응용물리연구실심화실습3 (PHY3075)

2024년 10월 2주차

응용물리학과 2022006971 이민성

Multiple systems

번역

- 고전 정보 (Classical information)

  확률 상태의 측정

  이제 여러 시스템의 확률 상태에 대한 측정으로 넘어가 봅시다. 여러 시스템을 함께 하나의 시스템으로 보는 방식을 선택하면, 모든 시스템이 측정된다는 조건 하에 여러 시스템에 대한 측정이 어떻게 작동해야 하는지에 대한 명세를 바로 얻을 수 있습니다.

  예를 들어, 두 비트 (X, Y)의 확률 상태가 확률 벡터

$$\frac{1}{2}|00\rangle + \frac{1}{2}|11\rangle,$$

  로 설명된다면, X의 측정에서 00, Y의 측정에서 00을 얻는 결과인 0이 확률 1/2로 얻어지며, 결과 11도 확률 1/2로 얻어집니다. 각 경우에서 우리의 지식에 대한 확률 벡터 설명을 그에 맞게 업데이트하여, 확률 상태가 각각 ㅣ00〉 또는 ㅣ11〉이 되도록 합니다.

  부분 측정

  그러나 모든 시스템을 측정하지 않고 일부 시스템의 적절한 부분집합만 측정하기로 선택했다고 가정해 봅시다. 이는 측정된 각 시스템에 대한 측정 결과를 가져올 것이며, 일반적으로 남은 시스템에 대한 우리의 지식에도 영향을 미칩니다.

  두 시스템 중 하나만 측정하는 경우에 초점을 맞추겠습니다. 일부 세 개 이상의 시스템의 적절한 부분집합이 측정되는 더 일반적인 상황은, 측정된 시스템들을 하나의 시스템으로, 측정되지 않은 시스템들을 두 번째 시스템으로 간주하여 두 시스템의 경우로 효과적으로 축소할 수 있습니다.

  정확히 말하자면, X가 고전적 상태 집합 Σ을 갖는 시스템이고, Y가 고전적 상태 집합 Γ을 갖는 시스템이며, 두 시스템이 함께 어떤 확률 상태에 있다고 가정합시다. 우리는 X만 측정하고 Y에는 아무런 작업도 하지 않을 때 어떤 일이 발생하는지 고려할 것입니다. Y만 측정되고 X에는 아무 일이 발생하지 않는 상황은 대칭적으로 처리됩니다.

  우선, X만 측정할 때 특정 고전적 상태 a∈Σ를 관측할 확률이 Y도 측정된다는 가정하에 얻을 수 있는 확률과 일치해야 한다는 것을 알고 있습니다. 즉, 우리는 다음을 가져야 합니다:

$$\operatorname{Pr}(\mathsf{X}=a)=\sum_{b\in\Gamma}\operatorname{Pr}\big((\mathsf{X},\mathsf{Y})=(a,b)\big).$$

  이것이 바로 X만의 축소(또는 주변) 확률 상태에 대한 공식입니다.

이 공식은 직관적인 수준에서 완벽하게 이해할 수 있습니다. 만약 이것이 틀렸다면, 매우 이상한 일이 일어나야 할 것입니다. 이는 Y의 결과와 무관하게, Y가 측정되는지 여부에 따라 X 측정의 확률이 영향을 받는다는 것을 의미하기 때문입니다. 만약 Y가 먼 장소, 예를 들어 다른 은하에 있다면, 이는 빛보다 빠른 신호 전달을 허용하게 되어, 우리의 물리학적 이해에 근거해 이를 거부하게 됩니다. 이를 이해하는 또 다른 방법은 확률을 시스템 상태에 대한 신념의 정도를 반영하는 것으로 해석하는 것입니다. Y에 대한 측정이 단순히 이미 존재하는 상태를 밝히는 것이라고 본다면, Y 측정을 알지 못하는 상태에서 X를 보는 다른 관찰자는 자신의 확률이 변경되지 않아야 합니다.

오직 X만 측정되고 Y는 측정되지 않는다는 가정하에, 일반적으로 Y의 고전적 상태에 대한 불확실성이 여전히 존재할 수 있습니다. 이러한 이유로, (X, Y)의 확률 상태에 대한 설명을 일부 a∈Σ와 b∈Γ에 대해 ∣ab⟩로 업데이트하는 대신, Y에 대한 이러한 불확실성이 제대로 반영되도록 우리의 설명을 업데이트해야 합니다.

다음 조건부 확률 공식은 이러한 불확실성을 반영합니다.

$$\Pr(\mathsf{Y} = b \,|\, \mathsf{X} = a) = \frac{\Pr\big((\mathsf{X}, \mathsf{Y}) = (a, b)\big)}{\Pr(\mathsf{X} = a)}$$

여기서, Pr(Y=b ∣ X=a)는 X=a일 때 Y=b일 확률을 나타냅니다.

위의 표현은 Pr(X=a)가 0이 아닐 때에만 정의된다는 점에 유의해야 합니다. 왜냐하면 만약

$$\Pr(X = a) = 0$$

이라면, 우리는 정의되지 않은 형태 0/0를 얻게 되기 때문입니다. 그러나 이 경우는 문제가 되지 않습니다. 왜냐하면 a와 관련된 확률이 0이라면, 우리는 절대 X의 측정 결과로 a를 관측하지 않기 때문에, 이 가능성에 대해 걱정할 필요가 없기 때문입니다.

이 공식을 확률 벡터로 표현하기 위해, (X, Y)의 결합 상태를 설명하는 확률 벡터 ∣ψ⟩을 고려해봅시다.

$$|\psi\rangle = \sum_{(a,b)\in\Sigma\times\Gamma} p_{ab}|ab\rangle$$

X만을 측정하는 경우 각 가능한 결과는 다음과 같은 확률로 얻어집니다.

$$\Pr(\mathsf{X} = a) = \sum_{b\in\Gamma} p_{ab}.$$

따라서, X만의 확률 상태(즉, X의 축소 확률 상태)를 나타내는 벡터는 다음과 같이 주어집니다.

$$\sum_{a\in\Sigma}\left(\sum_{c\in\Gamma} p_{ac}\right)|a\rangle.$$

X의 측정에서 특정 결과 a∈Σ를 얻은 경우, Y의 확률 상태는 조건부 확률 공식에 따라 업데이트되며, 이 확률 벡터로 표현됩니다.

$$|\pi_a\rangle = \frac{\sum_{b\in\Gamma} p_{ab}|b\rangle}{\sum_{c\in\Gamma} p_{ac}}.$$

측정에서 X의 결과가 고전적 상태 a가 되었다면, 우리는 결합 시스템 (X, Y)의 확률 상태에 대한 설명을 ∣a⟩ ⊗∣π_a⟩로 업데이트하게 됩니다.

이 정의에서 ∣π_a⟩는 벡터 ∑(b∈Γ)p_(ab)∣b⟩의 정규화로 볼 수 있습니다. 이 벡터의 각 항목의 합으로 나누어 확률 벡터를 얻는 것입니다. 이 정규화는 X의 측정 결과가 a가 되었다는 사건을 조건으로 설정하여 그 효과를 반영합니다.

구체적인 예로, X의 고전적 상태 집합이 Σ={0, 1}, Y의 고전적 상태 집합이 Γ={1, 2, 3}, 그리고 (X, Y)의 확률 상태가

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}|0,1\rangle + \frac{1}{12}|0,3\rangle + \frac{1}{12}|1,1\rangle + \frac{1}{6}|1,2\rangle + \frac{1}{6}|1,3\rangle.$$

이라고 가정해 봅시다. 여기서 목표는 두 가지 가능한 결과(0과 1)의 확률을 구하고, X 시스템이 측정되었다고 가정할 때 두 결과에 대해 Y의 확률 상태를 계산하는 것입니다.

텐서곱의 쌍선형성(특히 두 번째 인수에 대한 선형성)을 이용하여, 벡터 ∣ψ⟩를 다음과 같이 다시 쓸 수 있습니다:

$$|\psi\rangle = |0\rangle \otimes \left(\frac{1}{2}|1\rangle + \frac{1}{12}|3\rangle\right) + |1\rangle \otimes \left(\frac{1}{12}|1\rangle + \frac{1}{6}|2\rangle + \frac{1}{6}|3\rangle\right).$$

측정되는 시스템에 대한 서로 다른 표준 기저 벡터들을 분리하고 두 번째 시스템의 모든 항을 모았습니다. 이 작업은 시작 벡터가 무엇이든 항상 가능합니다.

이와 같이 정리하면 측정 결과를 분석하기 쉬워집니다. 두 가지 결과의 확률은 다음과 같습니다:

$$\Pr(\mathsf{X}=0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$$
$$\Pr(\mathsf{X}=1) = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}.$$

이 확률들이 예상대로 1이 된다는 점을 확인할 수 있으며, 이는 계산의 유용한 검증입니다.

또한, 각 가능한 결과에 따라 조건부로 주어진 YYY의 확률 상태 역시 괄호 안의 벡터를 정규화하여(방금 계산한 해당 확률로 나누어서) 빠르게 유추할 수 있습니다. 즉, X가 0일 때의 조건부로 주어진 Y의 확률 상태는 다음과 같습니다.

$$\frac{\frac{1}{2}|1\rangle + \frac{1}{12}|3\rangle}{\frac{7}{12}} = \frac{6}{7}|1\rangle + \frac{1}{7}|3\rangle,$$

그리고 X가 1로 측정되었을 때, Y의 확률 상태는 다음과 같습니다.

$$\frac{\frac{1}{12}|1\rangle + \frac{1}{6}|2\rangle + \frac{1}{6}|3\rangle}{\frac{5}{12}} = \frac{1}{5}|1\rangle + \frac{2}{5}|2\rangle + \frac{2}{5}|3\rangle.$$

- 확률적 상태에 대한 연산

  여러 시스템에 대한 고전적 정보를 다루는 논의를 마무리하며, 확률 상태에 있는 여러 시스템에 대한 연산을 고려해 보겠습니다. 확률 상태와 측정에 대한 이전 개념을 따라, 여러 시스템을 단일 복합 시스템으로 간주하고 이전 수업을 참조하여 이러한 개념이 어떻게 작용하는지 살펴볼 수 있습니다.

  두 시스템 X와 Y가 있는 일반적인 설정으로 돌아가서, 복합 시스템 (X, Y)에 대한 고전적 연산을 생각해 봅시다. 이전 수업과 위의 논의를 바탕으로, 이러한 연산은 모든 경우 확률적 행렬로 나타낼 수 있으며, 이 행렬의 행과 열은 직교곱 $\Sigma\times\Gamma$로 인덱싱됩니다.

  예를 들어, X와 Y가 비트이며 다음과 같은 연산을 고려한다고 가정합니다.

  만약 X=1이라면 Y에 대해 NOT 연산을 수행하고, 그렇지 않으면 아무것도 하지 않습니다.

  이것은 제어 비트 XXX가 대상 비트 YYY에 대해 NOT 연산이 수행될지를 결정하는 제어-NOT 연산으로 알려진 결정적 연산입니다. 이 연산의 행렬 표현은 다음과 같습니다.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  표준 기저 상태에 대한 작용은 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned}|00\rangle &\to |00\rangle\\ |01\rangle &\to |01\rangle\\ |10\rangle &\to |11\rangle\\ |11\rangle &\to |10\rangle\end{aligned}$$

만약 X와 Y의 역할을 바꿔 Y를 제어 비트로 하고 X를 대상 비트로 설정한다면, 연산의 행렬 표현은 다음과 같이 됩니다.

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

표준 기저 상태에 대한 작용은 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned}|00\rangle &\mapsto |00\rangle\\ |01\rangle &\mapsto |11\rangle\\ |10\rangle &\mapsto |10\rangle\\ |11\rangle &\mapsto |01\rangle\end{aligned}$$

다음은 이러한 설명을 가진 연산의 또 다른 예입니다.

다음 두 연산 중 하나를 각 확률이 1/2로 수행합니다.

1. Y를 X와 같게 설정합니다.
2. X를 Y와 같게 설정합니다.

이 연산의 행렬 표현은 다음과 같습니다.

$$\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

이 연산이 표준 기저 벡터에 미치는 작용은 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned} |00\rangle &\mapsto |00\rangle \\ |01\rangle &\mapsto \frac{1}{2}|00\rangle + \frac{1}{2}|11\rangle \\ |10\rangle &\mapsto \frac{1}{2}|00\rangle + \frac{1}{2}|11\rangle \\ |11\rangle &\mapsto |11\rangle \end{aligned}$$

이 예제에서 우리는 두 시스템을 하나의 단일 시스템으로 보고 이전 수업에서처럼 연산을 진행하고 있습니다.

동일한 작업을 여러 시스템에 대해서도 수행할 수 있습니다. 예를 들어, 세 개의 비트가 있고 이 세 개의 비트를 8로 나눈 나머지로 증가시키는 연산을 상상해 봅시다. 즉, 세 개의 비트를 이진 표기법을 사용하여 0에서 7까지의 숫자를 인코딩하고, 여기에 1을 더한 뒤 8로 나눈 나머지를 취합니다. 이 연산을 다음과 같이 표현할 수 있습니다.

$$\begin{aligned} &|001\rangle\langle 000| + |010\rangle\langle 001| + |011\rangle\langle 010| + |100\rangle\langle 011| \\ &\quad + |101\rangle\langle 100| + |110\rangle\langle 101| + |111\rangle\langle 110| + |000\rangle\langle 111|. \end{aligned}$$

또는 다음과 같이 쓸 수도 있습니다.

$$\sum_{k=0}^{7} |(k+1) \bmod 8\rangle\langle k|,$$

이때 켓(ket) 안에 있는 숫자 j∈{0,1,...,7}는 그 숫자의 세 비트 이진 인코딩을 나타낸다고 합의한 것으로 가정합니다. 세 번째 방법으로 이 연산을 행렬로 표현할 수도 있습니다.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

독립적인 연산

이제 여러 시스템이 있고 각 시스템에 대해 독립적으로 별도의 연산을 수행한다고 가정해 봅시다.

예를 들어, 두 시스템 X와 Y가 각각 고전적 상태 집합 Σ와 Γ를 가진다는 기존 설정을 사용하여, X에 대한 하나의 연산과 Y에 대한 또 다른 연산을 완전히 독립적으로 수행한다고 가정해 봅시다. 이전 수업에서 배운 것처럼 이러한 연산은 확률 행렬로 표현됩니다. 보다 정확하게 말하자면, X에 대한 연산은 행렬 M으로, Y에 대한 연산은 행렬 N으로 표현된다고 합시다. 따라서 M의 행과 열은 Σ의 요소와 일치하도록 배열되며, 마찬가지로 N의 행과 열은 Γ의 요소와 일치하게 배열됩니다.

자연스럽게 떠오르는 질문은 다음과 같습니다. X와 Y를 하나의 복합 시스템 (X,Y)로 볼 때, 이 복합 시스템에서 두 연산의 결합된 작용을 나타내는 행렬은 무엇인가? 이 질문에 답하기 위해서는 먼저 행렬의 텐서곱을 도입해야 합니다. 이는 벡터의 텐서곱과 유사하며 유사하게 정의됩니다.

행렬의 텐서곱

행렬 M과 N의 텐서 곱 M⊗N는 다음과 같이 정의됩니다.

$$M = \sum_{a,b\in\Sigma} \alpha_{ab} |a\rangle\langle b|$$

그리고

$$N = \sum_{c,d\in\Gamma} \beta_{cd} |c\rangle\langle d|$$

일 때,

$$M \otimes N = \sum_{a,b\in\Sigma} \sum_{c,d\in\Gamma} \alpha_{ab}\beta_{cd} |ac\rangle\langle bd|$$

로 나타낼 수 있습니다.

동일하게, M과 N의 곱은 다음의 식으로 정의됩니다:

⟨ac | M⊗N | bd⟩=⟨a | M | b⟩⟨c | N | d⟩

이 식은 모든 선택 a,b∈Σ 및 c,d∈Γ에 대해 성립합니다.

M⊗N을 설명하는 대안적이지만 동등한 방법은, 다음의 방정식을 만족하는 고유한 행렬이라는 것입니다:

(M⊗N)(| ϕ⟩⊗ | ψ⟩)=(M | ϕ⟩)⊗(N | ψ⟩)

모든 가능한 벡터 | ϕ⟩와 | ψ⟩의 선택에 대해 성립합니다. 여기서 | ϕ⟩의 인덱스는 Σ의 요소에 대응하고, | ψ⟩의 인덱스는 Γ에 대응한다고 가정합니다.

이전에 설명된 대로 카르테시안 곱의 요소를 정렬하는 규칙을 따르면, 두 행렬의 텐서 곱을 다음과 같이 명시적으로 쓸 수 있습니다:

$$\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1m}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mm}\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}\beta_{11} & \cdots & \beta_{1k}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \beta_{k1} & \cdots & \beta_{kk}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}
\alpha_{11}\beta_{11} & \cdots & \alpha_{11}\beta_{1k} & & \alpha_{1m}\beta_{11} & \cdots & \alpha_{1m}\beta_{1k}\\
\vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\alpha_{11}\beta_{k1} & \cdots & \alpha_{11}\beta_{kk} & & \alpha_{1m}\beta_{k1} & \cdots & \alpha_{1m}\beta_{kk}\\
 & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\
\alpha_{m1}\beta_{11} & \cdots & \alpha_{m1}\beta_{1k} & & \alpha_{mm}\beta_{11} & \cdots & \alpha_{mm}\beta_{1k}\\
\vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\alpha_{m1}\beta_{k1} & \cdots & \alpha_{m1}\beta_{kk} & & \alpha_{mm}\beta_{k1} & \cdots & \alpha_{mm}\beta_{kk}
\end{pmatrix}$$

세 개 이상의 행렬의 텐서 곱은 유사한 방식으로 정의됩니다. 만약 M1,...,Mn이 각각 고전 상태 집합 Σ1,...,Σn에 대응하는 행렬이라면, 텐서 곱 M1⊗⋯⊗Mn는 다음 조건에 의해 정의됩니다:

$$\langle a_1 \cdots a_n | M_1 \otimes \cdots \otimes M_n | b_1 \cdots b_n \rangle = \langle a_1 | M_1 | b_1 \rangle \cdots \langle a_n | M_n | b_n \rangle$$

이 식은 모든 고전 상태 a1,b1∈Σ1,...,an,bn∈Σn의 선택에 대해 성립합니다.

또한, 우리는 세 개 이상의 행렬의 텐서 곱을 두 행렬의 텐서 곱을 사용하여 재귀적으로 정의할 수도 있습니다. 이는 벡터에 대해 관찰한 것과 유사합니다.

행렬의 텐서 곱은 때때로 곱셈적이라고 언급됩니다. 이는 다음의 방정식이 항상 성립하기 때문입니다:

$$(M_1 \otimes \cdots \otimes M_n)(N_1 \otimes \cdots \otimes N_n) = (M_1 N_1) \otimes \cdots \otimes (M_n N_n)$$

이 식은 행렬 M1,...,Mn 및 N1,...,Nn의 어떤 선택에 대해서도 성립하며, 제공된 곱 M 1N1,...,MnNn가 의미가 있어야 합니다.

독립적인 연산 (계속)

위의 논의를 요약하자면, 만약 M이 X에 대한 확률적 연산이고 N이 Y에 대한 확률적 연산이며 두 연산이 독립적으로 수행된다면, 결과적인 복합 시스템 (X, Y)에 대한 연산은 텐서 곱 M⊗N으로 표현됩니다.

우리가 여기서도 보고 있는 것과 확률적 상태에 대해서도, 텐서 곱은 독립성을 나타냅니다. 만약 두 시스템 X와 Y가 각각 확률적 상태 ∣ϕ⟩와 ∣π⟩에 독립적으로 있을 때, 복합 시스템 (X,Y)는 확률적 상태 ∣ϕ⟩⊗∣π⟩에 놓이게 됩니다. 그리고 만약 확률적 연산 M과 N이 두 시스템에 독립적으로 적용된다면, 복합 시스템 (X,Y)에 대한 결과적인 작용은 연산 M⊗N으로 설명됩니다.

예를 들어, 이전 수업에서 단일 비트에 대한 확률적 연산을 회상해 봅시다. 비트의 고전 상태가 0일 때는 그대로 두고, 비트의 고전 상태가 1일 때는 1/2의 확률로 0으로 뒤집히는 연산이 있습니다. 이 연산은 다음과 같은 행렬로 표현됩니다:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

이 연산이 비트 X에 수행되고, NOT 연산이 두 번째 비트 Y에 (독립적으로) 수행된다면, 복합 시스템 (X, Y)에 대한 결합 연산은 다음과 같은 행렬 표현을 가집니다:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

검토해보면, 이는 확률 행렬(stochastic matrix)임을 알 수 있습니다.

이는 항상 성립합니다: 두 개 이상의 확률 행렬의 텐서 곱은 항상 확률 행렬입니다.

우리가 자주 마주치는 일반적인 상황은 한 시스템에 하나의 연산을 수행하고 다른 시스템에는 아무것도 하지 않는 경우입니다. 이런 경우에는 동일한 절차를 따르며, 아무것도 하지 않는 것은 항등 행렬(identity matrix)으로 표현됩니다. 예를 들어, 비트 X를 상태 0으로 리셋하고 Y에 아무것도 하지 않으면, 복합 시스템 (X, Y)에 대한 확률적 (실제로는 결정론적) 연산은 다음과 같은 행렬로 표현됩니다:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

정리

- 고전 정보 (Classical Information)

  확률 상태의 측정

  여러 시스템의 확률 상태에 대한 측정을 살펴봅니다. 여러 시스템을 하나의 시스템으로 보고, 모든 시스템이 측정된다는 가정 하에 측정이 어떻게 이루어지는지를 설명합니다. 예를 들어, 두 비트 X, Y의 확률 상태가 주어졌을 때, 특정 결과를 얻을 확률을 업데이트하는 방법을 보여줍니다.

  부분 측정

  모든 시스템을 측정하지 않고 일부 시스템만 측정하는 경우에 대해 논의합니다. 이때 측정된 시스템의 결과가 남은 시스템에 대한 우리의 지식에 영향을 미칠 수 있습니다. 예를 들어, X만 측정할 때 특정 고전적 상태 a를 관측할 확률을 설명합니다. 이 경우, Y의 고전적 상태에 대한 불확실성을 반영하는 조건부 확률 공식을 사용합니다.

- 확률적 상태에 대한 연산

  여러 시스템에 대한 고전적 정보를 다루며, 두 시스템 X와 Y에 대한 연산을 고려합니다. 특정 조건에 따라 다른 연산이 수행될 수 있으며, 이러한 연산은 확률적 행렬로 표현할 수 있습니다. 예를 들어, X = 1일 때 Y에 대해 NOT 연산을 수행하는 제어-NOT 연산이나, 두 시스템의 상태를 서로 바꾸는 연산을 설명합니다.

결론

여러 시스템을 단일 복합 시스템으로 보고 연산을 수행함으로써, 각 시스템의 상태를 업데이트하는 과정을 설명합니다. 이를 통해 고전적 정보와 확률 상태의 측정, 그리고 연산에 대한 이해를 심화할 수 있습니다.