
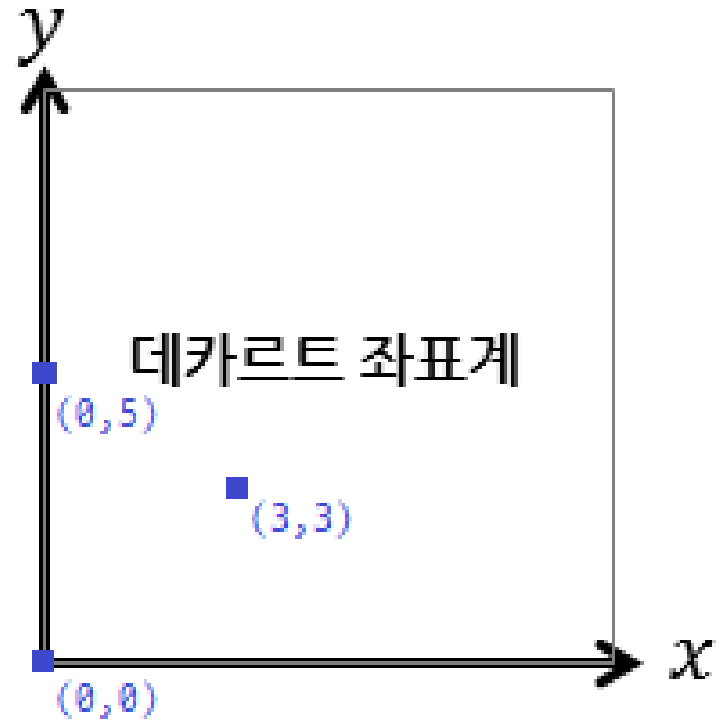
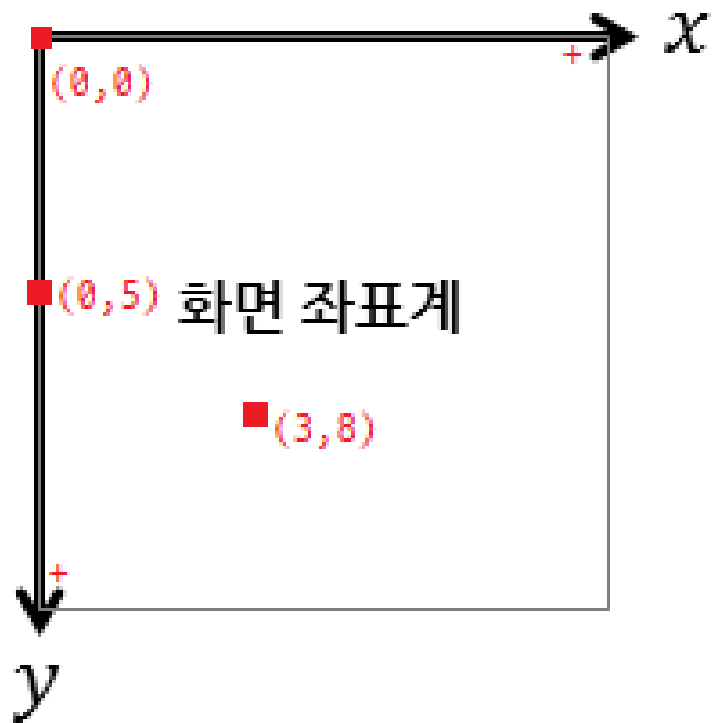


# 게임 수학

# 목차

1. 좌표계 . . . 3p
  2. 직선 . . . 4p
  3. 원 . . . 8p
  4. 삼각함수 . . . 9p
  5. 벡터 . . . 11p
  6. Physics Engine . . . 16p
  7. 연습문제 . . . 22p
- 

# 좌표계



# 직선

## ▶ 직선의 방정식

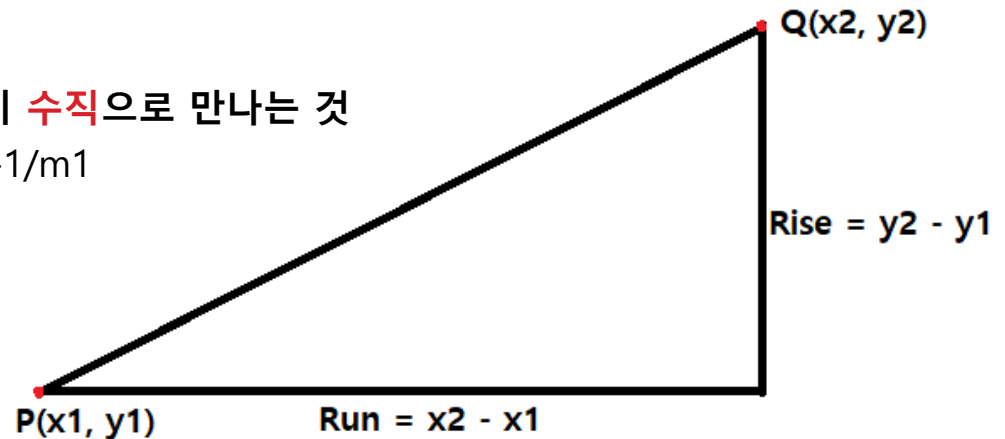
- $ax + by + c = 0$
- 직선의 가장 중요한 성질은 **기울기**(경사도)

## ▶ 기울기

- 수평으로 이동(Run)할 때마다 일정하게 상승(Rise)하는 경사면에서 두 점의 좌표  $P(x_1, y_1)$ ,  $Q(x_2, y_2)$ 로 표현
- $m(\text{기울기}) = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)$

## ▶ 직교

- 두 직선이 직각을 이룰 때, 즉 두 직선이 **수직**으로 만나는 것
- $m_1 m_2 = -1$  or  $m_1 = -1/m_2$  or  $m_2 = -1/m_1$



# 직선

## ▶ 충돌 검출에 응용

- 직선으로 건물의 벽이나 물체의 이동경로를 나타낼 수도 있는데, 이러한 두 직선의 교차점으로 충돌 확인 가능

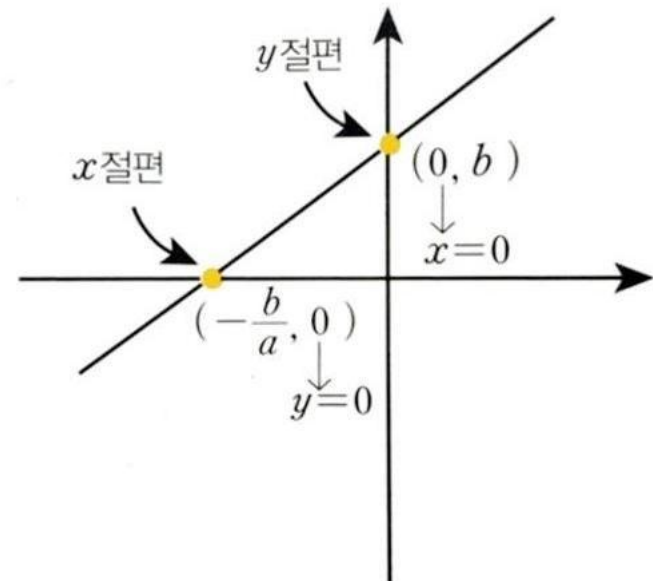
## ▶ 두 직선의 교차점

- 기울기  $m_1$ 을 지나는 직선상의 점  $P(x_1, y_1)$   
기울기  $m_2$ 를 지나는 직선상의 점  $P(x_2, y_2)$
- $X = (m_1x_1 - m_2x_2 + y_2 - y_1) / (m_1 - m_2)$
- $Y = m_1(X - x_1) + y_1$  or  $Y = m_2(X - x_2) + y_2$

## ▶ 두 직선의 기울기 $m_1, m_2$

- $m_1 \neq m_2$  : 교차점이 한 개 존재한다
- $m_1 = m_2$ 일 경우, 두 직선의 **y절편**  $b_1, b_2$ 를 구한다  
 $b_1 \neq b_2$  : 두 선은 평행  
 $b_1 = b_2$  : 두 선은 겹쳐있다

- ◆ **x절편** :  $y = 0$ 일 때의  $x$ 의 값
- ◆ **y절편** :  $x = 0$ 일 때의  $y$ 의 값



# 직선

## ▶ 기울기를 이용한 두 직선의 교차점 구하기의 문제점

- 2개의 점을 시작과 끝을 이루는 특정한 범위를 가지는 두 직선 사이의 교차점 만을 구하는 것에 매우 비효율적이며 구하기 힘들다

## ▶ 범위를 가지는 두 직선의 교차점

- 하나의 직선의 시작 점  $P(x_1, y_1)$ 와 끝 점  $P(x_2, y_2)$   
또 다른 직선의 시작 점  $P(x_3, y_3)$ 와 끝 점  $P(x_4, y_4)$

```
{  
    float under = (y4 - y3) * (x2 - x1) - (x4 - x3) * (y2 - y1);  
  
    if (0 == under) return;  
  
    float t = (x4 - x3) * (y1 - y3) - (y4 - y3) * (x1 - x3);  
    float s = (x2 - x1) * (y1 - y3) - (y2 - y1) * (x1 - x3);  
    if (0 == t && 0 == s) return; t = t / under;  
    s = s / under;  
  
    if (0 > t || 1 < t || 0 > s || 1 < s) return;  
  
    // 교차점.  
    float crossPointX = x1 + t * (x2 - x1); float crossPointY = y1 + t * (y2 - y1);  
}
```

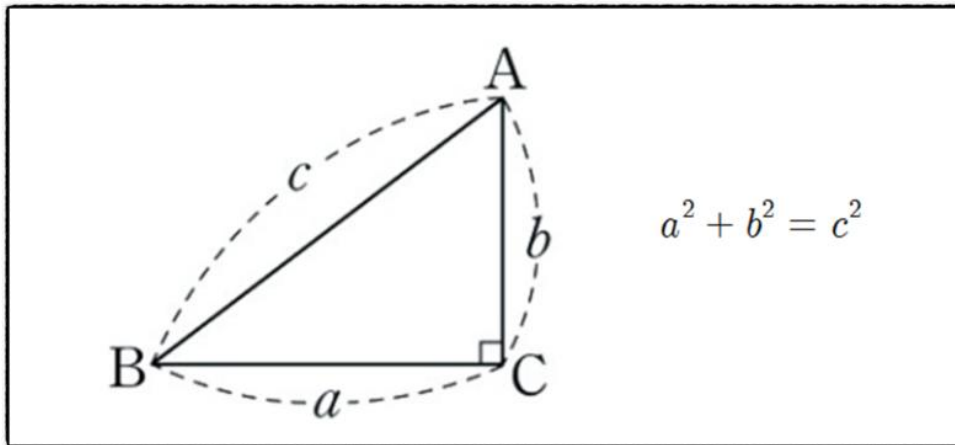
# 직선

## ▶ 피타고라스의 정리

- 화면상의 두 점 사이의 거리를 구한다

## ▶ $B(x_1, y_1)$ , $A(x_2, y_2)$ 사이의 거리

- $BA = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$



# 원

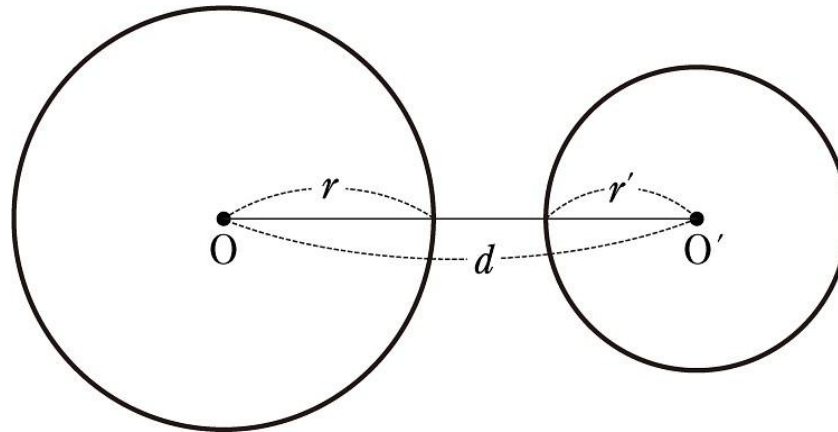
- ❖ 사각형을 이용한 충돌처리보다 **연산 속도가 빠른 충돌 처리**를 하기 위하여 주로 사용

- ▶ **방정식**

- $x^2 + y^2 = r^2$

- ▶ **두 원의 충돌**

- 두 원 사이의 거리(**d**)가 두 원의 반지름의 합(**r + r'**)보다 작거나 같다면 두 원은 충돌 상태이다





# 삼각함수

❖ 삼각함수는 벡터, 물리학을 다루는 방법으로 자주 사용

## ▶ 도(Degree)

- 원 한 바퀴를 360으로 표현하는 방법

## ▶ 라디안(Radian)

- 부채꼴의 중심각, 호의 길이가 원의 반지름과 같을 때를 **1라디안이라 정의**

도	라디안	sin	cos	tan
0	0	0	1	0
30	$\pi/6$	0.5	0.8660	0.5774
45	$\pi/4$	0.7071	0.7071	1
60	$\pi/3$	0.8660	0.5	1.7321
90	$\pi/2$	1	0	-
120	$2\pi/3$	0.8660	-0.5	-1.7321
180	$\pi$	0	-1	0
270	$3\pi/2$	-1	0	-
360	$2\pi$	0	1	0

# 삼각함수

## ▶ 단위 원

- 원의 반지름을 1로 하여  $x, y$ 의 값은  $-1 \sim 1$ 의 값을 가진다

## ▶ 데카르트 좌표 기준

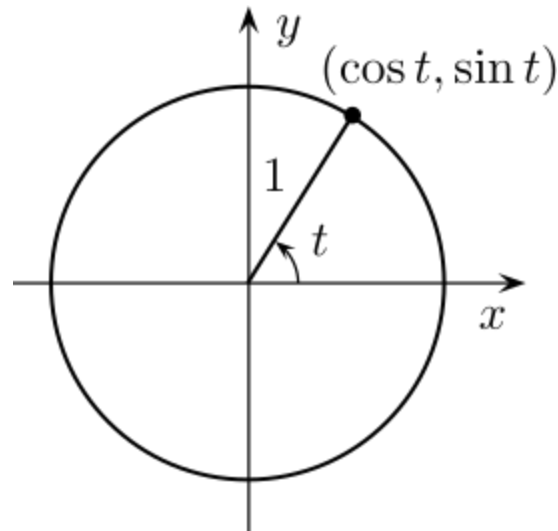
- $x = \cos(\text{radian})$
- $y = \sin(\text{radian})$

## ▶ 화면 좌표 기준

- $x = \cos(\text{radian})$
- $y = -\sin(\text{radian})$

## ▶ 라디안(Radian)

- 부채꼴의 중심각



```
#define Rad2Deg 57.29577951f
```

```
#define Deg2Rad 0.017453293f
```

- ◆ 라디안에서 도, 도에서 라디안 값으로 변환, 해당 값을 곱하여 알 수 있다

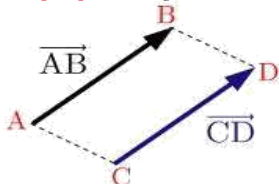
# 벡터

## ▶ 벡터와 스칼라

- 벡터 : 크기 + 방향
- 스칼라 : 크기만 가진다

## ▶ 벡터의 상등

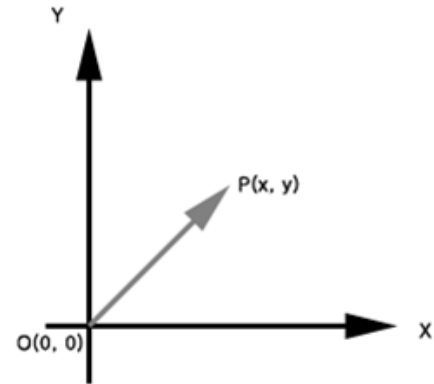
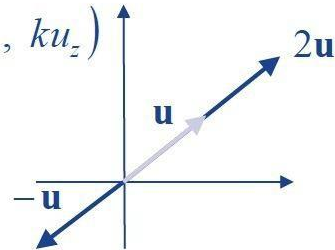
- 벡터는 위치를 나타내는 개념이 아니다



“벡터AB와 벡터CD는 크기와 방향이 같으므로 서로 상등하다”

## ▶ 벡터와 스칼라의 곱

- 벡터는 가려는 방향, 스칼라는 속력  $k\mathbf{u} = (ku_x, ku_y, ku_z)$



2차원 평면상의 벡터

# 벡터

## ▶ 벡터의 정규화

- 크기가 **1**인 벡터를 가리켜 단위 벡터(**normal vector**)라 한다

```
const float epsilon = 0.000001f; // 부동소수점
float x, y;
float sqrMagnitude = (x * x) + (y * y);
if (epsilon < sqrMagnitude) // if(0 < sqrMagnitude)
{
    float magnitude = std::sqrt(sqrMagnitude);
    float invMagnitude = 1.0f / magnitude;
    x *= invMagnitude;
    y *= invMagnitude;
}
```

# 벡터

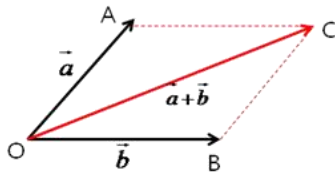
## ▶ 벡터의 더하기

- 오브젝트(물체)의 **이동**, 힘 적용

## ▶ 벡터의 빼기

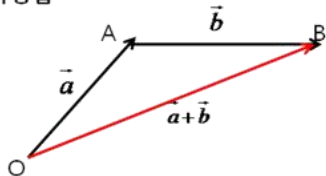
- 대상을 향해 가기 위한 **방향**을 구하기 위하여 사용

평행사변형법

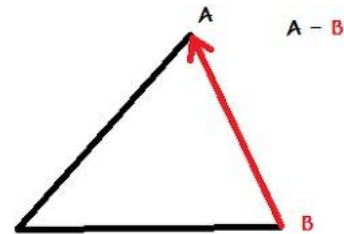


$\vec{a}$ 와  $\vec{b}$ 의 시점 일치시:  
평행사변형의 대각선이 두 벡터의 합을 의미  
 $|\vec{a}+\vec{b}|$ : 두 벡터 합 크기  $\rightarrow \vec{OC}$  대각선 길이를 의미

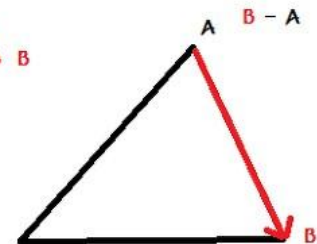
삼각형법



$\vec{a}$ 와  $\vec{b}$ 의 종점을 연결시:  
시점과 종점을 연결한 벡터가 두 벡터의 합을 의미  
 $|\vec{a}+\vec{b}|$ : 두 벡터 합 크기  $\rightarrow \vec{OB}$  길이를 의미



$A - B$

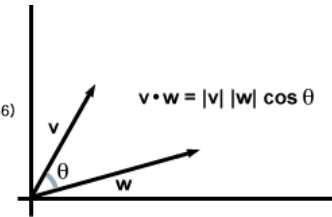
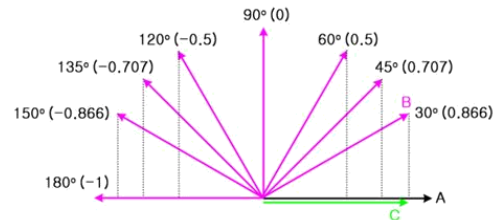


$B - A$

# 벡터

## ▶ 벡터의 내적

- 두 벡터 사이의 각도( $\theta$ ),  $\cos\theta$  값
- $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$  두 벡터는 직각
- $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} > 0$  두 벡터의 내각은 90보다 작다
- $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} < 0$  두 벡터의 내각은 90보다 크다
- 시야에 대상이 있는지 확인
- 투영 벡터를 구하여 그림자를 그릴 수 있다

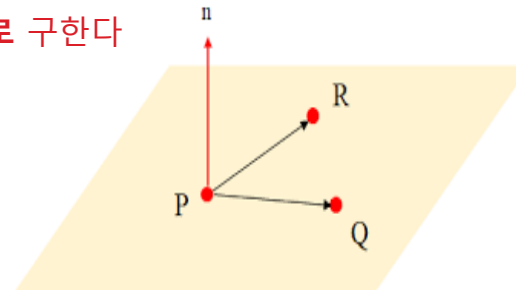


## ❖ 벡터의 내적에서 각도(Degree) 구하기

- $\text{angle} = \text{acos}(\text{dot}) * \text{Rad2Deg}$
- $\text{acos}$  : 아크 코사인,  $\cos\theta$  값에서 라디안( $\theta$ ) 값으로 역으로 구한다

## ▶ 벡터의 외적

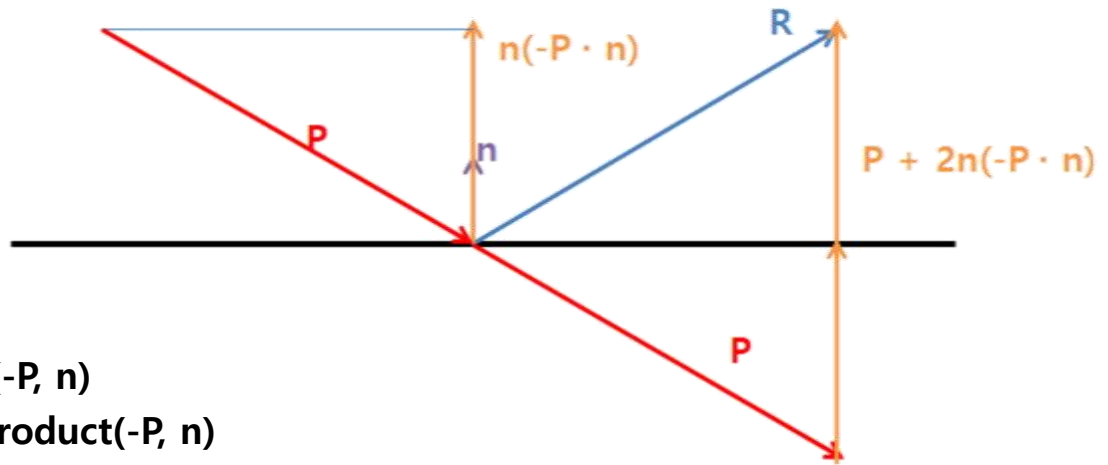
- 두 벡터의 곱
- 3차원 벡터에서 있는 개념
- 두 벡터에 모두와 수직인 벡터, 단위 벡터(Normal Vector) 변환하여 사용



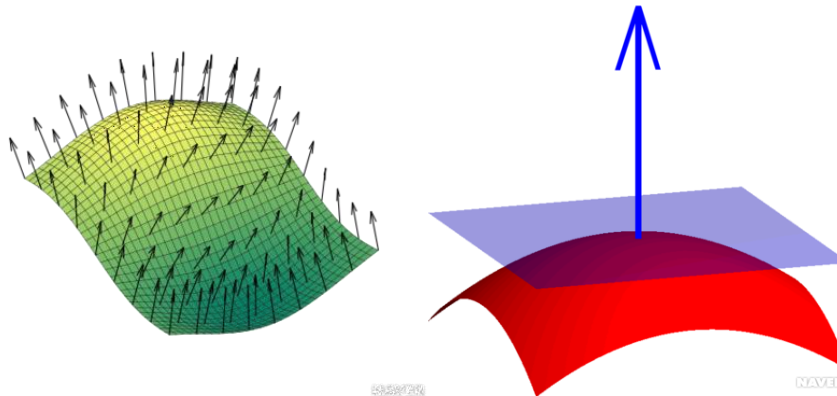
# 벡터

## ▶ 반사 벡터

- 입사 벡터 :  $P$
- 법선 벡터 :  $n$
- 반사 벡터 :  $R$
- 투영 벡터 :  $n * \text{DotProduct}(-P, n)$
- 계산식 :  $R = P + 2n * \text{DotProduct}(-P, n)$



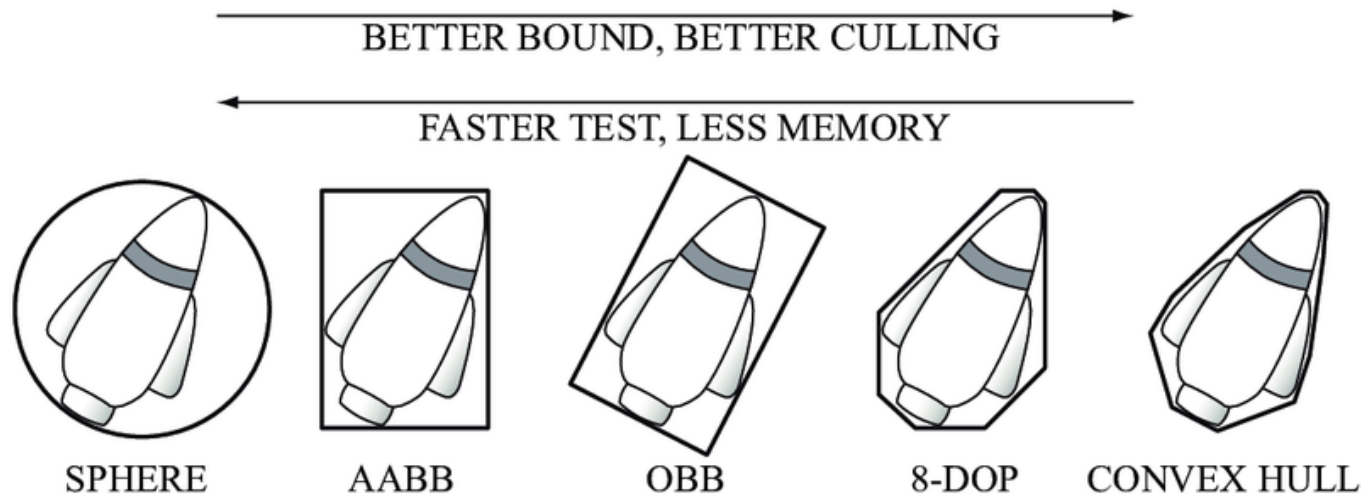
- ❖ 빛의 반사 벡터를 구하기 위해서 반드시 법선 벡터가 필요하다
- ❖ 법선 벡터(normal vector) : 한 면에 수직이 되는 벡터  
벡터의 외적을 이용하여 구할 수 있다



# Physics Engine

## ▶ Collider

- AABB(Axis Aligned Bounding Box) : **축이 정렬**되어 있어 회전을 고려하지 않는다
- OBB(Oriented Bounding Box) : 박스와 함께 **축이 회전**한다
- 8-DOP, CONVEX HULL : **여러 개의 정점**을 지니며 OBB처럼 축이 회전한다

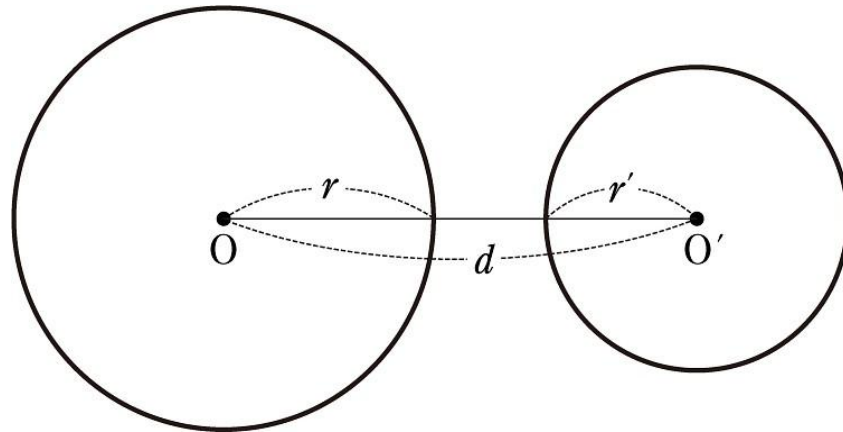




# Physics Engine

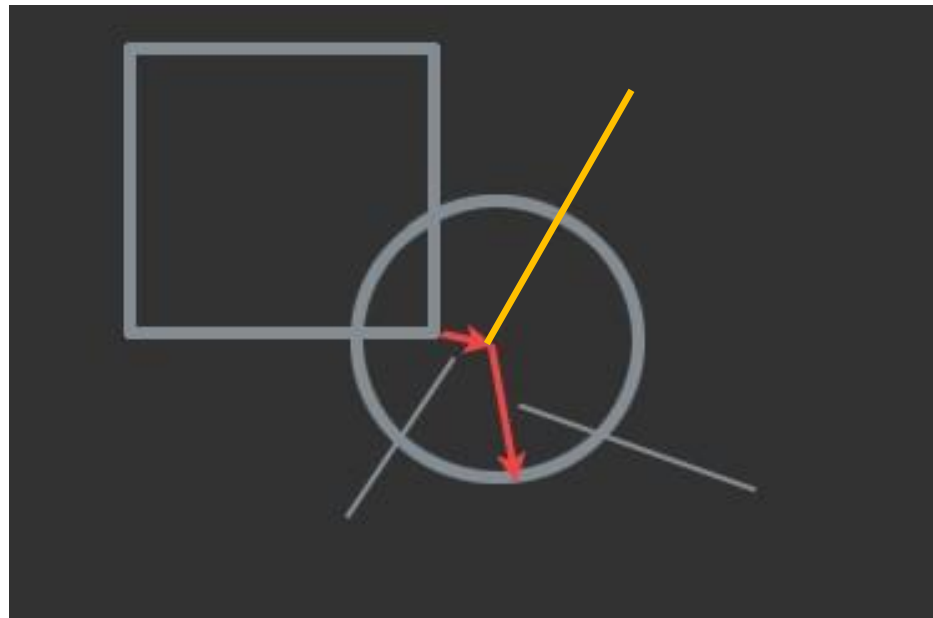
`Vector2 normal; // 충돌 방향 normal 벡터`

```
bool CirclevsCircle(Circle* lhs, Circle* rhs)
{
    // lhs를 중심으로 하는 rhs의 상대 위치
    const Vector2 incident = rhs->position - lhs->position;
    float radiusSum = lhs->radius + rhs->radius;
    // 두 원의 반지름의 합보다 두원 사이의 거리가 크면 충돌하지 않은 상태
    if (incident.SqrMagnitude() > (radiusSum * radiusSum)) return false;
    float dist = incident.Magnitude();
    if (0 != dist)
    {
        normal = incident;
    }
    else
    {
        // 두 원은 같은 위치에 있다, 겹쳐있다
        normal = Vector2(1, 0);
    }
    normal.Normalize();
    return true;
}
```



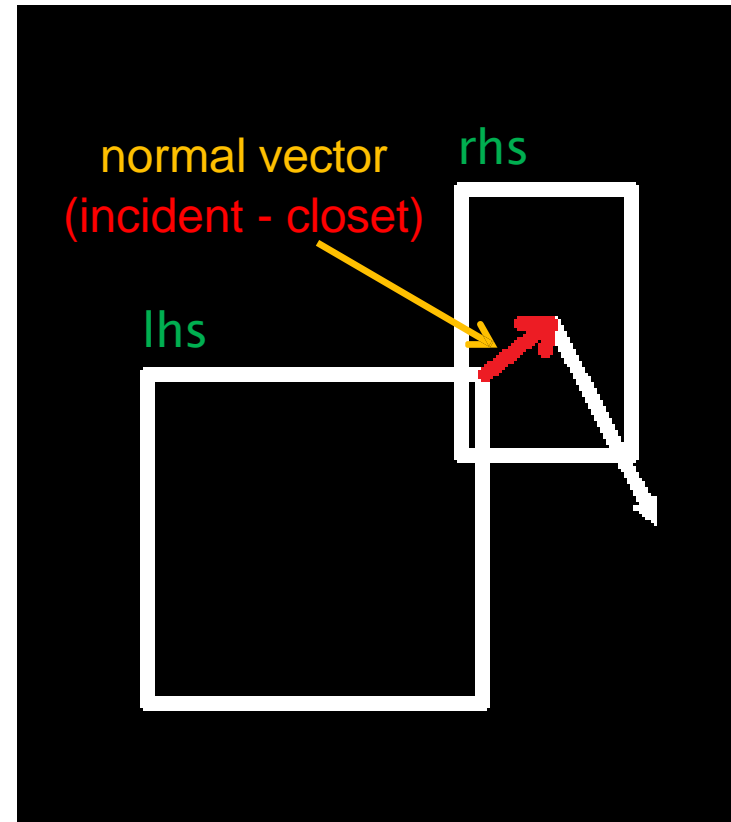
# Physics Engine

```
bool AABBvsCircle(Box* lhs, Circle* rhs)
{
    const Vector2 incident = rhs->position - lhs->position; // Box를 중심으로 하는 Circle의 상대 위치
    // Box의 너비(width)와 높이(height)의 반(half width, half height)을 구한다
    float extentX = lhs->halfWidth;
    float extentY = lhs->halfHeight;
    Vector2 closet;
    closet.x = clamp(incident.x, -extentX, extentX);
    closet.y = clamp(incident.y, -extentY, extentY);
    bool inside = false;
    if (incident == closet) // Box와 Circle이 반 이상 침투했다
    {
        inside = true;
        if (std::abs(incident.x) > std::abs(incident.y))
        {
            closet.x = (0 < closet.x) ? extentX : -extentX;
        }
        else closet.y = (0 < closet.y) ? extentY : -extentY;
    }
    normal = incident - closet;
    float dist = normal.SqrMagnitude();
    float radius = rhs->radius;
    if ((radius * radius) < dist && !inside) return false;
    if (inside) normal = -normal; // 반 이상으로 침투하면 침투 방향이 뒤집히기 때문에 다시 방향을 되돌려 준다
    normal.Normalize();
    return true;
}
```



# Physics Engine

```
bool AABBvsAABB(Box * lhs, Box * rhs)
{
    // 충돌 방향 벡터, 상대 위치(lhs를 원점으로 rhs의 위치)
    const Vector2 incident = rhs->position - lhs->position;
    // 각 Box의 너비(width)의 반(half width)을 구한다.
    float lhs_extent = lhs->halfWidth;
    float rhs_extent = rhs->halfWidth;
    float overlapX = lhs_extent + rhs_extent - std::abs(incident.x);
    if (0 < overlapX) // x축으로 겹치는 위치에 있다.
    {
        Vector2 closet;
        float offset = max(lhs_extent, rhs_extent);
        closet.x = clamp(incident.x, -offset, offset);
        // 각 Box의 높이(height)의 반(half height)을 구한다.
        lhs_extent = lhs - halfHeight;
        rhs_extent = rhs->halfHeight;
        float overlapY = lhs_extent + rhs_extent - std::abs(incident.y);
        if (0 < overlapY) // y축으로 겹치는 위치에 있다.
        {
            closet.y = clamp(incident.y, -lhs_extent, lhs_extent);
            normal = incident - closet;
            normal.Normalize();
            return true;
        }
    }
    return false;
}
```



# Physics Engine

## ▶ 이차원 벡터의 내적

```
float Dot(const Vector2& lhs, const Vector2& rhs)
{
    return lhs.x * rhs.x + lhs.y * rhs.y;
}
```

## ▶ 부피

- 원주율(Pi) : 3.141592...
- 사각형 : 부피(volume) = 너비(w) \* 높이(h)
- 원 : 부피(volume) = 반지름(r) \* 반지름(r) \* 원주율(Pi)

## ▶ 질량

- 밀도(d) : 기본 1을 사용
- 질량(m) = 부피(volume) \* 밀도(d)

## ▶ 상대속도(Relative Velocity)

- A가 B로 향하는 상대속도(rv) = B의 속도(bv) - A의 속도(av)

## ▶ 프레임당 중력가속도

- 중력가속도(g) : 9.80665
- 속도(gravity) = 중력가속도(g) \* FPS(deltaTime)

# Physics Engine

## ▶ 충돌 처리 판별하기

- $v \cdot n(\text{dot}) = (\text{상대속도}(rv) \cdot \text{충돌 방향}(n))$
- 충돌 처리 판별 : 두 물체가 접촉하고 있더라도 충돌 처리를 하지 않는 경우가 있다
  - (내적 > 0) : 두 물체가 멀어지는 중, 충돌 처리 하지 않는다
  - (내적 < 0) : 두 물체가 가까워 지는 중, 충돌 처리 한다

## ▶ 충돌

- 반발계수(e) : [0.0f ~ 1.0f]의 값을 가짐(예제에서는 0.02f가 사용되었음)
- 역질량(inv\_mass) : 1 / 물체의 질량(mass)
- 충돌(im) =  $-(1 + \text{반발계수}(e)) * v \cdot n(\text{dot}) / (\text{물체1의 역질량}(inv\_m1) + \text{물체2의 역질량}(inv\_m2))$

## ▶ 충돌에 의해 발생한 힘

- 속도(impulse) = 충돌 방향(normal) \* 충돌(im)

## ▶ 가속도

- 힘(f) = 충돌에 의해 발생한 힘(impulse)
- 가속도(a) = 힘(f) / 질량(m)

## ▶ 물체의 속도 갱신

- 현재 속도(v) += 가속도(a)

## ▶ 물체의 이동

- 물체의 위치(position) += 현재 최종 속도(v) \* FPS(deltaTime)

# 연습문제

## 중력이 적용되어 BOX, Circle 오브젝트가 서로 충돌하는 SimplePhysics2D 프로젝트를 만들어 보자

### ▶ 실행 순서

1. 물체의 속도에 중력가속도 적용
2. 두 물체 간의 충돌 확인
3. 충돌한 물체들의 충돌 가속도 적용(3.을 여러 번 반복할 수록 더욱 세밀한 충돌 구현이 가능)
4. 물체 이동
5. 1.에서 4.를 반복

❖ 참고 출처 : [The Basics and Impulse Resolution](#)