименьший элемент} = \frac{1}{2}.$$

$$④ \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \forall n > N : |a_n - A| < \varepsilon$$

$$a_{2k} = \frac{2k}{2k+1} \cdot 3$$

$$|a_{2k} - 3| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{2k \cdot 3}{2k+1} - 3 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{6k - 3(2k+1)}{2k+1} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{6k - 6k - 3}{2k+1} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{-3}{2k+1} \right| < \varepsilon$$

$$\frac{3}{2k+1} < \varepsilon$$

$$\frac{2k+1}{3} > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\frac{1}{2} + \varepsilon \geq a$$

$$\frac{1}{2} + \varepsilon \geq \frac{1}{2} - \text{верно} \Rightarrow \inf a_{2k+1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{m.o. } \sup a_{2k} = 3$$

$$\inf a_{2k} = 2$$

$$\sup a_{2k+1} = 1$$

$$\sup a_{2k+1} = \frac{1}{2}$$

3) Моноотонность:

$$a_{2k} \leq a_{2k+2}$$

$$\frac{2k}{2k+1} \leq \frac{2k+2}{2k+3}$$

$$\frac{2k}{2k+1} - \frac{2k+2}{2k+3} \leq 0$$

$$\frac{2k(2k+3) - (2k+1)(2k+2)}{(2k+1)(2k+3)} \leq 0$$

$$\frac{-2}{(2k+1)(2k+3)} \leq 0 \Rightarrow$$

(по м. Мейерштрасса)

$\Rightarrow a_{2k}$ — ограничен. и монотонно возрастаем, если предел: $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = \sup a_{2k} = 3$

номера. a_{2k+1} абсолютно ограничен. и монотонно возрастает, если предел:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = \sup a_{2k+1} = 1 \quad (\text{по м. Мейерштрасса})$$

$$a_{2k+1} = \frac{2k+1}{2k+2}$$

$$a_{2k-1} = \frac{2k-1}{2k}$$

$$a_{2k+1} - a_{2k-1} = \frac{2k+1}{2k+2} - \frac{2k-1}{2k} =$$

$$= \frac{2k^2 + k - 2k^2 + k - 2k + 1}{2k(k+1)} = \frac{1}{2k(k+1)} > 0$$

$$\frac{2k}{3} + \frac{1}{3} > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\frac{2k}{3} > \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{3}$$

$$k > \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{3} \right)$$

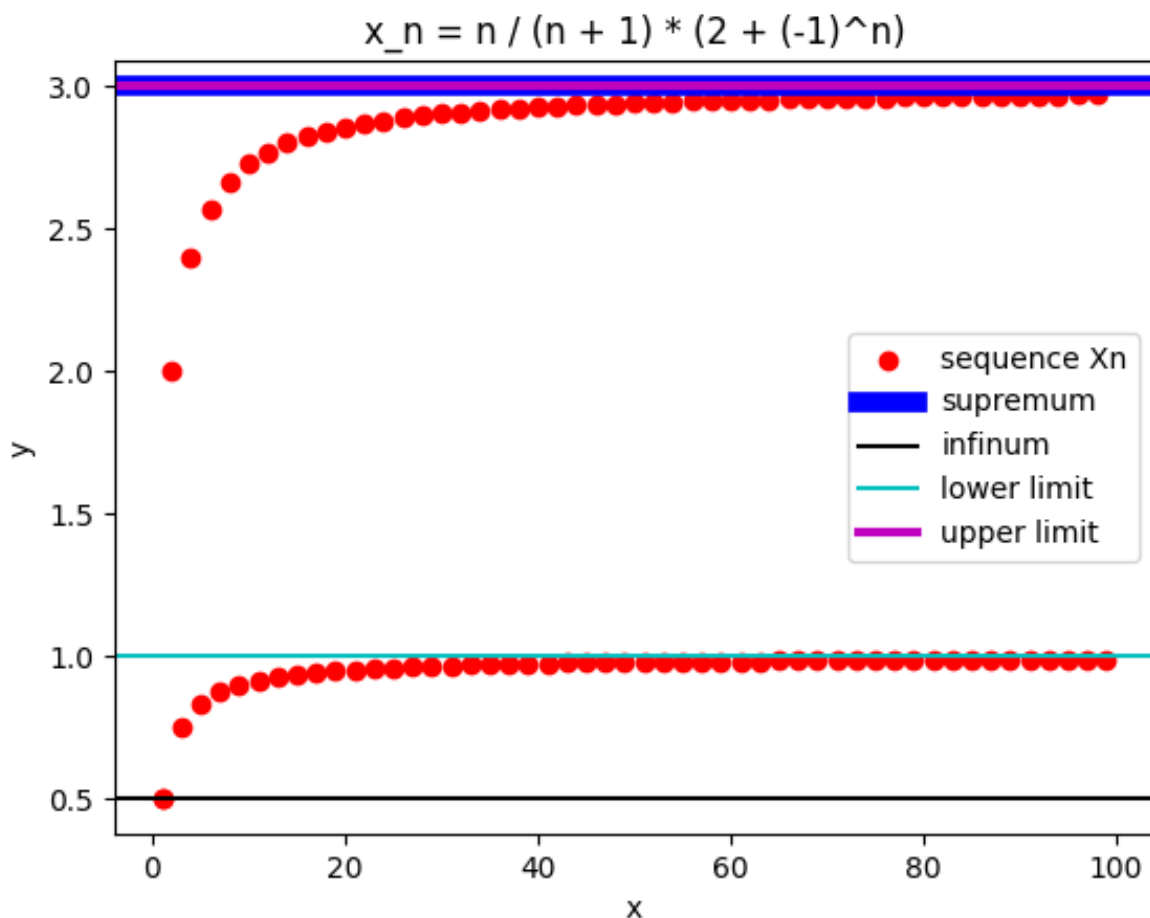
н.с. этого k где $n_k > k_0$ выполняется
 $(2k - 3)/\varepsilon < \varepsilon$, т.е. н.с. этого номера,
 члены выбранной подпослед. попадают
 в ε -окрестность нуля.

Часть 2. Численный метод

В предложенной программе существует возможность выбора задания, т.к. при реализации всех пунктов задания на одном графике, график становится трудным для просмотра, а также реализован ввод значения ϵ с клавиатуры.

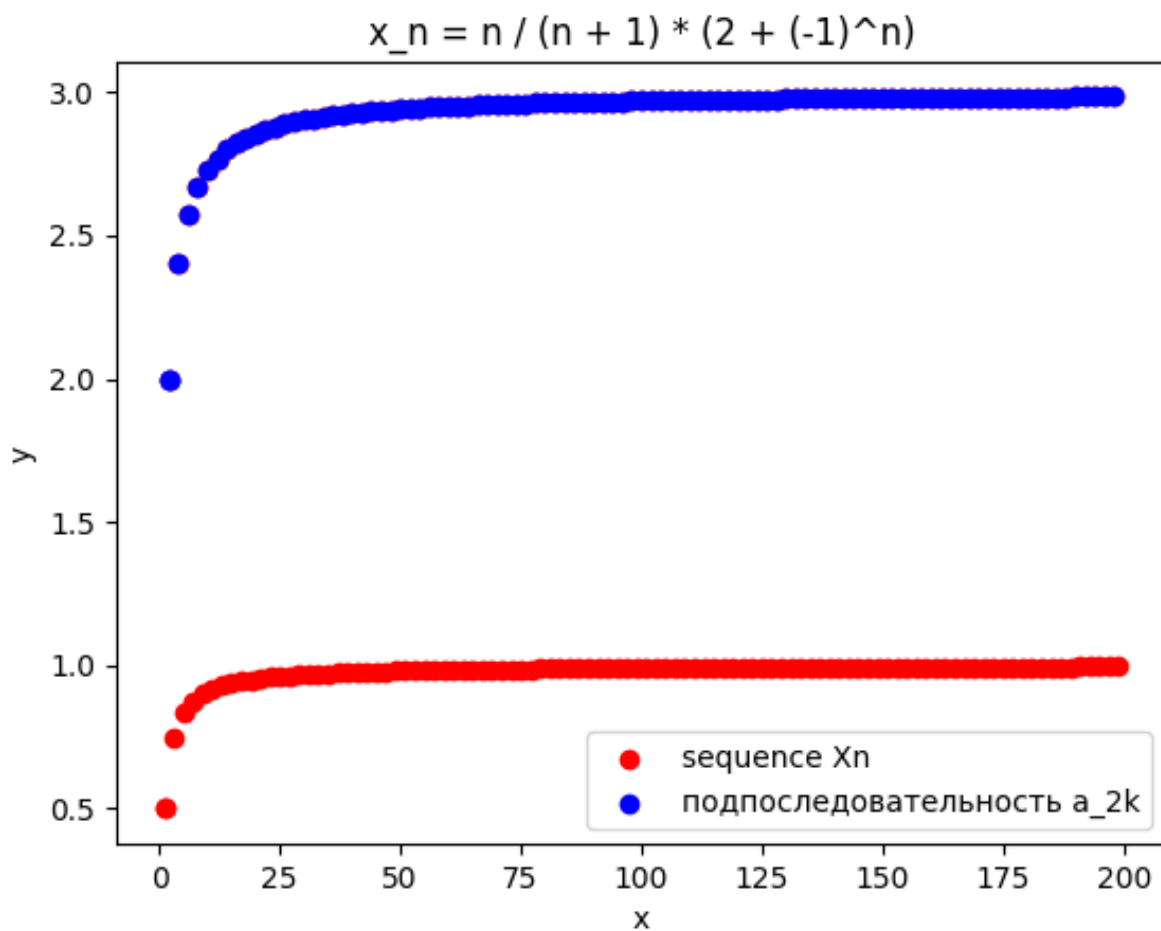
Скачивание библиотеки: `pip install matplotlib`

- 1) Построение графика с помощью библиотеки `matplotlib`. Из этой библиотеки используем: `pyplot` - специальную коллекцию функций в стиле команд. Отмечаем необходимые данные с помощью команды: `plt.axhline`. Строки кода: 14 – 47.



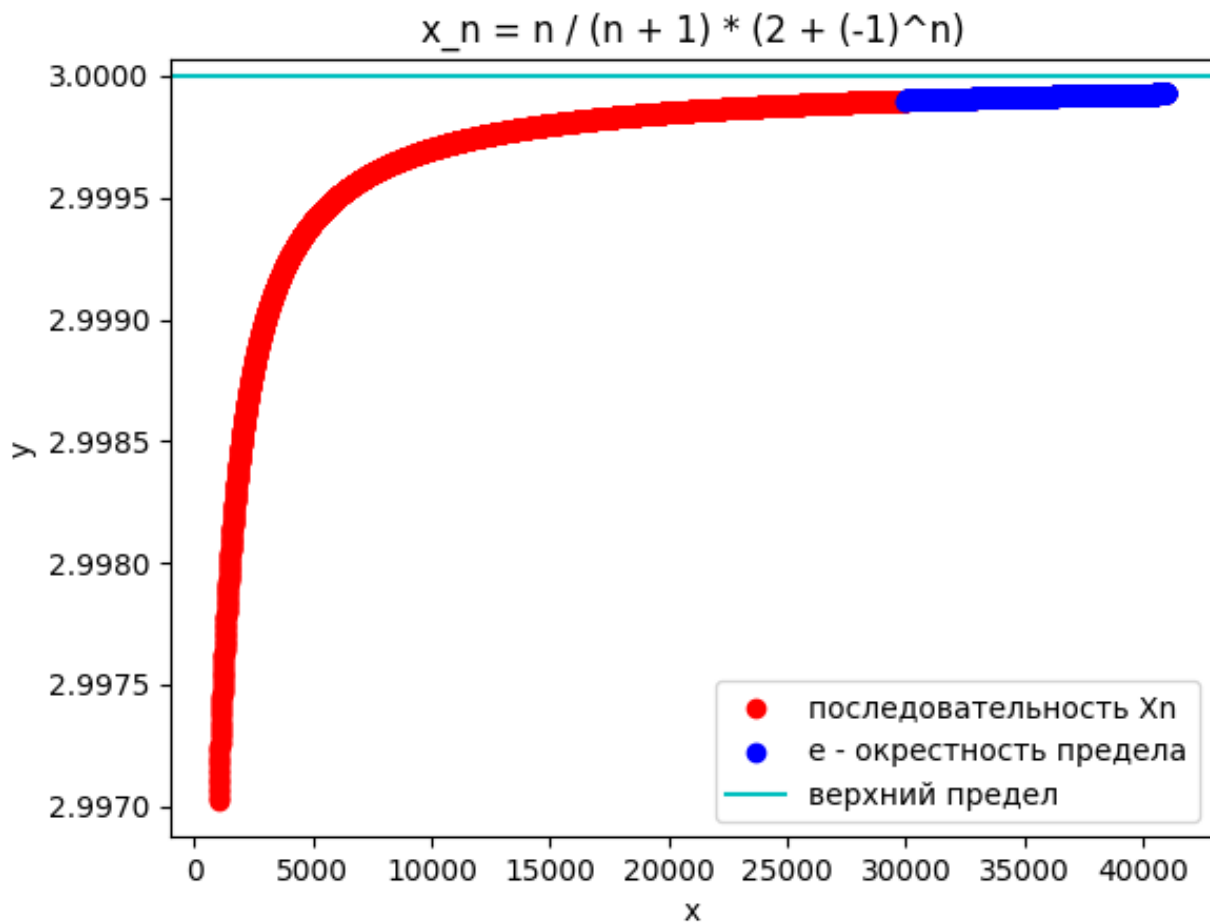
- 2) Построение графика с помощью библиотеки `matplotlib`. Строки кода: 50 – 102.

На данном графике выделена сходящаяся подпоследовательность a_{2k} .



3) Построение графика с помощью библиотеки matplotlib. Выделение ϵ – окрестности предела другим цветом. Строки кода: 105 – 161.

На графике ниже: $\epsilon = 0.0001$.



4) Построение графика с помощью библиотеки `matplotlib`. Из аналитического метода мы поняли, что не достигается супремум. Поэтому осуществляем проверку точной грани для него. Строки кода: 164 – 223.

На графике ниже: $\text{eps} = 0.1$. Для этого значения программа отметила точку и вывела ее значение: $x = 22$ (m), $y = 2.8695652173913047$ (x_m).

$$x_n = n / (n + 1) * (2 + (-1)^n)$$

