응용물리연구실심화실습3 (PHY3075)

2024년 9월 2주차

응용물리학과 2022006971 이민성

번역

- 고전 정보
  - 확률 상태 측정하기

    이제 우리가 시스템을 측정할 때, 그 시스템이 확률 상태에 있을 때 어떻게 되는지 간단히 생각해 봅시다. 시스템을 측정한다는 것은 우리가 시스템을 바라보고, 그 시스템이 고전적인 상태들 중 무엇인지를 명확하게 인식하는 것을 의미합니다. 직관적으로, 우리는 시스템이 확률 상태에 있는 것을 '볼 수' 없으며, 측정은 항상 정확히 허용된 고전 상태들 중 하나의 상태를 산출할 것입니다.

    측정은 우리가 시스템에 대해 가지는 지식을 변화시키며, 따라서 그 시스템과 연관된 확률 상태도 변화시킵니다: 우리가 X가 고전 상태 a ∈ Σ에 있다고 인식하게 된다면, X에 대한 우리의 지식을 나타내는 새로운 확률 벡터는 X가 해당 상태 a에 있고, 나머지 모든 항목에 대해 0이 있는 벡터가 됩니다. 이 벡터는 우리가 막 인식한 X가 고전 상태 a에 확실하게 있음을 나타냅니다.

    우리는 이 벡터, 즉 해당 상태 a에 1이 있고 나머지 모든 항목에는 0이 있는 벡터를 ∣a⟩로 나타냅니다. 이 벡터는 곧 설명될 이유로 “캣 a”로 읽힙니다. 이러한 종류의 벡터는 표준 기저 벡터라고도 합니다.

    예를 들어, 우리가 생각하고 있는 시스템이 비트라면, 표준 기저 벡터는 다음과 같이 주어집니다:

    $$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

    모든 2차원 열 벡터는 이 두 벡터의 선형 결합으로 표현될 수 있습니다. 예를 들어, 우리는 다음과 같이 표현할 수 있습니다:

    $$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\,|0\rangle + \frac{1}{4}\,|1\rangle.$$

    이 사실은 자연스럽게 모든 고전 상태 집합으로 일반화됩니다: 모든 열 벡터는 고전 상태들의 선형 결합입니다. 우리는 종종 이러한 방식으로 벡터를 표현할 것입니다.

    측정 후 확률 상태의 변화로 돌아가서, 우리는 다음과 같은 일상 경험과의 연관성을 주목할 수 있습니다. 공평한 동전을 던지고, 동전을 확인하지 않고 덮어 두었다고 가정해봅시다. 우리는 동전의 확률 상태가 다음과 같다고 말할 수 있습니다:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\,|\text{heads}\rangle + \frac{1}{2}\,|\text{tails}\rangle.$$

여기에서 동전의 고전적 상태 집합은 {heads,tails}입니다. 우리는 먼저 앞면(heads), 그다음에 뒷면(tails) 순서로 이 상태들을 정렬하겠습니다.

$$|\text{heads}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad |\text{tails}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

만약 우리가 동전을 덮개에서 꺼내서 본다면, 우리는 두 개의 고전적 상태 중 하나인 앞면 또는 뒷면을 보게 될 것입니다. 만약 그 결과가 뒷면이라면, 우리는 자연스럽게 동전의 확률적 상태에 대한 설명을 업데이트하여 그것이 ㅣtails〉가 되도록 할 것입니다. 물론, 만약 우리가 다시 동전을 덮어두었다가 다시 꺼내서 본다면, 고전적 상태는 여전히 뒷면일 것이며, 이는 벡터 ㅣtails〉에 의해 설명된 확률적 상태와 일치합니다. 이것은 사소한 문제처럼 보일 수 있지만, 어떤 면에서는 그렇습니다. 그러나 양자 시스템들은 매우 유사한 방식으로 작동하지만, 그들의 측정 속성은 종종 비정상적이거나 "이상한" 것으로 간주됩니다. 고전적 시스템의 측정 속성을 확립함으로써, 양자 정보의 유사한 행동이 덜 이상하게 보일 수 있습니다.

확률적 상태의 측정에 관한 한 가지 마지막 주의 사항은 그것들이 반드시 실제 상태를 나타내는 것이 아니라 지식이나 믿음을 나타낼 수 있다는 것입니다. 우리가 동전을 던진 후의 동전 상태는 우리가 보기 전에는 앞면이나 뒷면 중 하나입니다. 우리는 그것을 보지 않으면 어떤 상태인지 알 수 없습니다. 동전을 보는 행위 자체는 상태를 바꾸지 않지만, 단지 우리가 그것에 대해 갖고 있는 지식만을 변화시킵니다. 동전의 고전적 상태가 뒷면임을 확인한 후, 우리는 자연스럽게 그 벡터 ㅣtails〉를 동전에 할당하여 우리의 지식을 업데이트합니다. 그러나 동전이 공개된 순간을 보지 못한 다른 사람에게는 확률적 상태가 변경되지 않은 상태로 남아 있습니다. 이것은 걱정할 일이 아닙니다. 다른 개인들이 동일한 시스템에 대해 서로 다른 지식이나 믿음을 가질 수 있으며, 따라서 서로 다른 확률 벡터로 해당 시스템을 설명할 수 있기 때문입니다.

- 고전 연산

  이 고전 정보 요약의 마지막 부분에서, 고전 시스템에서 수행할 수 있는 연산의 종류를 고려하겠습니다.

  - 결정론적 연산

    먼저, 각 고전 상태 a∈Σ가 함수 f:Σ→Σ의 형태로 변환되는 결정론적 연산이 있습니다.

    예를 들어, Σ={0,1}일 경우, 다음과 같은 네 가지 함수 f_1, f_2, f_3, f_4가 있으며, 이는 다음과 같은 값의 표로 나타낼 수 있습니다:

a	$f_1(a)$
0	0
1	0

a	$f_2(a)$
0	0
1	1

a	$f_3(a)$
0	1
1	0

a	$f_4(a)$
0	1
1	1

    첫 번째와 마지막 함수는 상수 함수입니다: f_1(a) = 0이고 f_4(a) = 1는 각각 Σ의 모든 a에 대해 상수입니다. 중간 두 함수는 상수가 아닙니다. 이들은 **균형된 함수**로, 가능한 입력 값을 범위로 삼을 때 두 가지 출력 값이 동일한 빈도로 발생하는 의미입니다. 함수 f_2는 항등 함수입니다: f_2(a) = a=는 Σ의

모든 a에 대해 같습니다. 함수 f_3는 f_3(0) = 1이고 f_3(1) = 0인 함수로, 이는 더 잘 알려진 NOT 함수입니다.

확률적 상태에서 결정론적 연산의 동작은 행렬-벡터 곱셈으로 나타낼 수 있습니다. 구체적으로, 주어진 함수 f:Σ→Σ를 나타내는 행렬 M은 다음을 만족하는 행렬입니다:

$$M|a\rangle = |f(a)\rangle$$

Σ의 모든 a에 대해, 이러한 행렬은 항상 존재하며 고유합니다.

예를 들어, 함수 f_1, ..., f_4에 해당하는 행렬 M_1, ..., M_4는 다음과 같습니다:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

결정론적 연산을 나타내는 행렬은 항상 각 열에 정확히 하나의 1을 가지고 있으며, 나머지 모든 항목은 0입니다.

이러한 형태의 행렬과 다른 형태를 나타내는 편리한 방법은 앞서 논의한 열 벡터에 대한 것과 유사한 행 벡터에 대한 표기법을 사용하는 것입니다. 각 a∈Σ에 대해, ⟨a | 는 해당 항목에 1을 가지며, 나머지 모든 항목에 대해 0을 가지는 행 벡터를 나타냅니다. 이 벡터는 "브라 a"라고 읽습니다.

예를 들어, Σ={0,1}인 경우,

$$\langle 0| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

고전적 상태 집합 Σ의 임의의 선택에 대해, 행 벡터와 열 벡터를 행렬로 보고 행렬 곱셈 | b⟩⟨a | 를 수행하면, 해당 항목이 b에 대응하는 행과 a에 대응하는 열에 있는 정사각 행렬을 얻습니다. 즉, 해당 항목의 행은 b, 열은 a에 대응하며, 나머지 항목은 모두 0입니다. 예를 들어,

$$|0\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

이 표기법을 사용하여, 함수 f:Σ→Σ에 대해, 함수 f에 대응하는 행렬 M을 다음과 같이 나타낼 수 있습니다:

$$M = \sum_{a \in \Sigma} |f(a)\rangle\langle a|$$

이제 벡터를 다시 행렬로 생각해 보겠습니다. 하지만 이번에는 ⟨a | b⟩라는 곱셈을 고려해 보겠습니다. 그러면 우리는 1×1 행렬을 얻는데, 이는 스칼라(즉, 숫자)로 생각할 수 있습니다. 깔끔함을 위해 이

곱셈을 ⟨a | b⟩로 씁니다. 이 곱셈은 다음과 같은 간단한 공식을 만족합니다:

$$\langle a|b\rangle = \begin{cases} 1 & a = b \\ 0 & a \neq b. \end{cases}$$

이 관찰과 행렬 곱셈이 결합적(associative)이고 선형(linear)이라는 사실을 함께 사용하면, 우리는 다음과 같은 결과를 얻습니다:

$$M|b\rangle = \left(\sum_{a\in\Sigma} |f(a)\rangle\langle a|\right)|b\rangle = \sum_{a\in\Sigma} |f(a)\rangle\langle a|b\rangle = |f(b)\rangle,$$

이는 Σ의 각 b에 대해 우리가 M에 요구하는 바와 일치합니다.

3강에서 더 자세히 논의할 것이지만, ⟨a | b⟩는 벡터 | a⟩와 | b⟩ 사이의 **내적**으로 볼 수도 있습니다. 내적은 양자 정보에서 매우 중요한 개념이지만, 이들이 필요할 때까지 논의를 미루겠습니다.

이 시점에서 "브라(bra)"와 "켓(ket)"이라는 이름이 명백해질 수 있습니다: "브라" ⟨a | 와 "켓" | b⟩를 함께 붙이면 "브래킷(bracket)" ⟨a | b⟩이 됩니다. 이 표기법과 용어는 폴 디랙(Paul Dirac)에 의해 유래되었으며, 그래서 이것을 디랙 표기법(Dirac notation)이라고 부릅니다.

- 확률적 연산과 확률 행렬

  결정론적 연산 외에도, 우리는 **확률적 연산**을 가질 수 있습니다.

  예를 들어, 비트에서의 연산을 고려해보면, 비트의 고전적 상태가 0일 때는 그대로 유지하고, 비트의 고전적 상태가 1일 때는 확률 1/2로 0으로 전환되는 연산을 생각해봅시다. 이 연산은 다음 행렬로 표현됩니다:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

  우리는 이 행렬이 표준 기저 벡터들과 곱셈을 할 때 올바르게 작동하는지 확인할 수 있습니다.

  고전적 상태 집합의 임의의 선택에 대해, 우리는 모든 확률적 연산의 집합을 확률 행렬(stochastic matrix)로 나타낼 수 있으며, 이러한 행렬은 다음 두 가지 특성을 만족합니다:

  1. 모든 항목은 음이 아닌 실수입니다.
  2. 각 열의 항목의 합은 1입니다.

  즉, 확률 행렬은 각 열이 확률 벡터를 형성하는 행렬입니다.

  우리는 직관적인 수준에서 확률적 연산을, 예를 들어 위에서 본 것처럼 연산 중에 무작위성이 어떻게든 사용되거나 도입될 수 있는 연산으로 생각할 수 있습니다. 확률적 연산의 확률 행렬 설명에 따르면, 각 열은 해당 열에 대응하는 고전적 상태 입력이 주어졌을 때 생성된 확률적 상태의 벡터 표현으로 볼 수 있습니다.

확률 행렬을 확률 벡터에서 확률 벡터로 항상 사상하는 행렬로도 생각할 수 있습니다. 즉, 확률 행렬은 항상 확률 벡터를 확률 벡터로 사상하며, 확률 벡터를 확률 벡터로 항상 사상하는 모든 행렬은 확률 행렬이어야 합니다.

마지막으로, 확률적 연산을 생각하는 또 다른 방법은 그것들이 결정론적 연산의 무작위 선택이라는 것입니다. 예를 들어, 위의 예에서 연산을 항등 함수나 상수 0 함수 중 하나로 적용하며, 각각 확률 1/2로 적용된다고 생각할 수 있습니다. 이는 다음 식과 일치합니다:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

이러한 표현은 항상 가능합니다. 고전적 상태 집합의 임의의 선택에 대해, 해당 상태 집합과 동일한 행과 열을 가진 확률 행렬에 대해 이러한 표현이 가능합니다.

- 확률적 연산의 합성

  X가 고전적 상태 집합 Σ를 가진 시스템이라고 가정하고,M_1, ..., M_n이 시스템 X에서의 확률적 연산을 나타내는 확률 행렬이라고 가정합시다.

  첫 번째 연산 M_1이 확률 벡터 u에 적용되면, 결과적으로 얻어지는 확률 상태는 벡터 M_1u로 표현됩니다. 그런 다음 두 번째 확률 연산 M_2를 이 새로운 확률 벡터에 적용하면, 우리는 다음의 확률 벡터를 얻습니다:

$$M_2(M_1u) = (M_2M_1)u.$$

  이 등식은 행렬 곱셈(여기에는 행렬-벡터 곱셈이 특별한 경우로 포함됨)이 결합 법칙을 따르는 연산이라는 사실에서 비롯됩니다. 따라서, 첫 번째와 두 번째 확률적 연산을 합성하여 얻은 확률적 연산, 즉 처음에 M_1을 적용하고 그다음에 M_2를 적용한 연산은 반드시 확률 행렬인 M_2로 표현됩니다.

  좀 더 일반적으로, M_1, ..., M_n에 의해 표현되는 확률적 연산들을 합성하여 M_1이 처음 적용되고, 그 다음 M_2, 마지막으로 M_n이 적용되는 연산은 다음 행렬로 표현됩니다.

$$M_n \cdots M_1.$$

  여기에서 순서가 중요하다는 점을 주의해야 합니다. 행렬 곱셈은 결합 법칙을 따르지만, 일반적으로 **교환 법칙**은 따르지 않습니다.

  예를 들어, 우리가 다음과 같은 행렬을 가지고 있다면,

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

  그렇다면

$$M_2 M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad M_1 M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

즉, 확률적 연산이 합성되는 순서는 중요하며, 합성에서 연산이 적용되는 순서를 변경하면 결과적인 연산이 달라질 수 있습니다.

정리

고전 정보

- **확률 상태 측정**: 측정은 시스템이 고전적 상태 중 하나로 바뀌는 것을 의미하며, 확률 상태는 시스템에 대한 지식만을 반영합니다. 측정 후 시스템의 상태는 확률 벡터로 표현되며, 양자 시스템에서도 비슷한 원리가 적용되지만 더 복잡합니다.

고전 연산

- **결정론적 연산**: 고전 상태는 함수 f:Σ→Σ에 의해 변환되며, 이는 행렬 곱셈을 통해 표현됩니다. 예를 들어, 함수 f1,f2,f3는 고전 상태의 상수 함수 또는 NOT 함수로, 행렬로 표현됩니다.
- **확률적 연산**: 확률적 연산은 무작위성을 포함하며, 확률 행렬로 나타냅니다. 이러한 행렬은 각 열의 합이 1이 되고, 열이 확률 벡터를 형성합니다.

확률적 연산의 합성

- 여러 확률적 연산을 합성할 때, 그 결과는 연산을 적용한 순서에 따라 달라집니다. 행렬 곱셈이 결합 법칙을 따르지만 교환 법칙을 따르지 않기 때문에, 순서는 매우 중요합니다.