Конспекты для студентов направления ИСИТ

Теория вероятностей и математическая статистика

Первое издание

ПРЕДИСЛОВИЕ

Я хочу, чтобы вы смотрели на эту книгу как на своего спутника, который будет рядом с вами в этом путешествии. Когда станет сложно, вспомните: вы не одиноки. Все студенты проходят через это, и каждый из нас имеет право на ошибки, вопросы и повторные попытки. Учиться — это нормально.

Эта книга создана с мыслью о том, чтобы поддержать вас в этом путешествии. Она включает в себя теорию, которая изложена простым и доступным языком, множество примеров и задач, которые помогут вам лучше понять материал, а также мои собственные советы, которые я бы хотела услышать, когда только начинала свой путь.

Но путеводитель — не только про формулы. Это про веру в то, что вы можете достичь всего, если будете двигаться к цели. Про преодоление сомнений и радость оттого, что у вас получилось. Про понимание того, что трудности — это лишь временные преграды, а не тупики. Не бойтесь задавать вопросы. Не бойтесь ошибаться. Любая ошибка — это шаг вперед, если вы учитесь на ней.

Я хочу поблагодарить всех, кто помогает мне в этом пути: преподавателей, которые вдохновляли своими объяснениями, одногруппников, с которыми мы решали задачи допоздна, и всех, кто верил, что я справлюсь. Без них эта книга никогда бы не появилась.

Помните: за трудностями всегда скрываются успехи. Каждый маленький шаг, каждая решенная задача приближают вас к пониманию этой удивительной науки. Не бойтесь сложности, потому что именно она делает нас сильнее.

Пусть этот учебник станет вашим проводником и помощником. И даже если на каком-то этапе вы почувствуете усталость или сомнение, вспомните: каждый великий математик когда-то стоял на вашем месте, задавая себе те же вопросы и преодолевая те же трудности. Главное — не останавливаться.

Вы сможете. Я верю в вас.

С теплом и поддержкой, Анастасия Андреевна Ларионова.

Оглавление

Предисловие **1**

Оглавление **2**

I Первый семестр 3

Введение в математические модели **4**

1 Про задачи 4
2 Парадокс при игре в кости 4
3 Парадокс раздела ставки 5

Случайные события **6**

4 Понятие случайного события 7
5 Классификация событий 7
6 Операции над событиями 8
7 Классическая формула вероятности 9
8 Геометрическая вероятность 9

Список литературы **10**

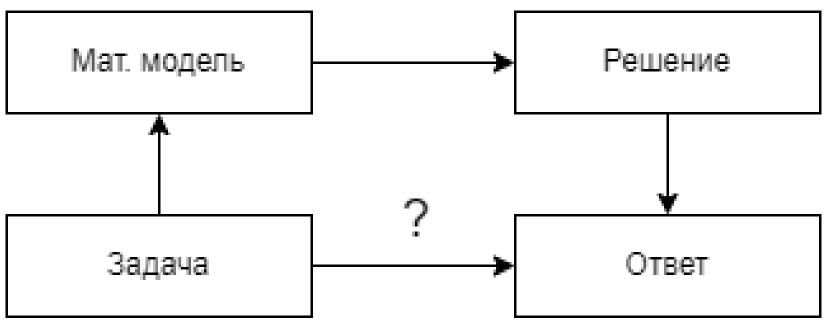
Часть I

Первый семестр

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

1 Про задачи

- Одной задаче могут соответствовать разные модели;
- Разные модели дают разные решения;
- Основной критерий выбора модели - практика.



Основа теории вероятностей - азартные игры (в процессе игры поднимаются ставки).

2 Парадокс при игре в кости

Правильная игральная кость при бросании с равными шансами падает на любую из граней 1, 2, 3, 4, 5, 6.

В случае бросания двух костей сумма выпавших чисел заключена между 2 и 12. Как 9, так и 10 из чисел 1, 2, ..., 6 можно получить двумя разными способами: 9=3+6 или 9=4+5 и 10=4+6 или 10=5+5. Почему 9 появляется чаще, когда бросают две кости, чем 10?

Решение: 9: 3+6, 6+3, 4+5, 5+4 = 4 из 36 случаев, а 10: 4+6, 6+4, 5+5 = 3 из 36 случаев.

Получается, что 9 выпадает чаще, чем 10, ч.т.д.

3 Парадокс раздела ставки

Два игрока играют в безобидную игру (то есть шансы на выигрыш одинаковы) и они договорились, что тот, кто первым выиграет 6 партий, получит весь приз. Предположим, что на самом деле игра остановилась, до того, как один из них выиграл приз (например, первый игрок выиграл 5 партий, второй - 3). Как справедливо следует разделить приз?

Решение: Мысленно представим, что матч бы продолжился. Всего возможно четыре исхода:

- А - 1-ый игрок выигрывает первую партию;
- Б - 1-ый игрок выигрывает вторую партию, проиграв первую;
- В - 1-ый выигрывает третью, проиграв первую и вторую;
- Г - 1-ый проигрывает все партии.

Вероятность (*по теореме о независимых событиях*) событий А, Б, В, Г соответственно 0.5, 0.25, 0.125, 0.125 (в сумме 1).

(*) Вероятность победы 1-го, в таком случае, 0.875, второго - 0.125, то есть в 7 раз меньше. Делим приз на 8 частей - 7 первому, 1 второму.

Ответ: 7:1

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

4	Понятие случайного события	7
5	Классификация событий . .	7
6	Операции над событиями . .	8
7	Классическая формула вероятности	9
8	Геометрическая вероятность	9

4 Понятие случайного события

Предметом исследования в теории вероятностей являются **события**, появляющиеся при определенных условиях, которые можно воспроизводить неограниченное количество раз. Эти условия называются **испытание, опыт**.

Определение 4.1: Событие

Явление, которое происходит в результате осуществления определенного комплекса условий.

Определение 4.2: Эксперимент (опыт, испытание)

Комплекс условий, которые можно воспроизводить неограниченное количество раз.

5 Классификация событий

- Невозможное событие - то, которое не может произойти в рамках испытания.
- Достоверное событие - то, которое точно произойдет в рамках испытания.
- Случайное событие - то, которое может произойти или не произойти в рамках эксперимента:
  - Совместные события - те, которые в рамках эксперимента могут произойти одновременно.
  - Несовместные события - те, которые не могут произойти одновременно в рамках одного эксперимента (появление одного из них исключает появление второго)
  - Равновозможные события - те, которые в рамках эксперимента происходят с одинаковой частотой.
  - Противоположные события - непоявление одного из них в рамках эксперимента влечет появление другого.

Определение 5.1: Полная группа событий

В результате эксперимента обязательно должно произойти хотя бы одно из них и любые два из них несовместны.

Определение 5.2: Элементарные исходы

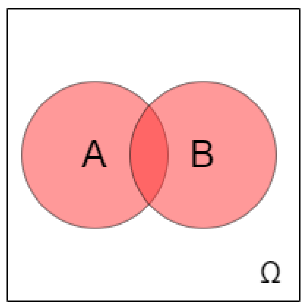
Такие исходы, которые не могут быть разделены на другие в рамках данного эксперимента.

Определение 5.3: Благоприятные исходы

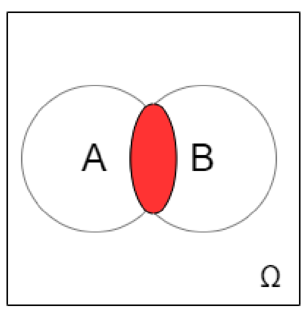
Элементарные исходы, образующие данное событие.

6 Операции над событиями

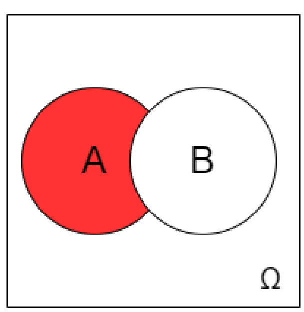
1. A=B: (равенство) - если появление A влечет за собой появление B, а B - влечет A (не обязательно совпадают).
2. $A + B(A \bigcup B)$: сумма (объединение) - появление хотя бы одного из событий.



3. $A \cdot B(A \bigcap B)$: произведение (пересечение) - осуществление обоих событий.



4. $A \setminus B$: разность - происходит A, но не происходит B.



7 Классическая формула вероятности

Определение 7.1: Вероятность

Вероятностью события A называется математическая оценка возможности появления этого события в результате опыта, равная отношению числа, благоприятствующих событию A исходов опыта к общему числу равновозможных попарно несовместных исходов опыта, образующих полную группу событий.

$$P(A) = \frac{M}{N},$$

где N - число всех исходов испытания, а M - число исходов, благоприятствующих событию A.

Общая схема решения задач

1. Определить, в чем состоит случайный эксперимент и какие у него элементарные события (исходы). Убедиться, что они равновозможны;
2. Найти общее число элементарных событий N;
3. Определить, какие элементарные события благоприятствуют интересующему нас событию A, и найти их число M;
4. Найти вероятность события A по формуле $P(A) = \frac{M}{N}$.

8 Геометрическая вероятность

Определение 8.1: Геометрическое определение вероятности

Если предположить, что попадание в любую точку области Ω равновозможно, то вероятность попадания случайной точки в заданное множество A будет равна отношению площадей

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}.$$

Если A имеет нулевую площадь, то вероятность попадания в A равна нулю.
Можно определить геометрическую вероятность в пространстве и на прямой:

$$P(A) = \frac{V(A)}{V(\Omega)}, P(A) = \frac{L(A)}{L(\Omega)}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Black и др.: The Pricing of Options and Corporate Liabilities **BlackScholes**

Fischer Black и Myron Scholes. «The Pricing of Options and Corporate Liabilities». В: *Journal of Political Economy* 81.3 (1973), с. 637—654.

Merton: Theory of Rational Option Pricing **Merton**

Robert Merton. «Theory of Rational Option Pricing». В: *The Bell Journal of Economics and Management Science* 4.1 (1973), с. 141—183.

Hull: Options, Futures, and Other Derivatives **Hull**

John Hull. *Options, Futures, and Other Derivatives*. 9-е изд. Pearson, 2017.