응용물리연구실심화실습3 (PHY3075)

2024년 11월 2주차

응용물리학과 2022006971 이민성

번역

- 내적, 직교성 및 투영

  양자 회로의 능력과 한계를 탐구하기 위해, 우리는 이제 몇 가지 추가적인 수학적 개념들을 소개합니다. 이 개념들은 바로 벡터 간의 내적(및 그것이 유클리드 노름과 연결되는 방식), 벡터 집합에 대한 직교성 및 직교 정규성, 그리고 투영 행렬입니다. 이러한 개념들은 우리가 표준 기저 측정의 유용한 일반화를 도입할 수 있도록 도와줍니다.

  내적

  첫 번째 강의에서 다뤘듯이, 우리는 디랙 표기법을 사용하여 임의의 열 벡터를 켓(ket)으로 표현합니다. 예를 들어,

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

  이 벡터에 대응하는 브라(bra) 벡터는 이 벡터의 켤레 전치(conjugate transpose)입니다:

$$\langle\psi| = \big(|\psi\rangle\big)^\dagger = \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} & \overline{\alpha_2} & \cdots & \overline{\alpha_n} \end{pmatrix}.$$

  또 다른 예로, 어떤 고전적인 상태 집합 Σ에 대해, 열 벡터를 켓으로 표현한다고 할 때, 예를 들어

$$|\psi\rangle = \sum_{a\in\Sigma} \alpha_a |a\rangle,$$

  이 경우, 해당하는 행 벡터(브라 벡터)는 켤레 전치로 다음과 같습니다:

$$\langle\psi| = \sum_{a\in\Sigma} \overline{\alpha_a} \langle a|.$$

  우리는 또한 브라 벡터와 켓 벡터의 곱이 행렬로 보았을 때, 하나의 행 또는 하나의 열을 가지는 행렬로서 결과가 스칼라 값이 된다는 것을 관찰했습니다. 구체적으로, 두 개의 (열) 벡터가 있을 때,

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad |\phi\rangle = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix},$$

이므로, 브라 벡터 ⟨ψ∣는 식 (1)과 같이 표현됩니다. 그러면,

$$\langle\psi|\phi\rangle = \langle\psi||\phi\rangle = \begin{pmatrix}\overline{\alpha_1} & \overline{\alpha_2} & \cdots & \overline{\alpha_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix} = \overline{\alpha_1}\beta_1 + \cdots + \overline{\alpha_n}\beta_n.$$

또 다른 예로, 두 개의 열 벡터가 다음과 같이 주어진 경우,

$$|\psi\rangle = \sum_{a\in\Sigma}\alpha_a|a\rangle \quad \text{and} \quad |\phi\rangle = \sum_{b\in\Sigma}\beta_b|b\rangle,$$

따라서 ⟨ψ∣ ∣는 식 (2)와 같이 행 벡터로 표현됩니다. 이 경우,

$$\begin{aligned}\langle\psi|\phi\rangle &= \langle\psi||\phi\rangle\\ &= \left(\sum_{a\in\Sigma}\overline{\alpha_a}\langle a|\right)\left(\sum_{b\in\Sigma}\beta_b|b\rangle\right)\\ &= \sum_{a\in\Sigma}\sum_{b\in\Sigma}\overline{\alpha_a}\beta_b\langle a|b\rangle\\ &= \sum_{a\in\Sigma}\overline{\alpha_a}\beta_a,\end{aligned}$$

여기서 마지막 등식은 고전적인 상태 a와 b에 대해 a≠b일 때 ⟨a∣a⟩=1과 ⟨a∣b⟩=0이라는 관찰에 의해 성립합니다.

⟨ψ∣φ⟩는 벡터 ∣ψ⟩와 ∣φ⟩ 사이의 내적(inner product)이라고 불립니다. 내적은 양자 정보 및 계산에서 매우 중요합니다. 이 기본적인 개념 없이 양자 정보를 수학적으로 이해하는 데 큰 진전을 이루기 어렵습니다.

이제 벡터의 내적에 관한 몇 가지 기본적인 사실들을 모아 보겠습니다.

1. **유클리드 노름과의 관계.** 어떤 벡터 ∣ψ⟩=∑a∈Σαa∣a⟩의 내적은 다음과 같습니다:

$$\langle\psi|\psi\rangle = \sum_{a\in\Sigma}\overline{\alpha_a}\alpha_a = \sum_{a\in\Sigma}|\alpha_a|^2 = \big\||\psi\rangle\big\|^2.$$

따라서 벡터의 유클리드 노름은 다음과 같이 표현할 수 있습니다:

$$\big\||\psi\rangle\big\| = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}.$$

벡터의 유클리드 노름은 항상 음이 아닌 실수 값이어야 합니다. 또한, 벡터의 유클리드 노름이 0인 경우는 벡터의 모든 항목이 0일 때, 즉 벡터가 제로 벡터일 때만 가능합니다.

이러한 관찰을 요약하면, 모든 벡터 ∣ψ⟩에 대해 다음과 같은 관계가 성립합니다:

$$\langle\psi|\psi\rangle \geq 0,$$

그리고 ⟨ψ∣ψ⟩=0일 때에만 ∣ψ⟩=0이다.

이 내적의 특성은 때때로 "양의 정부호성(positive definiteness)"이라고 불립니다.

2. **공액 대칭성.** 두 벡터

$$|\psi\rangle = \sum_{a\in\Sigma} \alpha_a |a\rangle \quad \text{and} \quad |\phi\rangle = \sum_{b\in\Sigma} \beta_b |b\rangle,$$

에 대해, 우리는 다음과 같은 관계를 가집니다:

$$\langle\psi|\phi\rangle = \sum_{a\in\Sigma} \overline{\alpha_a}\beta_a \quad \text{and} \quad \langle\phi|\psi\rangle = \sum_{a\in\Sigma} \overline{\beta_a}\alpha_a,$$

따라서

$$\overline{\langle\psi|\phi\rangle} = \langle\phi|\psi\rangle.$$

3. **두 번째 인수에 대한 선형성 (첫 번째 인수에 대한 공액 선형성).** 벡터 ∣ψ⟩, ∣ϕ1⟩, ∣ϕ2⟩가 주어지고, α1과 α2가 복소수라면, 새로운 벡터

$$|\phi\rangle = \alpha_1|\phi_1\rangle + \alpha_2|\phi_2\rangle,$$

를 정의할 수 있습니다. 이때

$$\langle\psi|\phi\rangle = \langle\psi|\big(\alpha_1|\phi_1\rangle + \alpha_2|\phi_2\rangle\big) = \alpha_1\langle\psi|\phi_1\rangle + \alpha_2\langle\psi|\phi_2\rangle.$$

즉, 내적은 두 번째 인수에 대해 선형적입니다. 이는 위의 공식들을 통해 확인할 수 있거나, 행렬 곱셈이 각 인수에 대해 선형적임을 주목함으로써도 쉽게 확인할 수 있습니다.

이 사실과 공액 대칭성을 결합하면, 내적은 첫 번째 인수에 대해 공액 선형적임을 알 수 있습니다. 즉, 벡터 ∣ψ1⟩, ∣ψ2⟩와 ∣ϕ⟩가 주어지고, α1과 α2가 복소수라면, 벡터

$$|\psi\rangle = \alpha_1|\psi_1\rangle + \alpha_2|\psi_2\rangle,$$

를 정의했을 때

$$\langle\psi|\phi\rangle = \big(\overline{\alpha_1}\langle\psi_1| + \overline{\alpha_2}\langle\psi_2|\big)|\phi\rangle = \overline{\alpha_1}\langle\psi_1|\phi\rangle + \overline{\alpha_2}\langle\psi_2|\phi\rangle.$$

4. **코시-슈바르츠 부등식.** 같은 개수의 항을 가진 벡터 ∣ϕ⟩와 ∣ψ⟩에 대해, 다음이 성립합니다:

$$\big|\langle\psi|\phi\rangle\big| \le \big\||\psi\rangle\big\|\big\||\phi\rangle\big\|.$$

이 부등식은 양자 정보 이론을 비롯한 여러 분야에서 매우 유용하게 사용됩니다.

직교 집합과 직교 정규 집합

두 벡터 $|\phi\rangle$와 $|\psi\rangle$는 내적이 0일 때 직교한다고 합니다:

$\langle\psi|\phi\rangle=0.$

기하학적으로, 직교 벡터는 서로 직각을 이루는 벡터로 생각할 수 있습니다.

벡터 집합 $\{|\psi_1\rangle,\ldots,|\psi_m\rangle\}$은 집합 내의 모든 벡터가 서로 직교할 때 직교 집합이라고 합니다. 즉, 이 집합은 다음 조건을 만족할 때 직교 집합입니다:

$\langle\psi_j|\psi_k\rangle=0$

벡터 집합 $\{|\psi_1\rangle,\ldots,|\psi_m\rangle\}$은 직교 집합이면서, 각 벡터가 단위 벡터인 경우 직교 정규 집합이라고 합니다. 즉, 이 집합은 다음 조건을 만족할 때 직교 정규 집합입니다:

$$\langle\psi_j|\psi_k\rangle=\begin{cases}1 & j=k\\ 0 & j\neq k\end{cases}$$

마지막으로, 집합 $\{|\psi_1\rangle,\ldots,|\psi_m\rangle\}$은 직교 정규 집합일 뿐만 아니라, 기저를 형성할 때 직교 정규 기저라고 합니다. 이는 $\{|\psi_1\rangle,\ldots,|\psi_m\rangle\}$이 직교 정규 집합이면서, m이 $|\psi_1\rangle,\ldots,|\psi_m\rangle$가 속한 공간의 차원과 같을 때 성립합니다.

예를 들어, 모든 표준 기저 벡터로 이루어진 집합 $\{|a\rangle : a\in\Sigma\}$은 Σ에 대한 직교 정규 기저입니다. $\{|+\rangle,|-\rangle\}$는 단일 큐빗에 대응하는 2차원 공간의 직교 정규 기저이며, 벨 기저 $\{|\phi^+\rangle,|\phi^-\rangle,|\psi^+\rangle,|\psi^-\rangle\}$는 두 큐빗에 대응하는 4차원 공간의 직교 정규 기저입니다.

직교 정규 집합을 직교 정규 기저로 확장하기

벡터 $|\psi_1\rangle,\ldots,|\psi_m\rangle$가 n-차원 공간에 존재한다고 가정하고, 또한 $\{|\psi_1\rangle,\ldots,|\psi_m\rangle\}$이 직교 정규 집합이라고 가정합시다. 직교 정규 집합은 항상 선형 독립적인 집합이므로, 이 벡터들은 반드시 차원이 m인 부분공간을 생성합니다. 이로부터 우리는 즉시 $m\leq n$이라는 결론을 얻습니다. 왜냐하면 이 벡터들이 생성하는 부분공간의 차원은 이들이 속한 전체 공간의 차원보다 클 수 없기 때문입니다.

만약 $m<n$이라면, 항상 추가적인 $n-m$개의 벡터 $|\psi_{m+1}\rangle,\ldots,|\psi_n\rangle$를 선택할 수 있습니다. 이들 벡터를 포함하여 $\{|\psi_1\rangle,\ldots,|\psi_n\rangle\}$이 직교 정규 기저를 형성하도록 만들 수 있습니다. 이 벡터들을 구성하는 방법으로는 그람-슈미트 직교화 과정이 사용됩니다.

직교 정규 집합과 유니타리 행렬

직교 정규 벡터 집합은 유니타리 행렬과 밀접하게 연결됩니다. 이 연결을 표현하는 한 가지 방법은 다음 세 가지 문장이 논리적으로 동치임을 말하는 것입니다(즉, 모두 참이거나 모두 거짓임):

1. 행렬 U는 유니타리 행렬이다(즉, $U^\dagger U=I=UU^\dagger$).
2. U의 행들이 직교 정규 집합을 형성한다.
3. U의 열들이 직교 정규 집합을 형성한다.

이 동치 관계는 행렬 곱셈과 켤레 전치가 어떻게 작동하는지 생각할 때 사실 꽤 직관적입니다. 예를 들어, 우리가 3×3 행렬을 가지고 있다고 가정해 봅시다:

$$U=\begin{pmatrix}\alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3}\\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3}\\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3}\end{pmatrix}$$

U의 활용 전치는 다음과 같습니다:

$$U^\dagger = \begin{pmatrix} \overline{\alpha_{1,1}} & \overline{\alpha_{2,1}} & \overline{\alpha_{3,1}} \\ \overline{\alpha_{1,2}} & \overline{\alpha_{2,2}} & \overline{\alpha_{3,2}} \\ \overline{\alpha_{1,3}} & \overline{\alpha_{2,3}} & \overline{\alpha_{3,3}} \end{pmatrix}$$

두 행렬을 곱하고 왼쪽에 공액 전치를 적용하면 이 행렬이 나옵니다:

$$\begin{pmatrix} \overline{\alpha_{1,1}} & \overline{\alpha_{2,1}} & \overline{\alpha_{3,1}} \\ \overline{\alpha_{1,2}} & \overline{\alpha_{2,2}} & \overline{\alpha_{3,2}} \\ \overline{\alpha_{1,3}} & \overline{\alpha_{2,3}} & \overline{\alpha_{3,3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \overline{\alpha_{1,1}}\alpha_{1,1} + \overline{\alpha_{2,1}}\alpha_{2,1} + \overline{\alpha_{3,1}}\alpha_{3,1} & \overline{\alpha_{1,1}}\alpha_{1,2} + \overline{\alpha_{2,1}}\alpha_{2,2} + \overline{\alpha_{3,1}}\alpha_{3,2} & \overline{\alpha_{1,1}}\alpha_{1,3} + \overline{\alpha_{2,1}}\alpha_{2,3} + \overline{\alpha_{3,1}}\alpha_{3,3} \\ \overline{\alpha_{1,2}}\alpha_{1,1} + \overline{\alpha_{2,2}}\alpha_{2,1} + \overline{\alpha_{3,2}}\alpha_{3,1} & \overline{\alpha_{1,2}}\alpha_{1,2} + \overline{\alpha_{2,2}}\alpha_{2,2} + \overline{\alpha_{3,2}}\alpha_{3,2} & \overline{\alpha_{1,2}}\alpha_{1,3} + \overline{\alpha_{2,2}}\alpha_{2,3} + \overline{\alpha_{3,2}}\alpha_{3,3} \\ \overline{\alpha_{1,3}}\alpha_{1,1} + \overline{\alpha_{2,3}}\alpha_{2,1} + \overline{\alpha_{3,3}}\alpha_{3,1} & \overline{\alpha_{1,3}}\alpha_{1,2} + \overline{\alpha_{2,3}}\alpha_{2,2} + \overline{\alpha_{3,3}}\alpha_{3,2} & \overline{\alpha_{1,3}}\alpha_{1,3} + \overline{\alpha_{2,3}}\alpha_{2,3} + \overline{\alpha_{3,3}}\alpha_{3,3} \end{pmatrix}$$

U의 열에서 세 개의 벡터를 형성한다면,

$$|\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} \\ \alpha_{2,1} \\ \alpha_{3,1} \end{pmatrix}, \quad |\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,2} \\ \alpha_{3,2} \end{pmatrix}, \quad |\psi_3\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,3} \end{pmatrix},$$

그러면 위의 제품을 다음과 같이 표현할 수 있습니다:

$$U^\dagger U = \begin{pmatrix} \langle\psi_1|\psi_1\rangle & \langle\psi_1|\psi_2\rangle & \langle\psi_1|\psi_3\rangle \\ \langle\psi_2|\psi_1\rangle & \langle\psi_2|\psi_2\rangle & \langle\psi_2|\psi_3\rangle \\ \langle\psi_3|\psi_1\rangle & \langle\psi_3|\psi_2\rangle & \langle\psi_3|\psi_3\rangle \end{pmatrix}$$

식 (3)을 참조하면, 이 행렬이 항등 행렬과 같다는 조건은 집합 $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle\}$의 직교정규성을 의미하는 것과 동치임을 알 수 있습니다.

이 주장은 모든 크기의 유니타리 행렬에 대해 일반화될 수 있습니다. 행렬의 행들이 직교정규 기저를 형성하는 것과 행렬이 유니타리인 것의 동치 관계는, 행렬이 유니타리일 때 그 전치 행렬도 유니타리라는 사실에서 비롯됩니다.

위에서 설명한 동치 관계와, 모든 직교정규 집합이 직교정규 기저를 형성할 수 있다는 사실을 고려하면, 다음과 같은 유용한 결론을 얻을 수 있습니다: n차원 공간에서 벡터 집합 $\{|\psi_1\rangle, \ldots, |\psi_m\rangle\}$가 주어졌을 때, 첫 m개의 열이 벡터 $|\psi_1\rangle, \ldots, |\psi_m\rangle$인 유니타리 행렬 U가 존재합니다. 그림으로 표현하면, 항상 다음과 같은 형태의 유니타리 행렬을 찾을 수 있습니다:

$$U = \begin{pmatrix} | & | & & | & | & & | \\ |\psi_1\rangle & |\psi_2\rangle & \cdots & |\psi_m\rangle & |\psi_{m+1}\rangle & \cdots & |\psi_n\rangle \\ | & | & & | & | & & | \end{pmatrix}.$$

여기서 마지막 n−m개의 열은 $\{|\psi_{m+1}\rangle, \ldots, |\psi_n\rangle\}$와 같이 선택된 벡터들로 채워지며, 이들로 인해 $\{|\psi_1\rangle, \ldots, |\psi_n\rangle\}$가 직교정규 기저를 형성하게 됩니다.

투영과 투영 측정

투영 행렬 :

정사각형 행렬 Π는 다음 두 가지 조건을 만족하면 투영 행렬이라고 합니다:

$\Pi=\Pi^\dagger$

$\Pi^2=\Pi$

첫 번째 조건을 만족하는 행렬은 자기 자신과 수반 행렬이 같은 에르미트 행렬(Hermitian matrix)이고, 두 번째 조건을 만족하는 행렬은 아이디모턴트 행렬(Idempotent matrix)이라고 합니다.

주의할 점은, 때때로 "투영(projection)"이라는 단어가 두 번째 조건만 만족하는 행렬을 가리키는 데 사용되기도 하며, 이 경우 "직교 투영(orthogonal projection)"이라는 용어가 두 조건을 모두 만족하는 행렬을 지칭하는 데 사용된다는 점입니다. 하지만 이 글에서는 "투영"과 "투영 행렬"이라는 용어를 두 조건을 모두 만족하는 행렬을 의미하는 것으로 사용하겠습니다.

투영 행렬의 예시는 다음과 같습니다:

$\Pi=|\psi\rangle\langle\psi|$

여기서 $|\psi\rangle$는 단위 벡터입니다. 이 행렬이 에르미트 행렬임을 다음과 같이 확인할 수 있습니다:

$\Pi^\dagger=(|\psi\rangle\langle\psi|)^\dagger=(\langle\psi|)^\dagger(|\psi\rangle)^\dagger=|\psi\rangle\langle\psi|=\Pi$

여기서 두 번째 등식은 다음 공식을 사용하여 유도한 것입니다:

$(AB)^\dagger=B^\dagger A^\dagger$

이 공식은 두 행렬 A와 B에 대해 곱셈이 성립할 때 항상 참입니다.

행렬 Π가 아이디모턴트임을 보이기 위해, $|\psi\rangle$가 단위 벡터이므로 $\langle\psi|\psi\rangle=1$이 성립한다고 가정합니다. 따라서 다음과 같이 됩니다:

$\Pi^2=(|\psi\rangle\langle\psi|)^2=|\psi\rangle\langle\psi|\psi\rangle\langle\psi|=|\psi\rangle\langle\psi|=\Pi$

좀 더 일반적으로, 만약 $|\psi_1\rangle,\ldots,|\psi_m\rangle$이 직교 정규 벡터 집합이라면, 행렬은 다음과 같습니다:

$$\Pi=\sum_{k=1}^{m}|\psi_k\rangle\langle\psi_k|$$

은 투영입니다. 구체적으로 살펴보면 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned}\Pi^\dagger &= \left(\sum_{k=1}^{m}|\psi_k\rangle\langle\psi_k|\right)^\dagger \\ &= \sum_{k=1}^{m}\left(|\psi_k\rangle\langle\psi_k|\right)^\dagger \\ &= \sum_{k=1}^{m}|\psi_k\rangle\langle\psi_k| \\ &= \Pi,\end{aligned}$$

그리고

$$\begin{aligned}\Pi^2 &= \left(\sum_{j=1}^{m} |\psi_j\rangle\langle\psi_j|\right)\left(\sum_{k=1}^{m} |\psi_k\rangle\langle\psi_k|\right) \\ &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} |\psi_j\rangle\langle\psi_j|\psi_k\rangle\langle\psi_k| \\ &= \sum_{k=1}^{m} |\psi_k\rangle\langle\psi_k| \\ &= \Pi,\end{aligned}$$

직교 정규성 {ㅣψ1〉,...,ㅣψm〉}은 두 번째에서 마지막 등식에만 사용됩니다.

실제로, 이것은 모든 가능성을 소진한 것입니다: 모든 투영 Π는 어떤 직교 정규 집합 {ㅣψ1〉,...,ㅣψm〉}에 대해 (식 (5))와 같은 형태로 쓸 수 있습니다. (제로 행렬 Π=0, 이는 투영 행렬로, 특수한 경우입니다: 이를 일반적인 형태 (5)로 맞추기 위해 합이 비어 있을 가능성을 허용해야 하므로, 제로 행렬이 됩니다.)

투영 측정 :

이미 언급된 바와 같이, 양자 시스템의 측정 개념은 표준 기저 측정만을 의미하는 것보다 더 일반적입니다. **투영 측정**은 그 합이 단위 행렬과 같은 투영들의 모음으로 설명되는 측정입니다. 기호로, 투영 행렬들의 모음 {Π0,...,Πm−1}이 투영 측정을 설명한다고 하면, 이는 다음 조건을 만족합니다:

$$\Pi_0 + \cdots + \Pi_{m-1} = \mathbb{I}.$$

이러한 측정이 시스템 X에서 상태 ㅣψ〉일 때 수행되면, 두 가지 일이 발생합니다:

1. 각 k∈{0,...,m−1}에 대해, 측정의 결과가 k일 확률은 다음과 같습니다:

$$\Pr(\text{outcome is } k) = \left\| \Pi_k |\psi\rangle \right\|^2.$$

2. 측정이 어떤 결과 k를 생성하더라도, X의 상태는 다음과 같이 변합니다:

$$\frac{\Pi_k|\psi\rangle}{\left\|\Pi_k|\psi\rangle\right\|}.$$

우리는 투영 측정에서 {0,...,m−1} 외의 결과를 선택할 수도 있습니다. 더 일반적으로, 유한하고 비어 있지 않은 집합 Σ에 대해, 만약 우리가 다음 조건을 만족하는 투영 행렬 모음 {Πa:a∈Σ}을 가지고 있다면:

$$\sum_{a\in\Sigma} \Pi_a = \mathbb{I},$$

그러면 이 모음은 가능한 결과가 집합 Σ와 일치하는 투영 측정을 설명하며, 규칙은 이전과 동일합니다:

1. 각 a∈Σ에 대해, 측정의 결과가 a일 확률은 다음과 같습니다:

$$\Pr(\text{outcome is } a) = \left\| \Pi_a |\psi\rangle \right\|^2.$$

2. 어떤 a 결과가 발생하더라도, X의 상태는 다음과 같이 변합니다:

$$\frac{\Pi_a|\psi\rangle}{\left\|\Pi_a|\psi\rangle\right\|}.$$

예를 들어, 표준 기저 측정은 투영 측정과 동등하며, 여기서 Σ는 우리가 다루는 시스템 X의 고전적 상태 집합이고, 투영 행렬 집합은 {∣a⟩⟨a∣:a∈Σ}입니다.

두 큐비트 시스템 (X,Y)에 대한 또 다른 예로, 투영 측정 집합 {Π0,Π1}가 다음과 같습니다:

$$\Pi_0 = |\phi^+\rangle\langle\phi^+| + |\phi^-\rangle\langle\phi^-| + |\psi^+\rangle\langle\psi^+| \quad \text{and} \quad \Pi_1 = |\psi^-\rangle\langle\psi^-|.$$

여러 시스템이 하나의 양자 상태로 결합되어 있고, 프로젝트 측정이 시스템 중 하나에서만 수행된다면, 그 동작은 표준 기저 측정에서와 유사합니다. 사실, 이제 우리는 이전보다 훨씬 더 간단한 용어로 이 동작을 설명할 수 있습니다. 구체적으로, 두 시스템 (X,Y)가 양자 상태 ∣ψ⟩에 있고, 시스템 X에서 투영 측정이 이루어지며, Y는 그대로 두는 경우를 생각해 봅시다. 이 동작은 다음과 같이 결합된 시스템 (X,Y)에서 투영 측정을 수행하는 것과 동등합니다:

$$\left\{\Pi_a \otimes \mathbb{I} \,:\, a \in \Sigma\right\}$$

결합 시스템 (X,Y)에서, 각 측정 결과 a는 확률

$$\left\|(\Pi_a \otimes \mathbb{I})|\psi\rangle\right\|^2,$$

로 발생하며, 결과 a가 나타나면, 결합 시스템 (X,Y)의 상태는 다음과 같이 변합니다:

$$\frac{(\Pi_a \otimes \mathbb{I})|\psi\rangle}{\left\|(\Pi_a \otimes \mathbb{I})|\psi\rangle\right\|}.$$

표준 기저 측정을 사용하여 사영 측정 구현하기

임의의 사영 측정은 단위 연산, 표준 기저 측정 및 추가 작업 공간 시스템을 사용하여 구현할 수 있습니다. 이제 이를 설명하겠습니다.

우리가 X가 시스템이고, {Π0,…,Πm−1}가 X에 대한 사영 측정이라고 가정합시다. 이 논의를 다양한 결과 집합을 갖는 사영 측정으로 일반화할 수 있지만, 편의와 단순함을 위해 측정의 가능한 결과 집합이 {0,…,m−1}이라고 가정하겠습니다. 명시적으로 언급하자면, m은 X의 고전적 상태의 개수와 반드시 같을 필요는 없습니다 — 우리는 n이 X의 고전적 상태의 개수라고 두겠습니다. 이는 각 행렬 Πk가 n×n 사영 행렬임을 의미합니다. {Π0,…,Πm−1}가 사영 측정을 나타낸다고 가정하므로, 반드시 다음이 성립합니다:

$$\sum_{k=0}^{m-1} \Pi_k = \mathbb{I}_n.$$

우리의 목표는 이 사영 측정을 X에 대해 수행하는 것과 동일한 효과를 가지는 프로세스를 단위 연산과 표준 기저 측정만을 사용하여 수행하는 것입니다.

이를 위해 우리는 추가 작업 공간 시스템 Y를 사용할 것이며, 특히 Y의 고전적 상태 집합을 {0,…,m−1}로 두겠습니다. 이는 사영 측정의 결과 집합과 동일합니다. 아이디어는 Y에 대해 표준 기저 측정을 수행하고, 이 측정의

결과를 X에 대한 사영 측정의 결과와 동일한 것으로 해석하는 것입니다. Y가 어떤 고정된 상태로 초기화되어야 한다고 가정해야 하는데, 우리는 이를 ∣0⟩로 선택합니다. (다른 고정된 양자 상태 벡터를 선택할 수도 있지만, ∣0⟩을 선택하는 것이 다음 설명을 훨씬 단순하게 만듭니다.)

물론, Y에 대한 표준 기저 측정이 X에 대해 어떤 정보를 제공하려면, Y와 X가 Y를 측정하기 전에 어떤 식으로든 상호작용을 해야 하며, 시스템 (Y,X)에 대해 단위 연산을 수행해야 합니다.

먼저 다음 행렬을 고려해 보겠습니다:

$$M = \sum_{k=0}^{m-1} |k\rangle\langle 0| \otimes \Pi_k.$$

이 행렬을 명시적으로 블록 행렬로 표현하면 다음과 같습니다:

$$M = \begin{pmatrix} \Pi_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \Pi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Pi_{m-1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

(이 행렬의 각 0은 n×n 크기의 0으로 채워진 행렬을 나타냅니다.)

이제, M은 확실히 단위 행렬이 아닙니다(단, m=1인 경우에는 Π0=I이고, 이 경우 M=I가 되어 이 자명한 경우에만 단위 행렬이 됩니다). 그 이유는 단위 행렬은 모든 열(또는 행)이 0으로만 채워질 수 없기 때문입니다. 단위 행렬의 열은 서로 직교하는 기저를 이루어야 하며, 0 벡터는 단위 벡터가 아니기 때문입니다. 그러나, M의 첫 번째 n개의 열은 직교한다고 할 수 있으며, 이는 {Π0,…,Πm−1}가 측정을 나타낸다는 가정에서 나옵니다. 이 주장을 확인하려면, 각 j∈{0,…,n−1}에 대해 M의 j번째 열이 다음과 같은 벡터임을 알 수 있습니다:

$$|\psi_j\rangle = M|0, j\rangle = \sum_{k=0}^{m-1} |k\rangle \otimes \Pi_k|j\rangle.$$

이제, i번째 열과 j번째 열의 내적을 구하면(여전히 첫 번째 n개의 열에 대해 이야기한다고 가정하고, 따라서 i,j∈{0,…,n−1}) 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned}\langle\psi_i|\psi_j\rangle &= \left(\sum_{k=0}^{m-1}|k\rangle\otimes\Pi_k|i\rangle\right)^\dagger\left(\sum_{l=0}^{m-1}|l\rangle\otimes\Pi_l|j\rangle\right)\\ &= \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{m-1}\langle k|l\rangle\langle i|\Pi_k\Pi_l|j\rangle\\ &= \sum_{k=0}^{m-1}\langle i|\Pi_k\Pi_k|j\rangle\\ &= \sum_{k=0}^{m-1}\langle i|\Pi_k|j\rangle\\ &= \langle i|\mathbb{I}|j\rangle\\ &= \begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j,\end{cases}\end{aligned}$$

따라서, 행렬 MM의 첫 번째 nn개의 열이 직교하므로, 나머지 0 항목들을 다른 복소수 항목들로 바꿔서 전체 행렬이 단위 행렬이 되도록 만들 수 있습니다.

$$U = \begin{pmatrix}\Pi_0 & \boxed{?} & \cdots & \boxed{?}\\ \Pi_1 & \boxed{?} & \cdots & \boxed{?}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \Pi_{m-1} & \boxed{?} & \cdots & \boxed{?}\end{pmatrix}$$

(만약 우리가 행렬 Π0,…,Πm−1\Pi_0, \dots, \Pi_{m-1} 을 주어진다면, 우리는 그 방정식에서 "?"로 표시된 블록을 채우기 위한 적절한 행렬을 계산할 수 있습니다 — 이때 Gram–Schmidt 과정 사용 — 하지만 이 행렬들이 구체적으로 무엇인지는 이번 논의에서는 중요하지 않습니다.)

마지막으로 측정 과정을 설명할 수 있습니다: 우리는 먼저 U를 (Y,X) 결합 시스템에 적용하고, 그 후 Y에 대해 표준 기저 측정을 수행합니다. 임의의 상태 ∣ϕ⟩에 대해, 우리는 상태를 얻습니다.

$$U\big(|0\rangle|\phi\rangle\big) = M\big(|0\rangle|\phi\rangle\big) = \sum_{k=0}^{m-1}|k\rangle\otimes\Pi_k|\phi\rangle,$$

첫 번째 등호는 U와 M이 첫 n 열에서 일치한다는 사실에서 비롯됩니다. Y에 대해 투영 측정을 수행할 때, 각 결과 k를 얻는 확률은

$$\big\|\Pi_k|\phi\rangle\big\|^2,$$

이 경우, (Y,X) 시스템의 상태는

$$|k\rangle\otimes\frac{\Pi_k|\phi\rangle}{\big\|\Pi_k|\phi\rangle\big\|}.$$

가 됩니다. 따라서, Y는 측정 결과의 복사본을 저장하고, X는 투영 측정 $\{\Pi_0,\ldots,\Pi_{m-1}\}$가 직접 X에 대해 수행된 것처럼 정확하게 변합니다.

정리

내적, 직교성 및 투영

이 섹션에서는 양자 회로의 능력과 한계를 탐구하기 위해, 벡터 간의 내적, 직교성, 직교 정규성, 그리고 투영 행렬을 다룹니다. 이러한 개념들은 표준 기저 측정의 유용한 일반화를 도입하는 데 도움이 됩니다.

- 내적

  내적은 두 벡터 간의 수학적 관계를 정의하는 중요한 개념입니다. 양자 역학에서 벡터는 디랙 표기법을 사용하여 켓(ket)과 브라(bra) 벡터로 표현됩니다. 켓 벡터와 브라 벡터의 내적은 스칼라 값을 반환하며, 이 값은 두 벡터의 관계를 나타냅니다. 예를 들어, 두 벡터 $|\psi\rangle$와 $|\varphi\rangle$의 내적은 $\langle\psi|\varphi\rangle$로 나타내며, 이를 통해 벡터들이 얼마나 "유사한지" 또는 "직교하는지" 알 수 있습니다.

- 유클리드 노름과의 관계

  벡터의 내적은 유클리드 노름과 밀접한 관계가 있습니다. 어떤 벡터 $|\psi\rangle$의 내적 $\langle\psi|\psi\rangle$은 벡터의 크기와 관련이 있으며, 이를 유클리드 노름이라고 부릅니다. 이 값은 항상 음이 아닌 실수 값이어야 하며, 벡터가 제로 벡터일 때만 0이 됩니다. 유클리드 노름을 사용하여 벡터의 크기를 평가할 수 있습니다.

- 공액 대칭성 및 선형성

  내적은 공액 대칭성을 따릅니다. 즉, 두 벡터 $|\psi\rangle$와 $|\varphi\rangle$에 대해 $\langle\psi|\varphi\rangle = (\langle\varphi|\psi\rangle)^*$로 표현됩니다. 또한, 내적은 선형성도 가집니다. 즉, 벡터의 내적은 첫 번째 인수에 대해서는 공액 선형성을, 두 번째 인수에 대해서는 선형성을 가집니다. 이 성질은 행렬 곱셈에서 각 인수에 대해 선형성이 성립하는 것과 유사합니다.

- 코시-슈바르츠 부등식

  코시-슈바르츠 부등식은 내적을 이용한 중요한 부등식으로, 두 벡터 $|\psi\rangle$와 $|\phi\rangle$에 대해 $\langle\psi|\psi\rangle\langle\phi|\phi\rangle \geq |\langle\psi|\phi\rangle|$^2가 성립합니다. 이는 벡터 간의 내적이 두 벡터의 크기에 의해 제한됨을 나타내며, 양자 정보 이론에서 매우 중요한 역할을 합니다.

- 직교 집합과 직교 정규 집합

  두 벡터 $|\psi\rangle$와 $|\phi\rangle$가 내적이 0일 때, 이들은 **직교**한다고 말합니다. 직교 벡터는 서로 직각을 이룹니다. 벡터 집합이 직교 집합이려면, 집합 내 모든 벡터들이 서로 직교해야 하며, 직교 정규 집합이라면, 각 벡터가 단위 벡터여야 합니다. 직교 정규 집합이면서 차원에 맞는 벡터 집합은 **직교 정규 기저**를 형성합니다.

  예를 들어, 2차원 공간에서 직교 정규 기저는 벡터 $\{|+\rangle, |-\rangle\}$일 수 있으며, 이는 큐빗의 상태를 나타내는 기저로 활용됩니다.