Dynamique symbolique
Exercices

V. Berthé berthe@irif.fr

2020

1 Étude d'un mot infini défini par une substitution

Soient $\mathcal{A} = \{a, b\}$ et $\sigma \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}^*$ la substitution définie par $\sigma(a) = abaa$ et $\sigma(b) = babb$.

1. Combien de points fixes la substitution σ admet-elle dans $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$?

   Dans la suite, on note $\mathbf{u}$ le point fixe de σ commençant par a.

2. Montrer que la suite $\mathbf{u}$ est uniformément récurrente.

3. Montrer que l'ensemble de ses facteurs est invariant par l'échange des lettres a et b.

4. Donner la liste des facteurs de $\mathbf{u}$ de longueur inférieure ou égale à 6. Donner la liste des facteurs spéciaux à droite de longueur 5 de $\mathbf{u}$. Représenter les graphes des mots de Rauzy de $\mathbf{u}$ de rang 1 à 5. Quelle semble être la complexité de $\mathbf{u}$?

5. L'ensemble des facteurs de $\mathbf{u}$ est-il invariant par image miroir?

6. Le but de cette question est de montrer le *lemme de décomposition* suivant : tout facteur W de longueur au moins 5 de $\mathbf{u}$ s'écrit de manière *unique*

   $$W = R\sigma(V)S$$

   où V est un facteur de $\mathbf{u}$,

   $$R \in \{\varepsilon, a, aa, baa, b, bb, abb\}, \quad \text{et } S \in \{\varepsilon, a, ab, aba, b, ba, bab\}.$$

(a) Existence. Montrer que si $\mathbf{u} = u_0 u_1 \cdots u_n$, alors $\sigma(u_n) = u_{4n}u_{4n+1}u_{4n+2}u_{4n+3}$. En déduire l'existence d'une telle décomposition.

(b) Unicité. Montrer que R est déterminé par un préfixe de longueur au plus 5 de W; pour cela, par une étude de cas, montrer que pour chacune des valeurs possibles de R, cette valeur détermine un préfixe de longueur au plus 5 de W. Conclure en remarquant que la détermination de R implique celle de S.

7. Montrer que si W est un facteur spécial à droite de $\mathbf{u}$ de longueur supérieure ou égale à 5, alors W se dcompose de manière unique comme $W = R\sigma(V)$, où V est un facteur spécial à droite de $\mathbf{u}$ et $R \in \{\varepsilon, a, aa, baa, b, bb, abb\}$. On pourra utiliser le fait que le suffixe de W de longueur 5 est en particulier spécial à droite.

8. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $\mathbf{u}$ a le même nombre de facteurs spéciaux à droite de longueur n. Donner ce nombre.

9. En déduire la fonction de complexité de $\mathbf{u}$.

2 Suites de fonction de complexité de la forme $p(n) = n + k$, pour tout n

1. Soit $k \geq 1$. Construire à partir de la suite de Fibonacci un exemple $\mathbf{u}$ de suite dont la fonction de complexité $p_{\mathbf{u}}(n)$ satisfait :

$$p_{\mathbf{u}}(n) = n + k, \text{ pour tout } n.$$

2. Soit $\mathbf{u}$ une suite définie sur l'alphabet $\mathcal{A}$ telle que chacune des lettres de $\mathcal{A}$ apparaisse dans $\mathbf{u}$. Montrer que si la fonction de complexité de la suite $\mathbf{u}$ satisfait

$$\exists n \in \mathbb{N},\ p_{\mathbf{u}}(n) < n + \text{Card}\,(\mathcal{A}) - 1,$$

alors la suite est ultimement périodique.

3. Soit $k \geq 1$. Dans toute cette question, la suite $\mathbf{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite *non récurrente* dont la fonction de complexité satisfait

$$p_{\mathbf{u}}(n) = n + k, \text{ pour tout } n.$$

(a) Soit $a = u_0$ la première lettre de la suite $\mathbf{u}$. Le but de cette question est de montrer par l'absurde que la lettre a ne se prolonge pas à gauche dans la suite u.

On suppose a contrario que a se prolonge à gauche dans $\mathbf{u}$. Quelles sont les deux formes possibles du graphe des mots d'ordre 1 de la suite $\mathbf{u}$? En déduire que les $k+1$ lettres de $\mathcal{A}$ apparaissent infiniment souvent dans la suite u. Déduire de la non récurrence de $\mathbf{u}$ et de la question 2. une contradiction.

(b) Quelle est la complexité de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$?

(c) En déduire que si la suite u est non récurrente, alors il existe $l \geq 1$, $\mathcal{A}'$ sous-alphabet de $\mathcal{A}$, $a_1, a_2, \cdots, a_l$ lettres de $\mathcal{A}$ telles que $\mathcal{A} = \mathcal{A}' \cup \{a_1, \cdots, a_l\}$ et une suite récurrente $\mathbf{w}$ sur l'alphabet $\mathcal{A}'$ tels que

$$\mathbf{u} = a_1 a_2 \cdots a_l \mathbf{w}.$$

Quelle est la complexité de $\mathbf{w}$?

3 Mots centraux

1. Donner le mot de Christoffel de pente $5/4$ sur l'alphabet $\{x < y\}$. Donner son graphe de Cayley. Donner son mot de Christoffel dual.

2. Donner les inverses de 5 et 4 modulo 9. Construire tous les mots non constants de périodes 5 et 4 de longueur 7.

3. Montrer que si deux mots U et V satisfont $UV = VU$, alors il existe un mot W et $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $U = W^i$, $V = W^j$. Donner une preuve par récurrence et une preuve basée sur le théorème de Fine et Wilf.

4 Mots sturmiens

Montrer que l'ensemble des facteurs sturmiens est stable par image miroir.

5 Mots épisturmiens

Un mot infini est dit épisturmien si son langage est fermé par image miroir et s'il admet un unique facteur spécial droit pour chaque longueur. Montrer que les fréquences sont uniformes pour un mot épisturmien.

6 Chacon

Le mot de Chacon $u = \sigma^\infty(0)$ est défini sur $\{0,1\}$ par la substitution $\sigma : 0 \mapsto 0010,\ 1 \mapsto 1$. Montrer que le mot de Chacon est uniformément récurrent. *Indication:* Monter que les mots b_n définis par

$$b_0 = 1,\ b_{n+1} = b_n b_n 1 b_n \text{ pour tout } n$$

sont des préfixes de u. Montrer que les fréquences sont uniformes dans le mot de Chacon.

7 Fréquences

On considère la substitution $\sigma : 0 \mapsto 0011, 1 \mapsto 0101$. Soit $u = \sigma^\infty(0)$. Montrer que $(\overline{\mathcal{O}(u)}, T)$ est minimal et uniquement ergodique. Les fréquences des facteurs existent-elles ? Montrer que les valeurs des fréquences sur les cylindres ne sont pas déterminées par leurs valeurs sur les cylindres lettres.