응용물리연구실심화실습3 (PHY3075)

2024년 10월 3주차

응용물리학과 2022006971 이민성

번역

- 양자 정보

  우리는 이제 다중 시스템의 설정에서 양자 정보로 넘어갈 준비가 되었습니다. 단일 시스템에 대한 이전 수업과 마찬가지로, 다중 시스템에 대한 양자 정보의 수학적 설명은 확률적 경우와 매우 유사하며 유사한 개념과 기법을 사용합니다.

  양자 상태

  다중 시스템은 집합적으로 단일 복합 시스템으로 볼 수 있습니다. 우리는 이미 확률적 설정에서 이를 관찰했으며, 양자 설정도 유사합니다.

  즉, 다중 시스템의 양자 상태는 복소수 항을 가진 열 벡터로 표현되며 유클리드 노름은 1과 같습니다 — 단일 시스템의 양자 상태와 마찬가지로. 다중 시스템의 경우, 이러한 벡터의 인덱스는 각 개별 시스템과 관련된 고전 상태 집합의 카르테시안 곱과 대응됩니다 (왜냐하면 이것이 복합 시스템의 고전 상태 집합이기 때문입니다).

  예를 들어, X 와 Y 가 큐비트라면, 큐비트 쌍 (X , Y) 를 집합적으로 단일 시스템으로 볼 때, 고전 상태 집합은 카르테시안 곱 { 0 , 1 } × { 0 , 1 } 입니다. 이진 값 쌍을 길이 2의 이진 문자열로 나타내면, 우리는 이 카르테시안 곱 집합을 집합 { 00 , 01 , 10 , 11 } 와 연관지을 수 있습니다. 따라서 다음 벡터들은 모두 쌍 (X , Y) 의 양자 상태 벡터의 예입니다:

  $$\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}}|01\rangle + \frac{i}{\sqrt{6}}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|11\rangle, \quad \frac{3}{5}|00\rangle - \frac{4}{5}|11\rangle, \quad \text{and} \quad |01\rangle.$$

  다중 시스템의 양자 상태 벡터는 여러 가지 방법으로 표현될 수 있으며, 우리는 우리의 선호에 맞는 변형을 선택할 수 있습니다. 다음은 위의 첫 번째 양자 상태 벡터에 대한 몇 가지 예입니다.

  우리는 ㅣab〉=ㅣa〉ㅣb〉 (임의의 고전 상태 a 와 b 에 대해)를 사용하여 다음과 같이 쓸 수 있습니다:

  $$\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}}|0\rangle|1\rangle + \frac{i}{\sqrt{6}}|1\rangle|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|1\rangle|1\rangle.$$

  우리는 텐서 곱 기호를 명시적으로 이렇게 쓸 수도 있습니다:

  $$\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle \otimes |0\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}}|0\rangle \otimes |1\rangle + \frac{i}{\sqrt{6}}|1\rangle \otimes |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|1\rangle \otimes |1\rangle.$$

  우리는 kets에 첨자를 붙여서 고려되는 시스템과 어떻게 대응되는지를 나타낼 수도 있습니다:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_{\mathsf{X}}|0\rangle_{\mathsf{Y}} - \frac{1}{\sqrt{6}}|0\rangle_{\mathsf{X}}|1\rangle_{\mathsf{Y}} + \frac{i}{\sqrt{6}}|1\rangle_{\mathsf{X}}|0\rangle_{\mathsf{Y}} + \frac{1}{\sqrt{6}}|1\rangle_{\mathsf{X}}|1\rangle_{\mathsf{Y}}.$$

물론, 우리는 양자 상태 벡터를 열 벡터로 명시적으로 쓸 수도 있습니다:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{i}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

어떤 문맥에서 나타나든, 이러한 변형 중 하나가 선호될 수 있지만 — 이들은 모두 동일한 벡터를 설명하는 측면에서 동등합니다.

양자 상태 벡터의 텐서 곱

행렬 M x N의 텐서곱은 다음과 같이 주어진다.

행렬

$$M = \sum_{a,b\in\Sigma} \alpha_{ab}|a\rangle\langle b|$$

와

$$N = \sum_{c,d\in\Gamma} \beta_{cd}|c\rangle\langle d|$$

의 텐서곱 M x N은 다음과 같은 행렬이다:

$$M \otimes N = \sum_{a,b\in\Sigma}\sum_{c,d\in\Gamma} \alpha_{ab}\beta_{cd}|ac\rangle\langle bd|$$

동등하게, M과 N은 다음의 등식으로 정의된다:

$$\langle ac|M \otimes N|bd\rangle = \langle a|M|b\rangle\langle c|N|d\rangle$$

이 등식은 모든 a,b in sigma 및 c, d, in gamma에 대해 성립한다.

M x N을 설명하는 또 다른 방법으로, 다음 등식을 만족하는 유일한 행렬로 정의할 수 있다:

$$(M \otimes N)\big(|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle\big) = \big(M|\phi\rangle\big) \otimes \big(N|\psi\rangle\big)$$

이는 가능한 모든 벡터 |phi>와 |psi>에 대해 성립한다. 여기서 |phi>의 인덱스는 Sigma의 요소에, |pi>의 인덱스는 Gamma에 해당한다고 가정한다.

앞서 설명한 대로, 데카르트 곱의 요소들의 순서에 대한 관례를 따르면 두 행렬의 텐서곱을 다음과 같이 명시적으로 쓸 수 있다.

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mm} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{k1} & \cdots & \beta_{kk} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} & \cdots & \alpha_{11}\beta_{1k} & & \alpha_{1m}\beta_{11} & \cdots & \alpha_{1m}\beta_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{11}\beta_{k1} & \cdots & \alpha_{11}\beta_{kk} & & \alpha_{1m}\beta_{k1} & \cdots & \alpha_{1m}\beta_{kk} \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ \alpha_{m1}\beta_{11} & \cdots & \alpha_{m1}\beta_{1k} & & \alpha_{mm}\beta_{11} & \cdots & \alpha_{mm}\beta_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1}\beta_{k1} & \cdots & \alpha_{m1}\beta_{kk} & & \alpha_{mm}\beta_{k1} & \cdots & \alpha_{mm}\beta_{kk} \end{pmatrix}$$

세 개 이상의 행렬에 대한 텐서곱은 이와 유사한 방식으로 정의된다. 행렬 M1,...,Mn의 인덱스가 고전적 상태 집합 Σ1,...,Σn에 해당한다고 할 때, 텐서곱 M1⊗⋯⊗Mn은 다음 조건으로 정의된다:

⟨a1⋯an ∣ M1⊗⋯⊗Mn ∣ b1⋯bn⟩=⟨a1 ∣ M1 ∣ b1⟩⋯⟨an ∣ Mn ∣ bn⟩

이는 모든 고전적 상태 a1,b1∈Σ1,...,an,bn∈Σn에 대해 성립한다.

또는 벡터에서 관찰한 것과 유사하게, 두 행렬의 텐서곱을 사용하여 세 개 이상의 행렬에 대한 텐서곱을 재귀적으로 정의할 수도 있다.

행렬의 텐서곱은 다음과 같은 등식이 항상 성립하므로 곱셈적이라고도 한다:

(M1⊗⋯⊗Mn)(N1⊗⋯⊗Nn)=(M1N1)⊗⋯⊗(MnNn)

여기서 M1,...,Mn과 N1,...,Nn이 임의의 행렬일 때, M1N1,...,MnNn의 곱셈이 유효하다면 위 식이 성립한다.

독립적인 연산 (계속)

위 논의를 요약하자면, M이 X에서의 확률적 연산이고, N이 Y에서의 확률적 연산이며, 이 두 연산이 독립적으로 수행된다면, 복합 시스템 (X,Y)에서의 결과적인 연산은 텐서곱 M⊗N이다.

확률적 상태와 관련하여 우리가 여기서 보는 것은 텐서곱이 독립성을 나타낸다는 것이다. 만약 두 시스템 X와 Y가 각각 확률적 상태 $|\phi\rangle$와 $|\pi\rangle$에 독립적으로 존재한다면, 복합 시스템 (X,Y)는 확률적 상태 $|\phi\rangle \otimes |\pi\rangle$에 있게 된다. 또한, M과 N이라는 확률적 연산을 각각 독립적으로 두 시스템에 적용하면, 복합 시스템 (X,Y)에서의 결과적인 작용은 $M \otimes N$ 연산으로 설명된다.

예를 들어보자. 이전 수업에서 다룬 단일 비트에 대한 확률적 연산을 다시 살펴보자. 비트의 고전적 상태가 0이라면, 아무 변화가 없다. 비트의 고전적 상태가 1이라면, 1/2의 확률로 0으로 뒤집어진다. 우리가 관찰한 바와 같이, 이 연산은 다음 행렬로 표현된다:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

이 연산이 비트 X에서 수행되고, 두 번째 비트 Y에는 (독립적으로) NOT 연산이 수행된다면, 복합 시스템 (X,Y)에서의 결합 연산은 다음 행렬 표현을 갖는다:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

살펴보면, 이것이 확률적 행렬(stochastic matrix)임을 알 수 있다.

이는 항상 성립한다. 두 개 이상의 확률적 행렬의 텐서곱은 항상 확률적이다.

우리가 자주 접하는 상황 중 하나는 한 시스템에는 어떤 연산이 수행되고 다른 시스템에는 아무런 작업도 하지 않는 경우이다. 이런 경우에도 동일한 처방을 따르며, 아무것도 하지 않는 것은 항등 행렬(identity matrix)로 표현된다는 점에 유의해야 한다. 예를 들어, 비트 X를 0 상태로 재설정하고 Y에는 아무런 작업도 하지 않는다면, (X,Y)에 대해 확률적(그리고 사실 결정적) 연산이 다음 행렬로 표현된다:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 양자 정보

  이제 여러 시스템 환경에서 양자 정보로 넘어갈 준비가 되었습니다. 단일 시스템에 대한 이전 수업과 마찬가지로, 다중 시스템에 대한 양자 정보의 수학적 설명은 확률적 경우와 매우 유사하며, 비슷한 개념과 기법을 사용합니다.

양자 상태

다중 시스템은 단일 복합 시스템으로 집합적으로 볼 수 있습니다. 이는 확률적 환경에서 이미 관찰한 바 있으며, 양자 환경에서도 유사합니다.

즉, 다중 시스템의 양자 상태는 복소수 성분을 가지며 유클리드 노름(Euclidean norm)이 1인 열 벡터로 표현됩니다. 이는 단일 시스템의 양자 상태와 동일합니다. 다중 시스템의 경우, 이러한 벡터의 인덱스는 각 개별 시스템에 연관된 고전적 상태 집합의 데카르트 곱(Cartesian product)에 대응됩니다(복합 시스템의 고전적 상태 집합이 그것이기 때문입니다).

예를 들어, X와 Y가 큐비트(qubit)라고 하면, 두 큐비트 (X,Y) 쌍을 단일 시스템으로 집합적으로 볼 때의 고전적 상태 집합은 {0,1}×{0,1}입니다. 이진 값 쌍을 길이가 2인 이진 문자열로 표현함으로써, 이 데카르트 곱 집합을 {00,01,10,11} 집합에 대응시킬 수 있습니다. 따라서 다음 벡터들은 모두 (X,Y) 쌍의 양자 상태 벡터의 예입니다:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}}|01\rangle + \frac{i}{\sqrt{6}}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|11\rangle, \quad \frac{3}{5}|00\rangle - \frac{4}{5}|11\rangle, \quad \text{and} \quad |01\rangle.$$

다중 시스템의 양자 상태 벡터를 표현하는 방법에는 다양한 변형이 있으며, 우리는 선호에 따라 어떤 변형을 선택할 수 있습니다. 아래는 위 첫 번째 양자 상태 벡터에 대한 몇 가지 예입니다.

우리는

∣ab⟩=∣a⟩∣b⟩ (어떤 고전적 상태 a와 b에 대해서)라는 사실을 이용하여 다음과 같이 쓸 수 있습니다:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}}|0\rangle|1\rangle + \frac{i}{\sqrt{6}}|1\rangle|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|1\rangle|1\rangle.$$

우리는 텐서 곱 기호를 이렇게 명시적으로 쓸 수도 있습니다:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle \otimes |0\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}}|0\rangle \otimes |1\rangle + \frac{i}{\sqrt{6}}|1\rangle \otimes |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|1\rangle \otimes |1\rangle.$$

우리는 각 큐벳이 어떤 시스템에 대응하는지 나타내기 위해 켓에 하위 첨자를 달 수도 있습니다:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_{\mathsf{X}}|0\rangle_{\mathsf{Y}} - \frac{1}{\sqrt{6}}|0\rangle_{\mathsf{X}}|1\rangle_{\mathsf{Y}} + \frac{i}{\sqrt{6}}|1\rangle_{\mathsf{X}}|0\rangle_{\mathsf{Y}} + \frac{1}{\sqrt{6}}|1\rangle_{\mathsf{X}}|1\rangle_{\mathsf{Y}}.$$

물론, 양자 상태 벡터를 열 벡터로 명시적으로 쓸 수도 있습니다:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{i}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

이것이 나타나는 문맥에 따라, 이들 중 하나가 더 선호될 수 있지만, 모두 동일한 벡터를 설명한다는 점에서 동일합니다.

양자 상태 벡터의 텐서 곱

확률 벡터에 대해 우리가 갖고 있는 것과 유사하게, 양자 상태 벡터의 텐서 곱도 양자 상태 벡터입니다 — 그리고 이것은 시스템 간의 독립성을 나타냅니다.

좀 더 자세히 설명하자면, 두 시스템의 경우부터 시작하여, $|\varphi\rangle$는 시스템 X의 양자 상태 벡터이고, $|\psi\rangle$는 시스템 Y의 양자 상태 벡터라고 가정합시다. 텐서 곱 $|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle$, 또는 $|\varphi\rangle|\psi\rangle$ 또는 $|\varphi \otimes \psi\rangle$는 합성 시스템 (X,Y)의 양자 상태 벡터가 됩니다. 우리는 이러한 형태의 상태를 곱 상태(product state)라고 부릅니다.

직관적으로 말하자면, 시스템 쌍 (X,Y)가 곱 상태 $|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle$에 있을 때, 이는 시스템 X가 양자 상태 $|\varphi\rangle$에 있고, 시스템 Y가 양자 상태 $|\psi\rangle$에 있으며, 두 시스템의 상태가 서로 관련이 없다는 의미로 해석할 수 있습니다.

텐서 곱 벡터 $|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle$가 실제로 양자 상태 벡터라는 사실은 텐서 곱에 대해 유클리드 노름이 곱셈적으로 적용된다는 점과 일치합니다:

$$\begin{aligned}
\big\| |\phi\rangle \otimes |\psi\rangle \big\| &= \sqrt{\sum_{(a,b)\in\Sigma\times\Gamma} \big|\langle ab|\phi\otimes\psi\rangle\big|^2} \\
&= \sqrt{\sum_{a\in\Sigma}\sum_{b\in\Gamma}\big|\langle a|\phi\rangle\langle b|\psi\rangle\big|^2} \\
&= \sqrt{\left(\sum_{a\in\Sigma}\big|\langle a|\phi\rangle\big|^2\right)\left(\sum_{b\in\Gamma}\big|\langle b|\psi\rangle\big|^2\right)} \\
&= \big\||\phi\rangle\big\|\,\big\||\psi\rangle\big\|.
\end{aligned}$$

따라서, $|\varphi\rangle$와 $|\psi\rangle$가 양자 상태 벡터이므로, $\| |\varphi\rangle \| = 1$이고 $\| |\psi\rangle \| = 1$이므로, $\| |\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle \| = 1$이 되어 $|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle$도 양자 상태 벡터가 됩니다.

이 논의는 두 개 이상의 시스템으로 일반화할 수 있습니다. 만약 $|\psi_1\rangle, \ldots, |\psi_n\rangle$가 시스템 $X_1, \ldots, X_n$의 양자 상태 벡터라면, $|\psi_1\rangle \otimes \cdots \otimes |\psi_n\rangle$는 합성 시스템 $(X_1, \ldots, X_n)$의 곱 상태를 나타내는 양자 상태 벡터입니다. 다시 말해, 이것이 양자 상태 벡터임을 알 수 있는 이유는 다음과 같기 때문입니다:

$$\big\| |\psi_1\rangle \otimes \cdots \otimes |\psi_n\rangle \big\| = \big\| |\psi_1\rangle \big\| \cdots \big\| |\psi_n\rangle \big\| = 1^n = 1.$$

얽힌 상태 (Entangled states)

모든 다중 시스템의 양자 상태 벡터가 곱셈 상태는 아닙니다. 예를 들어, 두 큐비트의 양자 상태 벡터

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \tag{6}$$

는 곱셈 상태가 아닙니다. 이를 설명하기 위해, 우리는 벡터 (5)가 곱셈 상태가 아니라는 것을 증명했던 것과 동일한 논리를 따를 수 있습니다.

즉, 만약 (6)이 곱셈 상태라면, 다음과 같은 양자 상태 벡터 |phi>과 |psi>가 존재하여야 합니다.

$$|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle.$$

그러나 그럴 경우, 반드시 다음과 같은 관계가 성립해야 합니다:

$$\langle 0|\phi\rangle\langle 1|\psi\rangle = \langle 01|\phi \otimes \psi\rangle = 0$$

이는 ⟨0 | ϕ⟩=0 or ⟨1 | ψ⟩=0 (또는 둘 다)임을 의미합니다. 하지만 이는 다음과 같은 사실과 모순됩니다:

$$\langle 0|\phi\rangle\langle 0|\psi\rangle = \langle 00|\phi \otimes \psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

그리고

$$\langle 1|\phi\rangle\langle 1|\psi\rangle = \langle 11|\phi \otimes \psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

이 두 값은 모두 0이 아니므로, 이는 모순입니다.

여기서 중요한 것은 1/sqrt(2)라는 구체적인 값이 아니라, 이 값이 0이 아니라는 것입니다. 예를 들어, 다음 양자 상태

$$\frac{3}{5}|00\rangle + \frac{4}{5}|11\rangle$$

도 동일한 논리로 곱셈 상태가 아닙니다.

따라서 양자 상태 벡터 (6)는 두 시스템 간의 상관관계를 나타내며, 우리는 이 시스템들이 얽혀 있다고 말합니다.

얽힘은 양자 정보의 본질적인 특징으로, 후속 수업에서 훨씬 더 자세히 다룰 예정입니다. 얽힘은 복잡할 수 있으며, 특히 양자 정보의 일반적인 밀도 행렬 표현으로 설명되는 노이즈가 포함된 양자 상태에 대해서는 더욱 그러합니다. 그러나 우리가 이 단원에서 집중하는 단순화된 양자 상태 벡터 형식에서는, 얽힘은 상관관계와 동등합니다. 즉, 곱셈 벡터가 아닌 모든 양자 상태 벡터는 얽힌 상태를 나타냅니다.

반대로, 다음과 같은 양자 상태 벡터

$$\frac{1}{2}|00\rangle + \frac{i}{2}|01\rangle - \frac{1}{2}|10\rangle - \frac{i}{2}|11\rangle$$

은 곱셈 상태의 예입니다:

$$\frac{1}{2}|00\rangle + \frac{i}{2}|01\rangle - \frac{1}{2}|10\rangle - \frac{i}{2}|11\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle\right)$$

따라서 이 상태는 얽힌 상태가 아닙니다.

벨 상태

이제 몇 가지 중요한 다중 큐비트 양자 상태를 살펴보겠습니다. 첫 번째로 벨 상태를 다뤄봅니다. 벨 상태는 다음과 같은 네 가지 2큐비트 상태입니다:

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$
$$|\phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$
$$|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle$$
$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle$$

벨 상태는 존 벨(John Bell)을 기리기 위해 붙여진 이름입니다.

|phi+>가 제품 상태가 아님을 증명하는 것과 동일한 논리를 통해, 다른 벨 상태들도 제품 상태가 아님을 알 수 있습니다. 즉, 네 가지 벨 상태 모두 두 큐비트 간의 얽힘을 나타냅니다.
모든 네 가지 벨 상태의 집합

$$\left\{|\phi^+\rangle, |\phi^-\rangle, |\psi^+\rangle, |\psi^-\rangle\right\}$$

는 벨 기저(Bell basis)로 알려져 있습니다. 두 큐비트의 모든 양자 상태 벡터나, 사실 두 비트의 네 가지 고전적 상태에 해당하는 항목들을 가지는 모든 복소 벡터는 네 가지 벨 상태의 선형 결합으로

표현할 수 있습니다. 예를 들어,

$$|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi^+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi^-\rangle.$$

GHZ 및 W 상태

다음으로 우리는 세 큐비트의 두 가지 흥미로운 상태 예를 살펴보겠습니다.

첫 번째 예시는 세 큐비트의 양자 상태 (X,Y,Z)를 나타내며, GHZ 상태입니다(이 상태는 Daniel Greenberger, Michael Horne, Anton Zeilinger가 처음으로 그 일부 특성을 연구했기 때문에 그들의 이름을 따서 명명되었습니다):

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|111\rangle.$$

두 번째 예시는 이른바 W 상태입니다:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}|001\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|010\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|100\rangle.$$

이 두 상태는 모두 제품 상태가 아니므로, 세 큐비트 양자 상태 벡터들의 텐서 곱으로 표현될 수 없습니다.

우리는 여러 시스템의 양자 상태에 대한 부분 측정을 논할 때 이 두 상태를 더 자세히 살펴보겠습니다.

추가 예시들

지금까지 본 다중 시스템의 양자 상태 예시는 두 큐비트 또는 세 큐비트의 상태였지만, 서로 다른 고전적 상태 집합을 가진 다중 시스템의 양자 상태도 존재할 수 있습니다.

예를 들어, 다음은 세 시스템 (X,Y,Z)에 대한 양자 상태이며, 여기서 X의 고전적 상태 집합은 이진 알파벳(즉, X는 큐비트)이고, Y와 Z의 고전적 상태 집합은 {♣,♢,♡,♠}입니다:

$$\frac{1}{2}|0\rangle|\heartsuit\rangle|\heartsuit\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle|\spadesuit\rangle|\heartsuit\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle|\heartsuit\rangle|\diamondsuit\rangle.$$

또한, 여기는 세 시스템 (X,Y,Z)에 대한 양자 상태 예시가 있으며, X, Y, Z 모두 동일한 고전적 상태 집합 {0,1,2}를 공유합니다:

$$\frac{|012\rangle - |021\rangle + |120\rangle - |102\rangle + |201\rangle - |210\rangle}{\sqrt{6}}.$$

고전적 상태 집합이 {0,1,2}인 시스템을 종종 트릿(trit)이라고 부르며, 만약 이들이 양자 상태에 있다고 가정하면, 큐트릿(qutrit)이라고 부릅니다. 큐딧(qudit)은 고전적 상태 집합이 {0,…,d−1}\인 시스템으로, 여기서 d는 임의의 값입니다.

양자 상태의 측정

단일 시스템의 고전적 상태 집합 Σ에 대한 표준 기저 측정은 이전 수업에서 다뤘습니다: 만약 Σ라는 고전적 상태 집합을 가진 시스템이 양자 상태 ∣ψ⟩로 나타내어진다면, 이 시스템을 (표준 기저 측정을 기준으로) 측정할 때, 각 고전적 상태 a∈Σ는 확률 ∣⟨a∣ψ⟩∣^2로 나타납니다.

이는 다중 시스템의 양자 상태가 있을 때, 전체 복합 시스템을 측정하기로 선택하면 (즉, 모든 시스템을 측정하는 것과 동일) 어떻게 되는지 알려줍니다. 이를 정확하게 표현하려면, X1,…,Xn이 각각 고전적 상태 집합 Σ1,…,Σn을 가지는 시스템들일 때, (X1,…,Xn)을 하나의 시스템으로 보고, 이 시스템의 고전적 상태 집합은 Σ1×⋯×Σn으로 볼 수 있습니다. 만약 이 시스템의 양자 상태가 ∣ψ⟩로 나타내어진다면, 모든 시스템을 측정했을 때 각 가능한 결과 (a1,…,an)∈Σ1×⋯×Σn는 확률 ∣⟨a1…an∣ψ⟩∣^2로 나타납니다.

예를 들어, 시스템 X와 Y가 함께 양자 상태

$$\frac{3}{5}|0\rangle|\heartsuit\rangle - \frac{4i}{5}|1\rangle|\spadesuit\rangle,$$

에 있을 때, 두 시스템을 표준 기저 측정으로 측정하면, 결과 (0,♡)가 나올 확률은 9/25, 결과 (1,♠)가 나올 확률은 16/25입니다.

두 시스템에 대한 부분 측정

이제 여러 시스템이 어떤 양자 상태에 있을 때, 그 중 일부 시스템만 측정하는 상황을 고려해봅시다. 앞서와 같이 두 시스템 X와 Y가 각각 고전적인 상태 집합 Σ와 Γ를 가질 때를 생각해보겠습니다.

일반적으로, 시스템 (X,Y)의 양자 상태 벡터는 다음과 같은 형태를 가집니다:

$$|\psi\rangle = \sum_{(a,b)\in\Sigma\times\Gamma} \alpha_{ab}|ab\rangle,$$

여기서 {αab:(a,b)∈Σ×Γ}는 복소수의 집합이고, 다음과 같은 조건을 만족합니다:

$$\sum_{(a,b)\in\Sigma\times\Gamma} |\alpha_{ab}|^2 = 1$$

(이는 ∣ψ⟩가 단위 벡터임을 의미합니다).

앞서 논의한 바와 같이, X와 Y가 모두 측정되면, 가능한 각 결과 (a,b)∈Σ×Γ는 확률 ∣⟨ab∣ψ⟩∣^2=∣αab∣^2로 나타납니다.

만약 X만 측정된다면, 각 결과 a∈Σ가 나타날 확률은 다음과 같이 계산됩니다:

$$\sum_{b\in\Gamma}\left|\langle ab|\psi\rangle\right|^2 = \sum_{b\in\Gamma}|\alpha_{ab}|^2.$$

이는 우리가 확률적 설정에서 이미 봤던 것과 일치하며, 물리학적으로도 일관됩니다. 즉, X만 측정될 때, Y도 측정되었는지 여부에 관계없이 각 특정 결과가 나타날 확률은 변하지 않습니다. 이는 빛보다 빠른 통신을 허용하지 않기 때문입니다.

이제 X가 측정되어 결과가 a일 때, 시스템 X의 양자 상태는 ∣a⟩로 변할 것으로 기대됩니다. 그런데 Y의 상태는 어떻게 될까요?

이 질문을 답하기 위해, X가 표준 기저 측정을 통해 결과가 a라는 결과가 나왔다고 가정하여, (X,Y)의 결합된 양자 상태를 설명하겠습니다.

먼저, 벡터 ∣ψ⟩를 다음과 같이 표현합니다:

$$|\psi\rangle = \sum_{a\in\Sigma} |a\rangle \otimes |\phi_a\rangle,$$

여기서

$$|\phi_a\rangle = \sum_{b\in\Gamma} \alpha_{ab}|b\rangle$$

각 $a\in\Sigma$에 대해 $|\phi_a\rangle$는 위와 같이 정의됩니다. 이제 X가 측정되어 a라는 결과가 나올 확률은 다음과 같이 쓸 수 있습니다:

$$\sum_{b\in\Gamma} |\alpha_{ab}|^2 = \big\| |\phi_a\rangle \big\|^2.$$

이제, X의 표준 기저 측정 결과가 a일 때, (X,Y)의 양자 상태는 다음과 같이 변합니다:

$$|a\rangle \otimes \frac{|\phi_a\rangle}{\| |\phi_a\rangle \|}.$$

즉, 상태는 "붕괴"되지만, X의 측정 결과인 a에 일치하는 부분만 붕괴됩니다. 이 과정을 통해, $|a\rangle \otimes |\phi_a\rangle$는 측정 결과 aaa가 나왔을 때 $|\psi\rangle$에 포함된 부분을 나타냅니다. 이 벡터를 그 유클리디안 노름으로 나누어 유효한 양자 상태 벡터로 만듭니다. 이 단계는 확률적 설정에서 벡터를 그 항목들의 합으로 나누어 확률 벡터를 만드는 것과 유사합니다.

예시로, 두 큐비트 시스템 (X,Y)의 상태를 고려해봅시다. 상태 $|\psi\rangle$는 다음과 같습니다:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}}|01\rangle + \frac{i}{\sqrt{6}}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|11\rangle.$$

첫 번째 시스템 X가 측정될 때 어떤 일이 일어나는지 이해하기 위해, 우리는 다음과 같이 씁니다:

$$|\psi\rangle = |0\rangle \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}}|1\rangle\right) + |1\rangle \otimes \left(\frac{i}{\sqrt{6}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|1\rangle\right).$$

위 설명을 바탕으로 첫 번째 시스템에서 0이 측정될 확률은 다음과 같습니다:

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}}|1\rangle \right\|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

이때, 시스템 (X,Y)의 상태는 다음과 같습니다:

$$|0\rangle \otimes \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}}|1\rangle}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = |0\rangle \otimes \left(\sqrt{\frac{3}{4}}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle\right);$$

그리고 측정 결과가 1일 확률은 다음과 같습니다:

$$\left\| \frac{i}{\sqrt{6}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|1\rangle \right\|^2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3},$$

이 경우, (X,Y)의 상태는 다음과 같이 변합니다:

$$|1\rangle \otimes \frac{\frac{i}{\sqrt{6}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|1\rangle}{\sqrt{\frac{1}{3}}} = |1\rangle \otimes \left(\frac{i}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right).$$

같은 기법을 대칭적으로 사용하여, 두 번째 시스템 Y가 측정될 때 어떤 일이 일어나는지도 설명할 수 있습니다. 우리는 벡터 $|\psi\rangle$를 다음과 같이 다시 씁니다:

$$|\psi\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{6}}|1\rangle\right) \otimes |0\rangle + \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|1\rangle\right) \otimes |1\rangle.$$

두 번째 시스템에서 0이 측정될 확률은 다음과 같습니다:

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{6}}|1\rangle \right\|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3},$$

이 경우, (X,Y)의 상태는 다음과 같이 변합니다:

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{6}}|1\rangle}{\sqrt{\frac{2}{3}}} \otimes |0\rangle = \left(\sqrt{\frac{3}{4}}|0\rangle + \frac{i}{2}|1\rangle \right) \otimes |0\rangle;$$

그리고 측정 결과가 1일 확률은 다음과 같습니다:

$$\left\| -\frac{1}{\sqrt{6}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|1\rangle \right\|^2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3},$$

이 경우, (X,Y)의 상태는 다음과 같이 변합니다:

$$\frac{-\frac{1}{\sqrt{6}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|1\rangle}{\frac{1}{\sqrt{3}}} \otimes |1\rangle = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \right) \otimes |1\rangle.$$

축소된 양자 상태에 대한 설명

이 예시는 양자 정보의 간략화된 설명에서 한계를 보여줍니다. 양자 정보의 간략화된 설명은 두 시스템 중 하나의 축소된(혹은 주변) 양자 상태를 어떻게 설명할지 제공하지 않습니다. 이는 확률론적 경우에서 우리가 했던 방식처럼 말이죠.

구체적으로, 두 시스템 (X,Y)의 확률 상태 벡터가 다음과 같이 주어졌을 때

$$|\psi\rangle = \sum_{(a,b)\in\Sigma\times\Gamma} p_{ab}|ab\rangle,$$

X만의 축소된(혹은 주변) 상태는 확률 벡터

$$\sum_{(a,b)\in\Sigma\times\Gamma} p_{ab}|a\rangle.$$

로 설명된다고 했었습니다. 하지만 양자 상태 벡터에 대해서는 그와 같은 대응이 없습니다. 양자 상태 벡터

$$\sum_{(a,b)\in\Sigma\times\Gamma} p_{ab}|a\rangle.$$

에 대해서는 벡터

$$|\phi\rangle = \sum_{(a,b)\in\Sigma\times\Gamma} \alpha_{ab}|a\rangle$$

가 일반적으로 양자 상태 벡터가 아니며, 축소된 또는 주변 상태를 적절하게 나타내지 않습니다. 사실, 이 벡터는 제로 벡터일 수도 있습니다.

따라서 우리가 대신 해야 할 일은 양자 정보를 일반적으로 설명하는 방법으로 전환하는 것입니다. 제3단원에서 설명할 것처럼, 양자 정보를 일반적으로 설명하는 방법은 확률론적 설정에 대응하는 방식으로 축소된 양자 상태를 정의할 수 있는 의미 있는 방법을 제공합니다.

세 개 이상의 시스템에 대한 부분 측정

세 개 이상의 시스템에 대해 일부 적절한 부분 집합의 시스템만 측정하는 부분 측정은 시스템들을 두 개의 집합으로 나누어 두 시스템의 경우로 환원할 수 있습니다. 즉, 측정되는 시스템들과 측정되지 않는 시스템들로 나누는 방식입니다.

다음은 이를 어떻게 할 수 있는지를 보여주는 구체적인 예시입니다. 이 예시는 시스템들의 순열을 간단하게 설명할 수 있는 방법을 제공하는데, 그 이유는 시스템을 나타내는 이름으로 켓을 하위스크립팅하는 것이 유용하기 때문입니다.

예시에서는 5개의 시스템 X1,...,X5가 동일한 고전적 상태 집합 {♣,♢,♡,♠}을 공유하는 양자 상태를 고려합니다:

$$\sqrt{\frac{1}{7}}|\heartsuit\rangle|\clubsuit\rangle|\diamondsuit\rangle|\spadesuit\rangle|\spadesuit\rangle + \sqrt{\frac{2}{7}}|\diamondsuit\rangle|\clubsuit\rangle|\diamondsuit\rangle|\spadesuit\rangle|\clubsuit\rangle + \sqrt{\frac{1}{7}}|\spadesuit\rangle|\spadesuit\rangle|\clubsuit\rangle|\diamondsuit\rangle|\clubsuit\rangle$$
$$-i\sqrt{\frac{2}{7}}|\heartsuit\rangle|\clubsuit\rangle|\diamondsuit\rangle|\heartsuit\rangle|\heartsuit\rangle - \sqrt{\frac{1}{7}}|\spadesuit\rangle|\heartsuit\rangle|\clubsuit\rangle|\spadesuit\rangle|\clubsuit\rangle.$$

우리는 첫 번째와 세 번째 시스템만 측정하고 나머지 시스템은 그대로 두는 상황을 고려할 것입니다. 개념적으로 말하자면, 이 상황은 두 시스템 중 하나를 측정하는 상황과 근본적인 차이가 없습니다. 그러나 측정되는 시스템들이 측정되지 않는 시스템들과 섞여 있기 때문에, 필요한 계산을 수행하기 위한 표현을 작성하는 데 어려움이 있습니다. 이를 해결하는 방법은 앞서 언급했듯이, 켓을 하위스크립팅하여 이들이 어떤 시스템을 나타내는지 표시하는 것입니다. 이렇게 하면 시스템들의 순서를 변경할 수 있는 자유가 생깁니다.

먼저, 위의 양자 상태 벡터는 다음과 같이 대체하여 쓸 수 있습니다:

$$\sqrt{\frac{1}{7}}|\heartsuit\rangle_1|\clubsuit\rangle_2|\diamondsuit\rangle_3|\spadesuit\rangle_4|\spadesuit\rangle_5+\sqrt{\frac{2}{7}}|\diamondsuit\rangle_1|\clubsuit\rangle_2|\diamondsuit\rangle_3|\spadesuit\rangle_4|\clubsuit\rangle_5$$
$$+\sqrt{\frac{1}{7}}|\spadesuit\rangle_1|\spadesuit\rangle_2|\clubsuit\rangle_3|\diamondsuit\rangle_4|\clubsuit\rangle_5-i\sqrt{\frac{2}{7}}|\heartsuit\rangle_1|\clubsuit\rangle_2|\diamondsuit\rangle_3|\heartsuit\rangle_4|\heartsuit\rangle_5$$
$$-\sqrt{\frac{1}{7}}|\spadesuit\rangle_1|\heartsuit\rangle_2|\clubsuit\rangle_3|\spadesuit\rangle_4|\clubsuit\rangle_5.$$

여기서 변경된 점은 각 켓에 이제 어떤 시스템에 해당하는지 표시하는 하위스크립트가 추가되었다는 것입니다. 여기서는 하위스크립트로 1,...,5를 사용했지만, 시스템 이름이 X,X,Y,Y,Z,Z와 같은 경우처럼 시스템 이름 자체를 사용할 수도 있습니다.

그런 다음 우리는 켓들의 순서를 다시 정렬하고 항들을 다음과 같이 모을 수 있습니다:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{1}{7}}|\heartsuit\rangle_1|\diamondsuit\rangle_3|\clubsuit\rangle_2|\spadesuit\rangle_4|\spadesuit\rangle_5+\sqrt{\frac{2}{7}}|\diamondsuit\rangle_1|\diamondsuit\rangle_3|\clubsuit\rangle_2|\spadesuit\rangle_4|\clubsuit\rangle_5\\
&\quad+\sqrt{\frac{1}{7}}|\spadesuit\rangle_1|\clubsuit\rangle_3|\spadesuit\rangle_2|\diamondsuit\rangle_4|\clubsuit\rangle_5-i\sqrt{\frac{2}{7}}|\heartsuit\rangle_1|\diamondsuit\rangle_3|\clubsuit\rangle_2|\heartsuit\rangle_4|\heartsuit\rangle_5\\
&\quad-\sqrt{\frac{1}{7}}|\spadesuit\rangle_1|\clubsuit\rangle_3|\heartsuit\rangle_2|\spadesuit\rangle_4|\clubsuit\rangle_5\\
&=|\heartsuit\rangle_1|\diamondsuit\rangle_3\left(\sqrt{\frac{1}{7}}|\clubsuit\rangle_2|\spadesuit\rangle_4|\spadesuit\rangle_5-i\sqrt{\frac{2}{7}}|\clubsuit\rangle_2|\heartsuit\rangle_4|\heartsuit\rangle_5\right)\\
&\quad+|\diamondsuit\rangle_1|\diamondsuit\rangle_3\left(\sqrt{\frac{2}{7}}|\clubsuit\rangle_2|\spadesuit\rangle_4|\clubsuit\rangle_5\right)\\
&\quad+|\spadesuit\rangle_1|\clubsuit\rangle_3\left(\sqrt{\frac{1}{7}}|\spadesuit\rangle_2|\diamondsuit\rangle_4|\clubsuit\rangle_5-\sqrt{\frac{1}{7}}|\heartsuit\rangle_2|\spadesuit\rangle_4|\clubsuit\rangle_5\right).
\end{aligned}$$

텐서 곱은 여전히 암시적으로 사용되며, 괄호가 사용될 때에도 마찬가지입니다(이 예제에서는).

이제 X1과 X시스템이 측정될 때, 서로 다른 측정 결과들의 (0이 아닌) 확률은 다음과 같습니다:

측정 결과 $(\heartsuit,\diamondsuit)$는 다음 확률로 발생합니다.

$$\left\|\sqrt{\frac{1}{7}}|\clubsuit\rangle_2|\spadesuit\rangle_4|\spadesuit\rangle_5-i\sqrt{\frac{2}{7}}|\clubsuit\rangle_2|\heartsuit\rangle_4|\heartsuit\rangle_5\right\|^2=\frac{1}{7}+\frac{2}{7}=\frac{3}{7}$$

측정 결과 (♢,♢)는 다음 확률로 발생합니다.

$$\left\|\sqrt{\frac{2}{7}}|\clubsuit\rangle_2|\spadesuit\rangle_4|\clubsuit\rangle_5\right\|^2 = \frac{2}{7}$$

측정 결과 (♠,♣)는 다음 확률로 발생합니다.

$$\left\|\sqrt{\frac{1}{7}}|\spadesuit\rangle_2|\diamondsuit\rangle_4|\clubsuit\rangle_5 - \sqrt{\frac{1}{7}}|\heartsuit\rangle_2|\spadesuit\rangle_4|\clubsuit\rangle_5\right\|^2 = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{2}{7}.$$

예를 들어, 측정 결과가 (♡,♢)일 경우, (X1,...,X5) 시스템의 상태는 다음과 같이 됩니다:

$$\begin{aligned} &|\heartsuit\rangle_1|\diamondsuit\rangle_3 \otimes \frac{\sqrt{\frac{1}{7}}|\clubsuit\rangle_2|\spadesuit\rangle_4|\spadesuit\rangle_5 - i\sqrt{\frac{2}{7}}|\clubsuit\rangle_2|\heartsuit\rangle_4|\heartsuit\rangle_5}{\sqrt{\frac{3}{7}}} \\ &\quad = \sqrt{\frac{1}{3}}|\heartsuit\rangle_1|\clubsuit\rangle_2|\diamondsuit\rangle_3|\spadesuit\rangle_4|\spadesuit\rangle_5 - i\sqrt{\frac{2}{3}}|\heartsuit\rangle_1|\clubsuit\rangle_2|\diamondsuit\rangle_3|\heartsuit\rangle_4|\heartsuit\rangle_5. \end{aligned}$$

다른 측정 결과들에 대해서도 상태는 비슷한 방식으로 결정될 수 있습니다.

이제 텐서 곱셈이 가환적이지 않다는 것을 이해해야 합니다. 만약 $|\phi\rangle$와 $|\pi\rangle$가 벡터라면, 일반적으로 $|\phi\rangle \otimes |\pi\rangle$는 $|\pi\rangle \otimes |\phi\rangle$와 다릅니다. 세 개 이상의 벡터의 텐서 곱에도 마찬가지입니다. 예를 들어, $|\heartsuit\rangle|\clubsuit\rangle|\diamondsuit\rangle|\spadesuit\rangle|\spadesuit\rangle$는 $|\heartsuit\rangle|\diamondsuit\rangle|\clubsuit\rangle|\spadesuit\rangle|\spadesuit\rangle$와 다른 벡터입니다. 방금 설명한 것처럼 켓을 재배열하는 기법은 그렇지 않다고 해석해서는 안 됩니다. 오히려 계산을 수행하고 결과를 표현하는 데 있어서 우리는 시스템 $X_1,\ldots,X_5$를 (X_1,X_3,X_2,X_4,X_5)로 묶는 것이 (X_1,X_2,X_3,X_4,X_5)로 묶는 것보다 더 편리하다고 결정한 것입니다. 켓의 첨자들은 이를 정확히 구분하는 데 도움을 줍니다.

비슷하게, 직교곱과 순서쌍의 간단한 설정에서도, 만약 a와 b가 다른 고전적인 상태라면 (a,b)와 (b,a)는 또한 다릅니다. 그럼에도 불구하고 두 비트의 고전적인 상태 (X,Y)가 (1,0)이라는 것을 (Y,X)가 (0,1)이라는 것과 동일하게 말할 수 있습니다. 각 시스템에 고유한 이름이 있을 때는 목록을 나열하는 순서가 중요하지 않으며, 순서가 명확히 구분되어 있다면 문제가 되지 않습니다.

마지막으로, GHZ 상태와 W 상태와 관련된 두 예를 살펴보겠습니다. 먼저 GHZ 상태를 고려해 봅시다:

$1/\sqrt{2}\,(|000\rangle + |111\rangle)$

첫 번째 시스템만 측정하면, 결과 0는 확률 1/2로 나타나며 이 경우 세 큐비트의 상태는 $|000\rangle$이 됩니다. 또한, 1은 확률 1/2로 나타나며 이 경우 세 큐비트의 상태는 $|111\rangle$이 됩니다.

다음으로 W 상태를 고려해 봅시다. W 상태는 다음과 같이 쓸 수 있습니다:

$1/\sqrt{3}\,(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle) = |0\rangle(1/\sqrt{3}\ |01\rangle + 1/\sqrt{3}\ |10\rangle) + |1\rangle(1/\sqrt{3}\ |00\rangle)$

첫 번째 큐비트를 측정한 결과 0이 나올 확률은 다음과 같습니다:

$\|1/\sqrt{3}\ |01\rangle + 1/\sqrt{3}\ |10\rangle\|^2 = 2/3$

그리고 이 결과가 나왔을 때, 세 큐비트의 양자 상태는 다음과 같습니다:

$|0\rangle \otimes (1/\sqrt{2}\ |01\rangle + 1/\sqrt{2}\ |10\rangle) = |0\rangle\ |\psi^+\rangle$

측정 결과 1이 나올 확률은 1/3이며, 이 경우 세 큐비트의 상태는 $|100\rangle$이 됩니다.

단위 연산

이번 강의의 이전 섹션에서는 데카르트 곱을 사용하여 개별 시스템을 더 큰 단일 시스템으로 처리했습니다. 같은 논리를 따르면서, 여러 시스템에 대한 연산을 이 더 큰 시스템의 상태 벡터에 작용하는 유니타리 행렬로 나타낼 수 있습니다.

원칙적으로, 행과 열이 우리가 생각하는 시스템의 고전적 상태에 대응하는 유니타리 행렬은 유효한 양자 연산을 나타냅니다. 이는 개별 시스템의 고전적 상태 집합의 데카르트 곱이 되는 복합 시스템에도 동일하게 적용됩니다.

두 시스템에 집중해 봅시다. 만약 X가 고전적 상태 집합 Σ를 가지는 시스템이고 Y가 고전적 상태 집합 Γ를 가지는 시스템이라면, 결합된 시스템 (X,Y)의 고전적 상태 집합은 Σ×Γ입니다. 따라서 이 결합된 시스템에서 수행할 수 있는 연산은 Σ×Γ 집합에 대응하는 행과 열을 갖는 유니타리 행렬로 나타낼 수 있습니다. 이러한 행렬의 행과 열 순서는 시스템 (X,Y)의 양자 상태 벡터에 사용되는 순서와 동일합니다.

예를 들어, Σ = {1, 2, 3}이고 Γ = {0, 1}일 때, 데카르트 곱 {1, 2, 3}×{0, 1}의 표준적인 순서는 (1,0), (1,1), (2,0), (2,1), (3,0), (3,1)입니다. 다음은 (X,Y)에서 연산을 나타내는 유니타리 행렬의 예입니다:

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{i}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

이 유니타리 연산은 중요하지 않으며, 단지 예시일 뿐입니다. U가 유니타리임을 확인하려면, $U^\dagger U = I$를 계산하면 충분합니다.

예를 들어, U가 표준 기저 벡터 $|11\rangle$에 미치는 작용은 다음과 같습니다:

$$U|11\rangle = \frac{1}{2}|10\rangle + \frac{i}{2}|11\rangle - \frac{1}{2}|20\rangle - \frac{i}{2}|30\rangle,$$

이는 U의 두 번째 열을 살펴봄으로써 볼 수 있습니다. 이때 {1, 2, 3}×{0, 1} 집합의 순서를 고려합니다.

모든 행렬처럼, U를 디락 표기법으로 표현할 수 있으며, U의 20개의 비제로 항에 대해 20개의 항을 사용합니다. 그러나 이러한 항들을 모두 적는 대신 6×6 행렬을 작성할 경우, 행렬 표현에서 명백하게 보이는 특정 패턴들을 놓칠 수 있습니다. 간단히 말해, 디락 표기법은 행렬을 표현하는 데 항상 가장 좋은 선택은 아닙니다.

세 개 이상의 시스템에 대한 유니타리 연산은 비슷한 방식으로 작동하며, 유니타리 행렬은 시스템들의 고전적 상태 집합의 데카르트 곱에 대응하는 행과 열을 갖습니다.

이번 강의에서 이미 본 예시가 있습니다: 세 큐빗 연산

$$\sum_{k=0}^{7} |(k+1) \bmod 8\rangle\langle k|$$

앞서 설명한 것처럼, $|j\rangle$는 숫자 j의 세 비트 이진 인코딩을 의미하며, 이 연산은 유니타리입니다. 유니타리이며 결정론적인 연산을 나타내는 연산을 가역 연산이라고 합니다. 이 행렬의 켤레 전치 행렬은 다음과 같이 쓸 수 있습니다:

$$\sum_{k=0}^{7} |k\rangle\langle (k+1) \bmod 8| = \sum_{k=0}^{7} |(k-1) \bmod 8\rangle\langle k|.$$

이 행렬은 원래 연산의 역, 또는 수학적으로는 역행렬을 나타냅니다. 이는 유니타리 행렬의 켤레 전치에서 기대할 수 있는 결과입니다.

이 강의가 진행되면서 여러 시스템에 대한 유니타리 연산의 다른 예시들을 보게 될 것입니다.

개별 시스템에서 독립적으로 수행된 유니타리 연산

개별 시스템 집합에서 유니타리 연산이 독립적으로 수행될 때, 이러한 독립적인 연산들의 결합된 작용은 이를 나타내는 유니타리 행렬들의 텐서 곱으로 설명됩니다. 즉, $X_1, \ldots, X_n$이 양자 시스템이고, $U_1, \ldots, U_n$이 이들 시스템에 대한 연산을 나타내는 유니타리 행렬일 때, 연산이 시스템에 대해 독립적으로 수행된다면, $(X_1, \ldots, X_n)$에 대한 결합된 작용은 행렬 $U_1 \otimes \cdots \otimes U_n$으로 나타낼 수 있습니다. 다시 말해, 이 부분에서도 확률론적 설정과 양자 설정이 유사함을 알 수 있습니다.

앞서 말한 바와 같이, 유니타리 행렬들의 텐서 곱은 유니타리일 것이라고 자연스럽게 예상할 수 있습니다. 실제로 이것은 맞으며, 우리는 이를 다음과 같이 확인할 수 있습니다.

먼저, 켤레 전치 연산이 다음과 같은 성질을 만족함을 알 수 있습니다:

$(M_1 \otimes \cdots \otimes M_n)^\dagger = M_1^\dagger \otimes \cdots \otimes M_n^\dagger$

이는 행렬 $M_1, \ldots, M_n$에 대해 항상 성립합니다. 이 식이 맞다는 것을 텐서 곱과 켤레 전치의 정의를 따라가며 각 항목들이 일치하는지 확인함으로써 증명할 수 있습니다. 그러므로

$(U_1 \otimes \cdots \otimes U_n)^\dagger (U_1 \otimes \cdots \otimes U_n) = (U_1^\dagger \otimes \cdots \otimes U_n^\dagger)(U_1 \otimes \cdots \otimes U_n)$

이 됩니다.

행렬의 텐서 곱은 곱셈에 대해 분배적이므로, 우리는 다음과 같이 계산할 수 있습니다:

$(U_1^\dagger \otimes \cdots \otimes U_n^\dagger)(U_1 \otimes \cdots \otimes U_n) = (U_1^\dagger U_1) \otimes \cdots \otimes (U_n^\dagger U_n) = I_1 \otimes \cdots \otimes I_n$

여기서 $I_1, \ldots, I_n$은 시스템 $X_1, \ldots, X_n$에 대한 항등 연산을 나타내는 행렬을 의미합니다. 즉, 이들은 시스템 $X_1, \ldots, X_n$의 고전적 상태의 수와 일치하는 크기를 가진 항등 행렬들입니다.

마지막으로, 텐서 곱 $I_1 \otimes \cdots \otimes I_n$은 항등 행렬과 같으며, 여기서 행과 열의 수는 행렬 $I_1, \ldots, I_n$의 행과 열의 수의 곱과 일치합니다. 우리는 이 더 큰 항등 행렬을 결합된 시스템 $(X_1, \ldots, X_n)$에 대한 항등 연산을 나타내는 것으로 볼 수 있습니다.

요약하자면, 우리는 다음과 같은 일련의 등식을 얻습니다:

$(U_1 \otimes \cdots \otimes U_n)^\dagger (U_1 \otimes \cdots \otimes U_n) = (U_1^\dagger \otimes \cdots \otimes U_n^\dagger) (U_1 \otimes \cdots \otimes U_n) = (U_1^\dagger U_1) \otimes \cdots \otimes (U_n^\dagger U_n) = I_1 \otimes \cdots \otimes I_n = I.$

따라서 우리는 $U_1 \otimes \cdots \otimes U_n$이 유니타리 행렬임을 결론지을 수 있습니다.

자주 발생하는 중요한 상황은 유니타리 연산이 더 큰 결합된 시스템 내에서 하나의 시스템이나 시스템의 부분 집합에만 적용되는 경우입니다. 예를 들어, X와 Y는 함께 결합된 시스템 (X, Y)를 형성한다고 보고, 우리는 시스템 X에만 연산을 수행한다고 가정해봅시다. 정확히 말하면, U는 시스템 X에 대한 연산을 나타내는 유니타리 행렬이라고 가정할 수 있습니다. 즉, 그 행과 열은 시스템 X의 고전적 상태에 맞춰져 있습니다.

시스템 X에 대해서만 U라는 연산을 수행한다고 말하는 것은 시스템 Y에 대해서는 아무것도 하지 않는 것과 같으며, 이는 시스템 X에 대해서는 U를 독립적으로 수행하고 시스템 Y에 대해서는 항등 연산을 수행하는 것을 의미합니다. 즉, Y에 대해 "아무것도 하지 않는다"는 것은 Y에 대해 항등 연산을 수행하는 것과 같으며, 이는 항등 행렬 I_Y로 나타낼 수 있습니다. (여기서 I_Y는 Y의 고전적 상태 집합에 맞는 크기를 가진 항등 행렬임을 나타냅니다.)

따라서 시스템 (X, Y)에 대해 X에 대해서만 U를 수행하고 Y에는 아무것도 하지 않은 연산은 유니타리 행렬로 표현될 수 있습니다.

$$U \otimes \mathbb{I}_{\mathsf{Y}}.$$

예를 들어, X와 Y가 큐비트라고 할 때, X에 대해 Hadamard 연산을 수행하고 Y에는 아무것도 하지 않는 것은 다음과 같은 연산을 수행하는 것과 같습니다:

$$H \otimes \mathbb{I}_{\mathsf{Y}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

이 연산은 결합된 시스템 (X, Y)에 대해 수행됩니다.

비슷한 방식으로, 유니타리 행렬 U가 Y에 적용되고 X에는 아무것도 하지 않는 연산을 고려할 수 있습니다. 이 경우 (X, Y)에서의 결과적인 연산은 유니타리 행렬로
$I_x \otimes U$로 표현됩니다.

예를 들어, X와 Y가 큐비트이고 U가 Hadamard 연산일 때, (X, Y)에 대한 결과 연산은 다음과 같은 행렬로 표현됩니다:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

모든 시스템 $X_1, \ldots, X_n$에 대한 유니타리 연산이 반드시 $U_1 \otimes \cdots \otimes U_n$ 형태의 텐서 곱으로 표현될 수 있는 것은 아닙니다. 마찬가지로 이 시스템들의 모든 양자 상태 벡터가 곱 상태로 표현되는 것도 아닙니다. 예를 들어, 두 큐비트에 대한 스왑 연산이나 제어-NOT 연산은 유니타리 연산들의 텐서 곱으로 표현할 수 없습니다.

교환 연산

이 강의를 마무리하면서, 여러 시스템에 대한 유니타리 연산의 두 가지 예시를 살펴보겠습니다. 첫 번째는 교환 연산입니다.

X와 Y가 같은 고전 상태 집합 Σ를 공유하는 시스템이라고 가정합시다. (X, Y)에 대한 교환 연산은 두 시스템의 내용을 교환하는 연산이지만, 그 외에는 시스템을 그대로 둡니다(따라서 X는 왼쪽에, Y는 오른쪽에 남습니다).

이 연산은 SWAP으로 나타냅니다. 이 연산은 모든 고전 상태 $a, b \in \Sigma$에 대해 다음과 같이 작동합니다:

$\mathrm{SWAP}\, |a\rangle\, |b\rangle = |b\rangle\, |a\rangle.$

이 연산에 해당하는 행렬을 디랙 표기법으로 쓰는 한 가지 방법은 다음과 같습니다:

$\mathrm{SWAP} = \Sigma_{k,l} \in \Sigma\, |k\rangle\langle l| \otimes |l\rangle\langle k|.$

이 행렬이 SWAP을 나타낸다는 것이 즉시 명확하지 않을 수 있지만, 이 행렬이 $\mathrm{SWAP}\, |a\rangle\, |b\rangle = |b\rangle\, |a\rangle$를 만족하는지 확인할 수 있습니다. 이는 모든 고전 상태 $a, b \in \Sigma$에 대해 성립합니다.

간단한 예로, X와 Y가 큐비트일 때, 우리는 다음과 같은 결과를 얻습니다:

$$\mathrm{SWAP} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

제어 유니타리 연산

이제 Q가 큐비트이고 R이 우리가 원하는 고전 상태 집합을 가진 임의의 시스템이라고 가정합시다.

시스템 R에서 작용하는 모든 유니타리 연산 U에 대해, 제어된 U 연산은 (Q, R) 쌍에 대해 다음과 같이 정의된 유니타리 연산입니다:

$$CU = |0\rangle\langle 0| \otimes \mathbb{I}_{\mathsf{R}} + |1\rangle\langle 1| \otimes U.$$

예를 들어, R이 또 다른 큐비트이고 R에서 파울리 X 연산을 생각하면, 제어된 X 연산은 다음과 같이 주어집니다:

$$CX = |0\rangle\langle 0| \otimes \mathbb{I}_{\mathsf{R}} + |1\rangle\langle 1| \otimes X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

우리는 이미 이 연산을 강의 초반에 고전 정보와 확률적 연산의 맥락에서 다루었습니다.

대신 R에서 파울리 Z 연산을 X 연산 대신 고려하면, 다음과 같은 연산을 얻습니다:

$$CZ = |0\rangle\langle 0| \otimes \mathbb{I}_{\mathsf{R}} + |1\rangle\langle 1| \otimes Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

대신 R이 두 개의 큐비트일 때, U를 이 두 큐비트 사이의 교환 연산으로 취하면, 우리는 다음과 같은 연산을 얻습니다:

$$\mathrm{CSWAP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

이 연산은 또한 프레드킨 연산(또는 더 일반적으로 프레드킨 게이트)이라고 알려져 있으며, 에드워드 프레드킨의 이름을 따서 명명되었습니다. 그것이 표준 기저 상태에서 작용하는 방식은 다음과 같습니다:

C SWAP $|0bc\rangle = |0bc\rangle$

C SWAP $|1bc\rangle = |1cb\rangle$.

마지막으로, 제어된 제어된 NOT 연산, 즉 C C X로 나타낼 수 있는 연산은 토폴리 연산(또는 토폴리 게이트)이라고 불리며, 톰마소 토폴리의 이름을 따서 명명되었습니다. 그 행렬 표현은 다음과 같습니다:

$$CCX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

우리는 또한 디랙 표기법을 사용하여 다음과 같이 표현할 수 있습니다:

$CCX = (|00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|) \otimes I + |11\rangle\langle 11| \otimes X.$

정리

이 내용은 양자 정보와 다중 시스템에서의 양자 상태 벡터, 텐서곱(Tensor Product), 그리고 얽힘 상태 (Entangled States)에 대해 설명하는 부분입니다. 각 요소를 더 잘 이해할 수 있도록 설명을 풀어보겠습니다.

1. 양자 상태와 다중 시스템

- 양자 상태는 확률적 설정에서처럼 복소수 항을 가진 벡터로 표현됩니다. 다중 시스템의 경우, 각 개별 시스템의 상태는 고전적 상태 집합의 카르테시안 곱으로 표현되며, 이 상태는 유클리드 노름이 1인 벡터로 나타낼 수 있습니다.
- 예를 들어, 큐비트 X와 Y의 경우, 이들은 `{0, 1} × {0, 1}` 집합에 대응되며, 이 집합은 `{00, 01, 10, 11}`으로 나타낼 수 있습니다. 큐비트 쌍 `(X, Y)`의 양자 상태는 이 벡터들의 선형 조합으로 표현됩니다.

2. 텐서곱 (Tensor Product)

- 텐서곱은 두 개 이상의 양자 시스템이 독립적으로 존재할 때 그들의 상태를 결합하는 연산입니다. 예를 들어, 두 양자 시스템의 상태 벡터 $|\varphi\rangle$와 $|\psi\rangle$가 있을 때, 이들의 텐서곱은 합성 시스템 (X, Y)의 상태 벡터 $|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle$로 표현됩니다. 이는 두 시스템이 서로 독립적으로 상태를 가질 때 사용됩니다.
- 텐서곱은 수학적으로 곱셈적으로 적용되며, 예를 들어 두 행렬의 텐서곱은 `(M1⊗⋯⊗Mn)(N1⊗⋯⊗Nn) = (M1N1)⊗⋯⊗(MnNn)` 와 같이 표현됩니다.

3. 확률적 상태와 독립성

- 확률적 시스템에서 두 독립적인 시스템의 상태는 각기 독립적으로 텐서곱 연산을 통해 결합될 수 있습니다. 예를 들어, 두 시스템에서 각각 독립적인 확률적 연산을 수행하면, 복합 시스템에서의 결과는 두 시스템의 텐서곱으로 설명됩니다.

4. 얽힘 상태 (Entangled States)

- 모든 다중 시스템이 곱셈 상태 (즉, 두 시스템의 상태 벡터가 단순히 텐서곱으로 결합된 상태)인 것은 아닙니다. 예를 들어, 두 큐비트의 얽힌 상태는 곱셈 상태가 아닙니다.

- 예시로 주어진 상태 $|\varphi\rangle$와 $|\psi\rangle$가 곱셈 상태라면, 이들 각각의 상태 벡터가 독립적으로 존재할 수 있어야 하며, 특정 관계가 성립해야 합니다. 그러나 얽힌 상태에서는 이 관계가 성립하지 않으며, 이는 모순을 일으킵니다.

5. 결론

이 내용은 양자 시스템의 기본적인 개념인 **텐서곱**을 설명하고 있으며, **얽힘 상태**가 어떻게 다른지, 두 시스템 간의 독립성이 어떻게 성립하는지에 대해 다루고 있습니다. 텐서곱은 두 시스템이 독립적일 때 그들의 결합된 상태를 설명하는 데 사용되고, 얽힌 상태는 그들 간의 상태가 독립적이지 않다는 것을 보여줍니다.

이 설명을 바탕으로 양자 정보 이론에서 다중 시스템의 상태를 이해하는 데 필요한 기초를 다지기 위한 중요한 개념들을 다루고 있습니다.