Лоскутова Мария M3135

Часть 2. Аналитический метод

Лоскутова Мария М3135

ЛР-1. Пределы и точные границы.

Часть 1. Аналитический метод

① $x_n = \frac{n}{n+1}\cdot(2+(-1)^n)$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\cdot(2+(-1)^n)\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot$

$\cdot\lim\limits_{n\to\infty}(2+(-1)^n)$

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(1+\frac{1}{n})} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$

2) Подпоследовательности:

$\lim\limits_{k\to\infty}(2+(-1)^{2k}) = 2+1=3$

$(n=2k)$

$\lim\limits_{k\to\infty}(2+(-1)^{2k+1}) = 2-1=1$

$(n=2k+1)$

1. Сходящиеся подпоследовательности:

$a_{2k} = \frac{2k}{2k+1}\cdot 3$ $\quad\left(\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = 1\cdot 3 = 3\right)$

$a_{2k+1} = \frac{2k+1}{2k+2}\cdot 1$ $\quad\left(\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} = 1\cdot 1 = 1\right)$

т.к. $\exists$ 2 подпосл. и $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} \neq \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1}$,

то $\nexists \lim a_n$. $\Rightarrow$ посл. x_n <u>расходится</u>.

2. Мн-во частичных пределов: $\{3, 1\}$

3. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = 3$; $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = 1$

4. x_n расходится (см. п. 1)

② 1) $a_{2k} = \frac{2k}{2k+1} \cdot 3$

$\forall k : C \geq a_{2k}$

$a_2 = \frac{2}{3} \cdot 3$

$a_4 = \frac{4}{5} \cdot 3$

$a_6 = \frac{6}{7} \cdot 3$

$a_{2k} = \underbrace{\frac{2k}{2k+1}}_{<1} \cdot 3 < 1 \cdot 3 = 3 = \sup a_{2k}$

$\forall k : a_{2k} \leq \sup a_{2k} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists k \ \forall \varepsilon > 0 : a_{2k} > \sup a_{2k} - \varepsilon$

$\frac{2k}{2k+1} \cdot 3 > 3 - \varepsilon$

$\frac{2k}{2k+1} > 1 - \frac{\varepsilon}{3} \quad \Big| \cdot (2k+1)$

$\cancel{2k} > \cancel{2k} + 1 - \frac{\varepsilon}{3} \cdot 2k - \frac{\varepsilon}{3}$

$\frac{\varepsilon}{3}(2k+1) > 1 \quad \Big| : \frac{\varepsilon}{3} > 0$

$2k+1 > \frac{3}{\varepsilon}$

$2k > \frac{3}{\varepsilon} - 1$

$k > \frac{3}{2\varepsilon} - \frac{1}{2}$

$\underline{k \geq \left[\frac{3}{2\varepsilon} - \frac{1}{2}\right] + 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sup a_{2k} = 3$

$a_2 = \frac{2}{3} \cdot 3$

$a_4 = \frac{4}{5} \cdot 3$

$a_6 = \frac{6}{7} \cdot 3$

$\inf a_{2k} = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2$

$\forall k : a_{2k} \geq \inf a_k \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists k \quad \forall \varepsilon > 0 : a_{2k} < \inf a_k + \varepsilon$

$$a_2 = \frac{2}{3} \cdot 3 < 2 + \varepsilon$$

$\frac{2}{3} \cdot 3 \leq a_{2k}$ для $\forall k$.

$$\frac{2k}{2k+1} \cdot 3 - \frac{2}{3} \cdot 3 \leq 2 + \varepsilon$$

$$\frac{6k}{2k+1} - 2 \leq 2 + \varepsilon$$

$$\frac{-2+2k}{2k+1} \geq 0 \Rightarrow \inf a_{2k} = 2.$$

2) $a_{2k+1} = \frac{2k+1}{2k+2} \cdot 1 = \frac{2k-1}{2k} \cdot 1$

$a_1 = \frac{1}{2} < 1$

$a_3 = \frac{3}{4} < 1$

$a_5 = \frac{5}{6} < 1$

$a_7 = \frac{7}{8} < 1 = \sup a_{2k+1}$

$\forall k : a_{2k-1} \leq 1$

$$a_{2k-1} = \frac{2k-1}{2k} - 1 \leq 0$$

$$\frac{-1}{2k} \leq 0 \Rightarrow \sup a_{2k+1} = 1$$

$\forall k: a_{2k+1} \leq \sup a_{2k+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists k \ \forall \varepsilon > 0: a_{2k} > \sup a_{2k+1}$

$$1 - \varepsilon < a_{2k-1}$$

$$\frac{2k-1}{2k} > 1 - \varepsilon$$

$$\frac{2k-1}{2k} - 1 + \varepsilon > 0$$

$$\frac{\cancel{2k} - 1 - \cancel{2k} + \varepsilon \cdot 2k}{2k} > 0$$

$$\frac{2k\varepsilon - 1}{2k} > 0$$

$$2k\varepsilon > 1$$

$$\underline{k > \frac{1}{2\varepsilon}} \quad \Rightarrow \sup a_{2k+1} = 1$$

$a_1 = \frac{1}{2}$

$a_3 = \frac{3}{4}$

$a_5 = \frac{5}{6}$

$\inf a_{2k-1} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} \leq a_{2k-1}, \ \forall k$

$\frac{1}{2} \leq \frac{2k-1}{2k}$

$k \leq 2k - 1$

$k - 1 \geq 0$

$\underline{k = 1}$

$\forall k: a_{2k+1} \geq \inf a_{2k+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists k \ \forall \varepsilon > 0: a_{2k+1} < \inf a_{2k+1} + \varepsilon$

$$\frac{1}{2} + \varepsilon \geq a_{2k-1}$$

$$k = 1$$

4) т.о. $\sup x_n = \max(1, 3) = 3$

$\inf x_n = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$\overline{\lim}\, x_n = 3$

$\underline{\lim}\, x_n = 1$

③ Наибольший элемент не существует, если бы он был, то верхняя грань была бы достижима.

Наименьший элемент $= \frac{1}{2}$.

④ $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon): \forall n > N: |a_n - A| < \varepsilon$

$a_{2k} = \frac{2k}{2k+1} \cdot 3$

$|a_{2k} - 3| < \varepsilon$

$\left|\frac{2k \cdot 3}{2k+1} - 3\right| < \varepsilon$

$\left|\frac{6k - 3(2k+1)}{2k+1}\right| < \varepsilon$

$\left|\frac{6k - 6k - 3}{2k+1}\right| < \varepsilon$

$\left|\frac{-3}{2k+1}\right| < \varepsilon$

$\frac{3}{2k+1} < \varepsilon$

$\frac{2k+1}{3} > \frac{1}{\varepsilon}$

$\frac{1}{2} + \varepsilon \geq a$

$\frac{1}{2} + \varepsilon \geq \frac{1}{2}$ – верно $\Rightarrow \inf a_{2k+1} = \frac{1}{2}$

т.о. $\sup a_{2k} = 3$

$\inf a_{2k} = 2$

$\sup a_{2k+1} = 1$

$\sup a_{2k+1} = \frac{1}{2}$

3) Монотонность:

$$a_{2k} \leq a_{2k+2}$$

$$\frac{2k}{2k+1} \leq \frac{2k+2}{2k+3}$$

$$\frac{2k}{2k+1} - \frac{2k+2}{2k+3} \leq 0$$

$$\frac{2k(2k+3) - (2k+1)(2k+2)}{(2k+1)(2k+3)} \leq 0$$

$$\frac{-2}{(2k+1)(2k+3)} \leq 0 \Rightarrow$$

(по т. Вейерштрасса)

$\Rightarrow a_{2k}$ – огранич. и монотонно возрастает, есть предел: $\lim\limits_{k \to \infty} a_{2k} = \sup a_{2k} = 3$

подпосл. a_{2k+1} аналогично огранич. и монотонно возрастает, есть предел: $\lim\limits_{k \to \infty} a_{2k+1} = \sup a_{2k+1} = 1$ (по т. Вейерштр.)

$$a_{2k+1} = \frac{2k+1}{2k+2} \qquad a_{2k-1} = \frac{2k-1}{2k}$$

$$a_{2k+1} - a_{2k-1} = \frac{2k+1}{2k+2} - \frac{2k-1}{2k} =$$

$$= \frac{\cancel{2k^2} + k - 2k^2 + k - 2k + 1}{2k(k+1)} = \frac{1}{2k(k+1)} > 0$$

$$\frac{2k}{3} + \frac{1}{3} > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\frac{2k}{3} > \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{3}$$

$$k > \frac{3}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{3}\right)$$

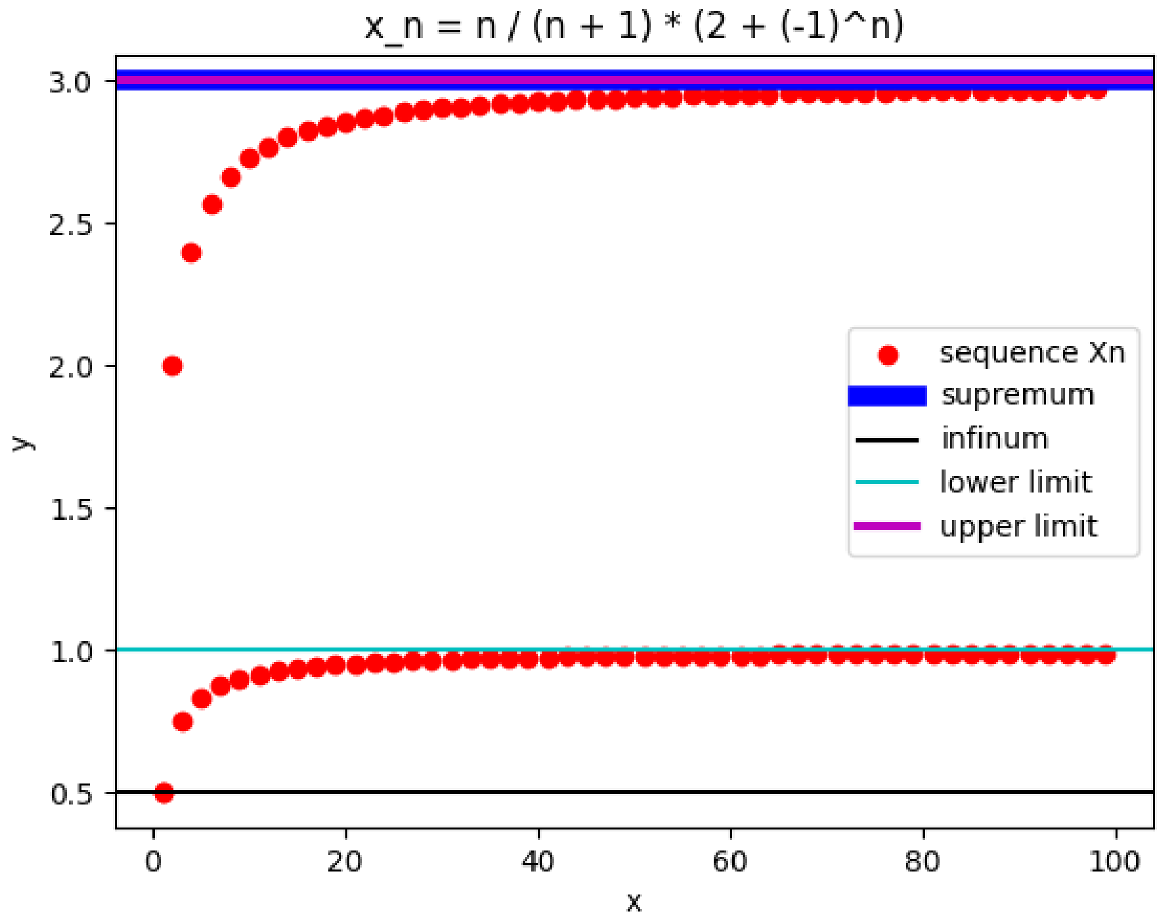
н.с. этого k для $\forall k > k_0$ выполняется $|a_{2k} - 3| < \varepsilon$, т.е. н.с. этого номера, члены выбранной подпосл. попадают в ε-окрестность предела.

Часть 2. Численный метод

В предложенной программе существует возможность выбора задания, т.к. при реализации всех пунктов задания на одном графике, график становится трудным для просмотра, а также реализован ввод значения eps с клавиатуры.

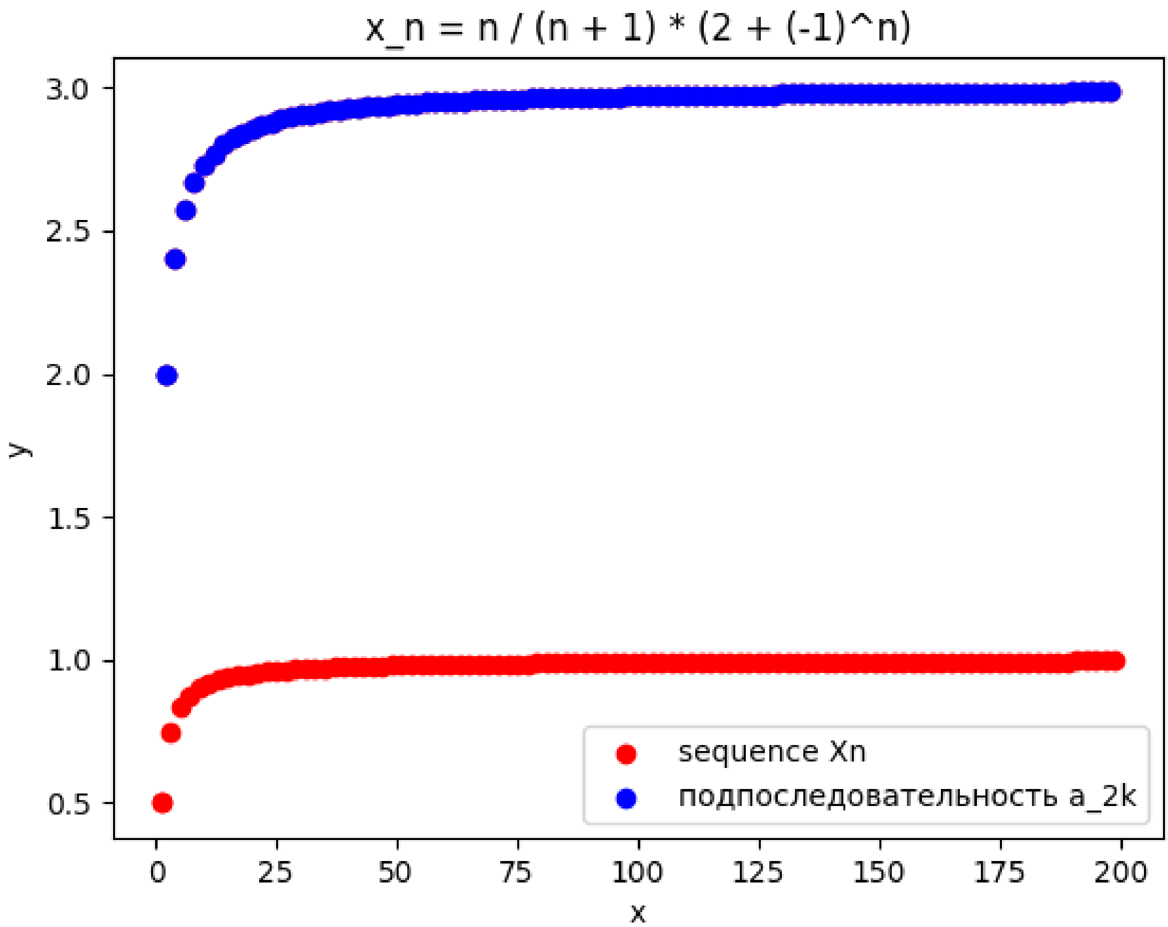
Скачивание библиотеки: pip install matplotlib

1) Построение графика с помощью библиотеки matplotlib. Из этой библиотеки используем: pyplot - специальную коллекцию функций в стиле команд. Отмечаем необходимые данные с помощью команды: plt.axhline. Строки кода: 14 – 47.



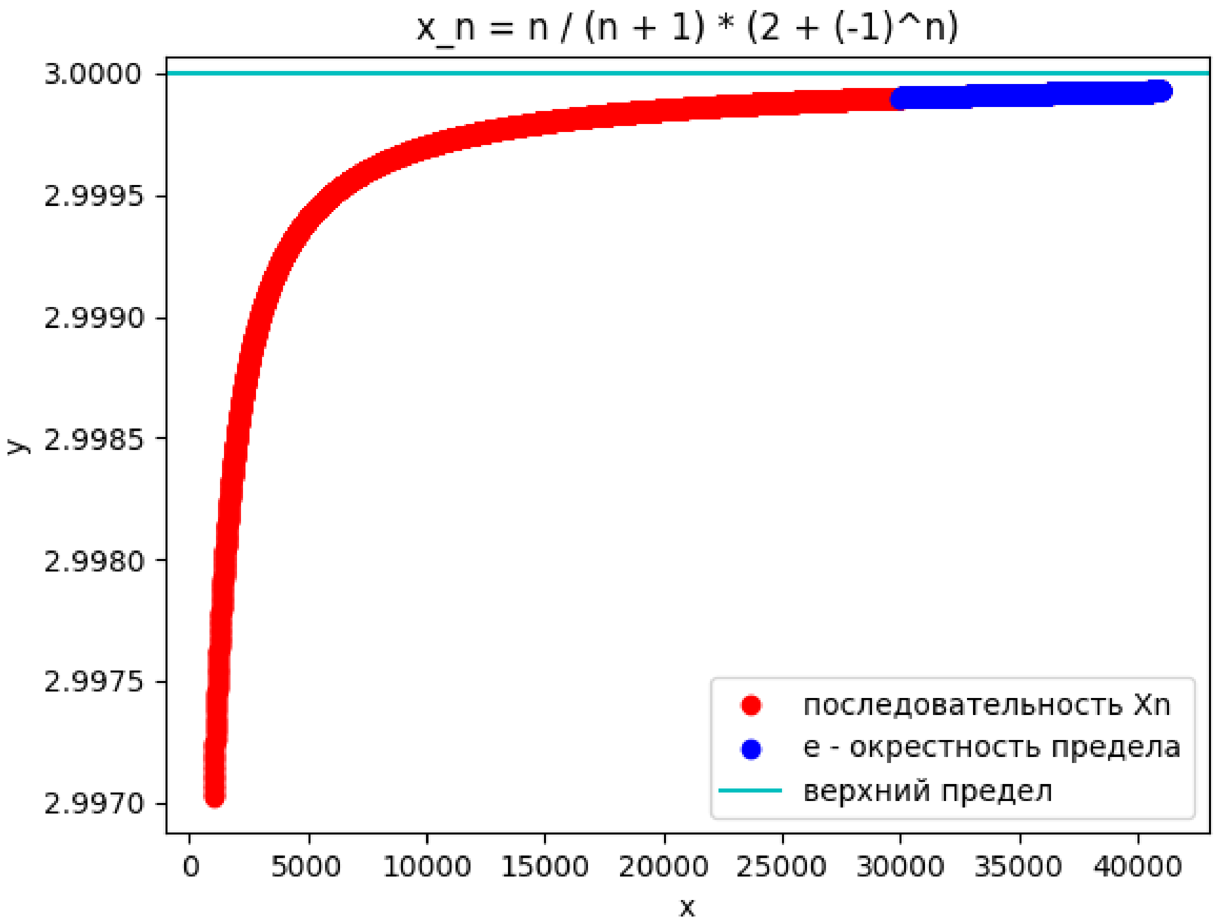
2) Построение графика с помощью библиотеки matplotlib. Строки кода: 50 – 102.

На данном графике выделена сходящаяся подпоследовательность a_{2k}.



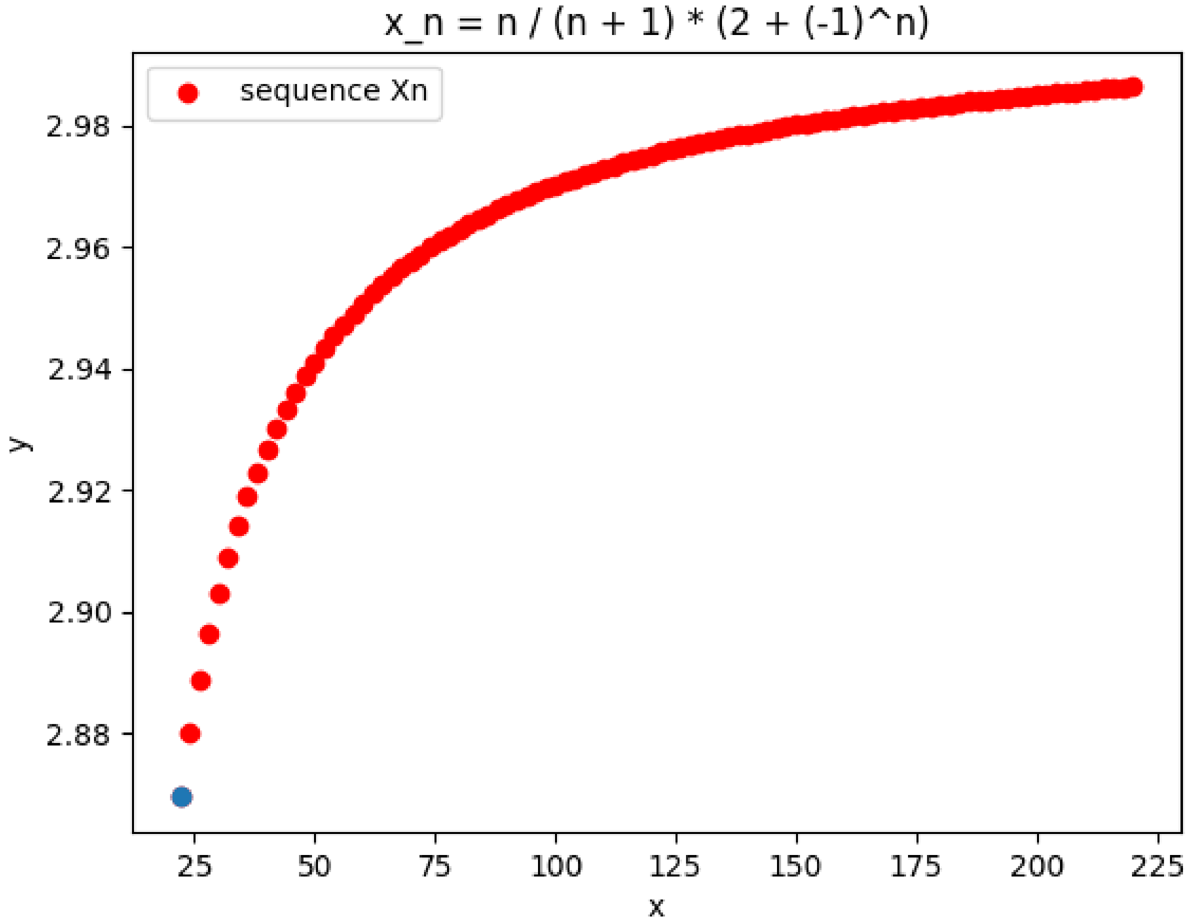
3) Построение графика с помощью библиотеки matplotlib. Выделение е – окрестности предела другим цветом. Строки кода: 105 – 161.

На графике ниже: eps = 0.0001.



4) Построение графика с помощью библиотеки matplotlib. Из аналитического метода мы поняли, что не достигается супремум. Поэтому осуществляем проверку точной грани для него. Строки кода: 164 – 223.

На графике ниже: eps = 0.1. Для этого значения программа отметила точку и вывела ее значение: x_m = 22.


x_n = n / (n + 1) * (2 + (-1)^n)
sequence Xn
2.98
2.96
2.94
2.92
2.90
2.88
y
25
50
75
100
125
150
175
200
225
x