응용물리연구실심화실습3 (PHY3075)

2024년 12월 3주차

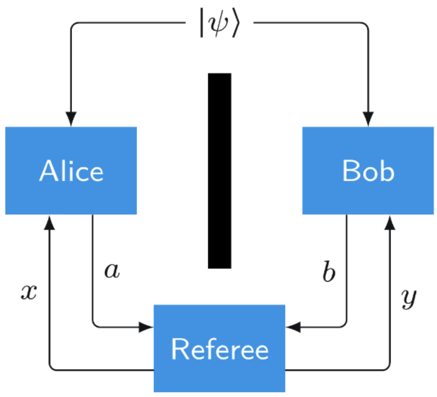
응용물리학과 2022006971 이민성

번역

- CHSH 게임

  CHSH 게임 전략

  이 시점에서 자연스럽게 떠오르는 질문은, Alice와 Bob이 양자 전략을 사용하면 더 나은 결과를 얻을 수 있는지 여부입니다. 특히, 아래 그림에서 제시된 것처럼, 게임을 시작하기 전에 얽힌 양자 상태를 공유했다면, 그들의 승리 확률을 높일 수 있을까요?



  정답은 "그렇다"이며, 이것이 이 예제의 핵심 포인트이자 흥미로운 이유입니다. 이제 Alice와 Bob이 얽힘을 사용하여 이 게임에서 어떻게 더 나은 결과를 얻을 수 있는지 정확히 살펴보겠습니다.

  필요한 벡터와 행렬 :

  우선, 각 실수 θ (라디안 단위로 측정되는 각도로 생각할 수 있음)에 대해 큐비트 상태 벡터 $| \psi \theta \rangle$ 를 정의해야 합니다. 정의는 다음과 같습니다.

$$|\psi_\theta\rangle = \cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)|1\rangle$$

  여기에는 간단한 예제들이 있습니다.

$$\begin{aligned} |\psi_0\rangle &= |0\rangle \\ |\psi_{\pi/2}\rangle &= |1\rangle \\ |\psi_{\pi/4}\rangle &= |+\rangle \\ |\psi_{-\pi/4}\rangle &= |-\rangle \end{aligned}$$

  아래의 분석에서 다룰 몇 가지 다른 예들도 있습니다:

$$
\begin{aligned}
|\psi_{-\pi/8}\rangle &= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}|0\rangle - \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}|1\rangle \\
|\psi_{\pi/8}\rangle &= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}|1\rangle \\
|\psi_{3\pi/8}\rangle &= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}|1\rangle \\
|\psi_{5\pi/8}\rangle &= -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}|1\rangle
\end{aligned}
$$

일반적인 형태를 살펴보면, 이 벡터들 중 임의의 두 벡터 사이의 내적이 다음 공식에 의해 계산된다는 것을 알 수 있습니다:

$$\langle\psi_\alpha|\psi_\beta\rangle = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) = \cos(\alpha-\beta).$$

자세히 살펴보면, 이 벡터들은 실수 항목만 가지므로 복소켤레에 대해 신경 쓸 필요가 없습니다. 내적은 코사인 항들의 곱과 사인 항들의 곱의 합으로 계산됩니다. 그런 다음 이 값을 단순화하기 위해 "각도 덧셈 공식" 중 하나를 사용할 수 있습니다. 이 공식은 실수 단위 벡터 간 내적이 그들 사이의 각도에 대한 코사인 값임을 나타내는 기하학적 해석을 제공합니다.

이제, 이 벡터들의 텐서곱과 상태 ㅣϕ+〉 간의 내적을 계산하면, 분모에 루트2가 포함된 유사한 식을 얻을 수 있습니다:

$$\langle\psi_\alpha \otimes \psi_\beta|\phi^+\rangle = \frac{\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)}{\sqrt{2}} = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sqrt{2}}.$$

이 특정 내적은 곧 설명할 이유로 중요하지만, 지금은 단순히 이 공식을 관찰하고 있습니다.

다음으로, 각 각도 θ에 대해 다음과 같은 단위 행렬 U_θ를 정의합니다:

$$U_\theta = |0\rangle\langle\psi_\theta| + |1\rangle\langle\psi_{\theta+\pi/2}|$$

직관적으로, 이 행렬은 연산으로서 ㅣψθ〉를 ㅣ0〉으로, ㅣψθ+π/2〉를 ㅣ1〉로 변환합니다. 이 행렬이 단위 행렬임을 확인하기 위해 중요한 관찰은 벡터 ㅣψθ〉와 ㅣψθ+π/2〉가 모든 각도 θ에 대해 직교한다는 점입니다:

$$\langle\psi_\theta|\psi_{\theta+\pi/2}\rangle = \cos(\pi/2) = 0.$$

그러므로 우리는 찾았다.

$$
\begin{aligned}
U_\theta U_\theta^\dagger &= \big(|0\rangle\langle\psi_\theta| + |1\rangle\langle\psi_{\theta+\pi/2}|\big)\big(|\psi_\theta\rangle\langle 0| + |\psi_{\theta+\pi/2}\rangle\langle 1|\big) \\
&= |0\rangle\langle\psi_\theta|\psi_\theta\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle\psi_\theta|\psi_{\theta+\pi/2}\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle\psi_{\theta+\pi/2}|\psi_\theta\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle\psi_{\theta+\pi/2}|\psi_{\theta+\pi/2} \\
&= |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| \\
&= \mathbb{I}.
\end{aligned}
$$

우리는 이 행렬을 다음과 같이 명시적으로 표현할 수도 있습니다:

$$U_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \cos(\theta + \pi/2) & \sin(\theta + \pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

이는 회전 행렬의 예이며, 특히 실수 항목을 가지는 2차원 벡터를 원점을 기준으로 –θ만큼 회전시킵니다. 만약 다양한 형태의 회전에 이름을 붙이고 매개변수화하는 표준 관례를 따른다면, 우리는 Uθ=Ry(–2θ)로 쓸 수 있습니다.

전략 설명

이제 양자 전략을 설명할 수 있습니다.

앨리스와 밥은 게임을 시작할 때 e-bit을 공유합니다: 앨리스는 큐비트 A를 가지고, 밥은 큐비트 BB를 가지며, 두 큐비트 (X,Y)는 ∣ϕ+⟩ 상태에 있습니다.

앨리스의 행동은 다음과 같습니다:

- 만약 그녀의 질문이 x=0이라면, 그녀는 자신의 큐비트 X에 U_0를 적용합니다.
- 만약 그녀의 질문이 x=1이라면, 그녀는 자신의 큐비트 A에 U_pi/4를 적용합니다.

앨리스가 A에 수행하는 연산은 다음과 같이 설명할 수도 있습니다:

$$\begin{cases} U_0 & \text{if } x = 0 \\ U_{\pi/4} & \text{if } x = 1 \end{cases}$$

그녀가 이 연산을 적용한 후, 앨리스는 표준 기저 측정을 사용하여 A를 측정하고, 측정 결과를 a로 설정합니다.

밥의 행동은 다음과 같습니다.

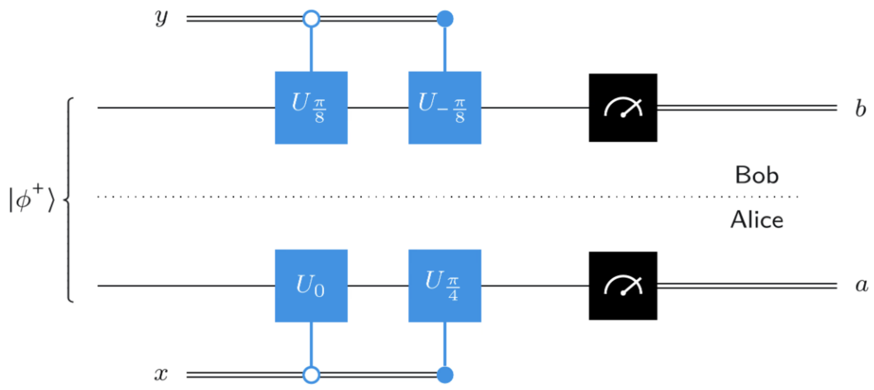
- 만약 그의 질문이 y=0이라면, 그는 자신의 큐비트 B에 Uπ/8를 적용합니다.
- 만약 그의 질문이 y=1이라면, 그는 자신의 큐비트 B에 U−π/8를 적용합니다.

앨리스와 마찬가지로, 우리는 밥의 B에 대한 연산을 다음과 같이 표현할 수 있습니다:

$$\begin{cases} U_{\pi/8} & \text{if } y = 0 \\ U_{-\pi/8} & \text{if } y = 1 \end{cases}$$

그가 이 연산을 적용한 후, 그는 표준 기저 측정을 사용하여 B를 측정하고, 측정 결과를 b로 설정합니다.

여기 이 전략을 설명하는 양자 회로 다이어그램이 있습니다:



이 다이어그램에서 우리는 두 개의 일반적인 제어 게이트를 볼 수 있습니다. 하나는 위쪽에 U−π/8에 대한 것이고, 하나는 아래쪽에 Uπ/4에 대한 것입니다. 또한 두 개의 게이트가 제어 게이트처럼 보이지만, 하나는 위쪽에 Uπ/8에 대한 것이고, 하나는 아래쪽에 U_0에 대한 것입니다. 하지만 제어를 나타내는 원이 채워져 있지 않다는 점에서 다릅니다. 이것은 제어가 1이 아닌 0일 때 게이트가 수행되는 다른 종류의 제어 게이트를 나타냅니다. 따라서 실질적으로 밥은 y=0일 때 Uπ/8를 그의 큐비트에 적용하고, y=1일 때는 U−π/8를 적용합니다. 앨리스는 x=0일 때 U0를 그녀의 큐비트에 적용하고, x=1일 때는 Uπ/4U를 적용합니다. 이는 위에서 설명한 프로토콜과 일치합니다.

이제 이 전략이 얼마나 잘 작동하는지 알아내야 합니다. 우리는 네 가지 가능한 질문 쌍을 개별적으로 살펴봄으로써 이를 수행할 것입니다.

사례별 분석

사례 1: (x,y)=(0,0)

이 경우, 앨리스는 그녀의 큐비트에 U0를 적용하고, 밥은 그의 큐비트에 Uπ/8를 적용합니다. 그래서 두 큐비트 (A,B)의 상태는 그들이 연산을 수행한 후 다음과 같습니다:

$$
\begin{aligned}
(U_0 \otimes U_{\pi/8})|\phi^+\rangle &= |00\rangle\langle\psi_0 \otimes \psi_{\pi/8}|\phi^+\rangle + |01\rangle\langle\psi_0 \otimes \psi_{5\pi/8}|\phi^+\rangle \\
&\quad + |10\rangle\langle\psi_{\pi/2} \otimes \psi_{\pi/8}|\phi^+\rangle + |11\rangle\langle\psi_{\pi/2} \otimes \psi_{5\pi/8}|\phi^+\rangle \\
&= \frac{\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)|00\rangle + \cos\left(-\frac{5\pi}{8}\right)|01\rangle + \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)|10\rangle + \cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)|11\rangle}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

따라서 네 가지 가능한 답변 쌍 (a,b)에 대한 확률은 다음과 같습니다:

$$\Pr\big((a,b)=(0,0)\big)=\frac{1}{2}\cos^2\Big(-\frac{\pi}{8}\Big)=\frac{2+\sqrt{2}}{8}$$
$$\Pr\big((a,b)=(0,1)\big)=\frac{1}{2}\cos^2\Big(-\frac{5\pi}{8}\Big)=\frac{2-\sqrt{2}}{8}$$
$$\Pr\big((a,b)=(1,0)\big)=\frac{1}{2}\cos^2\Big(\frac{3\pi}{8}\Big)=\frac{2-\sqrt{2}}{8}$$
$$\Pr\big((a,b)=(1,1)\big)=\frac{1}{2}\cos^2\Big(-\frac{\pi}{8}\Big)=\frac{2+\sqrt{2}}{8}$$

그런 다음 a=b와 a≠b에 대한 확률을 적절히 합산하여 얻을 수 있습니다:

$$\Pr(a=b)=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$$
$$\Pr(a\neq b)=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

따라서 질문 쌍 (0,0)에 대해, 앨리스와 밥은 a=b일 때 승리하며, 이 경우 그들이 승리할 확률은 (2+루트(2))/4입니다.

Case 2: (x,y)=(0,1)

이 경우 Alice는 자신의 큐비트에 U0 연산을 수행하고, Bob은 자신의 큐비트에 U−π/8 연산을 수행합니다. 따라서 두 큐비트 (A,B)의 상태는 다음과 같습니다:

$$\begin{aligned}\big(U_0\otimes U_{-\pi/8}\big)|\phi^+\rangle &= |00\rangle\langle\psi_0\otimes\psi_{-\pi/8}|\phi^+\rangle+|01\rangle\langle\psi_0\otimes\psi_{3\pi/8}|\phi^+\rangle\\ &\quad+|10\rangle\langle\psi_{\pi/2}\otimes\psi_{-\pi/8}|\phi^+\rangle+|11\rangle\langle\psi_{\pi/2}\otimes\psi_{3\pi/8}|\phi^+\rangle\\ &=\frac{\cos\big(\frac{\pi}{8}\big)|00\rangle+\cos\big(-\frac{3\pi}{8}\big)|01\rangle+\cos\big(\frac{5\pi}{8}\big)|10\rangle+\cos\big(\frac{\pi}{8}\big)|11\rangle}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

따라서 네 가지 가능한 답 쌍 (a,b)에 대한 확률은 다음과 같습니다:

$$\Pr\big((a,b)=(0,0)\big) = \frac{1}{2}\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{8}$$

$$\Pr\big((a,b)=(0,1)\big) = \frac{1}{2}\cos^2\left(-\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{8}$$

$$\Pr\big((a,b)=(1,0)\big) = \frac{1}{2}\cos^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{8}$$

$$\Pr\big((a,b)=(1,1)\big) = \frac{1}{2}\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{8}$$

또한, a=b와 a≠b에 대한 확률을 합산하여 구할 수 있습니다:

$$\Pr(a=b) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

$$\Pr(a\neq b) = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

따라서 질문 쌍 (0,1)에 대해 Alice와 Bob은 a=b일 경우 승리합니다. 이 경우 승리 확률은 다음과 같습니다:

$$\frac{2+\sqrt{2}}{4}.$$

Case 3: (x,y)=(1,0)

이 경우, Alice는 자신의 큐비트에 Uπ/4 연산을 수행하고, Bob은 자신의 큐비트에 Uπ/8 연산을 수행합니다. 따라서 두 큐비트 (A,B)의 상태는 다음과 같습니다:

$$\begin{aligned}\big(U_{\pi/4}\otimes U_{\pi/8}\big)|\phi^+\rangle &= |00\rangle\langle\psi_{\pi/4}\otimes\psi_{\pi/8}|\phi^+\rangle + |01\rangle\langle\psi_{\pi/4}\otimes\psi_{5\pi/8}|\phi^+\rangle \\ &\quad + |10\rangle\langle\psi_{3\pi/4}\otimes\psi_{\pi/8}|\phi^+\rangle + |11\rangle\langle\psi_{3\pi/4}\otimes\psi_{5\pi/8}|\phi^+\rangle \\ &= \frac{\cos\big(\frac{\pi}{8}\big)|00\rangle + \cos\big(-\frac{3\pi}{8}\big)|01\rangle + \cos\big(\frac{5\pi}{8}\big)|10\rangle + \cos\big(\frac{\pi}{8}\big)|11\rangle}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

따라서 네 가지 가능한 답 쌍 (a,b)(a, b)에 대한 확률은 다음과 같습니다:

$$\Pr\big((a,b)=(0,0)\big) = \frac{1}{2}\cos^2\Big(\frac{\pi}{8}\Big) = \frac{2+\sqrt{2}}{8}$$
$$\Pr\big((a,b)=(0,1)\big) = \frac{1}{2}\cos^2\Big(-\frac{3\pi}{8}\Big) = \frac{2-\sqrt{2}}{8}$$
$$\Pr\big((a,b)=(1,0)\big) = \frac{1}{2}\cos^2\Big(\frac{5\pi}{8}\Big) = \frac{2-\sqrt{2}}{8}$$
$$\Pr\big((a,b)=(1,1)\big) = \frac{1}{2}\cos^2\Big(\frac{\pi}{8}\Big) = \frac{2+\sqrt{2}}{8}$$

또한, a=b와 a≠b에 대한 확률을 합산하여 구할 수 있습니다:

$$\Pr(a=b) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$
$$\Pr(a\neq b) = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

따라서 질문 쌍 (1,0)에 대해 Alice와 Bob은 a=b일 경우 승리합니다. 이 경우 승리 확률은 다음과 같습니다:

$$\frac{2+\sqrt{2}}{4}.$$

Case 4: (x, y) = (1, 1)

마지막 경우는 조금 다릅니다. 이는 x와 y가 모두 1일 때, Alice와 Bob이 승리하는 조건이 다르기 때문입니다. 이 경우, Alice와 Bob은 a≠b일 때 승리합니다. Alice는 자신의 큐비트에 Uπ/4를 수행하고, Bob은 자신의 큐비트에 U−π/8를 수행합니다. 따라서 두 큐비트의 상태는 다음과 같이 변환됩니다:

$$\begin{aligned}\big(U_{\pi/4}\otimes U_{-\pi/8}\big)|\phi^+\rangle &= |00\rangle\langle\psi_{\pi/4}\otimes\psi_{-\pi/8}|\phi^+\rangle + |01\rangle\langle\psi_{\pi/4}\otimes\psi_{3\pi/8}|\phi^+\rangle \\ &\quad + |10\rangle\langle\psi_{3\pi/4}\otimes\psi_{-\pi/8}|\phi^+\rangle + |11\rangle\langle\psi_{3\pi/4}\otimes\psi_{3\pi/8}|\phi^+\rangle \\ &= \frac{\cos\big(\frac{3\pi}{8}\big)|00\rangle + \cos\big(-\frac{\pi}{8}\big)|01\rangle + \cos\big(\frac{7\pi}{8}\big)|10\rangle + \cos\big(\frac{3\pi}{8}\big)|11\rangle}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

각 결과 쌍 (a,b)에 대한 확률은 다음과 같이 계산됩니다:

$$
\begin{aligned}
\Pr\big((a,b)=(0,0)\big) &= \frac{1}{2}\cos^2\Big(\frac{3\pi}{8}\Big) = \frac{2-\sqrt{2}}{8} \\
\Pr\big((a,b)=(0,1)\big) &= \frac{1}{2}\cos^2\Big(-\frac{\pi}{8}\Big) = \frac{2+\sqrt{2}}{8} \\
\Pr\big((a,b)=(1,0)\big) &= \frac{1}{2}\cos^2\Big(\frac{7\pi}{8}\Big) = \frac{2+\sqrt{2}}{8} \\
\Pr\big((a,b)=(1,1)\big) &= \frac{1}{2}\cos^2\Big(\frac{3\pi}{8}\Big) = \frac{2-\sqrt{2}}{8}
\end{aligned}
$$

이 경우에는 확률 분포가 이전 세 가지 경우와 자리를 바꾼 것처럼 보입니다.

a = b와 a ≠ b의 확률 :

$$
\Pr(a=b) = \frac{2-\sqrt{2}}{4}
$$
$$
\Pr(a\neq b) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}
$$

이 경우 Alice와 Bob의 승리 확률 :

질문 쌍이 (x,y)=(1,1)일 때, Alice와 Bob은 a≠b일 때 승리하므로, 이 경우 승리 확률은 다음과 같습니다:

$$
\frac{2+\sqrt{2}}{4}.
$$

모든 경우에서 Alice와 Bob의 전체 승리 확률은 다음과 같습니다:

$$
\frac{2+\sqrt{2}}{4} \approx 0.85.
$$

이는 고전적 전략이 최대 3/4=0.75의 승리 확률을 가질 수 있다는 점을 고려하면 상당히 높은 값입니다. 이러한 결과는 양자 전략의 흥미로운 예로, Tsirelson의 불평등(Tsirelson's inequality)으로 알려져 있습니다. 이 불평등은 Boris Tsirelson에 의해 처음 증명되었으며, CHSH 실험을 게임으로 묘사한 최초의 사례이기도 합니다. Tsirelson의 불평등에 따르면, 어떤 얽힘 상태나 측정 방법을 선택해도 이 이상의 승리 확률을 얻을 수 없습니다.

기하학적 그림 :

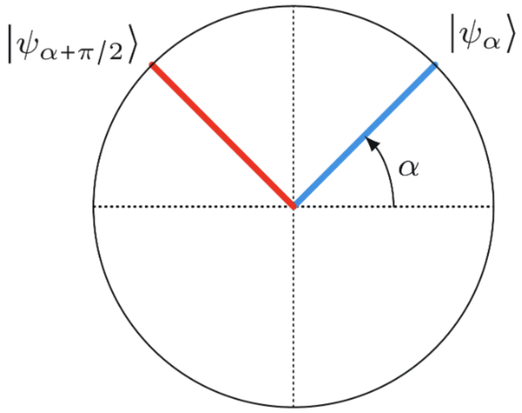
위에서 설명한 전략을 기하학적으로 생각할 수도 있습니다. 이는 Alice와 Bob의 연산에 대해 선택된 다양한 각도들 간의 관계를 이해하는 데 유용할 수 있습니다.

Alice가 실제로 수행하는 것은 질문 x에 따라 각도 α를 선택한 뒤, 자신의 큐비트에 Uα를 적용하고 측정하는 것입니다. 마찬가지로, Bob은 y에 따라 각도 β를 선택한 뒤, 자신의 큐비트에 Uβ를 적용하고 측정합니다. 여기서 우리는 α와 β를 다음과 같이 선택했습니다:

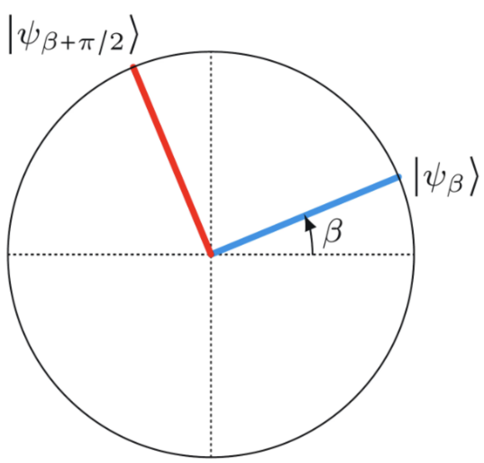
$$\alpha = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \pi/4 & x = 1 \end{cases}$$

$$\beta = \begin{cases} \pi/8 & y = 0 \\ -\pi/8 & y = 1. \end{cases}$$

하지만 지금은 α와 β를 임의의 값으로 가정해 보겠습니다. α를 선택함으로써 앨리스는 다음과 같은 벡터의 직교 기준을 효과적으로 정의할 수 있습니다:



Bob도 마찬가지로 각도가 β:



벡터의 색상은 Alice와 Bob의 답변에 해당합니다: 0은 파란색, 1은 빨간색입니다.

이제, (3)과 (4)를 결합하면 다음 공식을 얻을 수 있습니다:

$$\langle \psi_\alpha \otimes \psi_\beta | \phi^+ \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \psi_\alpha | \psi_\beta \rangle;$$

이는 모든 실수 α와 β에 대해 성립합니다.

위에서 진행한 분석과 동일한 유형의 분석을 α와 β를 변수로 하여 수행하면 다음을 얻을 수 있습니다:

$$\begin{aligned}
&(U_\alpha \otimes U_\beta)|\phi^+\rangle \\
&\quad = |00\rangle\langle \psi_\alpha \otimes \psi_\beta|\phi^+\rangle + |01\rangle\langle \psi_\alpha \otimes \psi_{\beta+\pi/2}|\phi^+\rangle \\
&\qquad + |10\rangle\langle \psi_{\alpha+\pi/2} \otimes \psi_\beta|\phi^+\rangle + |11\rangle\langle \psi_{\alpha+\pi/2} \otimes \psi_{\beta+\pi/2}|\phi^+\rangle \\
&\quad = \frac{\langle \psi_\alpha|\psi_\beta\rangle|00\rangle + \langle \psi_\alpha|\psi_{\beta+\pi/2}\rangle|01\rangle + \langle \psi_{\alpha+\pi/2}|\psi_\beta\rangle|10\rangle + \langle \psi_{\alpha+\pi/2}|\psi_{\beta+\pi/2}\rangle|11\rangle}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

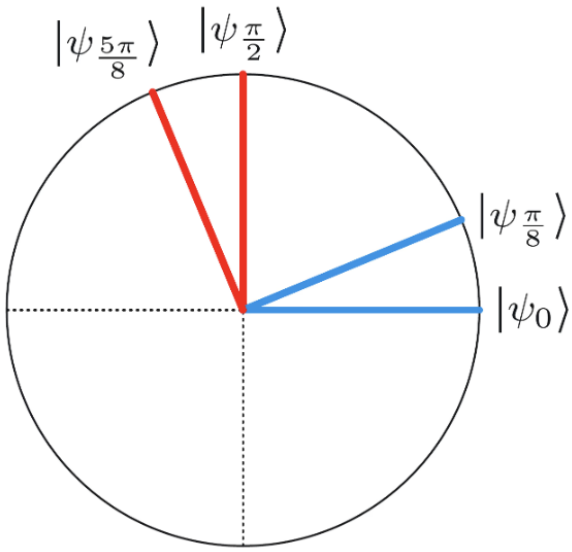
따라서 우리는 다음 두 공식을 도출할 수 있습니다:

$$\begin{aligned}
\Pr(a = b) &= \frac{1}{2}|\langle \psi_\alpha|\psi_\beta\rangle|^2 + \frac{1}{2}|\langle \psi_{\alpha+\pi/2}|\psi_{\beta+\pi/2}\rangle|^2 = \cos^2(\alpha - \beta) \\
\Pr(a \neq b) &= \frac{1}{2}|\langle \psi_\alpha|\psi_{\beta+\pi/2}\rangle|^2 + \frac{1}{2}|\langle \psi_{\alpha+\pi/2}|\psi_\beta\rangle|^2 = \sin^2(\alpha - \beta).
\end{aligned}$$

위의 식들을 Alice와 Bob이 선택한 기저를 겹쳐 놓는다고 상상함으로써 그림과 연결할 수 있습니다.

전략 탐구

(x,y)=(0,0)일 때, Alice와 Bob은 α=0과 β=π/8을 선택하며, 그들의 기저를 겹쳐 놓으면 다음 그림을 얻습니다:



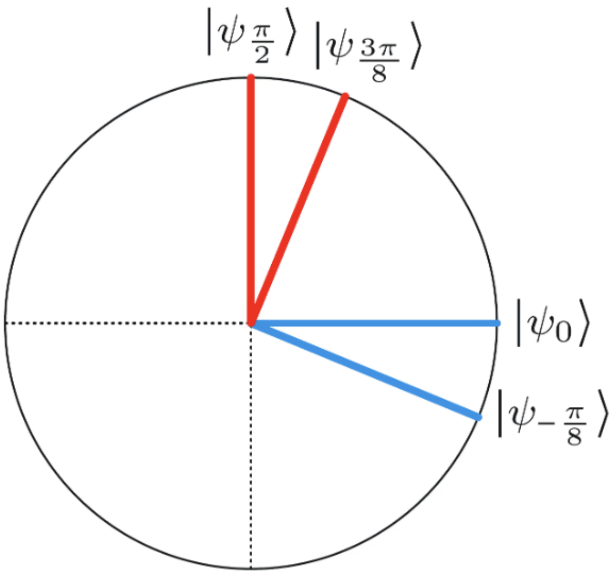
빨간 벡터들 사이의 각도는 π/8이며, 파란 벡터들 사이의 각도도 동일하게 π/8입니다. Alice와 Bob의 결과가 일치할 확률은 이 각도의 코사인 제곱값으로 표현됩니다:

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4},$$

반면, 결과가 불일치할 확률은 이 각도의 사인 제곱값으로 나타납니다:

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

(x,y)=(0,1)일 때, Alice와 Bob은 α=0과 β=−π/8을 선택하며, 그들의 기저를 겹쳐 놓으면 다음 그림을 얻습니다:



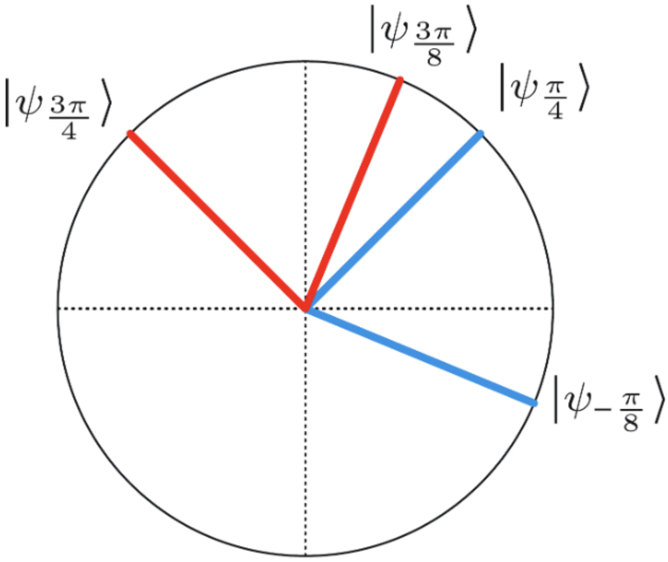
기저는 바뀌었지만 각도는 변하지 않았습니다. 이번에도 동일한 색의 벡터들 사이의 각도는 π/8입니다. Alice와 Bob의 결과가 일치할 확률은 다음과 같습니다:

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4},$$

그리고 결과가 불일치할 확률은 다음과 같습니다:

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

(x,y)=(1,1)일 때, Alice와 Bob은 α=π/4와 β=−π/8을 선택합니다. 그들의 기저를 겹쳐 놓으면 이번에는 다른 일이 일어난 것을 볼 수 있습니다:



각도가 이렇게 선택되었기 때문에, 이번에는 동일한 색의 벡터들 사이의 각도가 π/8이 아닌 3π/8입니다. Alice와 Bob의 결과가 일치할 확률은 여전히 이 각도의 코사인 제곱값이지만, 이번 값은 다음과 같습니다:

$$\cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

결과가 불일치할 확률은 이 각도의 사인 제곱값이며, 이번 경우에는 다음과 같습니다:

$$\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}.$$

주석

CHSH 게임과 같은 실험의 기본 아이디어는 얽힘(entanglement)이 고전적 설명과 일치하지 않는 통계적 결과를 이끈다는 점에 있습니다. 이는 Bell 상태의 이름을 딴 John Bell에 의해 제안되었습니다. 이런 이유로, 이러한 유형의 실험을 종종 Bell 테스트라고 부릅니다. 또한 Bell의 정리라고도 불리는데, 이는 여러 방식으로 공식화될 수 있지만, 그 본질은 양자 역학이 이른바 지역적 숨은 변수(local hidden variable) 이론과 양립할 수 없다는 것입니다. CHSH 게임은 Bell 테스트의 매우 깔끔하고 좋은 예이며, Bell의 정리를 증명하거나 보여주는 것으로 볼 수 있습니다.

CHSH 게임은 양자 정보 이론이 정확한 이론임을 실험적으로 테스트할 수 있는 한 가지 방법을 제공합니다. 위에서 설명한 얽힘을 기반으로 한 전략들을 구현하고 테스트하는 CHSH 게임 실험을 수행할 수 있습니다. 이는 얽힘이 실제로 존재한다는 점에 대해 높은 수준의 신뢰를 제공합니다. 얽힘을 설명하기 위해 우리가 종종 사용하는 모호하거나 시적인 방식과는 달리, CHSH 게임은 얽힘을 관찰할 수 있는 구체적이고 실험 가능한 방법을 제공합니다. 2022년 노벨 물리학상은 이러한 연구의 중요성을 인정한 것입니다. 이 상은 Alain Aspect, John Clauser(CHSH의 C), Anton Zeilinger에게 수여되었으며, 이들은 Bell 테스트를 통해 얽힘이 있는 광자를 관찰한 공로를 인정받았습니다.

Qiskit 구현

```
# Required imports

from qiskit import QuantumCircuit
from qiskit_aer.primitives import Sampler
from numpy import pi
from numpy.random import randint
```

위에서 정의한 양자 전략과 함께 CHSH 게임을 키스킷에서 다음과 같이 구현할 수 있습니다.

먼저, 임의의 전략을 인자로 연결할 수 있는 게임 자체의 정의가 있습니다.

```
def chsh_game(strategy):
    """Plays the CHSH game
    Args:
        strategy (callable): A function that takes two bits (as `int`s)
and
            returns two bits (also as `int`s). The strategy must follow
the
            rules of the CHSH game.
    Returns:
        int: 1 for a win, 0 for a loss.
    """
    # Referee chooses x and y randomly
    x, y = randint(0, 2), randint(0, 2)

    # Use strategy to choose a and b
    a, b = strategy(x, y)

    # Referee decides if Alice and Bob win or lose
    if (a != b) == (x & y):
        return 1  # Win
    return 0  # Lose
```

이제 앨리스와 밥의 질문에 따라 회로를 출력하는 함수를 만들어 보겠습니다. 간단하게 하기 위해 큐비트의 기본 이름은 그대로 두고, 내장된 앨리스와 밥의 동작에 대한 R_y(θ) 게이트입니다.

```
def chsh_circuit(x, y):
    """Creates a `QuantumCircuit` that implements the best CHSH strateg
y.
    Args:
        x (int): Alice's bit (must be 0 or 1)
        y (int): Bob's bit (must be 0 or 1)
    Returns:
        QuantumCircuit: Circuit that, when run, returns Alice and Bob's
```

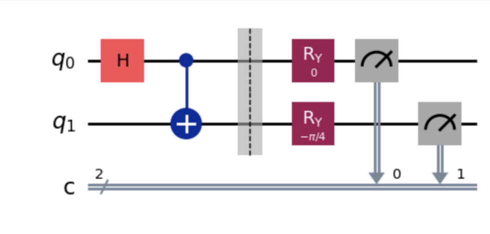
```
            answer bits.
    """
    qc = QuantumCircuit(2, 2)
    qc.h(0)
    qc.cx(0, 1)
    qc.barrier()

    # Alice
    if x == 0:
        qc.ry(0, 0)
    else:
        qc.ry(-pi / 2, 0)
    qc.measure(0, 0)

    # Bob
    if y == 0:
        qc.ry(-pi / 4, 1)
    else:
        qc.ry(pi / 4, 1)
    qc.measure(1, 1)

    return qc
```

다음은 어떤 질문을 하느냐에 따라 가능한 네 가지 회로입니다.

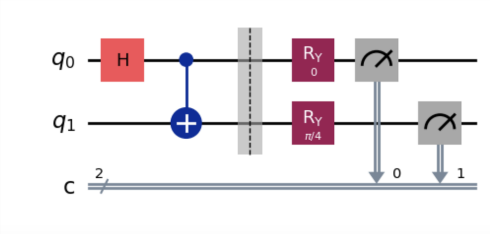
```
# Draw the four possible circuits

print("(x,y) = (0,0)")
display(chsh_circuit(0, 0).draw())

print("(x,y) = (0,1)")
display(chsh_circuit(0, 1).draw())

print("(x,y) = (1,0)")
display(chsh_circuit(1, 0).draw())

print("(x,y) = (1,1)")
display(chsh_circuit(1, 1).draw())
```

Output:

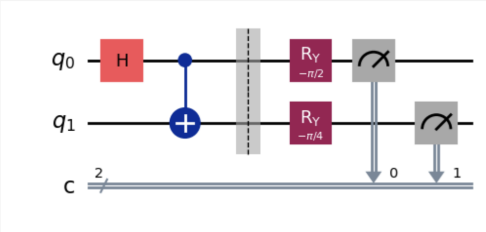
```
(x,y) = (0,0)
```



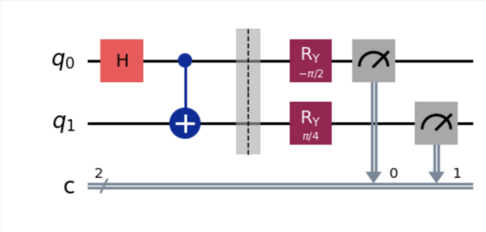

```
(x,y) = (0,1)
```




```
(x,y) = (1,0)
```




```
(x,y) = (1,1)
```



이제 Aer 시뮬레이터를 사용하여 주어진 입력 쌍(x, y)에 대해 회로를 한 번 실행하는 작업을 만들어 보겠습니다.

```
sampler = Sampler()
```

```python
def quantum_strategy(x, y):
    """Carry out the best strategy for the CHSH game.
    Args:
        x (int): Alice's bit (must be 0 or 1)
        y (int): Bob's bit (must be 0 or 1)
    Returns:
        (int, int): Alice and Bob's answer bits (respectively)
    """
    # `shots=1` runs the circuit once
    result = sampler.run(chsh_circuit(x, y), shots=1).result()
    statistics = result.quasi_dists[0].binary_probabilities()
    bits = list(statistics.keys())[0]
    a, b = bits[0], bits[1]
    return a, b
```

마지막으로 게임을 1,000번 플레이하고 그 중 전략이 승리한 비율을 계산합니다.

```python
NUM_GAMES = 1000
TOTAL_SCORE = 0

for _ in range(NUM_GAMES):
    TOTAL_SCORE += chsh_game(quantum_strategy)

print("Fraction of games won:", TOTAL_SCORE / NUM_GAMES)
```

Output:

```
Fraction of games won: 0.863
```

또한 고전적인 전략을 정의하고 얼마나 잘 작동하는지 확인할 수도 있습니다. 코드를 자유롭게 변경하여 다양한 전략을 시도해 보세요!

```python
def classical_strategy(x, y):
    """An optimal classical strategy for the CHSH game
    Args:
        x (int): Alice's bit (must be 0 or 1)
        y (int): Bob's bit (must be 0 or 1)
    Returns:
        (int, int): Alice and Bob's answer bits (respectively)
    """
    # Alice's answer
    if x == 0:
        a = 0
    elif x == 1:
        a = 1
```

```
    # Bob's answer
    if y == 0:
        b = 1
    elif y == 1:
        b = 0

    return a, b
```

다시 한 번 게임을 1,000번 플레이하여 얼마나 잘 작동하는지 확인해 보겠습니다.

```
NUM_GAMES = 1000
TOTAL_SCORE = 0

for _ in range(NUM_GAMES):
    TOTAL_SCORE += chsh_game(classical_strategy)

print("Fraction of games won:", TOTAL_SCORE / NUM_GAMES)
```

Output:

```
Fraction of games won: 0.75
```

무작위성이 개입되어 있지만, 1,000회 실행 후 통계가 크게 벗어날 가능성은 거의 없습니다. 퀀텀 전략은 약 85%의 확률로 승리하는 반면, 클래식 전략은 약 75% 이상 승리하지 못합니다.

정리

- **CHSH 게임이란?**

  Alice와 Bob이 독립적으로 질문(x, y)을 받고 답변(a, b)을 보내 승리 조건 $(a \oplus b = x \cdot y)$ 을 만족시키는 게임.

- **고전 전략의 한계:**

  고전적으로 두 사람이 최대 75%의 승률을 달성할 수 있음.

- **양자 전략의 핵심:**

  Alice와 Bob이 **얽힘(Entanglement)** 상태를 공유하면, 승률을 약 85.4%로 높일 수 있음. 이는 Bell 부등식을 위반함을 보여줌.

- **양자 전략 방식:**
  - 두 사람은 초기 상태로 얽힌 상태($|\phi+\rangle$)를 공유.
  - 질문에 따라 각자 자신의 큐비트에 특정한 회전 연산(U)을 적용.
  - 그 후 측정 결과를 답변으로 보냄.

- **결론:**

  양자 얽힘을 사용하면 고전적인 한계를 뛰어넘는 승률을 달성할 수 있음. 이는 양자 비국소성(non-locality)을 증명하는 중요한 사례.