Лоскутова Мария М3135

## Часть 1. Аналитический метод

/Лоскутова Мария М3135/

Вариант – 123.

Лабораторная работа №2.

Тема: формула Тейлора.

Часть 1. Аналитический метод

№1 $$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!}+\frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!}+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}+\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!},\text{ где } \xi\in(x,x_0)$$

$$f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$$

$$f(0)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+0\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'(x_0)=\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\right)'=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(0+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

$$f''(x_0)=\left(\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right)'=-\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'''(x_0)=\left(-\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right)'=-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$$

заметим значение производных: $\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\ldots$

т.о. формула производной $n$-го порядка:

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}, & n=4k\\ \frac{1}{2}, & n=4k+1\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}, & n=4k+2\\ -\frac{1}{2}, & n=4k+3\end{cases}$$

№2

Многочлен Тейлора по степеням $x$:

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}x - \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x^2}{2!} - \frac{\frac{1}{2}x^3}{3!} + \ldots +$$
$$+ \frac{\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right)^{(n+1)} x^{(n+1)}}{(n+1)!}$$

№3 $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \sin x \cdot \cos\frac{\pi}{3} + \cos x \cdot \sin\frac{\pi}{3} =$
$$= \frac{1}{2}\cdot\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos x \;=$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{(\sin(\varepsilon_1))^{(n+1)}\cdot x^{(n+1)}}{(n+1)!},$$
где $\varepsilon_1 \in (0;x)$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{2k!} +$$
$$+ \frac{(\cos(\varepsilon_2))^{(n+1)}\cdot x^{(n+1)}}{(n+1)!},$$ где $\varepsilon_2 \in (0,x)$

т.о. $= \frac{1}{2}\cdot\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + (-1)^k\cdot\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) +$
$$+ \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^k\cdot x^{2k}}{2k!}\right) +$$
$$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{(\sin(\varepsilon_1))^{(n+1)}\cdot x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{(\cos(\varepsilon_2))^{(n+1)}\cdot x^{n+1}}{(n+1)!} =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}x - \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x^2}{2!} - \frac{\frac{1}{2}x^3}{3!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)\,(x^n)}{n!} +$$
$$+ \frac{1}{2}\,\frac{(\sin(\varepsilon_1))^{(n+1)}\cdot x^{(n+1)}}{(n+1)!} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{(\cos(\varepsilon_2))^{(n+1)}\cdot x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Пусть $\xi_1 = \xi_2$, тогда:

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}x - \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x^2}{2!} - \frac{\frac{1}{2}x^3}{3!} + \ldots +$$
$$+ \frac{\left(\left(\frac{1}{2}\sin(\xi) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\xi)\right)^{(n+1)}\cdot\right) x^{n+1}}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}x - \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x^2}{2!} - \frac{\frac{1}{2}x^3}{3!} + \ldots +$$
$$+ \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\xi\right)^{(n+1)} \cdot x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Таким образом, мы получили такую же формулу, как и в п. 2.

№4 Формула остаточного члена: $\frac{\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}+\xi\right)\right)^{(n+1)} \cdot x^{n+1}}{(n+1)!}$

1) $\Delta 1 = 10^{-3}$ ; $a = 0{,}2$ ; $x = a$

$$\frac{\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}+\xi\right)\right)^{(n+1)} \cdot a^{n+1}}{(n+1)!} \leq \Delta 1, \quad \xi \in (0; 0{,}2)$$

$$\frac{\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}+\xi\right)\right)^{(n+1)}}{(n+1)!} \cdot (0{,}2)^{n+1} \leq \Delta 1, \quad \xi \in (0; 0{,}2)$$

$\exists\ \xi = 0{,}2 \Rightarrow \frac{\pi}{3} + \xi = \frac{\pi}{3} + 0{,}2 \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3}+0{,}2\right) \approx 0{,}948$

$$\frac{0{,}948}{(n+1)!}(0{,}2)^{n+1} < 0{,}001$$

$n=1$: $\frac{0{,}948 \cdot 0{,}2^2}{2!} \approx 0{,}01896 > 0{,}001$

$n=2: \quad \dfrac{0{,}948 \cdot 0{,}2^3}{3!} \approx 0{,}0012 > 0{,}001$

$n=3: \quad \dfrac{0{,}948 \cdot 0{,}2^4}{4!} \approx 6{,}32 \cdot 10^{-5} < 0{,}001$

$\Rightarrow \underline{n_1 = 3.}$

2) $\Delta_2 = 10^{-6}$ ; $a = 0{,}2$ ; $x = a$

$\dfrac{0{,}948 \cdot (0{,}2)^{n+1}}{(n+1)!} < 0{,}000001$

$n=5: \quad \dfrac{0{,}948 \cdot 0{,}2^6}{6!} \approx 1{,}06 \cdot 10^{-5} > 10^{-6}$

$n=6: \quad \dfrac{0{,}948 \cdot 0{,}2^7}{7!} \approx 1{,}8 \cdot 10^{-6} > 10^{-6}$

$n=7: \quad \dfrac{0{,}948 \cdot 0{,}2^8}{8!} = 6{,}3 \cdot 10^{-11} < 10^{-6}$

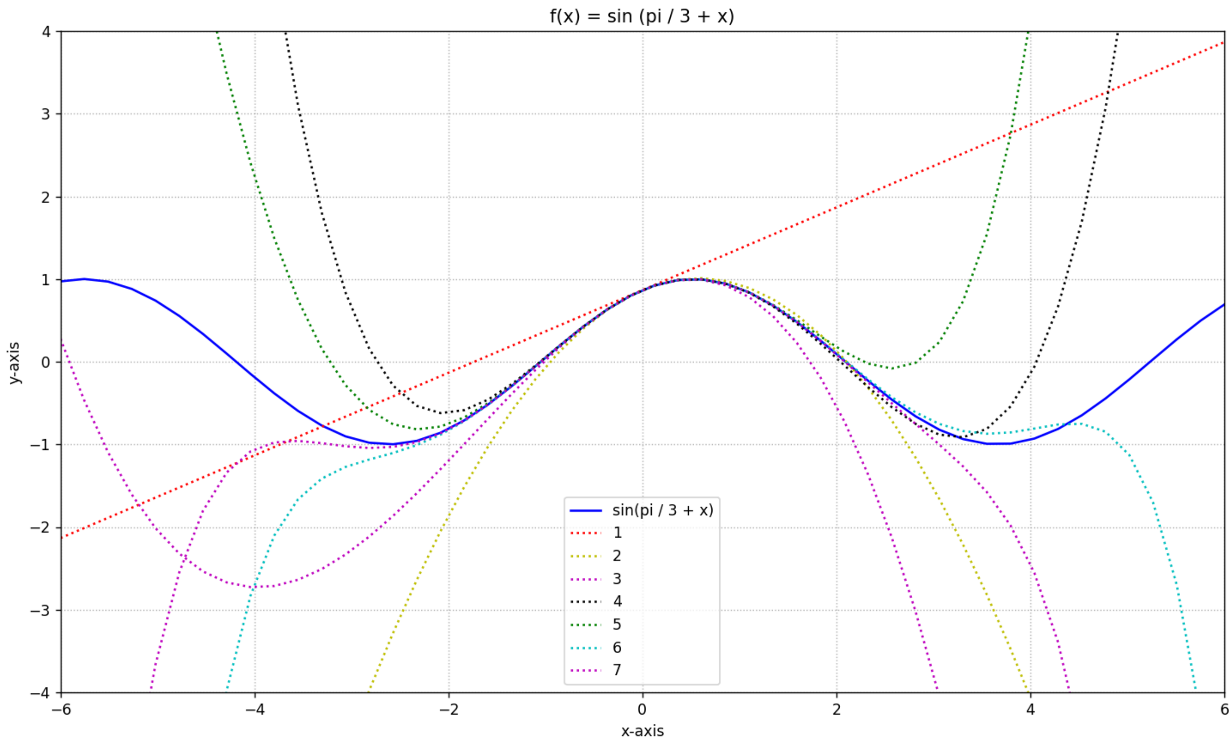
$\Rightarrow \underline{n_2 = 7.}$

## Часть 2. Численный метод

В предложенной программе существует возможность выбора, чтобы упростить просмотр каждого пункта задания.

Скачивание библиотеки: pip install matplotlib

1) Построение графика с помощью библиотеки matplotlib. Из этой библиотеки используем: pyplot - специальную коллекцию функций в стиле команд. Строим необходимые графики самой функции и многочленов Тейлора. Строки кода: 22 - 88.




2) Вычисляем приближенные значения f(a), заменяя функцию f многочленами Тейлора порядков $n_1$ и $n_2$. Строки кода: 90 - 118.

```
Приближенное значение f(a), полученное при замене функции f многочленом Тейлора
порядка n1 = 0.9490382290420831

Приближенное значение f(a), полученное при замене функции f многочленом Тейлора
порядка n2 = 0.9480983731125301
```

3) Вычисляем точное и приближенные значения. Сравниваем их и убеждаемся, что требуемая точность достигнута. Строки кода: 121 - 156.

Точное значение 0.9480972192081248

Приближенное значение f(a), полученное при замене функции f многочленом Тейлора порядка n1 = 0.9490382290420831

Приближенное значение f(a), полученное при замене функции f многочленом Тейлора порядка n2 = 0.9480983731125301

Разность точного значения и приближенного значения, полученного при замене функции f многочленом Тейлора порядка n1 = 0.000941009833958284

Разность точного значения и приближенного значения, полученного при замене функции f многочленом Тейлора порядка n2 = 1.1539044052488734e-06

Из полученных значений убеждаемся, что требуемая точность достигнута.