4. Классическая вероятностная схема — схема урн. Во многих случаях вероятностное пространство строится на основе проведения аналогии между описываемым экспериментом и какой-либо хорошо изученной моделью случайного эксперимента с известным распределением вероятностей. Таковы, например, опыты, сводящиеся к классической или геометрической схеме, которые подробно рассматриваются далее.

Всякий эксперимент, удовлетворяющий тому условию, что соответствующее ему множество Ω представляет собой конечное множество равновероятных исходов $\left(\text{т.е. } \mathrm{P}(\omega_1) = \mathrm{P}(\omega_2) = \cdots = \mathrm{P}(\omega_n) = \dfrac{1}{n}\right)$, называется *классической схемой* или *схемой урн.* В силу конечности Ω алгебра событий $\mathcal{F}$ совпадает с множеством всех подмножеств множества Ω (включая и пустое множество). Поэтому любое событие вида $A = \{\omega_{k_1}, \omega_{k_2}, \ldots, \omega_{k_m}\} \subset \Omega$ наблюдаемо в таком эксперименте, и вероятность его осуществления определяется по *формуле классической вероятности*

$$\mathrm{P}(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{m}{n},$$

где $N(A) = m$ — число элементов множества A (число всех благоприятствующих событию A исходов), $N(\Omega) = n$ — число элементов множества Ω (число всех исходов эксперимента).

Классическая схема является математической формализацией опытов, в которых элементарные исходы обладают определенной симметрией по отношению к условиям опыта, так что нет оснований считать какой-либо из исходов более вероятным, чем другой. Таким свойством, например, обладают опыты по извлечению наудачу определенного числа шаров из урны, содержащей заданное количество неразличимых на ощупь шаров. (Отсюда и название — схема урн.)

18.66. В магазин поступило 30 новых цветных телевизоров, среди которых 5 имеют скрытые дефекты. Наудачу отбирается один телевизор для проверки. Какова вероятность, что он не имеет скрытых дефектов?

18.67. Автомат изготавливает однотипные детали, причем технология изготовления такова, что 5 % произведенной продукции оказывается бракованной. Из большой партии взята наудачу одна деталь для контроля. Найти вероятность события $A = \{$деталь бракованная$\}$.

18.68. Игральная кость подбрасывается один раз. Найти вероятности следующих событий: $A = \{$число очков равно 6$\}$, $B = \{$число очков кратно трем$\}$, $C = \{$число очков четно$\}$, $D = \{$число очков меньше пяти$\}$, $E = \{$число очков больше двух$\}$.

Подбрасываются две игральные кости. В задачах 18.69–18.71 найти вероятности указанных событий.

18.69. $A = \{$числа очков на обеих костях совпадают$\}$, $B = \{$число очков на первой кости больше, чем на второй$\}$.

18.70. $C = \{$сумма очков четна$\}$, $D = \{$сумма очков больше двух$\}$.

18.71. $E = \{$сумма очков не меньше пяти$\}$, $F = \{$хотя бы на одной кости появится цифра 6$\}$, $G = \{$произведение выпавших очков равно 6$\}$.

Подсчет числа элементов тех или иных подмножеств множества Ω часто облегчается благодаря следующей формуле. Число элементов прямого произведения множеств равно произведению числа элементов составляющих множеств, т.е.

$$N(\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_s) = N(\Omega_1)\, N(\Omega_2) \,\ldots\, N(\Omega_s).$$

18.72. Наудачу выбирается пятизначное число. Какова вероятность следующих событий: $A = \{$число одинаково читается как слева направо, так и справа налево (как, например, 13531)$\}$, $B = \{$число кратно пяти$\}$, $C = \{$число состоит из нечетных цифр$\}$.

18.73. 1 сентября на первом курсе одного из факультетов запланировано по расписанию три лекции по разным предметам. Всего на первом курсе изучается 10 предметов. Студент, не успевший ознакомиться с расписанием, пытается его угадать. Какова вероятность успеха в данном эксперименте, если считать, что любое расписание из трех предметов равновозможно?

5. Комбинаторный метод вычисления вероятностей в классической схеме. Решение вероятностных задач на классическую схему часто облегчается использованием комбинаторных формул. Каждая из комбинаторных формул определяет общее число элементарных исходов в некотором опыте, состоящем в выборе наудачу m элементов из n различных элементов исходного множества $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. При этом в постановке каждого такого опыта строго оговорено, каким способом производится выбор и что понимается под различными выборками.

Существуют две принципиально различные схемы выбора. В первой схеме выбор осуществляется без возвращения элементов (это значит, что отбираются либо сразу все m элементов, либо последовательно по одному элементу, причем каждый отобранный элемент исключается из исходного множества). Во второй схеме выбор осуществляется поэлементно с обязательным возвращением отобранного элемента на каждом шаге и тщательным перемешиванием исходного множества перед следующим выбором. После того как выбор тем или иным способом осуществлен, отобранные элементы (или их номера) могут быть либо упорядочены (т.е. выложены в последовательную цепочку), либо нет. В результате получаются следующие четыре различные постановки эксперимента по выбору наудачу m элементов из общего числа n различных элементов множества E.

Схема выбора, приводящая к сочетаниям. Если опыт состоит в выборе m элементов без возвращения и без упорядочивания, то различными исходами следует считать m-элементные подмножества множества E, имеющие различный состав. Получаемые при этом комбинации элементов (элементарные исходы) носят название *сочетания из n элементов по m*, а их общее число $N(\Omega)$ определяется по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = \frac{n\,(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}. \qquad (2)$$

Пример 7. Из партии, содержащей 10 изделий, среди которы: 3 бракованных, наудачу извлекают три изделия для контроля. Найт вероятности следующих событий: $A = \{$в полученной выборке ровн одно изделие бракованное$\}$, $B = \{$в полученной выборке нет ни одног бракованного изделия$\}$.

$\lhd$ Занумеруем изделия числами от 1 до 10, и пусть множество но меров $E_1 = \{1, 2, \ldots, 7\}$ соответствует годным изделиям, а множеств номеров $E_2 = \{8, 9, 10\}$ — бракованным изделиям.

Согласно описанию эксперимента производится выбор без возвраще ния и без упорядочивания трех элементов из множества $E =$ $= E_1 \cup E_2 = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Поэтому $N(\Omega) = C_{10}^3 = 120$.

Событию A благоприятствуют только такие исходы, когда один эле мент выборки принадлежит E_2, а остальные два элемента — множеств E_1. По формуле прямого произведения множеств получаем, что числ всех таких исходов $N(A) = C_3^1 \cdot C_7^3 = 63$, поэтому

$$\mathrm{P}(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{21}{40}.$$

Событию B благоприятствуют только такие исходы, когда все тр отобранных элемента принадлежат множеству E_1, поэтому $N(B) = C_7^3 =$ $= 35$. Отсюда следует, что

$$\mathrm{P}(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{7}{24}. \ \rhd$$

18.78. Из полного набора домино (28 штук) наудачу выбираю 7 костей. Какова вероятность, что среди них окажется по крайне мере одна кость с шестью очками?

18.79. Из десяти первых букв русского алфавита наудачу соста вляется новый алфавит, состоящий из пяти букв. Найти вероят ности следующих событий: $A = \{$в состав нового алфавита входи буква $a\}$, $B = \{$в состав нового алфавита входят только согласны буквы$\}$.

Схема выбора, приводящая к размещениям. Если опыт состоит в выборе m элементов без возвращения, но с упорядочиванием их по мере выбора в последовательную цепочку, то различными исходами данного опыта будут упорядоченные m-элементные подмножества множества E, отличающиеся либо набором элементов, либо порядком их следования. Получаемые при этом комбинации элементов (элементарные исходы) называются *размещениями из n элементов по m*, а их общее число определяется формулой

$$N(\Omega) = A_n^m = C_n^m \cdot m! = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)\dots(n-m+1). \qquad (3)$$

В частном случае $m = n$ опыт фактически состоит в произвольном упорядочивании множества E, т.е. сводится к случайной перестановке элементов всего множества. При этом $N(\Omega) = A_n^n = n!$.

Пример 8. Множество E состоит из 10 первых букв русского алфавита. Опыт состоит в выборе без возвращения 4 букв и записи слова в порядке поступления букв. Сколько 4-буквенных слов может быть получено в данном опыте? Какова вероятность того, что наудачу составленное слово будет оканчиваться буквой a?

$\lhd$ $N(\Omega)$ — число всех 4-буквенных слов в данном опыте — равно числу 4-элементных упорядоченных подмножеств из 10 элементов, т.е.

$$N(\Omega) = A_{10}^4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040.$$

Пусть событие $A = \{$наудачу составленное слово из 4 букв множества E оканчивается буквой $a\}$. Число элементов множества A равно числу способов разместить на три оставшиеся места по одному символу из 9 (символ a исключен из рассмотрения, поскольку его место уже определено); таким образом,

$$N(A) = A_9^3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$$

и

$$\mathrm{P}(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{504}{5040} = \frac{1}{10}. \ \rhd$$

Числа 1, 2, ..., 9 записываются в случайном порядке. В задачах 18.87–18.89 найти вероятности указанных событий.

18.87. $A = \{$числа будут записаны в порядке возрастания$\}$.

18.88. $B = \{$числа 1 и 2 будут стоять рядом и в порядке возрастания$\}$, $C = \{$числа 3, 6 и 9 будут стоять рядом$\}$.

18.89. $D = \{$на четных местах будут стоять четные числа$\}$, $E = \{$сумма каждых двух чисел, стоящих на одинаковом расстоянии от концов, равна 10$\}$.

18.90. Группа, состоящая из 8 человек, занимает места за круглым столом в случайном порядке. Какова вероятность того, что при этом два определенных лица окажутся сидящими рядом?

18.91. Группа, состоящая из 8 человек, занимает места с одной стороны прямоугольного стола. Найти вероятность того, что два определенных лица окажутся рядом, если

а) число мест равно 8;

б) число мест равно 12.

18.92. На пяти карточках написаны цифры от 1 до 5. Опыт состоит в случайном выборе трех карточек и раскладывании их в порядке поступления в ряд слева направо. Найти вероятности следующих событий: $A = \{$появится число 123$\}$, $B = \{$появится число, не содержащее цифры 3$\}$.

18.93 (продолжение). В условиях предыдущей задачи найти вероятности событий: $C = \{$появится число, состоящее из последовательных цифр$\}$, $D = \{$появится четное число$\}$, $E = \{$появится число, содержащее хотя бы одну из цифр 2 или 3$\}$.

С х е м а в ы б о р а, п р и в о д я щ а я к с о ч е т а н и я м с п о в т о р е н и я м и. Если опыт состоит в выборе с возвращением m элементов множества $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, но без последующего упорядочивания, то различными исходами такого опыта будут всевозможные m-элементные наборы, отличающиеся составом. При этом отдельные наборы могут содержать повторяющиеся элементы. Например, при $m = 4$ наборы $\{e_1, e_1, e_2, e_1\}$ и $\{e_2, e_1, e_1, e_1\}$ неразличимы для данного эксперимента, а набор $\{e_1, e_1, e_3, e_1\}$ отличен от любого из предыдущих. Получающиеся в результате данного опыта комбинации называются *сочетаниями с повторениями*, а их общее число определяется формулой

$$N(\Omega) = C_{n+m-1}^{m}.$$

П р и м е р 9. В технической библиотеке имеются книги по математике, физике, химии и т.д.; всего по 16 разделам науки. Поступили очередные четыре заказа на литературу. Считая, что любой состав заказанной литературы равновозможен, найти вероятности следующих событий: $A = \{$заказаны книги из различных разделов науки$\}$, $B = \{$заказаны книги из одного и того же раздела науки$\}$.

◁ Число всех равновероятных исходов данного эксперимента равно, очевидно, числу сочетаний с повторениями из 16 элементов по 4, т.е.

$$N(\Omega) = C_{16+4-1}^{4} = C_{19}^{4}.$$

Число исходов, благоприятствующих событию A, равно числу способов отобрать без возвращения четыре элемента из 16, поэтому

$$\mathrm{P}(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{C_{16}^{4}}{C_{19}^{4}} = \frac{455}{969} \approx 0{,}47.$$

Число исходов, благоприятствующих событию B, равно числу способов выбрать один элемент из шестнадцати, поэтому

$$\mathrm{P}(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{C_{16}^{1}}{C_{19}^{4}} = \frac{4}{969} \approx 0{,}004. \ \triangleright$$

18.98. В кондитерской имеется 7 видов пирожных. Очередной покупатель выбил чек на 4 пирожных. Считая, что любой заказываемый набор пирожных равновероятен, вычислить вероятность того, что покупатель заказал:

а) пирожные одного вида;

б) пирожные разных видов;

в) по два пирожных различных видов.

Схема выбора, приводящая к размещениям с повторениями. Если выбор m элементов из множества $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ производится с возвращением и с упорядочиванием их в последовательную цепочку, то различными исходами будут всевозможные m-элементные наборы (вообще говоря, с повторениями), отличающиеся либо составом элементов, либо порядком их следования. Например, при $m = 4$ множества $\omega_1 = \{e_1, e_1, e_2, e_1\}$, $\omega_2 = \{e_2, e_1, e_1, e_1\}$ и $\omega_3 = \{e_1, e_1, e_3, e_1\}$ являются различными исходами данного опыта. Получаемые в результате комбинации называются *размещениями с повторениями*, а их общее число определяется формулой

$$N(\Omega) = n^m.$$

Пример 10. 7 одинаковых шариков случайным образом рассыпаются по 4 лункам (в одну лунку может поместиться любое число шариков). Сколько существует различных способов распределения 7 шариков по 4 лункам? Какова вероятность того, что в результате данного опыта первая лунка окажется пустой (при этом может оказаться пустой и еще какая-либо лунка)?

◁ Занумеруем лунки и шарики. Можно считать, что опыт состоит в 7-кратном выборе с возвращением номера лунки и записи 7-буквенного слова. При этом каждому порядковому номеру буквы (номеру шарика) будет поставлена в соответствие одна из четырех букв алфавита (номер лунки).

Так, например, слово

1	1	3	1	4	4	2
1	2	3	4	5	6	7

означает, что в первую лунку попали шары № 1, № 2 и № 4, во вторую лунку — шар № 7, в третью — шар № 3, в четвертую — шары № 5 и № 6. Таким образом, число всех способов распределить 7 шариков по 4 лункам равно числу различных 7-буквенных слов из алфавита в 4 буквы, т.е. $N(\Omega) = 4^7$.

Событие $A = \{$первая лунка окажется пустой$\}$ соответствует такому выбору, когда символ 1 (номер первой лунки) удален из алфавита. Поэтому $N(A) = 3^7$ и

$$\mathrm{P}(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \left(\frac{3}{4}\right)^7 \approx 0{,}133. \ \triangleright$$

18.100. Бросается 10 одинаковых игральных костей. Вычислить вероятности следующих событий: $A = \{$ни на одной кости не выпадет 6 очков$\}$, $B = \{$хотя бы на одной кости выпадет 6 очков$\}$, $C = \{$ровно на 3 костях выпадет 6 очков$\}$.

6. Геометрические вероятности. Формула классической вероятности следующим образом обобщается на случай непрерывных пространств элементарных исходов Ω.

Пусть Ω-квадрируемая область на плоскости. Рассмотрим систему $\mathcal{F}$ квадрируемых подмножеств множества Ω. Как отмечалось в примере 4, система $\mathcal{F}$ является σ-алгеброй. Пусть условия опыта таковы, что вероятность попадания в произвольную квадрируемую подобласть ω области Ω пропорциональна площади этой подобласти и не зависит от ее местоположения в Ω. При этих условиях для вероятности осуществления любого наблюдаемого в данном эксперименте события $A = \{(x, y) \in \omega \,|\, \omega \in \mathcal{F}\}$ справедлива *формула геометрической вероятности*

$$P(A) = P\{(x, y) \in \omega \,|\, \omega \in \mathcal{F}\} = \frac{S(\omega)}{S(\Omega)}, \tag{5}$$

где $S(\omega)$ — площадь подобласти ω.

Формула (5) естественным образом обобщается на случай пространств произвольной размерности:

$$P(A) = P\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \omega \,|\, \omega \in \mathcal{F}\} = \frac{\operatorname{mes}(\omega)}{\operatorname{mes}(\Omega)},$$

где $\operatorname{mes}(\omega)$ — мера множества ω (длина, площадь, объем и т.д. в зависимости от размерности того пространства, в котором рассматриваются данные множества).

Пример 11. На бесконечную шахматную доску со стороной квадрата a наудачу бросается монета радиуса $r < a/2$. Найти вероятности следующих событий: $A = \{$монета попадет целиком внутрь одного квадрата$\}$, $B = \{$монета пересечет не более одной стороны квадрата$\}$.

◁ Пусть (x, y) — координаты центра упавшей монеты. В силу бесконечности шахматной доски можно считать, что элементарные исходы данного эксперимента полностью определяются положением центра упавшей монеты относительно вершин квадрата, содержащего этот центр. Помещая начало координат в одну из вершин указанного квадрата, можем записать множество элементарных исходов в виде $\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x, y \leqslant a\}$. Множество ω_A, соответствующее событию A, имеет вид $\omega_A = \{(x, y) \mid r \leqslant x, y \leqslant a - r\}$, т.е. является квадратом со стороной $a - 2r$. По формуле геометрической вероятности (5) находим

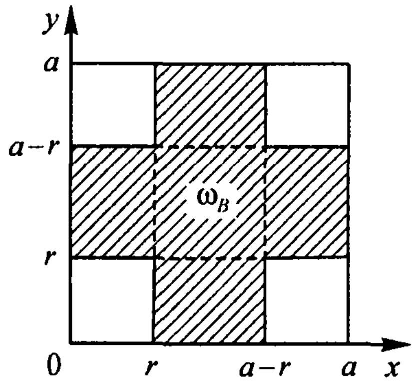

Рис. 4

$$\mathrm{P}(A) = \frac{S(\omega_A)}{S(\Omega)} = \frac{(a-2r)^2}{a^2}.$$

Множество ω_B, имеющее более сложную структуру, изображено на рис. 4. Так как $S(\omega_B) = a^2 - 4r^2$, то, снова используя формулу (5), находим

$$\mathrm{P}(B) = \frac{S(\omega_B)}{S(\Omega)} = 1 - 4\,\frac{r^2}{a^2}. \ \triangleright$$

18.139. Внутри квадрата с вершинами (0, 0), (1, 0), (1, 1) и (0, 1) наудачу выбирается точка $M(x, y)$. Найти вероятность события $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant a^2,\ a > 0\}$.

18.140 (продолжение). В условиях предыдущей задачи найти вероятность события $B = \{(x, y) \mid xy < a,\ a > 0\}$.

18.141 (продолжение). В условиях задачи 18.139 найти вероятности событий: $C = \{(x, y) \mid \max(x, y) < a,\ a > 0\}$, $D = \{(x, y) \mid \min(x, y) < a,\ 0 \leqslant a \leqslant 1\}$.