1 Матанализ от Виноградова

1.1

Норма в пространстве $L_p(E, \mu)$ равна:

$$||f||_{L_p(E,\mu)} = \left(\int_E |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

Положительная однородность очевидна, неравенству треугольника соответствует неравенство Минковского, а из $||f|| = 0$ следует $f \sim 0$, то есть $f = 0$ как элемент $L_p(E, \mu)$.

Пусть $(X, \mathbb{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $E \in \mathbb{A}$. Полагают:

$$L_\infty(E,\mu) = \left\{\begin{matrix} f \text{ п.в. } E \to \overline{\mathbb{R}} \text{ (или } \overline{\mathbb{C}}), \\ f \text{ измерима}, \\ \text{ess } \sup\limits_{x \in E} |f(x)| < +\infty \end{matrix}\right\}$$

Эквивалентные функции отождествляются. Легко видеть, что $L_\infty(E, \mu)$ — векторное пространство. Норма в $L_\infty(E, \mu)$ задаётся равенством:

$$||f||_{L_\infty(E,\mu)} = \text{ess } \sup_{x \in E} |f(x)|$$

1.2

Непустое семейство $\mathbb{A}$ подмножеств X называется **σ-алгеброй**, если выполняются следующие два условия.

1. Если $A \in \mathbb{A}$, то $A^c \in \mathbb{A}$.
2. Если $A_k \in \mathbb{A}$ при всех $k \in \mathbb{N}$, то $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathbb{A}$.

Свойства 1 и 2 называются аксиомами σ-алгебры.

2 Большое задание от доктора Тренча

2.1

Let $y = ue^{3x}$. Then

$$\begin{aligned} y'' - 3y' + 2y &= e^{3x}\left[(u'' + 6u' + 9u) - 3(u' + 3u) + 2u\right] \\ &= e^{3x}(u'' + 3u' + 2u) = e^{3x}\left[21\cos x - (11 + 10x)\sin x\right] \end{aligned}$$

if $u'' + 3u' + 2u = 21\cos x - (11 + 10x)\sin x$. Now let

$$\begin{aligned} u_p &= (A_0 + A_1x)\cos x + (B_0 + B_1x)\sin x; \text{ then} \\ u_p' &= (A_1 + B_0 + B_1x)\cos x + (B_1 - A_0 - A_1x)\sin x \\ u_p'' &= (2B_1 - A_0 - A_1x)\cos x - (2A_1 + B_0 + B_1x)\sin x, \text{ so} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u'' + 3u' + 2u &= [A_0 + 3A_1 + 3B_0 + 2B_1 + (A_1 + 3B_1)x]\cos x \\ &\quad + [B_0 + 3B_1 - 3A_0 - 2A_1 + (B_1 - 3A_1)x]\sin x \\ &= 21\cos x - (11 + 10x)\sin x \text{ if} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcr} A_1 + 3B_1 & = & 0 \\ -3A_1 + \ B_1 & = & -10 \end{array} \text{ and } \begin{array}{rcr} A_0 + 3B_0 + 3A_1 + 2B_1 & = & 21 \\ -3A_0 + \ B_0 - 2A_1 + 3B_1 & = & -11 \end{array}.$$

From the first two equations $A_1 = 3$, $B_1 = -1$. Substituting these in last two equations yields and solving for A_0 and B_0 yields $A_0 = 2$, $B_0 = 4$. Therefore, $u_p = (2 + 3x)\cos x + (4 - x)\sin x$ and $y_p = e^{3x}[(2 + 3x)\cos x + (4 - x)\sin x]$. The characteristic polynomial of the complementary equation is $p(r) = r^2 - 3r + 2 = (r - 1)(r - 2)$, so $\{e^x, e^{2x}\}$ is a fundamental set of solutions of the complementary equation, and (A) $y = e^{3x}[(2 + 3x)\cos x + (4 - x)\sin x] + c_1 e^x + c_2 e^{2x}$ is the general solution of the nonhomogeneous equation. Differentiating (A) yields

$$\begin{aligned} y' &= 3e^{3x}[(2 + 3x)\cos x + (4 - x)\sin x] \\ &\quad + e^{3x}[(7 - x)\cos x - (3 + 3x)\sin x] + c_1 e^x + 2c_2 e^{2x}. \end{aligned}$$

Therefore,$y(0) = 0,\ y'(0) = 6 \Rightarrow 0 = 2 + c_1 + c_2,\ 6 = 6 + 7 + c_1 + 2c_2$, so $c_1 + c_2 = -2,\ c_1 + 2c_2 = -7$. Therefore, $c_1 = 3$, $c_2 = -5$, and $y = e^{3x}[(2 + 3x)\cos x + (4 - x)\sin x] + 3e^x - 5e^{2x}$.

3 Маленькие задания от доктора Тренча

3.1

$\sinh at \leftrightarrow \dfrac{a}{s^2 - a^2}$ and $\cosh at \leftrightarrow \dfrac{1}{s^2 - a^2}$, so $H(s) = \dfrac{as}{(s^2 - a^2)^2}$.

3.2

$t \sin \omega t \leftrightarrow \dfrac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$ and $t \cos \omega t \leftrightarrow \dfrac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$, so $H(s) = \dfrac{2\omega s(s^2 - \omega^2)}{(s^2 + \omega^2)^4}$.

3.3

$e^t \leftrightarrow \dfrac{1}{s - 1}$ and $\sin at \leftrightarrow \dfrac{a}{s^2 + a^2}$, so $H(s) = \dfrac{a}{(s - 1)(s^2 + a^2)}$.