응용물리연구실심화실습3 (PHY3075)

2024년 9월 3주차

응용물리학과 2022006971 이민성

번역

- 양자 정보

  이제 우리는 시스템을 나타내는 상태, 즉 **양자 상태**를 나타내는 벡터 유형을 다루는 양자 정보로 넘어갑니다. 이전 섹션과 마찬가지로, 우리는 유한하고 비어 있지 않은 고전 상태 집합을 가진 시스템을 다루며, 해당 섹션에서 소개된 표기법을 많이 사용할 것입니다.

  - 양자 상태 벡터

    시스템의 **양자 상태**는 확률 상태와 유사하게 열 벡터로 표현됩니다. 이전과 같이, 벡터의 인덱스는 시스템의 고전 상태를 나타냅니다. 양자 상태를 나타내는 벡터는 다음 두 가지 특성을 가집니다:

    1. 양자 상태 벡터의 항목은 **복소수**입니다.
    2. 양자 상태 벡터의 항목들의 **절댓값의 제곱의 합**은 1입니다.

    따라서, 확률적 경우와는 달리, 양자 상태를 나타내는 벡터는 음이 아닌 실수 항목일 필요가 없으며, 항목의 합이 아니라 항목의 절댓값 제곱의 합이 1이 되어야 합니다. 이러한 변화는 단순해 보이지만, 이로 인해 양자 정보와 고전 정보 간의 모든 차이가 발생합니다. 양자 컴퓨터에서의 속도 향상이나 통신 프로토콜에서의 개선은 궁극적으로 이러한 단순한 수학적 변화에서 비롯됩니다.

    열 벡터의 **유클리드 노름**은 다음과 같이 표시되고 정의됩니다:

    $$v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

    $$\|v\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2}.$$

    양자 상태 벡터의 항목들의 절댓값 제곱의 합이 1이라는 조건은 그 벡터의 유클리드 노름이 1이라는 것과 같습니다. 즉, 양자 상태 벡터는 유클리드 노름에 대해 **단위 벡터**입니다.

  - 큐비트 상태의 예시

    큐비트라는 용어는 고전적 상태 집합이 {0,1}인 양자 시스템을 나타냅니다. 즉, 큐비트는 본질적으로 하나의 비트이지만, 이 비트가 양자 상태에 있을 수 있음을 명확하게 인식하는 데 이 이름을 사용합니다.

    다음은 큐비트의 양자 상태 예시입니다:

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = |0\rangle \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = |1\rangle,$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle,$$

그리고

$$\begin{pmatrix}\frac{1+2i}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix} = \frac{1+2i}{3}|0\rangle - \frac{2}{3}|1\rangle$$

첫 번째 두 예시 $|0\rangle$와 $|1\rangle$는 표준 기저 원소들이 유효한 양자 상태 벡터임을 보여줍니다. 그 항목들은 복소수이며(여기서 허수 부분은 0입니다), 항목들의 절댓값 제곱의 합을 계산하면

$$|1|^2 + |0|^2 = 1 \quad \text{and} \quad |0|^2 + |1|^2 = 1,$$

요구된 대로 1이 나옵니다. 고전적 상황과 유사하게, 우리는 양자 상태 벡터 $|0\rangle$와 $|1\rangle$를 각각 고전적 상태 0 또는 1과 연결합니다.

다른 두 예시에서도 마찬가지로 복소수 항목이 있으며, 항목들의 절댓값 제곱의 합을 계산하면 다음과 같습니다:

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 + \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

그리고

$$\left|\frac{1+2i}{3}\right|^2 + \left|-\frac{2}{3}\right|^2 = \frac{5}{9} + \frac{4}{9} = 1.$$

따라서, 이들은 유효한 양자 상태 벡터입니다. 주목할 점은 이 상태들이 $|0\rangle$와 $|1\rangle$ 상태의 선형 결합이라는 것입니다. 우리는 흔히 이러한 상태들이 0과 1 상태의 중첩(superposition)이라고 말합니다. 양자 상태의 맥락에서 "중첩"과 "선형 결합"은 사실상 동의어입니다.

위에서 설명한 (1)과 같은 큐비트 상태 벡터는 매우 흔히 나타나는 상태로, 이것을 **플러스 상태**라고 부르며, 다음과 같이 표기합니다:

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle.$$

또한, 우리는 **마이너스 상태**를 나타내기 위해 다음 표기법을 사용합니다:

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

여기에서 두 번째 항목이 양수가 아닌 음수인 양자 상태 벡터를 나타내며, 이를 **마이너스 상태**라고 부릅니다. 이러한 표기법은 흔히 사용되며, 특정 고전적 상태를 나타내지 않는 어떤 기호가 켓 안에 들어가는 경우가 많습니다. 우리는 원하는 어떤 기호라도 벡터를 나타내기 위해 켓 안에 넣을 수 있으며, 사실상 특정 기호 ψ를 사용하여 표준 기저 상태가 아닐 수 있는 임의의 벡터를 나타내는 것이 일반적입니다.

고전 상태 집합 Σ에 해당하는 인덱스를 가진 벡터 ∣ψ⟩가 있다고 가정하고, 만약 a∈Σ가 고전 상태 집합의 원소라면, ⟨a∣ψ⟩ (행렬) 곱은 인덱스 a에 해당하는 벡터 ∣ψ⟩의 항목과 같습니다. ∣ψ⟩가 표준 기저 벡터일 때, 가독성을 위해 ⟨a∣ψ⟩대신 ⟨aψ⟩로 표기합니다.

예를 들어, Σ={0,1}이고

$$|\psi\rangle = \frac{1+2i}{3}|0\rangle - \frac{2}{3}|1\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1+2i}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

그러면

$$\langle 0|\psi\rangle = \frac{1+2i}{3} \quad \text{and} \quad \langle 1|\psi\rangle = -\frac{2}{3}.$$

이 표기법을 사용할 때, ⟨ψ∣는 열 벡터 ∣ψ⟩의 켤레 전치(conjugate-transpose)를 취해 얻은 행 벡터를 나타냄을 이해해야 합니다. 즉, 벡터가 열 벡터에서 행 벡터로 변환되며, 각 항목은 그 복소수 켤레로 대체됩니다.

예를 들어, 벡터 ∣ψ⟩가 (2)에서 정의된 벡터라면,

$$\langle\psi| = \frac{1-2i}{3}\langle 0| - \frac{2}{3}\langle 1| = \begin{pmatrix} \frac{1-2i}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

우리가 **복소수 켤레**를 취하는 이유는, 전치(transpose)를 취하는 것 외에도, 3강에서 내적(inner product)을 논의할 때 더 명확해질 것입니다.

- 다른 시스템의 양자 상태

  우리는 임의의 고전적 상태 집합을 가진 시스템의 양자 상태를 고려할 수 있습니다.

  예를 들어, 다음은 전기 팬 스위치의 양자 상태 벡터입니다:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}|\mathrm{high}\rangle - \frac{i}{2}|\mathrm{low}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\mathrm{off}\rangle.$$

  여기서 가정은 고전적 상태들이 **high**, **medium**, **low**, **off** 순서로 배열된다는 것입니다. 전기 팬 스위치의 양자 상태를 고려해야 할 특별한 이유는 없지만, 원칙적으로는 가능합니다.

  다음은 0, 1, ..., 9의 고전적 상태를 가진 양자 십진수의 예시입니다:

$$\frac{1}{\sqrt{385}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{385}}\sum_{k=0}^{9}(k+1)|k\rangle.$$

  이 예시는 디랙 표기법을 사용하여 상태 벡터를 작성하는 편리함을 보여줍니다. 이 특정 예에서, 열 벡터 표현은 단지 번거롭지만, 만약 고전적 상태가 훨씬 더 많았다면 사용 불가능할 수 있습니다. 반면에, 디랙 표기법은 크고 복잡한 벡터를 간결한 형태로 정확하게 표현할 수 있도록 지원합니다.

  디랙 표기법(Dirac notation)은 벡터의 여러 측면이 **불확정적**일 때(즉, 알 수 없거나 아직 확립되지 않은 경우) 벡터를 표현하는 것도 가능합니다. 예를 들어, 임의의 고전적 상태 집합 Σ에 대해, 우리는 다음과 같은 양자 상태 벡터를 고려할 수 있습니다:

$$\frac{1}{\sqrt{|\Sigma|}}\sum_{a\in\Sigma}|a\rangle,$$

이는 Σ의 고전적 상태들에 대한 **균일한 중첩**을 나타냅니다. 여기서 ｜Σ｜는 Σ의 원소 개수를 나타냅니다.

우리는 나중 수업에서 열 벡터를 사용하는 것이 비실용적이거나 불가능한 훨씬 더 복잡한 양자 상태 벡터 표현을 다루게 될 것입니다. 실제로, 우리는 상태 벡터의 열 벡터 표현을 대부분 포기하게 될 것이며, 소수의 항목을 가진 벡터(주로 예시에서)만 다룰 때 항목을 명시적으로 표시하고 검토하는 것이 유용할 수 있습니다.

또한, 디랙 표기법으로 상태 벡터를 표현하는 것이 일반적으로 더 편리한 또 다른 이유는 고전 상태의 순서를 명시적으로 지정할 필요성을 없애준다는 점입니다(또는, 고전 상태와 벡터 인덱스 간의 대응을 명시할 필요성을 없애줍니다). 예를 들어, 고전적 상태 집합 {♣,♢,♡,♠}을 가진 시스템에 대한 양자 상태 벡터는 다음과 같이 표현될 수 있습니다:

$$\frac{1}{2}|\clubsuit\rangle + \frac{i}{2}|\diamondsuit\rangle - \frac{1}{2}|\heartsuit\rangle - \frac{i}{2}|\spadesuit\rangle,$$

이 표현은 명확하며, 이러한 고전적 상태 집합의 순서를 선택하거나 지정할 필요는 없습니다. 이 경우, 표준 카드 슈트의 순서를 지정하는 것은 어렵지 않습니다. 예를 들어, 순서를 ♣,♢,♡,♠로 지정할 수 있습니다. 이 특정 순서를 선택하면, 위의 양자 상태 벡터는 다음과 같은 열 벡터로 표현될 수 있습니다:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{i}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2} \end{pmatrix}.$$

일반적으로, 고전적 상태 집합이 어떻게 정렬되어 있는지에 대한 질문을 무시하고, 양자 상태 벡터가 고전적 상태에 직접적으로 인덱싱된다고 보는 것이 편리합니다.

- 양자 상태 측정하기

이제 **양자 상태가 측정**되었을 때 무엇이 일어나는지 살펴보겠습니다. 여기에서는 **표준 기저 측정**으로 알려진 간단한 측정 유형에 초점을 맞추겠습니다(나중에 더 일반적인 측정 개념도 논의될 예정입니다).

확률적 환경과 유사하게, 양자 상태에 있는 시스템이 측정될 때, 측정을 수행하는 관찰자는 양자 상태 벡터를 보지 않고 고전적인 상태 중 하나를 보게 됩니다. 이러한 의미에서 **측정은 양자 정보와 고전적 정보 사이의 인터페이스로 작용**하며, 고전적 정보를 양자 상태로부터 추출하는 과정을 의미합니다.

규칙은 간단합니다: **양자 상태가 측정되면**, 시스템의 각 고전적 상태는 해당 고전적 상태에 해당하는 양자 상태 벡터 항목의 **절댓값 제곱**에 비례하는 확률로 결과가 발생합니다. 이는 양자역학에서 **본(Born) 규칙**이라고 알려져 있습니다. 이 규칙은 양자 상태 벡터 항목들의 절댓값 제곱의 합이 1이어야 한다는 요구사항과 일치하며, 이는 다른 고전적 상태에 대한 측정 결과의 확률이 1로 합산됨을 의미합니다.

예를 들어, 플러스 상태 ｜+⟩를 측정하면 다음과 같은 두 가지 가능한 결과, 즉 0과 1이 발생하며, 각각의 확률은 다음과 같습니다.

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

0, 1이 나올 확률:

$$\Pr(\text{outcome is } 0) = \left|\langle 0|+\rangle\right|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Pr(\text{outcome is } 1) = \left|\langle 1|+\rangle\right|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

흥미롭게도, 마이너스 상태를 측정하면

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

두 결과에 대한 확률이 플러스 상태와 정확히 동일하게 나옵니다.

$$\Pr(\text{outcome is } 0) = \left|\langle 0|-\rangle\right|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Pr(\text{outcome is } 1) = \left|\langle 1|-\rangle\right|^2 = \left|-\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

이것은 표준 기저 측정에서 플러스 상태와 마이너스 상태가 정확히 동일하다는 것을 시사합니다. 그렇다면 우리는 왜 이 둘을 구분해야 할까요? 이에 대한 답변은 다음 절에서 다루겠습니다.

물론, 양자 상태 $|0\rangle$를 측정하면 확실히 고전 상태 0이 되고, 마찬가지로 양자 상태 $|1\rangle$를 측정하면 확실히 고전 상태 1이 됩니다. 이는 이러한 양자 상태들이 이전에 설명한 대로 시스템이 해당 고전 상태에 있음을 나타내는 것과 일치합니다.

마지막 예로, 상태

$$|\psi\rangle = \frac{1+2i}{3}|0\rangle - \frac{2}{3}|1\rangle$$

를 측정했을 때의 확률은 다음과 같습니다:

$$\Pr(\text{outcome is } 0) = \left|\langle 0|\psi\rangle\right|^2 = \left|\frac{1+2i}{3}\right|^2 = \frac{5}{9},$$

$$\Pr(\text{outcome is } 1) = \left|\langle 1|\psi\rangle\right|^2 = \left|-\frac{2}{3}\right|^2 = \frac{4}{9}.$$

- 유니터리 연산

  지금까지는 양자 정보가 고전 정보와 근본적으로 다른 이유가 명확하지 않을 수 있습니다. 즉, 양자 상태가 측정되면 각 고전 상태가 얻어질 확률은 해당 벡터 항목의 절댓값 제곱으로 주어집니다. 그렇다면, 단순히 이러한 확률을 확률 벡터로 기록하면 되지 않을까요?

  답은 적어도 부분적으로, **양자 상태에 대해 수행할 수 있는 허용된 연산 집합**이 고전 정보에 대해 허용된 연산 집합과 다르기 때문입니다. 확률적 환경과 유사하게, 양자 상태에 대한 연산은 선형 매핑입니다. 하지만 고전적 경우에서처럼 확률 행렬로 표현되는 대신, 양자 상태 벡터에 대한 연산은 **유니터리 행렬**로 표현됩니다.

  복소수 항목을 가진 **정사각 행렬** U는 다음의 식을 만족하면 유니터리(unitary)입니다:

$$
\begin{aligned}
UU^\dagger &= \mathbb{I} \\
U^\dagger U &= \mathbb{I}.
\end{aligned}
$$

  여기서 I는 단위 행렬(identity matrix)이고, U†는 U의 **켤레 전치**(conjugate transpose)를 의미합니다. 즉, U의 항목을 전치(transpose)하고 각각의 항목을 복소수 켤레로 바꾼 것입니다.

$$
U^\dagger = \overline{U^T}
$$

  위 두 식 중 하나가 참이면, 다른 하나도 참이어야 합니다. 두 식 모두 U†가 U의 역행렬이라는 것과 동일합니다:

$$
U^{-1} = U^\dagger.
$$

  (주의: M이 정사각 행렬이 아니라면 M†M=I이고 MM†≠I일 수 있습니다. 위 식의 동등성은 정사각 행렬일 때만 성립합니다.)

  U가 유니터리라는 조건은, U에 의한 곱셈이 어떤 벡터의 **유클리드 노름**을 변경하지 않는다는 것과 동일합니다. 즉, n×n 행렬 U는 U∣ψ⟩의 유클리드 노름이 ∣ψ⟩의 유클리드 노름과 같을 때, 그리고 오직 그럴 때만 유니터리입니다:

  ∥U∣ψ⟩∥=∥∣ψ⟩∥

  이는 **모든** 복소수 항목을 가진 n-차원 열 벡터 ∣ψ⟩에 대해 성립합니다. 따라서 모든 양자 상태 벡터의 집합은 유클리드 노름이 1인 벡터들의 집합과 같으므로, **유니터리 행렬로 양자 상태 벡터를 곱하면 항상 다른 양자 상태 벡터가 생성**됩니다.

  사실, 유니터리 행렬은 **선형 매핑** 집합과 동일하며, 이 매핑은 항상 하나의 양자 상태 벡터를 또 다른 양자 상태 벡터로 변환합니다. 이는 고전적 확률론적 경우와 유사하게, 연산이 확률 행렬과 연관된 경우를 떠올리게 합니다. 이때 확률 행렬은 항상 확률 벡터를 또 다른 확률 벡터로 변환하는 행렬입니다.

- 큐비트에서의 중요한 유니터리 연산들

  다음 목록은 큐비트에서 중요한 유니터리 연산들을 설명합니다.

1. **파울리 연산 (Pauli operations)**: 네 가지 파울리 행렬은 다음과 같습니다:

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

우리는 종종 X=σx, Y=σy, Z=σz와 같은 표기법을 사용할 것입니다. 그러나 X, Y, Z라는 문자는 다른 목적으로도 많이 사용된다는 점을 인지해야 합니다. X 연산은 **비트 플립 (bit flip)** 또는 **NOT 연산**이라고도 불리며, 이는 다음과 같은 비트에서의 동작을 유도하기 때문입니다:

$$X|0\rangle = |1\rangle \quad \text{and} \quad X|1\rangle = |0\rangle.$$

Z 연산은 위상 플립 (phase flip)이라고도 불리며, 이는 다음과 같은 동작을 하기 때문입니다:

$$Z|0\rangle = |0\rangle \quad \text{and} \quad Z|1\rangle = -|1\rangle.$$

2. **아다마르 연산 (Hadamard operation)**: 아다마르 연산은 다음 행렬로 표현됩니다:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

3. **위상 연산 (Phase operations)**: 위상 연산은 다음 행렬로 표현됩니다:

$$P_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$$

여기서 θ는 실수입니다. 특히 중요한 예로는 다음 연산들이 있습니다:

$$S = P_{\pi/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad T = P_{\pi/4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1+i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

또한, 다른 예로는 I=P0 및 Z=Pπ가 있습니다.

지금 정의된 모든 행렬은 유니터리이므로 단일 큐비트에서의 양자 연산을 나타냅니다.

예를 들어, 다음은 아다마르 행렬 H가 유니터리임을 검증하는 계산입니다:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{\dagger} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

다음은 자주 접하는 큐비트 상태 벡터에 대한 아다마르 연산의 작용입니다:

$$H|0\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = |+\rangle$$

$$H|1\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = |-\rangle$$

$$H|+\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle$$

$$H|-\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle$$

이 네 개의 식을 더 간결하게 나열할 가치가 있습니다:

$$\begin{aligned} H|0\rangle &= |+\rangle \\ H|1\rangle &= |-\rangle \\ H|+\rangle &= |0\rangle \\ H|-\rangle &= |1\rangle \end{aligned}$$

그리고 이전에 언급된 상태 벡터에 대한 마지막 예시가 있습니다.

$$H\left(\frac{1+2i}{3}|0\rangle - \frac{2}{3}|1\rangle\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+2i}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1+2i}{3\sqrt{2}} \\ \frac{3+2i}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{-1+2i}{3\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{3+2i}{3\sqrt{2}}|1\rangle$$

$H|+\rangle = |0\rangle$와 $H|-\rangle = |1\rangle$라는 사실을 잠시 생각해볼 필요가 있습니다. 큐비트가 **플러스 상태**와 **마이너스 상태** 중 하나로 준비되어 있는데, 그것이 무엇인지는 알 수 없는 상황을 가정해봅시다. 두 상태 중 하나를 측정하면 두 가지 결과, 즉 0과 1이 동일한 확률인 1/2로 나옵니다. 따라서, 원래 준비된 상태가 $|+\rangle$인

지 ㅣ－〉인지는 알 수 없습니다. 하지만 **아다마르 연산**을 적용한 후 측정하면, 원래 상태가 ㅣ＋〉였으면 결과가 확실히 0이 되고, ㅣ－〉였으면 결과가 확실히 1이 됩니다.

따라서, **플러스 상태**와 **마이너스 상태**는 완벽하게 구별할 수 있습니다. 이는 부호 변화, 또는 더 일반적으로 **복소수 항목의 위상**이 양자 상태 벡터에 크게 영향을 미친다는 것을 보여줍니다.

여기서 또 다른 예로, 플러스 상태에서 **T 연산**의 작용을 살펴보겠습니다:

$$T|+\rangle = T\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}T|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}T|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1+i}{2}|1\rangle$$

여기서 우리는 등가의 행렬/벡터 형식으로 변환할 필요 없이, 행렬 곱셈의 선형성을 사용하고 아래 공식을 그대로 사용했습니다.

$$T|0\rangle = |0\rangle \quad \text{and} \quad T|1\rangle = \frac{1+i}{\sqrt{2}}|1\rangle.$$

비슷한 방식으로, **아다마르 연산**을 방금 얻은 양자 상태 벡터에 적용해 보겠습니다:

$$\begin{aligned}
H\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1+i}{2}|1\rangle\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}H|0\rangle + \frac{1+i}{2}H|1\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1+i}{2}|-\rangle \\
&= \left(\frac{1}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle\right) + \left(\frac{1+i}{2\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1+i}{2\sqrt{2}}|1\rangle\right) \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{1+i}{2\sqrt{2}}\right)|0\rangle + \left(\frac{1}{2} - \frac{1+i}{2\sqrt{2}}\right)|1\rangle.
\end{aligned}$$

이 두 가지 접근 방식(하나는 행렬로 명시적으로 변환하고, 다른 하나는 기저 상태에서 연산의 작용을 사용하는 방식)은 동일한 결과를 줍니다. 상황에 따라 더 편리한 방식을 선택할 수 있습니다.

- 큐비트 유니터리 연산의 합성

  유니터리 연산의 합성은 확률론적 환경에서와 마찬가지로 행렬 곱셈으로 나타낼 수 있습니다. 예를 들어, 먼저 아다마르 연산을 적용하고, 이어서 S 연산을 적용한 후, 다시 아다마르 연산을 적용하면, 결과적인 연산 R은 다음과 같습니다:

$$R = HSH = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{pmatrix}.$$

  이 유니터리 연산 R은 흥미로운 예시입니다. 이 연산을 두 번 적용하면, 행렬 표현의 제곱과 동일한 **NOT 연산**을 얻을 수 있습니다:

$$R^2 = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

즉, R은 **NOT 연산의 제곱근**입니다. 동일한 연산을 두 번 적용하여 **NOT 연산**을 얻는 이런 방식은 단일 비트에 대한 고전적 연산에서는 불가능한데, 이는 음수의 제곱근을 실수 축에서 취할 수 없다는 사실과 관련이 있습니다.

- 더 큰 시스템에서의 유니터리 연산

  다음 수업에서는 두 개 이상의 고전 상태를 가진 시스템에서의 유니터리 연산에 대한 여러 예시를 다루게 될 것입니다. 세 개의 고전 상태를 가진 시스템에서의 유니터리 연산의 예시는 다음 행렬로 주어집니다:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  시스템의 고전 상태가 0, 1, 2라고 가정하면, 이 연산은 **모듈로 3 덧셈**으로 설명할 수 있습니다.

$$A|0\rangle = |1\rangle, \quad A|1\rangle = |2\rangle, \quad \text{and} \quad A|2\rangle = |0\rangle$$

  이 행렬 A는 순열 행렬 (permutation matrix)의 예시입니다. 순열 행렬은 각 행과 열에 정확히 하나의 1이 있는 행렬로, 벡터의 항목을 단순히 재배열(순열)합니다. 항등 행렬은 가장 단순한 순열 행렬입니다. 또 다른 예로, NOT 연산은 비트 또는 큐비트에 대한 순열 연산입니다. 임의의 양의 정수 차원의 모든 순열 행렬은 유니터리입니다. 순열 행렬은 고전 및 양자 연산을 모두 나타내는 유일한 행렬입니다. 즉, 행렬이 **확률 행렬**이자 **유니터리 행렬**일 필요충분조건은 그것이 순열 행렬일 때입니다.

  또 다른 유니터리 행렬의 예로, 이번에는 4×4 행렬인 아래의 행렬을 들 수 있습니다:

$$U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}.$$

  이 행렬은 양자 푸리에 변환 (quantum Fourier transform)이라는 연산을 설명하며, 4×4 차원의 경우에 해당합니다. 양자 푸리에 변환은 일반적으로 양의 정수 차원 n에 대해 정의될 수 있으며, 이 강의의 두 번째 단원에서 중요한 역할을 하게 될 것입니다.

정리

- **양자 상태 벡터**는 시스템의 양자 상태를 나타내며, 그 항목은 복소수이고 항목들의 절댓값 제곱의 합은 1이어야 합니다. 이는 양자 상태 벡터가 유클리드 노름 1을 가지는 **단위 벡터**임을 의미합니다.
- **큐비트 상태**는 고전적 상태 집합 {0,1}을 가진 양자 시스템을 나타냅니다. 큐비트의 예로는 $|0\rangle$와 $|1\rangle$가 있으며, 이들은 선형 결합으로 **중첩 상태**를 이룹니다. 또한, 플러스 상태와 마이너스 상태도 큐비트의 대표적인 예입니다.
- **양자 상태 측정**은 고전 상태로 변환되는 과정으로, 각 고전 상태는 양자 상태 벡터 항목의 절댓값 제곱에 비례하는 확률로 측정됩니다. 이는 **본(Born) 규칙**으로 불리며, 양자 상태 벡터의 절댓값 제곱의 합이 1임을 보장합니다.
- **유니터리 연산**은 양자 상태에 허용된 선형 변환입니다. 유니터리 행렬은 복소수 항목을 가지며, 행렬 곱셈 후에도 벡터의 유클리드 노름을 보존합니다. 대표적인 유니터리 연산으로는 **파울리 연산**(X, Y, Z 연산), **아다마르 연산**, **위상 연산**이 있습니다.
- **큐비트 유니터리 연산의 합성**은 행렬 곱셈으로 표현되며, 예를 들어, 아다마르 연산과 S 연산을 합성하면, **NOT 연산의 제곱근**을 얻을 수 있습니다.
- **더 큰 시스템에서의 유니터리 연산**은 고전적 상태가 두 개 이상인 시스템에서의 연산을 다룹니다. 예로, 세 개의 고전 상태를 가진 시스템에서의 유니터리 연산은 **순열 행렬**로 설명될 수 있으며, 이는 벡터의 항목을 단순히 재배열합니다. 또 다른 예로, **양자 푸리에 변환**은 더 큰 시스템에서 중요한 유니터리 연산으로 작용합니다.