응용물리연구실심화실습3 (PHY3075)

2024년 11월 3주차

응용물리학과 2022006971 이민성

번역

- 양자 정보의 제한 사항

  양자 정보와 고전 정보는 공통의 기본 수학적 구조를 공유하지만 몇 가지 중요한 차이점이 있습니다. 이 시리즈를 진행하면서 양자 정보가 가능하게 하는 작업과 고전 정보로는 불가능한 작업에 대해 많은 예시를 다룰 것입니다.

  그러나 그 전에 양자 정보의 중요한 제한 사항을 살펴볼 필요가 있습니다. 양자 정보가 할 수 없는 것들을 이해하는 것이 양자 정보가 할 수 있는 것들을 식별하는 데 도움이 됩니다.

  글로벌 위상의 무의미성

  우리가 다룰 첫 번째 제한 사항은 사실 양자 상태 벡터가 표현되는 방식에서의 약간의 퇴화(즉, 실제 제한 사항이라기보다는)와 관련이 있으며, 이는 글로벌 위상이라는 개념에 관한 것입니다.

  여기서 말하는 글로벌 위상은 다음과 같습니다.

  $|\psi\rangle$와 $|\phi\rangle$가 어떤 시스템의 양자 상태를 나타내는 단위 벡터라고 가정합시다. 또한, 복소수 α가 단위 원 위에 존재(즉, $|\alpha| = 1$ 또는 $\alpha = e^{i\theta}$, 여기서 θ는 실수)한다고 가정하면, 다음 관계가 성립합니다:

  $|\phi\rangle = \alpha|\psi\rangle$.

  이때 벡터 $|\psi\rangle$와 $|\phi\rangle$는 글로벌 위상에서 차이가 난다고 합니다. 우리는 때때로 α를 글로벌 위상이라고 부르기도 하지만, 이 용어는 상황에 따라 다릅니다: 단위 벡터에 곱해지면 원 위의 어떤 숫자든 글로벌 위상으로 간주될 수 있습니다.

  이제 글로벌 위상에서 차이가 나는 두 개의 양자 상태 $|\psi\rangle$와 $|\phi\rangle$를 고려할 때, 시스템이 표준 기저 측정을 거친다고 합시다. 첫 번째 경우인 시스템이 $|\psi\rangle$ 상태에 있을 때, 어떤 고전적 상태 a를 측정할 확률은 다음과 같습니다:

  $|\langle a|\psi\rangle|^2$.

  두 번째 경우인 시스템이 $|\phi\rangle$ 상태에 있을 때, 어떤 고전적 상태 a를 측정할 확률은 다음과 같습니다:

  $|\langle a|\phi\rangle|^2 = |\alpha\langle a|\psi\rangle|^2 = |\alpha|^2|\langle a|\psi\rangle|^2 = |\langle a|\psi\rangle|^2$,

  여기서 $|\alpha| = 1$입니다. 즉, 결과가 나올 확률은 두 상태에서 동일합니다.

  이제 임의의 유니터리 연산 U를 두 상태에 적용한다고 생각해 봅시다. 첫 번째 경우, 초기 상태가 $|\psi\rangle$일 때, 상태는 다음과 같습니다.

  $$U|\psi\rangle,$$

  두 번째 경우, 초기 상태가 $|\phi\rangle$일 때, 상태는 다음과 같습니다:

  $U|\phi\rangle = \alpha U|\psi\rangle$.

  즉, 두 결과 상태는 여전히 동일한 글로벌 위상 α에서 차이가 납니다.

  결과적으로, 글로벌 위상에서 차이가 나는 두 양자 상태 $|\psi\rangle$와 $|\phi\rangle$는 완전히 구별할 수 없습니다. 두 상태에 어떤 연산 또는 연산 시퀀스를 적용하더라도 항상 글로벌 위상에서 차이가 나며, 표준 기저 측정을 수행하면

두 상태가 동일한 확률로 결과를 산출합니다. 이 때문에 글로벌 위상에서 차이가 나는 두 양자 상태 벡터는 동등하다고 간주되며 본질적으로 동일한 상태로 간주됩니다.

예를 들어, 양자 상태

$|-\rangle = 1/\sqrt{2}\ |0\rangle - 1/\sqrt{2}\ |1\rangle$와

$-|-\rangle = -1/\sqrt{2}\ |0\rangle + 1/\sqrt{2}\ |1\rangle$

는 글로벌 위상에서 차이가 납니다 (이 예에서는 −1이 글로벌 위상) 따라서 동일한 상태로 간주됩니다.

반면, 양자 상태

$|+\rangle = 1/\sqrt{2}\ |0\rangle + 1/\sqrt{2}\ |1\rangle$와

$|-\rangle = 1/\sqrt{2}\ |0\rangle - 1/\sqrt{2}\ |1\rangle$

는 글로벌 위상에서 차이가 나지 않습니다. 두 상태 간의 유일한 차이는 더하기 기호가 빼기로 바뀌는 것인데, 이는 글로벌 위상 차이가 아니며 상대적인 위상 차이입니다. 상대적 위상 차이는 모든 벡터 항목에 영향을 미치는 것이 아니라 일부 항목에만 영향을 미칩니다. 이는 우리가 이미 1교시에서 관찰한 내용과 일치합니다. 즉, 상태 $|+\rangle$와 $|-\rangle$는 완벽하게 구별할 수 있으며, Hadamard 연산을 수행한 후 측정을 하면 다음과 같은 확률로 결과가 나타납니다.

$$\begin{aligned} \left|\langle 0|H|+\rangle\right|^2 &= 1 \qquad & \left|\langle 0|H|-\rangle\right|^2 &= 0 \\ \left|\langle 1|H|+\rangle\right|^2 &= 0 \qquad & \left|\langle 1|H|-\rangle\right|^2 &= 1. \end{aligned}$$

부수적인 이야기로, 여기서 우리는 양자 상태 벡터를 기반으로 한 단순화된 설명보다 밀도 행렬을 기반으로 한 양자 정보의 일반적인 설명이 가지는 또 다른 장점을 발견할 수 있습니다. 양자 정보의 일반적인 설명에서는 두 양자 상태 벡터가 글로벌 위상에 의해 차이가 나고, 따라서 본질적으로 동일한 양자 상태를 나타내는 degeneracy(퇴화)가 사라집니다. 즉, 두 밀도 행렬이 차이가 난다면 이는 통계적으로 구별할 수 있는 두 개의 구별된 양자 상태를 나타낸다고 할 수 있습니다.

복제 불가능 정리 (No-cloning theorem)

복제 불가능 정리는 알려지지 않은 양자 상태의 완벽한 복사본을 만드는 것이 불가능하다는 것을 보여줍니다.

정리 (복제 불가능 정리).
X와 Y는 적어도 두 개의 원소를 갖는 동일한 고전 상태 집합 Σ를 공유하는 시스템이라고 합시다. 그러면, 양자 상태 $|\phi\rangle$와 U라는 단위 연산자가 존재하여 (X,Y) 쌍에 대해 $U(|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle) = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$가 성립하지 않습니다. 즉, X의 상태 $|\psi\rangle$를 복제하려면, 시스템 Y를 (아무 상태 $|\phi\rangle$로든) 초기화하고, 결합된 시스템 (X,Y)에 대해 단위 연산자 U를 수행하여 $|\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$ 상태를 얻는 방법은 존재하지 않습니다.

이 정리의 증명은 사실 매우 간단합니다. 핵심은 이 맵핑이 선형이 아니기 때문입니다:

$|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle \mapsto |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$

이 식은 $|\psi\rangle$에 대해 선형적이지 않습니다.

특히, Σ에 적어도 두 개의 원소가 있으므로, $a,b \in \Sigma$로 $a \neq b$인 값을 선택할 수 있습니다. 만약, Y의 양자 상태 $|\phi\rangle$와 (X, Y) 쌍에 대한 단위 연산자 U가 존재한다고 가정하면, 다음이 성립해야 합니다:

$$U\big(|a\rangle \otimes |\phi\rangle\big) = |a\rangle \otimes |a\rangle \quad \text{and} \quad U\big(|b\rangle \otimes |\phi\rangle\big) = |b\rangle \otimes |b\rangle.$$

선형성에 의해, 첫 번째 인수에 대한 텐서 곱의 선형성과 두 번째 (벡터) 인수에 대한 행렬-벡터 곱셈의 선형성을 고려하면, 다음이 성립해야 합니다:

$$U\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|a\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}|b\rangle\right)\otimes|\phi\rangle\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}|a\rangle\otimes|a\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}|b\rangle\otimes|b\rangle.$$

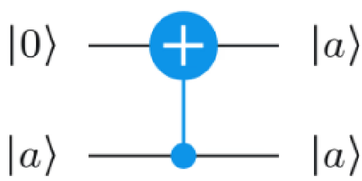
그러나, 모든 양자 상태 $|\psi\rangle$에 대해 $U(|\psi\rangle\otimes|\phi\rangle)=|\psi\rangle\otimes|\psi\rangle$여야 한다는 요구 조건에 따라, 다음이 성립해야 합니다:

$$\begin{aligned}
U&\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|a\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}|b\rangle\right)\otimes|\phi\rangle\right)\\
&=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|a\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}|b\rangle\right)\otimes\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|a\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}|b\rangle\right)\\
&=\frac{1}{2}|a\rangle\otimes|a\rangle+\frac{1}{2}|a\rangle\otimes|b\rangle+\frac{1}{2}|b\rangle\otimes|a\rangle+\frac{1}{2}|b\rangle\otimes|b\rangle\\
&\neq\frac{1}{\sqrt{2}}|a\rangle\otimes|a\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}|b\rangle\otimes|b\rangle
\end{aligned}$$

따라서 $|\phi\rangle$ 상태와 단위 연산자 U가 존재할 수 없다는 결론을 내릴 수 있습니다.

다음은 "복제 불가능 정리"에 대한 몇 가지 언급입니다. 첫 번째 언급은 위에서 제시한 복제 불가능 정리의 진술이 절대적이라는 점입니다. 즉, 완벽한 복제는 불가능하다고 명시되어 있지만, 두 개의 다른 양자 상태가 얼마나 비슷한지 측정하는 방법에 따라 제한된 정확도로 복제할 수 있다는 가능성에 대해서는 언급하지 않습니다. 실제로는 근사적인 복제에 제한을 두는 복제 불가능 정리의 진술과 근사 복제를 달성하는 방법이 존재하지만, 이와 관련된 논의는 근사 복제를 설명하는 데 필요한 요소들이 준비된 후로 미룰 예정입니다.

두 번째 언급은 복제 불가능 정리가 임의의 상태 $|\psi\rangle$를 복제할 수 없다는 내용이라는 점입니다. 예를 들어, 우리는 표준 기저 상태의 복제는 쉽게 만들 수 있습니다. 예를 들어, 우리는 제어-NOT(CNOT) 연산을 사용하여 큐비트 표준 기저 상태를 복제할 수 있습니다.



표준 기저 상태를 복제하는 데에는 어려움이 없지만, 이것이 복제 불가능 정리를 모순되게 하지 않습니다. 예를 들어, 제어-NOT 게이트를 사용하는 이 방법은 상태 $|+\rangle$의 복제를 성공적으로 만들지 못합니다.

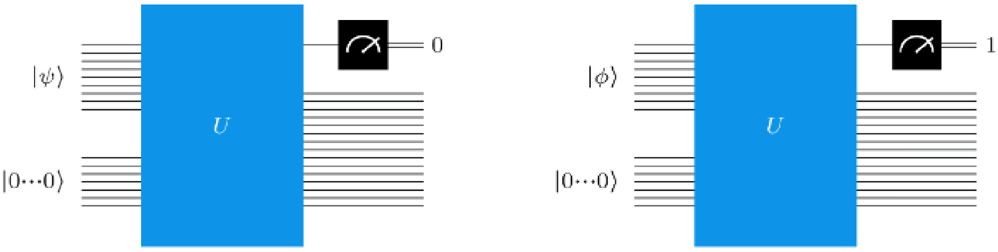
복제 불가능 정리에 대한 마지막 언급은, 이 정리가 사실 양자 정보에만 고유한 것이 아니라는 점입니다. 임의의 확률적 상태를 고전적인 (결정론적이거나 확률적인) 과정으로 복제하는 것도 불가능하다는 것입니다. 이는 직관적으로 이해할 수 있습니다. 누군가 확률적 상태에 있는 시스템을 건네주는데, 그 확률적 상태가 무엇인지 확실하지 않다고 상상해보세요. 예를 들어, 그들이 1과 10 사이의 숫자를 무작위로 생성했지만, 그 숫자를 어떻게 생성했는지 알려주지 않았다고 해봅시다. 그 확률적 상태의 두 개의 독립적인 복사본을 얻을 수 있는 물리적 과정은 확실히 존재하지 않습니다. 당신이 손에 쥔 것은 1과 10 사이의 숫자일 뿐이며, 다른 가능한 결과들의 확률을 어떻게 복원할지에 대한 충분한 정보가 없기 때문입니다. 수학적으로 말하면, 확률적 상태에 대한 복제 불가능 정리는 일반적인 복제 불가능 정리(양자 상태에 대한)의 방식으로 증명할 수 있습니다. 즉, 임의의 확률적 상태를 복제하는 것은 비선형 과정이기 때문에, 그것은 결코 확률 행렬로 표현될 수 없습니다.

비직교 상태는 완벽하게 구별할 수 없다

이번 수업에서 다룰 마지막 제한 사항은, 두 양자 상태 $|\psi\rangle$와 $|\phi\rangle$가 비직교인 경우, 즉 $\langle\phi|\psi\rangle \neq 0$일 때, 이들을 완벽하게 구별하는 것이 불가능하다는 것입니다.

사실, 우리는 논리적으로 동등한 내용을 증명할 것입니다: 두 상태를 완벽하게 구별할 수 있는 방법이 있다면, 그 두 상태는 반드시 직교해야 한다는 것입니다.

우리는 양자 회로가 유니터리 게이트의 여러 개의 조합과 최상위 큐비트에 대한 단일 표준 기저 측정으로 구성된다는 점에 집중할 것입니다. 두 상태 $|\psi\rangle$와 $|\phi\rangle$를 완벽하게 구별한다고 말하기 위해 요구하는 것은, 측정이 두 상태 중 하나에 대해서는 항상 값 0을, 다른 하나에 대해서는 항상 값 1을 결과로 준다는 것입니다. 정확히 말하면, 우리는 다음과 같은 다이어그램이 시사하는 대로 작동하는 양자 회로를 가지고 있다고 가정할 것입니다:



상자에 표시된 **U**는 회로의 모든 유니터리 게이트가 결합된 작용을 나타내는 유니터리 연산을 의미하며, 마지막 측정을 포함하지 않습니다. 상태 $|\psi\rangle$에 대해서는 측정 결과가 0이고, 상태 $|\phi\rangle$에 대해서는 측정 결과가 1이라는 가정에서 일반성이 손실되지 않습니다. 이러한 출력 값들이 반대로 되어도 분석은 본질적으로 달라지지 않습니다.

여기서 주목할 점은, 처음에 $|\psi\rangle$ 또는 $|\phi\rangle$를 저장하는 큐비트 외에도 회로가 추가적인 작업용 큐비트를 자유롭게 사용할 수 있다는 것입니다. 이 큐비트들은 처음에 각각 $|0\rangle$ 상태로 설정되어 있으며, 따라서 이들의 결합된 상태는 그림에서 $|0\cdots0\rangle$으로 나타내어집니다. 이 큐비트들은 회로에서 유용하게 사용될 수 있습니다. 이러한 작업용 큐비트를 사용하는 것은 매우 일반적이며, 다음 단원에서 이를 확인할 수 있을 것입니다.

이제 회로를 상태 $|\psi\rangle$ (그리고 초기화된 작업용 큐비트들)에 대해 실행했을 때 발생하는 상황을 고려해 봅시다. 측정이 수행되기 직전의 결과 상태는 다음과 같이 쓸 수 있습니다.

$$U\big(|0\cdots0\rangle|\psi\rangle\big) = |\gamma_0\rangle|0\rangle + |\gamma_1\rangle|1\rangle$$

두 벡터 $|\gamma_0\rangle$와 $|\gamma_1\rangle$는 최상위 큐비트를 제외한 모든 큐비트에 해당합니다. 일반적으로, 이러한 상태에 대해 최상위 큐비트의 측정 결과가 0 또는 1일 확률은 다음과 같습니다:

Pr(결과가 0일 확률) = $\| |\gamma_0\rangle \|^2$
Pr(결과가 1일 확률) = $\| |\gamma_1\rangle \|^2$

회로가 상태 $|\psi\rangle$에 대해 항상 0을 출력한다고 가정하면, $|\gamma_1\rangle = 0$이어야 하며, 따라서

$U(|0\cdots0\rangle|\psi\rangle) = |\gamma_0\rangle|0\rangle$

양변에 $U^\dagger$를 곱하면 다음과 같은 식이 나옵니다:

$|0\cdots0\rangle|\psi\rangle = U^\dagger(|\gamma_0\rangle|0\rangle)$. (7)

같은 방식으로 $|\phi\rangle$를 $|\psi\rangle$ 대신 사용하면, 다음과 같은 결론을 얻습니다:

$U(|0\cdots0\rangle|\phi\rangle) = |\delta_1\rangle|1\rangle$

어떤 벡터 $|\delta_1\rangle$에 대해

$|0\cdots0\rangle|\phi\rangle = U^\dagger(|\delta_1\rangle|1\rangle)$. (8)

이제 식 (7)과 (8)에서 오른쪽 벡터들에 대한 내적을 구해봅시다. 우리는

$(U^\dagger(|\gamma_0\rangle|0\rangle))^\dagger = (\langle\gamma_0|\langle 0|)U$

따라서 (7)의 벡터와 (8)의 벡터의 내적은

$(\langle\gamma_0|\langle 0|)UU^\dagger(|\delta_1\rangle|1\rangle) = (\langle\gamma_0|\langle 0|)(|\delta_1\rangle|1\rangle) = \langle\gamma_0|\delta_1\rangle\langle 0|1\rangle = 0.$

여기서 우리는 $UU^\dagger = I$라는 사실과 텐서곱 내적이 내적의 곱으로 분해된다는 사실을 사용했습니다:

$\langle u\otimes v|w\otimes x\rangle = \langle u|w\rangle\langle v|x\rangle$

이는 벡터 $|u\rangle$와 $|w\rangle$가 동일한 수의 항목을 가지며, $|v\rangle$와 $|x\rangle$가 동일한 수의 항목을 가질 때 내적 $\langle u|w\rangle$와 $\langle v|x\rangle$의 의미가 성립한다는 것을 가정합니다. $\langle\gamma_0|\delta_1\rangle\langle 0|1\rangle$의 값은 $\langle 0|1\rangle = 0$이므로 사실상 중요하지 않다는 점에 유의하십시오. 이는 우리가 이 두 벡터에 대해 알지 못하기 때문에 다행입니다.

마지막으로, (7)과 (8) 식에 나타난 벡터들에 대해 내적을 취하면 왼쪽 항에 대한 식에서 결과적으로 같은 0 값을 얻어야 하므로 다음이 성립합니다:

$0 = (|0\cdots0\rangle|\psi\rangle)^\dagger(|0\cdots0\rangle|\phi\rangle) = \langle 0\cdots0|0\cdots0\rangle\langle\psi|\phi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle.$

우리는 우리가 원하는 것을 결론 지었습니다. 즉, $|\psi\rangle$와 $|\phi\rangle$는 직교한다는 것입니다: $\langle\psi|\phi\rangle = 0.$

참고로, 두 상태가 직교하는 경우, 이를 완벽하게 구별할 수 있습니다. 두 상태 $|\phi\rangle$와 $|\psi\rangle$가 $\langle\phi|\psi\rangle = 0$ 일 때, 우리는 이러한 상태를 다음과 같은 행렬을 사용하여 완벽하게 구별할 수 있습니다:

$\{|\phi\rangle\langle\phi|, I - |\phi\rangle\langle\phi|\}.$

상태 $|\phi\rangle$에 대해서는 첫 번째 결과가 항상 얻어집니다:

$\| |\phi\rangle\langle\phi| |\phi\rangle \|^2 = \| |\phi\rangle\langle\phi|\phi\rangle \|^2 = \| |\phi\rangle \|^2 = 1,$
$\| (I - |\phi\rangle\langle\phi|)|\phi\rangle \|^2 = \| |\phi\rangle - |\phi\rangle\langle\phi|\phi\rangle \|^2 = \| |\phi\rangle - |\phi\rangle \|^2 = 0.$

그리고, 상태 $|\psi\rangle$에 대해서는 두 번째 결과가 항상 얻어집니다:

$\| |\phi\rangle\langle\phi| |\psi\rangle \|^2 = \| |\phi\rangle\langle\phi|\psi\rangle \|^2 = \| 0 \|^2 = 0,$
$\| (I - |\phi\rangle\langle\phi|)|\psi\rangle \|^2 = \| |\psi\rangle - |\phi\rangle\langle\phi|\psi\rangle \|^2 = \| |\psi\rangle \|^2 = 1.$

정리

- 양자 정보의 제한사항

  양자 정보는 고전 정보와 몇 가지 중요한 차이점이 있지만, 그 가능성을 이해하려면 양자 정보의 제한 사항을 먼저 파악하는 것이 중요합니다. 이를 통해 양자 정보가 어떤 작업을 가능하게 하고, 고전 정보로는 불가능한 작업에 대한 이해를 돕습니다.

- 글로벌 위상의 무의미성

  양자 상태 벡터의 표현에서 나타나는 제약 중 하나는 **글로벌 위상**의 무의미성입니다. 양자 상태 벡터 $|\psi\rangle$와 $|\phi\rangle$가 글로벌 위상에서 차이가 나도, 두 상태는 동일한 확률 분포를 생성하기 때문에 본질적으로 같은 상태로 간주됩니다.

  - **글로벌 위상**: 복소수 α가 단위 원 위에 있을 때, $|\phi\rangle = \alpha|\psi\rangle$. 두 상태는 표준 기저 측정 시 동일한 확률을 생성하며, 어떤 유니터리 연산을 적용해도 글로벌 위상 차이는 그대로 유지됩니다. 따라서, 글로벌 위상 차이는 양자 상태의 물리적 구별에 영향을 미치지 않습니다.

    예시:

    - $|-\rangle = 1/\sqrt{2}\ |0\rangle - 1/\sqrt{2}\ |1\rangle$과 $-|-\rangle = -1/\sqrt{2}\ |0\rangle + 1/\sqrt{2}\ |1\rangle$는 글로벌 위상에서 차이가 있지만 동일한 상태로 간주됩니다.

- 복제 불가능 정리

복제 불가능 정리는 양자 상태를 완벽하게 복제하는 것이 불가능하다는 원리입니다. 이 정리는 **선형성**을 이용하여 증명됩니다. 양자 상태 $|\psi\rangle$를 복제하려면, 시스템 Y를 초기화하고, 시스템 X와 Y에 대해 단위 연산자 U를 적용하여 $|\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$ 상태를 만들 수 있어야 하지만, 이는 불가능합니다.

- **증명**: 복제를 시도하면 선형성에 위배되어 복제가 불가능함을 알 수 있습니다. 예를 들어, 두 상태 $a, b \in \Sigma$에 대해 복제가 이루어지지 않습니다.

복제 불가능 정리의 특징:

- 복제는 양자 상태 $|\psi\rangle$에 대해 불가능하지만, 표준 기저 상태는 복제할 수 있습니다.
- 이는 양자 정보만의 특성이 아니라, 고전적인 확률적 상태의 복제에도 적용됩니다. 확률적 상태는 비선형 과정으로 복제할 수 없기 때문입니다.

- 비직교 상태는 완벽하게 구별할 수 없다

  두 양자 상태 $|\psi\rangle$와 $|\phi\rangle$가 비직교일 때 ($\langle\phi|\psi\rangle \neq 0$), 이들을 완벽하게 구별하는 것은 불가능합니다. 양자 상태를 구별하는 것은 완벽한 확률적 구별을 의미하며, 비직교 상태 간에는 그 차이를 정확히 구별하기 위한 완벽한 방법이 존재하지 않습니다.

  이러한 제한 사항들은 양자 정보가 고전 정보와 다른 방식으로 작동하는 이유를 이해하는 데 중요한 기초를 제공합니다.