

CPX001

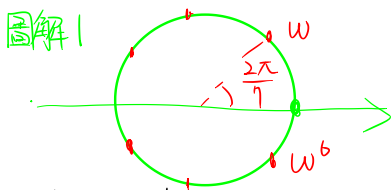
來源：#KW113分模一 二、4.(5)

題文

「設 $\omega = \cos \frac{2\pi}{7} + i\sin \frac{2\pi}{7}$ ，則 $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{8\pi}{7} = -\frac{1}{2}$ 。」本敘述是否正確？

正確解法

- 1 $\omega^7 = (\cos \frac{2\pi}{7} + i\sin \frac{2\pi}{7})^7 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$
- 2 $\rightarrow X^7 = 1$ 有根 $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5, \omega^6$
- 3 \rightarrow 根成等比，其和為 0：
 $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = 0 = 0 + 0i$
- 4 \rightarrow 對實部討論： $1 + \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} + \cos \frac{8\pi}{7} + \cos \frac{10\pi}{7} + \cos \frac{12\pi}{7} = 0$
- 5 $\therefore (\frac{2\pi}{7}, -\frac{12\pi}{7}), (\frac{4\pi}{7}, -\frac{6\pi}{7}), (\frac{6\pi}{7}, -\frac{8\pi}{7})$ 各為同界角，並且 $\cos x$ 對負號有提出性
- 6 \therefore 上式 $= 1 + 2 \cdot \cos \frac{2\pi}{7} + 2 \cdot \cos \frac{4\pi}{7} + 2 \cdot \cos \frac{8\pi}{7} = 0$ ，
- 7 移項可得 $(\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{8\pi}{7}) = -\frac{1}{2}$ ，得證題文敘述為真



要點

- L2：使用棣美弗定理推得 ω 即一的方根
- L3：根成等比，其和為零
- L4：分項討論 \rightarrow 因為題目問的只跟實部有關，就FOCUS討論實部
- L5 <解釋一—圖像>：參見一旁 **圖解1**
 - 一 因為本敘述中專注討論實部（x），則在圖像的對應想法就是要觀察各根垂直的關係。
 - 二 觀察圖可以發現，實軸上下總共有三對實部相等（x相等）的根
- L5 <解釋二—cos>：即文內作法，運用同界角+cos的特性