응용물리연구실심화실습3 (PHY3075)

2024년 12월 2주차

응용물리학과 2022006971 이민성

번역

- CHSH 게임

  이번 예제는 프로토콜이 아니라 CHSH 게임이라는 게임입니다.

  여기서 말하는 "게임"은 재미나 스포츠를 위한 게임이 아니라, 게임 이론의 관점에서 수학적인 추상화입니다. 게임 이론의 수학적 추상화는 경제학과 컴퓨터 과학 등에서 연구되며, 매우 유용한 개념입니다.

  CHSH는 이 게임을 처음 설명한 저자들인 John Clauser, Michael Horne, Abner Shimony, Richard Holt의 이름에서 유래했습니다. 이들은 1969년에 발표된 논문에서 이 예제를 실험으로 설명했지만, 이를 "게임"으로 부르는 것은 자연스럽고 직관적인 표현입니다.

  CHSH 게임은 비국소 게임(nonlocal game)이라는 게임의 일종에 속합니다. 비국소 게임은 물리학, 컴퓨터 과학, 수학과 깊은 관련이 있으며, 아직 풀리지 않은 수수께끼들이 많아 매우 흥미롭습니다. 이 섹션에서는 비국소 게임이 무엇인지 설명한 후, CHSH 게임이 무엇이 특별한지 집중적으로 다룰 것입니다.

  비국소 게임

  비국소 게임은 두 명의 플레이어, Alice와 Bob이 협력하여 특정한 결과를 달성하는 게임입니다. 이 게임은 엄격한 규칙에 따라 행동하는 심판에 의해 진행됩니다. Alice와 Bob은 이 규칙을 미리 알고 있습니다.

  Alice와 Bob은 게임을 시작하기 전에 준비할 수 있지만, 게임이 시작되면 서로 소통할 수 없습니다. 게임은 마치 심판이 탐정 역할을 하고 Alice와 Bob이 서로 다른 방에서 심문을 받는 것처럼 진행될 수 있습니다. 또 다른 방식으로 생각할 수 있는 설정은 Alice와 Bob이 거대한 거리를 두고 떨어져 있으며, 빛의 속도가 게임 시간 내에 소통을 허용하지 않기 때문에 서로의 통신이 금지된다는 것입니다. 즉, Alice가 Bob에게 메시지를 보내려고 하면 Bob이 그것을 받을 때쯤 게임은 끝나버리고, 그 반대도 마찬가지입니다.

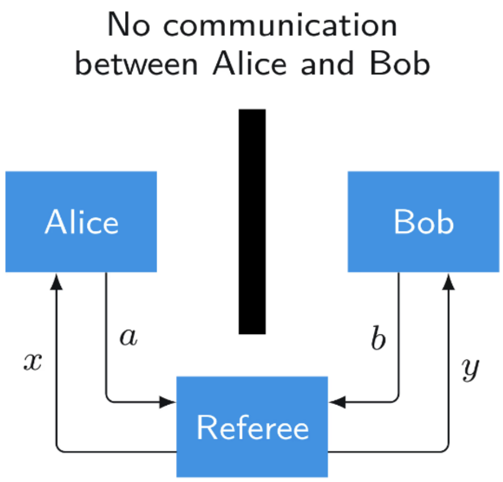
  비국소 게임의 방식은 심판이 먼저 Alice와 Bob에게 각각 질문을 한다는 것입니다. 여기서 우리는 x를 Alice의 질문, y를 Bob의 질문으로 나타냅니다. CHSH 게임에서는 x와 y가 비트입니다.

  심판은 무작위성을 사용하여 이러한 질문들을 선택합니다. 정확히 말하자면, 각 질문 쌍 (x, y)에 대해 확률 p(x, y)가 있으며, 심판은 게임이 시작될 때 이 확률에 따라 질문을 선택할 것입니다. Alice와 Bob을 포함한 모든 사람은 이 확률들을 알지만, 어떤 질문 쌍 (x, y)가 선택될지는 게임이 시작될 때까지 알 수 없습니다.

  Alice와 Bob이 각자의 질문을 받은 후, 그들은 답을 해야 합니다. Alice의 답은 a이고, Bob의 답은 b입니다. 다시 말해, 이것들도 일반적으로는 고전적인 상태이며, CHSH 게임에서는 비트입니다.

  이 시점에서 심판은 Alice와 Bob의 답 (a, b)가 특정 질문 쌍 (x, y)에 대해 정해진 규칙에 맞는지 여부에 따라 그들이 이겼는지 졌는지 결정합니다. 규칙이 다르면 게임이 달라지고, CHSH 게임의 규칙은 다음 섹션에서 설명됩니다. 앞서 언급한 대로, 규칙은 모두에게 알려져 있습니다.

  다음 다이어그램은 상호작용을 시각적으로 표현한 것입니다.



비국소 게임이 Alice와 Bob에게 도전적인 이유는 어떤 질문이 주어질지에 대한 불확실성 때문입니다. 특히 각 플레이어가 상대방의 질문을 모른다는 사실이 게임을 어렵게 만듭니다. 마치 서로 다른 방에 있는 용의자들이 서로의 이야기를 일관되게 맞추려는 것과 비슷합니다.

심판에 대한 정확한 설명은 비국소 게임의 인스턴스를 정의합니다. 여기에는 각 질문 쌍에 대한 확률 p(x, y)와, 각 가능한 질문 쌍 (x, y)에 대해 답 (a, b)가 이겼는지 졌는지를 결정하는 규칙이 포함됩니다.

CHSH 게임을 잠시 후에 살펴보겠지만, 다른 비국소 게임들도 흥미롭습니다. 일부 비국소 게임은 오늘날까지도 여전히 신비롭고 매력적이며, 어떤 게임은 그다지 흥미롭지 않기도 합니다. 설정이 간단한 것처럼 보이지만, 그 안에는 복잡성이 존재합니다. 일부 비국소 게임에서는 Alice와 Bob을 위한 최적 또는 근사 최적 전략을 계산하는 것이 불가능할 정도로 어려울 수 있습니다. 이것이 비국소 게임 모델의 매력적인 부분입니다.

CHSH 게임 설명

다음은 CHSH 게임에 대한 정확한 설명입니다. 여기서 x는 Alice의 질문, y는 Bob의 질문, a는 Alice의 답, b는 Bob의 답을 나타냅니다:

- 질문과 답은 모두 비트입니다: x,y,a,b∈{0,1}.
- 심판은 질문 (x,y)를 균등한 확률로 무작위로 선택합니다. 즉, 네 가지 가능한 쌍 (0,0),(0,1),(1,0),(1,1) 각각이 선택될 확률은 1/4입니다.
- 질문 (x,y)에 대해 답 (a,b)가 이기려면 a⊕b=x∧y가 성립해야 합니다. 그렇지 않으면 패배합니다.아래 표는 각 질문 (x,y)에 대해 답 (a,b)가 이기거나 지는 조건을 요약한 것입니다:

(x,y)	win	lose
$(0,0)$	$a=b$	$a\neq b$
$(0,1)$	$a=b$	$a\neq b$
$(1,0)$	$a=b$	$a\neq b$
$(1,1)$	$a\neq b$	$a=b$

고전적 전략의 한계

이제 CHSH 게임에서 Alice와 Bob의 전략을 고려해 보겠습니다. 먼저, 고전적 전략부터 살펴보겠습니다.

결정적 전략 :

결정적 전략에서는 Alice의 답 a가 그녀가 받은 질문 x의 함수이며, Bob의 답 b 또한 그가 받은 질문 y의 함수입니다. 예를 들어, a(0)은 Alice가 질문으로 0을 받았을 때의 답을 나타내고, a(1)은 질문으로 1을 받았을 때의 답을 나타냅니다.

어떤 결정적 전략도 CHSH 게임에서 모든 경우에 항상 이길 수는 없습니다. 이를 확인하는 한 가지 방법은 가능한 모든 결정적 전략을 하나씩 확인하면서 네 가지 가능한 질문 쌍 중 적어도 하나에서 반드시 실패하는지를 확인하는 것입니다.

Alice와 Bob은 각각 **1비트를 1비트로 매핑하는 4가지 함수** 중 하나를 선택할 수 있으므로, 가능한 결정적 전략의 수는 4×4=16가지입니다. 이를 모두 검토하면 모든 전략이 적어도 하나의 질문 쌍에서 실패함을 알 수 있습니다.

이 사실을 수학적으로도 증명할 수 있습니다:

1. 만약 Alice와 Bob의 전략이 (x,y)=(0,0)에서 이긴다면, a(0)=b(0)이어야 합니다.
2. (x,y)=(0,1)에서 이긴다면, a(0)=b(1)이어야 합니다.
3. (x,y)=(1,0)에서 이긴다면, a(1)=b(0)이어야 합니다.

위 세 조건이 모두 성립한다고 가정하면, 다음과 같은 관계를 얻습니다:

b(1)=a(0)=b(0)=a(1)

즉, b(1), a(0), b(0), a(1)이 모두 동일합니다.

그러나 (x,y)=(1,1)에서 이기려면 a(1)≠b(1)이어야 합니다. 이는 앞서 얻은 관계와 모순이 발생함을 의미합니다.

따라서, 모든 경우에서 항상 이길 수 있는 결정적 전략은 존재하지 않습니다.

결정적 전략으로는 네 가지 질문 쌍 중 세 가지에서만 이기는 전략을 설계할 수 있습니다. 예를 들어, a(0)=a(1)=b(0)=b(1)=0와 같은 전략이 그렇습니다. 따라서 결정적 전략을 사용할 경우 Alice와 Bob이 승리할 최대 확률은 다음과 같습니다: 3/4

확률적 전략 :

앞서 결론지었듯이, Alice와 Bob은 결정적 전략을 사용해서는 CHSH 게임에서 최대 75%의 확률로 승리할 수 있습니다. 그렇다면 확률적 전략은 어떨까요? 무작위성을 사용하거나, 무작위 선택이 Alice와 Bob 사이에서 **공유된 무작위성**으로 상호 연관되어 있다면 도움이 될까요?

결론적으로, 확률적 전략은 Alice와 Bob의 승리 확률을 증가시키는 데 전혀 도움이 되지 않습니다. 그 이유는 모든 확률적 전략은 대안적으로 결정적 전략의 무작위 선택으로 간주할 수 있기 때문입니다. 이는 마치 (첫 번째 강의에서 언급했듯이) 확률적 연산이 결정적 연산의 무작위 선택으로 해석될 수 있는 것과 같은 이치입니다. 평균값은 최대값을 초과할 수 없으므로, 확률적 전략이 전체적인 승리 확률 면에서 어떠한 이점도 제공하지 않음을 알 수 있습니다.

따라서, 결정적이든 확률적이든 모든 고전적 전략을 사용하는 경우, Alice와 Bob이 승리할 수 있는 최대 확률은 3/4입니다.

정리

- CHSH 게임은 게임 이론 관점에서 정의된 **비국소 게임**(nonlocal game) 중 하나입니다.
- 두 플레이어 **Alice**와 **Bob**이 협력하여 승리 조건을 만족하는 답을 제출해야 합니다.
- 이들은 게임 규칙을 미리 알지만, 게임 도중에는 소통할 수 없습니다.

비국소 게임의 특징 :

1. **심판의 역할**
   - 심판은 각 플레이어에게 질문 x와 y를 무작위로 던집니다.
   - CHSH 게임에서는 x와 y는 각각 0 또는 1인 비트이며, 모든 쌍 (x,y)의 확률은 동일하게 1/4입니다.
2. **답의 제출**
   - Alice와 Bob은 질문을 받고 각각 a, b라는 답을 제출합니다.
   - a와 b도 비트로 이루어져 있습니다.
3. **승리 조건**
   - 답 (a,b)가 승리하려면 다음 조건을 만족해야 합니다:
     $a \oplus b = x \wedge y$
   - 즉, XOR 연산 $a \oplus b$가 x와 y의 AND 연산 결과와 같아야 합니다.

고전적 전략의 한계 :

1. **결정적 전략**
   - Alice와 Bob은 질문에 대한 답을 결정론적 함수로 정의할 수 있습니다. 예를 들어, Alice의 답 a(0), a(1)과 Bob의 답 b(0), b(1)를 각각 정의합니다.
   - 하지만, 모든 질문 쌍 (x,y)에서 항상 승리하는 결정적 전략은 존재하지 않습니다.
   - 수학적으로 분석해보면, 네 가지 질문 중 최대 세 가지에서만 승리할 수 있습니다.
     - 예: a(0)=a(1)=b(0)=b(1)=0 전략은 세 가지 질문에서 승리.
   - 따라서 결정적 전략으로 최대 승리 확률은 3/4입니다.
2. **확률적 전략**
   - 확률적 전략은 무작위성을 도입하거나, Alice와 Bob 사이의 공유된 무작위성을 사용한 전략입니다.
   - 하지만 확률적 전략은 결정적 전략의 무작위 선택으로 해석될 수 있습니다.
   - 이로 인해 평균값은 결정적 전략의 최대값을 초과할 수 없으므로 승리 확률을 증가시키지 못합니다.

결론 :

- 고전적 전략(결정적/확률적 모두)으로 CHSH 게임에서 Alice와 Bob이 승리할 수 있는 최대 확률은 3/4입니다.