Петрозаводский государственный университет

Т Е О Р И Я   В Е Р О Я Т Н О С Т Е Й

Сборник упражнений для студентов
специальности "математика"

Петрозаводск 1992

§ 1. Случайные события и действия над событиями

1. Опишите пространство элементарных событий и все события в опыте, заключающемся в одном бросании игральной кости. Из каких элементарных событий состоят события "выпало не менее трех очков", "выпало четное число очков"?
2. Подбрасываются две игральные кости. Найти вероятности следующих событий:

   A={число очков на первой кости больше, чем на второй}
   C={сумма очков четна}
   D={сумма очков больше двух}
   E={сумма очков не меньше пяти}
   F={хотя бы на одной кости появилась цифра шесть}
   G={произведение выпавших очков равно шести}
   H={сумма выпавших очков равна 9}
3. Опыт состоит в регистрации в течение часа счетчиком Гейгера числа попавших в него частиц. Опишите пространство элементарных событий и все события.
4. Монета подбрасывается до первого выпадения "герба". Опишите пространство элементарных событий и все события. Выразите через элементарные события события "произошло не более двух подбрасываний монеты", "произошло более пяти подбрасываний", "произошло четное число подбрасываний".
5. Наблюдается время жизни элементарной частицы. Постройте пространство элементарных событий. Что в данном случае будет событием?
6. Рассматривается время безотказной работы двух ЭВМ в часах. Изобразите на плоскости пространство элементарных событий. Определите события "первая ЭВМ проработает в два раза дольше второй", "одна ЭВМ проработала, по крайней мере, на один час дольше другой".
7. Два стрелка стреляют в одну и ту же мишень, состоящую из 10 концентрических кругов радиусами

   $r_{10} < r_9 < \ldots < r_1$.

   События: A_i – "первый стрелок попал в круг радиусом r_i",
   B_i – "второй стрелок попал в круг радиусом r_i".

Что означают события $\bar{A}_1$, $\bar{B}_3$, $\bar{A}_5\bar{A}_7$, A_4B_6, $A_8B_9\bar{A}_{10}$, $\bar{A}_1\bar{B}_2 \cup \bar{A}_2\bar{B}_1$? Выразите через A_i и B_i события: "первый стрелок выбил менее пяти очков", "второй стрелок выбил четное число очков", "оба стрелка выбили в сумме не менее 18 очков".

8. Три охотника одновременно стреляют в зайца. Событие A_i – "попал i-й охотник". Выразите через A_i события: "попали все три охотника", "попали первый и второй охотники, а третий промахнулся", "попал, по крайней мере, один охотник", "попало ровно два охотника", "заяц убежал".
9. Подбрасываются две игральные кости. Событие A – "на первой кости выпало более трех очков", событие B – "в сумме выпало не менее 9 очков", событие C – "в сумме выпало менее 11 очков".

   В чем заключаются события: $AB \cup C$, $\bar{A}B$, $A\bar{C}$?
10. Из колоды вынули карту. Событие A – "вынули карту бубновой масти", B – "вынули картинку", C – "вынули даму". Что означают

    события: AB, $\bar{A}C$, $A(B \setminus C)$, $\bar{B}C$?
11. На рис. 1 приведена схема электрической цепи, состоящей из четырех элементов. Событие A_i – "i-й элемент пропускает электрический ток". Выразите через A_i событие A – "цепь пропускает электрический ток".

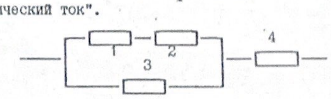

Рис. 1

12. Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, вынули последовательно без возвращения 3 шара. Событие A_i – "i-й шар белый". Выразите через A_i события: "вынули ровно 2 белых шара", "среди вынутых шаров оказался, по крайней мере, один белый", "среди вынутых шаров оказался, по крайней мере, один черный", "все вынутые шары одного цвета".
13. С помощью диаграммы Вьена покажите справедливость следующих тождеств:

$$A \cup B = \overline{\bar{A}\,\bar{B}}, \quad (A \cup B)C = AC \cup BC, \quad (A \cup B)(C \cup B) = AC \cup B,$$

$$AB = (A \setminus B) + B = (A \setminus B) + (B \setminus A) + AB, \quad A \cup B \cup C = A\bar{B} + B\bar{C} + C\bar{A} + ABC.$$

$ABC = \overline{\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}}$, $(A \cup B)(A \cup B)(A \cup B) = AB$.

14. Как связаны между собой события A и B, если выполнены равенства:

$AB = A$? $A \cup B = A$? $AB \cup AB = \Omega$?

$A\bar{B} \cup \bar{A}B = \varnothing$? $A\bar{B} \cup \bar{A}B = A$?

15. Покажите, что события $A \setminus B$, $B \setminus A$, AB и $\bar{A}\,\bar{B}$ образуют полную группу несовместных событий.

§ 2. Классическая и геометрическая вероятности

1. Какова вероятность вынуть белый шар из урны, содержащей 6 белых и 4 черных шаров?
2. Найдите вероятность того, что при бросании двух игральных костей в сумме выпадет 9 очков?
3. Куб с окрашенными гранями распилен на 64 одинаковых кубика. Какова вероятность того, что у выбранного наудачу кубика будет окрашена одна грань? Две грани? Три грани?
4. Какова вероятность из колоды в 36 карт вынуть карту пиковой масти? Туза?
5. За круглым столом случайным образом сидят N человек, среди которых A и B. Какова вероятность того, что A и B окажутся рядом?
6. Номер автомобиля содержит 4 цифры. Какова вероятность того, что первые две цифры окажутся равными двум последним?
7. К Новому Году пяти детям были приготовлены пять различных подарков. Однако Дед Мороз перепутал подарки и вручил их детям случайным образом. Какова вероятность того, что каждый ребенок получил свой подарок?
8. Из семи карточек, на которых написаны буквы "А","Д","К","Н", "О","Т" и "Ф", последовательно выбирают 3 карточки и кладут их слева направо. Какова вероятность того, что получится слово "КОТ" ?
9. Из чисел 1,2,4,5,6,7,8 наудачу выбирают 3 числа. Какова вероятность того, что их произведение нечетно?

10. Из колоды в 36 карт выбирают 4 карты. Какова вероятность того, что все они тузы?
11. Из урны, содержащей 7 белых и 3 черных шара, наудачу выбирают 6 шаров. Какова вероятность того, что из них 4 белых?
12. Найдите вероятность угадать 3 номера в "Спортлото 5 из 36", 4 номера, 5 номеров?
13. Из колоды в 32 карты наудачу выбираются 12 карт. Какова вероятность того, что ими будут 4 туза, 4 короля, 4 дамы?
14. Из колоды в 32 карты наудачу выбираются 10 карт. Какова вероятность того, что из них 4 карты будут одной масти, 3 другой, 2 третей и 1 четвертой?
15. Колода в 32 карты делится между тремя игроками следующим образом: первый получает 12 карт, а второй и третий - по 10 карт. Известно, что среди 12 карт первого игрока - 5 треф. Какова вероятность того, что у одного из двух других игроков - оставшиеся 3 трефы?
16. В кармане у мальчика 4 монеты по 5 коп., три - по 3 коп., две - по 1 коп. и одна двухкопеечная. Мальчик выбирает наудачу 2 монеты. Какова вероятность того, что в сумме они составят 6 копеек?
17. Стержень случайным образом разломали на две части. Какова вероятность того, что одна часть будет более чем в три раза короче другой?
18. На линии электропередачи длиной 100 км в случайном месте произошел обрыв. Какова вероятность того, что он случился между 55-м и 70-м километрами?
19. В счетчик Гейгера за 1 с попало 2 частицы. Какова вероятность того, что обе они будут зарегистрированы, если после попадания частицы в счетчик он в течение 0.05 с не регистрирует попадания других частиц?
20. (Задача Бюффона) На пол, разлинованный параллельными прямыми на полосы шириной L, бросается наудачу игла длины l ($l<L$). Найдите вероятность того, что игла пересечет какую-нибудь прямую?
21. Большое окно закрыто тонкими горизонтальными прутьями, расположенными на расстоянии 1 дм друг от друга. Перпендикулярно плоскости решетки в окно летит упругий мячик диаметром

5 см. Какова вероятность того, что мячик, не задев решетку, влетит в окно? Мячик заденет решетку, но попадет в окно?

22. Стержень сломали на три части, причем точки разлома выбрали случайно. Какова вероятность того, что из разломанных частей можно сложить треугольник?
23. Стержень сломали на четыре части, причем точки разлома выбрали случайно. Какова вероятность того, что из разломанных частей можно сложить четырехугольник?
24. В квадрат со стороной 4 случайным образом бросают точку. Пусть ξ и η - ее координаты. Какова вероятность того, что уравнение $x^2 + \xi x + \eta = 0$ не имеет действительных корней?
25. Какова вероятность того, что летящий в случайном направлении метеорит, упадет на Землю в восточном полушарии между 30-м и 60-м градусами северной широты?
26. На мягкую землю падает цилиндрическая бочка радиусом R и высотой H. Какова вероятность того, что она встанет "на попá"?
27. В квадрат со стороной 2, с центром в точке 0, случайным образом бросают точку. Пусть a и b - ее координаты. Найти вероятность следующих событий:
A={корни квадратного трехчлена $X^2 + 2aX + b$ действительны},
B={корни квадратного трехчлена $X^2 + 2aX + b$ положительны}.
28. На перекрестке установлен автоматический светофор, в котором одну минуту горит зеленый свет и полминуты - красный, затем снова одну минуту горит зеленый свет и полминуты - красный и т.д. В случайный момент времени к перекрестку подъезжает легковой автомобиль. Какова вероятность того, что он проедет перекресток без остановки?

§ 3. Условная вероятность. Умножение вероятностей. Сложение вероятностей

1. Производятся два подбрасывания симметричной монеты. Пространство элементарных событий состоит (см. задачу 2, §1) из четырех элементарных событий: w_1 = "герб-герб", w_2 -"герб-цифра", w_3 = "цифра-герб", w_4 = "цифра-цифра". В соответствии с принципами классической вероятности мы должны приписать каждому элементарному событию w_i вероятность $P(w_i)=1/4$. Событие A - "при первом подбрасывании выпал герб", событие B - "при втором подбрасывании выпал герб". Найдите условную вероятность события A при условии события B. Являются ли события A и B независимыми?

2. Производится два бросания игральной кости. Событие A - "при первом бросании выпадает не менее 5 очков", событие B -"сумма очков при двух бросаниях - 7", событие C - "сумма очков более 10". Найдите условные вероятности P(A/B), P(B/A), P(A/C), P(C/A), P(B/C), P(C/B). Зависимы ли события A и B? A и C? B и C?
3. В единичный квадрат случайным образом бросается точка. Событие A - "ордината точки меньше a" ($0 < a < 1$), событие B - "абсцисса точки меньше b" ($0 < b < 1$). Найдите условные вероятности P(A/B) и P(B/A). Зависимы ли события A и B?
4. (Пример Берштейна) Грани правильного тетраэдра раскрашены следующим образом: одна грань красная, вторая синяя, третья зеленая, а в раскраске четвертой грани присутствуют все три цвета. Событие A - "в раскраске грани, на которую упал тетраэдр, присутствует красный цвет", B - "синий цвет", C- "зеленый цвет". Зависимы ли события A, B и C попарно? В совокупности?
5. Из урны, содержащей n_1 белых шаров и n_2 черных, последовательно без возвращения вынимаются два шара. Событие A - "первый шар белый", событие B - "второй шар черный". Найдите условную вероятность P(A/B).
6. Покажите, что если события A и B независимы, то события A и $\bar{B}$ также независимы.
7. В урне 6 белых и 4 черных шара. Наудачу вынимаются 3 шара. Какова вероятность того, что все они белые?
8. На двух карточках написана буква "А", а на трех - буква "В" и на четырех -буква "З". Последовательно вынимаются и кладутся слева направо четыре карточки. Какова вероятность того, что получится слово "ВАЗА"?
9. Вероятность попадания в цель одного снаряда 0.3. Какова вероятность того, что из четырех снарядов попадет в цель хотя бы один?

10. Какова вероятность того, что дни рождения 10 человек, родившихся в апреле, будут различны?

11. Сколько раз нужно подбросить симметричную монету, чтобы с вероятностью не менее 0.99 хотя бы раз появился "герб"?

12. Сколько шаров нужно вынуть из урны, содержащей 2 белых и 18 черных шаров, чтобы среди них с вероятностью не менее I/2 оказался хотя бы один белый шар ?

13. За круглый стол случайным образом садятся n человек. Какова вероятность того, что лица A,B и C сядут рядом, причем A - в середине ?

14. В шкафу находится 12 пар ботинок. Наудачу вынимают 5 ботинок.Какова вероятность того, что из них можно составить хотя бы одну пару ?

15. Вероятность попадания частицы в счетчик Гейгера за "малое" Δt время равна $\lambda\ \Delta t$ и не зависит от того, сколько частиц и когда попало в счетчик за пределами этого временного интервала.Найдите вероятность того, что за время t в счетчик Гейгера не попадет ни одной частицы ?

16. Молекула газа имеет радиус R. В единице обьема содержится в среднем V молекул газа. Какова вероятность того, что летящий с большой скоростью электрон радиусом r пролетит в газе расстояние L без соударений ?

$\left(1-\frac{4}{3}\pi R^3\cdot V\right)^{L/r}$

17. Три завода выпускают одинаковые изделия.Вероятность изделию первого завода оказаться бракованным равна 0.3, изделию второго завода равна 0.2 и третьего завода - 0.1.Взято по одному изделию каждого завода. Какова вероятность того,что среди них окажется не менее двух бракованных ?

18. В первой урне содержится 5 белых и 2 черных шара, во второй урне - 4 белых и 3 черных. Из первой урны взято 2 шара, из второй - I. Какова вероятночть того, что среди них будет 2 черных ?

19. В квадрат с вершинами в точках (0,0),(0,I),(I,0),(I,I) вписаны два круга радиусом I/3, с центрами в точках (I/3,I/2) и (2/3,I/2). В квадрат бросается точка. Какова вероятность того, что она попадет хотя бы в один круг ?

20. В урне 4 белых и 5 черных шаров. Два игрока по очереди выбирают по одному шару. Выигрывает тот, кто первым выбирает

белый шар. Какова вероятность того, что выигрывает игрок, начинающий игру ?

21. 5 человек повесили на вешалку 5 одинаковых плащей. Какова вероятность того,что,уходя, хотя бы один из них наденет свой плащ, если каждый берет плащ наугад ?

22. На рис.2 приведена электрическая схема, состоящая из 5 элементов, пропускающих электрический ток. Каждый элемент выходит из строя независимо от остальных. Вероятность выхода из строя 1-го элемента P_1, $P_1=P_5=0.0I$, $P_4=0.I5$. Найдите вероятность того, что цепь пропускает электрический ток.

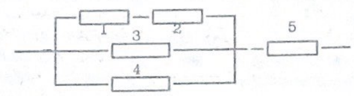

Рис.2

23. В семье двое детей. Считая, что рождение мальчика и девочки -равновероятные и независимые события, вычислить вероятность того, что в семье есть мальчик.

24. На шахматную доску наудачу ставятся два слона- черный и белый.Какова вероятность того, что слоны не побьют друг друга, при условии, что белый слон попадет на одно из крайних полей доски?

25. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Зачет считается сданным, если студент ответит не менее,чем на три из четырех поставленных в билете вопросов. Какова вероятность того, что студент сдаст зачет?

26. Брошены две игральные кости. Предполагается, что все комбинации выпавших очков равновероятны. Найти условную вероятность того, что выпали две пятерки, если известно, что сумма выпавших очков делится на 5.

27. На остановку "Госуниверситет" последовательно прибывают троллейбусы маршрутов I,2,5 и автобус маршрута 4.Номера последовательно прибывающего общественного транспорта получаются по схеме равновероятностного выбора с возвращением из урны,содержащей шары с номерами I,2,4,5. Найти вероятность того, что до появления автобуса ни на одном из троллейбусных

маршрутов не пройдет более одного транспортного средства. Какое должно быть минимальное количество троллейбусных маршрутов, чтобы эта вероятность была меньше I/2 ?

28. Среди I7 студентов группы, из которых 8 девушек, разыгрывается 7 билетов. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся 4 девушки ?
29. Сборщик имеет в своем распоряжении I0 деталей, мало отличающихся друг от друга. Из них четыре - первого вида и по две - второго, третьего и четвертого видов. Какова вероятность того, что среди шести взятых одновременно деталей три окажутся деталями первого вида, две - второго и одна - третьего ?
30. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и поэтому набирает ее наудачу. Определить вероятность того, что ему придется звонить не более, чем в три места. Как изменится вероятность, если абонент помнит, что последняя цифра нечетная ?

§ 4. Формулы полной вероятности и Байеса

1. В первой урне содержится 4 белых и 2 черных шара, во второй - 5 белых и 4 черных, в третьей - I белый и 2 черных. Наудачу выбирается урна и из нее выбирается шар. Какова вероятность того, что шар - белый ?
2. Лица А и В стоят в очереди, в которой еще 6 человек. Какова вероятность того, что между А и В ровно один человек ?
3. На шахматную доску наудачу ставят два разноцветных коня. Какова вероятность того, что они не будут бить друг друга ?
4. Студент из 25 билетов знает 20. Каким по счету он должен идти на экзамен, чтобы вероятность вытащить "плохой" билет была минимальной ?
5. На рис.3 приведена схема дорог Волшебного царства. В городах, обозначенных "ЗВ", живут злые волшебники, в городе "ДВ"- добрый волшебник. Алиса отправилась из пункта 0 на поиски доброго волшебника. На каждой развилке Алиса выбирает путь случайным образом (в том числе она может вернуться обратно). Какова вероятность того, что Алиса попадет к доброму волшебнику ?

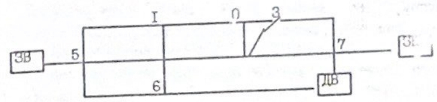

Рис.3

6. Какова вероятность того, что за время t в счетчик Гейгера (см. задачу I5 §3) попадет ровно k частиц ?
7. В ящике лежат 20 теннисных мячей, в том числе I5 новых и 5 бывших в игре мячей. Для игры наудачу выбирают два мяча и после игры возвращают обратно. Затем для другой игры также наудачу выбираются еще два мяча. Какова вероятность того, что вторая игра будет производиться новыми мячами ?
8. Во время испытаний было установлено, что вероятность безотказного срабатывания реле при отсутствии помех равна 0.99, при перегреве - 0.95, при вибрации - 0.9, при вибрации и перегреве - 0.8. Найти вероятность отказа этого реле при работе в жарких странах (вероятность перегрева равна 0.2, вероятность вибрации - 0.I), предполагая перегрев и вибрацию независимыми событиями.
9. В первой урне находятся 2 белых и 8 черных шаров, во второй - 2 черных и 4 белых шара. Из каждой урны по схеме случайного выбора без возвращения удалили по одному шару, а оставшиеся шары ссыпали в третью урну. Найти вероятность того, что шар, вынутый из третьей урны, окажется белым ?
10. В пункте проката имеются I0 телевизоров, для которых вероятность исправной работы в течение месяца равна 0.9, и 55 телевизоров с аналогичной вероятностью, равной 0.95. Найти вероятность того, что два телевизора, взятые наудачу в пункте проката, будут работать исправно в течение месяца.
11. При переливании крови надо учитывать группы крови донора и больного. Человеку, имеющему четвертую группу крови, можно переливать кровь любой группы; человеку со второй и третьей группами крови можно перелить кровь либо той же группы крови, либо первой; человеку с первой группой крови можно перелить только кровь первой группы. Среди населения 33.7% имеют

первую группу, 37.5% - вторую, 20.9% - третью, 7.9% -четвертую группы крови. Найти вероятность того, что случайно взятому больному можно перелить кровь случайно взятого донора.

12. Имеется ящик, в котором содержится 20 коробок по 10 карандашей. При вскрытии ящика 4 коробки уронили и графиты карандашей в них разбились. Все 20 коробок были сданы на склад, откуда потом изъяли 2 коробки и карандаши раздали учащимся. Найти вероятность того, что взятый наугад один из этих карандашей имеет разбитый графит.

13. Характеристика материала, взятого для изготовления продукции, с вероятностями 0.09, 0.16, 0.25, 0.25, 0.16, 0.09 может находиться в шести различных интервалах. В зависимости от свойств материала вероятности получения первосортной продукции равны соответственно 0.2, 0.3, 0.4, 0.4, 0.3, 0.2. Определить вероятность получения первосортной продукции.

14. Брак продукции завода вследствие дефекта А составляет 5%, причем среди забракованной по признаку А продукции в 10% случаев встречается дефект В, а в продукции, свободной от дефекта А, дефект В встречается в 1% случаев. Найти вероятность не встретить дефект В во всей продукции завода.

15. В продажу поступают телевизоры трех заводов. Продукция первого завода содержит 20% телевизоров со скрытым дефектом, второго - 10% и третьего - 5%. Какова вероятность приобрести исправный телевизор, если в магазин поступило 30% телевизоров с первого завода, 20% - со второго и 50% - с третьего ?

16. В первой урне находится 2 белых и 4 черных шара, во второй- 3 белых и 1 черный. Из первой урны во вторую переложили один шар. Затем из второй урны вынули один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар оказался черным ? Какова вероятность того, что из первой урны во вторую переложили белый шар?

17. Три завода изготавливают одинаковые изделия. Первый завод производит 20% общей продукции, второй - 30% и третий - 50%. Вероятность изделию первого завода оказаться бракованным - 0.2, изделию второго завода - 0.1, изделию третьего завода - 0.05. Какова вероятность того, что наудачу выбранное изделие окажется бракованным? Какова вероятность того, что оно изготовлено третьим заводом?

18. Известно, что 5% всех мужчин и 0.25% женщин - дальтоники. Наудачу выбранный человек страдает дальтонизмом. Считая, что мужчин и женщин одинаковое количество, определите вероятность того, что дальтоник - мужчина.

19. После того, как три охотника выстрелили в зайца, оказалось, что заяц убит одной пулей. Считая, что вероятность попадания для первого охотника 0.8, для второго - 0.5 и для третьего - 0.25, найдите вероятность того, что в зайца попал первый охотник.

20. Из урны, содержащей 2 белых и 3 черных шара, вынули 2 шара. Затем из оставшихся трех шаров вынули еще один, который оказался белым. Найдите вероятность того, что в первый раз вынули разноцветные шары.

21. Среди деталей, изготавливаемых станком, 80% - годных и 20%- бракованных. Система контроля признает годное изделие стандартным с вероятностью 0.9 и бракованное - с вероятностью 0.05. Какова вероятность того, что наудачу выбранное изделие признано стандартным? Изделие признано стандартным. Какова вероятность того, что оно годное?

22. В группе 20 студентов, из них 5 "отличников", 9 "хорошистов", 6 "троечников". На экзамене "отличник" с вероятностью 0.8 получает "5" и с вероятностью 0.2 - "4"; "хорошист" - с вероятностью 0.3 - "5" и с вероятностью 0.6 - "4"; "троечник" - с вероятностью 0.1 - "5", с вероятностью 0.3 - "4" и с вероятностью 0.5 - "3". Какова вероятность того, что наудачу выбранный студент получит на экзамене "5"? Студент получил на экзамене "5". Какова вероятность того, что на предыдущем экзамене он получил "3"?

23. Из 28 костей домино выбирают две. Какова вероятность того, что первую кость можно приставить ко второй ? Первую кость можно приставить ко второй. Какова вероятность того, что одна из этих костей - "дупль" ("0-0", "1-1", "2-2" и т.д.)?

24. Билет, состоящий из трех цифр, считается "счастливым", если сумма первых двух цифр совпадает с суммой последних двух цифр. Какова вероятность того, что билет окажется "счастливым"? Наудачу выбранный билет оказался "счастливым". Какова вероятность того, что сумма его цифр делится на 7?

25. Прибор состоит из двух последовательно включенных узлов. Надежность (вероятность безотказной работы в течение времени T) первого узла равна 0.9, второго - 0.8. За время испытания прибора в течение времени T зарегистрирован отказ прибора. Найти вероятность следующих событий:
A_1=(отказал только первый узел), A_2=(отказали оба узла).
26. Три стрелка производят по одному выстрелу в одну и ту же мишень. Вероятности попадания в мишень при одном выстреле для каждого из стрелков соответственно равны 0.9, 0.8, 0.7. Какова вероятность того, что в мишени окажется две пробоины? В мишени оказалось две пробоины. Какова вероятность того, что второй стрелок промахнулся?
27. В стройотряде 70% первокурсников и 30% студентов второго курса. Среди первокурсников 10% девушек, а среди студентов второго курса 5% девушек. Какова вероятность того, что наудачу выбранный стройотрядовец окажется девушкой? Все девушки по очереди дежурят на кухне. Найти вероятность того, что в случайно выбранный день на кухне дежурит первокурсница.
28. В урне находятся 3 черных и 2 белых шара. Первый игрок по схеме выбора без возвращения извлекает три шара. Обратно он возвращает черный шар, если среди вытянутых шаров больше было черных; в противном случае возвращается белый шар. Второй игрок после этого извлекает один шар и по его цвету должен угадывать число белых шаров среди трех шаров, вытянутых первым игроком. Какова вероятность того, что второй игрок вынул белый шар? Какова вероятность того, что у первого игрока было: а) 0 белых, б) 1 белый, в) 2 белых шара?
29. Имеется 5 урн. В первой, второй и третьей урнах находится по 2 белых и 3 черных шара, в четвертой и пятой урнах - по 1 белому и 1 черному шару. Случайно выбирается урна и из нее извлекается шар. Какова вероятность того, что выбранный шар белый? Выбранный шар белый. Какова условная вероятность того, что выбрана четвертая или пятая урна?
30. Билет состоит из 2 теоретических вопросов и задачи. Студент знает теоретические вопросы в 10 билетах на "отлично", в 10 - на "хорошо" и в 5 - на "удовлетворительно". Решение задачи повышает оценку на один балл. Студент может решить только 75% всех задач. Какова вероятность того, что студент получит "хорошо"?

§ 5. Схема Бернулли. Биномиальное и полимиальное распределения

1. В московском гастрономе "Новоарбатском" посетителям за 6 руб предлагают 6 календариков с нарисованными на них цифрами от 1 до 6. Если участник лотереи набирает в сумме 6 или 36 очков, он получает максимальный выигрыш. Профессор математики Лев Иванович Трошин из Московского экономико- статистического института после сложных рассчетов определил, что вероятность получить выигрыш примерно равна одной миллионной ("Комсомольская правда", 17 октября 1990г.). Прав ли он?
2. Какова вероятность того, что при четырехкратном подбрасывании монеты выпадает, по крайней мере, один "герб"?
3. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0.7. Сколько нужно произвести выстрелов, чтобы вероятность хотя бы одного попадания в цель была не менее 0.999?
4. Стрелок производит 6 выстрелов по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле 0.8. Какова вероятность того, что стрелок попадет по мишени ровно 5 раз?
5. Из пяти урн, в каждой из которых содержится по 2 белых и 3 черных шара, выбирают по одному шару. Какова вероятность того, что среди них будет ровно 4 черных?
6. Вероятность рождения мальчика 0.515, девочки - 0.485. Какова вероятность того, что среди 8 лежащих в палате роддома новорожденных девочек будет больше, чем мальчиков?
7. В некоторой местности в июне дождь бывает в среднем один раз в пять дней. Какова вероятность того, что в этом месяце будет не менее четырех дождливых дней?
8. Что вероятнее выиграть у равносильного соперника: 3 партии из 5 или 4 партии из 8?
9. Что вероятнее: при двух бросаниях одной игральной кости выбросить хотя бы одну единицу или при 13 бросаниях двух костей хотя бы раз получить две единицы?

10. Сколько раз нужно подбросить монету, чтобы вероятность выпадения, по крайней мере, одного "герба" была не меньше, чем вероятность выпадения, по крайней мере, двух "гербов" при 10 подбрасываниях?
11. (Задача Банаха). Некий курящий математик носит с собой 2 коробки спичек. Каждый раз, когда он хочет достать спичку, он выбирает наугад одну из коробок. Найдите вероятность того, что, когда математик вынет в первый раз пустую коробку, в другой коробке окажется m спичек ($m = 0,1,\ldots,n$; n - число спичек, бывших первоначально в каждой коробке).
12. Студент "принципиально" учит 50% всех билетов. Какова вероятность того, что хотя бы на трех из 6 экзаменов он вытянет билет, который знает?
13. Игрок выигрывает, если в результате подбрасывания двух игральных костей набирает в сумме число больше или равное 10. Найти вероятность того, что в результате 5 игр он хотя бы один раз выиграет.
14. Определить вероятность того, что число автомобилей из 10 встретившихся, номера которых содержат только по две одинаковых цифры, колеблется от 3 до 5.
15. Сколько раз нужно подбросить пару игральных костей, чтобы вероятность получить хотя бы два раза равные цифры на обеих костях была больше, чем 0.5?
16. Из шести урн, каждая из которых содержит 5 белых, 3 красных и 2 черных шара, вынимается по одному шару. Какова вероятность того, что среди них будет 3 белых, 2 красных и 1 черный?
17. В некотором городе проживают 40% блондинов, 50% брюнетов и 10% шатенов. Какова вероятность того, что из 7 жителей города 4 окажутся блондинами, 2 - брюнетами и 1 - шатеном?
18. В лифт пятиэтажного дома на первом этаже садится 4 человека. Считая, что каждый из них с равной вероятностью выйдет на любом из остальных этажей, найдите вероятность того, что все они выйдут на одном этаже; 2 человека на третьем этаже, один на четвертом и один на пятом.
19. Завод выпускает 40% изделий высшего сорта, 35% - первого сорта и 25% - второго сорта. Какова вероятность того, что из пяти взятых изделий все будут высшего и первого сорта и, по

крайней мере, среди них будет два изделия высшего сорта?
20. Какова вероятность того, что из 10 выбранных наудачу человек у четырех день рождения будет в первом квартале, у трех - во втором, у двух - в третьем и у одного - в четвертом?

§ 6. Предельные теоремы для схемы Бернулли

1. Вероятность искажения одного символа при передаче сообщения 0.001. Сообщение считается принятым, если в нем отсутствуют искажения. Какова вероятность того, что будет принято сообщение, состоящее из 50 слов по 50 символов?
2. На факультете обучается 730 студентов. Считая, что вероятность родиться в любой день года одинакова, определите вероятность того, что ровно 4 студента факультета будут отмечать 1 января свой день рождения.
3. Среди выпускаемых заводом изделий 99% высшего сорта. Какова вероятность того, что из 350 изделий завода ровно 348 будут высшего сорта?
4. Телефонная станция обслуживает 1000 абонентов. Вероятность того, что в течение минуты какому-либо абоненту понадобится соединение, равна 0.001. Какова вероятность того, что за минуту на телефонную станцию поступит не менее трех вызовов?
5. При наборе книги вероятность правильного набора знака равна 0.9999. Какова вероятность того, что при наборе книги из 50000 знаков правильно будет набрано не менее 49995 знаков?
6. Радиоактивное вещество выпускает одну α-частицу в среднем за 2 секунды. Какова вероятность того, что за одну секунду вещество испустит более двух частиц?
7. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в минуту, равно 120. Найти вероятности следующих событий:
   A=(за 2 с на АТС не поступает ни одного вызова),
   B=(за 2 с на АТС поступит менее двух вызовов),
   C=(за 1 с на АТС поступит хотя бы один вызов),
   D=(за 2 с на АТС поступит не менее 6 вызовов).
8. В медицинском институте учатся 70% девушек. Какова вероят-

ность того, что из 200 взятых студентов-медиков будет ровно I50 девушек?

9. 40% автомобилей, следующих по шоссе, поворачивают у развилки направо и 60% - налево. Какова вероятность того, что из 400 автомобилей, проследовавших по шоссе, ровно 250 повернули налево?

10. Какова вероятность того, что при 600 бросаниях игральной кости число выпавших "шестерок" будет заключено в пределах от 90 до I20?

11. Известно, что в среднем 5% студентов носит очки. Какова вероятность того, что из 200 студентов, сидящих в аудитории, окажется не менее I0%, носящих очки?

12. Вероятность попадания в цель при одном выстреле 0.8. Какова вероятность того, что при 400 выстрелах произойдет не менее 300 попаданий?

13. Сколько раз нужно подбросить симметричную монету,чтобы наблюдаемая частота выпадения "герба" отличалась от I/2 не менее чем на 0.05 с вероятностью не более 0.0I?

14. Компьютер содержит 200 микросхем. Вероятность того, что поставляемая заводом микросхема окажется дефектной,равна 0.I. Сколько нужно приобрести микросхем, чтобы с вероятностью не менее 0.9 из них можно было бы собрать работающий компьютер?

15. В поселке живет 350 человек.Каждый из них один раз в неделю выезжает в город за покупками на автобусе,который ходит один раз в день. Считая, что каждый житель выбирает день поездки случайным образом, определите, какой вместимости должен быть автобус,чтобы он в среднем переполнялся не чаще одного раза в месяц.

§7. Дискретная случайная величина

В задачах 1-20 необходимо построить ряд распределений и функцию распределения случайной величины ξ; найти математическое ожидание $M\xi$; дисперсию $D\xi$; среднеквадратическое отклонение $\sigma\xi$; определить или доказать отсутствие начальных и

центральных моментов третьего и четвертого порядков, коэффициентов симметрии, эксцесса, моды и медианы; построить график функции распределения и определить ее в точках множества N.

1. Монета подбрасывается 4 раза.Опишите пространство элементарных исходов. Определите, какие значения вероятностей нужно поставить в соответствие каждому элементарному исходу, чтобы получить случайную величину ξ - суммарное число выпавших "гербов".
N={-1,1.5,2,3.8,5}

2. Опыт состоит в бросании двух игральных костей.Опишите пространство элементарных исходов и определите,какое значение для каждого элементарного исхода примет случайная величина ξ - суммарное число выпавших очков.
N={-1.5,0,2.5,4,7.6,12,13.4}

3. При одном выстреле по мишени стрелок попадает в "десятку" с вероятностью 0.25; "девятку" - 0.2; "восьмерку" - 0.I5; "семерку" - 0.I; "шестерку", "пятерку", "четверку", "тройку" и "двойку" - 0.05; "единицу" - 0.03. Случайная величина ξ равна числу выбитых очков.
N={-2,0.5.3,8.2,10.4}

4. Вероятность изделию оказаться бракованным равна 0.2. Случайная величина ξ равна числу бракованных деталей в партии из 6 изделий.
N={-5,1.3,4,6.5}

5. Из урны, содержащей 6 белых и 4 черных шара, вынули 5 шаров. Случайная величина ξ равна числу выпавших белых шаров.
N={0.7,1.2,3,5,6.1}

6. Студенту во время сессии предстоит сдать 4 экзамена. Вероятность того, что он сдаст первый экзамен, равна 0.9. Для остальных экзаменов эти вероятности равны соответственно 0.8, 0.9,0.7. Случайная величина ξ равна числу сданных экзаменов.
N={-1,2,3.2,5.1}

7. В городе 5 магазинов.Вероятность того,что в магазине имеется интересующая покупателя вещь, равна 0.4.Случайная величина ξ равна числу магазинов, которые посетит покупатель.
N={-1.5,0,2.1,3.3,5}

8. Стрелок ведет стрельбу по мишени до первого попадания,имея 4 патрона.Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0.6. Случайная величина ξ равна числу неизрасходованных патронов.
N={-2,1.5,2.3,4.5,6}

9. На пути движения автомобиля 6 светофоров, каждый из них либо разрешает, либо запрещает движение автомобиля с вероятностью 0.5. Случайная величина ξ равна числу светофоров, пройденных автомобилем до первой остановки.
N={-2,-1,1.5,2.3,4,6,6.5}

10. При бросании трех игральных костей игрок выигрывает:18 рублей, если на всех костях выпадает по 6 очков;1 руб. 40 коп., если на двух костях выпадает по 6 очков, и 20 коп., если только на одной кости 6 очков.Случайная величина ξ равна величине выигрыша.
N={-5,18,130,250,19700}

11. Имеется 5 ключей, из которых только один подходит к замку. Случайная величина ξ равна числу опробованных при открывании замка ключей (проверенный ключ в последующих испытаниях не участвует).
N={-1,0,2.1,4,5.5}

12. Случайная величина ξ равна корню квадратному из числа очков, выпавших при бросании игральной кости.
N={-1.5,-0.8,0.1,0.3,1.5,4}

13. Один раз брошены три одинаковые игральные кости. Случайная величина ξ принимает значение 1, если хотя бы на одной кости выпала цифра 6; принимает значение 0,если шестерка не выпала ни на одной грани, но хотя бы на одной из граней появилась цифра 5; и принимает значение -1 в остальных случаях.
N={-1.5,-0.5,0,0.5,1.5}

14. В шестиламповом радиоприемнике (все лампы различные) перегорела одна лампа. Наудачу выбранную лампу заменяют заведомо годной из запасного комплекта, после чего работа приемника проверяется.Случайная величина ξ равна числу замененных ламп.
N={-0.9,0.1,2,3.3,6.2}

15. Рабочий обслуживает 4 станка.Вероятность того,что в течение часа станок не потребует внимания рабочего,равна для первого

станка 0.7, для второго - 0.75, для третьего -0.8 и для четвертого - 0.9. Случайная величина ξ равна числу станков, которые не потребуют внимания рабочего в течение часа.
N={-0.5,0.5,1.5,3,4.5,9}

16. Монета подбрасывается до первого выпадания "герба". Случайная величина ξ равна числу произведенных подбрасываний.
N={-1,5,10,12.5,20}

17. Пусть n - число выпаданий "герба" при трехкратном подбрасывании монеты.Случайная величина ξ удовлетворяет соотношению

$$\xi=n^2-5.$$

N={-4,-2.5,0.25,6}

18. Дискретная случайная величина η имеет ряд распределений, представленный в табл.I. Случайная величича ξ удовлетворяет соотношению: $\xi = \sin \eta$.
N={-1,П/4,2,3.5,8}

Таблица 1

η	0	П/4	П/3	3П/4	П	5П/4	3П/2
p	0.1	0.15	0.05	0.2	0.25	0.15	0.1

19. Дискретная случайная величина η имеет ряд распределений, представленный в табл.2. Случайная величина ξ удовлетворяет соотношению: $\xi = 2\eta^2-3$.
N={-5,-1.5,0,1.5,5,6.5}

Таблица 2

η	-2	-1	0	1	2
p	0.15	0.2	0.25	0.3	0.1

20. Вероятность изготовления нестандартной детали равна 0.I. Из партии контролер берет деталь и проверяет ее качество. Если она оказалась нестандартной,дальнейшие испытания прекращаются,а партия задерживается.Если деталь оказалась стандартной, то контролер берет следующую и т.д.Всего он проверяет не более пяти деталей. Случайная величина ξ равна числу проверенных стандартных деталей.
N={-1,-0.1,0.1,0.9,4,6}

21. Неотрицательная целочисленная величина ξ распределена по

закону Пуассона

$$p_k = P\{\xi=k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \text{ где } k=0,1,\ldots;\ \lambda > 0.$$

Найдите $M\xi$, $D\xi$.

22. Неотрицательная целочисленная случайная величина ξ имеет распределение Паскаля.

$$p_k = P\{\xi=k\} = C^k_{m+k-1} p^m (1-p)^k, \text{ где}$$

$$k=0,1,\ldots;\ m=1,2,\ldots;\ 0 < p < 1.$$

Найдите $M\xi$, $D\xi$.

23. Разность матожидания и дисперсии числа успехов в n испытаниях Бернулли (с вероятностью успеха $p=1/6$) равна 1. Найти число n.

24. В тираже "Спортлото 5 из 36" за три угаданных номера платят 3 рубля, за 4 - 50 рублей и за 5 - 3000 рублей. Считая, что стоимость карточки "Спортлото" 30 коп., определите ряд распределения случайной величины ξ выигрыша в этом тираже. Найдите $M\xi$.

§ 8. Непрерывная случайная величина и ее числовые характеристики

В задачах 1-25 необходимо определить или доказать отсутствие математического ожидания, дисперсии, начальных и центральных моментов третьего и четвертого порядков, коэффициентов асимметрии, эксцесса, моды и медианы; построить функции $f(x)$ и $F(x)$.

1. На отрезок (-1,3) наудачу бросается точка. Определите плотность распределения $f(x)$ и функцию распределения $F(x)$ случайной величины ξ - координаты места падения точки на отрезок.
$X_1=0$, $X_2=1.5$, $X_3=-0.5$.

2. В круг радиусом 2 наудачу бросается точка. Случайная величина ξ - расстояние от места падения точки до центра круга. Найдите плотность распределения $f(x)$ и функцию распределения $F(x)$.
$X_1=1$, $X_2=1.5$, $X_3=0.5$.

3. Случайная величина подчиняется закону арксинуса с плотностью распределения вероятностей $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } |x| \geq a \\ 1/\pi\sqrt{a^2 - x^2}, & \text{если } |x| < a \end{cases}$$

Найти $F(x)$.
$X_1=a/2$, $X_2=2a/3$, $X_3=a/4$.

4. Случайная величина x распределена по закону Лапласа с параметрами m, R и $\sigma > 0$ и плотностью распределения вероятностей, заданной формулой:

$$f(x) = 1/\sigma\sqrt{2}\, e^{-|x-m|\sqrt{2}/\sigma}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Найти $F(x)$.
$X_1=m/2$, $X_2=3m/2$, $X_3=m/3$.

5. Случайная величина x имеет плотность распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 1 \\ A/x^5, & \text{если } x > 1 \end{cases}$$

Найти A и $F(x)$.
$X_1=0.5$, $X_2=1.5$, $X_3=2$.

6. Случайная величина x имеет плотность распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0 \\ A(4x-x^3), & \text{если } 0 < x \leq 2 \\ 0, & \text{если } x > 2 \end{cases}$$

Найти A и $F(x)$.
$X_1=-1$, $X_2=1$, $X_3=3$.

7. Случайная величина x имеет плотность распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } |x| \geq 1 \\ A(1-|x|), & \text{если } |x| < 1 \end{cases}$$

Найти A и $F(x)$.
$X_1=0$, $X_2=1$, $X_3=-0.5$.

8. Случайная величина x имеет плотность распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 1 \\ Ax^{-3}, & \text{если } x \geq 1 \end{cases}$$

Найти A и $F(x)$.
$X_1=0$, $X_2=1$, $X_3=-0.5$.

9. Функция распределения случайной величины x задается форму-

лом.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{, если } x<-1 \\ 1/2(x^3+1) & \text{, если } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{, если } x>1 \end{cases}$$

Найти f(x).

10. Функция распределения случайной величины x задается формулой:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{, если } x < -\pi/2 \\ \cos x & \text{, если } -\pi/2 \leqslant x < 0 \\ 1 & \text{, если } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Найти f(x).

$X_1=-\pi/4$, $X_2=\pi/4$, $X_3=-\pi/3$.

11. Случайная величина x имеет плотность распределения:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{, если } x < 0 \\ A \sin x & \text{, если } 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ 0 & \text{, если } x > \pi \end{cases}$$

Найти A и F′(x).

$X_1=\pi/4$, $X_2=2\pi/3$, $X_3=4$.

12. Функция распределения случайной величины x задается формулой:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{, если } x \leqslant 0 \\ 1-e^{-3x} & \text{, если } x > 0 \end{cases}$$

Найти f(x).

$X_1=1/3$, $X_2=2$, $X_3=5$.

13. Случайная величина x имеет плотность распределения:

$$f(x) = A\, e^{-2|x|}.$$

Найти A и F(x).

$X_1=-2$, $X_2=1$, $X_3=4$.

14. Случайная величина x имеет плотность распределения:

$$f(x) = A/(4+x^2)$$

Найти A и F(x).

$X_1=2$, $X_2=4$, $X_3=3$.

15. Случайная величина x имеет плотность распределения:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{, если } x \leqslant 0 \\ Ae^{-\lambda x} & \text{, если } x > 0 \end{cases} \text{, где } \lambda > 0.$$

Найти A и F(x).

$X_1=1$, $X_2=3$, $X_3=2$.

16. Случайная величина x имеет плотность распределения:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{, если } |x| \geqslant \pi/4 \\ A \cos 2x & \text{, если } |x| < \pi/4 \end{cases}$$

Найти A и F(x).

$X_1=0$, $X_2=\pi/2$, $X_3=\pi/3$.

17. Случайная величина x имеет плотность распределения:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{, если } |x| > \pi/2 \\ A \cos^2 x & \text{, если } |x| \leqslant \pi/2 \end{cases}$$

Найти A и F(x).

$X_1=-3\pi/4$, $X_2=0$, $X_3=\pi/3$.

18. Случайная величина x имеет плотность распределения:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{, если } |x| > 1 \\ A\,|x| & \text{, если } |x| \leqslant 1 \end{cases}$$

Найти A и F(x).

$X_1=0$, $X_2=1.5$, $X_3=0.5$.

19. Случайная величина x имеет плотность распределения:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{, если } x \leqslant 0 \\ Ax^2e^{-x} & \text{, если } x > 0 \end{cases}$$

Найти A и F(x).

$X_1=-1$, $X_2=1$, $X_3=0$.

20. Случайная величина x имеет плотность распределения:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{, если } x \leqslant 0 \\ Axe^{-x^2/2} & \text{, если } x > 0 \end{cases}$$

Найти A и F(x).

$X_1=-1$, $X_2=\sqrt{2}$, $X_3=1$.

21. Случайная величина x имеет плотность распределения:

$$f(x) = A|x|e^{-x^2}$$

Найти A и F(x).

$X_1=-1$, $X_2=1$, $X_3=0$.

22. Случайная величина x имеет плотность распределения:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{, если } x \leqslant 3\Pi/2 \\ A \sin x & \text{, если } 3\Pi/2 < x \leqslant 2\Pi \\ 0 & \text{, если } x > 2\Pi \end{cases}$$

Найти A и $F(x)$.

$X_1=П$, $X_2=7П/4$, $X_3=5П/4$.

23. Случайная величина x имеет плотность распределения:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{, если } |x| > 1 \\ A(1-x^2)^{1/2} & \text{, если } |x| \leqslant 1 \end{cases}$$

Найти A и $F(x)$.

$X_1=0$, $X_2=2$, $X_3=-0.5$.

24. Функция распределения случайной величины x задается формулой:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{, если } x < 0 \\ (1-\cos 3x) & \text{, если } 0 \leqslant x \leqslant П/6 \\ 1 & \text{, если } x > П/6 \end{cases}$$

Найти $f(x)$.

$X_1=0$, $X_2=П/12$, $X_3=П/18$.

25. Случайная величина x имеет плотность распределения:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{,если } |x| < 1 \\ A\ x^4 & \text{,если } |x| \geqslant 1 \end{cases}$$

Найти A и $F(x)$.

$X_1=0$, $X_2=2$, $X_3=-1$.

§9. Функции случайных величин

1. Случайная величина ξ распределена равномерно на интервале (1,3). Определите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\eta=\ln \xi$. Найдите ее плотность распределения.
2. Случайная величина ξ распределена по нормальному закону. Определите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\eta = e^{\xi}$. Найдите ее плотность распределения.
3. Случайная величина ξ имеет плотность Коши:

$$f(x)= 1/П * 1/(1+x^2), \qquad -\infty < x < \infty .$$

Найдите плотность распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\eta = \xi\ (1+\xi^2)$.

4. Случайная величина $\xi \sim (0,1)$. Определите плотности распределения случайных величин:

$\eta_1= \sigma\xi+a$; $\eta_2= e^{\eta_1}$; $\eta_3= \xi^2$.

5. Случайная величина ξ распределена равномерно на интервале $(0,\pi)$. Определите плотность распределения случайных величин: $\eta_1= \cos \xi$; $\eta_2= \cos^3\xi$.
6. Случайная величина ξ имеет плотность распределения:

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 0 & \text{, если } x < 0 \\ \lambda\ e^{-\lambda x} & \text{, если } x \geqslant 0 \end{cases} \text{, где } \lambda > 0.$$

Найдите плотность распределения случайной величины $\eta = 1/\xi$.

7. Случайная величина ξ имеет функцию распределения $F_{\xi}(x)$ и плотность распределения $f_{\xi}(x)=F_{\xi}(x)$. Найдите функцию распределения и плотность распределения случайной величины $\eta= |\xi|$.
8. Случайная величина ξ распределена равномерно на отрезке (-3,1). Определите плотность распределения и функцию распределения случайной величины $\eta=\xi^2-4$.
9. На плоскости OXY через точку (a,0) (a>0) наудачу проводится прямая линия. Определите плотность распределения вероятностей ординаты Y точки пересечения прямой с осью OY.
10. Через точку, наудачу выбранную на окружности радиусом 1 с центром в начале координат, проводится касательная к окружности. Найти плотность распределения вероятностей длины отрезка касательной, заключенного между осями координат.
11. Случайная величина x распределена равномерно на интервале $(-T/2,T/2)$. Найти плотность распределения вероятностей функции $y=a \sin (2\pi x/T)$.
12. Случайная величина x подчиняется закону Коши с параметрами $c \in R$ и $a>0$, с плотностью распределения веростностей:

$f_x(x) = a/\pi * 1/((x-c)^2+a^2)$.

Найти плотность распределения вероятностей функции

$y= 1/\pi\ (3x-2)$.

13. Случайная величина x подчиняется закону Коши (см.задачу 12) с параметрами $c=0$ и $a=1$.

Найти плотность распределения вероятностей функции

$y= (\operatorname{arctg} x)/\pi$.

14. Случайная величина x подчиняется закону распределения Парато с параметрами $a>0$, $x>0$,и ее функция распределения вероятностей имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{, если } x \leqslant x_o, \\ 1-\left(\frac{x_o}{x}\right)^a & \text{, если } x > x_o. \end{cases}$$

Указать закон распределения случайной величины $y = \ln(x/x_o)$.

15. Случайная величина x равномерно распределена в интервале (0,1) и связана с y функциональной зависимостью $\operatorname{tg} \frac{\pi y}{2} = e^x$. Найти плотность распределения случайной величины y.

Составители:

Евсей Викторович Морозов,

Александр Владимирович Печенкин,

Александр Александрович Рогов,

Анатолий Сергеевич Фомин

Т Е О Р И Я   В Е Р О Я Т Н О С Т Е Й

Сборник упражнений для студентов специальности "математика"

Редактор Т.Н.Музалева

Подписано к печати 24.09.92. Формат 60×84 1/16.
Бумага газетная. Офсетная печать. 9 усл.кр.-отт.
1,8 уч.-изд.л. Тираж 300 экз. Изд. №84. "С".

Издательство Петрозаводского государственного университета

Петрозаводск, пр. Ленина, 33