

# 15. System Requirements

## System Spec vs Requirement Spec

- **System Specification**
    - “시스템이 어떻게 동작하는지” 모델로 정의한 것 (시스템의 실제 행동/구조를 설명)
  - **Requirement Specification**
    - “시스템이 반드시 만족해야 하는 조건” (올바름을 판단하는 기준)
- 

## 요구사항 예시

- 상호 배제: “두 프로세스는 동시에 임계구역에 있지 않는다.”
  - 진행 보장: “각 프로세스는 결국 임계구역에 들어간다.”
  - 순서 보장: “요청한 순서대로 임계구역을 실행한다.”
  - 합의: “모든 노드는 결국 같은 리더를 뽑는다.”
- 

## 핵심 질문

- 시스템 S가 어떤 초기 상태에서 시작하더라도 요구사항 R을 만족하는가?  
(= 잘못된 초기 상태면 만족 못할 수도 있으므로 initial state가 중요함)
- 

## 이를 판단하려면 필요한 것

1. 정확한 시스템 모델
  2. 정확한 요구사항(**temporal logic** 등으로 표현)
  3. 검증 방법(**model checking**)
- 

## Maude를 사용하는 이유

- 시스템을 정확하게 모델링할 수 있음
  - 요구사항을 **temporal logic**으로 표현 가능
  - **model checker**가 자동으로 검증
  - 요구사항의 모호함을 제거 (예: “항상 가능한가” vs “어떤 실행에서는 가능한가”)
- 

## 동적 시스템의 correctness 개념

- 정적 시스템은 “정답(normal form)”이 있음
  - 동적/분산 시스템은 정답이라는 개념이 없고, “실행 중 항상 참이어야 하는 속성”이 중요
    - **safety / liveness / invariant** 같은 속성으로 correctness를 정의함
- 

## Invariant (불변식)

- 시스템 실행 동안 항상 참이어야 하는 조건
- 예: “두 프로세스는 동시에 임계구역에 있을 수 없다.”

## 15.1 State-based and Action-based Properties

### 개요

시스템 요구사항(system requirements)은 두 가지 방식으로 표현될 수 있다:

#### 1. Action-based Properties (행동/이벤트 기반 속성)

→ 시스템 실행 중 “어떤 행동이 언제/어떻게 발생할 수 있는가”를 조건으로 표현함.

#### 2. State-based Properties (상태 기반 속성)

→ 시스템 실행 중 “어떤 상태가 허용되거나 금지되는가”를 조건으로 표현함.

대부분의 요구사항은 두 방식 모두로 표현할 수 있지만, 성격에 따라 더 자연스러운 표현 방식이 존재한다.

### Action-based Properties (행동 기반 속성)

- 특징
  - 행동의 순서, 발생 조건, 타이밍이 중요한 경우 자연스러움.
  - “이 이벤트 직후 반드시 저 이벤트가 가능해야 한다” 같은 형태.

- 대표 예시
  - 예제 15.3 — 미식축구 규칙
    - 한 팀은 터치다운 직후에만 추가점(extra point) 또는 2점 전환(two-point conversion)을 시도할 수 있다.
    - 필드골, 세이프티, 다른 팀의 터치다운 직후에는 2점 전환이 불가능함.
  - 기타 자연스러운 행동 기반 요구사항
    - 한 사람은 두 번 세례(baptism)를 받을 수 없다.
    - 모든 결혼(wedding)은 반드시 약혼(engagement) 후에 이루어져야 한다.
    - 철학자는 무한히 자주 식사를 “시작(start eating)” 할 수 있어야 한다.
    - 임계구역(CS)에 들어가는 행동 순서는 `requestAccessToCS` 호출 순서를 따라야 한다.

### State-based Properties (상태 기반 속성)

- 특징
  - 시스템의 특정 상태가 항상 또는 절대 나타나지 않아야 하는가를 표현할 때 자연스러움.
  - 불변식(invariant) 형태로 자주 사용됨.

- 대표 예시
  - 어떤 상태에서도 두 노드는 동시에 `insideCS` 상태에 있을 수 없다.
  - 인구(population)는 항상 일관성을 유지해야 한다.
    - 예: Bridget이 Tom과 결혼했고 Tom이 Gisele과 결혼한 상태는 불가능.
  - 두 노드가 서로 다른 리더를 가져서는 안 된다.
  - 수신자의 `msgsRcvd`는 결국 발신자의 초기 `msgsToSend`와 같아져야 한다.
  - 스크루지는 은행과 신뢰 연결을 맺기 전에는 은행이 스크루지와 신뢰 상태가 되어서는 안 된다.
  - 인접한 철학자 둘은 절대 동시에 식사해서는 안 된다.

## Action + State 조합이 필요한 요구사항

어떤 요구사항은 행동과 상태가 함께 표현되어야 자연스러움.

- 예시

- **baptized** 상태의 사람은
  - 메카 순례(hajj)를 수행할 수 없고,
  - 다른 세례를 받을 수도 없다.
- 50세 이상은 출산할 수 없다.
  - 상태(**age > 50**) + 행동(**give birth**) 조합.

---

## 행동 기반을 상태 기반으로 억지로 표현하기 어려운 이유

일부 행동 기반 속성은 상태만으로는 표현하기 부자연스럽다.

- 대표 사례 (예제 15.3)

- **2점 전환(two-point conversion)**
- **세이프티(safety)**

둘 다 **2점을 얻는 플레이**이므로, 단순히 상태(= 점수)만 보면 두 행동을 구분하는 것이 불가능하다.

즉, 행동 기반 속성은 **행동 자체를 명시하지 않으면 표현할 수 없는 경우가 존재함.**

---

## 본 책의 초점

- 행동 기반 속성도 표현할 수 있지만,
- **상태 기반 요구사항(state-based requirements)** 이 더 일반적이며,
- 모델 검사(model checking)에서도 상태 기반이 주로 사용됨. 따라서 **이 장은 상태 기반 요구사항을 중심으로 논의함.**

### 15.1.1 Actions/Events

- **핵심 개념**

- 액션(action) 또는 이벤트(event)는 단순히 “특정 리라이트 규칙을 적용하는 것”으로 정의되지 않는다.
- 실제 이벤트는 **리라이트 규칙 + (부분) 변수 치환(partial substitution)**으로 구성된다.

- **왜 단순 규칙 적용과 다른가?**

예:

- “A와 B의 결혼” 이벤트
- “A와 B의 약혼” 이벤트

이 둘은 **wedding, engagement** 규칙을 그대로 적용하는 것이 아니라, 각각 규칙의 변수들을 다음과 같이 치환해서 적용하는 것이다:

$\{x \rightarrow A, x' \rightarrow B\}$

즉, 이벤트 = 리라이트 규칙에 변수 치환  $\sigma$ 를 적용해 실행되는 규칙 인스턴스

- **요약 문장**

- 이벤트는 리라이트 규칙의 특정 인스턴스를 실행하는 것이며,
- 그 인스턴스는 규칙의 변수들에 대한 부분 치환( $\sigma$ )을 통해 만들어진다.

### 15.1.2 State Propositions

#### State Proposition의 정의

- 하나의 단일 상태(single state)에 대해 참/거짓을 말하는 명제.
- 이전 상태, 이후 상태, 경로(path)에 대한 정보는 포함하지 않음.
- 즉, 오직 현재 상태만 보고 판단할 수 있어야 한다.
- 형식적으로는 State  $\rightarrow$  Bool 함수처럼 생각할 수 있다.

---

#### State Proposition의 예시

다음은 현재 상태만 보고 판단할 수 있으므로 State Proposition:

- 현재 상태에서 Seahawks의 점수가 Patriots보다 높다.
- 두 노드가 현재 `insideCS` 상태에 있다.
- 은행의 `respSessions` 속성에 `trustedConnection("Scrooge")` 가 포함되어 있다.

---

#### State Proposition이 아닌 것

단일 상태뿐 아니라 이전/미래 상태, 도달 가능성을 묻는 경우는 State Proposition이 아님.

- “현재 점수가 이전 상태보다 6점 더 많다.”
- “현재 상태에서 출발해, 은행이 Scrooge와 연결되는 상태에 도달할 수 있다.”

→ 이런 것들은 여러 상태 간 관계를 포함하므로 **state proposition이 아니라 temporal property**에 해당.

---

#### 정리

- **State Proposition:** 개별 상태의 속성을 판단하는 명제
- **State-based Property:** 여러 상태로 구성된 실행 전체(computation)를 다루는 속성
- State Proposition은 state-based property의 구성 요소로 사용됨.

## 15.2 Temporal Properties

#### 핵심 개념

- **Temporal Properties(시간 속성)**은 시스템이 초기 상태에서 시작해 수행할 수 있는 모든 가능한 동작 전체에 대해 무엇이 참이어야 하는지를 정의한다.
- Temporal properties는 “상태 기반”으로 표현될 수 있으며, 시스템이 시간에 따라 어떻게 진행되더라도 특정 속성이 유지되어야 함을 세밀하게 기술한다.

---

#### 등장 이유

- 단일 상태만 검사하는 **state proposition**으로는 “시간에 걸쳐 항상 만족되어야 하는 조건”을 표현할 수 없다.
- Temporal properties는 전체 실행 경로 전체를 대상으로 한다.

## 이후 내용과 연결

- Chapter 16에서 LTL, CTL 같은 시간 논리로 formal definition 제공.
- 15.2에서는 그중 가장 중요한 시간 속성 중 하나인 **Invariance(불변식)**을 소개한다.

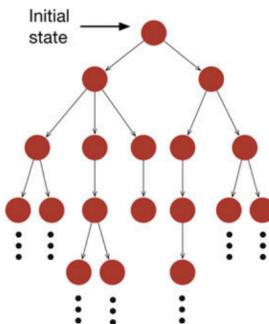
### 15.2.1 Invariance: “Nothing Bad Will Happen”

#### 불변식(Invariant)의 정의

- 불변식은 “초기 상태에서 도달 가능한 모든 상태에서 항상 참이어야 하는 조건”.
- 즉, 나쁜 일이 절대 발생하지 않는 것을 보장하는 속성.
- 안전 속성(safety property)의 전형적인 형태.

→ 공식적으로,  $p$ 가 invariant  $\iff$  초기 상태  $t_0$ 에서 도달할 수 있는 모든 상태  $t$ 에 대해  $p(t)$ 가 참이어야 한다.

#### 그림 15.1 설명



- 초기 상태에서 여러 경로로 분기된 모든 상태들(tree of behaviors)이 존재함.
- 불변식이란 이 전체 트리의 모든 상태가 “위반되지 않음”을 의미한다.
- 도중에 단 하나라도  $p$ 가 false인 상태가 생기면 더 이상 invariant가 아님.

#### 예제 15.5 : Alternating Bit Protocol

- 수신한 메시지 목록( `msgsRcvd` )은 초기 송신 메시지 목록( `msgsToSend` )의 접두(prefix)여야 한다.  
→ 메시지가 뒤죽박죽되거나 중간 삽입되는 일이 절대 없어야 한다는 불변식.

#### 예제 15.6 : Mutual Exclusion

- “두 노드가 동시에 insideCS 상태일 수 없다.”  
→ 상호배제 알고리즘의 핵심 불변식.

#### 예제 15.7 : Dining Philosophers

- “이웃한 철학자 둘은 동시에 eating 상태일 수 없다.”  
→ 데드락 및 충돌 방지를 위한 불변 조건.

#### 예제 15.8 : Population Consistency

- 단순 조건 “A가 B와 결혼  $\rightarrow$  B가 A와 결혼”은 메시지가 지연 중인 상태에서는 깨질 수 있으므로 불변식 아님.

- 올바른 불변식: “A가 B와 결혼했다면 B가 A와 결혼했거나,  $B \rightarrow A$  메시지가 전달 중이어야 한다.”

#### 예제 15.9 : Two-Phase Commit

- “모든 updated가 true 또는 false”는 불변식이 아님.
- 올바른 불변식은 다음 3가지 중 하나가 참이어야 함:
  1. 모두 updated = false
  2. 모두 updated = true
  3. commit 메시지가 존재하며, 그 노드가 updated = false
- 메시지가 소모된 뒤에도 데이터베이스가 일관되도록 보장.

#### 15.2.2 Guarantee : “Something Good Must Eventually Happen”

**Guarantee(보장)** 또는 **Liveness(활성)** 속성의 개념

- **Invariant** = “나쁜 일이 절대 일어나지 않는다”
- **Guarantee** = “좋은 일이 결국 반드시 일어난다”
- 즉, 보장 속성은 **모든 실행 경로에서 언젠가는 p-상태에 도달해야 함**을 의미한다.

#### 공식 정의

상태 명제  $p$ 가 guarantee  $\iff$  초기 상태에서 시작하는 **모든 계산 경로(all computations)**에서

**언젠가 p 상태로 도달 가능해야 한다.**

→ 규칙이 어떤 순서로 적용되든,  $p$ 는 “최종적으로” 일어나야 한다.

#### 그림 15.2 의미

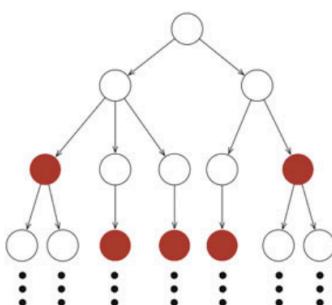


Fig. 15.2 “The state is red” is guaranteed

- 상태 공간이 트리 형태로 펼쳐질 때 어떤 경로를 선택하든 **빨간 상태(p 상태)**로 결국 도달할 수 있음.
- 즉, **p 상태로 가는 길이 무조건 존재한다.**

#### 예제 15.10 : 중앙 서버 알고리즘

- “프로세스 node(4)가 CS 안에 들어간다”는 것은 보장되지 않음.  
→ 프로세스들이 무한히 바깥/안쪽을 반복하며 starvation 가능.
- 하지만 **ring-based mutual exclusion algorithm**에서는 보장됨.

### 예제 15.11 : Dining Philosophers

- “철학자 3이 eating 상태가 된다”는 것은 보장되지 않음.  
→ 식사 기회가 영원히 안 올 가능성(starvation)이 존재.

### 예제 15.12 : Leader Election

- “모두가 가장 큰 값을 가진 노드를 leader로 선택했다”는 것은 Section 13.3의 리더 선출 알고리즘 둘 다에서 보장됨.

### 예제 15.13 : Transport Protocol

- “원하는 문자열이 수신자 msgsRcvd에 저장된다”는 것은 우리의 전송 프로토콜에서 보장되지 않음.  
→ 메시지 손실, 재전송 실패 등 가능.

## 15.2.2.1 Fairness

### 왜 공정성이 필요할까?

시스템 모델은 비현실적인 극단적 실행도 허용할 수 있음.

예를 들어:

- 어떤 철학자만 계속 실행되고, 다른 철학자는 평생 기회가 옴  
→ 그러면 “철학자 2도 언젠가 식사해야 한다”는 보장을 못함
- 어떤 메시지 뒤에 다른 메시지가 계속 끼어들어서 특정 메시지가 평생 전달되지 않을 수도 있음

현실 시스템에서는 이런 일은 공정하지 않음

→ 하지만 모델은 이런 극단적 상황을 허용할 수 있음.

그래서 불공정한 실행을 배제하기 위해 공정성(fairness)을 가정하는 것.

### 공정성의 목적

공정성은 “모든 요소에게 행동할 기회를 공평하게 주자”라는 원칙.

그래야:

- 어떤 프로세스도 영원히 무시되면 안 되고
- 어떤 메시지도 영원히 씹히면 안 됨
- 어떤 이벤트도 영원히 가능한데 실행이 안 되면 안 됨

즉, 공정성을 적용하면 liveness 보장 가능해짐.

### 공정성의 두 종류

#### 1. Strong Fairness (강한 공정성, Compassion)

어떤 이벤트가 무한히 자주 가능하면, 무한히 자주 실행되어야 한다.

쉽게 말하면:

- “계속 여러 번 기회가 오면 언젠가는 반드시 해라.”
- 기회가 “자주” 있으면 무시하는 건 불공평.

#### 2. Weak Fairness (약한 공정성, Justice)

어떤 이벤트가 계속 가능한 상태라면, 언젠가는 반드시 한 번 실행되어야 한다.

쉽게 말하면:

- 계속 실행할 수 있으면,
  - 영원히 미루면 안 됨.
- 

### 공정성이 필요한 실제 예시

- 예) Dining Philosophers
    - 철학자 3이 먹을 수 있는 기회가 있는데
    - 계속 옆 사람이 먼저 먹어서 영원히 못 먹는 상황이 생길 수 있음
      - 이건 불공정
    - 따라서, 공정성: 먹을 수 있는 상황이 계속 오면 결국 한 번은 먹어야 한다.
  - 예) 메시지 전달
    - process P가 requestCS 메시지를 보내는데
    - 다른 메시지가 계속 그 앞을 가로채서
    - P의 메시지가 영원히 읽히지 않을 수도 있음
      - 현실에서는 이건 불공정
      - 그래서 "무한 overtaking 금지" 같은 공정성 조건이 필요.
- 

### 공정성이 왜 중요하나?

공정성을 가정하면 아래 같은 liveness가 가능해짐:

- 철학자는 언젠가는 먹는다
- 모든 노드는 언젠가는 리더를 뽑는다
- 메시지는 언젠가는 전달된다

공정성이 없으면 모델은 너무 비현실적 실행을 허용해서 liveness 속성이 깨져버린다.

## 15.2.3 Reachability

### 개념

- **Reachability(도달 가능성)** : "어떤 상태가 일어날 수 있는가?"를 묻는 속성
  - 상태 명제  $p$ 가 **reachable** 이라는 것은:
    - 초기 상태에서 시작해
    - 어떤 실행 경로(some run)에서는
    - $p$  상태에 도달할 수 있다
  - 즉, 나쁜 상태가 '일어날 수도 있음'을 확인하는 속성.
- 

### Guarantee와의 차이

- **Guarantee**: 모든 실행(all runs)에서 반드시  $p$  상태에 도달해야 한다.
- **Reachability**: 어떤 실행(some run)에서  $p$  상태에 도달할 가능성만 있으면 된다.

속성	의미
Guarantee	좋은 일이 반드시 일어난다
Reachability	나쁜 일이 일어날 수도 있다

### Invariant와의 관계 (쌍대 관계)

- $p$ 가 불변(invariant)  $\leftrightarrow$   $\text{not } p(\neg p)$ 가 reachable이 아니다.
- 즉,
  - 불변 = 나쁜 상태는 절대 도달 불가
  - 도달 가능성 = 나쁜 상태가 도달 가능

### 활용

- Reachability는 시스템에서 위험하거나 잘못된 상태가 발생할 가능성을 분석하는 데 사용된다.

## 15.2.4 Response: "A Request Will Always be Answered"

### 개념

- **Response(응답)** 속성은 "어떤 상태  $p_1$ 이 발생하면, 반드시  $p_2$ 가 뒤따라야 한다."라는 규칙을 의미한다.
- 반응형 시스템(reactive system)에서는 필수적인 속성.

### 공식 정의

상태 명제 쌍 ( $p_1, p_2$ )가 response property라는 것은:

- 초기 상태에서 가능한 모든 실행(all runs)에 대해
- $p_1$  상태가 나타나면
- 언젠가는 반드시  $p_2$  상태가 뒤따라와야 한다 (즉시일 필요는 없음)

### 예시

- 요청(request)  $\rightarrow$  반드시 그 후 acknowledgment(응답)가 와야 함
- 총돌 감지  $\rightarrow$  반드시 에어백이 나와야 함
- 프로세스가 CS에 들어가고자 함  $\rightarrow$  언젠가는 실제로 CS에 들어가야 함

즉, 어떤 이벤트가  $\rightarrow$  반드시 그에 대한 반응이 온다라는 시스템 동작 규칙.

## 15.2.5 Stability

### 개념

- **Stability(안정성)** : 어떤 상태 명제  $p$ 가 한 번 참이 되면, 그 이후의 모든 실행에서도 절대 거짓이 되지 않음.
- 즉, 한 번 만족되면 영원히 유지되는 성질임.

### 왜 중요한가?

- 일부 프로토콜은 목표 상태에 도달한 후에도 계속 동작함.
- 이때 안정성이 없다면:

- 이미 달성한 결과가
  - 이후 실행 단계에서 깨져버릴 수 있음.
  - 안정성은 “**이미 달성한 좋은 상태를 보호하는 성질**”.
- 

#### 예시

- **Alternating Bit Protocol**

“수신자가 원하는 문자열 s를 받았다”는 상태는 이후 메시지들이 이 결과를 망가뜨리면 안 됨 → 안정적이어야 한다.

- **Leader Election**

“모든 노드가 최고값 노드를 리더로 선택했다”

→ 새로운 라운드가 돌더라도 리더가 바뀌면 안 됨

→ 안정적이어야 한다.

### 15.2.6 Other Requirements

#### Until ( $p_1$ until $p_2$ )

- $p_2$  상태가 나올 때까지, 모든 상태는  $p_1$ 을 만족해야 한다.
  - 즉,  $p_2$ 가 나타나기 전까지  $p_1$ 이 계속 유지되어야 함.
- 

#### 예시

- “메시지가 존재한다” until “모든 노드가 리더를 선택했다”
  - “메시지가 존재한다” until “모든 DB가 동일한 updated 값을 가진다 (2PC)”
- 

#### Weak Until (약한 Until)

- $p_2$ 가 반드시 일어날 필요는 없음.
  - 대신  $p_2$ 가 일어나지 않으면  $p_1$ 이 계속 참이어야 함.
  - 예: Paxos
    - “합의를 시도함” weak-until “합의가 일어남”
    - 합의가 실패해도 계속 시도 상태에 있으므로 조건 충족.
- 

#### Strong Until (강한 Until)

- $p_2$ 가 반드시 최종적으로 일어나야 한다.
- 

#### Termination

- 시스템이 무한히 실행만 하는 상황을 허용해서는 안 됨.
  - 즉, 언젠가는 종료 가능한 상태가 존재해야 한다.
- 

#### Correct Final States

- 모든 최종 상태는 특정 조건을 만족해야 한다.
- 예

- 2PC → 모든 DB의 updated 값이 동일해야 함
  - Leader Election → 모든 최종 상태에서 동일한 리더
- 

## No Deadlocks

- 더 이상 진행할 수 없는(deadlocked) 최종 상태가 존재하면 안 된다.
- 예:

Dining Philosophers

- 철학자들이 영원히 먹지/생각하지 못하는 상태 불가
- rewritable하지 않은 상태(막힌 상태)는 데드락이므로 금지

## 15.3 Analyzing Invariants

### 이 파트가 말하고 싶은 핵심

- Maude의 search 기능을 이용해, 어떤 상태 명제가 invariant인지 자동으로 확인할 수 있다. (단, 하나의 초기 상태에 대해서만)
- 

### 기본 아이디어

- Invariant인지 확인하는 방법은 단 하나:
    - 초기 상태에서 출발해 p를 깨뜨리는( $\neg p$ ) 상태가 reachable인지 검색(Search)
  - reachable하면 → invariant가 아니다
  - reachable하지 않으면 → invariant일 가능성 있다
  - 즉 **Maude search = “나쁜 상태 reachable인지 검사”** 도구.
- 

### 실제 예시들 (책에서 반복적으로 했던 것들)

- Transport protocol:
    - 수신자 msgsRcvd가 msgsToSend의 prefix인지 확인하려고, prefix가 아닌 상태가 reachable인지 탐색
  - Mutual exclusion:
    - 두 프로세스가 동시에 insideCS인지 찾음
  - NSPK 프로토콜:
    - bank가 “trusted” connection을 갖는 나쁜 상태가 reachable인지 확인
- 즉, 우리는 항상 “나쁜 상태”를 찾는 search를 사용함.
- 

### Maude search의 결과 유형

1. 나쁜 상태가 발견됨 → 그 속성은 invariant가 아님 → search 종료
  2. 나쁜 상태가 없고, reachable 상태 집합이 유한함 → search는 “No solution”으로 끝남 → **invariant 맞음**
  3. reachable 상태가 무한(infinite) → search가 절대로 끝나지 않음 → **invariant인지 판단할 수 없음** (단지 “못 찾았을 뿐, 나쁜 상태가 미래에 있을 수도 있음”)
    - 예: NSPK에서 30분 동안 search했는데 안 나오면 → 40분 후에 발견될 수도 있음
-

## 문제: 왜 infinite state space가 생기는가?

아래 경우에 상태 공간이 무한해져 search가 끝나지 않음:

- 값이 제한 없이 계속 증가할 수 있음 (football score, dining philosopher의 eats 카운터 등)
- 메시지 수가 무한히 증가할 수 있음
- 객체 수가 무한히 생성될 수 있음 (예: person을 birth rule로 무한 생성)

이런 경우 search로 invariant 분석 불가능.

---

## Maude search의 두 가지 중요한 한계

- Search로는 infinite state space에서 invariance를 증명할 수 없다
- Search는 단 하나의(initial state  $t_0$ )에 대해서만 invariant를 증명할 수 있다
  - 여러 초기 상태 집합에 대해 invariant인지 증명 불가.
  - 예:
    - 철학자 5명에 대해서는 증명 못 함
    - 10명, 100명, 임의 개수에 대해서는 더더욱 불가
    - football 점수가 11점 이상인 모든 초기 상태에 대해 invariant인지 증명 불가

---

## 해결책: Inductive proof(귀납적 증명)

Search로 증명할 수 없다면, "손으로(by hand)" 다음 두 조건을 보이면 된다:

- 모든 초기 상태  $s_0$ 가  $p$ 를 만족한다.
- 모든 rewrite rule  $r$ 에 대해,  
 $p$ -state가  $r$ 로 바뀌어도  $p$ -state가 유지된다.

이 두 가지를 만족하면:  $p$ 는 초기 상태 집합 | 전체에 대한 invariant이다.

---

## 예제 15.14 (귀납적 증명 예시)

증명하고 싶은 것: "점수 합( $m+n$ )이 항상 10보다 크다" (최종 상태 포함 모든 reachable 상태에서)

귀납적 증명:

- 초기 상태들은 모두  $m+n > 10$
- rewrite rule(예: touchdown-home)은 점수를  $(m+6, n)$ 으로 바꿈  $\rightarrow m+6+n > m+n > 10$
- 따라서 모든 rewrite rule이  $p$ 를 유지함  $\rightarrow p$ 는 모든 initial state에 대한 invariant

---

## 강화(Strengthening)

- 가끔  $p$ 만으로는 inductive하지 않음
- 즉,  $p(t) \wedge (t \rightarrow t') \rightarrow p(t')$  를 증명할 수 없음
- 이때는,  $p$ 를 강화한  $p'$ 를 사용해 invariant를 증명한다. ( $p'$ 가 invariant이고,  $p' \rightarrow p$ 이면  $p$ 도 invariant)

---

## 최종 요약

- 15.3은 Maude search로 invariant를 분석하는 방법과 search의 한계를 설명하고, 그 한계를 넘기 위해 귀납적 증명(inductive invariant)을 사용하는 방법을 소개하는 파트이다.