M3135 HW1 Лоскутова Мария

September 22, 2022

1

$$1)\ f_1(n) = \mathcal{O}(g_1(n)) \Rightarrow f_1(n) \leq c_1 \cdot g_1(n)$$

$$2)\ f_2(n) = \mathcal{O}(g_2(n)) \Rightarrow f_2(n) \leq c_2 \cdot g_2(n)$$

$$3)\ c_3 = max(c_1, c_2)$$

$f_1(n) + f_2(n) \leq c_3 \cdot g_1(n) + c_3 \cdot g_2(n) \Rightarrow f_1(n) + f_2(n) \leq c_3 \cdot (g_1(n) + g_2(n)) = \mathcal{O}(g_1(n) + g_2(n))$ - Q.E.D.

2

$$max(f(n), g(n)) = \Theta(f(n) + g(n))$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} max(f(n), g(n)) = \mathcal{O}(f(n) + g(n)) \\ max(f(n), g(n)) = \Omega(f(n) + g(n)) \end{cases}$$

1) 1. Рассмотрим первую часть системы:

$$max(f(n), g(n)) = \mathcal{O}(f(n) + g(n)) \Rightarrow max(f(n), g(n)) \leq c1 \cdot (f(n) + g(n))$$

2. пусть

$$N_0 = 1, c_1 = 1$$

тогда,

$$max(f(n), g(n)) \leq f(n) + g(n)$$

Докажем это неравенство. Рассмотрим произвольное

$$N' > n_0$$

Педположим, что

$$f(N') \geq g(N')$$

тогда,

$$max(f(N'), g(N')) = f(N') \Rightarrow f(N') \leq f(N') + g(N') \text{ - верно,}$$

иначе аналогично.

2) 1. Рассмотрим вторую часть системы:

$$max(f(n), g(n)) = \Omega(f(n) + g(n)) \Rightarrow max(f(n), g(n)) \geq c_2 \cdot (f(n) + g(n))$$

2. пусть

$$N_0 = 1, c_2 = 0.5$$

тогда,

$$max(f(n), g(n)) \geq 0.5 \cdot f(n) + 0.5 \cdot g(n)$$

Докажем это неравенство. Рассмотрим произвольное

$$N' > n_0$$

Педположим, что

$$f(N') \geq g(N')$$

тогда,

$$max(f(N'), g(N')) = f(N') \Rightarrow f(N') \geq 0.5 \cdot f(N') + 0.5 \cdot g(N') \text{ - верно,}$$

иначе аналогично.

3

$$\sum_{i=1}^{n+5} 2^i = \mathcal{O}(2^n)$$

1) Используем формулу суммы геометрической прогрессии:

$$S = \frac{b_1 \cdot (q^{n+1})}{q - 1}$$

Таким образом,

$$S = \frac{2 \cdot (2^{n+6})}{1} = 2^{n+7} - 2 = 128 \cdot 2^n - 2 = \mathcal{O}(2^n) \text{ - Q.E.D.}$$

4

$$\frac{n^3}{6} - 7n^2 = \Omega(n^3)$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists\, c > 0,\ \exists N > 0,\ \forall n > N\ :\ \frac{n^3}{6} - 7n^2 \geq c \cdot n^3$$

Пусть:

$$c = \frac{1}{12},\ N = 84$$

Тогда,

$$\frac{n^3}{6} - 7n^2 \geq \frac{1}{12} \cdot n^3 \ \Rightarrow\ n^3 - 84n^2 \geq 0 \ \Rightarrow\ n - 84 \geq 0 \ \Rightarrow\ n \geq 84 \text{ - верно.}$$

5

$1 \longrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^2 \longrightarrow n^{\frac{1}{\log n}} \longrightarrow \log\log n \longrightarrow \sqrt{\log n} \longrightarrow \log^2 n \longrightarrow (\sqrt{2})^{\log n} \longrightarrow 2^{\log n} \longrightarrow n \longrightarrow n\log n \longrightarrow \log n! \longrightarrow n^2 \longrightarrow 4^{\log n} \longrightarrow n^3 \longrightarrow (\log n)! \longrightarrow (\log n)^{\log n} \longrightarrow n^{\log\log n} \longrightarrow n \cdot 2^n \longrightarrow e^n \longrightarrow n! \longrightarrow (n+1)! \longrightarrow 2^{2^n} \longrightarrow 2^{2^{n+1}}$